MATEMÁTICAS II

Selectividad 2018

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

Textos Marea Verde

A la vista de la polémica que ha suscitado el examen de Matemáticas II de Valencia ha surgido la idea de hacer dos libros nuevos de Textos Marea Verde, con los exámenes resueltos de 2019 de todas las comunidades autónomas.

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

Textos Marea Verde

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones: Tienes que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

OPCIÓN A

1º) Halla los coeficientes a, b, c sabiendo que la función $f: R \to R$ definida por la expresión $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es un extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto $P(1,\ 1)$.

Por pasar por $P(1,\ 1)$ es $f(1) = 1$:

$$f(1) = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1;\ \ a + b + c = 0. \quad (1)$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b. \qquad f''(x) = 6x + 2a.$$

Tratándose de una función polinómica y si su derivada se anula para $x = 1$ y no es un extremo relativo, tiene que ser, necesariamente, un punto de inflexión, es decir: que para $x = 1$ se anulan tanto la primera como la segunda derivada:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0;\ \ 2a + b = -3. \quad (2)$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 + 2a = 0;\ \ 3 + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -3}.$$

Sustituyendo el valor de a obtenido en la expresión (2):

$$2 \cdot (-3) + b = -3;\ \ -6 + b = -3 \Rightarrow \underline{b = 3}.$$

Sustituyendo en (1) los valores de a y b obtenidos:

$a + b + c = 0 \Rightarrow -3 + 3 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}.$

****

2º) Considera las funciones f y $g: R \rightarrow R$ dadas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = \left|x^2 - 2x\right|$.

a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas f y g.

----

a)

La función $g(x) = \left|x^2 - 2x\right|$ puede redefinirse de la forma siguiente:

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x \; si \; x \in [0,\ 2] \\ x^2 - 2x \; si \; x \in (-\infty,\ 0) \cup (2,\ +\infty) \end{cases}.$$

Los puntos de corte de las dos funciones son los siguientes:

Para $x \in (-\infty,\ 0) \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 2x;\ \ 2x^2 - 8x = 0;$

$x^2 - 4x = 0;\ \ x(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \notin (-\infty,\ 0);\ \ x_2 = 4 \notin (-\infty,\ 0).$

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ no se cortan en el intervalo $(-\infty,\ 0)$.

Para $x \in [0,\ 2] \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow 6x - x^2 = -x^2 + 2x;\ \ 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow O(0,\ 0).$

Para $x \in (2,\ +\infty) \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 2x;\ \ 2x^2 - 8x = 0;$

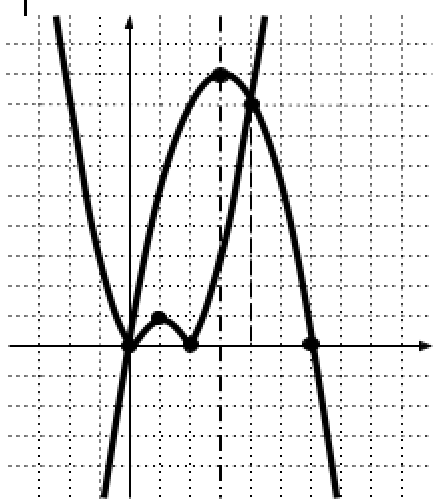
$x^2 - 4x = 0;\ \ x(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \notin (-\infty,\ 0);\ \ x_2 = 4 \Rightarrow A(4,\ 8).$

El punto máximo de la función $g(x) = \left|x^2 - 2x\right|$ se encuentra en el intervalo $[0,\ 2]$ y es el siguiente:

$g'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow V_1(1,\ 1).$

El punto mínimo de la función $f(x) = 6x - x^2$ es el siguiente:

$f'(x) = 6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow V_2(3,\ 9).$



La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que se indica en la figura adjunta, donde también se indica sombreada la superficie a calcular en al apartado siguiente.

b)

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_2^4 [f(x) - g(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 \left[\left(6x - x^2\right) - \left(-x^2 + 2x\right)\right] \cdot dx + \int_2^4 \left[\left(6x - x^2\right) - \left(x^2 - 2x\right)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 \left(6x - x^2 + x^2 - 2x\right) \cdot dx + \int_2^4 \left(6x - x^2 - x^2 + 2x\right) \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 4x \cdot dx + \int_2^4 \left(-2x^2 + 8x\right) \cdot dx = 4 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2}\right]_2^4 =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{4}{2} - 0\right) + \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2\right]_2^4 = 8 + \left(-\frac{2 \cdot 4^3}{3} + 4 \cdot 4^2\right) - \left(-\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 4 \cdot 2^2\right) =$$

$$= 8 - \frac{128}{3} + 64 + \frac{16}{3} - 16 = 56 - \frac{112}{3} = \frac{168 - 112}{3} = \frac{56}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{56}{3}\, u^2 \cong 18,67\, u^2.}$$

****

3º) Considera el sistema de ecuaciones $\{x + 2y + (m + 3)z = 3 \quad x + y + z = 3m \quad 2x + 4y + 3(m + 1)z = 8$:

a) Discútelo según los valores del parámetro m.

b) Resuelve el sistema para $m =- 2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1\ 2\ m + 3\ 1\ 1\ 1\ 2\ 4\ 3m + 3\ )$ y $A' = (1\ 2\ m + 3\ 1\ 1\ 1\ 2\ 4\ 3m + 3 \quad 3\ 3m\ 8\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$|A| = |1\ 2\ m + 3\ 1\ 1\ 1\ 2\ 4\ 3m + 3\ | =$

$= 3m + 3 + 4(m + 3) + 4 - 2(m + 3) - 4 - 6m - 6 =- 3m - 3 + 2(m + 3) =$

$=- 3m - 3 + 2m + 6 =- m + 3 = 0 \Rightarrow m = 3.$

$\underline{Para\ m \neq 3 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A^{'} = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D}$.

$Para\ m = 1 \Rightarrow A^{'} = (1\ 1\ 1\ 1\ - 1\ 1\ - 1\ 1\ - 1 \quad 1\ 1\ 1\ ) \Rightarrow Rang\ A^{'} \Rightarrow \left\{C_1, C_2, C_4\right\}$

$\Rightarrow |1\ 1\ 1\ 1\ - 1\ 1\ - 1\ 1\ 1\ | =- 1 + 1 - 1 - 1 - 1 - 1 =- 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M^{'} = 3$
.

$\underline{Para\ m = 1 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A^{'} = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

b)

Para $m =- 2$ el sistema es $\{x + 2y + z = 3 \quad x + y + z =- 6 \quad 2x + 4y - 3z = 8$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$x = \frac{|3\ 2\ 1\ -6\ 1\ 1\ 8\ 4\ -3\ |}{-(-2)+3} = \frac{-9-24+16-8-12-36}{2+3} = \frac{16-89}{5} = \frac{-73}{5}.$

$y = \frac{|1\ 3\ 1\ 1\ -6\ 1\ 2\ 8\ -3\ |}{5} = \frac{18+8+6+12-8+9}{5} = \frac{45}{5} = 9.$

$$z = \frac{|1\ 2\ 3\ 1\ 1\ -6\ 2\ 4\ 8\ |}{5} = \frac{8+12-24-6+24-16}{5} = \frac{20-22}{5} =- \frac{2}{5}.$$

$$\underline{Solución: x =- \frac{73}{5},\ \ y = 9,\ \ z =- \frac{2}{5}}.$$

****

4º) Considera los puntos $P(1,\ 0,\ -1)$, $Q(2,\ 1,\ 1)$ y la recta $r \equiv x - 5 = y = \frac{z+2}{-2}$:

a) Determina el punto simétrico de P con respecto a r.

b) Calcula el punto de r que equidista de P y Q.

----

a)

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \{x = 5 + \lambda \quad y = \lambda \qquad z = -2 - 2\lambda$.

Un vector director de r es $\vec{v}_r = (1,\ 1,\ -2)$.

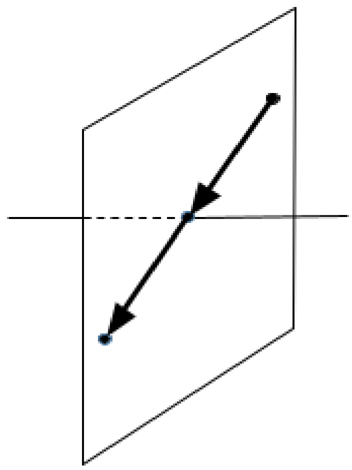
El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv x + y - 2z + D = 0$.

El plano $\alpha \in \beta$ que contiene al punto $P(1,\ 0,\ -1)$ es el siguiente:

$\beta \equiv x + y - 2z + D = 0 \qquad P(1,\ 0,\ -1)\} \Rightarrow 1 - 2 \cdot (-1) + D = 1 + 2 + D =$

$\Rightarrow \alpha \equiv x + y - 2z - 3 = 0$.

El punto B intersección de r y α es el siguiente:



$\alpha \equiv x + y - 2z - 3 = 0 \qquad r \equiv \{x = 5 + \lambda \quad y = \lambda \qquad z = -2 - 2\lambda\} \Rightarrow$

$5 + \lambda + \lambda - 2(-2 - 2\lambda) - 3 = 0$;

$2 + 2\lambda + 4 + 4\lambda = 0;\ \ 6\lambda + 6 = 0;\ \ \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$.

$\{x = 5 + \lambda \quad y = \lambda \qquad z = -2 - 2\lambda\} \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \{x = 5 - 1 = 4 \quad y = -1$

.

Para que P' sea el simétrico de P con respecto a r tiene que cumplirse que:

$\vec{PB} = \vec{BP'} \Rightarrow [B - P] = \left[P' - B\right]$;

$[(4, -1, 0) - (1, 0, -1)] = [(x, y, z) - (4, -1, 0)];$

$(3, -1, 1) = (x - 4, y + 1, z) \Rightarrow \{x - 4 = 3 \rightarrow x = 7 \quad y + 1 = -1 \rightarrow y = -2 \; z =$

.

$b)$

Los puntos $P(1, 0, -1)$ y $Q(2, 1, 1)$ determinan el vector $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 2)$.

El punto medio del segmento $\overline{PQ}$ es $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

El haz de planos γ perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ tiene la siguiente expresión general: $\gamma \equiv x + y + 2z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz γ, el plano π que contiene al punto M es el que satisface su ecuación:

$\gamma \equiv x + y + 2z + D = 0 \qquad M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\} \Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 + D = 0; \; 2 +$

$\Rightarrow \pi \equiv x + y + 2z - 2 = 0.$

El punto H pedido, perteneciente a la recta r que equidista de P y Q el la intersección de la recta r y el plano π:

$\pi \equiv x + y + 2z - 2 = 0 \qquad r \equiv \{x = 5 + \lambda \quad y = \lambda \qquad z = -2 - 2\lambda\} \Rightarrow 5$

$3 + 2\lambda - 4 - 4\lambda = 0; \; -2\lambda - 1 = 0; \; 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}.$

$2 + 2\lambda + 4 + 4\lambda = 0; \; 6\lambda + 6 = 0; \; \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$

$\{x = 5 + \lambda \quad y = \lambda \qquad z = -2 - 2\lambda\} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left\{x = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \qquad y = -\frac{1}{2}\right.$

.

****

OPCIÓN B

1º) Determina $k\neq 0$ sabiendo que la función $f: R\rightarrow R\Rightarrow f(x) = \{3 - kx^2\ si\ x\leq 1 \quad \frac{2}{kx}\ si\ x > 1$ es derivable.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de k para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1\Rightarrow\{f(x) = \left(3 - kx^2\right) = 3 - k = f(1)\ f(x) == \frac{2}{k} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(1)\Rightarrow 3 - k = \frac{2}{k};\ \ 3k - k^2 = 2;\ \ k^2 - 3k + 2 = 0;$$

$$k = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = 2.$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando el correspondiente valor de k.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \{- 2kx\ \ si\ \ x\leq 1 \ \ -\frac{2}{kx^2}\ \ si\ \ x\geq 0 \ \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f'(1) = \{- 2k\ \ si\ \ x\leq 1 \ \ -\frac{2}{k}\ \ si\ \ x\geq 0$$

.

$$k = 1\Rightarrow\{f'\left(1^-\right) = - 2 \qquad f'\left(1^+\right) = -\frac{2}{1} = - 2.\ \Rightarrow f'\left(1^-\right) = f'\left(1^+\right).$$

$$k = 2\Rightarrow\{f'\left(1^-\right) = - 4 \qquad f'\left(1^+\right) = -\frac{2}{2} = - 1.\ \Rightarrow f'\left(1^-\right) \neq f'\left(1^+\right).$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ x = 1\ únicamente\ para\ k = 1}.$

****

2º) Considera las funciones $f\ y\ g: R\rightarrow R$ definidas por $f(x) = 3 - x^2$ y $g(x) = -\frac{x^2}{4}$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de g. Determina el punto de tangencia con la gráfica de g.

b) Esboza el recinto limitado por la recta $y = 4 - 2x$ y las gráficas de f y g. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

----

a)

El punto de tangencia es: $f(1) = 3 - 1^2 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow P(1, 2)$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = -2x \Rightarrow m = f'(1) = -2 \cdot 1 = -2.$$

Sabiendo que la expresión de una recta conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, la ecuación de la tangente pedida es la siguiente:

$$y - 2 = -2 \cdot (x - 1) = -2x + 2 \Rightarrow \underline{t \equiv y = -2x + 4}.$$

Si la recta t es tangente a la función $g(x)$, la ecuación que determinan la igualación de sus expresiones tiene que tener solución única:

$$y = g(x) \Rightarrow -2x + 4 = -\frac{x^2}{4}; \quad -8x + 16 = -x^2; \; x^2 - 8x + 16 = 0;$$

$$(x - 4)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 4.$$

$$\underline{Queda\ probado\ que\ la\ recta\ y = -2x + 4\ es\ tangente\ a\ g(x).}$$

$$g(x) = -\frac{x^2}{4} = -\frac{4^2}{4} = -4 \Rightarrow \underline{El\ punto\ de\ tangencia\ es\ Q(4, -4)}.$$

b)

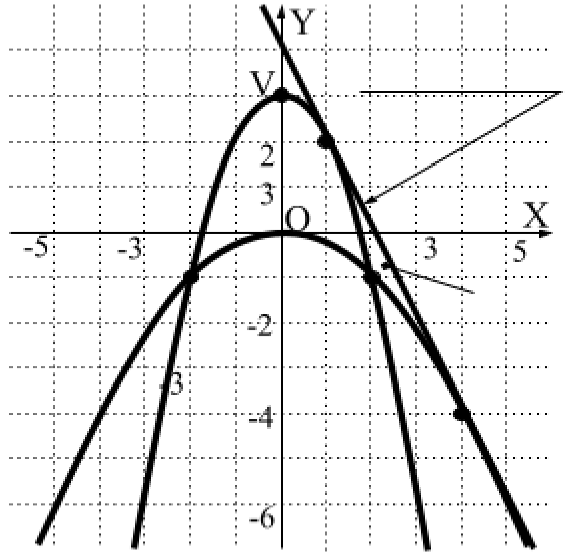
La representación de la recta $y = 4 - 2x$ queda determinada por los puntos de tangencia $P(1, 2)$ y $Q(4, -4)$.

Los puntos de corte de las dos parábolas cóncavas ($\cap$) (por tener ambas negativo el coeficiente de x^2) se obtienen de la resolución de la ecuación que se obtiene de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 3 - x^2 = -\frac{x^2}{4};\ \ 12 - 4x^2 = -x^2;\ \ 3x^2 = 12;\ \ x^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow A(-2,\ -1) \\ x_2 = 2 \rightarrow B(2,\ -1) \end{cases}.$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que se indica en la figura adjunta.



$c)$

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente, teniendo en cuenta que las ordenadas de la recta son mayores que las correspondientes ordenadas de cada una de las dos parábolas en los intervalos correspondientes:

$$S = \int_1^2 \left[(4 - 2x) - \left(3 - x^2\right)\right] \cdot dx + \int_2^4 \left[(4 - 2x) - \left(-\frac{x^2}{4}\right)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_1^2 \left(x^2 - 2x + 1\right) \cdot dx + \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4} - 2x + 4\right) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{12} - \frac{2x^2}{2} + 4x\right]_2^4 = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{12} - x^2 + 4x\right]_2^4 =$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1\right) + \left(\frac{4^3}{12} - 4^2 + 4 \cdot 4\right) - \left(\frac{2^3}{12} - 2^2 + 4 \cdot 2\right) =$$

$$= \frac{8}{3} - 4 + 2 - \frac{1}{3} + 1 - 1 + \frac{16}{3} - 16 + 16 - \frac{2}{3} + 4 - 8 = \frac{21}{3} - 6 = 7 - 6 =$$

.

$$\underline{S = 1\,u^2}.$$

****

3º) $a)$ Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:

--- Utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euros, de 1 euros y de 2 euros.

--- Se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas.

--- Tiene que haber igual número de monedas de 1 euros como de 50 céntimos y 2 euros juntas.

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

$b)$ Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

$a)$

Sean $x,\ y,\ z$ las monedas de 50 céntimos, de 1 euros y de 2 euros las monedas de que se dispone, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 0,5x + y + 2z = 34,5 \\ x + y + z = 30 \\ y = x + z \end{array}\right\} \quad x + 2y + 4z$$

El rango de la matriz A de coeficientes y de la matriz ampliada A' son los siguientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 + 2 - 4 + 1 - 2 = -6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 3$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible determinado.

$$\underline{Se\ puede\ pagar\ de\ una\ sola\ forma}.$$

Para resolverlo se hace lo siguiente: Restando a la segunda ecuación la tercera: $2y = 30;\ \ y = 15.$

Utilizando las ecuaciones primera y tercera:

$$\left.\begin{array}{l} x + 30 + 4z = 69 \\ x - 15 + z = 0 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l} x + 4z = 39 \\ x + z = 15 \end{array}\right\} \ x + 4z = 39$$

$x + 8 = 15; \; x = 7.$

$\underline{Se\ paga\ con\ 7\ monedas\ de\ 50\ céntimos,\ 15\ de\ un\ euro\ y\ 8\ de\ 2\ euros}.$

$b)$

Redondeando la cantidad a 35 euros sería:

$$0,5x + y + 2z = 35 \qquad x + y + z = 30 \qquad y = x + z\} \quad x + 2y + 4z = 70$$

.

Como la matriz de coeficientes es la misma, el sistema sigue teniendo una solución única; la única condición que se pone es que las soluciones sean todas números naturales; en otro caso sería imposible.

Restando a la segunda ecuación la tercera: $2y = 30; \; y = 15.$

Utilizando las ecuaciones primera y tercera:

$$x + 30 + 4z = 70 \quad x - 15 + z = 0\} \quad x + 4z = 40 \quad x + z = 15\} \quad x + 4z = 40$$

.

$\underline{Con\ el\ redondeo\ a\ 35\ euros\ no\ es\ posible\ el\ pago}.$

****

4º) Considera el punto $P(2,\ -1,\ 3)$ y el plano $\pi \equiv 3x + 2y + z = 5$.

a) Calcula el punto simétrico de P respecto de π.

b) Calcula la distancia de P a π.

----

a)

El vector normal del plano $\pi \equiv 3x + 2y + z = 5$ es $\vec{n} = (3,\ 2,\ 1)$.

La recta s perpendicular al plano π que contiene al punto $P(2,\ -1,\ 3)$ tiene la siguiente expresión, dada por unas ecuaciones paramétricas: $s \equiv \{x = 2 + 3\lambda\ \ y = -1 + 2\lambda\ z = 3 + \lambda$.

El punto Q de corte de s con π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv 3x + 2y + z = 5 \quad s \equiv \{x = 2 + 3\lambda\ \ y = -1 + 2\lambda\ z = 3 + \lambda \quad \} \Rightarrow 3(2 +$

$6 + 9\lambda - 2 + 4\lambda + 3 + \lambda = 5;\ \ 14\lambda + 7 = 5;\ \ 14\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{14} = -\frac{1}{7}.$

$Q \Rightarrow \{x = 2 + 3\lambda\ \ y = -1 + 2\lambda\ z = 3 + \lambda \quad \} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{7} \Rightarrow \{x = 2 - \frac{3}{7} = \frac{11}{7} \quad y =$
.

El punto $P^{'}(x,\ y,\ z)$ es simétrico de $P(2,\ -1,\ 3)$ cuando sea $\vec{PQ} = \vec{QP^{'}}$:

$[Q - P] = \left[P^{'} - Q\right];\ \left[\left(\frac{11}{7},\ -\frac{9}{7},\ \frac{20}{7}\right) - (2,\ -1,\ 3)\right] = \left[(x,\ y,\ z) - \left(\frac{11}{7},\ -\frac{9}{7},\ \frac{20}{7}\right)\right]$

$\left(-\frac{3}{7},\ -\frac{2}{7},\ -\frac{1}{7}\right) = \left(x - \frac{11}{7},\ y + \frac{9}{7},\ z - \frac{20}{7}\right) \Rightarrow \left\{x - \frac{11}{7} = -\frac{3}{7} \rightarrow x = \frac{8}{7} \quad y + \frac{9}{7}\right.$
.

$$\underline{P^{'}\left(\frac{8}{7},\ -\frac{11}{7},\ \frac{19}{7}\right)}$$

b)

La distancia de un punto $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d\left(P_0, \pi\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(2,\ -1,\ 3)$ y al plano $\pi \equiv 3x + 2y + z - 5 = 0$:

$$d(P,\pi)=\frac{|3\cdot 2+2\cdot(-1)+1\cdot 3-5|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{|6-2+3-5|}{\sqrt{9+4+1}}=\frac{|-2|}{\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{14}}{14}=\underline{\frac{\sqrt{14}}{7}\ unidades.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones: Tienes que elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

OPCIÓN A

1º) Considera la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = \{ax^2 + bx + c\ si\ x \leq 0\ \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen\,x}\ si\ x > 0$. Determina $a,\ b\ y\ c$ sabiendo que f es continua, alcanza un máximo relativo en $x = -1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$ tiene pendiente 2.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\ x = 0 \Rightarrow \{f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) = c = f(0)\ f(x) = \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen\,x} = 2$ (*)

$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{c = 2}.$

(*) $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen\,x} = \frac{e^0 - e^0 - 0}{0 - sen\,0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - cos\,x} =$

$= \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{sen\,x} = \frac{e^0 - e^0}{sen\,0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$

$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{cos\,x} = \frac{e^0 + e^0}{cos\,0} = \frac{1+1}{1} = 2.$

Por alcanzar la función un máximo relativo en $x = -1$ tiene que anularse su primera derivada y ser negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

Para $x = -1$ es $f(x) = ax^2 + bx + 2 \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$.

$f'(-1) = 0 \Rightarrow 2a \cdot (-1) + b = 0; \ -2a + b = 0; \ 2a - b = 0.$ (1)

$f''(x) = 2a < 0 \Rightarrow \underline{a < 0}$.

La pendiente de la rectan tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

Para $x = -2$ es $f(x) = ax^2 + bx + 2 \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$.

$m = f'(-2) = 2 \Rightarrow 2a \cdot (-2) + b = 2; \ -4a + b = 2; \ 4a - b = -2.$
(2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left. \begin{array}{l} 2a - b = 0 \\ 4a - b = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2a + b = 0 \\ 4a - b = -2 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow \underline{a = -1}$$
.

$2a - b = 0 \Rightarrow -2 - b = 0 \Rightarrow \underline{b = -2}$.

****

2º) Considera las función f definida por $f(x) = ax \cdot Lx - bx$ para $x > 0$ (L denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que $\int_1^2 f(x) \cdot dx = 8 \cdot L2 - 9$.

Para que la función f tenga un extremo relativo en $x = 1$ tiene que anularse su primera derivada y ser negativa la segunda derivada para este valor.

$$f'(x) = a \cdot Lx + ax \cdot \frac{1}{x} - b = aLx + a - b.$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow a \cdot L1 + a - b = 0;\ \ a \cdot 0 + a - b = 0;\ \ a - b = 0 \Rightarrow b = a.$$

$$\int_1^2 f(x) \cdot dx = 8 \cdot L2 - 9 \Rightarrow \int_1^2 (ax \cdot Lx - ax) \cdot dx = 8 \cdot L2 - 9. \quad (*)$$

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida:

$$A = \int (ax \cdot Lx - ax) \cdot dx = a \int x \cdot Lx \cdot dx - a \int x \cdot dx = aM - \frac{ax^2}{2}. \quad (**)$$

$$M = \int x \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \right\} \Rightarrow Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1) + C.$$

Sustituyendo en (**) el valor obtenido de M: $A = \frac{ax^2}{4} \cdot (2Lx - 1) - \frac{ax^2}{2} + C$

.

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de A:

$$\left[\frac{ax^2}{4} \cdot (2Lx - 1) - \frac{ax^2}{2} \right]_1^2 = 8 \cdot L2 - 9;$$

$$\left[\frac{a \cdot 2^2}{4} \cdot (2L2 - 1) - \frac{a \cdot 2^2}{2} \right] - \left[\frac{a \cdot 1^2}{4} \cdot (2L1 - 1) - \frac{a \cdot 1^2}{2} \right] = 8 \cdot L2 - 9;$$

$a \cdot (2L2 - 1) - 2a - \left[\frac{a}{4} \cdot (0 - 1) - \frac{a}{2}\right] = 8 \cdot L2 - 9;$

$2aL2 - a - 2a + \frac{a}{4} + \frac{a}{2} = 2aL2 - 3a + \frac{3a}{4} = 2aL2 - \frac{9a}{4} = 8 \cdot L2 - 9;$

$8aL2 - 9a = 32 \cdot L2 - 36 \Rightarrow \underline{a = b = 4}.$

****

3º) Considera las matrices $A = (0\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 1\ 0\ 0\ )\ y\ B = (a\ b\ c\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 0\ ).$

a) Determina, si existen, los valores de $a,\ b\ y\ c$ para los que las matrices $A\ y\ B$ conmutan.

b) Calcula $A^2,\ A^3,\ A^{2017}\ y\ A^{2018}$.

c) Calcula, si existe, la matriz inversa de A.

----

a)

$A \cdot B = (0\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) \cdot (a\ b\ c\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 0\ ) = (-\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ 0\ a\ b\ c\ ).$

$B \cdot A = (a\ b\ c\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 0\ ) \cdot (0\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) = (c\ \ -b\ a\ 0\ \ -1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ )$
.

$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow (-\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ 0\ a\ b\ c\ ) \cdot (c\ \ -b\ a\ 0\ \ -1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ ) \Rightarrow \underline{a = 0,\ b =}$
.

b)

$A^2 = A \cdot A = (0\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) \cdot (0\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) = \underline{I}$
.

$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = \underline{A}.$

En general $A^n = \{I\ si\ n\ es\ par\ \ \ \ A\ si\ n\ es\ impar\ \ \Rightarrow \underline{A^{2017} = A\ y\ A^{2018} = I}.$

c)

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_3\, F_2 \rightarrow\ - F_2\right\} \Rightarrow (0\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow A^{-1} = (0\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) = A}.$$

****

4º) Considera las rectas $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$.

a) Estudia y determina la posición relativa de r y s.

b) Calcula la distancia entre r y s.

----

a)

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$s \equiv \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ y - 2z = -1 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow y = -1 + 2\lambda;\ 2x - 3(-1 + 2\lambda) = -5;$
$2x + 3 - 6\lambda = -5;\ 2x = -8 + 6\lambda;\ x = -4 + 3\lambda \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -4 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$
.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(-1,\ 0,\ -1)$ y $\vec{v_r} = (2,\ 1,\ 3)$. Recta s: $B(-4,\ -1,\ 0)$ y $\vec{v_s} = (3,\ 2,\ 1)$.

Los vectores $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$:
$\vec{w} = \vec{AB} = [B - A] = [(-4,\ -1,\ 0) - (-1,\ 0,\ -1)] = (-3,\ -1,\ 1)$.

Según que los vectores $\left\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\right\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\right\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$Rang \left\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 9 - 3 + 18 + 2 - 3 = 10 \neq 0 \Rightarrow$

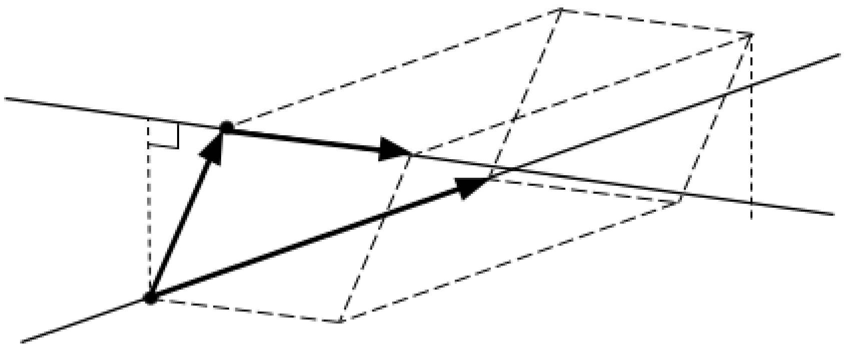
$\Rightarrow Rang \left\{\vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\right\} = 3 \Rightarrow \vec{v_r},\ \vec{v_s},\ \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$

$c)$

Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v}_r$ y $\overrightarrow{v}_s$, y el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen al punto A de r y extremo el punto B de s.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v}_r \cdot \left(\overrightarrow{v}_s \times \overrightarrow{w}\right) = \left|\overrightarrow{v}_r \times \overrightarrow{v}_s\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{v}_r \times \overrightarrow{v}_s\right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{v}_r \cdot \left(\overrightarrow{v}_s \times \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v}_r \times \overrightarrow{v}_s\right|}.$$

$$d(r,\ s) = \frac{\left|\overrightarrow{v}_r \cdot \left(\overrightarrow{v}_s \times \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v}_r \times \overrightarrow{v}_s\right|} = \frac{||2\ 1\ 3\ 3\ 2\ 1\ -3\ -1\ 1\ ||}{|i\ j\ k\ 2\ 1\ 3\ 3\ 2\ 1\ |} = \frac{|10|}{|i+9j+4k-3k-6i-2j|} = \frac{10}{|-5i+7j+k|} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{(-5)^2+7^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{25+49+1}} = \frac{10}{\sqrt{75}} = \frac{10}{5\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\underline{d(r,\ s) = \frac{2\sqrt{3}}{3}u.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Considera la función $f(x) = a\cdot Lx + bx^2 + x$ para $x > 0$, donde L denota logaritmo neperiano.

a) Halla a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) ¿Qué tipo de extremos tiene f en $x = 1$ y en $x = 2$?

----

a)

Para que la función f tenga un extremo relativo en un punto tiene que anularse su primera derivada y ser negativa la segunda derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1.$$

$$Para\, x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow a + 2b + 1 = 0. \qquad (1)$$

$$Para\, x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0;\ \ a + 8b + 2 = 0. \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} a + 2b = -1 \\ a + 8b = -2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -a - 2b = 1 \\ a + 8b = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow 6b = -1 \Rightarrow \underline{b = -\frac{1}{6}}.$$

$$a + 2b = -1 \Rightarrow a - \frac{2}{6} = -1;\ \ a = \frac{1}{3} - 1 \Rightarrow \underline{a = -\frac{2}{3}}.$$

b)

La función resulta $f(x) = -\frac{2}{3}\cdot Lx - \frac{1}{6}x^2 + x$.

$f'(x) = -\frac{2}{3x} - \frac{1}{3}x + 1.$ $\qquad\qquad$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}.$$

$$f''(1) = \frac{2}{3\cdot 1^2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = -\frac{2}{3} \cdot L1 - \frac{1}{6} \cdot 1^2 + 1 = -\frac{2}{3} \cdot 0 - \frac{1}{6} + 1 = \frac{5}{6} \Rightarrow \underline{Mínimo: A\left(1,\ \frac{5}{6}\right)}.$$

$$f''(2) = \frac{2}{3 \cdot 2^2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = -\frac{2}{3} \cdot L2 - \frac{1}{6} \cdot 2^2 + 2 = -\frac{L4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{4 - L4}{3} \Rightarrow \underline{Máximo: B\left(2,\ \frac{4 - L4}{3}\right)}.$$

****

2º) Considera la función $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = e^{-2x}$.

a) Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = -2ex$.

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $y = -2ex$ y el eje de ordenadas.

c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

----

a)

La pendiente de la tangente de una función en un punto es igual que el valor de la derivada de la función en ese punto.

La pendiente de la recta $y = -2ex$ es $m = -2e$.

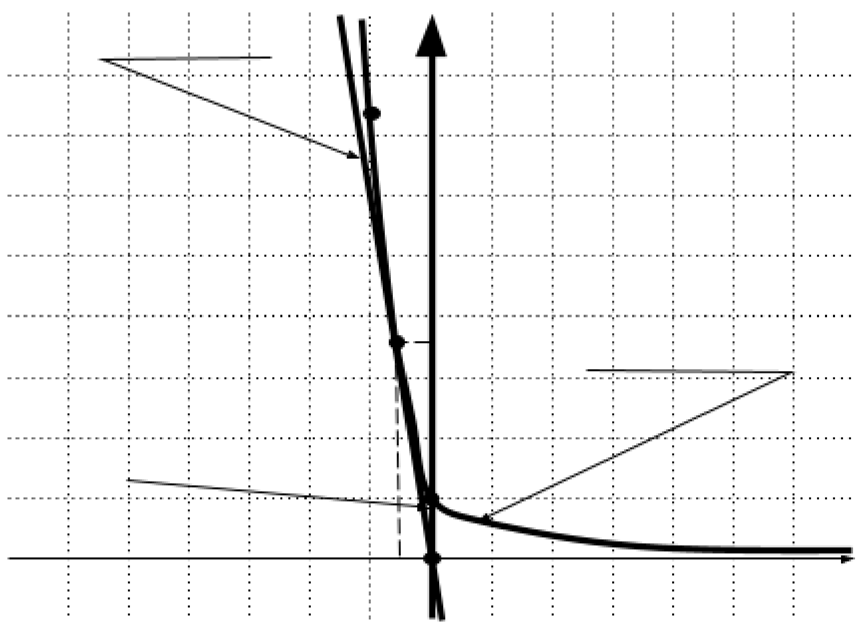
$f'(x) = -2 \cdot e^{-2x}$.

$f'(x) = m \Rightarrow -2 \cdot e^{-2x} = -2e; \quad -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = e^{1} = e$.

<u>*El punto de tangencia pedido es* $P\left(-\frac{1}{2}, e\right)$.</u>

b)



La función $f(x) = e^{-2x}$ contiene a los puntos P, $A(0, 1)$ y $C\left(-1, e^{2} \cong 7,4\right)$ y por ser una función exponencial de exponente negativo tiene como asíntota la parte positiva del eje de abscisas. La recta $y =- 2ex$ contiene al origen de coordenadas y al punto P. La representación gráfica, aproximada, de la situación es la de la figura.

$c)$

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} [f(x) - y]dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left[e^{-2x} - (- 2ex)\right] \cdot dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(e^{-2x} + 2ex\right) \cdot dx =$$

$$= \left[- \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{2ex^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \left[- \frac{1}{2}e^{-2x} + ex^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} =$$

$$= \left(- \frac{1}{2}e^{-0} + 0\right) - \left[- \frac{1}{2}e^{-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} + e\cdot\left(- \frac{1}{2}\right)^2\right] =- \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}e^1 - e\cdot\frac{1}{4} =$$

$$=- \frac{1}{2} + \frac{e}{2} - \frac{e}{4} = \frac{-2+2e-e}{4} = \frac{e-2}{4}.$$

$Nota$: $\int e^{-2x} \cdot dx \Rightarrow \left\{- 2x = t \; dx =- \frac{1}{2}dt\right\} \Rightarrow - \frac{1}{2}\int e^t \cdot dt =- \frac{1}{2}e^t =- \frac{1}{2}e^{-2x}.$

$$\underline{S = \frac{e-2}{4} u^2 \cong 0,18 \, u^2.}$$

****

3º) Considera el sistema de ecuaciones lineales $\{x + y + mz = m^2\ y - z = m \quad x + my + z = m$.

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) Resuélvelo para $m = 1$. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que $z = 2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = (1\ 1\ m\ 0\ 1\ -1\ 1\ m\ 1)\ \text{y}\ A' = \left(1\ 1\ m\ 0\ 1\ -1\ 1\ m\ 1\quad m^2\ m\ m\right).$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$|A| = |1\ 1\ m\ 0\ 1\ -1\ 1\ m\ 1| = 1 - 1 - m + m = 0 \Rightarrow Rang\ A < 3.$

Por existir $|1\ 1\ 0\ 1| = 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 2,\ \forall m \in R.$

El rango de $A^{'}$ se obtiene por el procedimiento de Gauss:

$\left(1\ 1\ m\ 0\ 1\ -1\ 1\ m\ 1\quad m^2\ m\ m\right) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 - F_1\right\} \Rightarrow \left(1\ 1\ m\ 0\ 1\ -1\ 0\ m - 1\ 1\right.$

$\Rightarrow \left[1\ 1\ m\ 0\ 1\ -1\ 0\ m - 1\ -(m - 1)\quad m^2\ m\ - m(m - 1)\right] \Rightarrow \{m \neq 0\ y\ m \neq 1 \Rightarrow Rang$

.

$\underline{Para\ \{m \neq 0\ m \neq 1\ \} \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A^{'} = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$\underline{Para\ \{m = 0\ m = 1\ \} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A^{'} = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Para $m = 1$ el sistema resulta $\{x + y + z = 1\ y - z = 1 \quad x + y + z = 1$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\{x + y + z = 1\ y - z = 1$.

Haciendo $z = \lambda \Rightarrow y = 1 + \lambda;\ \ x + 1 + \lambda + \lambda = 1;\ \ x = -2\lambda.$

$\underline{Solución: x = -2\lambda,\ \ y = 1 + \lambda,\ \ z = \lambda,\ \ \forall \lambda \in R.}$

Para que sea $z = 2$ tiene que ser $\lambda = 2$.

$\underline{La\ solución\ pedida\ es: x = -4,\ \ y = 3,\ \ z = 2.}$

****

4º) Considera las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z$ y $s \equiv \begin{cases} x + nz = -2 \\ y - z = -3 \end{cases}$.

a) Halla los valores de m y n para los que r y s se cortan perpendicularmente.

b) Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano π que contiene a r y s.

----

a)

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x + nz = -2 \\ y - z = -3 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -2 - n\lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Unos vectores directores de las rectas son $\vec{v_r} = (2,\ m,\ 1)$ y $\vec{v_s} = (-\ n,\ 1,\ 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = 0 \Rightarrow (2,\ m,\ 1) \cdot (-\ n,\ 1,\ 1) = -\ 2n + m + 1 = 0;\ \ m - 2n = -\ 1. \quad (1)$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = -1 - m\mu \\ z = \mu \end{cases}$.

Un punto de r es $A(1,\ -\ 1,\ 0)$ y un punto de s es $B(-\ 2,\ -\ 3,\ 0)$.

$$\vec{BA} = [A - B] = [(1,\ -\ 1,\ 0) - (-\ 2,\ -\ 3,\ 0)] = (3,\ 2,\ 0).$$

Si las rectas r y s se cortan tiene que cumplirse que $Rang\left\{\vec{v_r},\ \vec{v_r},\ \vec{AB}\right\} = 0$; es decir: el valor del determinante que forman tiene que ser cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ -n & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ \ -\ 2n + 3m - 3 - 4 = 0;\ \ 3m - 2n = 7. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{matrix} m - 2n = -\ 1 \\ 3m - 2n = 7 \end{matrix}\right\} \ \ \left.\begin{matrix} -\ m + 2n = 1 \\ 3m - 2n = 7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow \underline{m = 4};$$

.

b)

Para $m = 3$ y $n = 1 \Rightarrow \vec{v_r} = (2,\ 3,\ 1)$ y $\vec{v_s} = (-\ 1,\ 1,\ 1)$.

Considerando el punto $P(1,\ -1,\ 0)\in r$:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv |x - 1\ y + 1\ z\ 2\ 3\ 1\ \ -1\ 1\ 1| = 0;$$

$$3(x - 1) - (y + 1) + 2z + 3z - (x - 1) - 2(y + 1) = 0;$$

$$2(x - 1) - 3(y + 1) + 5z = 0;\ \ 2x - 2 - 3y - 3 + 5z = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv 2x - 3y + 5z - 5 = 0}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE ARAGÓN

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas: A o B.

OPCIÓN A

1º) Considere el sistema de ecuaciones $x + y + mz = m\, mx + (m - 1)y + z = 2 \quad x + y + z = 1\}$:

a) Determine los valores del parámetro m para los que ese sistema de ecuaciones es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) Encuentre las soluciones de ese sistema cuando $m = 1$.

c) Considere las matrices $C = (1 \ - \ 1\ 0\ )$, $D = (1\ 2 \ - \ 1\ )$. Determine el rango de la matriz producto $P = C \cdot D$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = (1\ 1\ m\ m\ m - 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ )\ y\ A' = (1\ 1\ m\ m\ m - 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \quad m\ 2\ 1\ ).$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A| = |1\ 1\ m\ m\ m - 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ | = m - 1 + m^2 + 1 - m(m - 1) - 1 - m =$$

$$= m^2 - m^2 + m - 1 = m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1.$$

$$\underline{Para\ m \neq 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$Para\ m = 1 \Rightarrow A' = (1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \quad 1\ 2\ 1\ )$.

Por ser $F_1 = F_3$ y ser, por ejemplo, $|1\ 1\ 1\ 0\ | \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2$.

$$\underline{Para\ m = 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$\underline{El\ sistema\ no\ es\ incompatible\ para\ cualquier\ valor\ real\ de\ m}$.

$b)$

Para $m = 1$ el sistema resulta $x + y + z = 1 \quad x + z = 2 \ x + y + z = 1 \}$, que es equivalente al sistema $x + y + z = 1 \quad x + z = 2 \}$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $z = \lambda$ es $x = 2 - \lambda\ e\ y =- 1$.

$\underline{Solución: x = 2 - \lambda,\ y =- 1,\ z = \lambda,\ \forall\lambda\in R}$.

$c)$

$P = C \cdot D = (1 \ -1 \ 0) \cdot (1 \ 2 \ -1) = (1 \ 2 \ -1 \ -1 \ -2 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0)$.

Por contener la matriz al menor $|1 \ -1 \ -1 \ 2| \neq 0$:

$\underline{El\ Rang\ P = C \cdot D\ es\ 2}$.

****

2º) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $O(0,\ 0,\ 0)$ y contiene a la recta $r\equiv\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$.

La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r\equiv\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda;\ \ 2x = 2 + \lambda;\ \ x = 1 + \frac{1}{2}\lambda;\ \ 2z =$$

$$z = 2 + \frac{3}{2}\lambda \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \frac{3}{2}\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $P(2,\ 2,\ 5)$, para $\lambda = 2$, y $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 2,\ 3)$.

El vector $\overrightarrow{OP} = (2,\ 2,\ 5)$ es director del plano pedido π y también lo es el vector director de la recta r por estar contenida en el plano.

La ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{v_r},\ P\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-5 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$6(x-2) + 5(y-2) + 4(z-5) - 2(z-5) - 10(x-2) - 6(y-2) = 0;$$

$$-4(x-2) - (y-2) + 2(z-5) = 0;\ \ 4x - 8 + y - 2 - 2z + 10 = 0.$$

$$\underline{\pi\equiv 4x + y - 2z = 0}.$$

****

3º) a) Considere la función $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$:

a_1) Determine el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

a_2) Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

a_3) Determine la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 2$.

b) Calcule $I = \int \frac{x^2-3x+3}{x-1} \cdot dx$.

----

a)

a_1)

Teniendo en cuenta que $x^2 + 1 > 0,\ \forall x \in R \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R}$.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito. En el caso de funciones racionales, son los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{\sqrt{x^2 + 1} \neq 0,\ \forall x \in R \Rightarrow No\ tiene\ asíntotas\ verticales.}$$

Asíntotas horizontales: Son de la forma $y = k$; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$k = f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \{-1\ si\ x \to -\infty \quad 1\ si\ x \to +\infty\ .$$

$$\underline{La\ recta\ y = -1\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función\ para\ x < 0.}$$

$$\underline{La\ recta\ y = 1\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función\ para\ x > 0.}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, $\{m \neq 0,\ m \neq \infty\}$ siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} = 0.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas.}$$

$a_2)$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada. $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+1}-(x+1)\cdot\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2-x}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{1-x}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}} = 0;\ 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = \frac{1-x}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{(1-x)\cdot\sqrt{x^2+1}}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{\left[-1\cdot\sqrt{x^2+1}+(1-x)\cdot\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}\right]\cdot\left(x^2+1\right)^2-\left[(1-x)\cdot\sqrt{x^2+1}\right]\cdot\left[2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot2x\right]}{\left(x^2+1\right)^4} =$$

$$= \frac{\left[-\sqrt{x^2+1}+\frac{x-x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right]\cdot\left(x^2+1\right)-4x\cdot(1-x)\cdot\sqrt{x^2+1}}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{\frac{-\left(x^2+1\right)+x-x^2}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x^2+1\right)-\left(4x-4x^2\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}{\left(x^2+1\right)^3} =$$

$$= \frac{\frac{-x^2-1+x-x^2}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x^2+1\right)-\left(4x-4x^2\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{\left(-2x^2+x-1\right)\cdot\left(x^2+1\right)-\left(4x-4x^2\right)\cdot\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3\cdot\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{\left(-2x^2+x-1\right)-\left(4x-4x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{-2x^2+x-1-4x+4x^2}{\left(x^2+1\right)^2\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2-3x-1}{\left(x^2+1\right)^2\cdot\sqrt{x^2+1}}.$$

$$f''(1) = \frac{2\cdot1^2-3\cdot1-1}{\left(1^2+1\right)^2\cdot\sqrt{1^2+1}} = \frac{-2}{4\cdot\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = \frac{1+1}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: P\left(1,\ \sqrt{2}\right)}.$$

$a_3)$

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = \frac{(1-x)\cdot\sqrt{x^2+1}}{\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow m = f'(2) = \frac{-1\cdot\sqrt{2^2+1}}{\left(2^2+1\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{25}.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(2) = \frac{2+1}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow P\left(2,\ \frac{3\sqrt{5}}{5}\right).$$

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$.

$$y - \frac{3\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{25}(x - 2);\ \ 25y - 15\sqrt{5} = -\sqrt{5}x + 2\sqrt{5}.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente:

$$\underline{Tangente\text{: } t \equiv \sqrt{5}x + 25y - 17\sqrt{5} = 0}.$$

b)

$$I = \int \frac{x^2-3x+3}{x-1}\cdot dx.$$

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -3x & +3 & x-1 \\ \cline{4-4} -x^2 & +x & & x-2 \\ \hline 0 & -2x & +3 & \\ & +2x & -2 & \\ \cline{2-3} & & +1 & \end{array}$$

$$I = \int\left(x - 2 + \frac{1}{x-1}\right)\cdot dx = \int x\cdot dx - 2\int dx + \int \frac{1}{x-1}\cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + L|x - 1| + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{x^2-3x+3}{x-1}\cdot dx = \frac{x^2}{2} - 2x + L|x - 1| + C.}$$

****

4º) Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30 % les gustan ambos deportes.

a) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?

b) Se eligen 10 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule la probabilidad de que solo a 3 les guste el fútbol (no es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

$Datos$: $P(F) = 0,8$; $P(B) = 0,4$; $P(F \cap B) = 0,3$.

a)

$$P = P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) = 0,8 + 0,4 - 0,3 = \underline{0,9}.$$

b)

La probabilidad de que le guste el fútbol es $p = 0,8$ y la probabilidad de que no le guste es $q = 0,2$.

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$p = 0,8$, $q = 0,2$, $n = 10$; $r = 3$.

La fórmula de la probabilidad de la distribución binomial es $P = (n\ r)\cdot p^{r}\cdot q^{n-r}$, la probabilidad pedida es:

$$P = (10\ 3)\cdot 0,8^{3}\cdot 0,2^{10-3} = \frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}\cdot 0,8^{3}\cdot 0,2^{7} =$$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 6}\cdot 0,512\cdot 0,0000128 = 5\cdot 3\cdot 8\cdot 0,000006553 = 0,000786.$$

$$\underline{P = 0,000786}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere la matriz $A = (3\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 3\ )$:

$a)$ Determine los valores del parámetro k para los que la matriz $M = A - k\cdot I$ tenga inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

$b)$ Encuentre la matriz X que verifica que $(A - 3I)\cdot X = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y A la matriz que aparece al comienzo del enunciado.

$a)$

$M = A - k\cdot I = A - k\cdot(1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) = (3\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 3\ ) - (k\ 0\ 0\ 0\ k\ 0\ 0\ 0\ k\ ) =$

$= (3 - k\ 0\ 1\ 0\ \ - k\ 0\ 1\ 0\ 3 - k\ ).$

Una función tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$|M| = 0 \Rightarrow |3 - k\ 0\ 1\ 0\ \ - k\ 0\ 1\ 0\ 3 - k\ | = - k\cdot(3 - k)^2 + k = 0;$

$- k\cdot\left[(3 - k)^2 - 1\right] = 0 \Rightarrow \underline{k_1 = 0};\ \ (3 - k)^2 - 1 = 0;\ \ 9 - 6k + k^2 - 1 = 0;$

$k^2 - 6k + 8 = 0;\ \ k = \frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{6\pm2}{2} = 3\pm1 \Rightarrow k_2 = 2,\ k_3 = 4.$

$\underline{La\ matriz\ M = A - kI\ es\ invertible\ \forall k\in R - \{0,\ 2,\ 4\}}.$

$b)$

$(A - 3I)\cdot X = 2I;\ \ (A - 3I)^{-1}\cdot(A - 3I)\cdot X = (A - 3I)^{-1}\cdot 2I;$

$I\cdot X = 2\cdot(A - 3I)^{-1}\cdot I \Rightarrow \underline{X = 2\cdot(A - 3I)^{-1}}.$

$A - 3I = (0\ 0\ 1\ 0\ \ - 3\ 0\ 1\ 0\ 0\ ).$

Se obtiene la inversa de $A - 3I$ por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_3\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -\frac{1}{3}F_2\right\} \Rightarrow \left(0\ 0\ 1\ 0\ \ -\frac{1}{3}\ 0\ 1\ 0\ 0\ \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (A - 3I)^{-1} = \left(0\ 0\ 1\ 0\ \ -\frac{1}{3}\ 0\ 1\ 0\ 0\ \right).$

$$\underline{X = 2\cdot(A - 3I)^{-1} = 2\cdot\left(0\ 0\ 1\ 0\ \ -\frac{1}{3}\ 0\ 1\ 0\ 0\right) = \left(0\ 0\ 2\ 0\ \ -\frac{2}{3}\ 0\ 2\ 0\ 0\right).}$$

****

2º) Considere el plano $\pi \equiv 2ax + y + az = 4$ y la recta $r \equiv \{2x + y + z = 2 \quad - x + y + 2z = 3$:

a) Determine la posición del plano y la recta según los diferentes valores de a.

b) Para $a = 2$, determine la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $P(0,\ 1,\ 0)$.

----

a)

La recta r y el plano π determinan el sistema $\{2ax + y + az = 4\ 2x + y + z = 2 \quad - x + y + 2z = 3$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (2a\ 1\ a\ 2\ 1\ 1\ \ -1\ 1\ 2\ )$ y $M' = (2a\ 1\ a\ 2\ 1\ 1\ \ -1\ 1\ 2\quad 4\ 2\ 3\ )$.

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- $Ran\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2. -- $Ran\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3. -- $Ran\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$Rang\ M \Rightarrow |2a\ 1\ a\ 2\ 1\ 1\ \ -1\ 1\ 2\ | = 4a + 2a - 1 + a - 2a - 4 = 5a - 5 = 0;$

$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$

$Para\ a \neq 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ a \neq 1\ la\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$

$Para\ a = 1 \Rightarrow M = (2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ \ -1\ 1\ 2\ )\ y\ M' = (2\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ \ -1\ 1\ 2\quad 4\ 2\ 3\ ).$

$Para\ a = 1 \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ M = 2.$

$Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow |2\ 1\ 4\ 2\ 1\ 2\ \ -1\ 1\ 3\ | =$

$= 6 + 8 - 2 + 4 - 4 - 6 = 6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3.$

$$\underline{Para\ a = 1\ la\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos.}$$

$b)$

Para $a = 2 \Rightarrow \pi \equiv 4x + y + 2z = 4$ y su vector normal es $\vec{n} = (4,\ 1,\ 2)$.

La recta r pedida, por ser perpendicular al plano π, tiene como vector director a cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector normal del plano.

La recta r expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}}.$$

****

3º) a) Determine los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x) = a(x - 1)^3 + bx + c$:

-- Pase por el punto $P(1, 1)$.

-- En el punto $P(1, 1)$ su tangente tenga de pendiente 2.

-- En el punto $x = 2$ tenga un máximo relativo.

b) Determine el valor del límite: $A = \left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}$.

----

a)

Por pasar por $P(1, 1) \Rightarrow f(1) = 1$:

$f(1) = a(1 - 1)^3 + b \cdot 1 + c = b + c = 1.$ (1)

Si en el punto $P(1, 1)$ la pendiente es 2 $\Rightarrow f'(1) = 2$:

$f'(x) = 3a(x - 1)^2 + b.$

$f'(1) = 2 \Rightarrow 3a(1 - 1)^2 + b = 2 \Rightarrow \underline{b = 2}.$

Sustituyendo el valor de b en la expresión (1): $\underline{c = -1}$.

Por tener un máximo relativo para $x = 2$ es 2 $\Rightarrow f'(2) = 0$:

$f'(2) = 0 \Rightarrow 3a(2 - 1)^2 + 2 = 0;\ 3a + 2 = 0 \Rightarrow \underline{a = -\frac{2}{3}}.$

b)

$$A = \left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indeterminación\ de\ tipo\ nº\ e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2-2x-x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}} = \left(\frac{x^2-2x}{x^2-2x} + \frac{-x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}} = \left(1 + \frac{-x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}} =$$

$$= \left[1 + \frac{-x+2}{-x(-x+2)}\right]^{\frac{3x^2-1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x\cdot\left(-\frac{3x^2-1}{x^2}\right)} =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{\frac{1}{-x}} \right]^{\frac{1-3x^2}{x^2}} = \left[\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{\frac{1}{-x}} \right]^{\frac{1-3x^2}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-3x^2}{x^2}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}.$$

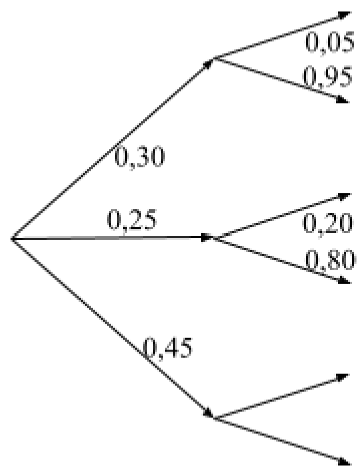
$$\underline{A = \left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}.}$$

****

4º) En una empresa los trabajadores se clasifican en tres categorías: A, B y C. El 30 % de los trabajadores pertenecen a la categoría A; el 25 % a la categoría B y el resto a la categoría C. Además, se sabe que de los trabajadores de la categoría A un 5 % habla inglés; mientras que de la categoría B un 20 % habla inglés y de los trabajadores de la categoría C un 60 % habla inglés.

a) Si se elige al azar un trabajador de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés?

b) Se elige al azar un trabajador de la empresa y resulta que habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la categoría C?



a)

$$P = P(I) = P(I \cap A) + P(I \cap B) + P(I \cap C) =$$

$$= P(A) \cdot P(I/A) + P(B) \cdot P(I/B) + P(C) \cdot P(I/C) =$$

$$= 0,30 \cdot 0,05 + 0,25 \cdot 0,20 + 0,45 \cdot 0,60 = 0,015 + 0,050 + 0,270 = \underline{0,335}.$$

b)

$$P = P(C/I) = \frac{P(C \cap I)}{P(I)} = \frac{P(C) \cdot P(I/C)}{P(A) \cdot P(I/A) + P(B) \cdot P(I/B) + P(C) \cdot P(I/C)} =$$

$$= \frac{0,45 \cdot 0,60}{0,30 \cdot 0,05 + 0,25 \cdot 0,20 + 0,45 \cdot 0,60} = \frac{0,270}{0,015 + 0,050 + 0,270} = \frac{0,270}{0,335} = \frac{270}{335} = \underline{\frac{54}{67} = 0,806}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE ARAGÓN

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas: A o B.

OPCIÓN A

1º) a) Resuelva el sistema: $(2\ 4\ 3\ 2\ 2\ 2\ 1\ 3\ 2\ )(x\ y\ z\ ) = (0\ 0\ 0\ )$.

b) Sabiendo que el determinante de la matriz $A = (1\ 1\ 1\ a\ b\ c\ x\ y\ z\ )$ es 4, es decir $|A| = 4$, determine el determinante de la matriz $B = (2\ 3a + k\,x + 5\ 2\ 3b + k\,y + 5\ 2\ 3c + k\,z + 5\ )$.

----

a)

$$(2\ 4\ 3\ 2\ 2\ 2\ 1\ 3\ 2\ )(x\ y\ z\ ) = (0\ 0\ 0\ ) \Rightarrow 2x + 4y + 3z = 0\ 2x + 2y + 2z = 0\ \ x$$

.

Se trata de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que es homogéneo por carecer todas las ecuaciones de término independiente distinto de cero.

Todos los sistemas lineales homogéneos son compatibles, pues todos admiten la solución trivial $x = y = \cdots = 0$.

A efectos de rango, las matrices de coeficientes y ampliada son equivalentes.

$$|M| = |2\ 4\ 3\ 2\ 2\ 2\ 1\ 3\ 2\ | = 8 + 18 + 8 - 6 - 12 - 16 = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2$$

.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ M = 2 < n^{o}\ de\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

Para su resolución se desprecia una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, y se parametriza una de las ecuaciones, por ejemplo $y = \lambda$.

El sistema resulta: $x + z =- \lambda\ x + 2z =- 3\lambda \}\quad - x - z = \lambda\ x + 2z =- 3\lambda \} \Rightarrow z =- 2\lambda$.

$x - 2\lambda = -\lambda \Rightarrow x = \lambda.$

$\underline{Solución: x = \lambda,\ y = \lambda,\ z = -2\lambda,\ \forall\lambda \in R.}$

$b)$

$B = (2\ 3a + k\ x + 5\ 2\ 3b + k\ y + 5\ 2\ 3c + k\ z + 5) = (2\ 3a\ x\ 2\ 3b\ y\ 2\ 3c\ z) -$

$= 2 \cdot 3 \cdot (1\ a\ x\ 1\ b\ y\ 1\ c\ z) + 0 = 6 \cdot (1\ 1\ 1\ a\ b\ c\ x\ y\ z) = 6 \cdot 4 = 24.$

Se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número real el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número.

4ª.- El valor del determinante de una matriz es igual que el determinante de su matriz traspuesta.

****

2º) a) Dados los vectores $\vec{u} = (1,\ 2,\ 1)$, $\vec{v} = (2,\ 1,\ 1)$ y $\vec{w} = (0,\ 2,\ 1)$, determine el volumen del paralelepípedo que definen esos tres vectores.

b) Determine la posición relativa de las rectas de ecuaciones siguientes: $r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z+2}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} -x + y + 2z - 4 = 0 \\ x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$.

----

a)

El volumen del paralelepípedo que determinan los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es equivalente al producto mixto de los tres vectores.

$$V_{\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)} = \left|\vec{u},\ \vec{v}\ y\ \vec{w}\right| = \left|\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)\right| = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix} \right\| = |1 + 4 - 2 - 4| =$$

$$= |-1| = 1.$$

$$\underline{V_{\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)} = 1\,u^3.}$$

b)

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} -x + y + 2z - 4 = 0 \\ x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 4 - 2\lambda \\ x + \end{cases}$$

$$y = 3 - \lambda;\ \ -x + 3 - \lambda = 4 - 2\lambda;\ \ x = -1 + \lambda \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \end{cases}$$

.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(-1,\ 0,\ -2)$ y $\vec{v}_r = (4,\ 6,\ 1)$. Recta s: $B(-1,\ 3,\ 0)$ y $\vec{v}_s = (1,\ -1,\ 1)$.

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = [(-1,\ 3,\ 0) - (-1,\ 0,\ -2)] = (0,\ 3,\ 2)$.

Según que los vectores $\left\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\right\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\right\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$Rang\left\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\right\} \Rightarrow |4\ 6\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 3\ 2\,| = -\ 8\ +\ 3\ -\ 12\ -\ 12\ = -\ 20 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rang\left\{\vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\right\} =\ 3 \Rightarrow \vec{v}_r,\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan}.$

****

3º) a) Considere la función $f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$:

a_1) Determine las asíntotas de la función $f(x)$.

a_2) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

b) Calcule la siguiente integral: $I = \int \frac{9}{x^2+x-2} \cdot dx$.

----

a)

a_1)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x-1} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x - 1 = 0;\ \ x = 1 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2-3x+3}{x-1}}{x} = \frac{x^2-3x+3}{x^2-x} = 1.$$

$$n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \left(\frac{x^2-3x+3}{x-1} - x\right)\frac{x^2-3x+3-x^2+x}{x-1} =$$

$$\frac{-2x+3}{x-1} = -2.$$

$$\underline{La\ recta\ y = x - 2\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función}.$$

a_2)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{(2x-3)\cdot(x-1)-\left(x^2-3x+3\right)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-3x+3-x^2+3x-3}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2.$$

Las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 3 \in (2, +\infty)$ es: $f'(3) = \frac{3\cdot(3-2)}{(3-1)^2} =$

$= \frac{3\cdot 1}{2^2} = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow Creciente.$

Teniendo en cuenta lo anterior y que el dominio de la función es $D(f) \Rightarrow R - \{1\}$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento:\ x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento:\ x \in (0, 1) \cup (1, 2)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2-x(x-2)[2\cdot(x-1)\cdot 1]}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)^2-2x(x-2)}{(x-1)^3} = \frac{2\left(x^2-2x+1\right)-2x^2+4x}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^2-4x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{2}{(0-1)^3} = \frac{2}{-1} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{0-0+3}{0-1} = \frac{3}{-1} = -3 \Rightarrow \underline{Máximo: O(0, -3)}.$$

$$f''(2) = \frac{2}{(2-1)^3} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{2^2-3\cdot 2+3}{2-1} = \frac{4-6+3}{1} = 1 \Rightarrow \underline{Mínimo: A(2, 1)}.$$

$b)$

$$I = \int \frac{9}{x^2+x-2} \cdot dx.$$

$$x^2 + x - 2 = 0; \;\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2, \; x_2 = 1.$$

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1).$$

$$\frac{9}{x^2+x-2} = \frac{M}{x+2} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx-M+Nx+2N}{(x+2)(x-1)} = \frac{(M+N)x+(-M+2N)}{x^2+x-2} \Rightarrow \;\; M + N = 0 \;\; - M + 2N =$$

$$\Rightarrow 3N = 9; \;\; N = 3; \;\; M + 3 = 0 \Rightarrow M = -3.$$

$$I = \int \frac{9}{x^2+x-2} \cdot dx = \int \left(\frac{-3}{x+2} + \frac{3}{x-1} \right) \cdot dx = -3 \cdot L|x + 2| + 3 \cdot L|x - 1| + C =$$

$$= L\left|\frac{x-1}{x+2}\right|^3 + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{9}{x^2+x-2} \cdot dx = L\left|\frac{x-1}{x+2}\right|^3 + C = 3L\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.}$$

****

4º) Se lanza 10 veces un dado equilibrado (es decir un dado donde todas sus caras tienen la misma probabilidad de aparecer):

a) Determine la probabilidad de que salga un número par en todos los lanzamientos.

b) Determine la probabilidad de que salga un número par exactamente en tres lanzamientos. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

----

a)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$Sacar\ nº\ par\text{:}\ p = 0,5;\ \ Sacar\ nº\ impar\text{:}\ q = 0,5;\ \ n = 10;\ \ r = 10.$

Sabiendo que la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial es $P = \binom{n}{r} \cdot p^{r} \cdot q^{n-r}$.

$$p = \binom{10}{10} \cdot 0,5^{10} \cdot 0,5^{0} = 1 \cdot 0,5^{10} \cdot 1 = \underline{\frac{1}{2^{10}} = 0,000977.}$$

b)

$$p = \binom{10}{3} \cdot 0,5^{3} \cdot 0,5^{7} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} \cdot 0,5^{10} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 6} \cdot 0,5^{10} = 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0,5^{10} =$$

$$= 120 \cdot 0,5^{10} = 120 \cdot 0,000977 = \underline{0,1172}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Dadas las matrices $A = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ )\ y\ B = (1\ \ -\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 2\ 0\ 2\ )$, encuentre la matriz X, de dimensión 3×3, que resuelve la ecuación matricial: $AX + B = A^2$.

b) Determine el rango de la matriz $C = (2\ 1\ 3\ 4\ 2\ k\ k\ k\ 1\ )$ según los diferentes valores del parámetro k.

----

a)

$$AX + B = A^2;\ \ AX = A^2 - B;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot\left(A^2 - B\right);$$

$$I\cdot X = A^{-1}\cdot\left(A^2 - B\right) \Rightarrow \underline{X = A^{-1}\cdot\left(A^2 - B\right)}.$$

$$A^2 = A\cdot A = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ )\cdot(0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) = I.$$

$$A^2 - B = I - B = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) - (1\ \ -\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 2\ 0\ 2\ ) = (0\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 2\ 0$$

.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_2\right\} \Rightarrow (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ ).$$

$$X = A^{-1}\cdot\left(A^2 - B\right) = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ )\cdot(0\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 2\ 0\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 1\ ) = (-\ 1\ 2\ 0\ 0\ 1$$

.

$$\underline{X = (-\ 1\ 2\ 0\ 0\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 1\ )}.$$

b)

$$|C| = |2\ 1\ 3\ 4\ 2\ k\ k\ k\ 1\ | = 4 + 12k + k^2 - 6k - 2k^2 - 4 =- k^2 + 6k = 0;$$

$$-\ k(k - 6) = 0 \Rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = 6.$$

$$\underline{Para\ \{k\neq 0\ k\neq 6\ \} \Rightarrow Rang\ C = 3}.$$

$$Para\ k = 0 \Rightarrow C = (2\ 1\ 3\ 4\ 2\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow |1\ 3\ 2\ 0\ | \neq 0.$$

$Para\ k = 6 \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 6 & 6 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$

$\underline{Para \begin{Bmatrix} k = 0 \\ k = 6 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ C = 2.}$

****

2º) Determine el valor de los parámetros m y n que hacen que la recta r de ecuación $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$ esté contenida en el plano $\pi \equiv mx + y + nz = 4$.

Para que la recta r esté contenida en el plano π es condición necesaria que el vector director de la recta sea perpendicular al vector normal del plano.

La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x + z = 2 - \lambda \\ 2x + z = 3 - 3\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 1 - 2\lambda;\ \ 1 - 2\lambda + z = 2 - \lambda;\ \ z = 1 + \lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

.

Un vector director de r es $\vec{v_r} = (2, \ -1, \ -1)$.

Un vector normal de π es $\vec{n} = (m, \ 1, \ n)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (2, \ -1, \ -1) \cdot (m, \ 1, \ n) = 2m - 1 - n = 0;\ \ 2m - n = 1.$ (1)

Para que la recta r esté contenida en el plano π es necesario que todos los puntos de la recta pertenezcan al plano. Un punto de r es $P(1, \ 0, \ 1)$.

Un punto pertenece a un plano cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv mx + y + nz = 4 \\ P(1, \ 0, \ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow m + 0 + n = 4;\ \ m + n = 4.$$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 2m - n = 1 \\ m + n = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 3m = 5;\ \ m = \frac{5}{3}.$$
$$\frac{5}{3} + n = 4;\ \ n = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3}.$$

$\underline{\textit{La recta } r \textit{ está contenida en el plano } \pi \textit{ para } m = \frac{5}{3} \textit{ y } n = \frac{7}{3}.}$

****

3º) $a)$ Calcule el límite: $\left(\frac{x^2+1}{x} - \frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}$.

$b)$ De entre todos los triángulos rectángulos que tienen un área de 1 cm^2, determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo.

$c)$ Calcule el área limitada por la curva $f(x) = x^2 + x$ y la recta $g(x) = x + 4$.

$a)$

$$\left(\frac{x^2+1}{x} - \frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}} = (\infty - \infty)^{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^3+x-x^3+x^2+x-2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}} = \left(\frac{x^2+2x-2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indet.\ nº\ e \Rightarrow$$

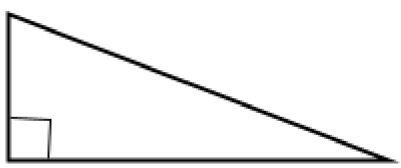
$$\Rightarrow \left(1 + \frac{2x-2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{2x-2}}\right)^{\frac{3+x^2}{x}} = \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{2x-2}}\right)^{\frac{3+x^2}{x}\cdot\frac{x^2}{2x-2}\cdot\frac{2x-2}{x^2}} =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{2x-2}}\right)^{\frac{x^2}{2x-2}}\right]^{\frac{3+x^2}{x}\cdot\frac{2x-2}{x^2}} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{2x-2}}\right)^{\frac{x^2}{2x-2}}\right]^{\frac{6x-6+2x^3-2x^2}{x^3}} =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{2x-2}}\right)^{\frac{x^2}{2x-2}}\right]^{\frac{2x^3-2x^2+6x-6}{x^3}} = e^{\frac{2x^3-2x^2+6x-6}{x^3}} = e^2 .$$

$$\underline{\left(\frac{x^2+1}{x} - \frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}} = e^2.}$$

$b)$



$$S = \frac{b\cdot c}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{b}.$$

Por el teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2 =$

$$= b^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2 = b^2 + \frac{4}{b^2} = \frac{b^4+4}{b^2} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{b^4+4}{b^2}} = \frac{\sqrt{b^4+4}}{b}.$$

La hipotenusa es mínima cuando se anule su primera derivada y sea positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$a'(b) = \frac{\frac{4b^3}{2\sqrt{b^4+4}}\cdot b - \sqrt{b^4+4}\cdot 1}{b^2} = \frac{\frac{2b^4}{\sqrt{b^4+4}} - \sqrt{b^4+4}}{b^2} = \frac{2b^4 - \left(\sqrt{b^4+4}\right)^2}{b^2\cdot\sqrt{b^4+4}} = \frac{2b^4 - b^4 - 4}{b^2\cdot\sqrt{b^4+4}} =$$

$$= \frac{b^4-4}{b^2\cdot\sqrt{b^4+4}}.$$

$$a'(b) = 0 \Rightarrow \frac{b^4-4}{b^2\cdot\sqrt{b^4+4}} = 0;\ \ b^4 - 4 = 0 \Rightarrow (b > 0) \Rightarrow b = \sqrt{2}.$$

Justificación de que el valor hallado es el mínimo:

$$a''(b) = \frac{4b^3\cdot\left(b^2\cdot\sqrt{b^4+4}\right) - \left(b^4-4\right)\cdot\left(2b\cdot\sqrt{b^4+4} + b^2\cdot\frac{4b^3}{2\sqrt{b^4+4}}\right)}{b^4\cdot\left(b^4+4\right)}.$$

$$a''\left(\sqrt{2}\right) = \frac{4\cdot 2\sqrt{2}\cdot\left(2\cdot\sqrt{4+4}\right) - (4-4)\cdot(\cdots\cdots)}{4\cdot(4+4)} = \frac{8\sqrt{2}\cdot\left(2\cdot\sqrt{8}\right) - 0}{4\cdot 8} > 0 \Rightarrow Mínimo.$$

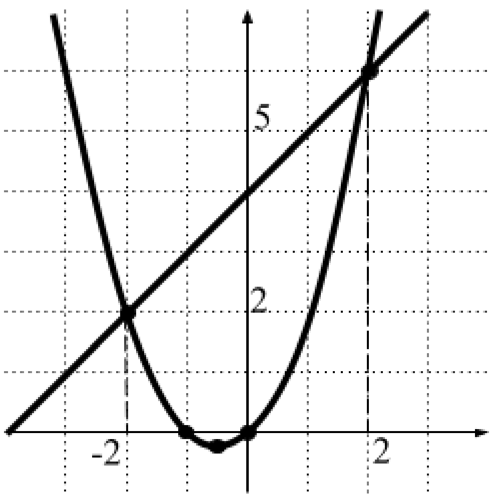
$$c = \frac{2}{b} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \qquad\qquad a = \frac{\sqrt{2^4+4}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2.$$

$\underline{Los\ lados\ del\ triángulo\ son\ a = 2\ cm,\ b = c = \sqrt{2}\ cm.}$

$c)$

La función $f(x) = x^2 + x$ es una parábola convexa ($\cup$) que corta al eje de abscisas en los puntos $O(0,\ 0)\ y\ A(-\ 1,\ 0)$.

El vértice de la parábola es el siguiente:



$$f'(x) = 2x + 1 = 0 \to x = -\frac{1}{2} \Rightarrow V\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\right).$$

Los puntos de corte de la parábola y la recta se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 + x = x + 4;\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow B(-2,\ 2) \\ x_2 = 2 \rightarrow C(2,\ 6) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.

En el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, $(-2,\ 2)$, todas las ordenadas de la recta son mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)]\cdot dx = \int_{-2}^{2} \left[(x + 4) - \left(x^2 + x\right)\right]\cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(x + 4 - x^2 - x\right)\cdot dx = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right)\cdot dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left[4\cdot(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right] = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \underline{\frac{32}{3}\ u^2 = 10,67\ u^2}.$$

****

4º) a) En una clase de 20 alumnos, 10 estudian ruso, 12 practican algún deporte y tan solo 2 hacen ambas cosas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, si estudia ruso, practique algún deporte?

b) Un tirador de pistola olímpica, tiene una probabilidad de 0,8 de hacer blanco. Si dispara 12 veces, ¿cuál es la probabilidad de que haga 10 o más blancos? (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

----

a)

$Datos$: $P(R)=\frac{10}{20}=0,5$; $P(D)=\frac{12}{20}=\frac{3}{4}=0,75$; $P(R\cap D)=\frac{2}{20}=0,1$.

$$P=P(D/R)=\frac{P(R\cap D)}{P(R)}=\frac{0,1}{0,5}=\underline{0,2}.$$

b)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$Hacer\ blanco$: $p=0,8$; $Fallar$: $q=0,2$; $n=12$.

Sabiendo que la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial es $P=\binom{n}{r}\cdot p^{r}\cdot q^{n-r}$, siendo r los casos de éxito.

$$P=\binom{12}{10}\cdot 0,8^{10}\cdot 0,2^{2}+\binom{12}{11}\cdot 0,8^{11}\cdot 0,2^{1}+\binom{12}{12}\cdot 0,8^{12}\cdot 0,2^{0}=$$

$$=\frac{12!}{(12-10)!\cdot 10!}\cdot 0,8^{10}\cdot 0,04+12\cdot 0,8^{11}\cdot 0,2+1\cdot 0,8^{12}\cdot 1=$$

$$=\frac{12\cdot 11}{2}\cdot 0,8^{10}\cdot 0,04+2,4\cdot 0,8^{11}+0,8^{12}=0,8^{10}\cdot\left(66\cdot 0,04+2,4\cdot 0,8+0,8^{2}\right)=$$

$$=0,8^{10}\cdot(2,64+1,92+0,64)=0,107374182\cdot 5,20=\underline{0,5583}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1º) Discutir el sistema resolver en las casos de compatibilidad: $\begin{cases} 2x + y + z = a \\ 2x + y + 2z = 2a \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes es $Rang\ M = 2$ por tener dos columnas proporcionales.

El rango de la matriz ampliada es el siguiente, en función del parámetro a:

$Rang\ M' \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ F_2 \to F_2 - F_1 \atop F_3 \to F_3 - F_1 \right\} \Rightarrow (2\ 1\ 1$

$\Rightarrow \left\{ F_3 \to F_3 - 2F_2 \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 3 - 3a \end{pmatrix} \Rightarrow 3 - 3a = 0 \Rightarrow a = 1.$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

$$\underline{Para\ a \neq 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Para $a \neq 1$ el sistema resulta: $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se desprecia una ecuación (tercera) y se hace $x = \lambda$:

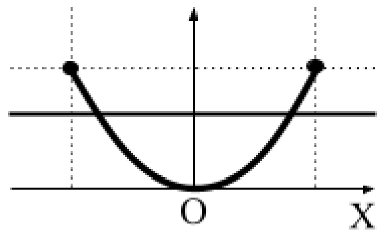
$\left. \begin{array}{l} y + z = 1 - 2\lambda \\ y + 2z = 2 - 2\lambda \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} -y - z = -1 + 2\lambda \\ y + 2z = 2 - 2\lambda \end{array}$

.

$$\underline{Solución: x = \lambda,\ \ y = -2\lambda,\ \ z = 1,\ \ \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Se tiene un abrevadero de longitud 6 m y de altura 1 m. Su sección es la descrita en la figura adjunta formada por la función $y = x^2$. Por h indicamos la altura del nivel del líquido.



a) Comprueba que el área de la región S, sombreada en la figura, en función de h se puede expresar como $S(h) = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$.

b) Determina la altura h donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero. Nota: El volumen es $V = S \cdot l$.

----

a)

Los puntos genéricos de la función $y = x^2$ son de la forma $P\left(x,\ x^2\right)$; si se hace $y = h$ las coordenadas del punto son $P\left(\sqrt{h},\ h\right)$. Teniendo en cuenta que la función $y = x^2$ es simétrica con respecto al eje de ordenadas, la superficie tiene la siguiente expresión:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{h}} \left(h - x^2\right) \cdot dx = 2 \cdot \left[hx - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{h}} = 2 \cdot \left[\left(h \cdot \sqrt{h} - \frac{\left(\sqrt{h}\right)^3}{3}\right) - 0\right] =$$

$$= 2 \cdot \left(h\sqrt{h} - \frac{h\sqrt{h}}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{2h\sqrt{h}}{3}\right) = \underline{\frac{4h\sqrt{h}}{3},\ c.\ q.\ c.}$$

b)

El Volumen total en función de h es: $V(h) = S \cdot l = \frac{4h\sqrt{h}}{3} \cdot 6 = 8h\sqrt{h}$.

Teniendo en cuenta que $h = 1$: $V_T = 8 \cdot 1 \cdot \sqrt{1} = 8\ m^3$.

La altura cuando el volumen se reduce a la mitad $\left(4\ m^3\right)$ es la siguiente:

$$8h\sqrt{h} = 4;\ \ 2 \cdot \sqrt{h^3} = 1;\ \ \sqrt{h^3} = \frac{1}{2};\ \ h^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}.$$

$$\underline{El\ volumen\ es\ la\ mitad\ del\ total\ para\ h = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\ m \cong 0,63\ m.}$$

****

3º) Los puntos $A(0,\ 1,\ 0)$ y $B(-\ 1,\ 1,\ 1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. Además la recta que une A y C es perpendicular a la recta r.

$a)$ Determinar el punto C. $b)$ Calcula el área del triángulo.

$a)$

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{BA} = (1,\ 0,\ -\ 1)$.

La recta r tiene la siguiente expresión: $r \equiv \begin{cases} x = 4 \\ y = \mu \\ z = 1 \end{cases}$.

El haz de planos α perpendiculares a r es $\alpha \equiv y + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano β que contiene al punto $A(0,\ 1,\ 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv y + D = 0 \\ A(0,\ 1,\ 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -\ 1 \Rightarrow \beta \equiv y - 1 = 0.$$

El punto C es la intersección del plano β con la recta r:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv y - 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 4 \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda - 1 = 0;\ \lambda = 1 \Rightarrow \underline{C(4,\ 1,\ 1)}$$

.

$b)$

$\overrightarrow{BC} = [C - A] = [(4,\ 1,\ 1) - A(0,\ 1,\ 0)] = (4,\ 0,\ 1)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\ 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |-\ 4j - j| = \frac{1}{2} \cdot |-\ 5j| = \frac{5}{2}$$

.

$$\underline{S_{ABC} = \frac{5}{2} \cdot u^2 = 2,5\ u^2}.$$

****

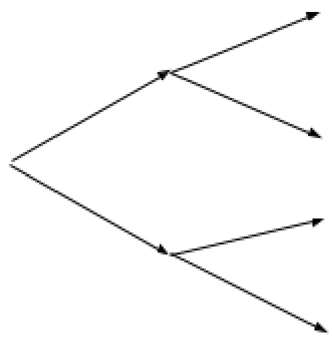
4º) Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dos dados y se lanza.

a) Calcula la probabilidad de sacar 5.

b) Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dato trucado?

----

a)



$$P = P(5) = P(N)\cdot P(5/N) + P(T)\cdot P(5/T) = 0,5\cdot\frac{1}{6} + 0,5\cdot\frac{4}{6} = 0,5\cdot\frac{5}{6} =$$

$$= \frac{2,5}{6} = \frac{25}{60} = \underline{\frac{5}{12} = 0,4167}.$$

b)

$$P = P(T/5) = \frac{P(T\cap 5)}{P(5)} = \frac{P(T)\cdot P(5/T)}{P(N)\cdot P(5/N)+P(T)\cdot P(5/T)} = \frac{0,5\cdot\frac{4}{6}}{0,5\cdot\frac{1}{6}+0,5\cdot\frac{4}{6}} = \frac{0,5\cdot 4}{0,5+2} = \frac{2}{2,5} =$$

$$= \frac{20}{25} = \underline{\frac{4}{5} = 0,8}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = (1\ 0\ 0\ 2\ 3\ 1\ 1\ 6\ 2 \quad 1\ 4\ 4\ )$, calcula:

$a)$ Su rango.

$b)$ Si existe, una columna combinación lineal de las restantes.

$c)$ Si existe, una fila combinación lineal de las restantes.

$a)$

$Rang\ A \Rightarrow (1\ 0\ 0\ 2\ 3\ 1\ 1\ 6\ 2 \quad 1\ 4\ 4\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 - 2F_1\ F_3 \to F_3 - F_1\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 3$

$\Rightarrow \left\{F_3 \to F_3 - 2F_2\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 3\ 1\ 0\ 0\ 0 \quad 1\ 2\ -\ 1\ ) \Rightarrow \underline{Rang\ A = 3}.$

$b)$

Las columnas segunda y tercera son linealmente dependientes; en particular se observa claramente en la matriz expresada escalonadamente.

$\underline{Las\ columnas\ segunda\ y\ tercera\ son\ combinación\ lineal}.$

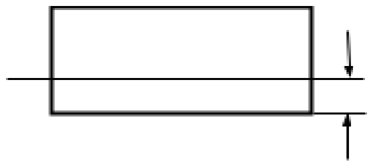
$c)$

Como la matriz tiene tres filas y su rango es tres, se deduce, necesariamente que:

$\underline{No\ existe\ ninguna\ fila\ combinación\ lineal\ de\ las\ demás}.$

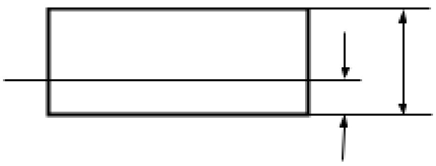
****

2º) Se tienen 20 metros de un marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular. El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura h que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (la sombreada en la figura adjunta) sea la máxima posible.



Sean $x\, e\, y$ las dimensiones de la base y la altura del rectángulo, respectivamente.

$2x + 2y = 20;\ \ x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x.$



Se sabe que $h = \frac{x}{5}$.

La superficie visible es: $S = x \cdot (y - h)$.

El valor de la superficie visible en función de x es la siguiente:

$$S(x) = x \cdot \left(10 - x - \frac{x}{5}\right) = \frac{x}{5}(50 - 5x - x) = \frac{x}{5}(50 - 6x) = \frac{1}{5}\left(50x - 6x^2\right).$$

Para que la superficie sea máxima tiene que anularse su primera derivada y ser negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$S'(x) = \frac{1}{5} \cdot (50 - 12x).\qquad S''(x) = \frac{1}{5} \cdot (-12) < 0 \Rightarrow Máximo.$

$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot (50 - 12x) = 0;\ \ 50 - 12x = 0;\ \ 25 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{25}{6}.$

$y = 10 - x = 10 - \frac{25}{6} = \frac{60-25}{6} = \frac{35}{6}.\qquad \frac{25}{6} \cong 4,16.\ \ \frac{25}{6} \cong 5,83.$

$\underline{Las\ dimensiones\ son,\ aproximadamente,\ 4,16\ m\ de\ base\ y\ 5,83\ m\ de\ altura.}$

****

3º) Dados los puntos $A(2,\ 1,\ 0)$ y $B(1,\ 0,\ -1)$ y la recta r que determinan. Y sea s la recta definida por $s\equiv\{x + y = 2\ y + z = 0$.

a) Estudia la posición relativa de las dos rectas.

b) Determina un punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares.

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{v_r} = [A - B] = (1,\ 1,\ 1)$.

La expresión de r mediante unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$r\equiv\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \{x - 2 = z\ x - 2 = y - 1\ \}\Rightarrow r\equiv\{x - z = 2\ x - y = 1$.

Las rectas r y s determinan el sistema $\{x - z = 2\ x - y = 1\ x + y = 2\ y + z = 0$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (1\ 1\ 1\ 0\ \ 0\ -1\ 1\ 1\ \ -1\ 0\ 0\ 1\ )$ y $M' = (1\ 0\ -1\ 2\ 1\ 1\ 0\ -1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ 1\ 0\ )$.

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

$1 - Rang\ M = 3,\ Rang\ M' = 4 \Rightarrow Se\ cruzan.$

$2 - Rang\ M = 3,\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Se\ cortan.$

$3 - Rang\ M = 2,\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Son\ paralelas.$

$4 - Rang\ M = 2,\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Son\ coincidentes.$

$Rango\ de\ M \Rightarrow \left\{F_1, F_2, F_3\right\} \Rightarrow |1\ 0\ -1\ 1\ -1\ 0\ 1\ 1\ 0\ | = -1 - 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3$.

$Rang\ M' \Rightarrow |1\ 0\ -1\ 2\ 1\ 1\ 0\ -1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ 1\ 0\ | \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\ F_3 \rightarrow F\right.$,

por tener las dos últimas filas iguales $\Rightarrow Rang\ M' = 3$.

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan.}$

$b)$

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es $s \equiv \{x = 2 - \lambda\ y = \lambda \quad z = -\lambda$.

Un punto genérico de s es $C(2 - \lambda,\ \lambda,\ -\lambda)$.

$\overrightarrow{CA} = [A - C] = [(2,\ 1,\ 0) - (2 - \lambda,\ \lambda,\ -\lambda)] = (\lambda,\ 1 - \lambda,\ \lambda)$.

$\overrightarrow{CB} = [B - C] = [(1,\ 0,\ -1) - (2 - \lambda,\ \lambda,\ -\lambda)] = (-1 + \lambda,\ -\lambda,\ -1 + \lambda)$
.

Los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ serán perpendiculares cuando su producto escalar es 0:

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (\lambda,\ 1 - \lambda,\ \lambda) \cdot (-1 + \lambda,\ -\lambda,\ -1 + \lambda) = 0;$

$-\lambda + \lambda^2 - \lambda + \lambda^2 - \lambda + \lambda^2 = 0;\ 3\lambda^2 - 3\lambda = 0;\ 3\lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$
.

$\underline{Existen\ dos\ puntos\ que\ cumplen\ lo\ pedido:\ C_1(2,\ 0,\ 0)\ y\ C_2(1,\ 1,\ -1).}$

****

4º) En una ciudad hay dos equipos destacados, uno de fútbol y otro de baloncesto. Todos los habitantes son seguidores de alguno de los dos equipos. Se sabe que hay un 60 % de seguidores del equipo de fútbol y otro 60 % del equipo de baloncesto. Calcula:

a) La probabilidad de que un habitante sea seguidor de ambos equipos a la vez.

b) La probabilidad de que un habitante sea únicamente seguidor del equipo de fútbol.

c) Se elige al azar un habitante de la ciudad y se comprueba que es seguidor del equipo de baloncesto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea también seguidor del equipo de fútbol?

$$Datos: P(F)=0,6;\ \ P(B)=0,6;\ \ P(F\cup B)=1.$$

a)

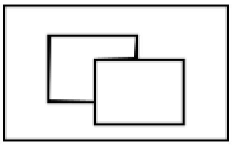
$$P=P(F\cap B) \Rightarrow P(F\cup B)=P(F)+P(B)-P(F\cap B).$$

$$P(F\cap B)=P(F)+P(B)-P(F\cup B)=0,6+0,6-1=1,2-1=\underline{0,2}$$

.

b)

$$P=P(F)-P(F\cap B)=0,6-0,2=\underline{0,4}.$$



c)

$$P=P(F/B)=\frac{P(F\cap B)}{P(B)}=\frac{0,2}{0,6}=\underline{0,3333}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde m es un número real.

a) Estudia el rango de A según los valores de m.

b) Para $m = -1$, calcula la solución, si existe, del sistema $A^t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.

----

a)

El rango de la matriz A en función del parámetro m es el siguiente:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1 + m - 1 + m - 1 - (m -$

$- 1 - 1 = 3m - 5 - \left(m^3 - 3m^2 + 3m - 1\right) = 3m - 5 - m^3 + 3m^2 - 3m + 1 =$

	1	-3	0	4
-1		-1	4	-4
	1	-4	4	$\boxed{0}$
2		2	-4	
	1	-2	$\boxed{0}$	
2		2		
	1	$\boxed{0}$		

$= -m^3 + 3m^2 - 4 = 0;\ m^3 - 3m^2 + 4 = 0.$

Resolviendo por la regla de Ruffini:

$x_1 = -1;\ x_2 = x_3 = 2.$

$\underline{Para\ \{m \neq -1,\ m \neq 2\} \Rightarrow Rang\ A = 3}.$

$Para\, m\ =-\ 1 \Rightarrow A\ =\ (1\ 1\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 1\ 1\ ) \Rightarrow |1\ 1\ 1\ \ -\ 2\,|\ =-\ 2\ -\ 1\ =-$

.

$\underline{Para\, m\ =-\ 1 \Rightarrow Rang\ A\ =\ 2}.$

$Para\, m\ =\ 2 \Rightarrow A\ =\ (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ ) \Rightarrow Rang\ A\ =\ 1.$

$\underline{Para\, m\ =\ 2 \Rightarrow Rang\ A\ =\ 1}.$

$b)$

Para $m\ =-\ 1 \Rightarrow A^{t}\ =\ A\ =\ (1\ 1\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 1\ 1\ ).$

$A^{t} \cdot (x\ y\ z\ ) = (0\ 0\ 0\ ) \Rightarrow\ (1\ 1\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 1\ 1\ ) \cdot (x\ y\ z\ ) = (0\ 0\ 0\ ) \Rightarrow\ \ x\ +\ y$

.

Se trata de un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes tiene rango dos.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, por ser el rango de la matriz de coeficientes (que en este caso es igual que el rango de la matriz ampliada) menor que el número de incógnitas el sistema tiene infinitos grupos de soluciones.

Despreciando una ecuación (por ejemplo, la tercera) y haciendo $z\ =\ \lambda$:

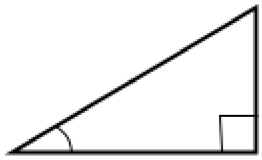
$x\ +\ y\ =\ 2\lambda\, x\ -\ 2y\ =-\ \lambda\,\}\quad x\ +\ y\ =\ 2\lambda\ \ -\ x\ +\ 2y\ =\ \lambda\,\} \Rightarrow 3y\ =\ 3\lambda;\ \ y\ =\ x$

.

$\underline{Solución\!: x\ =\ y\ =\ z\ =\ \lambda, \forall \lambda \in R}.$

****

2º) Se quiere construir una rampa (ver gráfica) para camiones con una pendiente $m = tag\,\alpha > 0$ y que salva una altura $h = 20$ m.



a) Calcula, en función de m, el valor de b y comprueba que la longitud de la rampa l se puede expresar como $l\,(m) = 20\cdot\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}$.

b) El camión se mueve a una velocidad constante que depende de la pendiente m y se expresa, en metros por segundo, a través de la función $v\,(m) = \frac{1}{\sqrt{m}}$. Demuestra que el tiempo t, en segundos, que tarde en recorrer la rampa se puede expresar como $t\,(m) = 20\cdot\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}$.

c) Calcula la pendiente m que hace mínimo el tiempo de recorrido de un camión. (Se recuerda que $tag = tangente\ y\ velocidad = espacio/tiempo$).

----

a)

$$tag\,\alpha = \frac{h}{b} = m \Rightarrow b = \frac{h}{m} = \frac{20}{m}.$$

$$l = \sqrt{b^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{20}{m}\right)^2 + 20^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{20^2}{m^2} + 20^2} = 20\cdot\sqrt{\frac{1}{m^2} + 1} = 20\cdot\sqrt{\frac{1+m^2}{m^2}}.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ l = 20\cdot\sqrt{\frac{1+m^2}{m^2}}}.$$

b)

$$v = \frac{e}{t} \Rightarrow t = \frac{e}{v} = \frac{l}{\frac{1}{\sqrt{m}}} = \frac{20\cdot\sqrt{\frac{1+m^2}{m^2}}}{\frac{1}{\sqrt{m}}} = 20\cdot\sqrt{\frac{1+m^2}{m^2}}\cdot\sqrt{m} = 20\cdot\sqrt{\frac{m\left(1+m^2\right)}{m^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{t\,(m) = 20\cdot\sqrt{\frac{m^2+1}{m}},\ como\ se\ debía\ demostrar.}$$

c)

La condición necesaria para que el tiempo sea mínimo es que se anule su primera derivada:

$$Lt = L20 + \frac{1}{2}L\left(m^2 + 1\right) - \frac{1}{2}Lm.$$

$$\frac{t'}{t} = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2m}{m^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{m}{m^2+1} - \frac{1}{2m} = \frac{2m^2-(m^2+1)}{2m(m^2+1)} = \frac{2m^2-m^2-1}{2m(m^2+1)} = \frac{m^2-1}{2m(m^2+1)};$$

$$t' = t \cdot \frac{m^2-1}{2m(m^2+1)} = 20 \cdot \sqrt{\frac{m^2+1}{m}} \cdot \frac{m^2-1}{2m(m^2+1)} = 0 \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m_1 = -1,\ m_2 = 1.$$

La solución negativa carece de sentido lógico, por lo cual es $m = 1$.

$\underline{El\ tiempo\ es\ mínimo\ cuando\ m = tag\ \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 45°}$.

****

3º) Sean r y s dos rectas perpendiculares que se cortan. La recta r viene dada por la ecuación $r \equiv \frac{x-1}{2} = y + 1 = -z + 2$. Calcula:

a) Un vector director de r.

b) Un vector director de s sabiendo que $\vec{v_r} \times \vec{v_s}$ es proporcional al vector $(1,\ 0,\ 2)$.

c) Las ecuaciones del plano π que contiene a ambas rectas.

----

a)

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y + 1 = -z + 2 \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow \underline{\vec{v_r} = (2,\ 1,\ -1)}$$

.

b)

Sea $\vec{v_s} = (a,\ b,\ c)$ el vector director de s.

Por ser las rectas perpendiculares es $\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = 0$:

$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = (2,\ 1,\ -1) \cdot (a,\ b,\ c) = 0;\ \ 2a + b - c = 0.$ (1)

$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = |i\ j\ k\ 2\ 1\ -1\ a\ b\ c| = ci - aj + 2bk - ak + bi - 2cj =$

$= (b + c)i + (-a - 2c)j + (-a + 2b)k.$

Por ser $\vec{v_r} \times \vec{v_s}$ es proporcional al vector $(1,\ 0,\ 2)$:

$\frac{b+c}{1} = \frac{-a-2c}{0} = \frac{-a+2b}{2} \Rightarrow \{-a - 2c = 0;\ a + 2c = 0 \quad 2b + 2c = -a + 2b;\ a$

$\Rightarrow a + 2c = 0.$ (2)

De las ecuaciones (1) y (2):

$2a + b - c = 0\ a + 2c = 0 \quad \}\ 4a + 2b - 2c = 0\ a + 2c = 0 \quad \} \Rightarrow 5a + 2b$

.

$c = -\frac{a}{2} = -\frac{-\frac{2b}{5}}{2} = \frac{b}{5}.$

$$\vec{v}_s = (a,\ b,\ c) = \left(-\frac{2b}{5},\ b, \frac{b}{5}\right) \Rightarrow \underline{\vec{v}_s = (-\ 2,\ 5,\ 1)}.$$

$c)$

Un punto de la recta r es $P(1,\ -\ 1,\ 2)$.
La ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(\vec{v}_r, \vec{v}_s, P\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x - 1) + 2(y + 1) + 10(z - 2) + 2(z - 2) + 5(x - 1) - 2(y + 1) = 0;$$

$$6(x - 1) + 12(z - 2) = 0;\ \ x - 1 + 2(z - 2) = 0;\ \ x - 1 + 2z - 4 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv x + 2z - 5 = 0}.$$

****

4º) En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes: A y B. Se conocen las siguientes probabilidades: $P(A \cap B) = 0,3$ y $P(A/B) = 0,5$. Calcula:

$a)$ $P(A)$ y $P(B)$. $b)$ $P(A \cup B)$ y $P(B/A)$.

$c)$ La probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B.

$a)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A/B)} = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5}.$$

$$\underline{P(A) = \frac{3}{5} = 0,6.}$$

Por ser los sucesos A y B independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{P(B) = \frac{1}{2} = 0,5.}$$

$b)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 1,1 - 0,3 = 0,8$$

.

$$\underline{P(A \cup B) = 0,8.}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5}.$$

$$\underline{P(B/A) = \frac{3}{5} = 0,6.}$$

$c)$

$$P = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ no\ se\ produzca\ ni\ A\ ni\ B\ es\ 0,2.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = (1\ 3\ 0\ 1\ ),\ B = (1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ )\ y\ C = (1\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 2\ )$:

a) Calcula, si existe, la inversa de B.

b) Determina, si existe, la matriz X que verifica la relación $AXB\ =\ C$.

----

a)

La inversa de B se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $B^{-1} = \frac{Adj.\ de\ B^t}{|B|}$.

$|B| = |1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ | =-\ 1\ +\ 1\ -\ 1\ =-\ 1.$ $B^t = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ \ -$

.

$Adj.\ \ B^t = (|1\ 1\ 1\ \ -\ 1|\ \ -|0\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ |\ |0\ 1\ \ -\ 1\ 1\ |\ \ -|0\ 1\ 1\ \ -\ 1\ |\ |1\ 1\ \ -$

$\Rightarrow \underline{B^{-1} = (2\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ )}.$

b)

$A{\cdot}X{\cdot}B\ =\ C;\ A^{-1}{\cdot}A{\cdot}X{\cdot}B{\cdot}B^{-1} = A^{-1}{\cdot}C{\cdot}B^{-1};\ I{\cdot}X{\cdot}I\ =\ A^{-1}{\cdot}C{\cdot}B^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow X\ =\ A^{-1}{\cdot}C{\cdot}B^{-1}$. La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan:

$(A/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 -\ 3F_2\right\} \Rightarrow (1\ \ -\ 3\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1} = (1\ \ -\ 3\ 0\ 1\ ).$

$X\ = A^{-1}{\cdot}C{\cdot}B^{-1} = (1\ \ -\ 3\ 0\ 1\ ){\cdot}(1\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 2\ ){\cdot}(2\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ ) =$

$= (4\ 2\ \ -\ 6\ \ -\ 1\ 0\ 2\ ){\cdot}(2\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow \underline{X\ = (0\ \ -\ 2\ 4\ 0\ 1\ \ -\ 1\ )}$

.

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2+x-6}$:

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas.

b) Estudia sus máximos, mínimos y puntos de inflexión.

$c)$ Calcula una primitiva de la función $f(x)$.

$a)$

Por tratarse de una función racional su dominio es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 + x - 6 = 0;\ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-1\pm5}{2} \Rightarrow x_1 =- 3,\ x_2 = 2.$$

$$\underline{D(f)\Rightarrow R - \{- 3,\ 2\}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito. En el caso de funciones racionales, son los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{Las\ rectas\ x =- 3\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

Asíntotas horizontales: Son de la forma $y = k$; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$k = f(x) = \frac{1}{x^2+x-6} = 0\ .$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, $\{m\neq0,\ m\neq\infty\}$ siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x}\ \text{y}\ n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{1}{x^2+x-6}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\left(x^2+x-6\right)} = 0.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas}.$$

$b)$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada.

$$f'(x) = \frac{-1\cdot(2x+1)}{\left(x^2+x-6\right)^2} = \frac{-2x-1}{\left(x^2+x-6\right)^2}.$$

$$f'(x) = 0\Rightarrow\frac{-2x-1}{\left(x^2+x-6\right)^2} = 0;\ - 2x - 1 = 0;\ 2x + 1 = 0\Rightarrow x =- \frac{1}{2}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{-2\cdot\left(x^2+x-6\right)^2-(-2x-1)\cdot\left[2\left(x^2+x-6\right)\cdot(2x+1)\right]}{\left(x^2+x-6\right)^4} = \frac{-2\left(x^2+x-6\right)+2(2x+1)\cdot(2x+1)}{\left(x^2+x-6\right)^3} =$$

$$= \frac{-2x^2-2x+12+2\left(4x^2+4x+1\right)}{\left(x^2+x-6\right)^3} = \frac{-2x^2-2x+12+8x^2+8x+2}{\left(x^2+x-6\right)^3} = \frac{6x^2+6x+14}{\left(x^2+x-6\right)^3} = \frac{2\left(3x^2+3x+7\right)}{\left(x^2+x-6\right)^3}.$$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+7\right)}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-6\right)^3} = \frac{2\cdot\frac{3-6+28}{4}}{\left(\frac{1-2-24}{4}\right)^3} = \frac{\frac{25}{2}}{\left(\frac{-25}{4}\right)^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = -\frac{1}{2}.$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-6} = \frac{1}{\frac{1-2-24}{4}} = -\frac{4}{25} \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: P\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{4}{25}\right)}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un punto de inflexión es que se anule su segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\left(3x^2+3x+7\right)}{\left(x^2+x-6\right)^3} = 0;\ 3x^2 + 3x + 7 = 0;\ x = \frac{-3\pm\sqrt{9-84}}{2\cdot3} \notin 0,\ \forall x \in R.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ puntos\ de\ inflexión.}$$

c)

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2+x-6}\cdot dx = \int \frac{1}{(x+3)(x-2)}\cdot dx = \int\left(\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}\right)\cdot dx. \quad (1)$$

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{Ax-2A+Bx+3B}{x^2+x-6} = \frac{(A+B)x+(-2A+3B)}{x^2+x-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A + B = 0\ \ -2A + 3B = 1\} \quad 2A + 2B = 0\ \ -2A + 3B = 1\} \Rightarrow 5B = 1 \rightarrow B$$

.

Sustituyendo en (1) los valores de A y B obtenidos:

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2-5x+6}dx = \int\left(\frac{-\frac{1}{5}}{x+3} + \frac{\frac{1}{5}}{x-2}\right)dx = -\frac{1}{5}L|x + 3| + \frac{1}{5}L|x - 2| + C =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot L\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C \Rightarrow \underline{F(x) = \sqrt[5]{\left|\frac{x-2}{x+3}\right|} + C}.$$

****

3º) Dada la recta $r\equiv\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$, el punto $Q(1,\ 1,\ 1)$ y sea un plano π:

a) Calcula el punto P de la recta r que verifique $d(P,\ Q) = 1\ u$.

b) Se sabe que $Q\in\pi$ y que $d(P,\ Q) = d(P,\ \pi)$. Determina la ecuación del plano π.

----

a)

Los puntos de la recta r son de la forma $P(x,\ 1,\ 0)$.

$d(P,\ Q) = \sqrt{(x - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (0 - 1)^2} = 1;\ \ \sqrt{(x - 1)^2 + 1} = 1;$

$(x - 1)^2 + 1 = 1;\ \ (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1.$

$\underline{El\ punto\ pedido\ es\ P(1,\ 1,\ 0)}.$

b)

Por ser $d(P,\ Q) = d(P,\ \pi)$, el vector $\overrightarrow{PQ}$ es normal al plano π.

$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(1,\ 1,\ 1) - (1,\ 1,\ 0)] = (0,\ 0,\ 1).$

La expresión general del plano es $\pi\equiv z + D = 0$.

Por pertenecer el punto Q al plano π tiene que satisfacer su ecuación:

$\left.\begin{array}{l} Q(1,\ 1,\ 1) \\ \pi\equiv z + D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + D = 0;\ \ D = -1.$

$\underline{\pi\equiv z - 1 = 0}.$

****

4º) En la siguiente tabla se muestra la distribución de un grupo de personas en relación al consumo de tabaco:

	Fumador	No fumador
Hombres	10	30
Mujeres	20	40

Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Sea fumador.

b) Sabiendo que es fumador, se trate de una mujer.

c) Se extrae una segunda persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que una fume y la otra no?

Total hombres: 40. Total mujeres: 60. Total personas: 100.

a)

$$P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \frac{10+20}{40+60} = \frac{30}{100} = \underline{\frac{3}{10} = 0,3}.$$

b)

$$P = P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{20}{10+20} = \frac{20}{30} = \underline{\frac{2}{3}}.$$

c)

$$P = P(F\overline{F}) + P(\overline{F}F) = \frac{30}{100} \cdot \frac{70}{99} + \frac{70}{100} \cdot \frac{30}{99} = \frac{7}{33} + \frac{7}{33} = \underline{\frac{14}{33} = 0,4242}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Tenéis que resolver tres de los cuatro problemas siguientes. Se han de justificar todas las respuestas.

OPCIÓN A

1º) a) Discutir para qué valores de m el sistema $4x + my + z = m + 2\ x + y + mz =- 2(m + 1)\ \ \ 4x + y + z = m\}$ es compatible.

b) Resolvedlo en el caso de $m = 0$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (4\ m\ 1\ 1\ 1\ m\ 4\ 1\ 1\ )$ y $A' = (4\ m\ 1\ 1\ 1\ m\ 4\ 1\ 1\ \ \ m + 2\ \ - 2(m + 1)\ m\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$|A| = |4\ m\ 1\ 1\ 1\ m\ 4\ 1\ 1\ | = 4 + 1 + 4m^2 - 4 - 4m - m = 4m^2 - 5m + 1 =$

$m = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2\cdot 4} = \frac{5\pm\sqrt{9}}{8} = \frac{5\pm 3}{8} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{4},\ m_2 = 1.$

$\underline{Para \left\{m\neq\frac{1}{4}\ m\neq 1\right\}\Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg.\Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ m = \frac{1}{4}\Rightarrow A' = \left(4\ \frac{1}{4}\ 1\ 1\ 1\ \frac{1}{4}\ 4\ 1\ 1\ \ \ \frac{9}{4}\ \ - \frac{10}{4}\ \frac{1}{4}\right)\Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4$

$\Rightarrow \left|4\ \frac{1}{4}\ \frac{9}{4}\ 1\ 1\ \ - \frac{10}{4}\ 4\ 1\ \frac{1}{4}\right| = 1 + \frac{9}{4} - \frac{10}{4} - 9 - \frac{1}{16} + 10 = 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\neq 0\Rightarrow Ran$

.

$Para\ m = 1\Rightarrow A' = (4\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 4\ 1\ 1\ \ \ 3\ \ - 4\ 1\ )\Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |4\ 1\ 3\ 1\ 1\ \ -4\ 4\ 1\ 1\ | = 4 + 3 - 16 - 12 + 16 - 1 =- 6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3$
.

$\underline{Para \left\{ m = \frac{1}{4}\ m = 1 \right\} \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$b)$

Para $m = 0$ el sistema resulta $4x + z = 2\quad x + y =- 2\ 4x + y + z = 0\,\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|2\ 0\ 1\ -2\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ |}{1} = 2 - 2 = 0.$$

$$y = \frac{|4\ 2\ 1\ 1\ -2\ 0\ 4\ 0\ 1\ |}{1} =- 8 + 8 - 2 =- 2.$$

$$z = \frac{|4\ 0\ 2\ 1\ 1\ -2\ 4\ 1\ 0\ |}{1} = 2 - 8 + 8 = 2.$$

$\underline{Solución: x = 0,\ \ y =- 2,\ \ z = 2}.$

****

2º) Consideramos la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. Realizar un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[-1, 1]$. Calcular el área limitada por la gráfica de la función anterior, el eje X y las rectas verticales $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$.

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1 \Rightarrow D(f) \Rightarrow R - \{-1, 1\}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-1) - (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2-1-x^2-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}.$$

$$Para\ x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow Crecimiento: (-\infty, -1) \cup (-1, 0).$$

$$Para\ x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow Decrecimiento: (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4x}{(x^2-1)^2} = 0;\ \ -4x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{-4 \cdot (x^2-1)^2 - 4x \cdot [2 \cdot (x^2-1) \cdot 2x]}{(x^2-1)^4} = \frac{-4 \cdot (x^2-1) - 16x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{-4x^2+4-16x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{4-20x^2}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{4(1-5x^2)}{(x^2-1)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{4}{-1} = -4 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$f(0) = \frac{0+1}{0-1} = -\ 1 \Rightarrow \underline{Máximo: A(0,\ \ -\ 1)}.$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

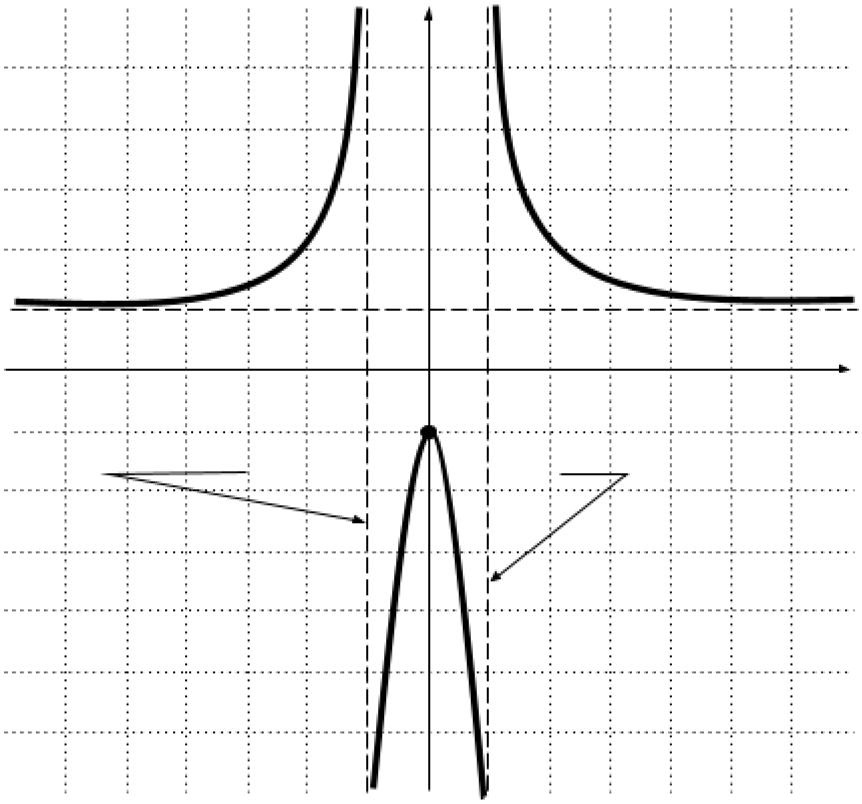
$$k = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 1}\ .$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

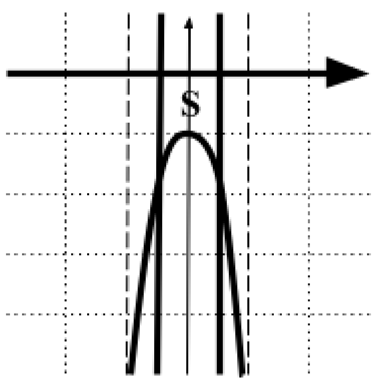
$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -\ 1,\ x = 1}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



En el intervalo considerado la función así como el recinto de la superficie a calcular se expresan en la figura siguiente.



La función $f(x)$ es simétrica con respecto al eje de ordenadas por cumplirse que $f(-x) = f(x)$, por lo cual, y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2\cdot\int_{\frac{1}{2}}^{0} f(x)\cdot dx = 2\cdot\int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot dx. \quad (*)$$

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida.

$$I = \int \frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot dx = \int \frac{x^2-1+2}{x^2-1}\cdot dx = \int dx + \int \frac{2}{x^2-1}\cdot dx = x + A. \quad (**)$$

$$A = \int \frac{2}{x^2-1}\cdot dx \Rightarrow \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{M}{x+1} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx-M+Nx+N}{(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{(M+N)x+(-M+N)}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow \quad M + N = 0 \ \ -M + N = 2 \}\Rightarrow 2N = 2;\ \ N = 1,\ M =- 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \int\left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)\cdot dx = [L|x-1| - L|x+1|] + C = L\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

Sustituyendo en (**): $I = x + L\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

Finalmente, sustituyendo en (*):

$$S = 2\cdot\int_{\frac{1}{2}}^{0} f(x)\cdot dx = 2\cdot\int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot dx = 2\cdot\left[x + L\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_{\frac{1}{2}}^{0} =$$

$$= 2\cdot\left[0 + L\left|\frac{0-1}{0+1}\right|\right] - 2\cdot\left[\frac{1}{2} + L\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\right|\right] = 2\cdot[0 + L|-1|] - 2\cdot\left[\frac{1}{2} + L\left|-\frac{1}{3}\right|\right] =$$

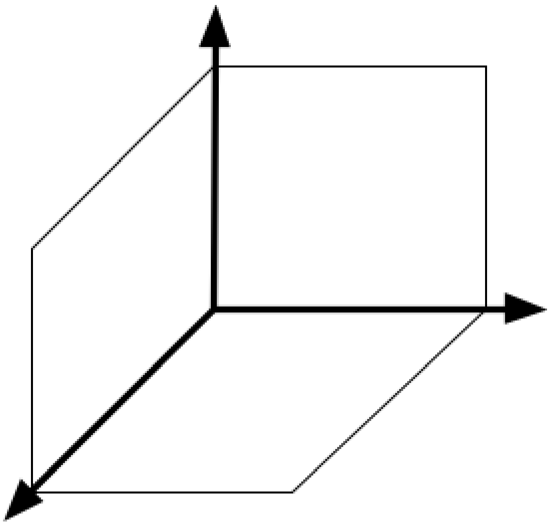
$$= 2\cdot L1 - 1 - 2\cdot L\left|\frac{1}{3}\right| = 2\cdot 0 - 1 - 2\cdot(L1 - L3) =- 1 - 2\cdot(0 - L3) =$$

$$=- 1 - 0 + 2L3 = L9 - 1.$$

$$\underline{S = (L9 - 1)\ u^2 \cong 1,20\ u^2}.$$

****

3º) Hallar los puntos A, B y C de la recta $r \equiv x - 12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3}$ que están situados en los planos coordenados y determinar cuál de estos tres puntos A, B, C está situado entre los otros dos.



Los puntos de corte de la recta $r \equiv x - 12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3}$ con los diferentes planos coordenados son los siguientes:

$r \equiv x - 12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3}$ $\quad \alpha \equiv z = 0 \} \Rightarrow x - 12 = -2 \rightarrow x = 10 \quad \frac{y+6}{2} = -$

.

$r \equiv x - 12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3}$ $\quad \beta \equiv y = 0 \} \Rightarrow x - 12 = 3 \rightarrow x = 15 \quad \frac{z-6}{3} = 3$

.

$r \equiv x - 12 = \frac{y+6}{2} = \frac{z-6}{3}$ $\quad \gamma \equiv x = 0 \} \Rightarrow \frac{y+6}{2} = -12 \rightarrow y = -30 \quad \frac{z-6}{3} = -1$

.

Existen diversas formas de determinar el punto que está situado entre los otros dos; una de ellas es por las distancias entre ellos.

$$\overline{AB} = \sqrt{(15 - 10)^2 + (0 + 10)^2 + (15 - 0)^2} = \sqrt{25 + 100 + 225} = \sqrt{350}.$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(0 - 10)^2 + (-30 + 10)^2 + (-30 + 0)^2} = \sqrt{100 + 400 + 900} =$$

$$= \sqrt{1.400}.$$

$\overline{BC} = \sqrt{(0 - 15)^2 + (- 30 - 0)^2 + (- 30 - 15)^2} = \sqrt{225 + 900 + 2.025} =$

$= \sqrt{3.150}.$

La mayor de las distancias es entre los puntos B y C, por lo cual:

$\underline{El\ punto\ que\ está\ situado\ entre\ los\ otros\ dos\ es\ el\ A.}$

****

4º) Queremos hacer un estudio de las opiniones políticas de los estudiantes de primer curso de la UIB. Para ello, hemos escogido una muestra representativa de 500 estudiantes de primer curso y les hemos preguntado a qué partido político votaron en las últimas elecciones. De los 500 estudiantes, 200 respondieron que votaron al PP, 100 al PSIB y el resto, a otras formaciones políticas. Sabiendo que 200 de los estudiantes eran chicos, que el 40 % de los votantes del PP eran chicas y que el 50 % de los votantes de PSIB eran chicos, se pide:

a) Probabilidad de que un estudiantes haya votado a otras formaciones políticas y sea chica.

b) Probabilidad de que un estudiante chico haya votado al PP.

c) Probabilidad de que un estudiante que haya votado a otras formaciones políticas sea chica.

$$Datos: \ P(PP) = \frac{2}{5}; \ P(PSIB) = \frac{1}{5}; \ P(OF) = \frac{2}{5}; \ P(H) = \frac{2}{5}; \ P(M) = \frac{3}{5};$$

$P(PP \cap M) = 0,4; \ P(PSIB \cap H) = 0,5.$

$$Mujeres\ que\ votan\ al\ PP: \ n_1 = 200 \cdot 0,4 = 80.$$

$$Hombres\ que\ votan\ al\ PP: \ n_2 = 200 \cdot 0,6 = 120.$$

$$Mujeres\ que\ votan\ al\ PSIB: \ n_3 = 100 \cdot 0,5 = 50.$$

$$Hombres\ que\ votan\ al\ PSIB: \ n_4 = 100 \cdot 0,5 = 50.$$

$$Mujeres\ que\ votan\ a\ OF: \ 300 - \left(n_1 + n_3\right) = 300 - (80 + 50) =$$

$$= 300 - 130 = 170.$$

$$Hombres\ que\ votan\ a\ OF: \ 200 - \left(n_2 + n_4\right) = 200 - (120 + 50) =$$

$$= 200 - 170 = 30.$$

a)

$$P = P(OF \cap M) = \frac{170}{500} = \underline{\frac{17}{50} = 0,34}.$$

b)

$$P = P(PP \cap H) = \frac{80}{500} = \underline{\frac{4}{25} = 0,16}.$$

$c)$

$$P = P(OF/M) = \frac{P(OF \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}34}{\frac{3}{5}} = \frac{0{,}34}{0{,}60} = \underline{0,5667}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Consideremos las matrices $A = (1\ 2\ 1\ 3\ )\ y\ B = (1\ 1\ 1\ 2\ )$. Hallar la matriz X que verifica: $A \cdot X \cdot B = I = (1\ 0\ 0\ 1\ )$.

$$A \cdot X \cdot B = I;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot I \cdot B^{-1};\ \ I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot B^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B^{-1}}.$$

Se obtienen las inversas de A y B por el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow (1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 2F_2\} \Rightarrow (3\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 1\ ) \Rightarrow A^{-1} = (3\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 1\ ).$$

$$(B/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow (1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_2\} \Rightarrow (2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 1\ ) \Rightarrow B^{-1} = (2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 1\ ).$$

$$X = A^{-1} \cdot B^{-1} = (3\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 1\ ) \cdot (2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 1\ ) = (8\ \ -\ 5\ \ -\ 3\ 2\ ).$$

$$\underline{X = (8\ \ -\ 5\ \ -\ 3\ 2\ )}.$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \{ax^2 + bx + 5\ si\, x < 2\quad cx + 1\ \ si\ x \geq 2$, encontrar los valores de $a,\ b\ y\ c$ para los que verifican la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,\ 4]$. Determinar en qué punto(s) se verifica lo que asegura el teorema.

La función $f(x)$, por ser polinómica, es continua y derivable en cualquier intervalo finito que se considere, excepto para $x = 2$ cuya continuidad y derivabilidad son dudosas y se van a determinar los valores de $a,\ b\ y\ c$ para que lo sea.

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a,\ b]$ y derivable en $(a,\ b)$, con $a,\ b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\, x = 2 \Rightarrow \{f(x)\ = \left(ax^2 + bx + 5\right) = \ 4a + 2b + 5\ f(x)\ = (cx + 1) = \ 2c + 1 =$

$\Rightarrow f(x)\ = f(x)\ = f(2) \Rightarrow 4a + 2b + 5 = 2c + 1;\ \ 2a + b - c = -\ 2.$ (1)

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$f'(x) = \{2ax + b\ \ si\, x < 2\ \ c\quad si\ x \geq 2\ \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f'(2) = \{4a + b\ \ si\ \ x < 2\, c\ \ si\ \ x \geq 2$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow f'\left(2^-\right) = f'\left(2^+\right) \Rightarrow 4a + b = c;\ \ 4a + b - c = 0.$ (2)

Las ecuaciones (1) y (2) forman el sistema $2a + b - c = -\ 2\ 4a + b - c = 0\ \ \}$.

Restando a la segunda ecuación la primera resulta:

$4a + b - c - (2a + b - c) = 0 - (-\ 2);\ \ 2a = 2 \Rightarrow \underline{a = 1}.$

La función resulta $f(x) = \{x^2 + bx + 5\ \ si\, x < 2\quad cx + 1\ \ si\ x \geq 2$.

Para que se verifiquen las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,\ 4]$ es necesario que $f(0) = f(4)$:

$f(0) = 5; \; f(4) = 4c + 1 \Rightarrow 5 = 4c + 1 \Rightarrow \underline{c = 1}.$

$4a + b - c = 0 \Rightarrow 4 + b - 1 = 0 \Rightarrow \underline{b = -3}.$

La función resulta ser $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & si \; x < 2 \\ x + 1 & si \; x \geq 2 \end{cases}.$

Aplicando el teorema de Rolle en el intervalo $[0, \; 4]$:

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & si \; x < 2 \\ 1 & si \; x \geq 2 \end{cases}.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0; \; 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$

$\underline{El \; teorema \; de \; Rolle \; se \; verifica \text{ únicamente } para \; x = \frac{2}{3}}.$

****

3º) El plano perpendicular en el punto medio del segmento de extremos $P(0,\ 3,\ 8)$ y $Q(2,\ 1,\ 6)$ corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Hallar el área del triángulo ABC.

El punto medio del segmento de extremos $P(0,\ 3,\ 8)$ y $Q(2,\ 1,\ 6)$ es $M(1,\ 2,\ 7)$.

Los puntos $P\ y\ Q$ determinan el vector $\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = (2,\ -2,\ -2)$.

El haz de planos β perpendiculares a la recta r que contiene a los puntos $P\ y\ Q$ tiene por la siguiente expresión general: $\beta \equiv x - y - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β el plano π que contiene al punto M es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{matrix} \beta \equiv x - y - z + D = 0 \\ M(1,\ 2,\ 7) \end{matrix} \right\} \Rightarrow 1 - 2 - 7 + D = 0;\ -8 + D =$$

$\Rightarrow \pi \equiv x - y - z + 8 = 0$.

Los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow \left. \begin{matrix} \pi \equiv x - y - z + 8 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x = -8 \Rightarrow \underline{A(-8,\ 0,\ 0)}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow \left. \begin{matrix} \pi \equiv x - y - z + 8 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow \underline{B(0,\ 8,\ 0)}.$$

$$Eje\ Z \Rightarrow \left. \begin{matrix} \pi \equiv x - y - z + 8 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow z = 8 \Rightarrow \underline{C(0,\ 0,\ 8)}.$$

Los puntos $A,\ B\ y\ C$ determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0,\ 8,\ 0) - (-8,\ 0,\ 0)] = (8,\ 8,\ 0)$.

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0,\ 0,\ 8) - (-8,\ 0,\ 0)] = (8,\ 0,\ 8)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |64i - 64k - 64j| =$$

$$= 32 \cdot |i - j - k| = 32 \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = 32 \cdot \sqrt{1 + 1 + 1} = 32\sqrt{3}.$$

$$\underline{S_{ABC} = 32\sqrt{3}\, u^2}.$$

****

4º) Es considera la población de estudiantes que han aprobado la selectividad en la convocatoria de junio un año determinado. Sea X la variable aleatoria que modela la proporción de estudiantes de la población anterior que escoge estudiar un grado de humanidades. Esta variable aleatoria X se modela con una distribución normal de media 0,35 y desviación típica 0,1. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un año cualquiera más del 45 % de los estudiantes de la población considerada estudien un grado de humanidades?

b) En los últimos 10 años, ¿en cuántos años el porcentaje de estudiantes de la población considerada que han escogido estudiar un grado de humanidades no ha superado el 30 %?

----

a)

$Datos$: $n = 1;\ \mu = 0,35;\ \sigma = 0,1.$

$$N\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow N\left(0,35;\ \frac{0,1}{\sqrt{1}}\right) = N(0,35;\ 0,1).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-0,35}{0,1}$.

$$P = P(Z > 0,45) = P\left(Z > \frac{0,45-35}{0,1}\right) = P\left(Z > \frac{0,1}{0,1}\right) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = \underline{0,1587}.$$

b)

$Datos$: $n = 10;\ \mu = 0,35;\ \sigma = 0,1.$

$$N\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow N\left(0,35;\ \frac{0,1}{\sqrt{10}}\right) = N(0,35;\ 0,03).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-0,35}{0,03}$.

$$P = P(Z \leq 0,3) = P\left(Z \leq \frac{0,3-0,35}{0,03}\right) = P\left(Z \leq \frac{0,05}{0,03}\right) = P(Z \leq 1,67) =$$

$$= \underline{0,9525}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Tenéis que resolver tres de los cuatro problemas siguientes. Se han de justificar todas las respuestas.

OPCIÓN A

1º) a) Discutir para qué valores de m el sistema $4x + my + z = m + 2 \quad mx + y - z = 0 \quad x + 3y + z = 0 \}$ es compatible.

b) Resolvedlo en el caso de $m =- 2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (4\, m\, 1\, m\, 1\ -1\, 1\, 3\, 1)$ y $A' = (4\, m\, 1\, m\, 1\ -1\, 1\, 3\, 1\quad m + 2\, 0\, 0)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$|A| = |4\, m\, 1\, m\, 1\ -1\, 1\, 3\, 1| = 4 + 3m - m - 1 + 12 - m^2 =- m^2 + 2m + 1$

$m^2 - 2m - 15 = 0;\ m = \frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{64}}{2} = \frac{2\pm8}{2} = 1\pm4 \Rightarrow m_1 =- 3,\ m_2 = 5$
.

$\underline{Para\, \{m\neq -3\ m\neq5\} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\, m =- 3 \Rightarrow A' = (4\ -3\, 1\ -3\, 1\ -1\, 1\, 3\, 1\quad -1\, 0\, 0) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1,\ C_2$

$\Rightarrow |4\ -3\ -1\ -3\, 1\, 0\, 1\, 3\, 0| =- |-3\, 1\, 1\, 3| = 9 + 1 = 10\neq0 \Rightarrow Rang\ M' = 3$
.

$Para\, m = 5 \Rightarrow A' = (4\, 5\, 1\, 5\, 1\ -1\, 1\, 3\, 1\quad 7\, 0\, 0) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -105 - 7 = -112 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$$\underline{Para \begin{cases} m = -3 \\ m = 5 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

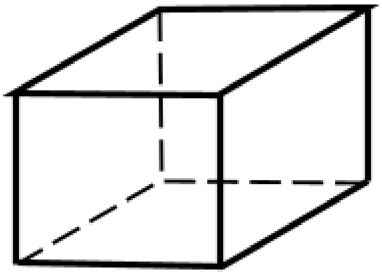
Para $m = -2$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} 4x - 2y + z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{matrix}\right\}$, que es compatible determinado.

Por tratarse de un sistema homogéneo solamente admite la solución trivial

$$\underline{Solución: x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0}.$$

****

2º) Hallar las dimensiones de una caja con las dos tapas de base cuadrangular de volumen 64 metros cúbicos de superficie mínima. Comprobar que la solución obtenida es un mínimo.



$V = x^2 \cdot h = 64 \Rightarrow h = \frac{64}{x^2}$. (*)

$S = 2x^2 + 4 \cdot x \cdot h$.

Sustituyendo el valor de h obtenido en (*):

$$S(x) = 2x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{64}{x^2} = 2x^2 + \frac{256}{x} = \frac{2x^3+256}{x}.$$

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que su primera derivada sea cero:

$$S'(x) = \frac{6x^2 \cdot x - (2x^3+256) \cdot 1}{x^2} = \frac{6x^3 - 2x^3 - 256}{x^2} = \frac{4x^3-256}{x^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x^3-256}{x^2} = 0;\ \ 4x^3 - 256 = 0;\ \ x^3 = 64 = 4^3 \Rightarrow x = 4.$$

$$h = \frac{64}{4^2} = \frac{64}{16} \Rightarrow h = 4.$$

$\underline{\textit{La superficie es mínima cuando se trata de un cubo de } 4 \textit{ metros de arista.}}$

Justificación de que se trata de un mínimo:

Una función tiene un mínimo relativo cuando su segunda derivada es positiva para los valores que anulan su primera derivada:

$$S''(x) = \frac{12x^2 \cdot x^2 - (4x^3-256) \cdot 2x}{x^4} = \frac{12x^3 - 2(4x^3-256)}{x^3} = \frac{12x^3 - 8x^3 + 512}{x^3} = \frac{4x^3+512}{x^3}.$$

$$S''(4) = \frac{2 \cdot 4^3 + 108}{4^3} > 0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo, como se quería comprobar}}.$$

****

3º) Hallar unas ecuaciones paramétricas de la recta t que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas $r \equiv x = 2y = z - 1$ y $s \equiv 3x = 2y - 2 = 6z$.

Se resuelve el problema de dos formas distintas.

Primera forma:

Un punto y un vector de $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ son $A(0,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ 2)$.

El plano π que contiene a la recta r y al origen tiene como vectores directores al vector director de r y a $\overrightarrow{OA} = (0,\ 0,\ 1)$. Su expresión general es la siguiente:

$$\pi\left(O;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{OA}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - 2y = 0.$$

El punto P intersección del plano π y la recta $s \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{3}\lambda \\ y = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \frac{1}{6}\lambda \end{cases}$ es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{3}\lambda \\ y = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \frac{1}{6}\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3}\lambda - 2\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right.$$

;

$$\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -3 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{-3}{3} = -1 \\ y = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(-1\right.$$

.

La recta t pedida es la que pasando por el origen tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente de $\overrightarrow{OP} = \left(-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (2,\ 1,\ 1)$.

$$\underline{t \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}.$$

Segunda forma:

El plano π que pasando por el origen contiene a r es $\pi \equiv x - 2y = 0$.

Determinamos ahora el plano β que pasando por el origen contiene a s.
Un punto y un vector director de s son $B(0,\ 1,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2,\ 3,\ 1)$.

El plano β que contiene a la recta s y al origen tiene como vectores directores al vector director de s y a $\overrightarrow{OB} = (0,\ 1,\ 0)$. Su expresión general es la siguiente:

$$\beta\left(O;\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{OB}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ \ 2z - x = 0 \Rightarrow \beta \equiv x - 2z = 0.$$

La recta t pedida es la intersección de los planos π y β: $t \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$. La expresión de t por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$t \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2\lambda; \quad y = z = \lambda.$$

$$\underline{t \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}.$$

****

4º) En una clase de segundo de bachillerato, el 60 % de los alumnos son chicas, el 40 % aprobaron Lengua Castellana y el 20 % son chicas que aprobaron Lengua Castellana. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de hallar una persona que sea chico y suspenda Lengua Castellana?

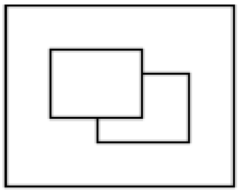
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un chico suspenda Lengua Castellana?

c) Si un alumno ha aprobado Lengua Castellana, ¿cuál es la probabilidad de que sea un chico?

$$Datos: P(M) = 0,6;\ \ P(H) = 0,4;\ \ P(LC) = 0,4;\ \ P(M \cap LC) = 0,2.$$

a)

$$P = P(H \cap \overline{LC}) = P(\overline{M} \cap \overline{LC}) = 1 - P(M \cup LC) =$$



$$= 1 - [P(M) + P(LC) - P(M \cap LC)] =$$

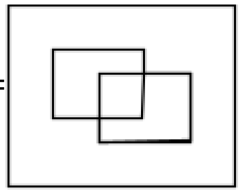
$$= 1 - (0,6 + 0,4 - 0,2) = 1 - 0,8 = \underline{0,2}.$$

b)

$$P = P(\overline{LC}/H) = \frac{P(H \cap \overline{LC})}{P(H)} = \frac{0,2}{0,4} = \underline{0,5}.$$

c)

$$P = P(H/LC) = \frac{P(H \cap LC)}{P(LC)} = \frac{P(\overline{M} \cap LC)}{P(LC)} = \frac{P(M \cap LC) - P(M)}{P(LC)} =$$



$$= \frac{0,8-0,6}{0,4} = \frac{0,2}{0,4} = \underline{0,5}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Determinar qué relaciones hay entre $a,\ b,\ c\ y\ d$ para que se cumpla que $AM = MA$, siendo $A = (0\ \ -\ 1\ 1\ 1\ )\ y\ M = (a\ b\ c\ d\ )$.

$$A \cdot M = M \cdot A \Rightarrow (0\ \ -\ 1\ 1\ 1\ ) \cdot (a\ b\ c\ d\ ) = (a\ b\ c\ d\ )(0\ \ -\ 1\ 1\ 1\ );$$

$$(-\ c\ \ -\ d\ a\ +\ c\ b\ +\ d\ ) = (b\ \ -\ a\ +\ b\ d\ \ -\ c\ +\ d\ ) \Rightarrow \qquad -\ c\ =\ b \qquad a\ +\ c$$

.

****

2º) Consideramos la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$. Realizar un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo $[-\ 1,\ 1]$. Calcular el área limitada por la gráfica de la función anterior y el eje de las X.

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador: $D(f) \Rightarrow R\ -\ \{2\}$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow x\ =\ 0 \rightarrow f(x) =\ 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2-x}\ =\ 0 \Rightarrow x^2\ =\ 0 \rightarrow x\ =\ 0 \Rightarrow O(0,\ 0).$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x\ =\ 0 \Rightarrow \frac{0}{2}\ =\ 0 \Rightarrow O(0,\ 0).$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (2-x) - x^2 \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} = \frac{x(4-x)}{(2-x)^2}.$$

$$f'(x) =\ 0 \Rightarrow \frac{x(4-x)}{(2-x)^2}\ =\ 0;\ \ x(4\ -\ x) =\ 0 \Rightarrow x_1\ =\ 0,\ x_2\ =\ 4.$$

Las raíces de la primera derivada dividen al dominio de la función en los intervalos $(-\ \infty,\ 0),\ (0,\ 4)\ y\ (4,\ \ +\ \infty)$, en los cuales los valores de la derivada son, alternativamente, positivos y negativos. Considerando, por ejemplo, el valor $x\ =\ 1 \in (0,\ 4)$ es:

$$f'(1) = \frac{1 \cdot (4-1)}{(2-1)^2} = \frac{4}{1} >\ 0.$$

Teniendo en cuenta lo anterior y el dominio de la función los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$f'(x) <\ 0 \Rightarrow Decrecimiento:\ (-\ \infty,\ 0) \cup (4,\ 0).$$

$$f'(x) >\ 0 \Rightarrow Crecimiento:\ (0,\ 4) \cup (4,\ \ +\ \infty).$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada;

si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(4-2x)\cdot(2-x)^2 - x(4-x)\cdot[2\cdot(2-x)\cdot(-1)]}{(2-x)^4} = \frac{(4-2x)\cdot(2-x)+2x(4-x)}{(2-x)^3} =$$

$$= \frac{8-4x-4x+2x^2+8x-2x^2}{(2-x)^3} = \frac{8}{(2-x)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{8}{8} = 1 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo: O(0,\ 0)}.$$

$$f''(4) = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 4.$$

$$f(4) = \frac{4^2}{2-4} = \frac{16}{-2} = -8 \Rightarrow \underline{Máximo: A(4,\ -8)}.$$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$f''(x) = \frac{8}{(2-x)^3}. \quad f''(x) > 0 \Rightarrow Convexidad\ (\cup):\ (-\infty,\ -2).$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow Concavidad\ (\cap):\ (-2,\ +\infty).$$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{50}{(x-5)^3} = 0 \Rightarrow x \notin R$. La función no tiene puntos de inflexión.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^2}{2-x} = \infty \Rightarrow No\ tiene\ asíntotas\ horizontales.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$Asíntota\ vertical: x = 2.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

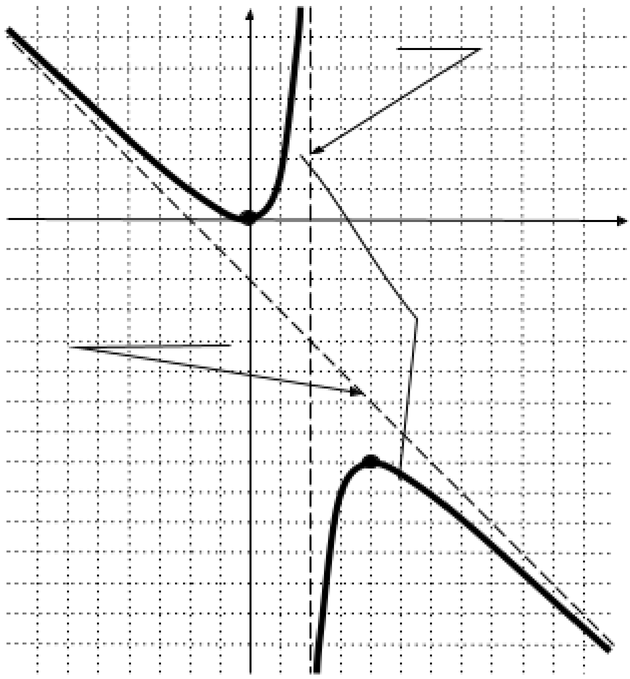
$m = \frac{f(x)}{x}$ y $n = [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2}{2-x}}{x} = \frac{x^2}{2x-x^2} = -1.$$

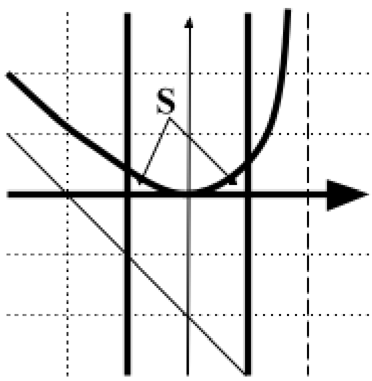
$$n = [f(x) - mx] = n = \left[\frac{x^2}{2-x} + x\right] = \frac{x^2+2x-x^2}{2-x} = -2.$$

$$La\ recta\ y = x + 5\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función.$$

La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.



El detalle de la superficie pedida se expresa en el gráfico siguiente.



Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que las ordenadas de todos los puntos que la determinan son positivos, por lo cual su valor es el siguiente:

$$S = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2-x} \cdot dx.$$

$$
\begin{array}{lll}
+\ x^2 & & \underline{\lfloor -\ x\ +\ 2} \\
\underline{-\ x^2\ +\ 2x} & & -\ x\ -2 \\
\ \ 0\ \ \ +\ 2x & & \\
\ \ \ \ \ \ \underline{-\ 2x\ +\ 4} & & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 0\ \ \ \ +\ 4 & &
\end{array}
$$

Para la resolución de la integral definida anterior es conveniente conocer el valor de la integral indefinida.

$$I\ =\int\frac{x^2}{-x+2}\cdot dx\ =\int\left(-\ x\ -\ 2\ +\ \frac{4}{-x+2}\right)\cdot dx\ =$$

$$=-\int x\cdot dx\ -\ 2\int dx\ +\ 4\int\frac{1}{-x+2}\cdot dx\ =$$

$$=-\ \frac{x^2}{2}-\ 2x\ +\ 4M\ =\ I.\quad (*)$$

$$M\ =\int\frac{dx}{-x+2}\Rightarrow\{-\ x\ +\ 2\ =\ t\ dx\ =-\ dt\ \}\Rightarrow\ -\int\frac{1}{t}\cdot dt\ =-\ Lt\ +\ C\ =-\ L|-\ x\ +\ 2|+\ C$$

.

Sustituyendo el valor obtenido en (*): $I\ =-\ \frac{x^2}{2}-\ 2x\ -\ 4L|-\ x\ +\ 2|+\ C.$

$$S\ =\left[-\ \frac{x^2}{2}-\ 2x\ -\ 4L|-\ x\ +\ 2|\right]_{-1}^{1}\ =$$

$$=\left(-\ \frac{1}{2}-\ 2\ -\ 4L|-\ 1\ +\ 2|\right)-\left[-\ \frac{(-1)^2}{2}-\ 2\cdot(-\ 1)-\ 4L|-\ (-\ 1)+\ 2|\right]=$$

$$=-\ \frac{1}{2}-\ 2\ -\ 4\cdot L1\ -\left(-\ \frac{1}{2}+\ 2\ -\ 4L3\right)=-\ \frac{5}{2}-\ 0\ +\frac{1}{2}-\ 2\ +\ 4L3\ =\ 4L3\ -\ 4\ =$$

$$=\ 4\cdot(L3\ -\ 1)=\ 4\cdot 0,0986\ =\ 0,3944.$$

$$\underline{S\ =\ 4(L3\ -\ 1)=\ 0,3944\ u^2}.$$

****

3º) Calcular la distancia entre las rectas $r\equiv\begin{cases} z + y = 5 \\ z = 4 \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$.

$a)$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r\equiv\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$.

Un punto y un vector director de r son $A(0,\ 1,\ 4)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 0,\ 0)$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es $s\equiv\begin{cases} x = \mu \\ y = 0 \\ z = -3 + 2\mu \end{cases}$.

Un punto y un vector director de s son $B(0,\ 0,\ -3)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1,\ 0,\ 2)$.

Para hallar la distancia entre las rectas r y s hacemos lo siguiente:

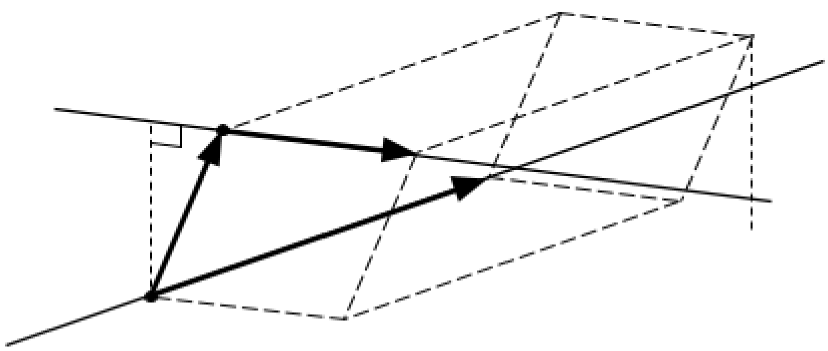
Los vectores directores de las rectas r y s son linealmente independientes por no ser sus componentes proporcionales, lo cual implica que las rectas se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso consideramos el vector $\overrightarrow{m}$ que tiene como origen el punto $A(0,\ 1,\ 4)$ de r y como extremo el punto $B(0,\ 0,\ -3)$ de s:

$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0,\ 0,\ -3) - (0,\ 1,\ 4)] = (0,\ -1,\ -7).$$

Según que los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\overrightarrow{m}\right\}$ sean coplanarios o no, las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\overrightarrow{m}\right\}$ son coplanarios cuando su rango es menor que tres, es decir, cuando el determinante que determinan es cero:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 2\neq 0 \Rightarrow Rango\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\overrightarrow{m}\right\} = 3 \Rightarrow$ <u>Las rectas r y s se cruzan</u>.



Para una mejor comprensión se hace el esquema adjunto.

Se determina un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas $\overrightarrow{v}_r$ y $\overrightarrow{v}_s$ y el vector $\overrightarrow{m}$.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observar que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v}_r \cdot \left(\overrightarrow{v}_s \times \overrightarrow{m}\right) = \left|\overrightarrow{v}_r \times \overrightarrow{v}_s\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{v}_r \times \overrightarrow{v}_s\right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{v}_r \cdot \left(\overrightarrow{v}_s \times \overrightarrow{m}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v}_r \times \overrightarrow{v}_s\right|}.$$

Aplicando la fórmula obtenida al caso que nos ocupa:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{v}_r \cdot \left(\overrightarrow{v}_s \times \overrightarrow{m}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v}_r \times \overrightarrow{v}_s\right|} = \frac{\|1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 2\ 0\ -1\ -7\ \|}{\|i\ j\ k\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 2\ \|} = \frac{|2|}{|-2j|} = \frac{2}{2} = \underline{1\ unidad = d(r, s\ )}.$$

****

4º) El número de pasos que da el profesor Jaimito durante una hora de clase se modela con una distribución normal de media 100 pasos y desviación típica 20,5 pasos.

a) Calcular la probabilidad de que el profesor dé más de 125 pasos durante una clase.

b) Nos dicen que el 45 % de las clases que imparte el profesor da menos de x pasos. Hallar dicho valor de x.

$Datos: n = 1;\ \mu = 100;\ \rho = 20,5.$

a)

$$N\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow N\left(100;\ \frac{20,5}{\sqrt{1}}\right) = N(100;\ 20,5).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-100}{20,5}$.

$$P = P(Z > 125) = P\left(Z > \frac{125-100}{20,5}\right) = P\left(Z > \frac{25}{20,5}\right) = P(Z > 1,22) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1,22) = 1 - 0,8888 = \underline{0,1112}.$$

b)

$$p(\overline{X} \leq x) = 0,45 \Rightarrow p\left(Z \leq \frac{X-100}{20,5}\right) = 0,45.$$

Teniendo en cuenta la simetría de la normal estándar es:

$$p\left(Z \leq -\frac{X-100}{20,5}\right) = 1 - 0,45 = 0,55.$$

Mirando en el interior de la tabla dada de las áreas limitadas por la curva $N(0,\ 1)$, con el valor de 0,55 se obtiene, aproximadamente 0,125.

$$-\frac{X-100}{20,5} = 0,125;\ \frac{X-100}{20,5} =- 0,125;\ X - 100 =- 0,125 \cdot 20,5 =- 2,56;$$

$$X = 100 - 2,56 = 97,44.$$

$\underline{El\ 45\ \%\ de\ las\ clases\ el\ profesor\ Jaimito\ da\ menos\ de\ 98\ pasos.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CANARIAS

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

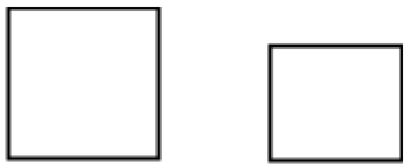
MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo.

OPCIÓN A

1º) Tenemos que hacer dos cuadrados de tela donde cada cuadrado se hace con una tela diferente. Los dos telas tienen precios de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado, respectivamente. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser 100 cm?

Sean x e y los lados de los cuadrados cuyos precios son de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado, respectivamente.



El coste total de las telas es el siguiente:

$C = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2$. (*)

Teniendo en cuenta que el total del perímetro tiene que ser de 100 cm:

$4x + 4y = 100;\ x + y = 25 \Rightarrow y = 25 - x.$

Sustituyendo el valor de y obtenido en la expresión (*):

$$C(x) = 2x^2 + 3 \cdot (25 - x)^2 = 2x^2 + 3 \cdot \left(625 - 50x + x^2\right) =$$

$$= 2x^2 + 1.875 - 150x + 3x^2 = 5x^2 - 150x + 1.875.$$

Para que el coste sea mínimo es necesario que se anule su primera derivada y sea positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$C'(x) = 10x - 150.$ $\quad\quad\quad\quad$ $C''(x) = 10 > 0 \Rightarrow Mínimo.$

$C'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 150 = 0;\;\; 10(x - 15) = 0;\;\; x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15.$

$y = 25 - x = 25 - 15 = 10.$

$\underline{Coste\ mínimo:\ \ lado\ 15\ cm\ para\ el\ de\ 2\ euros\ y\ 10\ cm\ para\ el\ de\ 3\ euros}.$

****

2º) Determinar una matriz X que verifique la ecuación $AB - CX = I$ siendo las matrices,
$A = (1 \ - \ 2\ 1\ 2\ 4 \ - \ 1\ )$, $B = (2\ 4\ 0 \ - \ 5 \ - \ 2\ 1\ )$, $C = (2\ 0 \ - \ 1\ 1\ )\ e\ I = (1\ 0\ 1\ 1\ )$
.

$$A \cdot B - C \cdot X = I;\ \ C \cdot X = A \cdot B - I;\ \ C^{-1} \cdot C \cdot X = C^{-1} \cdot (A \cdot B - I);$$

$I \cdot X = C^{-1} \cdot (A \cdot B - I) \Rightarrow \underline{X = C^{-1} \cdot (A \cdot B - I)}$.

$|C| = |2\ 0 \ - \ 1\ 1\ | = 2.$ $\qquad C^t = (2 \ - \ 1\ 0\ 1\ ).$
$Adj.\ de\ C^t = (1\ 0\ 1\ 2\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot (1\ 0\ 1\ 2\ ).$

$A \cdot B - I = (1 \ - \ 2\ 1\ 2\ 4 \ - \ 1\ ) \cdot (2\ 4\ 0 \ - \ 5 \ - \ 2\ 1\ ) - (1\ 0\ 0\ 1\ ) = (0\ 15\ 6 \ - \ 13\ ) - (1$
$= (-\ 1\ 15\ 6 \ - \ 14\ ).$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$X = C^{-1} \cdot (A \cdot B - I) = \frac{1}{2} \cdot (1\ 0\ 1\ 2\ ) \cdot (-\ 1\ 15\ 6 \ - \ 14\ ) = \frac{1}{2} \cdot (-\ 1\ 15\ 11 \ - \ 13\ )$
.

$$\underline{X = \frac{1}{2} \cdot (-\ 1\ 15\ 11 \ - \ 13\ ) = \left(-\frac{1}{2}\ \ \frac{15}{2}\ \ \frac{11}{2}\ \ -\frac{13}{2}\right)}.$$

****

3º) Estudiar la posición relativa de los planos: $\{\alpha \equiv 2x + 3y - 5z + 7 = 0 \ \ \beta \equiv 3x + 2y + 3z - 1 = 0 \ \ \gamma \equiv 7x + 8y - 7z + 13 = 0$

.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (2\ 3\ \ -\ 5\ 3\ 2\ 3\ 7\ 8\ \ -\ 7\ )$ y $M^{'} = (2\ 3\ \ -\ 5\ 3\ 2\ 3\ 7\ 8\ \ -\ 7\ \ \ 7\ \ -\ 1\ 13\ )$.

Según sean los rangos de $M\ y\ M^{'}$ pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- $Rang\ M\ =\ Rang\ M^{'}\ =\ 3 \Rightarrow$ Los planos son secantes. Se cortan en un punto.

2. -- $Rang\ M\ =\ Rang\ M^{'}\ =\ 2 \Rightarrow$ Los planos se cortan en una recta.
(dos de los planos pueden ser coincidentes)

3. -- $Rang\ M\ =\ Rang\ M^{'}\ =\ 1 \Rightarrow$ Los tres planos son coincidentes.

4. -- $Rang\ M\ =\ 1;\ Rang\ M^{'}\ =\ 2 \Rightarrow$ Hay planos paralelos.
(si no hay planos coincidentes son los tres paralelos)
(si dos planos son coincidentes son paralelos al tercero)

5. -- $Rang\ M\ =\ 2;\ Rang\ M^{'}\ =\ 3 \Rightarrow$ Hay planos secantes.
(si no hay planos paralelos se cortan dos a dos; determinan un prisma)
(si dos planos son paralelos son secantes al tercero)

$|M| = |2\ 3\ \ -\ 5\ 3\ 2\ 3\ 7\ 8\ \ -\ 7\ | = -\ 28\ -\ 120\ +\ 63\ +\ 70\ -\ 48\ +\ 63\ =\ 196\ -\ 196\ =$

$\Rightarrow Rang\ M\ =\ 2.$

$Rang\ M^{'} \Rightarrow M^{'} = (2\ 3\ \ -\ 5\ 3\ 2\ 3\ 7\ 8\ \ -\ 7\ \ \ 7\ \ -\ 1\ 13\ ) \Rightarrow \left\{F_3 = 2F_1 + F_2\right\} \Rightarrow Rang$

.

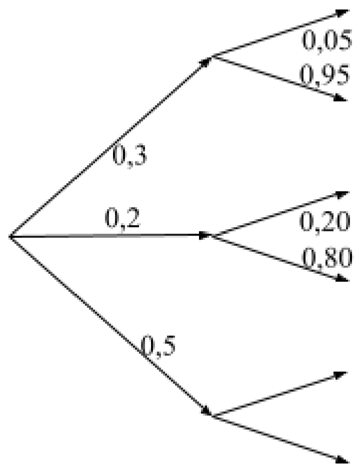
$\underline{Rang\ M\ =\ Rang\ M^{'}\ =\ 2 \Rightarrow Los\ tres\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.}$

****

4º) Tres fábricas A, B y C, producen respectivamente el 30 %, 20 % y 50 % de los motores agrícolas que se demandan en la industria. Los inspectores de calidad saben que son defectuosos el 5 % de los motores producidos por A, el 20 % de los producidos por B y el 10 % de los que se fabrican en la C.

a) Un inspector de calidad elige un motor al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?

b) Si el inspector comprueba que el motor agrícola que elige está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C?



a)

$$P = P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= 0,3 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,20 + 0,5 \cdot 0,10 = 0,015 + 0,040 + 0,050 = \underline{0,105}.$$

b)

$$P = P(D/A \cup B) = \frac{P(D \cap A \cup B)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,20}{0,3 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,20 + 0,5 \cdot 0,10} = \frac{0,015 + 0,040}{0,015 + 0,040 + 0,050} = \frac{0,055}{0,105} = \underline{0,5238}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Determinar los valores de $a\,y\,b$ para que la función $f(x) = a\sqrt{3x + 3} + b\sqrt{x - 1}$ tenga un punto de inflexión en el punto $P(2,\ 8)$.

Por contener al punto $P(2,\ 8)$ es $f(2) = 8$:

$$f(2) = a\sqrt{3 \cdot 2 + 3} + b\sqrt{2 - 1} = a\sqrt{9} + b\sqrt{1} = 3a + b = 8. \quad (1)$$

Para que una función tenga un punto de inflexión en un punto es condición necesaria que se anule su segunda derivada en ese punto:

$$f'(x) = a \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x+3}} + b \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{3a}{2} \cdot (3x + 3)^{-\frac{1}{2}} + \frac{b}{2} \cdot (x - 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$f''(x) = \frac{3a}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (3x + 3)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot 3 + \frac{b}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot 1 =$$

$$= -\frac{9a}{4} \cdot (3x + 3)^{-\frac{3}{2}} - \frac{b}{4} \cdot (x - 1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{9a}{4} \cdot \frac{1}{(3x+3)\sqrt{3x+3}} - \frac{b}{4} \cdot \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

$$f''(2) = 0 \Rightarrow -\frac{9a}{4} \cdot \frac{1}{(3 \cdot 2+3)\sqrt{3 \cdot 2+3}} - \frac{b}{4} \cdot \frac{1}{(2-1)\sqrt{2-1}} = 0; \quad -\frac{9a}{4} \cdot \frac{1}{9 \cdot \sqrt{9}} - \frac{b}{4} \cdot \frac{1}{1 \cdot \sqrt{1}} = 0;$$

$$-\frac{9a}{4} \cdot \frac{1}{27} - \frac{b}{4} = 0; \quad \frac{a}{12} + \frac{b}{4} = 0; \quad a + 3b = 0. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 3a + b = 8 \\ a + 3b = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -3a - b = -8 \\ 3a + 9b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 8b = -8 \Rightarrow \underline{b = -1}.$$

$$a + 3b = 0;\ a - 3 = 0 \Rightarrow \underline{a = 3}.$$

****

2º) Considerar el sistema de ecuaciones $x + y + z = 0 \quad 2x + ky + z = 2\, x + y + kz = k - 1 \}$:

a) Estudiar el sistema para los distintos valores de k.

b) Resolver el sistema para $k = 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\ 1\ 1\ 2\ k\ 1\ 1\ 1\ k)$ y $M' = (1\ 1\ 1\ 2\ k\ 1\ 1\ 1\ k \quad 0\ 2\ k - 1)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$|M| = |1\ 1\ 1\ 2\ k\ 1\ 1\ 1\ k| = k^2 + 2 + 1 - k - 1 - 2k = 0;\ \ k^2 - 3k + 2 = 0;$

$k = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = 2.$

$\underline{Para\ \{k \neq 1\ k \neq 2\ \} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ k = 1 \Rightarrow M' = (1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \quad 0\ 2\ 0) \Rightarrow \{F_1 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ k = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$Para\ k = 2 \Rightarrow M' = (1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 1\ 2 \quad 0\ 2\ 1) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 1\ 0\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1| = 1 + 2 - 4 - 3 = - 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ k = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

b)

Para $k = 1$ el sistema resulta $\{x + y + z = 0 \quad 2x + y + z = 2\, x + y + z = 0$, equivalente a $\{x + y + z = 0 \quad 2x + y + z = 2$, que es compatible indeterminado. Haciendo $z = \lambda$:

$x + y = - \lambda\ 2x + y = 2 - \lambda \} \qquad - x - y = \lambda\ 2x + y = 2 - \lambda \} \Rightarrow x = 2;\ y =$

.

$\underline{Solución: x = 2,\ \ y = - 2 - \lambda,\ \ z = \lambda,\ \ \forall \lambda \in R.}$

****

3º) Dadas las rectas $r_1 \equiv x - 1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ y $r_2 \equiv \frac{x+5}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+4}{3}$, se pide:

a) Demostrar que r_1 y r_2 son coplanarias.

b) Hallar la ecuación del plano π que determinan.

----

a)

Un punto y un vector director de r_1 son $P(1, 1, -2)$ y $\vec{v_1} = (1, -1, 2)$.

Un punto y un vector director de r_2 son $Q(-5, 3, -4)$ y $\vec{v_2} = (4, -2, 3)$.

Los puntos P y Q determinan el vector $\vec{QP} = (6, -2, 2)$.

Demostrar que las rectas r_1 y r_2 son coplanarias es equivalente a demostrar que los vectores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{QP}\}$ son linealmente dependientes (están en un mismo plano).

Los vectores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{QP}\}$ son linealmente dependientes cuando el rango del determinante que forman es cero.

$$Rang\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{QP}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 16 - 18 + 24 + 6 + 8 =$$

<u>*Queda demostrado que las rectas r_1 y r_2 son coplanarias.*</u>

b)

La ecuación general del plano π que determinan es la siguiente:

$$\pi\{P; \vec{v_1}, \vec{v_2}\} \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-3(x-1) + 8(y-1) - 2(z+2) + 4(z+2) + 4(x-1) - 3(y-1) = 0;$$

$$(x-1) + 5(y-1) + 2(z+2) = 0; \quad x - 1 + 5y - 5 + 2z + 4 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv x + 5y + 2z - 2 = 0}.$$

****

4º) El 30 % de los habitantes de un determinado pueblo ve un concurso de televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcular la probabilidad de que, de las 10 personas elegidas, estuvieran viendo el concurso de televisión:

a) Tres o menos personas.

b) Ninguna de las 10 personas a las que se ha llamado.

----

a)

Se trata de una distribución normal de las siguientes características:

$p = 0,3;\ \ q = 0,7;\ \ n = 10.$

Sabiendo que la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial es $P = (n\ r)\cdot p^{r}\cdot q^{n-r}$, la probabilidad pedida es:

$$P = (10\ 3)\cdot 0,3^{3}\cdot 0,7^{7} + (10\ 2)\cdot 0,3^{2}\cdot 0,7^{8} + (10\ 1)\cdot 0,3^{1}\cdot 0,7^{9} +$$

$$+ (10\ 0)\cdot 0,3^{0}\cdot 0,7^{10} = \frac{10!}{7!\cdot 3!}\cdot 0,027\cdot 0,082354 + \frac{10!}{8!\cdot 2!}\cdot 0,09\cdot 0,057648 +$$

$$+ 10\cdot 0,3\cdot 0,040354 + 1\cdot 1\cdot 0,028247 =$$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 6}\cdot 0,00222 + \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{8!\cdot 2}\cdot 0,00519 + 0,121061 + 0,028247 =$$

$$= 120\cdot 0,00222 + 45\cdot 0,00519 + 0,149308 = 0,2664 + 0,2336 + 0,1493 =$$

$$= \underline{0,6493}.$$

b)

$$P = (10\ 0)\cdot 0,3^{0}\cdot 0,7^{10} = 1\cdot 1\cdot 0,028247 = \underline{0,0282}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CANARIAS

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

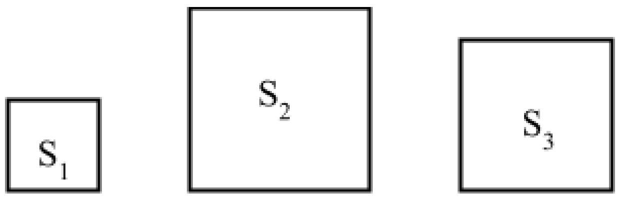
MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones, A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo.

OPCIÓN A

1º) Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que la longitud de uno de los trozos sea el doble de la longitud de otro y tal que, al construir con cada uno de los tres trozos del hilo un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo.

Sean las longitudes de los trozos $x,\ (2x)\ y\ (140-3x)$.



Del enunciado del problema y de la observación de la figura se deduce que:

$$S_t = S(x) = S_1 + S_2 + S_3 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{140-3x}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{4} + \frac{19.600-840x+9x^2}{16} = \frac{x^2+4x^2+19.600-840x+9x^2}{16} = \frac{14x^2-840x+19.600}{16} =$$

$$= \frac{7x^2-420x+9.800}{8} = S(x).$$

La superficie es mínima cuando se anula su primera derivada:

$S'(x) = \frac{1}{8}(14x - 420) = \frac{1}{4}(7x - 210) = \frac{7}{4}(x - 30).$

$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{7}{4}(x - 30) = 0; \; x - 30 = 0 \Rightarrow x = 30.$

Para justificar que se trata de un mínimo, la segunda derivada tiene que ser positiva para el valor encontrado de x que anula la primera derivada:

$S''(x) = \frac{7}{4} > 0 \Rightarrow Mínimo, \; como \; se \; quería \; justificar.$

$l_1 = 30. \;\; l_2 = 2 \cdot 30 = 60. \;\; l_3 = 140 - 3 \cdot 30 = 140 - 90 = 50.$

$\underline{Los \; lados \; de \; los \; cuadrados \; son \; 30, \; 60 \; y \; 50 \; metros, \; respectivamente}.$

****

2º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + ky + kz = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro k.

b) Resolver el sistema para $k = 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 1 & k & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2k + k - k - 2 - 4k = 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 1.$

$\underline{Para\ k \neq 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ k = 1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ A' = 2.$

$\underline{Para\ k = 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Para $k = 1$ el sistema es $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Haciendo $z = \lambda$:

$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 - \lambda \\ x + 2y = 2 - 4\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -x - y = -1 + \lambda \\ x + 2y = 2 - 4\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y = 1$

.

$x + y = 1 - \lambda \Rightarrow x = 1 - \lambda - 1 + 3\lambda = 2\lambda.$

$\underline{Solución: x = 2\lambda,\ \ y = 1 - 3\lambda,\ \ z = \lambda,\ \forall\lambda \in R.}$

****

3º) a) Halla la ecuación del plano π que pasa por los puntos $A(-1, 5, 0)$ y $B(0, 1, 1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$.

b) Escribir la ecuación de una recta s paralela a la recta r y que pase por el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB} = [B - A] = (1, -4, 1)$.

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan.

$$r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2y - 3z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{n_1} = (3, 2, 0) \\ \overrightarrow{n_2} = (0, 2, -3) \end{array} \right\} =$$

$$= -6i + 6k + 9j = -6i + 9j + 6k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2, -3, -2).$$

La ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(B; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-3x - 2(y - 1) - 8(z - 1) + 3(z - 1) - 8x - 2(y - 1) = 0;$$

$$-11x - 4(y - 1) - 5(z - 1) = 0; \quad 11x + 4y - 4 + 5z - 5 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv 11x + 4y + 5z - 9 = 0}.$$

b)

El punto medio del segmento de extremos los puntos $A(-1, 5, 0)$ y $B(0, 1, 1)$ es $M\left(-\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{2}\right)$.

La recta pedida s, por ser paralela a la recta r, tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector director de r.

La recta s dada por unas ecuaciones paramétrica es: $\underline{s \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + 2\lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = \frac{1}{2} - 2\lambda \end{cases}}$.

****

4º) Se sabe que el 30 % de todos los fallos en las tuberías de plantas químicas son ocasionados por errores del operador.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 fallos en la planta química, exactamente 5 se deban a errores del operador?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más fallos de 20 encontrados en una planta química, se deban a errores del operador.

----

a)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 20;\ \ p = 0,3;\ \ q = 0,7;\ \ r = 5.$

Sabiendo que la fórmula de la probabilidad de una distribución binomial es $P = \binom{n}{r} \cdot p^{r} \cdot q^{n-r}$, la probabilidad pedida es:

$$P = \binom{20}{5} \cdot 0,3^{5} \cdot 0,7^{15} = \frac{20!}{(20-5)! \cdot 5!} \cdot 0,00243 \cdot 0,00475 =$$

$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0,000011536 = 19 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 0,000011536 = \underline{0,1789}.$$

b)

El suceso contrario a “que existan 2 o más fallos” es “que existan cero o un fallos”, por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 1 - [P(0) + P(1)] = 1 - \left[\binom{20}{0} \cdot 0,3^{0} \cdot 0,7^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0,3^{1} \cdot 0,7^{19}\right] =$$

$$= 1 - (1 \cdot 1 \cdot 0,000798 + 20 \cdot 0,3 \cdot 0,001140) = 1 - (0,000798 + 0,006839) =$$

$$= 1 - 0,007637 = \underline{0,9924}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Calcular las asíntotas y los extremos relativos de la función $y = f(x) = 3x + \frac{3x}{x-1}$.

$$y = f(x) = 3x + \frac{3x}{x-1} = \frac{3x^2-3x+3x}{x-1} = \frac{3x^2}{x-1}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{3x^2}{x-1} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Tendencias: $\frac{x^2}{x-1} = -\infty$. $\frac{x^2}{x-1} = +\infty$.

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{3x^2}{x-1}}{x} = \frac{3x^2}{x^2-x} = 3.$$

$$n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \left(\frac{3x^2}{x-1} - 3x\right) \frac{3x^2-3x^2+3x}{x-1} 3 .$$

$$\underline{La\ recta\ y = 3x + 3\ es\ asíntota\ oblícua\ de\ la\ función}.$$

Para que una función tenga un extremo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0;\ x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - x(x-2)[2\cdot(x-1)\cdot 1]}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)(x-1)-2x(x-2)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2\left(x^2-2x+1\right)-2x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{2x^2-4x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{2}{(0-1)^3} = \frac{2}{-1} = -\ 2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \underline{Máximo: O(0,\ 0)}.$$

$$f''(2) = \frac{2}{(2-1)^3} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{3\cdot 2^2}{2-1} = \frac{12}{1} = 12 \Rightarrow \underline{Mínimo: P(2,\ 12)}.$$

****

2º) Dada la matriz $A = (1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ m\ +\ 1\ 2\ m\ -\ 2\ 0\ 0\ )$:

a) Calcular los valores del parámetro m para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para $m\ =\ 1$, calcular la matriz inversa A^{-1}.

----

a)

Una matriz tiene inversa (es invertible) cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ m\ +\ 1\ 2\ m\ -\ 2\ 0\ 0\ | = (m\ +\ 1)|1\ \ -\ 1\ m\ -\ 2\ 0\ | = (m\ +\ 1)(m\ -\ 2$

$\Rightarrow m_1 =-\ 1,\ m_2 =\ 2.$

$\underline{La\ matria\ A\ es\ invertible\ \forall m \in R\ -\{-\ 1,\ 2\}}$.

b)

Para $m\ =\ 1$ es $A\ = (1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 2\ 2\ \ -\ 1\ 0\ 0\ )$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 + F_1\ F_2 \rightarrow \frac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(1\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ 1\ 0\ 1\right) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow -\ F_3\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 1\ \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 + F_3\ F_2 \rightarrow F_2 - F_3\right\} \Rightarrow \left(0\ 0\ \ -\ 1\ 1\ \frac{1}{2}\ 1\ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 1\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \left(0\ 0\ \ -\ 1\ 1\right.}$

.

****

3º) Dados los planos $\pi_1 \equiv x + y + z - 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}$:

a) Comprobar que los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta. Hallar la ecuación de dicha recta en forma de unas ecuaciones paramétricas.

b) Hallar la ecuación del plano π_3 que pasa por el origen y es perpendicular a los planos π_1 y π_2.

----

a)

Un punto del plano π_2 es $P(3,\ 1,\ 1)$.

Dos vectores del plano π_2 son $\vec{u} = (1,\ -1,\ 0)$ y $\vec{v} = (2,\ -1,\ 1)$.

La expresión general del plano π_2 es la siguiente:

$$\pi_2(P;\ \vec{u},\ \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-(x-3) - (z-1) + 2(z-1) - (y-1) = 0;\ \ (x-3) + (y-1) - (z-1) = 0;$$

$$x - 3 + y - 1 - z + 1 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x + y - z - 3 = 0.$$

Dos vectores normales de los planos π_1 y π_2 son, respectivamente, los vectores $\vec{n_1} = (1,\ 1,\ 1)$ y $\vec{n_2} = (1,\ 1,\ -1)$.

Los vectores $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes, por lo cual:

$\underline{\textit{Los planos } \pi_1 \textit{ y } \pi_2 \textit{ se cortan en una recta, como se quería comprobar.}}$

La recta r en que se cortan los planos es $r \equiv \begin{cases} x + y + z - 5 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 5 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow \begin{cases} y + z = 5 - \lambda \\ y - z = 3 - \lambda \end{cases}$$

$\Rightarrow 2z = 2;\ \ z = 1.\ \ y + 1 = 5 - \lambda;\ \ y = 4 - \lambda.$

$$\underline{r \equiv \{x = \lambda \quad y = 4 - \lambda\, z = 1 \qquad}.$$

$b)$

El vector normal del plano π_3 es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos π_1 y π_2.

$$\vec{n}_1 = (1,\ 1,\ 1)\, y\, \vec{n}_2 = (1,\ 1,\ \ -1)$$

$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = |i\, j\, k\, 1\, 1\, 1\, 1\, 1\ \ -1\,| =- i + j + k - k - i + j =- 2i + 2j \Rightarrow \vec{n}_1 = (1,\ \ -$

.

$$\underline{\pi_3 \equiv x - y = 0.}$$

****

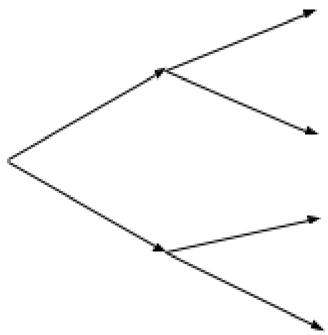
4º) El 75 % de los alumnos de un instituto acude a clase en algún tipo de transporte y el resto acude andando. Por otra parte, llegan puntual a clase el 60 % de los que utilizan transporte y el 90 % de los que acuden andando. Se pide:

a) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya llegado puntual a clase?

b) Si se elige un alumno al azar un alumno que ha llegado puntual a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya acudido andando?

----

a)



$$P = P(Pu) = P(T \cap Pu) + P(A \cap Pu) =$$

$$= P(T) \cdot P(Pu/T) + P(A) \cdot P(Pu/A) = 0,75 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,9 =$$

$$= 0,450 + 0,225 = \underline{0,675}.$$

b)

$$P = P(A/Pu) = \frac{P(A \cap Pu)}{P(Pu)} = \frac{P(A) \cdot P(Pu/A)}{P(T) \cdot P(Pu/T) + P(A) \cdot P(Pu/A)} = \frac{0,25 \cdot 0,9}{0,75 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,9} =$$

$$= \frac{0,225}{0,450 + 0,225} = \frac{0,225}{0,675} = \frac{225}{675} = \underline{\frac{1}{3} = 0,3333}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones
2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
4.- Los dispositivos que puedan conectarse a internet, o que pueden recibir o emitir información, deben estar apagados durante la celebración del examen.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) Sean x, y, z números reales. Consideremos las matrices $A = (z\ 2\ x\ 1\ -y\ -z\ x + z\ -y\ z), B = (2\ -1\ 1)\ y\ C = (-\ 2\ 3\ 1)$.

a) Escriba un sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z que resuelvan el problema matricial $A \cdot B = C$ y calcule sus soluciones.

b) Si $x = 0.\ y = 0$, calcule para qué valores de z la matriz A tiene rango 2.

----

a)

$$A \cdot B = C \Rightarrow (z\ 2\ x\ 1\ -y\ -z\ x + z\ -y\ z) \cdot (2\ -1\ 1) = (-\ 2\ 3\ 1);$$

$(2z - 2 + x\ 2 + y - z\ 2x + 2z + y + z) = (-\ 2\ 3\ 1) \Rightarrow \underline{\quad x + 2z = 0 \quad y}$
.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1\ 0\ 2\ 0\ 1\ -1\ 2\ 1\ 3\ \ 0\ 1\ 1)\ y\ A' = (1\ 0\ 2\ 0\ 1\ -1\ 2\ 1\ 3\ \ 0\ 1\ 1)$.
Los rangos de la matriz de coeficientes y ampliada son los siguientes:

$$(1\ 0\ 2\ 0\ 1\ -1\ 2\ 1\ 3\ \ 0\ 1\ 1) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_2\} \Rightarrow (1\ 0\ 2\ 0\ 1\ -1\ 0\ 1\ -1\ \ 0\ 1\ 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.$$

Eliminando la tercera ecuación de $x + 2z = 0 \quad y - z = 1 \; 2x + y + 3z = 1 \}$ y haciendo $z = \lambda$:

$\underline{Solución: x =- 2\lambda, \ y = 1 + \lambda, \ z = \lambda, \ \forall\lambda\in R}$.

$b)$

Para $x = 0.\ y = 0$ es $A = (z\ 2\ 0\ 1\ 0\ \ -z\ z\ 0\ z\ )$. Para que $Rang\ A = 2 \Rightarrow |A| = 0$:

$|A| = |z\ 2\ 0\ 1\ 0\ \ -z\ z\ 0\ z\ | =- 2z^2 - 2z =- 2z(z - 1) = 0 \Rightarrow z_1 = 0,\ z_2 = 1$

.

$Para\ z = 0 \Rightarrow A = (0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ ) \Rightarrow |0\ 2\ 1\ 0\ | \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 2.$

$Para\ z = 1 \Rightarrow A = (1\ 2\ 0\ 1\ 0\ \ -1\ 1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow |1\ 2\ 1\ 0\ | \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 2.$

$\underline{Para\ x = y = 0\ la\ matriz\ A\ tiene\ rango\ 2\ para\ z = 0\ y\ z = 1}.$

****

2º) Sea $f(x) = \frac{x-1}{x^2-7x+10}$.

a) Calcule todas las primitivas de $f(x)$.

b) Calcule el área encerrada por la gráfica $f(x)$ y las rectas $y = 0,\ x = 3\ y\ x = 4$.

----

a)

$$F(x) = \int \frac{x-1}{x^2-7x+10} \cdot dx.$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0;\ \ x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 5.$$

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5).$$

$$F(x) = \frac{x-1}{x^2-7x+10} = \frac{M}{x-2} + \frac{N}{x-5} = \frac{Mx-5M+Nx-2N}{(x-2)(x-5)} = \frac{(M+N)x+(-5M-2N)}{x^2-7x+10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M + N = 1 \ \ -5M - 2N = -1 \} \ \ -2M - 2N = -2 \ 5M + 2N = 1 \} \Rightarrow 3M = -$$

.

$$F(x) = \int \frac{x-1}{x^2-7x+10} \cdot dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{\frac{4}{3}}{x-5} \right) \cdot dx = \frac{4}{3} L|x - 5| - \frac{1}{3} L|x - 2| + C.$$

$$\underline{F(x) = L\sqrt[3]{\frac{(x-5)^4}{|x-2|}} + C.}$$

b)

En el intervalo (3, 4) todas las ordenadas de la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2-7x+10}$ son negativas, por lo cual la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_4^3 f(x) \cdot dx = \int_4^3 \frac{x-1}{x^2-7x+10} \cdot dx = \left[L\sqrt[3]{\frac{(x-5)^4}{|x-2|}} \right]_4^3 = L\sqrt[3]{\frac{(-2)^4}{1}} - L\sqrt[3]{\frac{(-1)^4}{2}} =$$

$$= L\sqrt[3]{2^4} - L\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} L2 - \frac{1}{3} L\frac{1}{2} = \frac{4}{3} L2 - \frac{1}{3}(L1 - L2) = \frac{4}{3} L2 - \frac{1}{3}(0 - L2) =$$

$$= \frac{4}{3} L2 + \frac{1}{3} L2 = \frac{5}{3} L2.$$

$$S = \frac{5}{3}L2\ u^2 \cong 1,16\ u^2.$$

****

3º) Tenemos la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x - y = 2$.

a) Demuestre que r y π son paralelos.

b) Calcule una recta paralela a r y contenida en π.

c) Calcule la distancia de r a π.

d) ¿Cuál es el vector director de la recta $s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{2}$?

----

a)

Una recta y un plano son paralelos cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda;\ z = 2\lambda;\ y = x + z - 1 = \lambda + 2\lambda - 1 =$

$= -1 + 3\lambda = y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$. Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 3,\ 2)$.

Un vector normal del plano $\pi \equiv 3x - y = 2$ es $\overrightarrow{n} = (3,\ -1,\ 0)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = (1,\ 3,\ 2) \cdot (3,\ -1,\ 0) = 3 - 3 + 0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{n}$.

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ la\ recta\ r\ es\ paralela\ al\ plano\ \pi}$.

b)

Para calcular una recta r' paralela a r y contenida en π basta encontrar un punto P del plano; la recta r' contiene a P y tiene como vector director al de la recta r, que es $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 3,\ 2)$.

Un punto del plano $\pi \equiv 3x - y = 2$ es $P(1,\ 1,\ 0)$.

$$\underline{r' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}}.$$

$c)$

La distancia entre la recta r y el plano π es la misma que la de un punto de la recta r al plano; un punto de r es $P(0,\ -1,\ 0)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(0,\ -1,\ 0)$ y al plano $\pi \equiv 3x - y - 2 = 0$:

$$d(r,\ \pi) = d(P, \pi) = \frac{|3\cdot 0-1\cdot(-1)-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|-1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \underline{\frac{\sqrt{10}}{10}\ unidades}.$$

$d)$

$\underline{Un\ vector\ director\ de\ la\ recta\ s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{2}\ es\ \vec{v_s} = (3,\ 2,\ 2).}$

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) Considere el sistema: $(2\ b\ 0\ \ -\ 1\ 0\ b\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ \ 0\ 1\ \ 2\ 0\ )\cdot(x\ y\ z\ ) = (0\ 1\ 1\ 0\ \ )$
.

a) Clasifique el tipo de sistema según el parámetro b.

b) Calcule todas las soluciones del sistema en el caso de $b\ =-\ 2$.

----

a)

$(2\ b\ 0\ \ -\ 1\ 0\ b\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ \ 0\ 1\ \ 2\ 0\ )\cdot(x\ y\ z\ ) = (0\ 1\ 1\ 0\ );\ \ (2x\ +\ by\ \ -\ x\ +\ bz\ \ -\ x\ +$
.

La matriz ampliada es $M^{'} = (2\ b\ \ -\ 1\ 0\ \ 0\ 0\ b\ 1\ \ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ \ 2\ 1\ 0\ 0\ \ )$ cuyo rango es el siguiente:

$\left|M^{'}\right| = |2\ b\ \ -\ 1\ 0\ \ 0\ 0\ b\ 1\ \ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ \ 2\ 1\ 0\ 0\ \ | \Rightarrow \left\{C_2 \rightarrow C_2 + C_1\right\} \Rightarrow |2\ b\ +\ 2\ 0\ \ -\ 1$

$=-\ (-\ 1)\cdot|b\ +\ 2\ 0\ 0\ \ -\ 1\ b\ 1\ \ -\ 1\ 2\ 1\ | = (b\ +\ 2)\cdot|b\ 1\ 2\ 1\ | = (b\ +\ 2)(b\ -\ 2)$
.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$\underline{Para\ \{b\neq\ -\ 2\ b\neq 2\ \}\Rightarrow Rang\ M\ <\ 4\ y\ Rang\ M^{'}\ =\ 4\Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$Para\ b\ =-\ 2\Rightarrow M\ = (2\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ \ 0\ 1\ \ 2\ 0\ \ )\Rightarrow Rang\ M\Rightarrow\left\{F_1,\ F_2,\ F_3\right.$

$\Rightarrow |2\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 0\ 2\ | = 2\cdot|-\ 1\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 2\ | = 2\cdot(-\ 2\ -\ 2) =-\ 8\neq 0\Rightarrow R$
.

$Para\ b\ =\ 2\Rightarrow M\ = (2\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ \ 0\ 1\ \ 2\ 0\ \ )\Rightarrow Rang\ M\Rightarrow\left\{F_1,\ F_2,\ F_4\right\}\Rightarrow$
$\Rightarrow |2\ 2\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 2\ \ -\ 1\ 1\ 0\ | =-\ 2\cdot|2\ 2\ \ -\ 1\ 1\ | =-\ 2\cdot(2\ +\ 2) =-\ 8\neq 0\Rightarrow Rang\ M\ =\ 3$
.

$\underline{Para\ \{b\ =-\ 2\ b\ =\ 2\ \}\Rightarrow Rang\ M\ =\ Rang\ M^{'}\ =\ 3\ =\ nº\ incóg.\Rightarrow S.\ C.\ D}.$

b)
Para $b\ =-\ 2$ el sistema es $2x\ -\ 2y\ =\ 0\ \ -\ x\ -\ 2z\ =\ 1\ \ -\ x\ +\ 2z\ =\ 1\ \ \ -\ x\ +\ y\ =\ 0\ \}$, que es

compatible determinado.

De las ecuaciones segunda y tercera se deduce que $z = 0$ y $x =- 1$.

Considerando lo anterior y de la cuarta ecuación: $y =- 1$.

$\underline{Solución: x = y =- 1,\ z = 0}$.

****

2º) Se quiere construir un cilindro de volumen 250π metros cúbicos y área mínima.

a) Exprese la altura h del cilindro en función del radio r de la base.

b) Calcula la función $A(r)$ que expresa el área del cilindro en función del radio de la base.

c) Calcule el valor del radio y la altura que hacen el área mínima.

Datos: Volumen del cilindro: $V = \pi\cdot r^2\cdot h$, área del cilindro: $A = 2\pi\cdot r^2 + 2\pi rh$.

----

a)

$$V = \pi\cdot r^2\cdot h = 250\cdot\pi;\ \ r^2\cdot h = 250 \Rightarrow \underline{h = \frac{250}{r^2}}.$$

b)

$$A = 2\pi\cdot r^2 + 2\pi rh \Rightarrow A(r) = 2\pi\cdot r^2 + 2\pi r\cdot\frac{250}{r^2} = 2\pi\cdot\left(r^2 + \frac{250}{r}\right) =$$

$$= 2\pi\cdot\frac{r^3+250}{r}.$$

$$\underline{A(r) = 2\pi\cdot\frac{r^3+250}{r}}.$$

c)

El área será mínima cuando se anule su primera derivada y sea positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$A'(r) = 2\pi\cdot\frac{3r^2\cdot r-\left(r^3+250\right)\cdot 1}{r^2} = 2\pi\cdot\frac{3r^3-r^3-250}{r^2} = 2\pi\cdot\frac{2r^3-250}{r^2} = 4\pi\cdot\frac{r^3-125}{r^2}.$$

$$A'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi\cdot\frac{r^3-125}{r^2} = 0;\ \ r^3 - 125 = 0;\ \ r^3 = 125 = 5^3 \Rightarrow r = 5.$$

$$A''(r) = 4\pi\cdot\frac{3r^2\cdot r^2-\left(r^3-125\right)\cdot 2r}{r^4} = 4\pi\cdot\frac{3r^3-2x^3+250}{r^3} = 4\pi\cdot\frac{r^3+250}{r^3}.$$

$$A''(5) = 4\pi\cdot\frac{5^3+250}{5^3} = 4\pi\cdot\frac{125+250}{125} = 12\pi > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ r = 5.$$

$$h = \frac{250}{5^2} = \frac{250}{25} = 10.$$

$$\underline{La\ superficie\ es\ mínima\ para\ r = 5\ m\ y\ h = 10\ m.}$$

****

3º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in R$ y $s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$:

a) Calcule la posición relativa de las rectas r y s.

b) Calcule la distancia entre las rectas r y s.

c) Calcule el plano π perpendicular a s que pase por $P(0,\ 1,\ 0)$.

----

a)

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(1,\ 0,\ -2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (0,\ 2,\ 3)$. Recta s: $B(1,\ 0,\ -1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (3,\ 1,\ -2)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1,\ 0,\ -1) - (1,\ 0,\ -2)] = (0,\ 0,\ 1)$.

Según que los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow Rang\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\} = 3$$

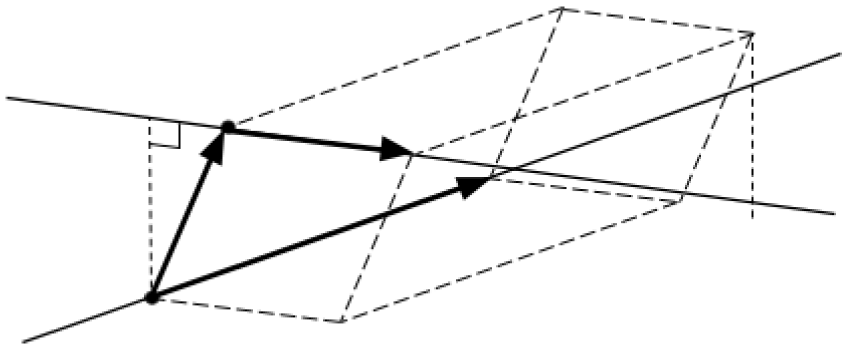
$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan}$.

b)

Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, y un tercer vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen al punto A de r y extremo el punto B de s.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w}\right) = \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| \cdot h = \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left|\vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|}.$$

$$d = \frac{\left|\vec{v}_r \cdot \left(\vec{v}_s \times \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right|} = \frac{\|0\ 2\ 3\ 3\ 1\ -2\ 0\ 0\ 1\ \|}{|i\ j\ k\ 0\ 2\ 3\ 3\ 1\ -2\ |} = \frac{|-6|}{|-4i+9j-6k-3i|} = \frac{6}{|-7i+9j-6k|} = \frac{6}{\sqrt{(-7)^2+9^2+(-6)^2}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{49+81+36}} = \frac{6}{\sqrt{166}} = \frac{6\sqrt{166}}{166} = \underline{\frac{3\sqrt{166}}{83}\ unidades = d(r, s)}.$$

$c)$

El haz de planos perpendiculares a s es $\beta \equiv 3x + y - 2z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene a $P(0, 1, 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\pi \equiv x + y - z = 0 \qquad P(0, 1, 0) \} \Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1.$$

$$\underline{\pi \equiv 3x + y - 2z - 1 = 0}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones
2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
4.- Los dispositivos que puedan conectarse a internet, o que pueden recibir o emitir información, deben estar apagados durante la celebración del examen.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) Considere el sistema $(-\ 1\, m\, 0\, m\, 1\, m\, 1\ -\ 2m\, 0\,)\cdot(x\, y\, z\,) = (-\ 2\ 0\ 3\,)$, dependiente del parámetro m.

a) Clasifique el sistema en función del parámetro m.

b) Calcule todas las soluciones en los casos en los que el sistema sea compatible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (-\ 1\, m\, 0\, m\, 1\, m\, 1\ -\ 2m\, 0\,)$ y $M' = (-\ 1\, m\, 0\, m\, 1\, m\, 1\ -\ 2m\, 0\quad -\ 2\ 0\ 3\,)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|M| = |-\ 1\, m\, 0\, m\, 1\, m\, 1\ -\ 2m\, 0\,| = m^2 - 2m^2 = -m^2 = 0 \Rightarrow m = 0.$$

$$\underline{Para\ m \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$$Para\ m = 0 \Rightarrow M' = (-\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\quad -\ 2\ 0\ 3\,) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |-\ 1\ 0\ -\ 2\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 3\,| = -3 + 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$\underline{Para\, m = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$b)$

Se resuelve para $m \neq 0$ por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|-2\ m\ 0\ 0\ 1\ m\ 3\ -2m\ 0\ |}{-m^2} = \frac{3m^2-4m^2}{-m^2} = \frac{-m^2}{-m^2} = 1.$$

$$y = \frac{|-1\ -2\ 0\ m\ 0\ m\ 1\ 3\ 0\ |}{-m^2} = \frac{-2m+3m}{-m^2} = \frac{m}{-m^2} = -\frac{1}{m}.$$

$$z = \frac{|-1\ m\ -2\ m\ 1\ 0\ 1\ -2m\ 3\ |}{-m^2} = \frac{-3+4m^2+2-3m^2}{-m^2} = \frac{m^2-1}{-m^2} = -\frac{m^2-1}{m^2}.$$

$$\underline{Solución: x = 1,\ \ y = -\frac{1}{m},\ \ z = -\frac{m^2-1}{m^2},\ \ \forall m \in \{R - 0\}.}$$

****

2º) $a)$ Calcule $\frac{sen\left(2x^2\right)+x}{L(x+1)+x}$. ($L$ denota el logaritmo neperiano).

$b)$ ¿Para qué valor de d tiene la función $f(x)=\frac{x^d+1}{x-2}$ una asíntota oblicua en $+\infty$? Calcule dicha asíntota.

$a)$

$$\frac{sen\left(2x^2\right)+x}{L(x+1)+x}=\frac{sen\ 0}{L1+0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hotipal\}\Rightarrow\frac{4x\cdot cos\left(2x^2\right)+1}{\frac{1}{x+1}+1}=$$

$$=\frac{4x\cdot cos\left(2x^2\right)+1}{\frac{x+2}{x+1}}=\frac{\left(4x^2+4x\right)\cdot cos\left(2x^2\right)+x+1}{x+2}=\frac{0\cdot cos\ 0+0+1}{0+2}=\frac{1}{2}.$$

$$\underline{\frac{sen\left(2x^2\right)+x}{L(x+1)+x}=\frac{1}{2}}.$$

$b)$

Para que una función racional tenga una asíntota oblicua es necesaria que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador, por lo cual:

$$\underline{d=2}.$$

La función resulta $f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$.

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$m=\frac{f(x)}{x}$ y $n=\left[\frac{f(x)}{x}-mx\right]$.

$$m=\frac{f(x)}{x}=\frac{\frac{x^2+1}{x-2}}{x}=\frac{x^2+1}{x^2-2x}=1.$$

$$n=\left[\frac{f(x)}{x}-mx\right]=\left[\frac{x^2+1}{x-2}-x\right]\frac{x^2+1-x^2+2x}{x}=\frac{2x+1}{x}=2.$$

$$\underline{La\ recta\ y=x+2\ es\ la\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función.}$$

****

3º) Sean loa planos $A \equiv (0,\ 1,\ 0) + t\left(1,\ \ -\vec{1},\ 2\right) + s\left(0,\ \vec{0},\ 1\right)$, con $t,\ s \in R$ y $B \equiv x\ +\ 2y\ +\ 2z\ =\ 1$.

a) Calcule la ecuación implícita (general) del plano A.

b) Calcule un punto y el vector director de la recta intersección de $A\ y\ B$.

c) Calcule el ángulo formado por los dos planos $A\ y\ B$.

----

a)

Un punto del plano A es $P(0,\ 1,\ 0)$ y $\vec{t} = (1,\ \ -\ 1,\ 2)$ y $\vec{s} = (0,\ 0,\ 1)$ son dos de sus infinitos vectores directores.

$A\left(P;\ \vec{t}, \vec{s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \ -\ x\ -\ y\ +\ 1\ =\ 0 \Rightarrow \underline{A \equiv x\ +\ y\ -\ 1\ =\ 0}$

.

b)

La recta r intersección de los planos $A\ y\ B$ es $r \equiv \{x\ +\ y\ -\ 1\ =\ 0 \quad x\ +\ 2y\ +\ 2z\ =\ 1$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r \equiv \{x\ +\ y\ =\ 1 \qquad x\ +\ 2y\ +\ 2z\ =\ 1 \Rightarrow z\ =\ \lambda \Rightarrow\ -\ x\ -\ y\ =-\ 1 \quad x\ +\ 2y\ =\ 1\ -\ 2$

$x\ =\ 1\ -\ y\ =\ 1\ +\ 2\lambda \Rightarrow r \equiv \{x\ =\ 1\ +\ 2\lambda\ y\ =-\ 2\lambda \quad z\ =\ \lambda$.

<u>*Un punto y un vector director de r son* $Q(1,\ 0,\ 0)$ *y* $\vec{v} = (2,\ \ -\ 2,\ 1)$</u>.

c)

El ángulo que forman dos planos es el mismo que forman sus vectores normales.

Un vector normal de A es $\vec{n}_A = (1,\ 1,\ 0)$ y un otro de B es $\vec{n}_B = (1,\ 2,\ 2)$.

Por la definición de producto escalar de dos vectores:

$\vec{n}_A \cdot \vec{n}_B = \left|\vec{n}_A\right| \cdot \left|\vec{n}_B\right| \cdot \cos cos\ \alpha \Rightarrow \cos cos\ \alpha\ =\ \frac{\vec{n}_A \cdot \vec{n}_B}{\left|\vec{n}_A\right| \cdot \left|\vec{n}_B\right|}\ =\ \frac{(1,1,0)\cdot(1,2,2)}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\ =$

$= \frac{1+2+0}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+4+4}} = \frac{3}{\sqrt{2\cdot3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ $\underline{Los\ planos\ A\ y\ B\ forman\ un\ ángulo\ de\ 45°}$

.

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) Sean $A = (3\ 1\ x\ 3\ )$, $B = (1\ 1\ y\ 1\ )$, con $x,\ y \in R$.

a) Determine los valores de a y b para los cuales $AB = BA$.

b) Determine un valor x para el que $A^2 = 6A$. ¿Tiene A inversa en este caso?

c) Sen $N,\ R,\ S,\ X$ matrices 2×2 que tienen todas matriz inversa. Despeje la matriz X de la expresión $N\cdot X\cdot R = S$.

----

a)

$A\cdot B = (3\ 1\ x\ 3\ )\cdot(1\ 1\ y\ 1\ ) = (3 + y\ 4\ x + 3y\ x + 3\ )$

$B\cdot A = (1\ 1\ y\ 1\ )\cdot(3\ 1\ x\ 3\ ) = (3 + x\ 4\ x + 3y\ y + 3\ )$.

$A\cdot B = B\cdot A \Rightarrow (3 + y\ 4\ x + 3y\ x + 3\ ) = (3 + x\ 4\ x + 3y\ y + 3\ ) \Rightarrow \underline{x = y}$.

b)

$A^2 = A\cdot A = (3\ 1\ x\ 3\ )\cdot(3\ 1\ x\ 3\ ) = (9 + x\ 6\ 6x\ x + 9\ )$.

$6A = 6\cdot(3\ 1\ x\ 3\ ) = (18\ 6\ 6x\ 18\ )$.

$A^2 = 6\cdot A \Rightarrow (9 + x\ 6\ 6x\ x + 9\ ) = (18\ 6\ 6x\ 18\ ) \Rightarrow \underline{x = 9}$.

Para $x = 9$ resulta $A = (3\ 1\ 9\ 3\ )$. $|A| = |3\ 1\ 9\ 3\ | = 9 - 9 = 0$.

$\underline{Para\ x = 9\ la\ matriz\ A\ no\ es\ invertible}$.

c)

$N\cdot X\cdot R = S$; $N^{-1}\cdot N\cdot X\cdot R\cdot R^{-1} = N^{-1}\cdot S\cdot R^{-1}$;

$I\cdot X\cdot I = N^{-1}\cdot S\cdot R^{-1} \Rightarrow \underline{X = N^{-1}\cdot S\cdot R^{-1}}$.

****

2º) Sea $f(x) = \{ \quad x + 2 \quad si \quad x \le -2 \; x^2 + ax \; si \; -2 < x < 0 \; 2\,sen\,x + b \; si \; 0 \le x$:

a) Determine a y b para que la función f sea continua en todo R.

b) Si $a = 3,\ b = 0$, clasifique la discontinuidad en $x = -2$.

c) Si $a = 2,\ b = 0$, calcule el área encerrada por la gráfica de f entre las rectas $y = 0, x = -5$ y $x = -3$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = -2$ y $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\; x = -2 \Rightarrow \{ f(x) = (x + 2) = -2 + 2 = 0 = f(-2) \;\; f(x) = \left(x^2 + ax\right) = 4$

$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(-2) \Rightarrow 0 = 4 - 2a;\;\; 2 - a = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}$.

La función resulta $f(x) = \{ \quad x + 2 \quad si \quad x \le -2 \; x^2 + 2x \; si \; -2 < x < 0 \; 2\,sen\,x + b \; si \; 0 \le x$.

$Para\; x = 0 \Rightarrow \{ f(x) = \left(x^2 + 2x\right) = 0 \qquad f(x) = (2\,sen\,x + b) = b = f(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{b = 0}$.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$-a + b = 1 \; 2a + b = 4 \} \; a - b = -1 \; 2a + b = 4 \} \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow \underline{a = 1 \; y \; b = 2}$
.

b)

Para $a = 3,\ b = 0$ la función es $f(x) = \{ \quad x + 2 \quad si \quad x \le -2 \; x^2 + 3x \; si \; -2 < x < 0 \; 2\,sen\,x \quad si \quad 0 \le x$.

$Para\; x = -2 \Rightarrow \{ f(x) = (x + 2) = -2 + 2 = 0 = f(-2) \;\; f(x) = \left(x^2 + 3x\right) = 4$

$\Rightarrow f(x) \;\neq\; f(x)$.

<u>$La\ función\ f(x)\ presenta\ una\ discontinuidad\ de\ salto\ finito\ para\ x\ =-\ 2.$</u>

$c)$

Para $a = 2,\ b = 0$ la función es $f(x) = \{\ \ x + 2 \ \ si \ \ x \leq -\ 2\ x^2 + 2x\ si\ -\ 2 < x < 0\ 2\, sen\, x \ \ si \ \ 0 \leq x$.

En el intervalo $(-\ 5,\ -\ 3)$ todas las ordenadas de la función $f(x)$ son negativas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S =- \int_{-5}^{-3} f(x)\cdot dx = \int_{-3}^{-5} f(x)\cdot dx = \int_{-3}^{-5} (x + 2)\cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-3}^{-5} =$$

$$= \left[\frac{(-5)^2}{2} + 2\cdot(-\ 5)\right] - \left[\frac{(-3)^2}{2} + 2\cdot(-\ 3)\right] = \frac{25}{2} -\ 10 - \frac{9}{2} + 6 = 8 - 4 = \underline{4\, u^2}$$

.

****

3º) Sean el punto $A(4,\ 0,\ 1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$.

$a)$ Calcule el plano π perpendicular a r que pasa por el punto A.

$b)$ Calcule la ecuación general (implícita) del plano γ que contiene a r y a A.

$a)$

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{n}_1 = (1,\ 0,\ 0) \\ \vec{n}_2 = (0,\ 1,\ -1) \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_r =$$

$$= k + j \Rightarrow \vec{v}_r = (0,\ 1,\ 1).$$

El haz de planos α perpendiculares a r es $\alpha \equiv y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $A(4,\ 0,\ 1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv y + z + D = 0 \\ A(4,\ 0,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \underline{\pi \equiv y + z - 1 = 0}.$$

$b)$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Un punto de r es $P(2,\ 2,\ 0)$.

Los puntos P y A determinan el vector:

$$\vec{PA} = [A - P] = [(4,\ 0,\ 1) - (2,\ 2,\ 0)] = (2,\ -2,\ 1).$$

$$\gamma\left(A;\ \vec{v}_r,\ \vec{PA}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 4 & y & z - 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x - 4) + 2y - 2(z - 1) + 2(x - 4) = 0;\ \ 3(x - 4) + 2y - 2(z - 1) = 0;$$

$$3x - 12 + 2y - 2z + 2 = 0.$$

$$\underline{\gamma \equiv 3x + 2y - 2z - 10 = 0}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA LA MANCHA

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora.

PROPUESTA A

1º) Después de la administración por vía oral de un fármaco, la concentración de este en sangre sigue el modelo: $C(t) = at^2e^{-bt}$, donde $t \in [0, +\infty)$ es el tiempo en horas transcurridas desde la administración y $a, b \in R^+$.

a) Determina los valores de a y b para que el modelo de la concentración tenga un extremo relativo en el punto $P(2, 8e^{-2})$.

b) Según el modelo anterior, ¿a qué valor tiende la concentración de este fármaco a largo plazo? Interpreta el resultado.

Nota: A largo plazo se entiende como que $t \to +\infty$.

----

a)

Por contener al punto $P(2, 8e^{-2})$ es $C(2) = 8e^{-2}$.

$C(2) = a \cdot 2^2 \cdot e^{-2b} = 8e^{-2};\ a \cdot e^{-2b} = 2e^{-2} \Rightarrow a = 2e^{2b-2}$.   (*)

Por tener extremo relativo en el punto $P(2, 8e^{-2})$ es $C'(2) = 0$.

Para que una función tenga un extremo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$C'(t) = a \cdot (2t \cdot e^{-bt} - t^2 \cdot b \cdot e^{-bt}) = a \cdot t \cdot e^{-bt}(2 - bt)$.

$C'(2) = 0 \Rightarrow a \cdot 2 \cdot e^{-2b}(2 - 2b) = 0;\ a \cdot e^{-2b}(1 - b) = 0$.

Sustituyendo en la última expresión el valor de a de la expresión (*):

$$2e^{2b-2}\cdot e^{-2b}(1 - b) = 0;\ \ e^{-2}(1 - b) = 0 \Rightarrow \underline{b = 1}.$$

$$a = 2e^{2\cdot 1-2} = 2e^{0} = 2\cdot 1 = 2 \Rightarrow \underline{a = 2}.$$

$b)$

$$C(t) = \left(at^{2}e^{-bt}\right) = \frac{a\cdot t^{2}}{e^{bt}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2a\cdot t}{b\cdot e^{bt}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{2a}{b^{2}\cdot e^{bt}} = 0.$$

$\underline{A\ largo\ plazo\ la\ concentración\ del\ fármaco\ desaparece.}$

****

2º) Dada la función $f(x) = \{\frac{x^2+a}{x-1} \ si \ x < 0 \ bx - 1 \ si x \geq 0$:

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en R.

b) Calcula razonadamente el parámetro b para que $\int_1^2 f(x) \cdot dx = 4$.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\, x = 0 \Rightarrow \{f(x) = \frac{x^2+a}{x-1} = -a \qquad f(x) = (bx - 1) = -1 = f(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(0) \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1.$$

La función resulta: $f(x) = \{\frac{x^2+1}{x-1} \ si \ x < 0 \ bx - 1 \ si x \geq 0$.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando el correspondientes valor de a.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \{\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} \ si\, x < 0 \ \ (*)\ b \quad si \ x \geq 0 \quad \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f'(0) = \{-1 \ si \ x < 0\, b \ si \ x \geq$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right) \Rightarrow -1 = b \Rightarrow b = -1.$$

$$(*) \ \ g(x) = \frac{x^2+1}{x-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{2x\cdot(x-1)-\left(x^2+1\right)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

$$\underline{La\, función\, f(x)\, es\, continua\, y\, derivable\, en\, x = 0\, para\, a = 1\, y\, b = -1.}$$

$b)$

$$\int_1^2 f(x)\cdot dx = 4 \Rightarrow \int_1^2 (bx - 1)\cdot dx = \left[\frac{bx^2}{2} - x\right]_1^2 = 4;$$

$\left(\frac{b\cdot 2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{b\cdot 1^2}{2} - 1\right) = 4;\ \ 2b - 2 - \frac{b}{2} + 1 = 4;\ \ 2b - \frac{b}{2} = 5;\ \ 4b - b = 10;$

$3b = 10;\ \ b = \frac{10}{3}.$

$$\underline{\int_1^2 f(x)\cdot dx = 4 \Rightarrow b = \frac{10}{3}.}$$

****

3º) a) Discute el sistema

$x - y - z = 1 \quad x + 2y + z =- 4\, x - 4y - 3z = a^2 - 3 \}$

en función del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvalo razonadamente para el valor $a =- 3$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1 \ -1 \ -1\ 1\ 2\ 1\ 1 \ -4 \ -3)$ y

$M' = \left(1 \ -1 \ -1\ 1\ 2\ 1\ 1 \ -4 \ -3 \quad 1 \ -4\, a^2 - 3\right)$.

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$|M| = |1 \ -1 \ -1\ 1\ 2\ 1\ 1 \ -4 \ -3| =- 6 + 4 - 1 + 2 + 4 - 3 = 0 \Rightarrow Rang$

.

Se estudia el rango de M' por el procedimiento de Gauss:

$\left(1 \ -1 \ -1\ 1\ 2\ 1\ 1 \ -4 \ -3 \quad 1 \ -4\, a^2 - 3\right) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\, F_3 \rightarrow F_3 - F_1\right.$

$\Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 + F_2\right\} \Rightarrow \left(1 \ -1 \ -1\ 0\ 3\ 2\ 0\ 0\ 0 \quad 1 \ -5\, a^2 - 9\right) \Rightarrow \{a^2 - 9 = 0 \rightarrow Rang$

.

$a^2 - 9 = 0 \Rightarrow a_1 =- 3,\ x_2 = 3.$

$\underline{Para \{a =- 3\ a = 3\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$\underline{Para \{a \neq - 3\ a \neq 3\} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

b)

Para $a =- 3$ el sistema resulta $\{x - y - z = 1 \quad x + 2y + z =- 4\, x - 4y - 3z = 6$, que es compatible indeterminado. Para su resolución eliminamos una ecuación (tercera) y se hace $y = \lambda$:

$x - y - z = 1\, x + 2y + z =- 4 \} \Rightarrow \quad x - z = 1 + \lambda\, x + z =- 4 - 2\lambda \} \Rightarrow 2x$

.

$$z = x - y - 1 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda - \lambda - 1 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\lambda.$$

$\underline{Solución: x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda,\ y = \lambda,\ z = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\lambda,\ \forall\lambda \in R.}$

****

4º) Dados los puntos $A(-1, 3, 0)$, $B(2, 0, -1)$ y la recta r intersección de los planos $\alpha \equiv x - 2y - 6 = 0$ y $\beta \equiv 2y + z = 0$:

$a)$ Calcula la distancia del punto A a la recta r.

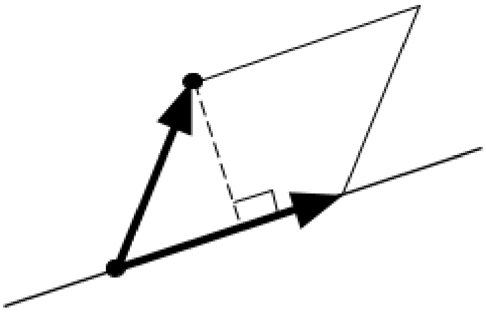
$b)$ Encuentra razonadamente el punto de r cuya distancia al punto A sea mínima.

$c)$ Encuentra razonadamente la ecuación general del plano γ que pasando por A y B sea paralelo a la recta r.

$a)$

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura, siendo la altura la distancia pedida del punto P a la recta r.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.



$$\left.\begin{array}{l} S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{PA}\right| \\ S = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{PA}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{h = d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{PA}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}}.$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x - 2y = 6 \\ 2y + z = 0 \end{array}\right. \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow x = 6 + 2\lambda;\ z = -2\lambda \Rightarrow r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 6 + 2\lambda \\ y = \lambda \end{array}\right.$$

.

Un punto y un vector director de r son $P(6, 0, 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, -2)$.

$\overrightarrow{PA} = [A - P] = [(-1, 3, 0) - (6, 0, 0)] = (-7, 3, 0)$.

Aplicando la fórmula al punto A y a la recta r:

$$d(A, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{PA}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ -7 & 3 & 0 \end{array} \right\|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|14j + 6k + 7k + 6i|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|6i + 14j + 13k|}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6^2 + 14^2 + 13^2}}{3} =$$

$= \frac{\sqrt{36+196+169}}{3} = \underline{\frac{\sqrt{401}}{3}\ unidades = d(A, r)}.$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El haz de planos perpendiculares a la recta r tiene la siguiente ecuación general: $\alpha \equiv 2x + y - 2z + D = 0$.

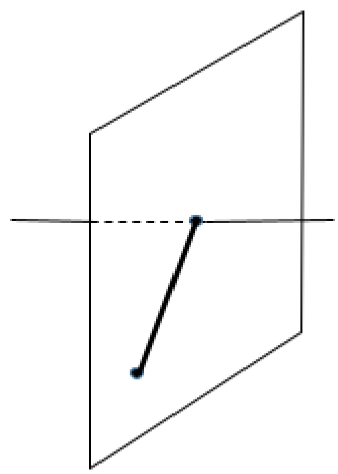
De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $A(-1, 3, 0)$ es el que satisface su ecuación:

$\alpha \equiv 2x + y - 2z + D = 0 \quad A(-1, 3, 0) \} \Rightarrow 2\cdot(-1) + 1\cdot 3 - 2\cdot 0 + D =$

$-2 + 3 - 0 + D = 0;\ 1 + D = 0;\ D = -1 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y - 2z - 1 = 0.$

El punto Q, intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv 2x + y - 2z - 1 = 0 \quad r \equiv \{x = 6 + 2\lambda\ y = \lambda \quad z = -2\lambda \quad \} \Rightarrow 2($



$12 + 4\lambda + \lambda + 4\lambda - 1 = 0;\ 9\lambda + 11 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{11}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{x = 6 - \frac{22}{9} = \frac{32}{9}\ y = -\frac{11}{9} \quad z = \frac{22}{9} \quad \right\} \Rightarrow Q\left(\frac{32}{9}, -\frac{11}{9}, \frac{22}{9}\right).$

La distancia pedida del punto A a la recta r es equivalente a la distancia entre los puntos A y Q, o sea el módulo de $\left|\overrightarrow{AQ}\right|$:

$$d(A, r) = \left|\overrightarrow{AQ}\right| = \sqrt{\left(\frac{32}{9} + 1\right)^2 + \left(-\frac{11}{9} - 3\right)^2 + \left(\frac{22}{9} - 0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{41}{9}\right)^2 + \left(-\frac{38}{9}\right)^2 + \left(\frac{22}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{41^2+38^2+22^2}}{9} = \frac{\sqrt{1.681+1.444+484}}{9} = \frac{\sqrt{3.609}}{9} = \frac{\sqrt{9\cdot 401}}{9} =$$

$= \frac{3 \cdot \sqrt{401}}{9} = \frac{\sqrt{401}}{3}.$

$$\underline{d(A,\ r) = \frac{\sqrt{401}}{3}\ unidades.}$$

$b)$

El punto de r cuya distancia al punto A es mínima es el punto Q hallado en $a)$-

$$\underline{El\ punt\ de\ r\ mas\ próximo\ al\ punto\ A(-\ 1,\ 3,\ 0)\ es\ Q\left(\frac{32}{9},\ \ -\frac{11}{9},\ \frac{22}{9}\right).}$$

$c)$

El plano γ, por pasar por A y B, tiene como vector director al vector que determinan, que es $\overrightarrow{AB} = [B\ -\ A] = [(2,\ 0,\ \ -\ 1) - (-\ 1,\ 3,\ 0)] = (3,\ \ -\ 3,\ \ -\ 1)$ y, por ser paralelo a la recta r tiene como vector director a $\overrightarrow{v}_r = (2,\ 1,\ \ -\ 2)$.

La expresión general de γ es: $\gamma\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{v}_r\right) \equiv |x\ +\ 1\ y\ -\ 3\ z\ 3\ \ -\ 3\ \ -\ 1\ 2\ 1\ \ -\ 2\ | = 0;$

$6(x\ +\ 1) -\ 2(y\ -\ 3) +\ 3z\ +\ (x\ +\ 1) +\ 6(y\ -\ 3) +\ 6z\ =\ 0;$

$7(x\ +\ 1) +\ 4(y\ -\ 3) +\ 9z\ =\ 0;\ \ 7x\ +\ 7\ +\ 4y\ -\ 12\ -\ 3z\ =\ 0.$

$$\underline{\gamma \equiv 7x\ +\ 4y\ +\ 9z\ -\ 5\ =\ 0}.$$

****

5º) a) En una tienda de lámparas tienen tres proveedores A, B y C. A suministra el 20 %, B el 10 % y C el resto. De las lámparas de A salen defectuosas el 5 %, de las de B el 4 % y de las de C el 2 %. Elegida una lámpara al azar de la tienda, calcula razonadamente la probabilidad de:

a_1) No salga defectuosa.

a_2) Si resultó defectuosa, que fuera suministrada por B.

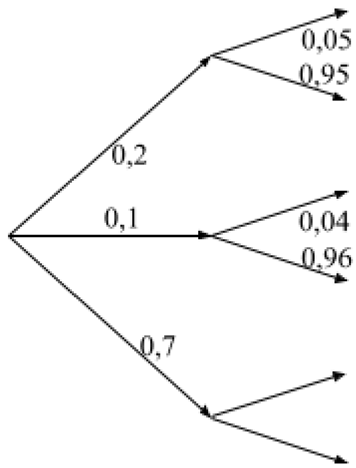
b) Una parte de un examen consta de cinco preguntas tipo test. Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas. Calcula razonadamente la probabilidad de aprobar dicha parte, contestando al azar, cuando:

b_1) Cada respuesta tiene dos ítems, solamente uno verdadero.

b_2) Cada respuesta tiene cuatro ítems, solamente uno verdadero.

----

a)



a_1)

$$P = P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D}) + P(C \cap \overline{D}) =$$

$$= P(A) \cdot P(\overline{D}/A) + P(B) \cdot P(\overline{D}/B) + P(C) \cdot P(\overline{D}/C) =$$

$$= 0,2 \cdot 0,95 + 0,1 \cdot 0,96 + 0,7 \cdot 0,98 = 0,190 + 0,096 + 0,686 = \underline{0,972}.$$

a_2)

$$P = P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(D/B)}{1 - P(\overline{D})} = \frac{0,1 \cdot 0,04}{1 - 0,972} = \frac{0,004}{0,028} = \underline{0,1429}.$$

b)

b_1)

Se trata de una distribución normal de las siguientes características:

$Bién$: $p = \frac{1}{2}$; Mal: $q = \frac{1}{2}$; $n = 5$; $r = 3$, $r = 4\, y\, r = 5$.

Sabiendo que la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial es $P = (n\, r\,)\cdot p^{r}\cdot q^{n-r}$, la probabilidad pedida es:

$$P = (5\ 3\,)\cdot 0,5^{3}\cdot 0,5^{2} + (5\ 4\,)\cdot 0,5^{4}\cdot 0,5^{1} + (5\ 5\,)\cdot 0,5^{5}\cdot 0,5^{0} =$$

$$= \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 0,125\cdot 0,25 + 5\cdot 0,0625\cdot 0,5 + 1\cdot 0,03125\cdot 1 =$$

$$= 10\cdot 0,03125 + 0,15625 + 0,03125 = 0,3125 + 0,1875 = \underline{0,5}.$$

b_2)

Se trata de una distribución normal de las siguientes características:

$Bién$: $p = \frac{1}{4}$; Mal: $q = \frac{3}{4}$; $n = 5$; $r = 3$, $r = 4\, y\, r = 5$.

$$P = (5\ 3\,)\cdot 0,25^{3}\cdot 0,75^{2} + (5\ 4\,)\cdot 0,25^{4}\cdot 0,75^{1} + (5\ 5\,)\cdot 0,25^{5}\cdot 0,75^{0} =$$

$$= \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 0,015625\cdot 0,5625 + 5\cdot 0,003906\cdot 0,75 + 1\cdot 0,000977\cdot 1 =$$

$$= 10\cdot 0,008789 + 0,014648 + 0,000977 = 0,08789 + 0,01563 = \underline{0,1035}.$$

****

PROPUESTA B

1º) a) Determina razonadamente el punto $P(x,\ y)$ de la parábola $y = x^2 + 1$ en el que la suma de sus coordenadas alcanza su mínimo valor.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la parábola dada en el punto de abscisa $x = -1/2$.

----

a)

Los puntos genéricos de la parábola son de la forma $P\left(x,\ x^2 + 1\right)$.

Se pide que sea mínima la suma: $S(x) = x + x^2 + 1 = x^2 + x + 1$.

Para que una función tenga un mínimo es necesario que se anule su primera derivada y que sea positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$S'(x) = 2x + 1.$ $\qquad\qquad S''(x) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo.$

$S'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0;\ \ x = -\frac{1}{2}.$

Nótese que por ser la parábola $y = x^2 + 1$ una función par, también es solución el valor $x = +\frac{1}{2}$.

$y = x^2 + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$

$\underline{Cumplen\ la\ condición\ pedida\ los\ puntos\ A\left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{4}\right)\ y\ B\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{4}\right).}$

b)

La pendiente de la normal a una función f en un punto es $m = -\frac{1}{f'(x)}$.

$y'_{(x)} = 2x \Rightarrow m = -\frac{1}{y'\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1.$

El punto de corte de la normal y la parábola es el siguiente:

$y_{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{4}\right).$

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y - \frac{5}{4} = 1 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right);\ \ 4y - 5 = 4x + 2;\ \ 4x - 4y + 7 = 0.$$

La ecuación de la recta normal pedida es la siguiente:

$$\underline{Normal\colon\ n \equiv 4x - 5y + 7 = 0}.$$

****

2º) Calcula las integrales: $a)\ I=\int \frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x}\cdot dx.$ $b)\ I=\int_1^2 (2x-3)\cdot e^{x-1}\cdot dx.$

$a)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -x^2 & & +2 & x^2-x \\ \cline{5-5} -2x^3 & +2x^2 & & & 2x+1 \\ \hline 0 & +x^2 & & +2 & \\ & -x^2 & +x & & \\ \hline & 0 & +x & +2 & \end{array}$$

$$I=\int \frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x}\cdot dx=\int\left(2x+1+\frac{x+2}{x^2-x}\right)\cdot dx=$$

$$=2\int x\cdot dx+\int dx+\int \frac{x+2}{x^2-x}\cdot dx=\frac{2x^2}{2}+x+I_1=x^2+x+I_1=I.$$

$$I_1=\int \frac{x+2}{x^2-x}\cdot dx \Rightarrow \frac{x+2}{x^2-x}=\frac{x+2}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{Ax-A+Bx}{x(x-1)}=\frac{(A+B)x+(-A)}{x^2-x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ -A=2 \end{array}\right\}\Rightarrow A=-2\Rightarrow B=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1=\int\left(\frac{-2}{x}+\frac{3}{x-1}\right)=-2L|x|+3L|x-1|+C=L\frac{(|x-1|)^3}{x^2}+C.$$

$$\underline{I=\int \frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x}\cdot dx=x^2+x+L\frac{(|x-1|)^3}{x^2}+C.}$$

$b)$

$$I=\int_1^2 (2x-3)\cdot e^{x-1}\cdot dx.$$

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida:

$$I=\int (2x-3)\cdot e^{x-1}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-3=u\rightarrow du=2\cdot dx \\ e^{x-1}\cdot dx=dv\rightarrow v=e^{x-1} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x-3)\cdot e^{x-1}-\int e^{x-1}\cdot 2\cdot dx=(2x-3)\cdot e^{x-1}-2\cdot e^{x-1}+C=$$

$= e^{x-1} \cdot (2x - 5) + C.$

$$I = \int_1^2 (2x - 3) \cdot e^{x-1} \cdot dx = \left[e^{x-1} \cdot (2x - 5)\right]_1^2 =$$

$$= \left[e^{2-1} \cdot (2 \cdot 2 - 5)\right] - \left[e^{1-1} \cdot (2 \cdot 1 - 5)\right] = e \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) = - e + 3.$$

$$\underline{I = \int_1^2 (2x - 3) \cdot e^{x-1} \cdot dx = 3 - e.}$$

****

3º) Dadas las matrices $A = (1 \ -3\ 0\ 1\ )$ e $I = (1\ 0\ 0\ 1\ )$:

a) Halla razonadamente dos parámetros a y b tales que $A^2 = a \cdot A + b \cdot I$.

b) Calcula razonadamente todas las matrices X que verifican que $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$.

----

a)

$$A^2 = a \cdot A + b \cdot I \Rightarrow (1 \ -3\ 0\ 1\ ) \cdot (1 \ -3\ 0\ 1\ ) = a \cdot (1 \ -3\ 0\ 1\ ) + b \cdot (1\ 0\ 0\ 1\ );$$

$(1 \ -6\ 0\ 1\ ) = (a \ -3a\ 0\ a\ ) + (b\ 0\ 0\ b\ ) = (a + b \ -3a\ 0\ a + b\ ) \Rightarrow a + b = 1\ -$

$$\Rightarrow \underline{a = 2,\ b = -1}.$$

b)

$$(A - X)(A + X) = A^2 - X^2;\ \ A^2 + A \cdot X - X \cdot A - X^2 = A^2 - X^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow A \cdot X - X \cdot A = O \Rightarrow A \cdot X = X \cdot A.$

Lo pedido es equivalente a encontrar las matrices X que conmutan con A.

Sea la matriz $X = (m\ n\ p\ q\ )$.

$A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow (1 \ -3\ 0\ 1\ ) \cdot (m\ n\ p\ q\ ) = (m\ n\ p\ q\ ) \cdot (1 \ -3\ 0\ 1\ );$

$(m - 3p\ n - 3q\ p\ q\ ) = (m \ -3m + n\ p \ -3p + q\ ) \Rightarrow m - 3p = m\ n - 3q = n\ -$

.

$$\underline{Las\ matrices\ X\ son\ de\ la\ forma\ X = (m\ n\ 0\ m\ )}.$$

****

4º) Dados los puntos $A(-1, 2, 0)$, $B(1, 0, -4)$ y la recta $r\equiv\{x = 1 - \lambda\ y = \lambda \quad z = 3 + \lambda,\ \lambda\in R$:
a) Calcula razonadamente un punto C de la recta r que forme con A y B un triángulo isósceles con el lado desigual en AB.

b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta s perpendicular a la recta r y al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pase por el punto A.

----

a)

Los puntos genéricos de r son de la forma $P(1 - \lambda, \lambda, 3 + \lambda)$.

Tiene que cumplirse que $\overline{AP} = \overline{BP}$:

$\overline{AP} = \sqrt{(1 - \lambda + 1)^2 + (\lambda - 2)^2 + (3 + \lambda - 0)^2} =$

$= \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 + \lambda^2 + 6\lambda + 9} = \sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 17}.$

$\overline{BP} = \sqrt{(1 - \lambda - 1)^2 + (\lambda - 0)^2 + (3 + \lambda + 4)^2} =$

$= \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 + 14\lambda + 49} = \sqrt{3\lambda^2 + 14\lambda + 49}.$

$\overline{AP} = \overline{BP} \Rightarrow \sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 17} = \sqrt{3\lambda^2 + 14\lambda + 49};$

$3\lambda^2 - 2\lambda + 17 = 3\lambda^2 + 14\lambda + 49; \quad -32 = 16\lambda \Rightarrow \lambda = -2.$

$\underline{El\ punto\ pedide\ es\ C(3, -2, 1)}.$

b)

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1, 0, -4) - (-1, 2, 0)] = (2, -2, -4).$

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (-1, 1, 1).$

Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y a $\overrightarrow{v_r}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de éstos vectores:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_r} = |i\ j\ k\ 2\ \ -2\ \ -4\ \ -1\ 1\ 1| = -2i + 4j + 2k - 2k + 4i - 2j = 2i + 2j$
.

Un vector director de la recta pedida s es $\vec{v}_s = (1,\ 1,\ 0)$.

La expresión de s dada por unas ecuaciones continuas es: $\underline{s \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{0}}$

.

****

5º) a) En una clase el 80 % aprueba la asignatura de Biología, el 70 % aprueba la asignatura de Matemáticas y el 60 % aprueba Biología y Matemáticas.

a_1) Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe alguna de las asignaturas?

a_2) Si se elige un estudiante y ha aprobado Biología, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Matemáticas?

b) Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:

b_1) Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl.

b_2) Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondea a cl, para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 %.

----

a)

Aprueba o no biología: $B\ y\ \overline{B}$. Aprueba o no matemáticas: $M\ y\ \overline{M}$.

$Datos$: $P(B) = 0,8;\ \ P(M) = 0,7;\ \ P(B \cap M) = 0,6.$

a_1)

$P = P(B \cup M) = P(B) + P(M) - P(B \cap M) = 0,8 + 0,7 - 0,6 = \underline{0,9}.$

a_2)

$$P = P(M/B) = \frac{P(B \cap M)}{P(B)} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{6}{8} = \underline{\frac{3}{4} = 0,75}.$$

b)

b_1)

$Datos$: $\mu = 25;\ \ n = 1;\ \ \sigma^2 = 4 \rightarrow \sigma = 2.$

$X \to N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(25;\ \frac{2}{\sqrt{1}}\right) = N(25;\ 2).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-25}{2}$.

$P = P(22 \leq Z \leq 28) = P\left(\frac{22-25}{2} \leq Z \leq \frac{28-25}{2}\right) = P\left(\frac{-3}{2} \leq Z \leq \frac{3}{2}\right) =$

$= P(-1,5 \leq Z \leq 1,5) = P(Z \leq 1,5) - [1 - P(Z \leq 1,5)] =$

$= P(Z \leq 1,5) - 1 + P(Z \leq 1,5) = 2 \cdot P(Z \leq 1,5) - 1 =$

$= 2 \cdot 0,9332 - 1 = 1,8664 - 1 = \underline{0,8664}$.

$b_2)$

Teniendo en cuenta que la capacidad C que se pide es menor que la media, el valor de su probabilidad es $1 - 0,025 = 0,9750$.

$P = P(C \leq Z) = P\left(\frac{C-25}{2} \leq Z\right) = 0,9750$.

Mirando en el interior de la tabla dada de las áreas limitadas por la curva $N(0,\ 1)$, con el valor de 0,9750 se obtiene: 1,96.

$\frac{C-25}{2} = 1,96;\ C - 25 = 3,92 \Rightarrow C = 25 + 3,92 = 28,92 \cong 29.$

$\underline{\textit{La capacidad mínima de los vasos es de } 29\ cl.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA LA MANCHA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora.

PROPUESTA A

1º) a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función $f(x) = x^{15} + x + 1$ corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$.

b) Calcula razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

----

a)

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

La función $f(x) = x^{15} + x + 1$, por ser polinómica, es continua en R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que se considere.

Considerando, por ejemplo, el intervalo $[-1, 1]$ y aplicando el teorema de Bolzano a $f(x)$:

$$f(-1) = (-1)^{15} - 1 + 1 = -1 < 0.$$

$$f(1) = 1^{15} + 1 + 1 = 1 + 2 = 3 > 0.$$

Lo anterior prueba que:

$$\underline{La\ función\ f(x) = x^{15} + x + 1\ corta,\ al\ menos\ una\ vez,\ al\ eje\ X\ en\ [-1, 1].}$$

$b)$

En el apartado anterior se ha demostrado que $f(x)$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[-\ 1,\ 1]$.

Teniendo en cuenta que $f'(x) = 15x^{14} + 1 > 0,\ \forall x \in R$, lo cual indica que la función $f(x)$ es monótona creciente en R; esto significa que:

$$\underline{La\ función\ f(x)\ corta\ exactamente\ una\ vez\ al\ eje\ X}.$$

****

2º) Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$a)\ \ I = \int_0^{\pi} \left(x^2 - 1\right)\cdot \cos cos\ x \cdot dx.$ $\qquad b)\ \ I = \int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2} \cdot dx.$

Nota: En la integral b) puede ayudarle hacer el cambio de variable $e^x = t$.

$a)$

$$I = \int_0^{\pi} \left(x^2 - 1\right)\cdot \cos cos\ x \cdot dx.$$

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida:

$$A = \int \left(x^2 - 1\right)\cdot \cos cos\ x \cdot dx \Rightarrow \{u = x^2 - 1 \rightarrow du = 2x\cdot dx\ dv = sen\ x\cdot dx \rightarrow v = se$$

$$\Rightarrow \left(x^2 - 1\right)\cdot sen\ x - \int sen\ x\cdot 2x\cdot dx = \left(x^2 - 1\right)\cdot sen\ x - 2\cdot \int x\cdot sen\ x\cdot dx =$$

$$= \left(x^2 - 1\right)\cdot sen\ x - 2\cdot A_1 = A. \quad (*)$$

$$A_1 = \int x\cdot sen\ x\cdot dx \Rightarrow \{u = x \rightarrow du = dx\ dv = sen\ x\cdot dx \rightarrow v =- cos\ x\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot(- cos\ x) - \int - cos\ x\cdot dx =- x\cdot cos\ x + \int cos\ x\cdot dx =$$

$$=- x\cdot cos\ x + sen\ x = A_1.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de A_1:

$$A = \left(x^2 - 1\right)\cdot sen\ x - 2\cdot(- x\cdot cos\ x + sen\ x) =$$

$$= \left(x^2 - 1\right)\cdot sen\ x + 2x\cdot cos\ x - 2\cdot sen\ x = \left(x^2 - 3\right)\cdot sen\ x + 2x\cdot cos\ x.$$

$$I = \int_0^{\pi} \left(x^2 - 1\right)\cdot \cos cos\ x \cdot dx = \left[\left(x^2 - 3\right)\cdot sen\ x + 2x\cdot cos\ x\right]_0^{\pi} =$$

$$\left[\left(\pi^2 - 3\right)\cdot sen\ \pi + 2\pi\cdot cos\ \pi\right] - \left[\left(0^2 - 3\right)\cdot sen\ 0 + 2\cdot 0\cdot cos\ 0\right] =$$

$= 2\pi\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 0 = -2\pi.$

$$\underline{I = \int_0^{\pi}\left(x^2 - 1\right)\cdot \cos\cos x \cdot dx = -2\pi.}$$

$b)$

$$I = \int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}\cdot dx \Rightarrow \left\{e^x = t\ e^x\cdot dx = dt\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t^2+t-2}\cdot dt. \qquad (*)$$

$t^2 + t - 2 = 0;\ t = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = -2,\ t_2 = 1.$

$t^2 + t - 2 = (t+2)(t-1).$ Sustituyendo en (*):

$$\int \frac{1}{t^2+t-2}\cdot dt = \int \frac{1}{(t+2)(t-1)}\cdot dt = \int\left(\frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-1}\right)\cdot dt. \qquad (**)$$

$\frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-1} = \frac{At-A+Bt+2B}{(t+2)(t-1)} = \frac{(A+B)t+(-A+2B)}{t^2+2t-1} \Rightarrow \quad A + B = 0\ \ -A + 2B = 1\} \Rightarrow 3B = 1$

$\Rightarrow B = \frac{1}{3},\ A = -\frac{1}{3}.$ Sustituyendo en (**):

$$I = \int\left(\frac{-\frac{1}{3}}{t+2} + \frac{\frac{1}{3}}{t-1}\right)\cdot dt = -\frac{1}{3}L|t+2| + \frac{1}{3}L|t-1| + C = \frac{1}{3}\cdot L\left|\frac{t-1}{t+2}\right| + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}\cdot dx = \sqrt[3]{\frac{e^x-1}{e^x+2}} + C.}$$

****

3º) a) Discute el sistema $x + 3y - az = 4 \;\; x + ay + z = 2 \, x + 4y - 5z = 6 \}$ en función del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvalo razonadamente para el valor $a = 2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\,3 \;\; -a\,1\,a\,1\,1\,4 \;\; -5\,)$ y $M' = (1\,3 \;\; -a\,1\,a\,1\,1\,4 \;\; -5 \quad 4\,2\,6\,)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1\,3 \;\; -a\,1\,a\,1\,1\,4 \;\; -5\,| = - 5a - 4a + 3 + a^2 - 4 + 15 = a^2 - 9a + 14 =$

$a = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} \Rightarrow a_1 = 2, \; a_2 = 7.$

$\underline{Para \, \{a \neq 2 \;\; a \neq 7 \,\} \Rightarrow Rang \, M = Rang \, M' = 3 = nº \, incóg. \Rightarrow S.\,C.\,D.}$

$Para \, a = 2 \Rightarrow M' = (1\,3 \;\; -2\,1\,2\,1\,1\,4 \;\; -5 \quad 4\,2\,6\,) \Rightarrow \left\{C_1, \, C_2, \, C_4 \, C_2, \, C_3, \, C_4\right\} \Rightarrow$

$\{|1\,3\,4\,1\,2\,2\,1\,4\,6\,| = 12 + 16 + 6 - 8 - 8 - 18 = 34 - 34 = 0 \qquad |3 \;\; -2\,4\,2\,1$

.

$\underline{Para \, a = 2 \Rightarrow Rang \, M = Rang \, M' = 2 < nº \, incóg. \Rightarrow S.\,C.\,I.}$

$Para \, a = 7 \Rightarrow M' = (1\,3 \;\; -7\,1\,7\,1\,1\,4 \;\; -5 \quad 4\,2\,6\,) \Rightarrow \left\{C_1, \, C_2, \, C_4\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\,3\,4\,1\,7\,2\,1\,4\,6\,| = 42 + 16 + 6 - 28 - 8 - 18 = 64 - 54 \neq 0 \Rightarrow Rang \, M' = 3$

.

$\underline{Para \, a = 7 \Rightarrow Rang \, M = 2; \; Rang \, M' = 3 \Rightarrow Sistema \, incompatible.}$

b)

Para $a = 2$ el sistema resulta: $x + 3y - 2z = 4 \;\; x + 2y + z = 2 \, x + 4y - 5z = 6 \}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una de las ecuaciones (tercera) y haciendo $z = \lambda$:

$x + 3y = 4 + 2\lambda \, x + 2y = 2 - \lambda \;\; \} \;\; x + 3y = 4 + 2\lambda \;\; - x - 2y = - 2 + \lambda \} \Rightarrow y$

$x + 2\cdot(2 + 3\lambda) = 2 - \lambda; \;\; x = 2 - \lambda - 4 - 6\lambda = - 2 - 7\lambda.$

$\underline{Solución: x = - 2 - 7\lambda, \; y = 2 + 3\lambda, \; z = \lambda, \; \forall\lambda \in R}.$

****

4º) Dado el plano $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$ y el punto $A(2, \ -3, \ 1)$:

$a)$ Calcula la distancia del punto A al plano α.

$b)$ Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual a la distancia del punto A al plano α.

$a)$

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

$$d(A, \alpha) = \frac{|4\cdot 2+2\cdot(-3)+4\cdot 1-15|}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}} = \frac{|8-6+4-15|}{\sqrt{16+4+16}} = \frac{|-9|}{\sqrt{36}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = \underline{1,5 \ unidades}.$$

$b)$ Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual a la distancia del punto A al plano α.

Se trata de dos planos paralelos al plano $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$, uno por cada lado, uno de los cuales contiene al punto A.

$$\frac{|4x+2y+4z-15|}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}} = \frac{3}{2}; \quad \frac{|4x+2y+4z-15|}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow |4x + 2y + 4\cdot z - 15| = 9 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_1 \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 9 \quad \alpha_2 \equiv -4x - 2y - 4z + 15 = 9 \} \ \alpha_1 \equiv 4x + 2y + 4$

.

$\underline{Solución\text{: } \alpha_1 \equiv 2x + y + 2z - 12 = 0 \ y \ \alpha_2 \equiv 2x + y + 2z - 3 = 0.}$

El plano que contiene al punto A es a_2 que satisface su ecuación.

****

5º) a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3 % de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4 % de defectuosos y la C produce 800 con un 2 % de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar:

a_1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso.

a_2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A.

b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable "número de múltiplos de tres que pueden salir".

b_1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X.

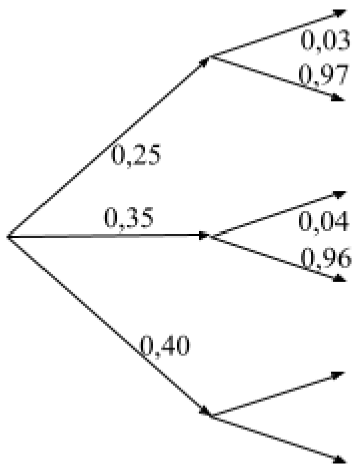
b_2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres.

----

a)

$$Total\ condensadores: 500 + 700 + 800 = 2.000.$$

$$P(A) = \frac{500}{2.000} = 0,25;\ \ P(B) = \frac{700}{2.000} = 0,35;\ \ P(C) = \frac{800}{2.000} = 0,40.$$



a_1)

$$P = P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) =$$

$$= P(A) \cdot P(D/P) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= 0,25 \cdot 0,03 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,40 \cdot 0,02 = 0,0075 + 0,0140 + 0,0080 = \underline{0,0295}$$

.

$a_2)$

$$P = P(A/D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)\cdot P(D/P)}{P(D)} = \frac{P(A)\cdot P(D/P)}{P(A)\cdot P(D/P)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C)} =$$

$$= \frac{0{,}25\cdot 0{,}03}{0{,}25\cdot 0{,}03+0{,}35\cdot 0{,}04+0{,}40\cdot 0{,}02} = \frac{0{,}0075}{0{,}0075+0{,}0140+0{,}0080} = \frac{0{,}0075}{0{,}0295} = \frac{75}{295} = \underline{\frac{15}{59} = 0,2542}$$

.

$b)$

El espacio muestral es $E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, de los cuales son sucesos favorables los números sombreados $\{3,\ 6\}$, por lo cual $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Se trata de una distribución binomial con $n = 5; p = \frac{1}{3}\ y\ q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

$b_1)$

$$Media = \mu = n\cdot p = 5\cdot\frac{1}{3} = \underline{\frac{5}{3}}.$$

$$Desviación\ típica = \sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q} = \sqrt{5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \underline{\frac{\sqrt{10}}{3} = 1,0541}.$$

$b_2)$

La fórmula de la probabilidad de la distribución binomial es $P = (n\ r\ )\cdot p^{r}\cdot q^{n-r}$, la probabilidad pedida es:

$$P = (5\ 4\ )\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1 + (5\ 5\ )\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 5\cdot\frac{1}{3^4}\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{1}{3^5}\cdot 1 = \frac{1}{3^4}\left(\frac{10}{3} + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3^4}\cdot\frac{11}{3} = \frac{11}{3^5} = \underline{\frac{11}{243} = 0,0453}.$$

****

PROPUESTA B

1º) a) Prueba que cualquiera que sea la constante a la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1,\ 3]$.

b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto $(1,\ 3)$ cuya existencia asegura el teorema de Rolle.

c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y = 4x + 2$.

----

a)

Una función cumple las hipótesis del teorema de Rolle en un intervalo cerrado cuando es continua y derivable en ese intervalo y, siendo p y q valores reales del intervalo se cumple que $f(p) = f(q)$.

Para que el valor de a sea indiferente, basta encontrar dos valores m y n pertenecientes al intervalo $[1,\ 3]$ para los que la función $g(x) = f(x) - a = x^3 - 5x^2 + 7x$ tome igual valor, es decir: $g(m) = g(n)$.

Considerando los valores extremos del intervalo:

$g(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 = 1 - 5 + 7 = 3$ $\quad g(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 = 27 -$

.

De lo anterior se deduce que $f(1) = f(3)$ y, en consecuencia:

<u>*Queda probado que $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en* $[1,\ 3]$.</u>

b)

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a,\ b]$ y derivable en $(a,\ b)$, con $a,\ b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 0;\ \ x = \frac{10 \pm \sqrt{100-84}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{10 \pm 4}{6} = \frac{5 \pm 2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \notin (1,\ 3) \text{ y } x_2 = \frac{7}{3} \in (1, 3).$$

El punto que satisface el teorema de Rolle en $[1,\ 3]$ es $\underline{P\left[\frac{7}{3},\ f\left(\frac{7}{3}\right)\right]}$.

$c)$

La pendiente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

La pendiente de la recta $y = 4x + 2$ es $m = 4$.

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$.

$f'(x) = 4 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 4;\ \ 3x^2 - 10x + 3 = 0;\ \ x = \frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6} =$

$= \frac{10\pm\sqrt{64}}{6} = \frac{10\pm8}{6} = \frac{5\pm4}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 3.$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 7\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{27} - \frac{5}{9} + \frac{7}{3} = \frac{1-15+63}{27} = \frac{49}{27}$

$f(3) = 3^3 - 5\cdot3^2 + 7\cdot3 = 27 - 45 + 21 = 3.$

$\underline{Los\ puntos\ pedidos\ son\ P\left(\frac{1}{3},\ \frac{49}{27}\right)\ y\ Q(3,\ 3).}$

****

2º) Dadas las funciones $f(x) = 2x \cdot e^{-x}$ y $g(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones.

Las abscisas de los puntos de corte de las dos funciones son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x \cdot e^{-x} = x^2 \cdot e^{-x};\ x \cdot e^{-x}(2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

En el intervalo de la superficie a calcular ambas funciones tienen sus ordenadas positivas. Teniendo en cuenta que, por ejemplo, para $x = 1 \in (0,\ 2)$:

$f(1) = 2 \cdot 1 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e}$ y $g(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow f(1) > g(1)$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_0^2 \left(2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x}\right) \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 \left(2x - x^2\right) \cdot e^{-x} \cdot dx.$$

Se resuelva, en primer lugar, la integral indefinida:

$$A = \int \left(2x - x^2\right) \cdot e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = 2x - x^2 \rightarrow du = 2(1 - x) \cdot dx\ dv = e^{-x} \cdot dx \rightarrow v =-$$

$$\Rightarrow \left(2x - x^2\right) \cdot \left(-e^{-x}\right) - \int - e^{-x} \cdot 2(1 - x) \cdot dx =$$

$$= - \left(2x - x^2\right) \cdot e^{-x} + 2 \cdot \int (1 - x) \cdot e^{-x} \cdot dx = - \left(2x - x^2\right) \cdot e^{-x} + 2A_1 = A.$$

$$A_1 = \int (1 - x) \cdot e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = 1 - x \rightarrow du = - dx\ dv = e^{-x} \cdot dx \rightarrow v = - e^{-x} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - x) \cdot \left(-e^{-x}\right) - \int - e^{-x} \cdot (-dx) = - (1 - x) \cdot e^{-x} - \int e^{-x} \cdot dx =$$

$$= -(1-x)\cdot e^{-x} + e^{-x} + C = e^{-x}\cdot[-(1-x)+1] + C = x\cdot e^{-x} + C = A_1.$$

Sustituyendo en el valor de A el valor obtenido de A_1:

$$A = -\left(2x - x^2\right)\cdot e^{-x} + 2A_1 = -\left(2x - x^2\right)\cdot e^{-x} + 2\cdot x\cdot e^{-x} + C =$$

$$= \left[-\left(2x - x^2\right) + 2x\right]\cdot e^{-x} + C = x^2\cdot e^{-x} + C = A.$$

$$S = \int_0^2 \left(2x - x^2\right)\cdot e^{-x}\cdot dx = \left[x^2\cdot e^{-x}\right]_0^2 = \left(2^2\cdot e^{-2}\right) - \left(0^2\cdot e^{-0}\right) =$$

$$= \frac{4}{e^2} - 0.$$

$$\underline{S = \frac{4}{e^2}\, u^2 \cong 0,54\, u^2.}$$

****

3º) a) Encuentra los valores del parámetro $\alpha \in R$ para que la siguiente matriz tenga inversa: $A = (a - 1\ 1\ \ - 1\ 0\ a - 2\ 1\ a\ 0\ 2\ )$.

b) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado.

c) Para $a = 0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $\left|A^{-1}\right|$ y $|2A|$.

----

a)

Una matriz tiene inversa (es invertible) cuando su determinante es distinto de cero.

$$[A] = |a - 1\ 1\ \ - 1\ 0\ a - 2\ 1\ a\ 0\ 2\ | = 2(a - 1)(a - 2) + a + a(a - 2) =$$

$$= 2\left(a^2 - 3a + 2\right) + a + a^2 - 2a = 2a^2 - 6a + 4 + a^2 - a = 3a^2 - 7a + 4 = 0;$$

$$a = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{7 \pm 1}{6} \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = \frac{4}{3}.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \left\{1,\ \frac{4}{3}\right\}}.$$

b)

Para $a = 2$ es $A = (1\ 1\ \ - 1\ 0\ 0\ 1\ 2\ 0\ 2\ )$.

Se obtiene la inversa por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \to F_3 - 2F_1\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ - 2\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \to -\frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ - \frac{1}{2}\ \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \leftrightarrow F_3\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ 0\ 1\ 0\ \ - \frac{1}{2}\ 0\ 1\ 0\right) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(0\ 0\ \frac{1}{2}\ 1\ 0\ \ - \frac{1}{2}\ 0\ 1\ 0\right) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - F_3\ F_2 \to F_2 + 2F_3\right\} \Rightarrow \left(0\ \ - 1\ \frac{1}{2}\ 1\ 2\ \ - \frac{1}{2}\ 0$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \left(0\ \ - 1\ \frac{1}{2}\ 1\ 2\ \ - \frac{1}{2}\ 0\ 1\ 0\right) = \frac{1}{2} \cdot (0\ \ - 2\ 1\ 2\ 4\ \ - 1\ 0\ 2\ 0\ )}.$$

Comprobación:

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow (1\ 1\ \ - 1\ 0\ 0\ 1\ 2\ 0\ 2\ ) \cdot \frac{1}{2} \cdot (0\ \ - 2\ 1\ 2\ 4\ \ - 1\ 0\ 2\ 0\ ) = \frac{1}{2} \cdot (2\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 2\ )$$

.

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ A \cdot A^{-1} = (2\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 2\ ) = I}$.

$c)$

Para $a = 0$ es $A = (-\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ 0\ 0\ 2\ )$. $|A| = 4$.

$$\left|A^{-1}\right| = \left|\frac{1}{A}\right| = \left|\frac{1}{4}\right| \Rightarrow \underline{\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{4}}.$$

$|2A| = 2^{3} \cdot |A| = 8 \cdot 4 = 32 \Rightarrow \underline{|2A| = 32}$.

Para la resolución de este apartado conviene recordar propiedades de las matrices y los determinantes tales como las siguientes:

Cuando se multiplica una matriz por un número quedan multiplicados todos los elementos de la matriz por dicho número.

Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

****

4º) Dados los vectores $\vec{u} = (0,\ 1,\ 1),\ \vec{v} = (1,\ 1,\ -1)\ y\ \vec{w} = (2,\ 0,\ 3)$:

a) Determina el valor de $\lambda \in R$ tal que el vector $\vec{u} - \lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$.

b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u},\ \vec{v}\ y\ \vec{w}$? Razona la respuesta.

c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pasa por el punto $P(2,\ 0,\ 2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.

----

a)

$\vec{u} - \lambda\vec{v} = (0,\ 1,\ 1) - \lambda(1,\ 1,\ -1) = (0,\ 1,\ 1) - (\lambda,\ \lambda,\ -\lambda) = (-\lambda,\ 1 - \lambda,\ 1 + \lambda)$

.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\left(\vec{u} - \lambda\vec{v}\right)\cdot\vec{w} = (-\lambda,\ 1 - \lambda,\ 1 + \lambda)\cdot(2,\ 0,\ 3) = -2\lambda + 3 + 3\lambda = 0;\ \lambda + 3 = 0$

.

$\underline{Los\ vectores\ \left(\vec{u} - \lambda\vec{v}\right)\ y\ \vec{w}\ son\ perpendiculares\ para\ \lambda = -3}$.

b)

Los vectores $\left\{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right\}$ son linealmente dependientes cuando son coplanarios, es decir: cuando el rango del determinante que forman es cero.

$Rang\left\{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right\} \Rightarrow |0\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 2\ 0\ 3| = -2 - 2 - 3 = -7 \neq 0.$

$\underline{Los\ vectores\ \vec{u},\ \vec{v}\ y\ \vec{w}\ son\ linealmente\ independientes}$.

c)

El vector director de la recta pedida r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$:

$$(0,\ 1,\ 1),\ \vec{v} = (1,\ 1,\ -1)$$

$\vec{v}_r = \vec{u} \wedge \vec{v} = |i\ j\ k\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1| = -i + j - k - i = -2i + j - k = (-2,\ 1,\ -1$

.

La expresión de r expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas o paramétricas es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}} \text{ o } \underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}}.$$

****

5º) a) El 60 % del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: 30 % vota a A, el 50 % a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencias son: el 10 % votas a A, el 60 % a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

a_1) Ser hombre y votante de C. a_2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer.

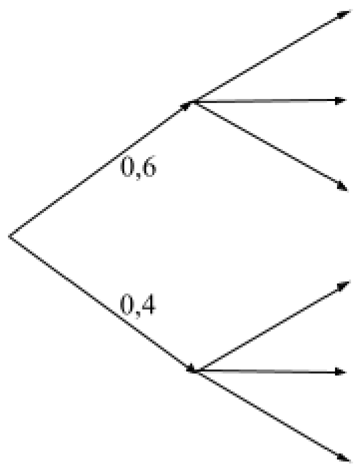
b) Las notas que se han obtenido por 1.000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

b_1) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta.

b) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte.

----

a)



a_1)

$$P = P(H \cap C) = P(H) \cdot P(C/H) = 0,4 \cdot 0,3 = \underline{0,12}.$$

a_2)

$$P = P(M/B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{P(M) \cdot P(B/M)}{P(B)} = \frac{P(M) \cdot P(B/M)}{P(M) \cdot P(B/M) + P(H) \cdot P(B/H)} =$$

$$= \frac{0,6 \cdot 0,5}{0,6 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,6} = \frac{0,30}{0,30 + 0,24} = \frac{0,30}{0,54} = \frac{30}{54} = \underline{\frac{5}{9} = 0,5556}.$$

b)

b_1)

$$Datos: n = 1.000;\ \mu = 4,05;\ \sigma = 2,5.$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-4,05}{2,5}$.

$P = P(X > 5) = P\left(Z > \frac{5-4,05}{2,5}\right) = P\left(Z > \frac{0,95}{2,5}\right) = P(Z > 0,38) =$
$= 1 - P(Z \leq 0,38) = 1 - 0,6480 = \underline{0,3520}$.

$0,352 \cdot 1000 = 352$.

$\underline{\textit{Han superado el } 5 \textit{ de nota } 352 \textit{ opositores}}$.

$b_2)$

La probabilidad de que un aspirante sea admitido es $p = \frac{330}{1.000} = 0,33$.

La probabilidad de que no sea admitido es $q = 1 - p = 1 - 0,12 = 0,67$.

$p(\overline{X} < No) = 0,67 \Rightarrow p\left(Z \leq \frac{No-4,05}{2,5}\right) = 0,67$.

Mirando en el interior de la tabla dada de las áreas limitadas por la curva $N(0,\ 1)$, con el valor de 0,67 se obtiene: 0,44.

$\frac{No-4,05}{2,5} = 0,44;\ \ No - 4,05 = 0,44 \Rightarrow No = 4,05 + 1,1 = 5,15$.

$\underline{\textit{La nota de corte es de } 5,15}$.

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee. Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas). Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) a) Discutir el sistema de ecuaciones $\left.\begin{matrix} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{matrix}\right\}$ en función de los valores del parámetro λ.

b) Resuélvalo para $\lambda = 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 1 - 1 + \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0;\ \lambda = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{matrix} \lambda \neq -2 \\ \lambda \neq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$$Para\ \lambda = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 - 1 - 2 = -6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$\underline{Para\,\lambda \neq -2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$Para\,\lambda = 1 \Rightarrow M' = (1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ -1\ 1\quad 1\ 1\ 1\,) \Rightarrow \left\{C_1 = C_3 = C_4\right\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$

.

$\underline{Para\,\lambda = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$b)$

Para $\lambda = 1$ el sistema resulta: $x + z = 1\ x + y + z = 1\ x - y + z = 1\,\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación (tercera) y haciendo $z = \lambda$:

$$x = 1 - \lambda\ x + y = 1 - \lambda\,\} \Rightarrow y = 0.$$

$\underline{Solución: x = 1 - \lambda,\ y = 0,\ z = \lambda,\ \forall\lambda \in R}.$

****

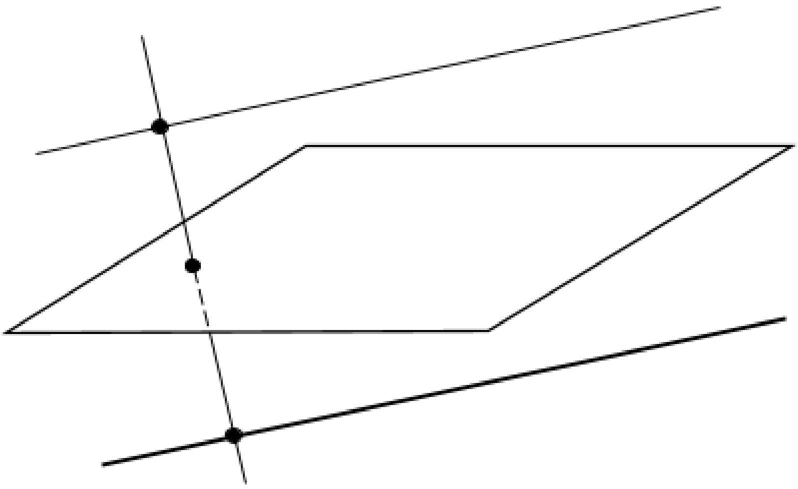
2º) Determinar la recta s que es simétrica de $r \equiv x + 2 = y = z - 2$, respecto del plano $\pi \equiv x - z + 2 = 0$.

Un vector director de la recta es $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ 1)$ y un vector normal del plano es $\overrightarrow{n} = (1,\ 0,\ -1)$.

Nótese que $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ 1)(1,\ 0,\ -1) = 1 + 0 - 1 = 0$, lo cual indica que son perpendiculares; esto supone que la recta r es paralela al plano π.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \{x = -2 + \lambda \quad y = \lambda \quad z = 2 + \lambda$.

Un punto de r es $P(-2,\ 0,\ 2)$. El punto simétrico P'' de P con respecto al plano π es el siguiente:



La recta s perpendicular a π que contiene a P es $s \equiv \{x = -2 + \mu \quad y = 0 \quad z = 2 - \mu$.

El punto P' de corte de s y π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv x - z + 2 = 0 \quad s \equiv \{x = -2 + \mu \quad y = 0 \quad z = 2 - \mu\ \} \Rightarrow -2 + \mu -$
.

$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{P'P''} \Rightarrow \left[P' - P\right] = \left[P'' - P'\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow [(-1,\ 0,\ 1) - (-2,\ 0,\ 2)] = [(x,\ y,\ z) - (-1,\ 0,\ 1)];\ (1,\ 0,\ -1) = (x + 1,\ y,\ z$
.

$\Rightarrow \{x + 1 = 1 \rightarrow x = 0 \quad y = 0 \quad z - 1 = -1 \rightarrow z = 0\ \} \Rightarrow P' \equiv O(0,\ 0,\ 0)$
.

La recta r' pedida es la que tiene por vector director a $\vec{v}_r = (1,\ 1,\ 1)$ y contiene al punto $O(0,\ 0,\ 0)$.

La recta r' dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{r' \equiv \{x = \lambda\, y = \lambda\, z = \lambda}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que $f(x)$ se anula.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 12x^3 + 3x^2.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 + 3x^2 = 3x^2(4x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = -\frac{1}{4}.$$

Por ser $3x^2 > 0,\ \forall x \in R$, la función será creciente o decreciente cuando la expresión $(4x + 1)$ sea positiva o negativa, respectivamente.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento:\ f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty,\ -\frac{1}{4}\right)}.$$

$$\underline{Crecimiento:\ f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{4},\ 0\right) \cup (0,\ +\infty)}.$$

Es condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, que se anule su primera derivada; para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x) = 36x^2 + 6x.$$

$f''(0) = 0$, ni máximo ni mínimo (para punto de inflexión).

$$f''\left(-\frac{1}{4}\right) = 36\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{36}{16} - \frac{6}{4} = \frac{9}{4} - \frac{6}{4} > 0 \Rightarrow Mín.\ para\ x = -\frac{1}{4}.$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^4 + \left(-\frac{1}{4}\right)^3 - 1 = \frac{3}{256} + \frac{1}{64} - 1 = \frac{3+4-256}{256} = -\frac{249}{256}.$$

$$\underline{Mínimo\ relativo: P\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{249}{256}\right)}.$$

Teniendo en cuenta que $f(x) \ = \left(3x^4 + x^3 - 1\right) \ =+ \ \infty$, que el mínimo tiene ordenada negativa, se deduce necesariamente que:

$$\underline{La\ función\ f(x)\ se\ anula\ exactamente\ en\ dos\ puntos.}$$

****

4º) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x \cdot \cos cos\, x$ y el eje de las x, cuando x pertenece al intervalo $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

En el intervalo $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ todas las ordenadas de la función son positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos cos\, x \cdot dx \Rightarrow \{x = u \rightarrow dx = du \quad \cos cos\, x \cdot dx = dv \rightarrow v = sen\, x\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x \cdot sen\, x - \int sen\, x \cdot dx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = [x \cdot sen\, x + \cos cos\, x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} sen\, \frac{\pi}{2} + \cos cos\, \frac{\pi}{2}\right) - (0 \cdot sen\, 0 + \cos cos\, 0) = \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0\right) - (0 + 1) = \frac{\pi}{2} - 1$$

.

$$\underline{S = \frac{\pi - 2}{2}\, u^2 \cong 0,57\, u^2.}$$

****

5º) a) Se tira una moneda tres veces. Calcular la probabilidad de que, sin tener en cuenta el orden, salgan una cara y dos cruces.

b) Una persona elige al azar, sin verlas, dos cartas de una baraja española (de 40 cartas, de las cuales 10 son de cada uno de los 4 palos: oros, copas, espadas y bastos). Calcular la probabilidad de que ninguna de las dos cartas elegidas sea de copas.

----

a)

El espacio muestral es el siguiente:

$E = \{+++,\ \ ++\ c,\ \ +\ c\ +,\ \ +\ cc,\ ccc,\ cc\ +,\ c\ +\ c,\ c\ ++\}.$

Los casos favorables son los siguientes: $E = \{++\ c,\ \ +\ c\ +,\ \ c\ ++\}.$

Aplicando la regla de Laplace:

$$P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} \Rightarrow \underline{P = \frac{3}{8} = 0,375.}$$

b)

Elegir dos cartas simultáneamente es equivalente a elegir dos cartas sucesivas sin reemplazamiento.

$$P = \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = \frac{3}{4} \cdot \frac{29}{39} = \frac{1}{4} \cdot \frac{29}{13} = \underline{\frac{29}{52} = 0,5577.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = (1\ 2\ 2\ 5\ )$, $B = (1\ 0\ 1\ 1\ )\ y\ M = (1\ 1\ a\ b\ )$, calcúlense $a\ y\ b$ para que se verifiquen $|M \cdot A| = 2\ y\ |M + B| = 3$, donde se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz.

$M \cdot A = (1\ 1\ a\ b\ ) \cdot (1\ 2\ 2\ 5\ ) = (3\ 7\ a + 2b\ 2a + 5b\ )$.

$|M \cdot A| = 2 \Rightarrow |3\ 7\ a + 2b\ 2a + 5b\ | = 6a + 15b - 7a - 14b = - a + b = 2$.

$M + B = (1\ 1\ a\ b\ ) + (1\ 0\ 1\ 1\ ) = (2\ 1\ a + 1\ b + 1\ )$.

$|M + B| = 3 \Rightarrow |2\ 1\ a + 1\ b + 1\ | = 2b + 2 - a - 1 = - a + 2b + 1 = 3;$

$- a + 2b = 2$.

Resolviendo el sistema de las dos ecuaciones halladas:

$- a + b = 2\quad - a + 2b = 2\ \} \Rightarrow \underline{b = 0};\ \ \underline{a = - 2}$.

****

2º) Dadas la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y+1}{2} = z - 1$ y el plano $\pi \equiv x - y + z = 0$, se pide:

a) Determinar la oposición relativo de r y π.

b) Hallar el plano π' paralelo a π situado a la misma distancia de r y π.

----

a)

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv x - 1 = \frac{y+1}{2} = z - 1 \Rightarrow \left. \begin{matrix} 2x - 2 = y + 1 \\ x - 1 = z - 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow r \equiv \{2x - y - 3 = 0$$

.

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left. \begin{matrix} 2x - y - 3 = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{matrix} \right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango M = Rango M' = 2 ⇛ La recta está contenida en el plano.

2. -- Rango M =2, Rango M' = 3 ⇛ La recta es paralela al plano.

3. -- Rango M = Rango M' = 3 ⇛ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 1 = 0 \Rightarrow Rango\ M = 2.$$

$$Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow Rango\ M' = 3.$$

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos}.$

b)

Un punto de la recta r es $P(1, -1, 1)$.

La recta s, perpendicular a π que contiene al punto $P(1, -1, 1)$ tiene la siguiente expresión, dada por unas ecuaciones paramétricas:

$s\equiv\{x = 1 + \lambda \quad y = - 1 - \lambda \; z = 1 + \lambda$.

El punto Q de corte de s y π es la solución del sistema que forman:

$\pi\equiv x - y + z = 0 \;\; s\equiv\{x = 1 + \lambda \quad y = - 1 - \lambda \; z = 1 + \lambda \quad \}\Rightarrow 1 + \lambda + 1 +$

.

El punto intersección es: $\{x = 1 + \lambda \quad y = - 1 - \lambda \; z = 1 + \lambda \quad \}\Rightarrow\lambda = - 1\Rightarrow Q\equiv O(0,\ 0, 0)$.

El punto medio del segmento de extremos $O\, y\, P(1, \ - 1, 1)$ es $M\left(\frac{1}{2}, \ \ -\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}\right)$.

El plano $\pi^{'}$ pedido es paralelo a π y contiene al punto $M\left(\frac{1}{2}, \ \ -\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}\right)$:

$\pi^{'}\equiv x - y + z + D = 0 \qquad M\left(\frac{1}{2}, \ \ -\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}\right)\} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + D = 0;$

.

$\pi^{'}\equiv x - y + z - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \underline{\pi^{'}\equiv 2x - 2y + 2z - 3 = 0}$.

****

3º) Dada la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica.

$$f(x) = x \cdot e^{-x} = \frac{x}{e^x}.$$

Por ser $e^x \neq 0,\ \forall x \in R$, el dominio de la función es R: $\underline{D(f) \Rightarrow R}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ síntota\ horizontal.}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{e^x \neq 0,\ \forall x \in R \Rightarrow No\ tiene\ asíntotas\ verticales.}$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, con $m \in R - \{0\}$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x}\ y\, n = [f(x) - mx]\ .$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x}{e^x}}{x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0\ .$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas.}$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1 - x) = \frac{1-x}{e^x}.$$

Por ser $e^x > 0,\ \forall \in x D(f)$, la función es creciente o decreciente cuando la expresión $(1 - x)$ sea positiva o negativa, respectivamente.

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$Para\, x < 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: (-\infty, 1)}.$

$Para\, x > 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: (1, +\infty)}.$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1 - x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(1 - x) = 0;\ \ e^{-x} \neq 0,\ \forall x \in R;\ \ 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = -e^{-x} \cdot (1 - x) + e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}(1 - x + 1) = e^{-x}(x - 2).$$

$$f''(1) = e^{-1}(1 - 2) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow \underline{Máximo: P\left(1, \frac{1}{e}\right) \cong P(1, 0'37)}.$$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$f''(x) = e^{-x}(x - 2) = \frac{x-2}{e^x}.$$

Por ser $e^x > 0,\ \forall \in x D(f)$, la función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando la expresión $(2 - x)$ sea negativa o positiva, respectivamente.

Los periodos de concavidad (∩) o convexidad (∪) son los siguientes:

$Para\, x < 2 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \underline{Concavidad\ (\cap): (-\infty, 2)}.$

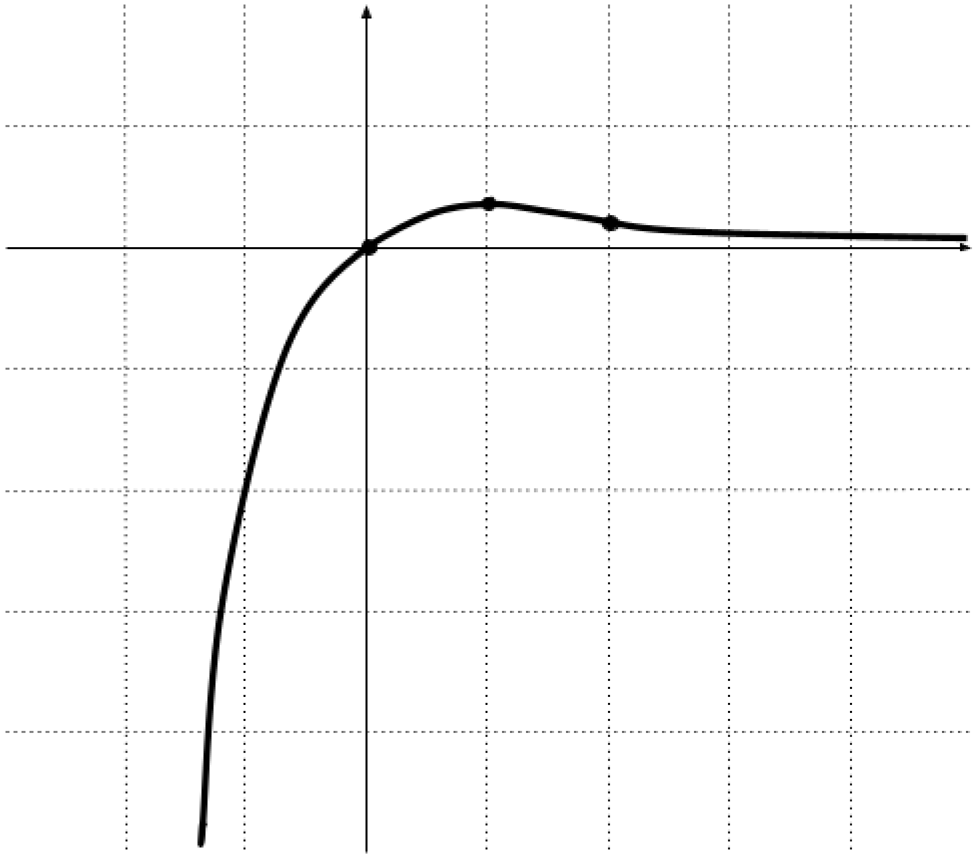
$Para\, x > 2 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \underline{Convexidad: (2, +\infty)}.$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anula su segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2-x}{e^x} = 0 \Rightarrow 2 - x = 0;\ \ x = 2.$$

$$f(2) = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2} \Rightarrow \underline{Punto\ de\ inflexión: Q\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right) \cong Q(2,\ 0'27).}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y que la función pasa por el origen de coordenadas, puede hacerse una representación gráfica, aproximada, de la función, que es la siguiente:



****

4º) $a)$ Calcular $\frac{e^x - \cos\cos x}{L(1+x)}$. $b)$ Calcular $I = \int \frac{(Lx)^2}{x} \cdot dx$.

$a)$

$$\frac{e^x - \cos\cos x}{L(1+x)} = \frac{e^0 - \cos\cos 0}{L(1+0)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{e^x + sen\, x}{\frac{1}{1+x}} =$$

$$= \frac{e^0 + sen\, 0}{\frac{1}{1+0}} = \frac{1+0}{1} = 1.$$

$$\underline{\frac{e^x - \cos\cos x}{L(1+x)} = 1.}$$

$b)$

$$I = \int \frac{(Lx)^2}{x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = (Lx)^2 \rightarrow du = 2 \cdot Lx \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \; dv = \frac{1}{x} \cdot dx \rightarrow v = Lx \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Lx)^2 \cdot Lx - \int Lx \cdot 2 \cdot Lx \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = (Lx)^3 - 2 \cdot \int \frac{(Lx)^2}{x} \cdot dx = (Lx)^3 - 2I.$$

$$3I = (Lx)^3 + C \Rightarrow I = \frac{1}{3} \cdot (Lx)^3 + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{(Lx)^2}{x} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot (Lx)^3 + C.}$$

****

5º) La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país.

$Datos$: $\mu = 26;\ \ \sigma = 6.$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-26}{6}$.

$P = P(X > 35) = P\left(Z > \frac{35-26}{6}\right) = P\left(Z > \frac{9}{6}\right) = P(Z > 1,5) =$

$= 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = \underline{0,0668}.$

$\underline{Las\ personas\ adultas\ obesas\ de\ ese\ país\ suponen\ el\ 6,68\ \%}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Sean las matrices $M = (1\ 2\ 0\ \ -\ 1\ t\ 2\ )\ y\ N = (-\ 1\ t\ 2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ )$.

a) Calcule $M \cdot N$ y compruebe que la matriz resultante no es invertible.

b) Encuentre los valores de t para los que la matriz $N \cdot M$ es invertible.

----

a)

$$M \cdot N = (1\ 2\ 0\ \ -\ 1\ t\ 2\ ) \cdot (-\ 1\ t\ 2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ ) = \left(1\ t\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 2\ -\ t\ t^2\ 2t\ -\ 2\right)$$

.

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M \cdot N| = \left|1\ t\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 2\ -\ t\ t^2\ 2t\ -\ 2\right| = t(2\ -\ t) - t^2\ +\ t(2t\ -\ 2) =$$

$$=\ 2t\ - t^2 - t^2\ +\ 2t^2\ -\ 2t\ =\ 0.$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ la\ matriz\ M \cdot N\ no\ es\ invertible}$.

b)

$$N \cdot M = (-\ 1\ t\ 2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ ) \cdot (1\ 2\ 0\ \ -\ 1\ t\ 2\ ) = (2t\ -\ 1\ 2\ -\ t\ 1\ -\ t\ 0\ ).$$

$$|N \cdot M| = |2t\ -\ 1\ 2\ -\ t\ 1\ -\ t\ 0\ | =-\ (1\ -\ t)(2\ -\ t) =-\ \left(2\ -\ t\ -\ 2t\ +\ t^2\right) =$$

$$=-\ t^2\ +\ 3t\ -\ 2.$$

$$|N \cdot M| =\ 0 \Rightarrow\ -\ t^2\ +\ 3t\ -\ 2\ =\ 0;\ \ t^2\ -\ 3t\ +\ 2\ =\ 0;\ \ x\ =\ \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

$= \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2.$

$\underline{La\ matriz\ N \cdot M\ es\ ivertible\ \forall t \in R\ - \{1,\ 2\}}.$

****

2º) Sea r la recta que pasa por los puntos $A(0,\ 1,\ 1)$ y $B(1,\ 1,\ -1)$.

$a)$ Encuentre la ecuación paramétrica de la recta r.

$b)$ Calcular todos los puntos de la recta r que están a la misma distancia de los planos $\pi_1 \equiv x + y = -2$ y $\pi_2 \equiv x - z = 1$.
Nota: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas $P_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ al plano de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $d\left(P_0,\ \pi\right) = \frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

$a)$

Los puntos A y B determinen el vector $\overrightarrow{AB} = [B - A] = (1,\ 0,\ -2)$.

Considerando, por ejemplo el punto A, unas ecuaciones paramétricas de r son:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}}.$$

$b)$ Calcular todos los puntos de la recta r que están a la misma distancia de los planos $\pi_1 \equiv x + y = -2$ y $\pi_2 \equiv x - z = 1$.

Un punto genérico de r es $P(\lambda,\ 1,\ 1 - 2\lambda)$.

$$d\left(P,\ \pi_1\right) = \frac{|1\cdot\lambda+1\cdot1+0\cdot(1-2\lambda)+2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|\lambda+1+2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|\lambda+3|}{\sqrt{2}}.$$

$$d\left(P,\ \pi_2\right) = \frac{|1\cdot\lambda+0\cdot1-1\cdot(1-2\lambda)-1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{|\lambda+0-1+2\lambda-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|3\lambda-2|}{\sqrt{2}}.$$

$$d\left(P,\ \pi_1\right) = d\left(P,\ \pi_2\right) \Rightarrow \frac{|\lambda+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|3\lambda-2|}{\sqrt{2}};\ \ |\lambda + 3| = |3\lambda - 2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda + 3 = 3\lambda - 2 \\ \lambda + 3 = -3\lambda + 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2\lambda = 5 \\ 4\lambda = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{5}{2},\ \lambda_2 = -\frac{1}{4}.$$

$$P_1\left(\frac{5}{2},\ 1,\ 1 - 2\cdot\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \underline{P_1\left(\frac{5}{2},\ 1,\ -4\right)}.$$

$$P_2\left[-\frac{1}{4},\ 1,\ 1 - 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\right] \Rightarrow \underline{P_2\left(-\frac{1}{4},\ 1,\ \frac{3}{2}\right)}.$$

****

3º) Sea la función $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica y que sea paralela a la recta de ecuación $x + 3y = 0$.

b) Calcule, si los hay, los puntos de la gráfica en la que la función presenta un máximo o mínimo relativo o un punto de inflexión.

----

a)

La recta $x + 3y = 0$ también puede expresarse de la forma $y = -\frac{1}{3}x$, cuya pendiente es $m = -\frac{1}{3}$.

La recta tangente, por ser paralela a la recta dada, tiene su misma pendiente.

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow m = f'(x) = 3x^2 - 2x = -\frac{1}{3};\ \ 9x^2 - 6x + 1 = 0;$$

$(3x - 1)^2 = 0;\ \ 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$.

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} = \frac{1-3}{27} = -\frac{2}{27} \Rightarrow P\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{27}\right).$$

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$.

$$y + \frac{2}{27} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{9};\ \ 27y + 2 = -9x + 3.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente:

$$\underline{Tangente\colon\ t \equiv 9x + 27y - 1 = 0}.$$

b)

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada;

si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x. \qquad f''(x) = 6x - 2.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x = 0;\ \ x(3x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}.$$

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 2 = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Máximo: O(0,\ 0)}.$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 2 = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = \frac{2}{3}.$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = \frac{8-12}{27} = -\frac{4}{27} \Rightarrow \underline{Mínimo: A\left(\frac{2}{3},\ -\frac{4}{27}\right)}$$

.

Para que una función polinómica tenga un punto de inflexión son condiciones necesarias que se anule su segunda derivada y sea distinta de cero la tercera derivada para los valores que anulan a la segunda.

$$f''(x) = 6x - 2. \qquad f'''(x) = 6 \neq 0.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 2 = 0;\ \ 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} = \frac{1-3}{27} = -\frac{2}{27} \Rightarrow \underline{P.\ I.: B\left(\frac{1}{3},\ \frac{-2}{27}\right)}.$$

****

4º) Considere los puntos $P(3,\ -2,\ 1)$, $Q(5,\ 0,\ 3)$, $R(1,\ 2,\ 3)$ y la recta r que tiene por ecuación $r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2y+3z-5=0 \end{cases}$.

a) Determine la ecuación general (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano γ que pasa por P y Q y es paralela a la recta r.

b) Dados el plano $\pi \equiv x + 2y + mz = 7$ y el plano β que pasa por P, Q y R, encuentre m para que sean paralelos y no coincidentes.

----

a)

Los puntos $P(3,\ -2,\ 1)$ y $Q(5,\ 0,\ 3)$ determinan el vector $\overrightarrow{PQ} = (2,\ 2,\ 2)$.

Un vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2y+3z-5=0 \end{cases}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 1,\ 0)$ y $\overrightarrow{n_2} = (0,\ 2,\ 3)$.

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3i + 2k - 3j = 3i - 3j + 2k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (3,\ -3,\ 2).$$

$$\gamma\left(Q;\ \overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{v_r}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y & z-3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$4(x-5) + 6y - 6(z-3) - 6(z-3) + 6(x-5) - 4y = 0;$

$10(x-5) + 2y - 12(z-3) = 0;\ \ 5(x-5) + y - 6(z-3) = 0;$

$5x - 25 + y - 6z + 18 = 0 \Rightarrow \underline{\gamma \equiv 5x + y - 6z - 7 = 0}.$

b)

Los puntos $P(3,\ -2,\ 1)$ y $R(1,\ 2,\ 3)$ determinan el vector $\overrightarrow{PR} = (-2,\ 4,\ 2)$.

$$\beta\left(Q;\ \overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y & z-3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$4(x-5) - 4y + 8(z-3) + 4(z-3) - 8(x-5) - 4y = 0;$

$-4(x-5) - 8y + 12(z-3) = 0;\ \ (x-5) + 2y - 3(z-3) = 0;$

$x - 5 + 2y - 3z + 9 = 0 \Rightarrow \beta \equiv x + 2y - 3z = -4.$

Si los planos $\pi \equiv x + 2y + mz = 7$ y $\beta \equiv x + 2y - 3z = -4$ tienen que ser paralelos y no coincidentes tienen que tener proporcionales sus respectivos coeficientes de $x,\ y,\ z$ y no ser proporcionales sus términos independientes:

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{m}{-3} \neq \frac{7}{-4} \Rightarrow \underline{m = -3}.$$

****

5º) Sea la función $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.

a) Compruebe que la función $f(x)$ cumple el enunciado del teorema de Bolzano en el intervalo $[0,\ 2]$ y que, por tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo $(0,\ 2)$. Compruebe que $x = 1$ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$ y razone, teniendo en cuenta el signo de $f'(x)$, que la solución es única.

b) A partir del resultado final del apartado anterior, encuentre el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0\ y\ x = 1$.

----

a)

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a,\ b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".

La función $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$ es continua en su dominio, $D(f) = [0,\ +\infty)$, por ser la suma de tres funciones continuas, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano en el intervalo $[0,\ 2]$:

$$f(0) = \sqrt{0} + 0 - 2 = -2 < 0.$$

$$f(2) = \sqrt{2} + 2 - 2 = \sqrt{2} > 0.$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ la\ función\ f(x)\ tiene\ al\ menos\ una\ raíz\ en\ (0,\ 2).}$

$$f(1) = \sqrt{1} + 1 - 2 = 1 - 1 = 0.$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ x = 1\ es\ raíz\ de\ la\ función\ f(x).}$

Se pide comprobar que la raíz es única. Se usa el método de reducción al absurdo.

Si tuviera otra raíz le sería aplicable el teorema de Rolle a la función en el intervalo considerado.

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a,\ b]$ y derivable en $(a,\ b)$, con $a,\ b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \neq 0,\ \forall x \in R.$$

Al no existir ningún valor real tal que $f'(x) = 0$:

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ f(x)\ solamente\ tiene\ una\ raíz\ real.}$$

$b)$

Para el cálculo del área pedida debe tenerse en cuenta que en el intervalo $(0,\ 1)$ las ordenadas de la función son negativas.

$$S = -\int_0^1 f(x)dx = \int_1^0 f(x)dx = \int_1^0 \left(\sqrt{x} + x - 2\right)\cdot dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^0 =$$

$$= \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^0 = 0 - \left(\frac{2\cdot1\cdot\sqrt{1}}{3} + \frac{1^2}{2} - 2\cdot1\right) = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{-4-3+12}{6} = \frac{5}{6}$$

.

$$\underline{S = \frac{5}{6}\ u^2 \cong 0,833\ u^2.}$$

****

6º) Unos estudiantes de bachillerato han programado una hoja de cálculo como el de la figura siguiente que da la solución de un sistema de ecuaciones compatible determinado de una manera automática:

$|1\,2\ -1\,1\ -1\ -2\,2\,1\,2\ \ -6\ -3\,6^{x\quad y\quad z}\ |\Rightarrow x = 1\, y =- 2\, z = 3$

a) Escriba el sistema y compruebe que los valores propuestos como solución son correctos.

b) ¿Qué valor debería ponerse en lugar de 2 que está enmarcado en la imagen, correspondiente a la celda a_{33}, para que el sistema sea incompatible?

----

a)

$(1\,2\ -1\,1\ -1\ -2\,2\,1\,2\,)\cdot(x\,y\,z\,) = (-\ 6\ -\ 3\,6\,) \Rightarrow \underline{x + 2y - z =- 6\,x - y - 2z}$

.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$x = \frac{|-6\,2\,-1\,-3\,-1\,-2\,6\,1\,2\,|}{|1\,2\,-1\,1\,-1\,-2\,2\,1\,2\,|} = \frac{12+3-24-6-12+12}{-2-1-8-2+2-4} = \frac{15-30}{-15} = \frac{-15}{-15} = 1.$

$y = \frac{|1\,-6\,-1\,1\,-3\,-2\,2\,6\,2\,|}{-15} = \frac{-6-6+24-6+12+12}{-15} = \frac{24-6+12}{-15} = \frac{30}{-15} =- 2.$

$z = \frac{|1\,2\,-6\,1\,-1\,-3\,2\,1\,6\,|}{-15} = \frac{-6-6-12-12+3-12}{-15} = \frac{-45}{-15} = 3.$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ la\ solución\ es\ x =- 1,\ y =- 2\ y\ z = 3}.$

b)

Supóngase que el valor a determinar es n.

Procediendo por el método de Gauss:

$M' = (1\,2\ -1\,1\ -1\ -2\,2\,1\,n\ \ -6\ -3\,6\,) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\, F_3 \to F_3 - 2F_1\} \Rightarrow ($
$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow (1\,2\ -1\,0\ -3\ -1\,0\,0\,n + 3\ \ -6\,3\,15\,) \Rightarrow n + 3 = 0 \Rightarrow n =-$

.

Según el teorema de Ruoché-Fröbenius:

$\underline{Para\ n =- 3 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere la función polinómica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.

a) Calcule los valores de los parámetros $a,\ b\ y\ c$, sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = x + 3$.

b) Para los valores $a = 2,\ b = 1\ y\ c = 3$, calcule las abscisas de los extremos relativos de la función y clasifíquelos.

----

a)

Por tener un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ es $f'(1) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$.

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3\cdot1^2 - 2a\cdot1 + b = 0;\ \ -2a + b = -3.$ (1)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

La pendiente de la recta $y = x + 3$ es $m = 1$.

Lo anterior implica que $f'(0) = 1$:

$m = f'(0) = 3x^2 - 2ax + b = 1 \Rightarrow \underline{b = 1}$.

Sustituyendo en (1) el valor de b:

$-2a + 1 = -3;\ \ -2a = -4 \Rightarrow \underline{a = 2}$.

La función resulta $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + c$.

El punto de tangencia es $T(0,\ 3)$, por lo cual es $f(0) = 3$:

$f(0) = 3 \Rightarrow \underline{c = 3}$.

$b)$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. $\qquad f''(x) = 6x - 4$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0;\ x = x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 1$.

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = 2 - 4 = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = \frac{1}{3}$.

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 3 = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + 3 = \frac{1-6+9+81}{27} = \frac{85}{27} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{Máximo: P\left(\frac{1}{3},\ \frac{85}{27}\right)}$.

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 6 - 4 = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1$.

$f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 3 = 3 \Rightarrow \underline{Mínimo: Q(1,\ 3)}$.

****

2º) Considere el sistema de ecuaciones lineales $\{x + y + z = 3\ x + y - z = 1\ 2x + ay = 2a$, que depende del parámetro real a:

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema para el caso de $a = 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ -1\ 2\ a\ 0\ )$ y $M' = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ -1\ 2\ a\ 0\ \ \ 3\ 1\ 2a\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ -1\ 2\ a\ 0\ | = a - 2 - 2 + a = 2a - 4 = 0;\ \ a - 2 = 0 \Rightarrow a =$

.

$\underline{Para\ a \neq 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ -1\ 2\ 2\ 0\ \ \ 3\ 1\ 4\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 1\ 3\ 1\ \ -1\ 1\ 2\ 0\ 4\ | = -4 + 2 + 6 - 4 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Para $a = 1$ el sistema resulta $\{x + y + z = 3\ x + y - z = 1\ 2x + y = 2$, que es compatible determinado.

$x = \frac{|3\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 2\ 1\ 0\ |}{2 \cdot 1 - 4} = \frac{1-2-2+3}{-2} = \frac{0}{-2} = 0.$

$y = \frac{|1\ 3\ 1\ 1\ 1\ -1\ 2\ 2\ 0\ |}{-2} = \frac{2-6-2+2}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2.$

$z = \frac{|1\ 1\ 3\ 1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ |}{-2} = \frac{2+3+2-6-1-2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1.$

$\underline{Solución: x = 0,\ \ y = 2,\ \ z = 1.}$

****

3º) Considere el plano que pasa por el punto $A(1,\ 0,\ 3)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (-\ 1,\ 3,\ 2)$ y $\vec{v} = (2,\ 1,\ 0)$.

a) Calcule la ecuación de la recta que es perpendicular al plano y pasa por el punto A.

b) Calcule la distancia del punto $P(1,\ 5,\ 0)$ al plano.
Nota: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas $P_0\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$ al plano de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $d\left(P_0,\ \pi\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

----

a)

Un vector normal del plano es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de sus vectores directores.

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = |i\ j\ k\ \ -\ 1\ 3\ 2\ 2\ 1\ 0\ | = 4j - k - 6k - 2i = -\ 2i + 4j - 7k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (2,\ \ -\ 4,\ 7).$$

El vector normal del plano es el vector director de la recta pedida, cuya expresión dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $\underline{r \equiv \{x = 1 + 2\lambda\ y = -\ 4\lambda\ \ \ z = 2 + 7\lambda}$.

b)

La ecuación general del plano es: $\pi\left(A;\ \vec{u},\ \vec{v}\right) \equiv |x - 1\ y\ z - 3\ \ -\ 1\ 3\ 2\ 2\ 1\ 0\ | = 0;$

$$4y - (z - 3) - 6(z - 3) - 2(x - 1) = 0; \quad -\ 2(x - 1) + 4y - 7(z - 3) = 0;$$

$$-\ 2x + 2 + 4y - 7z + 21 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x - 4y + 7z - 23 = 0.$$

Aplicando la fórmula recomendada al plano $\pi \equiv 2x - 4y + 7z - 23 = 0$ y al punto $P(1,\ 5,\ 0)$:

$$d(P,\ \pi) = \frac{|2\cdot 1 - 4\cdot 5 + 7\cdot 0 - 23|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 7^2}} = \frac{|2 - 20 - 23|}{\sqrt{4 + 16 + 49}} = \frac{|-41|}{\sqrt{69}} = \frac{41\cdot\sqrt{69}}{69}.$$

$$\underline{d(P,\ \pi) = \frac{41\cdot\sqrt{69}}{69}\ unidades.}$$

****

4º) Dada la matriz $A = (1\ 0\ a\ a\ 0\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 1\ 1\ )$, donde a es un parámetro real.

$a)$ ¿Hay algún valor de $a \in R$ tal que A no tiene inversa para este valor?

$b)$ Calcule la matriz inversa de A^2 para $a = 0$.

$a)$

Una matriz no es invertible (no tiene inversa) cuando su determinante es cero.

$|A| = |1\ 0\ a\ a\ 0\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 1\ 1\ | = -\ a^2 - 1 = 0;\ \ a^2 + 1 = 0.$

Teniendo en cuenta que $a^2 + 1 \neq 0,\ \forall a \in R$:

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ para\ cualquier\ valor\ real\ de\ a.}$

$b)$

Para $a = 0$ es $A = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 1\ 1\ )$.

$A^2 = A \cdot A = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 1\ 1\ ) \cdot (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 1\ 1\ ) = (1\ 0\ 0\ \ -\ 2\ 1$

.

Se obtiene la inversa por el método de Gauss-Jordan:

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{ F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1 \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ 2\ 1\ 0\ \ -\ 4\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{ F_3 \rightarrow F_3 + F_2 \right\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ 2\ 1\ 0\ \ -\ 2\ 1\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ F_2 \rightarrow F_2 + F_3 \right\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 1\ 1\ ) \Rightarrow \underline{\left(A^2\right)^{-1} = (1\ 0\ 0\ 0\ 2\ 1\ \ -\ 2\ 1\ 1\ )}.$

****

5º) Considere los puntos del espacio tridimensional $A(1,\ 1,\ 0)$, $B(3,\ 5,\ 0)$ y $C(1,\ 0,\ 0)$ y la recta $r \equiv x = y - 1 = \frac{z}{2}$.

a) Encuentre el punto de intersección de la recta r con el plano que pasa por los puntos A, B y C.

b) Encuentre los puntos de la recta r para los cuales el tetraedro de vértices P, A, B y C tiene un volumen de $2\ u^3$.
Nota: El volumen de un tetraedro de vértices P, Q, R y S viene dado por la siguiente expresión: $V = \frac{1}{6} \cdot \left| det\left(\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR},\ \overrightarrow{PS}\right) \right|$.

----

a)

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(3,\ 5,\ 0) - (1,\ 1,\ 0)] = (2,\ 4,\ 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(1,\ 0,\ 0) - (1,\ 1,\ 0)] = (0,\ -1,\ 0).$$

La ecuación general del plano π que determinan los puntos A, B y C tiene la siguiente expresión general:

$$\pi\left(C;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ \ -2z = 0 \Rightarrow \pi \equiv z = 0.$$

El punto de intersección del plano y la recta es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} z = 0 \\ r \equiv x = y - 1 = \frac{z}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0,\ y = 1 \Rightarrow \underline{M(0,\ 1,\ 0)}.$$

b)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$.

Los puntos de r tiene por expresión $P(\lambda,\ 1 + \lambda,\ 2\lambda)$.

$$\overrightarrow{AP} = [P - A] = [(\lambda,\ 1 + \lambda,\ 2\lambda) - (1,\ 1,\ 0)] = (\lambda - 1,\ \lambda,\ 2\lambda).$$

Aplicando la fórmula recomendada: $V = \frac{1}{6} \cdot \left| det\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AP}\right) \right| = 2;$

$$\left| \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AP} \right| = 12;\ \ \left\| \begin{matrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \lambda - 1 & \lambda & 2\lambda \end{matrix} \right\| = |-4\lambda| = 12;\ \ |4\lambda| = 12 \Rightarrow |\lambda| = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 3 \Rightarrow \underline{P_1(3,\ 4,\ 6)}.\ \ \lambda_2 = -3 \Rightarrow \underline{P_2(-3,\ -2,\ -6)}.$$

****

6º) Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3 - x^2$.

a) Haga un esbozo de las gráficas de las parábolas $f(x)$ y $g(x)$ en un mismo sistema de ejes cartesianos y encuentre los puntos de corte con el eje de las abscisas, los vértices y los puntos de corte entre las dos gráficas.

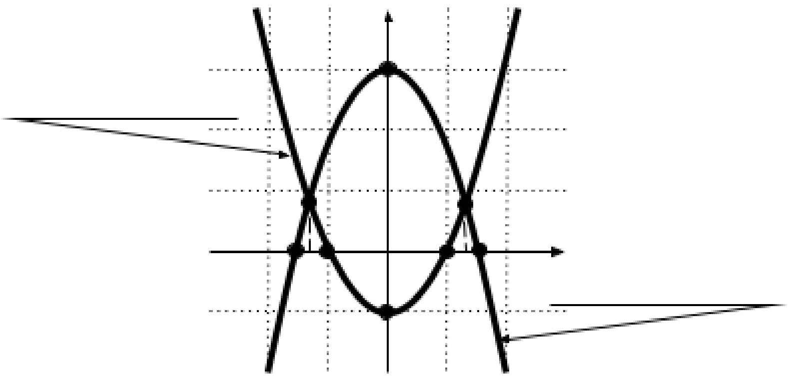
b) Calcule el área de la región del semiplano $y \geq 0$ comprendido entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Las abscisas de los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 1 = 3 - x^2;\ 2x^2 = 4;\ x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \to A\left(-\sqrt{2},\ 1\right) \\ x_2 = \sqrt{2} \to B\left(\sqrt{2},\ 1\right) \end{cases}.$$

La parábola $f(x) = x^2 - 1$, que es convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto $V_1(-1,\ 0)$ y corta al eje de abscisas en los puntos $C(-1,\ 0)$ y $D(1,\ 0)$.

La parábola $y = 3 - x^2$, que es cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto $V_2(0,\ 3)$ y corta al eje de abscisas en los puntos $E\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$ y $F\left(\sqrt{3},\ 0\right)$



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

Por ser las ordenadas de la parábola de ecuación $g(x) = 3 - x^2$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo del área a calcular y, además, considerando que las dos funciones son pares y, en consecuencia, simétricas con respecto al eje de ordenadas, la superficie S a calcular es la siguiente:

$$S = 2\cdot\int_{0}^{\sqrt{2}}\left[\left(3 - x^{2}\right) - \left(x^{2} - 1\right)\right]\cdot dx = 2\cdot\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(3 - x^{2} - x^{2} + 1\right)\cdot dx =$$

$$= 2\cdot\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(4 - 2x^{2}\right)\cdot dx = 2\cdot\left[4x - \frac{2x^{3}}{3}\right]_{0}^{\sqrt{2}} = 2\cdot\left[4\cdot\sqrt{2} - \frac{2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{3}}{3}\right] - 2\cdot 0 =$$

$$= 8\sqrt{2} - \frac{8\cdot\sqrt{2}}{3} = 8\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 8\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{16\sqrt{2}}{3}\, u^{2} \cong 7,54\, u^{2}.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

La prueba consta de dos opciones A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 4 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) a) Discute, en función del parámetro λ, el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{matrix} x + 2y - z = 0 \\ \lambda x + y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{matrix}\right\}$.

b) Resuelva el sistema para $\lambda = 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de M en función del parámetro λ es el siguiente:

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - \lambda + 2 + 1 - 1 - 2\lambda^2 = 0;\ \ 2 - 2\lambda^2 = 0;$

$1 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1;\ \lambda_2 = 1.$

$\underline{Para \left\{\begin{matrix} \lambda \neq -1 \\ \lambda \neq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para $\lambda = -1$ es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 1 + 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ \lambda = -1 \Rightarrow Ran\ M = 2;\ Ran\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

Para $\lambda = 1$ es

$M' = (1\ 2\ \ -1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ \ 0\ 1\ 1\ ) \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$$\underline{Para\ \lambda = 1 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

b)

Para $\lambda = 1$ el sistema es $x + 2y - z = 0\ \ x + y + z = 1\ \ x + y + z = 1\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $x + 2y - z = 0\ \ x + y + z = 1\}$. Haciendo $z = \lambda$:

$$x + 2y = \lambda\ x + y = 1 - \lambda\}\quad x + 2y = \lambda\qquad - x - y = - 1 + \lambda\} \Rightarrow y = -$$

.

$$x = 1 - \lambda - (- 1 + 2\lambda) = 1 - \lambda + 1 - 2\lambda = 2 - 3\lambda.$$

$$\underline{Solución: \{x = 2 - 3\lambda\quad y = - 1 + 2\lambda\ z = \lambda\qquad , \forall\lambda \in R}.$$

****

2º) Sea el plano $\pi \equiv y + z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

a) Calcule la intersección del plano y la recta.

b) Determine la recta s que pasa por el punto $P(1,\ 0,\ 0)$, es paralela al plano π y es perpendicular a la recta r.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$.

Un vector director de la recta r es $\vec{v_r} = (1,\ -2,\ 1)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (0,\ 1,\ 1)$.

Los vectores $\vec{v_r}$ y $\vec{n}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes, por lo cual, la recta y el plano son secantes.

Su punto P de intersección es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv y + z = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 2\lambda + 1 + \lambda$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = 1 - 2 \cdot 2 = -3 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{P(1,\ -3,\ 3)}$$

.

b)

La recta s, por ser paralela al plano π y perpendicular a la recta r, su vector director es perpendicular al vector normal del plano y al vector director de la recta. El vector $\vec{v_s}$ es linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores $\vec{n}$ y $\vec{v_r}$:

$$\vec{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = i + j - k + 2i = (3i + j - k) = (3,\ 1,\ -1).$$

Por contener la recta s al punto $P(1,\ 0,\ 0)$, su expresión dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}}.$$

****

3º) a) Enuncie el teorema de Bolzano y demuestre, usando dicho teorema, que la función $f(x) = x^3 + x - 3$ tiene una raíz real positiva.

$b)$ Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (x + 1)\cdot e^{-x}$ que cumpla la condición $F(0) = 0$.

$a)$

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

La función $f(x) = x^3 + x - 3$, por ser polinómica, es continua en R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que se considere.

Considerando, por ejemplo, el intervalo $[0, 2]$ y aplicando el teorema de Bolzano a $f(x)$:

$f(0) = -3 < 0.$

$f(2) = 2^3 + 2 - 3 = 8 - 1 = 7 > 0.$

$\underline{La\ función\ f(x) = x^3 + x - 3\ tiene,\ por\ lo\ menos,\ una\ raíz\ real\ en\ (0,\ 2)}.$

$b)$

$$F(x) = \int \left[(x + 1)\cdot e^{-x}\right]\cdot dx \Rightarrow \left\{u = x + 1 \rightarrow du = dx\ dv = e^{-x}\cdot dx \rightarrow v = -e^{-x}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 1)\cdot\left(-e^{-x}\right) - \int -e^{-x}\cdot dx = -(x + 1)\cdot e^{-x} + \int e^{-x}\cdot dx =$$

$$= -(x + 1)\cdot e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}\cdot[(x + 1) + 1] + C = -(x + 2)\cdot e^{-x}.$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow -(0 + 2)\cdot e^{-0} + C = 0;\ -2 + C = 0 \Rightarrow C = 2.$$

$$\underline{F(x) = -(x + 2)\cdot e^{-x}\cdot + 2}.$$

****

4º) En una red social el 55 % lee noticias deportivas, el 65 % lee noticias de información, y el 10 % no lee las noticias deportivas ni las de información. Tomando al azar una persona de esta red social:

a) Calcule la probabilidad de que lea noticias deportivas o de información.

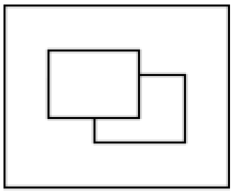
b) Sabiendo que lee noticias de información, calcule la probabilidad de que también lea noticias de deportes.

c) Sabiendo que lee noticias de deportes, calcule la probabilidad de que no lea noticias de información.

$Datos$: $P(D) = 0,55;\ \ P(I) = 0,65;\ \ P(\overline{D} \cap \overline{I}) = 0,10.$

a)

$P = P(D \cup I)$:



$P(\overline{D} \cap \overline{I}) = 1 - P(D \cup I).$

$P(D \cup I) = 1 - P(\overline{D} \cap \overline{I}) = 1 - 0,10 = \underline{0,90}.$

b)

$P = P(D/I) = \frac{P(D \cap I)}{P(I)}$:

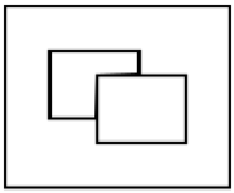
$$P(D \cup I) = P(D) + P(I) - P(D \cap I) \Rightarrow P(D \cap I) = P(D) + P(I) - P(D \cup I) =$$

$$= 0,55 + 0,65 - 0,90 = 1,20 - 0,90 = 0,30.$$

$$P = P(D/I) = \frac{P(D \cap I)}{P(I)} = \frac{0,30}{0,65} = \frac{30}{65} = \underline{\frac{6}{13} = 0,4615}.$$

c)

$$P = P(\overline{I}/D) = \frac{P(\overline{I} \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D) - P(D \cap I)}{P(D)} = \frac{0,55 - 0,30}{0,55} =$$



$$= \frac{0,25}{0,55} = \underline{\frac{5}{11} = 0,4545}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere las matrices $A = (-\ 2\ \ -\ 2\ 0\ 2\ 1\ 2\ 0\ \ -\ 2\ 2\ )\ y\ B = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ )$.

a) Calcule la matriz $C = -\ 3A + B^2$.

b) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A.

----

a)

$C = -\ 3A + B^2 = -\ 3\cdot(-\ 2\ \ -\ 2\ 0\ 2\ 1\ 2\ 0\ \ -\ 2\ 2\ ) + (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ )\cdot(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0$

$= (6\ 6\ 0\ \ -\ 6\ \ -\ 3\ \ -\ 6\ 0\ 6\ \ -\ 6\ ) + (0\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ \ -\ 2\ 0\ 0\ ) = \underline{(6\ 6\ 2\ \ -\ 6\ \ -\ 2\ \ -\ 6\ \ -}$

.

b)

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow -\ \frac{1}{2}F_1\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(-\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ \right) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 -\ 2F_1\right\} \Rightarrow \left(-\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -\ F_2\right\} \Rightarrow \left(-\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - F_2\, F_3 \rightarrow F_3 +\ 2F_2\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\ 1\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ 1\ \right) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow -\ \frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\ 1\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 1\ \ -\ \frac{1}{2}\ \right)$

$\Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 -\ 2F_3\, F_2 \rightarrow F_2 +\ 2F_3\right\} \Rightarrow \left(-\ \frac{3}{2}\ \ -\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 1\ \ -\ \frac{1}{2}\ \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \left(-\ \frac{3}{2}\ \ -\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 1\ \ -\ \frac{1}{2}\ \right) = \frac{1}{2}\cdot(-\ 3\ \ -\ 2\ 2\ 2\ 2\ \ -\ 2\ 2\ 2\ \ -\ 1\ )}$

.

****

2º) Sea el punto $A(1,\ 0,\ 1)$ y la recta r dada por el punto $B(-\ 1,\ 0,\ 2)$ y el vector $\vec{v} = (-\ 1,\ 1,\ 0)$.

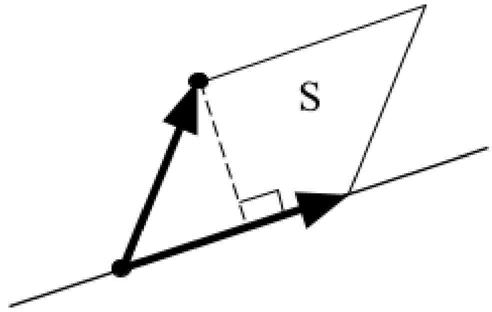
a) Calcule la distancia del punto A a la recta r.

b) Calcule el área del triángulo de vértices A, B y O siendo $O(0,\ 0,\ 0)$.

$a)$

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



$$\left.\begin{array}{l} S = \left|\vec{v}_r \wedge \overrightarrow{BA}\right| \\ S = \left|\vec{v}_r\right| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\vec{v}_r \wedge \overrightarrow{BA}\right| = \left|\vec{v}_r\right| \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{h = d(A, r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \overrightarrow{BA}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}}.$$

$\overrightarrow{BA} = [A - B] = [(1,\ 0,\ 1) - (-1,\ 0,\ 2)] = (2,\ 0,\ -1).$

Aplicando la fórmula al punto A y a la recta r:

$$d(A, r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \overrightarrow{BA}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|} = \frac{\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|-i-2k-j|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|-i-j-2k|}{\sqrt{2}} = \frac{|i+j+2k|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+1+4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{3}\ u = d(A, r)}.$$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El haz de planos perpendiculares a r tiene por ecuación: $\alpha \equiv x - y + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $A(1,\ 0,\ 1)$ es el que satisface su ecuación:

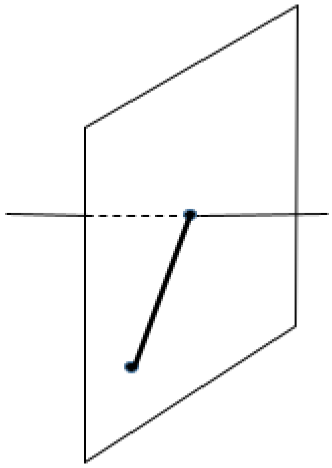
$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x - y + D = 0 \\ A(1,\ 0,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \pi \equiv x - y - 1 =$$

.

El punto P, intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y - 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -1 - \lambda - \lambda$$

.



$$r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P(0,\ -1,\ 2).$$

La distancia pedida del punto A a la recta r es equivalente a la distancia entre los puntos A y P, o sea el módulo de $\left|\overrightarrow{AP}\right|$:

$$d(A,\ r) = \left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(1-0)^2 + (0+1)^2 + (2-1)^2} =$$

$$= \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

$$\underline{d(A,\ r) = \sqrt{3}\ unidades}.$$

$b)$

Los puntos A, B y O determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{OA} = (1,\ 0,\ 1). \qquad \overrightarrow{OB} = (-1,\ 0,\ 2).$$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABO} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\cdot|-j-2j| = \frac{1}{2}|-3j| = \underline{\frac{3}{2}\ u^2}$$

.

****

3º) a) Estudie el dominio, las asíntotas y máximos y mínimos de la función $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

b) Represente la gráfica de $f(x)$ utilizando los datos del apartado anterior.

c) Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-1,\ 1\}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito. En el caso de funciones racionales, son los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{Las\ rectas\ x = -1\ y\ x = 1\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

Asíntotas horizontales: Son de la forma y = k; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$k = f(x) = \frac{1}{x^2-1} = 0\ .$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función}.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}. \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2} = 0;\ -2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

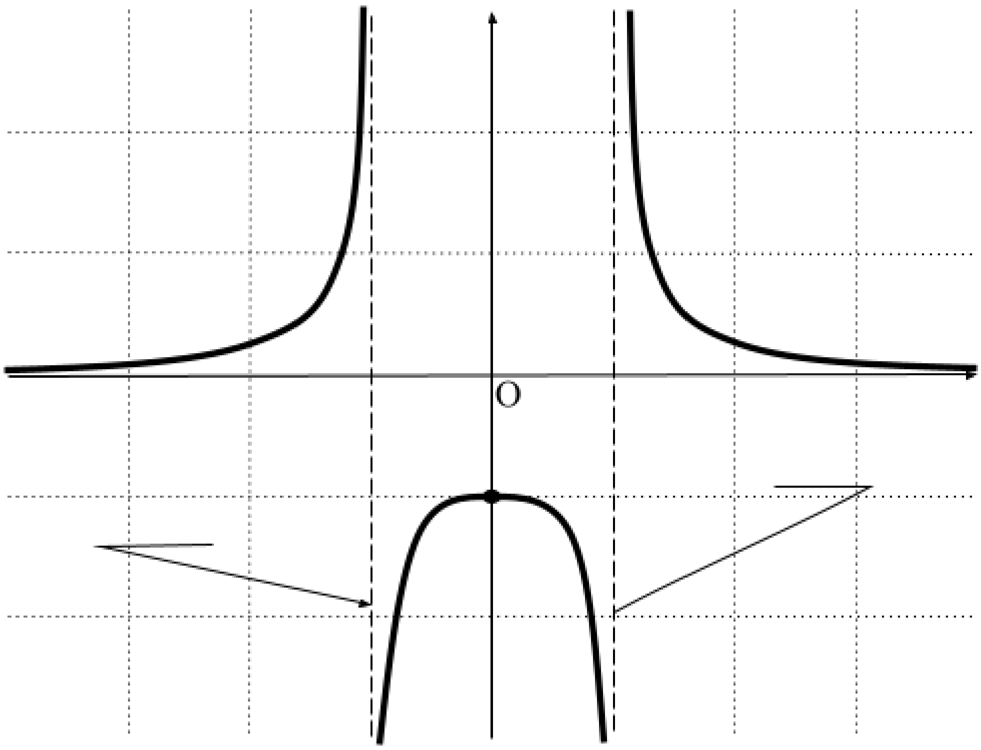
Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\frac{-2\cdot\left(x^2-1\right)^2-(-2x)\cdot\left[2\cdot\left(x^2-1\right)\cdot 2\right]}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{-2\cdot\left(x^2-1\right)+8x}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{-2\cdot\left(x^2-4x-1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

$$f''(0)=\frac{-2\cdot\left(0^2-4\cdot 0-1\right)}{\left(0^2-1\right)^3}=\frac{2}{-1}<0\Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x=0.$$

$$f(0)=\frac{1}{0^2-1}=-1\Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: P(0,\ -1)}.$$

$b)$



$c)$

$$F(x)=\int\frac{1}{x^2-1}\cdot dx=\int\frac{1}{(x+1)(x-1)}\cdot dx=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}\right)\cdot dx. \qquad (*)$$

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}=\frac{Ax-A+Bx+B}{(x+1)(x-1)}=\frac{(A+B)x+(-A+B)}{x^2-1}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}A+B=0\\ -A+B=1\end{array}\right\}\Rightarrow 2B=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\frac{1}{2},\ A=-\frac{1}{2}.$$

Sustituyendo en (*) los valores de A y B obtenidos:

$$F(x)=\int\frac{1}{x^2-1}\cdot dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right)\cdot dx=-\frac{1}{2}L|x+1|+\frac{1}{2}L|x-1|+C=$$

$= \frac{1}{2} \cdot L\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

$$\underline{F(x) = \sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} + C.}$$

****

4º) A una prueba de oposición se han presentado 2.500 aspirantes para 300 plazas. Las calificaciones que han obtenido los aspirantes tienen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica 2. Calcule:

a) La nota de corte para los admitidos.

b) La probabilidad de que un alumno elegido al azar tenga una nota mayor que 9.

----

a)

La probabilidad de que un aspirante sea admitido es $P = \frac{300}{2.500} = \frac{3}{25} = 0,12.$

$Datos$: $\mu = 6,5;\ \ \sigma = 2.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(6,5;\ 2).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-6,5}{2}.$

La probabilidad de que un aspirante sea admitido es $p = \frac{300}{2.500} = \frac{3}{25} = 0,12.$

La probabilidad de que no sea admitido es $q = 1 - p = 1 - 0,12 = 0,88.$

$p(\overline{X} < No) = 0,88 \Rightarrow p\left(Z \leq \frac{N-6,5}{2}\right) = 0,88.$

Mirando en el interior de la tabla dada de las áreas limitadas por la curva $N(0,\ 1)$, con el valor de 0,88 se obtiene: 1,175.

$\frac{No-6,5}{2} = 1,175;\ \ No - 6,5 = 2,350 \Rightarrow No = 6,5 + 2,35 = 8,85.$

$\underline{La\ nota\ de\ corte\ es\ de\ 8,85}.$

b)

$P = P(Z > 9) = P\left(Z > \frac{9-6,5}{2}\right) = P\left(Z > \frac{2,5}{2}\right) = P(Z > 1,25) =$

$= 1 - P(Z \leq 1,25) = 1 - 0,8944 = \underline{0,1056}.$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ obtener\ más\ de\ 9\ es\ del\ 10,56\ \%}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA (FILTRADO)

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

La prueba consta de dos opciones A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 4 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) $a)$ Discute, en función del parámetro a, el sistema $x + y - z = 1\ x + ay + az = 1\ ax + 3y + z = a\}$.
$b)$ Resuelve el sistema para $a = 2$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema son las siguientes:

$M = (1\ 1\ -1\ 1\ a\ a\ a\ 3\ 1)$ y $M' = (1\ 1\ -1\ 1\ a\ a\ a\ 3\ 1\quad 1\ 1\ a)$.

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$|M| = |1\ 1\ -1\ 1\ a\ a\ a\ 3\ 1| = a - 3 + a^2 + a^2 - 3a - 1 = 2a^2 - 2a - 4 = 0;$

$a^2 - a - 2 = 0;\ a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow a_1 = -1;\ a_2 = 2.$

$\underline{Para\ \{a \neq -1\ a \neq 2\ \} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para $a = -1$ es $M' = (1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 3\ 1\quad 1\ 1\ -1) \Rightarrow \{C_1 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

Para $a = 2$ es $M' = (1\ 1\ -1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 3\ 1\quad 1\ 1\ 2) \Rightarrow \{C_1 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ \{a = -1\ a = 2\ \} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$b)$

Para $a = 2$ el sistema es $x + y - z = 1\ x + 2y + 2z = 1\ 2x + 3y + z = 2\ \}$, que es compatible indeterminado, según al apartado anterior; despreciando una de las ecuaciones (tercera) y parametrizando una de las variables (z), resulta:

$$x + y = 1 + \lambda \quad x + 2y = 1 - 2\lambda\ \} \qquad -x - y = -1 - \lambda\ x + 2y = 1 - 2\lambda\ \}$$

.

$$x = 1 + \lambda - (-3\lambda) = 1 + 4\lambda.$$

$$\underline{Solución: \{x = 1 + 4\lambda \quad y = -3\lambda \quad z = \lambda \qquad , \forall\lambda \in R.}$$

****

2º) Una nave espacial sigue una trayectoria aproximadamente recta dada por la ecuación $r \equiv x + 1 = \frac{y}{2} = 2z + 1$. Se acerca a un asteroide situado en el punto $P(1,\ 1,\ 2)$. Calcule:

$a)$ La distancia mínima a la que la nave pasa del asteroide.

$b)$ El punto de la trayectoria de la nave más cercano al asteroide.

$a,\ b)$

La recta r puede expresarse de la forma: $r \equiv x + 1 = \frac{y}{2} = \frac{z + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$.

Un vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (2,\ 4,\ 1)$.

El haz de planos perpendiculares a r es: $\alpha \equiv 2x + 4y + z + D = 0$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \{x = -1 + \lambda\ \ y = 2\lambda \quad z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda$.

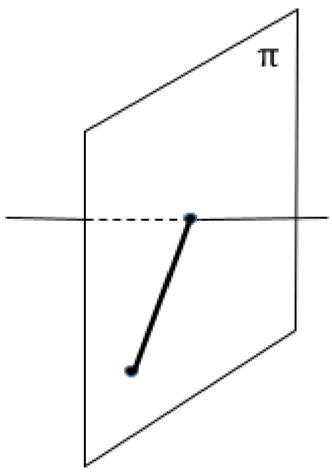
De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $P(1,\ 1,\ 2)$ es el que satisface su ecuación:

$\alpha \equiv 2x + 4y + z + D = 0 \qquad P(1,\ 1,\ 2)\ \} \Rightarrow 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 2 + D = 0 \Rightarrow D =$

$\Rightarrow \pi \equiv 2x + 4y + z - 8 = 0$.

El punto B, intersección de r con π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv 2x + 4y + z - 8 = 0 \qquad r \equiv \{x = -1 + \lambda\ \ y = 2\lambda \quad z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda\ \}$



$-4 + 4\lambda + 16\lambda - 1 + \lambda - 16 = 0;\ \ 21\lambda - 21 = 0;$

$\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1. \qquad r \equiv \{x = -1 + \lambda\, y = 2\lambda \qquad z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \left\{x = -1 + 1 = 0 \qquad y = 2\lambda = 2 \cdot 1 = 2 \qquad z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} =\right.$

.

La distancia pedida del punto P a la recta r es equivalente a la distancia entre los puntos P y B, o sea el módulo de $\left|\overrightarrow{PB}\right|$:

$$d(P,\ r) = \left|\overrightarrow{PB}\right| = \sqrt{(0 - 1)^2 + (2 - 1)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}.$$

$\underline{La\ distancia\ mínima\ de\ la\ nave\ al\ asteroide\ es\ de\ \sqrt{6} \cong 2,45\ unidades}.$

$\underline{El\ punto\ B(0,\ 2,\ 0)\ es\ el\ punto\ de\ la\ trayectoria\ más\ cercano\ a\ P(1,\ 1,\ 2)}.$

****

3º) a) Estudie el dominio, las asíntotas y los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{1}{x^2+2x-8}$.

b) Represente la gráfica de $f(x)$ utilizando el apartado anterior.

c) Calcule el área del recinto limitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas (OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 + 2x - 8 = 0;\ \ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = -4,\ x_2 = 2.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-4,\ 2\}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito. En el caso de funciones racionales, son los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{Las\ rectas\ x = -4\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

Asíntotas horizontales: Son de la forma $y = k$; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$k = f(x) = \frac{1}{x^2+2x-8} = 0\ .$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, $\{m \neq 0,\ m \neq \infty\}$ siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{1}{x^2+2x-8}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\left(x^2+2x-8\right)} = 0.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando el valor de su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{-1\cdot(2x+2)}{\left(x^2+2x-8\right)^2} = \frac{-2\cdot(x+1)}{\left(x^2+2x-8\right)^2}.$$

Por ser $\left(x^2 + 2x - 6\right)^2 > 0,\ \forall x \in R$, $f'(x)$ es positiva o negativa cuando lo sea la expresión $-2(x+1)$.

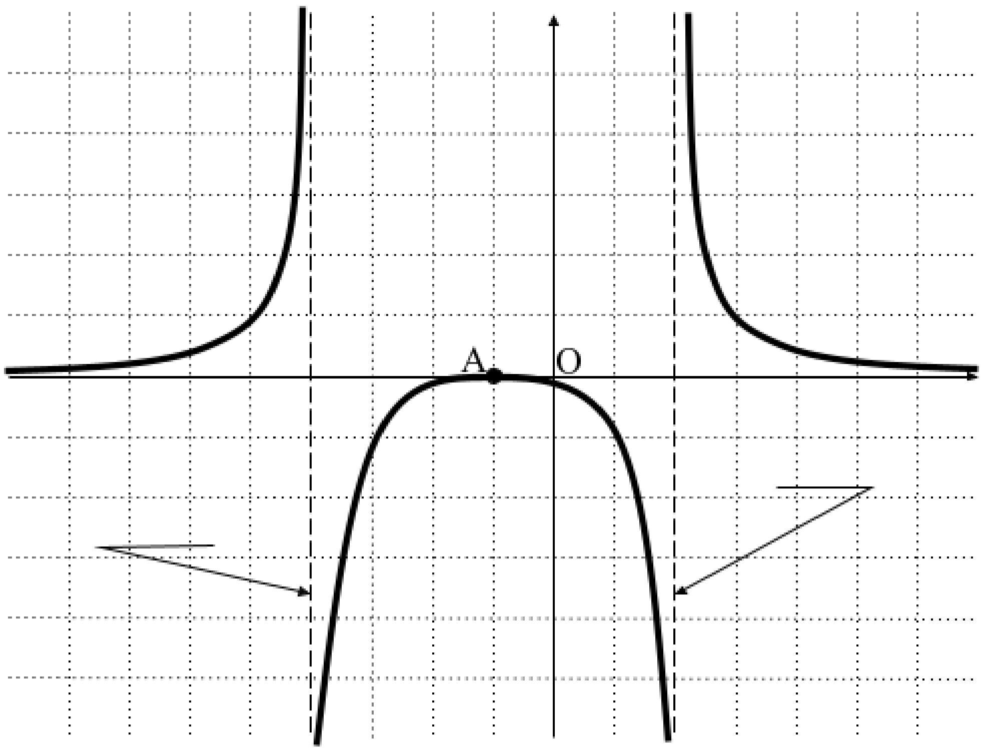
$$-2(x+1) = 0;\ \ x + 1 = 0 \to x = -1 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \Rightarrow x < -1 \\ f'(x) < 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\mathit{Crecimiento}: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, -4) \cup (-4, -1).}$$

$$\underline{\mathit{Decrecimiento}: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-1, 2) \cup (2, +\infty).}$$

Del estudio del crecimiento y decrecimiento se deduce que la función tiene un máximo relativo en el punto $A(-1,\ 0)$.



$c)$

Teniendo en cuenta que todas las ordenadas de la función en el intervalo de la superficie a calcular son negativas, deben cambiarse los límites de integración para que la superficie sea, como es lógico, positiva.

$$S = \int_{1}^{-1} f(x)\cdot dx = \int_{1}^{-1} \frac{1}{x^2+2x-8}\cdot dx. \qquad (*)$$

La integral indefinida de la superficie re resuelve del modo siguiente:

$$I = \int \frac{1}{x^2+2x-8}\cdot dx.$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = - 4,\ x_2 = 2.$$

$$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2).$$

$$\frac{1}{x^2+2x-8} = \frac{M}{x+4} + \frac{N}{x-2} = \frac{Mx-2M+Nx+4N}{(x+4)(x-1)} = \frac{(M+N)x+(-2M+4N)}{x^2+2x-8} \Rightarrow \quad M + N = 0 \ - 2M +$$

$$\Rightarrow \quad 2M + 2N = 0 \ - 2M + 4N = 1 \} \Rightarrow 6N = 1;\ N = \frac{1}{6};\ M = - \frac{1}{6}.$$

$$I = \int \frac{1}{x^2+2x-8}\cdot dx = \int \left(\frac{M}{x+4} + \frac{N}{x-2}\right)\cdot dx = \frac{1}{6}\cdot \int \left(\frac{-1}{x+4} + \frac{1}{x-2}\right)\cdot dx =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot(- L|x + 4| + L|x - 2|) + C = \frac{1}{6}\cdot L\left|\frac{x-2}{x+4}\right| + C.$$

Sustituyendo el valor hallado en la expresión (*):

$$S = \frac{1}{6}\cdot\left[L\left|\frac{x-2}{x+4}\right|\right]_1^{-1} = \frac{1}{6}\cdot\left[L\left|\frac{-1-2}{-1+4}\right| - L\left|\frac{1-2}{1+4}\right|\right] = \frac{1}{6}\cdot\left(L1 - L\frac{1}{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot(0 - L1 + L5) = \frac{1}{6}\cdot L5.$$

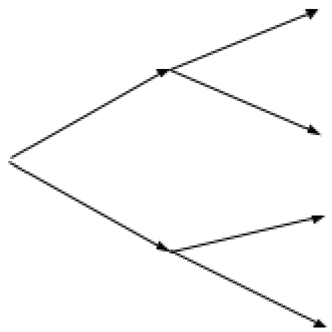
$$\underline{S = \frac{1}{6}\cdot L5\ u^2 \cong 0,268\ u^2.}$$

****

4º) Se conoce que el ganado caprino padece un 10 % la tuberculosis. La prueba de tuberculosis caprina no es completamente fiable, ya que da un 10 % de positivos en cabras realmente sanas y también da negativo en el 5 % de cabras enfermas.

a) Calcule la probabilidad de que la prueba sea positiva.

b) Calcule la probabilidad de que una cabra elegida al azar esté sana sabiendo que en la prueba ha dado positiva.



a)

$$P = P(+) = P(E\cap +) + P(S\cap P) = P(E)\cdot P(+/E) + P(S)\cdot P(+/S) =$$

$$= 0,1\cdot 0,95 + 0,9\cdot 0,10 = 0,095 + 0,090 = \underline{0,185}.$$

b)

$$P = P(S/+) = \frac{P(S\cap +)}{P(+)} = \frac{P(S)\cdot P(+/S)}{P(E)\cdot P(+/E)+P(S)\cdot P(+/S)} = \frac{0,9\cdot 0,10}{0,1\cdot 0,95+0,9\cdot 0,10} =$$

$$= \frac{0,090}{0,095+0,090} = \frac{0,090}{0,185} = \frac{90}{185} = \underline{\frac{18}{37} = 0,4865}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere las matrices $A = (2\ 1\ \ -\ 1\ 1)\ y\ B = (1\ 2\ 3\ 4)$.

a) Demuestre que la matriz A tiene inversa y calcula A^{-1}.

b) Resuelve la ecuación matricial: $AX + B^2 = A$.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |2\ 1\ \ -\ 1\ 1| = 2 + 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow$ <u>*Queda demostrado que A es invertible.*</u>

$(A/I) = (1\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow (0\ 1\ 1\ 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{F_1 \to -F_1\} \Rightarrow (0\ \ -\ 1\ 1\ 0) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 2F_1\} \Rightarrow (0\ \ -\ 1\ 1\ 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{F_2 \to \frac{1}{3}F_2\} \Rightarrow \left(0\ \ -\ 1\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_2\} = \left(\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \left(\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot(1\ \ -\ 1\ 1\ 2)}$.

b)

$AX + B^2 = A;\ \ AX = A - B^2;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot\left(A - B^2\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow X = A^{-1}\cdot\left(A - B^2\right)$.

$A - B^2 = (2\ 1\ \ -\ 1\ 1) - (1\ 2\ 3\ 4)\cdot(1\ 2\ 3\ 4) = (2\ 1\ \ -\ 1\ 1) - (7\ 10\ 15\ 22) =$

$= (-\ 5\ \ -\ 9\ \ -\ 16\ \ -\ 21)$.

$X = A^{-1}\cdot\left(A - B^2\right) = \frac{1}{3}\cdot(1\ \ -\ 1\ 1\ 2)\cdot(-\ 5\ \ -\ 9\ \ -\ 16\ \ -\ 21) = \frac{1}{3}\cdot(11\ 12\ \ -\ 37\ \ -\ 5$

.

$$\underline{X = \frac{1}{3}\cdot(11\ 12\ \ -\ 37\ \ -\ 51)}.$$

****

2º) Sea r la recta dada por el punto $P(2,\ -4,\ 1)$ y el vector $\overrightarrow{v} = (3,\ -4,\ 0)$, y el plano $\pi \equiv 7x - y = 8$.

$a)$ Demuestre que r y π se cortan y calcule el ángulo que forman.

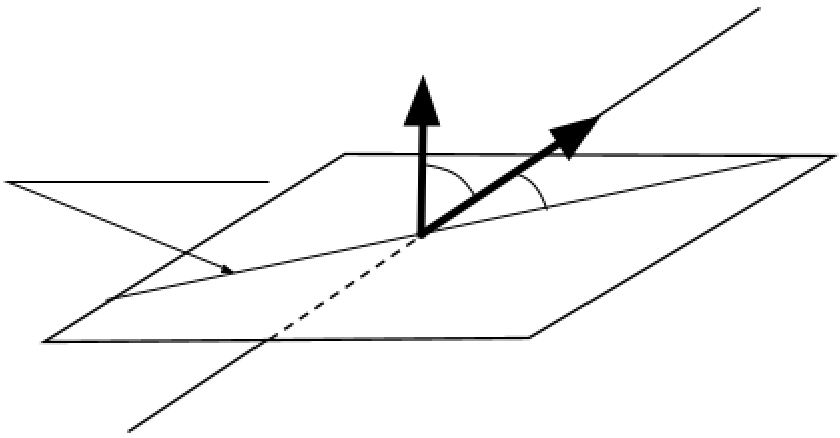
$b)$ Calcule el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

$a)$

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (7,\ -1,\ 0)$.

El vector director de r y el vector normal de π son linealmente independientes por no tener proporcionales sus componentes, por lo cual:

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$$



Por definición de producto escalar: $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \cos cos\ \beta$.

$\cos cos\ \beta = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v_r}}{\left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_r}\right|}$. Por ser α y β complementarios: $sen\ \alpha = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v_r}}{\left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_r}\right|}$.

$$sen\ \alpha = \frac{(7, -1, 0) \cdot (3, -4, 0)}{\sqrt{7^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \frac{21+4}{\sqrt{49+1} \cdot \sqrt{9+16}} = \frac{25}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{25}} = \frac{25}{\sqrt{1.800}} =$$

$$= \frac{25}{5\sqrt{2} \cdot 5} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = arc\ sen\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 45°.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ ángulo\ de\ 45°.}$$

$b)$

El plano β que contiene a r y es perpendicular a π tiene como vectores directores al vector normal de π y al vector director de r; su expresión general de β es:

$$\beta\left(P;\ \vec{v}_r,\ \vec{n}\right) \equiv |x - 2y + 4z - 13 \ \ -407 \ \ -10| = 0; \ \ -3(z-1) + 28(z -$$

$$- 25(z-1) = 0; \ \ z - 1 = 0$$

$$\underline{\beta \equiv z - 1 = 0}.$$

****

3º) a) Estudie los extremos relativos (máximos y mínimos) y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

b) Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$ que cumple $F(0) = 0$.

----

a)

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1 - x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(1 - x) = 0;\ \ e^{-x} \neq 0,\ \forall x \in R;\ \ 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = -e^{-x} \cdot (1 - x) + e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}(1 - x + 1) = e^{-x}(x - 2).$$

$$f''(1) = e^{-1}(1 - 2) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow \underline{Máximo: P\left(1, \frac{1}{e}\right)}.$$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada y sea distinto de cero la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(x - 2) = 0;\ \ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$f'''(x) = -e^{-x} \cdot (x - 2) + e^{-x} \cdot 1 = -e^{-x}(1 - x + 2) = e^{-x}(x - 3).$$

$$f'''(2) = e^{-2}(2 - 3) \neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ inflexión\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2} \Rightarrow \underline{Punto\ de\ inflexión: Q\left(1, \frac{2}{e^2}\right)}.$$

b)

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int x \cdot e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = x \rightarrow du = dx\ dv = e^{-x} \cdot dx \rightarrow v = -e^{-x} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}\cdot dx = -x\cdot e^{-x}+\int e^{-x}\cdot dx = -x\cdot e^{-x}-e^{-x}+C=$$

$$=-e^{-x}\cdot(x+1)+C=F(x).$$

$$F(0)=0\Rightarrow -e^{-0}\cdot(0+1)+C=0;\quad -1+C=0\Rightarrow C=1.$$

$$\underline{F(x)=-e^{-x}\cdot(x+1)+1}.$$

****

4º) La edad de los habitantes de Altojardín se distribuye normalmente, con una media de 36 años y una desviación típica de 12 años.

a) Calcule el porcentaje de habitantes de Altojardín entre 30 y 48 años.

b) ¿Qué edad tiene la Reina de Altojardín sabiendo que el 67 % de los habitantes tiene más edad que la Reina?

----

a)

$Datos$: $\mu = 36$; $\sigma = 12$.

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(36;\ 12)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-36}{12}$.

$P = P(30 \leq Z \leq 48) = P\left(\frac{30-36}{12} \leq Z \leq \frac{48-36}{12}\right) = P\left(\frac{-6}{12} \leq Z \leq \frac{12}{12}\right) =$

$= P(-\ 0,5 \leq Z \leq 1) = P(Z < 1) - [1 - P(Z < 0,5)] =$

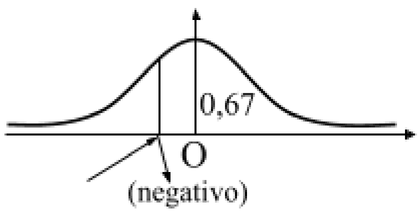
$= P(Z < 1) - 1 + P(Z < 0,5) = 0,8413 - 1 + 0,6915 = 1,5328 - 1 = \underline{0,5328}$

.

$\underline{Tienen\ entre\ 30\ y\ 36\ años\ el\ 53,28\ \%\ de\ los\ habitantes\ de\ Altojardín.}$

b)

$p(\overline{X} > E) = 0,67 \Rightarrow p\left(\frac{\overline{X}-36}{12} \geq \frac{E-36}{12}\right) = 0,67$



.

Mirando en el interior de la tabla dada de las áreas limitadas por la curva $N(0,\ 1)$, con el valor de 0,67 se obtiene: 0,44.

$-\frac{E-36}{12} = 0,44;\ \ -E + 36 = 5,28 \Rightarrow E = 36 - 5,28 = 30,72.$

$\underline{La\ edad\ de\ la\ reina\ es,\ aproximadamente,\ de\ 31\ años.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE GALICIA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá responder solo a los ejercicios de una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) a) Dada la matriz $M = (m\,m + 1\ 1\ 1\,)$, calcula los valores de m para que la matriz inversa de M sea $\frac{1}{4}M$.

b) Dadas las matrices $A = (-\ 1\ 0\ 1\,)$, $B = (3\ 0\ 1\,)$ y $C = (4\ -\ 2\ 0\,)$, calcula la matriz X que verifica: $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$, siendo B^t y C^t las traspuestas de B y C respectivamente.

----

a)

$$|M| = |m\,m + 1\ 1\ 1\,| = m - m - 1 =- 1. \quad M^t = (m\,1\,m + 1\ 1\,).$$

$$Adj.\ de\ M^t = (1\ - m - 1\ - 1\,m\,) \Rightarrow M^{-1} = (-\ 1\,m + 1\,1\ - m\,).$$

$$M^{-1} = \frac{1}{4}M \Rightarrow (-\ 1\,m + 1\,1\ - m\,) = \frac{1}{4}\cdot(m\,m + 1\ 1\ 1\,) = \left(\frac{m}{4}\ \frac{m+1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \underline{m =-}$$

.

b)

$$B^t \cdot A \cdot X + C^t = X;\ B^t \cdot A \cdot X - X =- C^t;\ \left(B^t \cdot A - I\right) \cdot X =- C^t;$$

$$\left(B^t \cdot A - I\right)^{-1} \cdot \left(B^t \cdot A - I\right) \cdot X =- \left(B^t \cdot A - I\right)^{-1} \cdot C^t;$$

$$I \cdot X =- \left(B^t \cdot A - I\right)^{-1} \cdot C^t \Rightarrow \underline{X =- \left(B^t \cdot A - I\right)^{-1} \cdot C^t}.$$

$$B^t \cdot A - I = (3\ 0\ 1\,) \cdot (-\ 1\ 0\ 1\,) - I = (-\ 3\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ - 1\ 0\ 1\,) - (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\,) =$$

$$= (-\ 4\ 0\ 3\ 0\ - 1\ 0\ - 1\ 0\ 0\,).$$

Se obtiene la inversa de $B^t \cdot A - I$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \left\{F_3 \leftrightarrow F_1\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow -F_1\right\} \Rightarrow (0\ 0\ -1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow F_3 + 4F_1\ F_2 \rightarrow -F_2\right\} \Rightarrow (0\ 0\ -1\ 0\ -1\ 0\ 1\ 0\ -4) \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow \tfrac{1}{3}F_3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(0\ 0\ -1\ 0\ -1\ 0\ \tfrac{1}{3}\ 0\ -\tfrac{4}{3}\right) \Rightarrow \left(B^t \cdot A - I\right)^{-1} = \left(0\ 0\ -1\ 0\ -1\ 0\ \tfrac{1}{3}\ 0\ -\tfrac{4}{3}\right)$$

.

$$X = -\left(B^t \cdot A - I\right)^{-1} \cdot C^t = \left(0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ -\tfrac{1}{3}\ 0\ \tfrac{4}{3}\right) \cdot (4\ -2\ 0) = \left(0\ -2\ -\tfrac{4}{3}\right).$$

$$\underline{X = \left(0\ -2\ -\tfrac{4}{3}\right).}$$

****

2º) a) Calcula: intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 4x$ y las rectas $y = x - 4$. (Para el dibujo de la parábola, indica: puntos de corte con los ejes, el vértice y concavidad y convexidad).

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - (x-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x-2x+2}{x^3} = \frac{2-x}{x^3}.$$

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $D(f) \Rightarrow R - \{0\}$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (0, 2)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2-x}{x^3} = 0; \ 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot x^3 - (2-x) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-x-3(2-x)}{x^4} = \frac{-x-6+3x}{x^4} = \frac{2x-6}{x^4}.$$

$$f''(2) = \frac{4-6}{16} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{Máximo: B\left(2, \frac{1}{4}\right)}.$$

La función $f(x) = x^2 - 4x$ es una parábola convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2, que corta al eje de abscisa en los puntos $O(0, 0)\ y\ A(4, 0)$.

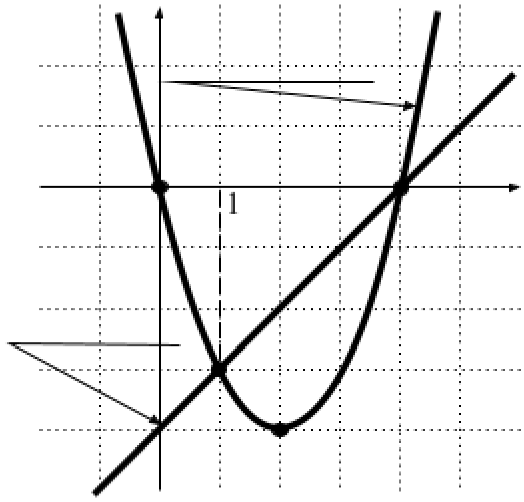
El vértice de la parábola es el siguiente: $f'(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \Rightarrow V(2, -4)$.

Los puntos de corte de la parábola y la recta se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 4x = x - 4;\ x^2 - 5x + 4 = 0;\ x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow P(1, -3) \\ x_2 = 4 \rightarrow Q(4, 0) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.



Por ser todas las ordenadas de la recta mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola en el intervalo $(1, 4)$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_1^4 [(x - 4) - f(x)] \cdot dx = \int_1^4 \left[x - 4 - \left(x^2 - 4x\right)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_1^4 \left(x - 4 - x^2 + 4x\right) \cdot dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 =$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{5 \cdot 4^2}{2} - 4 \cdot 4\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{5 \cdot 1^2}{2} - 4 \cdot 1\right) = -\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 =$$

$$= 28 - \frac{63}{3} - \frac{5}{2} = 28 - 21 - \frac{5}{2} = 7 - \frac{5}{2} = \underline{\frac{9}{2}\, u^2 = 4,5\, u^2}.$$

****

3º) a) Determina el valor de λ para que los puntos $A(3,\ 0,\ -1)$, $B(2,\ 2,\ -1)$, $C(1,\ -2,\ -5)$ y $D(\lambda,\ 6,\ -1)$ sean coplanarios y calcula la ecuación implícita o general del plano que los contiene.

b) Determina la posición relativa del plano $\pi \equiv 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $P(-4,\ 4,\ 2)$ y $Q(4,\ 8,\ -4)$. Si se cortan, calcula el punto de corte.

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(-4,\ 4,\ 2)$ respecto del plano de ecuación general $\pi \equiv 4x + 2y - 3z - 15 = 0$.

----

a)

Los puntos $A,\ B,\ C$ y D determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(2,\ 2,\ -1) - (3,\ 0,\ -1)] = (-1,\ 2,\ 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(1,\ -2,\ -5) - (3,\ 0,\ -1)] = (-2,\ -2,\ -4).$$

$$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(\lambda,\ 6,\ -1) - (3,\ 0,\ -1)] = (\lambda - 3,\ 6,\ 0).$$

Para que los puntos $A,\ B,\ C$ y D sean coplanarios, los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ tienen que ser coplanarios, o sea, que su rango tiene que ser menor de tres; el determinante que forman tiene que valer cero:

$$Rang\left\{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right\} < 3 \Rightarrow |-1\ 2\ 0\ \ -2\ \ -2\ \ -4\ \lambda - 3\ 6\ 0| = 0;\quad -8(\lambda - 3) - 24$$

$$(\lambda - 3) + 3 = 0;\ \ \lambda - 3 + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$\underline{Los\ puntos\ A,\ B,\ C\ y\ D\ están\ en\ un\ mismo\ plano\ para\ \lambda = 0}.$$

El plano π que contiene a los puntos $A,\ B,\ C$ y D tiene la siguiente expresión general:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) \equiv |x - 3\ y\ z + 1\ \ -1\ 2\ 0\ \ -2\ \ -2\ 4| = 0;\ \ |x - 3\ y\ z + 1\ \ -1\ 2\ 0\ 1$$

$$4(x - 3) - (z + 1) - 2(z + 1) + 2y = 0;\ \ 4(x - 3) - 3(z + 1) + 2y = 0;$$

$$4x - 12 + 2y - 3z - 3 = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 4x + 2y - 3z - 15 = 0}.$$

b)

Los puntos $P(-4,\ 4,\ 2)$ y $Q(4,\ 8,\ -4)$ determinan el vector

$\overrightarrow{PQ} = (8,\ 4,\ \ -\ 6)$.

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector hallado $\overrightarrow{PQ}$, por ejemplo: $\overrightarrow{v}_r = (4,\ 2,\ \ -\ 3)$.

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$r \equiv \frac{x+4}{4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{-3} \Rightarrow\ \ 2x\ +\ 8\ =\ 4y\ -\ 16\ \ -\ 3y\ +\ 12\ =\ 2z\ -\ 4\ \} \Rightarrow r \equiv \{x\ -\ 2y\ +$

.

La recta r y el plano π determinan el sistema $x\ -\ 2y\ =-\ 12 \qquad 3y\ +\ 2z\ =\ 16\ 4x\ +\ 2y\ -\ 3z\ =\ 15\ \}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M\ = (1\ \ -\ 2\ 0\ 0\ 3\ 2\ 4\ 2\ \ -\ 3\ )$ y $M^{'}\ = (1\ \ -\ 2\ 0\ 0\ 3\ 2\ 4\ 2\ \ -\ 3 \qquad -\ 12\ 16\ 15\ )$.

Según sean los rangos de $M\ y\ M^{'}$ pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- $Rang\ M\ =\ Rang\ M^{'}\ =\ 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2. -- $Rang\ M\ =\ 2;\ Rang\ M^{'}\ =\ 3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3. -- $Rang\ M\ =\ Rang\ M^{'}\ =\ 3 \Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$Rang\ M \Rightarrow |1\ \ -\ 2\ 0\ 0\ 3\ 2\ 4\ 2\ \ -\ 3\ | =-\ 9\ -\ 16\ -\ 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M\ =\ 3.$

$\underline{Rang\ M\ =\ Rang\ M^{'}\ =\ 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes}.$

El punto de corte es la solución del sistema.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$x\ = \frac{|-12\ -2\ 0\ 16\ 3\ 2\ 15\ 2\ -3\ |}{-29} = \frac{108-60+48-96}{-29} = \frac{156-156}{-29} = \frac{0}{-29} =\ 0.$

$y\ = \frac{|1\ -12\ 0\ 0\ 16\ 2\ 4\ 15\ -3\ |}{-29} = \frac{-48-96-30}{-29} = \frac{-174}{-29} =\ 6.$

$z\ = \frac{|1\ -2\ -12\ 0\ 3\ 16\ 4\ 2\ 15\ |}{-29} = \frac{45-128+144-32}{-29} = \frac{189-160}{-29} = \frac{29}{-29} =-\ 1.$

$\underline{El\ punto\ de\ corte\ es\ C(0,\ 6,\ \ -\ 1)}.$

$c)$

Un vector normal del plano $\pi \equiv 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ es $\overrightarrow{n} = (4,\ 2,\ -3)$.

La recta s perpendicular al plano π que contiene al punto $P(-4,\ 4,\ 2)$ tiene la siguiente expresión, dada por unas ecuaciones paramétricas: $s \equiv \{x = -4 + 4\lambda\ y = 4 + 2\lambda\ \ z = 2 - 3\lambda$.

El punto Q de corte de s con π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv 4x + 2y - 3z = 15 \qquad s \equiv \{x = -4 + 4\lambda\ y = 4 + 2\lambda\ \ z = 2 - 3\lambda\ \} \Rightarrow 4($

$-16 + 16\lambda + 8 + 4\lambda - 6 + 9\lambda = 15;\ -14 + 29\lambda = 15;\ 29\lambda = 29 \Rightarrow \lambda = 1$
.

$Q \Rightarrow \{x = -4 + 4\lambda\ y = 4 + 2\lambda\ \ z = 2 - 3\lambda\ \} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \{x = -4 + 4 = 0\ y = 4 +$
.

El punto $P^{'}(x,\ y,\ z)$ es simétrico de $P(-4,\ 4,\ 2)$ cuando sea $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP^{'}}$:

$[Q - P] = \left[P^{'} - Q\right];\ [(0,\ 6,\ -1) - (-4,\ 4,\ 2)] = [(x,\ y,\ z) - (0,\ 6,\ -1)];$

$(4,\ 2,\ -3) = (x - 0,\ y - 6,\ z + 1) \Rightarrow \{x - 0 = 4 \rightarrow x = 4 \quad y - 6 = 2 \rightarrow y = 8$
.

$\underline{P^{'}(4,\ 8,\ -4)}$

****

4º) En las rebajas de unos grandes almacenes están mezcladas y a la venta 200 bufandas de la marca A, 150 de la marca B y 50 de la marca C. La probabilidad de que una bufanda de la marca A esté defectuosa es 0,01; 0,02 si es de la marca B y 0,04 se es de la marca C. Una persona elige una bufanda al azar:

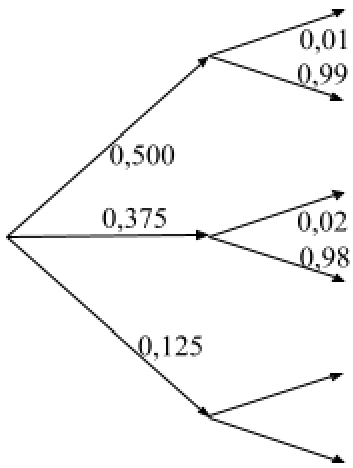
a) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida sea de la marca A o defectuosa.

b) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida no sea defectuosa ni de la mara C.

c) Si una bufanda elegida no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

$$Total\ de\ bufandas: 200 + 150 + 50 = 400.$$

$$A \rightarrow \frac{200}{400} = 0,500; \quad B \rightarrow \frac{150}{400} = 0,375; \quad C \rightarrow \frac{50}{400} = 0,125.$$



a)

$$P = P(A) + P(B \cap D) + P(C \cap D) =$$

$$= P(A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= 0,5 + 0,375 \cdot 0,02 + 0,125 \cdot 0,04 = 0,5 + 0,0075 + 0,0050 = \underline{0,5125}.$$

b)

$$P = P(\overline{D} \cap \overline{C}) = P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D}) =$$

$$= P(A) \cdot P(\overline{D}/A) + P(B) \cdot P(\overline{D}/B) = 0,5 \cdot 0,99 + 0,375 \cdot 0,98 =$$

$$= 0,4950 + 0,3675 = \underline{0,8625}.$$

$c)$

$$P = P(B/\overline{D}) = \frac{P(B\cap\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(B)\cdot P(\overline{D}/B)}{P(A)\cdot P(\overline{D}/A)+P(B)\cdot P(\overline{D}/B)+P(C)\cdot P(\overline{D}/C)} =$$

$$= \frac{0{,}375\cdot 0{,}98}{0{,}5\cdot 0{,}99+0{,}375\cdot 0{,}98+0{,}125\cdot 0{,}96} = \frac{0{,}3675}{0{,}4950+0{,}3675+0{,}1200} = \frac{0{,}3675}{0{,}9825} = \underline{0{,}3740}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema: $\begin{cases} 3x - 6y + mz = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = m \end{cases}$.

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 3$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 3 & -6 & m & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -6 & m \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m - 6 + 2m - 3 = 3m - 9 = 0 \Rightarrow m = 3.$$

$$\underline{Para\ m \neq 3 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$$Para\ m = 3 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = 3F_2\} \Rightarrow Rang\ A' = 2.$$

$$\underline{Para\ m = 3 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.$$

b)

Para $m = 3$ el sistema resulta $\begin{cases} 3x - 6y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$, que es compatible indeterminado; haciendo $y = \lambda$:

$$x = 3 - \lambda;\ \ z = -x + 2y = -3 + \lambda + 2\lambda = -3 + 3\lambda = z.$$

$$\underline{Solución: x = 3 - \lambda,\ y = \lambda,\ z = -3 + 3\lambda,\ \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) $a)$ Calcula $a\ y\ b$ para que la función $f(x) = \{e^{2x} + ax + b\ si\ x < 0\ \frac{1}{2}(x^2 + 2)\ si\ x \geq 0$ sea continua y derivable en $x = 0$.

$b)$ Calcula los vértices del rectángulo de área máxima que se puede construir, si uno de los vértices es el $O(0,\ 0)$, otro está sobre el eje X, otro sobre el eje Y y el otro sobre la recta $2x + 3y = 8$.

$c)$ Calcula $I = \int_0^3 x \cdot \sqrt{x + 1} \cdot dx$.

$a)$

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\ x = 0 \Rightarrow \{f(x) = \left(e^{2x} + ax + b\right) = 1 + b\ f(x) = \left[\frac{1}{2}\left(x^2 + 2\right)\right] = 1 = f(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(1) \Rightarrow 1 + b = 1 \Rightarrow b = 0.$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando el correspondientes valor de a.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$f'(x) = \{2e^{2x} + a\ si\ x < 0\ \ x\ \ si\ x \geq 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f'(0) = \{2 + a\ si\ x < 0\ 0\ si\ x \geq 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right) \Rightarrow 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2.$

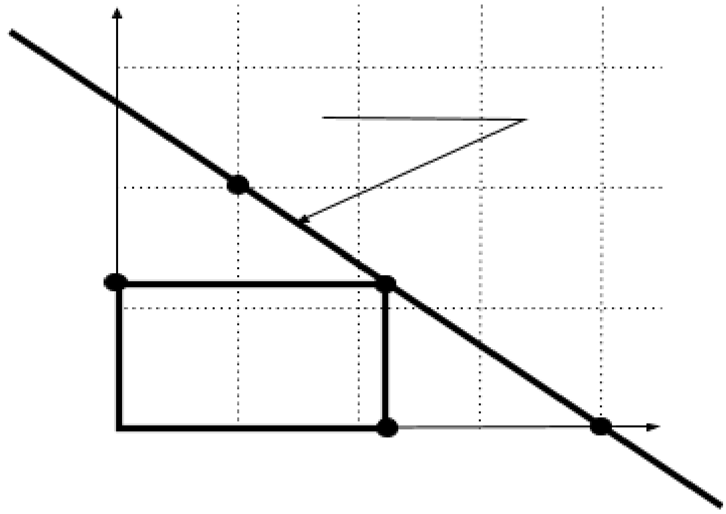
$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ y\ derivable\ en\ x = 0\ para\ a = -2\ y\ b = 0}.$

$b)$

Un punto genérico de la recta es $P\left(x,\ \frac{8-2x}{3}\right)$ y los puntos sobre los ejes de coordenadas son $A(x,\ y)$ y $B\left(0,\ \frac{8-2x}{3}\right)$.

La recta $2x + 3y = 8$ contiene a los puntos $M(4,\ 0)\ y\ N(1,\ 2)$.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta.



La expresión de la superficie es: $S = x\cdot\frac{8-2x}{3} = \frac{1}{3}\left(-\ 2x^2 + 8x\right)$.

Las condiciones para que la superficie sea máxima es que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$S'(x) = \frac{1}{3}(-\ 4x + 8)$. $S''(x) = \frac{1}{3}(-\ 4) =-\ \frac{4}{3} < 0 \Rightarrow Máximo.$

$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(-\ 4x + 8) = 0;\ \ -\ 4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2.$

$\underline{Los\ vértices\ del\ rectántulo\ pedido\ son\ O(0,\ 0),\ A(2,\ 0),\ B\left(0,\ \frac{4}{3}\right)\ y\ P\left(2,\ \frac{4}{3}\right).}$

$c)$

$$I = \int_0^3 x\cdot\sqrt{x + 1}\cdot dx \Rightarrow \{x = 3\rightarrow t = 4\ x = 0\rightarrow t = 1\} \Rightarrow \int_1^4 (t - 1)\sqrt{t}\cdot dt =$$

$$= \int_1^4 \left(t\sqrt{t} - \sqrt{t}\right)\cdot dt = \left[\frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^4 = \left[\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[\frac{2t^2\sqrt{t}}{5} - \frac{2t\sqrt{t}}{3}\right]_1^4 =$$

$$= \left(\frac{2\cdot4^2\cdot\sqrt{4}}{5} - \frac{2\cdot4\cdot\sqrt{4}}{3}\right) - \left(\frac{2\cdot1^2\cdot\sqrt{1}}{5} - \frac{2\cdot1\cdot\sqrt{1}}{3}\right) = \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{62}{5} - \frac{14}{3} = \frac{186-70}{15} =$$

.

$$\underline{I = \int_0^3 x\cdot\sqrt{x + 1}\cdot dx = \frac{116}{15}.}$$

****

3º) a) Dado el plano $\pi \equiv 2x - y - 2z - 3 = 0$, calcula el valor de a para que la recta r que pasa por los puntos $P(a,\ a,\ a)$ y $Q(1,\ 3,\ 0)$ sea paralelo al plano π.

b) Para $a = 1$, calcula la distancia de r a π.

c) Para $a = 1$, calcula la ecuación implícita o general del plano β que es perpendicular a π y contiene a r.

La recta r, por ser paralela al plano π, tiene como vector director a cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector normal del plano.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2,\ -1,\ -2)$.

Los puntos $P(a,\ a,\ a)$ y $Q(1,\ 3,\ 0)$ determinan el vector $\overrightarrow{QP} = (a - 1,\ a - 3,\ a)$.

Los vectores $\vec{n}$ y $\overrightarrow{QP}$ son perpendiculares.

Para que los vectores $\vec{n}$ y $\overrightarrow{QP}$ sean perpendiculares su producto escalar tiene que ser cero:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{QP} = 0 \Rightarrow (2,\ -1,\ -2) \cdot (a - 1,\ a - 3,\ a) = 0;\ \ 2a - 2 - a + 3 - 2a = 0;$$

$$-a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

<u>*La recta r es paralela al plano* π *y pasa por P y Q para* $a = 1$.</u>

b)

La distancia de la recta r al plano π es la misma que la distancia de cualquier punto de la recta al plano. Un punto de la recta r es $P(1,\ 1,\ 1)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(1,\ 1,\ 1)$ y al plano $\pi \equiv 2x - y - 2z - 3 = 0$:

$$d(r,\ \pi) = d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|2 - 1 - 2 - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|-4|}{\sqrt{9}} = \underline{\frac{4}{3}\ unidades}.$$

$c)$

El plano pedido, β, por ser perpendicular a π, tiene como como vector director al vector normal de π y, por contener a r contiene a un punto de r y el vector director de r también es director del plano β.

La expresión general de β es la siguiente:

$$\beta\left(P;\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v_r}\right) \equiv |x - 1\ y - 1\ z - 1\ 2\ \ - 1\ \ - 2\ 0\ \ - 2\ 1\,| = 0;$$

$$-(x - 1) - 4(z - 1) - 4(x - 1) - 2(y - 1) = 0;$$

$$-5(x - 1) - 2(y - 1) - 4(z - 1) = 0;\ \ 5x - 5 + 2y - 2 + 4z - 4 = 0.$$

$$\underline{\beta \equiv 5x + 2y + 4z - 11 = 0}.$$

****

4º) a) Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con 4 respuestas de las cuales solo una es correcta. Si se contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de contestar bien al menos dos preguntas?

b) La duración de un cierto tipo de pilas eléctricas es una variable que sigue una distribución normal de media 50 horas y desviación típica 5 horas. Calcula la probabilidad de que una pila eléctrica de este tipo, elegida al azar, dure menos de 42 horas.

----

a)

El suceso contrario de "contestar bien a dos o más preguntas" es "contestar mal a 0 o 1 preguntas".

Se trata de una distribución normal de las siguientes características:

$Contestar\ bien$: $p = \frac{1}{4}$; $contestar\ mal$: $q = \frac{3}{4}$; $n = 10$; $r = 0\ y\ r = 1$.

Sabiendo que la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial es $P = (n\ r\ )\cdot p^{r}\cdot q^{n-r}$, la probabilidad pedida es:

$$P = 1 - \left[(10\ 0\ )\cdot 0,25^{0}\cdot 0,75^{10-0} + (10\ 1\ )\cdot 0,25^{1}\cdot 0,75^{10-1}\right] =$$

$$= 1 - \left(1\cdot 1\cdot 0,75^{10} + 10\cdot 0,25\cdot 0,75^{9}\right) = 1 - (0,0563 + 0,1877) =$$

$$= 1 - 0,2440 = \underline{0,7560}.$$

b)

$Datos$: $n = 1$; $\mu = 50$; $\sigma = 5$.

$$N\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\Rightarrow N\left(50,\ \frac{5}{\sqrt{1}}\right) = N(50,\ 5).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-50}{5}$.

$$P = P(Z < 42) = P\left(Z < \frac{42-50}{5}\right) = P\left(Z < \frac{-8}{5}\right) = P(Z <- 1,6) =$$

$$= 1 - P(Z\leq 1,6) = 1 - 0,9452 = \underline{0,0548}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE GALICIA

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá responder solo a los ejercicios de una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) Dada la matriz $A = (0\,0\ -1\ -1\,0\,0\,0\ -1\,0\,)$:

$a)$ ¿Qué relación existe entre su inversa A^{-1} y su traspuesta A^{t}.

b) Estudia, según los valores de λ, el rango de $A - \lambda \cdot I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. Calcula las matrices X que verifican $A \cdot X + X = (0\,0\,0\,)$.

$a)$

$$(I) = (1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,) \Rightarrow \{F_1 \to -F_1\ F_2 \to -F_2\ F_3 \to -F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-\ 1\,0\,0\,0\ -1\,0\,0\,0\ -1\,) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow (0\ -1\,0\ -1\,0\,0\,0\,0\ -1\,) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow (0\ -1\,0\,0\,0\ -1\ -1\,0\,0\,) \Rightarrow A^{-1} = (0\ -1\,0\,0\,0\ -1\ -1\,0\,0\,)$$

.

$$A^{t} = (0\ -1\,0\,0\,0\ -1\ -1\,0\,0\,).$$

$$\underline{\textit{Como puede observarse}:\ A^{-1} = A^{t}}.$$

b)

$$A - \lambda \cdot I = (0\,0\ -1\ -1\,0\,0\,0\ -1\,0\,) - (\lambda\,0\,0\,0\,\lambda\,0\,0\,0\,\lambda\,) = (-\ \lambda\,0\ -1\ -1$$

.

$$|A - \lambda \cdot I| = |-\ \lambda\,0\ -1\ -1\ -\lambda\,0\,0\ -1\ -\lambda\,| = -\lambda^3 - 1 = 0;\ \lambda^3 + 1 = 0 \Rightarrow$$

.

$$\underline{Para\ \lambda \neq -1 \Rightarrow Rang\ (A - \lambda \cdot I) = 3}.$$

$$Para\ \lambda = -1 \Rightarrow A - \lambda \cdot I = (1\,0\ -1\ -1\,1\,0\,0\ -1\,1\,) \Rightarrow \{C_1 + C_2 = -C_3\}$$

.

$\underline{Para\,\lambda = -1 \Rightarrow Rang\,(A - \lambda \cdot I) = 2}$.

$A \cdot X + X = (0\ 0\ 0);\ \ (A + I) \cdot X = (0\ 0\ 0)$.

$A + I = (0\ 0\ \ -1\ \ -1\ 0\ 0\ 0\ \ -1\ 0) + (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) = (1\ 0\ \ -1\ \ -1\ 1\ 0$

.

$(1\ 0\ \ -1\ \ -1\ 1\ 0\ 0\ \ -1\ 1) \cdot (x\ y\ z) = (0\ 0\ 0) \Rightarrow\ \ x - z = 0\ \ -x + y = 0\ \ -$

.

$|A + I| = |1\ 0\ \ -1\ \ -1\ 1\ 0\ 0\ \ -1\ 1| \Rightarrow \left\{C_1 + C_2 = -C_3\right\} \Rightarrow |1\ 0\ \ -1\ \ -1\ 1\ 0\ 0\ \ -1$

.

Por existir $|1\ 0\ \ -1\ 1| \neq 0 \Rightarrow Rang\,(A + I) = 2$.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado cuyas soluciones son las siguientes: $x = y = z = \lambda$, $\forall \lambda \in R$ y, en consecuencia:

$\underline{X = (\lambda\ \lambda\ \lambda),\ \forall \lambda \in R}$.

****

2º) a) Enuncia el teorema de Rolle. Calcula $a,\ b\ y\ c$ para que cumpla las hipótesis de dicho teorema la función $f(x) = \{2x^2 + ax\ si\ x < 1\ \ bx + c\ si\ x \geq 1$ en el intervalo $[0,\ 2]$ y calcula el punto en el que se cumple el teorema.

b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 2x$ y la recta $y = x$. (Para el dibujo de la parábola, indica: puntos de corte con los ejes, el vértice y concavidad y convexidad).

----

a)

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a,\ b]$ y derivable en $(a,\ b)$, con $a,\ b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a,\ b\ y\ c$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\ x = 1 \Rightarrow \{f(x) = \left(2x^2 + ax\right) = 2 + a \quad f(x) = (bx + c) = b + c = f(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(1) \Rightarrow 2 + a = b + c;\ a - b - c = -2.$ (1)

Por cumplir $f(x)$ las hipótesis del teorema de Rolle:

$f(0) = 0\ f(2) = 2b + c\ \} \Rightarrow f(0) = f(2) \Rightarrow 2b + c = 0.$ (2)

Por ser $f(x)$ derivable en $(0,\ 2)$ tiene que cumplirse que $f'\left(1^-\right) = f'\left(1^+\right)$:

$f'(1) = \{4 + a\ si\ x < 1\ \ b\ si\ x \geq 1\ \Rightarrow 4 + a = b;\ a - b = -4.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$a - b - c = -2 \quad 2b + c = 0 \quad a - b = -4\ \} \Rightarrow$ (Restando la 3ª ecuación a la primera) $\Rightarrow \underline{c = -2}$.

$2b - 2 = 0;\ b - 1 = 0 \Rightarrow \underline{b = 1}.\ \ a - 1 = -4 \Rightarrow \underline{a = -3}.$

La función resulta: $f(x) = \{2x^2 - 3x\ si\ x < 1\ \ x - 2\ si\ x \geq 1$.

$f'(x) = \{4x - 3\ si\ x < 1\ \ 1\ si\ x \geq 1$.

$$f'(c) = \begin{cases} 4c - 3 & si\, x < 1 \\ 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4c - 3 = 0 \\ 1 = 0? \end{cases} \Rightarrow c = \frac{3}{4} < 1.$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{4} = 2\cdot\frac{9}{16} - \frac{9}{4} = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} = \frac{9-18}{8} = -\frac{9}{8}.$$

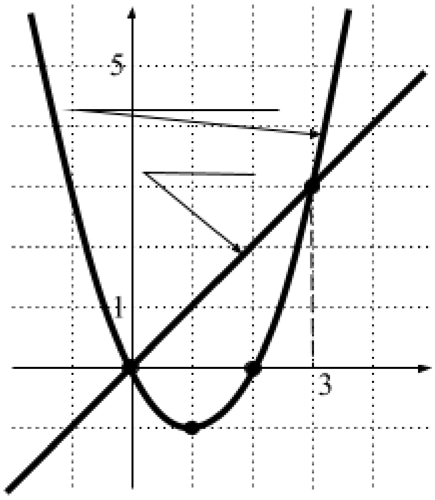
$$\underline{El\, punto\ que\ cumple\ las\ hipótesis\ del\, Teorema\ de\ Rolle\ es\ P\left(\frac{3}{4},\ -\frac{9}{8}\right).}$$

b)

La función $f(x) = x^2 - 2x$ es una parábola convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2, que corta al eje de abscisa en los puntos $O(0,\ 0)\ y\ A(2,\ 0)$.

El vértice de la parábola es el siguiente: $f'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \Rightarrow V(1,\ -1)$.

Los puntos de corte de la parábola y la recta se obtienen de la igualación de sus expresiones:



$$x^2 - 2x = x;\ x^2 - 3x = 0;\ \ x(x - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0,\ 0) \\ x_2 = 3 \rightarrow B(3,\ 3) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.

Por ser todas las ordenadas de la recta mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola en el intervalo $(0,\ 3)$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^3 [x - f(x)]\cdot dx = \int_0^3 \left[x - \left(x^2 - 2x\right)\right]\cdot dx = \int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right)\cdot dx =$$

$$= \left[- \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \left(- \frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2}\right) - 0 = - 9 + \frac{27}{2} = \frac{-18+27}{2} = \underline{\frac{9}{2} u^2 = 4,5 \, u^2}$$

.

****

3º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$:

a) Calcula la ecuación implícita o general del plano β que pasa por $A(1,\ 1,\ 1)$ y es perpendicular a r.

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano γ que contiene a los puntos $P(-\ 1,\ 0,\ 6)$ y $Q(3,\ -\ 2,\ 4)$ y es paralelo a la recta r.

c) Calcula la distancia de la recta r al plano $\pi \equiv x + y + z - 5 = 0$.

----

a)

La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 - \lambda \\ x - y = 2 - \end{cases}$$

$$x = 2 - \lambda;\ \ 2 - \lambda + y = 2 - \lambda;\ \ y = 0 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 0,\ -\ 1)$.

El haz de planos α perpendiculares a r es $\alpha \equiv x - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano β que contiene al punto $A(1,\ 1,\ 1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x - z + D = 0 \\ A(1,\ 1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \underline{\beta \equiv x - z = 0}.$$

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que contiene a los puntos $P(-\ 1,\ 0,\ 6)$ y $Q(3,\ -\ 2,\ 4)$ y es paralelo a la recta r.

Los puntos $P(-\ 1,\ 0,\ 6)$ y $Q(3,\ -\ 2,\ 4)$ determinan el siguiente vector:

$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(3,\ -\ 2,\ 4) - (-\ 1,\ 0,\ 6)] = (4,\ -\ 2,\ -\ 2)$.

Por ser la recta r paralela al plano pedido γ el vector $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 0,\ -\ 1)$ es director del plano γ, cuya ecuación implícita o general es la siguiente:

$$\gamma\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{PQ}\right) \equiv \begin{vmatrix} x + 1 & y & z - 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

$-4y-2(z-6)-2(x+1)+2y=0$; $2(x+1)+2y+2(z-6)=0$; $(x+1)+y+(z-6)=0$; $x+1+y+z-6=0$.

$$\underline{\gamma \equiv x+y+z-5=0}.$$

c)

La recta $r \equiv \{x+y+z-2=0\ x-y+z-2=0$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-5=0$ son paralelos por ser perpendiculares el vector director de la recta y el vector normal del plano, que es $\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\vec{v_r} \cdot \vec{n}=(1,\ 0,\ -1) \cdot (1,\ 1,\ 1)=1+0-1=0 \Rightarrow \perp$ (perpendiculares).

La distancia de un plano paralelo a una recta es igual que la distancia del plano a cualquier punto de la recta.

Un punto de r es $C(2,\ 0,\ 0)$.

La distancia de un punto $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ al plano $Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula $d\left(P_0, \pi\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $C(2,\ 0,\ 0)$ y al plano $\pi \equiv x+y+z-5=0$:

$$d(r, \pi)=d(C,\ \pi)=\frac{|1 \cdot 2+1 \cdot 0+1 \cdot 0-5|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|2-5|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|-3|}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\underline{\sqrt{3}\ unidades}$$

.

****

4º) En un bombo tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9 y cada vez que hacemos una extracción devolvemos la bola al bombo.

a) Si hacemos 5 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de 2 veces.

b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de 9 veces.

----

a)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$Salir\ 7$: $p = 0,1$; $q = 0,9$; $n = 5$; $r = 0,\ 1\ y\ 2$.

Sabiendo que $P = (n\ r)\cdot p^{r}\cdot q^{n-r}$ es la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial:

$$P = (5\ 0)\cdot 0,1^{0}\cdot 0,9^{5} + (5\ 1)\cdot 0,1^{1}\cdot 0,9^{4} = 1\cdot 1\cdot 0,5905 + 5\cdot 0,1\cdot 0,6561 =$$

$$= 0,5905 + 0,3281 = \underline{0,9186}.$$

b)

Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de 9 veces.

$Datos$: $n = 100$; $p = 0,1$; $q = 0,9$.

Se trata de la distribución binomial $B(100;\ 0,1)$.

Como quiera que $n\cdot p = 100\cdot 0,1 = 10 > 5\ n\cdot q = 100\cdot 0,9 = 90 > 5 \}$, se puede aproximar a una distribución normal con $\mu = n\cdot p = 10\ y\ \sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q} = \sqrt{100\cdot 0,1\cdot 0,9} = 3$:

$B(100;\ 0,1)\Rightarrow N(10;\ 3)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-10}{3}$ y aplicando la corrección de Yates: $Z = \frac{X'-10}{3}$. (En el caso que nos ocupa es $X' = X - 0,5$).

$$P = P(X < 9) = P\left(X' < 8,5\right) = P\left(Z < \frac{8,5-10}{3}\right) = P\left(Z < \frac{-1,5}{3}\right) =$$

$$= P(Z < -0,5) = 1 - P(Z\leq 0,5) = 1 - 0,6915 = \underline{0,3085}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema: $\{x + 2y - z = 1\; x - z = m \quad x + y - z = 1$.
b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\,2\ -1\,1\,0\ -1\,1\,1\ -1)$ y $M' = (1\,2\ -1\,1\,0\ -1\,1\,1\ -1\quad 1\,m\,1)$.

El rango de la matriz de coeficientes es 2 por ser proporcionales la primera y tercera columnas y ser $|1\ 2\ 1\ 0\ |\neq 0$.

$Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow |1\ 2\ 1\ 1\ 0\ m\ 1\ 1\ 1\,| = 1 + 2m - m - 2 = m - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 1$.

$\underline{Para\ m = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$\underline{Para\ m \neq 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

b)

Se resuelve para $m = 1$. El sistema resulta $\{x + 2y - z = 1\; x - z = 1 \quad x + y - z = 1$, que es compatible indeterminado.

Despreciando la primera ecuación y haciendo $z = \lambda$:

$x = 1 + \lambda;\ \ 1 + \lambda + y - \lambda = 1 \Rightarrow y = 0.$

$\underline{Solución: x = 1 + \lambda,\ \ y = 0,\ \ z = \lambda,\ \ \forall\lambda m \in R.}$

****

2º) $a)$ Calcula, si existe el valor de m para que $\frac{coscos\ 2x+mx^2-1}{sen\left(x^2\right)} = 3$.

$b)$ Calcula los valores de $a,\ b,\ c\ y\ d$ para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en el punto $P(0,\ 5)$ y la tangente a su gráfica en el punto $Q(1,\ 1)$ sea paralela al eje X.

$c)$ Calcula $I = \int_1^e \sqrt{x}\cdot Lx\cdot dx$. (Nota: L = logaritmo neperiano)

$a)$

$$\frac{coscos\ 2x+mx^2-1}{sen\left(x^2\right)} = \frac{coscos\ 0+0-1}{sen\ 0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2mx}{2x\cdot cos\left(x^2\right)} = \frac{-2\cdot 0+0}{0\cdot cos\ 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2m}{2\cdot cos\left(x^2\right)-2x\cdot 2x\cdot sen\left(x^2\right)} = \frac{0+2m}{2\cdot cos\ 0-0} = \frac{1+2m}{2\cdot 1} =- 2 + m = 3 \Rightarrow \underline{m = 5}.$$

$b)$

Por pasar por el punto $P(0,\ 5)$ es $f(0) = 5$:

$f(0) = 5 \Rightarrow \underline{d = 5}$.

Por tener un punto de inflexión en el punto $P(0,\ 5)$ es $f''(0) = 0$:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. $\qquad f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow \underline{b = 0}$.

La función resulta $f(x) = ax^3 + cx + 5$.

Por pasar por el punto $Q(1,\ 1)$ es $f(1) = 1$:

$f(1) = 1 \Rightarrow a + c + 5 = 1;\ \ a + c =- 4.$ (1)

La pendiente de la tangente de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

La pendiente de las rectas paralelas al eje X es $m = 0$.

El valor de la pendiente en el punto $Q(1,\ 1)$ es:

$f'(x) = 3ax^2 + c \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + c = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):
$\left.\begin{array}{l} a + c = -4 \\ 3a + c = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -a - c = 4 \\ 3a + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \underline{a = 2}$
.

$2 + c = -4 \Rightarrow \underline{c = -6}.$

$c)$

$$I = \int_1^e \sqrt{x} \cdot Lx \cdot dx.$$

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida.

$$A = \int \sqrt{x} \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ \sqrt{x} \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{2x\sqrt{x}}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Lx \cdot \frac{2x\sqrt{x}}{3} - \int \frac{2x\sqrt{x}}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} \cdot Lx - \frac{2}{3} \cdot \int \sqrt{x} \cdot dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} \cdot Lx - \frac{2}{3} \cdot \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C =$$

$$= \frac{2x\sqrt{x}}{9} \cdot (3Lx - 2) + C = A.$$

$$I = \int_1^e \sqrt{x} \cdot Lx \cdot dx = \left[\frac{2x\sqrt{x}}{9} \cdot (3Lx - 2) \right]_1^e =$$

$$= \left[\frac{2e\sqrt{e}}{9} \cdot (3Le - 2) \right] - \left[\frac{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1}}{9} \cdot (3L1 - 2) \right] = \frac{2e\sqrt{e}}{9} \cdot (3 \cdot 1 - 2) - \frac{2}{9} \cdot (3 \cdot 0 - 2) =$$

$$= \frac{2e\sqrt{e}}{9} - \frac{2}{9} \cdot (-2) = \frac{2e\sqrt{e}}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2e\sqrt{e}+4}{9}.$$

$$\underline{I = \int_1^e \sqrt{x} \cdot Lx \cdot dx = \frac{2e\sqrt{e}+4}{9}.}$$

****

3º) Sea r la recta que pasa por $P(9,\ 4,\ 1)$ y $Q(1,\ 1,\ 1)$. Dada la recta $s\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-1}$.

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s. Calcula, si se cortan, el punto de corte.

b) Calcula, si existe, la ecuación implícita o general del plano π que contiene a las rectas r y s.

c) Calcula la distancia del punto $O(0,\ 0,\ 0)$ a la recta s.

----

a)

Un vector de r es $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{QP}=[P-Q]=[(9,\ 4,\ 1)-(1,\ 1,\ 1)]=(8,\ 3,\ 0)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $A(1,\ 0,\ 5)$ y $\overrightarrow{v_s}=(2,\ 1,\ -1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $Q\in r$ y extremo el punto $A\in s$: $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{QA}=[A-Q]=[(1,\ 0,\ 5)-(1,\ 1,\ 1)]=(0,\ -1,\ 4)$.

Según que los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}8 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{vmatrix}=32-8-24=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}=2\Rightarrow\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\ son\ coplanarios.$$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan.}$

Para determinar el punto de corte de las rectas r y s se expresan ambas por ecuaciones paramétricas: $r\equiv\begin{cases}x=1+8\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=1\end{cases}$ y

$s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 5 - \mu \end{cases}.$

De las expresiones de las rectas se deduce que $\mu = 4$ y que $\lambda = 1$.

$$\underline{El\ punto\ de\ corte\ es\ D(9,\ 4,\ 1).}$$

$b)$

Dos rectas que se cortan determinan un plano, por lo tanto existe el plano π, cuya ecuación general es la siguiente:

$$\pi\left(A; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 5 \\ 8 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-3(x-1) + 8(z-5) - 6(z-5) + 8y = 0; \quad -3(x-1) + 8y + 2(z-5) = 0;$$

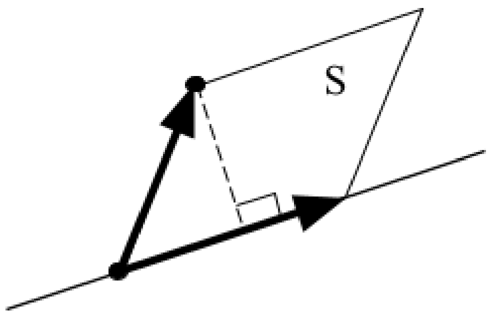
$$-3x + 3 + 8y + 2z - 10 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv 3x - 8y - 2z + 7 = 0.}$$

$c)$

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.



$$\left.\begin{array}{l} S = \left|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{AO}\right| \\ S = \left|\overrightarrow{v_s}\right| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{AO}\right| = \left|\overrightarrow{v_s}\right| \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{h = d(O, s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{AO}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|}}.$$

$$\overrightarrow{AO} = (-1,\ 0,\ -5).$$

Aplicando la fórmula al punto O y a la recta r:

$$d(O, s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{AO}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -5 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-5i + j + k + 10j|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|5i + 11j + k|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5^2 + 11^2 + 1^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{25+1}}{\sqrt{}}$$

$= \frac{\sqrt{147}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{147}{6}} = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{7\sqrt{2}}{2}\ u = d(O, s)}.$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

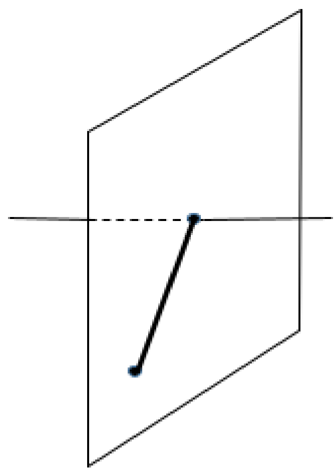
El haz de planos perpendiculares a la recta s tiene la siguiente ecuación general: $\alpha \equiv 2x + y - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano φ que contiene al punto $O(0, 0, 0)$ es el que satisface su ecuación:

$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x + y - z + D = 0 \\ O(0, 0, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + 0 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi \equiv 2x + y - z = 0.$

El punto B, intersección de la recta r con el plano φ es la solución del sistema que forman:



$\left.\begin{array}{l} \varphi \equiv 2x + y - z = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 5 - \mu \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1 + 2\mu) + \mu -$

$2 + 4\mu + \mu - 5 + \mu = 0;\ \ 6\mu = 3 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 + 1 = 2 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow B\left(2, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right).$

La distancia pedida del punto O a la recta s es equivalente a la distancia entre los puntos O y B, o sea el módulo de $\left|\overrightarrow{OB}\right|$:

$$d(O, s) = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{4} + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{16+1+81}{4}} = \frac{\sqrt{98}}{2} =$$

$= \frac{\sqrt{49 \cdot 2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$

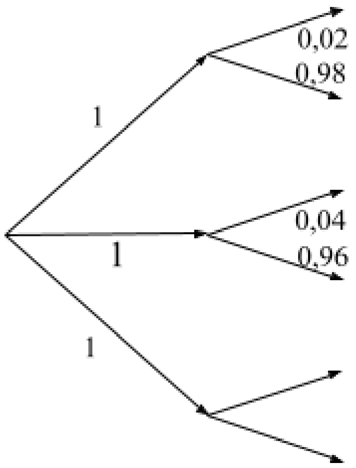
$$\underline{d(O,\ s) = \frac{7\sqrt{2}}{25}\ unidades.}$$

****

4º) En una fábrica hay tres máquinas A, B y C que producen la misma cantidad de piezas. La máquina A produce un 2 % de piezas defectuosas, la B un 4 % y la C un 5 %.

a) Calcula la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa.

b) Si se elige una pieza al azar y resulta que no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina A?



a)

$$P = P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0,02 + \frac{1}{3} \cdot 0,04 + \frac{1}{3} \cdot 0,05 = \frac{1}{3} \cdot (0,02 + 0,04 + 0,05) = \frac{1}{3} \cdot 0,11 = \underline{0,0367}$$

.

b)

$$P = P(A/\overline{D}) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{D}/A)}{1 - P(D)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,98}{1 - \frac{1}{3} \cdot 0,11} = \frac{0,98}{3 - 0,11} = \frac{0,98}{2,89} = \underline{0,3391}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

OPCIÓN A

1º) Sea I la matriz identidad de orden 2 y las matrices $A = (1\ 6\ 0\ 1)\ y\ B = (1\ 1\ 1\ 0)$.

a) Calcule, si existe, la matriz inversa de A.

b) Halle las matrices $X\ e\ Y$ que son soluciones del sistema: $AX + BY = 3I \ \ AX - BY = I\}$.

----

a)

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$|A| = |1\ 6\ 0\ 1| = 1. \quad A^t = (1\ 0\ 6\ 1). \qquad Adj.\ de\ A^t = (1\ \ -6\ 0\ 1)$.

$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} \Rightarrow A^{-1} = \frac{(1\ -6\ 0\ 1)}{1}$.

$$\underline{A^{-1} = (1\ \ -6\ 0\ 1)}.$$

b)

$AX + BY = 3I \ \ AX - BY = I\} \Rightarrow 2AX = 4I;\ \ AX = 2I;\ \ X = 2I \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = (2\ \ -}$

.

$$AX + BY = 3I \ \ - AX + BY = - I \}\Rightarrow 2BY = 2I; \ \ BY = I; \ \ Y = B^{-1}.$$

$$|B| = |1\ 1\ 1\ 0| = - 1. \quad B^t = B = (1\ 1\ 1\ 0).$$

$$Adj.\ de\ B^t = (0\ \ -1\ \ -1\ 1).$$

$$B^{-1} = \frac{Adj.\ de\ B^t}{|B|} \Rightarrow B^{-1} = \frac{(0\ -1\ -1\ 1)}{-1} = (0\ 1\ 1\ \ -1).$$

$$\underline{Y = (0\ 1\ 1\ \ -1)}.$$

****

2º) Sea la función $f(x) = 2 - \cos cos\, x - 3x$.

$a)$ Discute, si existen, las asíntotas oblicuas de f.

$b)$ Calcule $I = \int f(x) \cdot \cos cos\, x \cdot dx$.

$c)$ Demuestre que la función $f(x)$ solo corta una vez el eje horizontal.
Nota: Puede ser útil el teorema de Rolle.

$a)$

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \frac{f(x)}{x}$ y $n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right]$.

$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{2-\cos cos\, x - 3x}{x} = \left(\frac{2}{x} - \frac{\cos cos\, x}{x} - 3\right) = 0 - 0 - 3 = -3$.

$n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \left(\frac{2-\cos cos\, x - 3x}{x} + 3\right) \frac{2-\cos cos\, x - 3x + 3x}{x} =$

$\frac{2-\cos cos\, x}{x} = 0$.

$\underline{La\ recta\ y = -3x\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función}$.

$b)$

$I = \int f(x) \cdot \cos cos\, x \cdot dx = \int (2 - \cos cos\, x - 3x) \cdot \cos cos\, x \cdot dx =$

$= \int \left(2 \cos cos\, x - cos^2 x - 3x \cdot \cos cos\, x\right) \cdot dx =$

$= 2 \int \cos cos\, x \cdot dx - \int cos^2 x \cdot dx - 3 \int x \cdot dx = 2I_1 - I_2 - 3I_3$. (*)

$I_1 = \int \cos cos\, x \cdot dx = sen\, x + C_1$.

$I_2 = \int x \cdot dx = \int \frac{1+\cos cos\, (2x)}{2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int [1 + \cos cos\, (2x)] \cdot dx =$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\int \cos cos\,(2x)\cdot dx \Rightarrow \left\{2x = t\ dx = \frac{1}{2}dt\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int \cos cos\, t\cdot dt =$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot sen\, t + C_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\cdot sen\,(2x) + C_2 = \frac{1}{4}[2x + sen\,(2x)] + C_2 = I_2$

.

$I_3 = \int x\cdot dx \Rightarrow \{x = u \rightarrow dx = du\ \cos cos\, x\cdot dx = dv \rightarrow v = sen\, x\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\cdot sen\, x - \int sen\, x\cdot dx = x\cdot sen\, x + \cos cos\, x + C_3 = I_3.$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión (*):

$I = 2I_1 - I_2 - 3I_3 = 2sen\, x - \frac{1}{4}[2x + sen\,(2x)] - 3(x\cdot sen\, x + \cos cos\, x) + C$

.

$\underline{I = \int f(x)\cdot \cos cos\, x\cdot dx = 2sen\, x - \frac{1}{4}[2x + sen\,(2x)] - 3(x\cdot sen\, x + \cos cos\, x) + C}$

.

$c)$

El teorema de Bolzano dice que “si $f(x)$ es una función continua en $[a,\ b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$”.

La función $f(x) = 2 - \cos cos\, x - 3x$ es continua en R, por ser la suma de tres funciones continuas, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que se considere.

Considerando, por ejemplo, el intervalo [0, π]:

$f(0) = 2 - \cos cos\, 0 - 3\cdot 0 = 2 - 1 - 0 = 1 > 0.$

$f(\pi) = 2 - \cos cos\, \pi - 3\cdot\pi = 2 - (-1) - 3\pi = 3 - 3\pi < 0.$

Lo anterior demuestra que la función $f(x)$ tiene, por lo menos, una raíz real en el intervalo considerado.

Se nos pide demostrar que esa raíz es única. Se empleará el método de reducción al absurdo.

Si tuviera otra raíz le sería aplicable el teorema de Rolle a la función en el intervalo considerado.

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a,\ b]$ y derivable en $(a,\ b)$, con $a,\ b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

$f'(x) = sen\,x - 3 \neq 0,\ \forall x \in R.$

Al no existir ningún valor real que anule la derivada:

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ f(x)\ solamente\ tiene\ una\ raíz\ real}.$

****

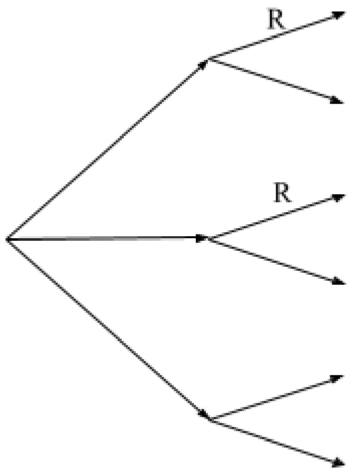
3º) El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es de 140, por la tarde, 200, y por la noche, 40. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2 %, por la tarde de 4 % y por la noche, de un 6 %.

a) Calcule la probabilidad de que no se retrase un vuelo con destino a ese aeropuerto.

b) Si el vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo de la tarde?

$Número\ total\ de\ vuelos: 140 + 200 + 40 = 380.$

$P(M) = \frac{140}{380} = \frac{7}{19};\ \ P(T) = \frac{200}{380} = \frac{10}{19};\ \ P(N) = \frac{40}{380} = \frac{2}{19}.$



a)

$$P = P(\overline{R}) = P(M) \cdot P(\overline{R}/M) + P(T) \cdot P(\overline{R}/T) + P(N) \cdot P(\overline{R}/N) =$$

$$= \frac{7}{19} \cdot 0,98 + \frac{10}{19} \cdot 0,96 + \frac{2}{19} \cdot 0,06 = 0,3611 + 0,5053 + 0,0063 = \underline{0,8727}.$$

b)

$$P = P(T/R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{P(T) \cdot P(R/T)}{P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B) + P(C) \cdot P(R/C)} =$$

$$= \frac{\frac{10}{19} \cdot 0,04}{1 - P(\overline{R})} = \frac{0,0211}{1 - 0,8727} = \frac{0,0211}{0,1273} = \underline{0,1658}.$$

****

4º) Considere las rectas $r\equiv\{x - y + 2z = 7 \quad x - y - 5z =- 7$ y $s\equiv\{x = 3 + 2t\; y = 1 + t \;\; z = 1$, con $t\in R$.

a) Determine la posición relativa de las rectas $r\; y\; s$.

b) Halle, utilizando parámetros, todos los vectores perpendiculares a r.

----

a)

La expresión de s mediante unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$s\equiv\{x = 3 + 2t\; y = 1 + t \;\; z = 1 \quad \Rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0};\; \{x - 3 = 2y - 2\, z -$

.

Las rectas r y s determinan el sistema $\{x - y + 2z = 7 \quad x - y - 5z =- 7\;\; x - 2y = 1 \quad z = 1$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = (1\,1\,1\,0 \quad - 1 \; - 1 \; - 2 \;\; 0 \quad 2 \; - 5 \;\; 0\,1 \;)$ y $M^{'} = (1 \;\; - 1\,2 \quad 7\,1\,1\,0 \quad - 1 \; - 2 \;\; 0 \quad - 5 \; - 7 \;\; 0 \;\; 1\,1 \;\; 1 \;)$.

Según sean los rangos de $M\; y\; M^{'}$ pueden presentarse los siguientes casos:

$1 - Rang\ M = 3,\ Rang\ M^{'} = 4 \Rightarrow Se\ cruzan.$

$2 - Rang\ M = 3,\ Rang\ M^{'} = 3 \Rightarrow Se\ cortan.$

$3 - Rang\ M = 2,\ Rang\ M^{'} = 3 \Rightarrow Son\ paralelas.$

$4 - Rang\ M = 2,\ Rang\ M^{'} = 2 \Rightarrow Son\ coincidentes.$

$Rango\ de\ M \Rightarrow \left\{F_1, F_2, F_3\right\} \Rightarrow |1 \; - 1\,2\,1 \; - 1 \; - 5\,1 \; - 2\,0\,| =- 4 + 5 + 2 - 10 =$

$= 7 - 14 =- 7 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3.$

$Rang\ M^{'} \Rightarrow |1 \; - 1\,2 \quad 7\,1\,1\,0 \; - 1 \; - 2 \;\; 0 \; - 5 \; - 7 \;\; 0 \;\; 1\,1 \;\; 1 \;| \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\right.$

$\Rightarrow \left\{F_2 =- 7F_4\right\} \Rightarrow Rang\ M^{'} = 3.$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan.}$

$b)$

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ x - y - 5z = -7 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 7 + \lambda \\ x - 5z = -7 + \end{cases}$

$\Rightarrow 7z = 14;\ z = 2. \quad x + 4 = 7 + \lambda;\ x = 3 + \lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \end{cases}$

.

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv x + y + D = 0$.

La expresión de β por unas ecuaciones paramétricas es: $\beta \equiv \begin{cases} x = -y - D \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$.

Dos vectores directores de β son $\overrightarrow{v_1} = (-1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{v_2} = (0, 0, 1)$.

Los vectores linealmente dependientes de los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ son de la forma: $\overrightarrow{\varpi} = m \cdot \overrightarrow{v_1} + n \cdot \overrightarrow{v_2},\ \forall m, n \in R$.

$\overrightarrow{\varpi} = m \cdot (-1, 1, 0) + n \cdot (0, 0, 1) = (-m, m, 0) + (0, 0, n) = (-m, m, n)$.

$\underline{Todos\ los\ vectores\ normales\ a\ r\ son\ de\ la\ forma\ \overrightarrow{\varpi} = (-m, m, n),\ \forall m, n \in R.}$

****

OPCIÓN B

1º) a) Determine el rango de la matriz $M = (2\ 3\ 4\ -\ 1\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2\ )$.

b) Sabiendo que $|a\ b\ c\ -\ 1\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2\,| = 2$, calcule $|-\ 2\ 0\ 2\ a\ b\ c\ a - 4\ b - 4\ c - 4\,|$.

----

a)

$$|M| = |2\ 3\ 4\ -\ 1\ 0\ 1\ 2\ 2\ 2\,| = -8 + 6 - 4 + 6 = 0 \Rightarrow \underline{Rang\ M = 2}.$$

b)

$$|-\ 2\ 0\ 2\ a\ b\ c\ a - 4\ b - 4\ c - 4\,| = |-\ 2\ 0\ 2\ a\ b\ c\ a\ b\ c\,| + |-\ 2\ 0\ 2\ a\ b\ c\ -4\ -4\ -$$

$$= 0 + (-1)\cdot 2\cdot(-2)\cdot|-\ 1\ 0\ 1\ a\ b\ c\ 2\ 2\ 2\,| = 4\cdot 2 = 8.$$

$$\underline{|-\ 2\ 0\ 2\ a\ b\ c\ a - 4\ b - 4\ c - 4\,| = 8}.$$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

****

2º) a) Halle, si existe, el valor de a para el cual se cumple que:

$$\left[\sqrt{9x^2 + ax + 1} - (3x - 1)\right] = 2 .$$

b) Determine, si existe, $\left(\sqrt{9x^2 + 12x + 1}\right)'$, donde $\left(\sqrt{9x^2 + 12x + 1}\right)'$ representa la derivada de $\sqrt{9x^2 + 12x + 1}$.

----

a)

$$\left[\sqrt{9x^2 + ax + 1} - (3x - 1)\right] = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\sqrt{9x^2+ax+1}-(3x-1)\right]\cdot\left[\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)\right]}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2+ax+1}\right)^2-(3x-1)^2}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2+ax+1-\left(9x^2-6x+1\right)}{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2+ax+1-9x^2+6x-1}{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+6x}{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(a+6)x}{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(a+6)x}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+ax+1}+3x-1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a+6}{\frac{\sqrt{9x^2+ax+1}}{x}+3-\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a+6}{\sqrt{\frac{9x^2+ax+1}{x^2}}+3-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a+6}{\sqrt{9+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}+3-\frac{1}{x}} = \frac{a+6}{\sqrt{9+\frac{a}{\infty}+\frac{1}{\infty}}+3-\frac{1}{\infty}} = \frac{a+6}{\sqrt{9+0+0}+3-0} =$$

$$= \frac{a+6}{\sqrt{9}+3} = \frac{a+6}{3+3} = \frac{a+6}{6} = 2; \quad a + 6 = 12 \Rightarrow \underline{a = 6}.$$

b)

$$\left(\sqrt{9x^2 + 12x + 1}\right)' = \frac{18x+12}{2\sqrt{9x^2+12x+1}} = \frac{9x+6}{\sqrt{9x^2+12x+1}}.$$

$$\left(\sqrt{9x^2 + 12x + 1}\right)' = \frac{9x+6}{\sqrt{9x^2+12x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{9x+6}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+ax+1}}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{9+\frac{6}{x}}{\sqrt{\frac{9x^2+ax+1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9+\frac{6}{x}}{\sqrt{9+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{9+\frac{6}{\infty}}{\sqrt{9+\frac{a}{\infty}+\frac{1}{\infty}}} = \frac{9+0}{\sqrt{9+0+0}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3.$$

$$\left(\sqrt{9x^2 + 12x + 1}\right)' = 3.$$

****

3º) El número de vuelos que llegan a un aeropuerto por la mañana es de 140, por la tarde , 200, y por la noche, 40. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2 %, por la tarde de 4 % y por la noche, de un 6 %.

a) Calcule la probabilidad de que no se retrase un vuelo con destino a ese aeropuerto.

b) Si el vuelo llegó con retraso a este aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo de la tarde?

4º) Considere las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ x - y - 5z = -7 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$, con $t \in R$.

a) Determine la posición relativa de las rectas r y s.

b) Halle, utilizando parámetros, todos los vectores perpendiculares a r.

(RESUELTOS EN LA OPCIÓN A)

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. Es necesario justificar las respuestas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

OPCIÓN A

1º) Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (-1, 4, 8)$ y $\overrightarrow{v} = (1, 2, -2)$.

$a)$ Demuestre que el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es mayor de 90°.

$b)$ Calcule un vector perpendicular a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ que tenga de módulo 1.

$a)$

Por la definición de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos cos\ \alpha \Rightarrow \cos cos\ \alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{(-1, 4, 8) \cdot (1, 2, -2)}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 8^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} =$$

$$= \frac{-1+8-16}{\sqrt{1+16+64} \cdot \sqrt{1+4+4}} = \frac{-9}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{9}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{90° < \alpha < 180°,\ como\ se\ debía\ demostrar}$$

.

$b)$

Por definición de producto vectorial, el producto vectorial de dos vectores es otro vector que es perpendicular a los dos vectores que se multiplican.

Un vector $\overrightarrow{w}$ perpendicular a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores:

$$\vec{w}' = \vec{u} \times \vec{v} = |i\ j\ k\ \ -1\ 4\ 8\ 1\ 2\ \ -2\,| = -\ 8i\ +\ 8j\ -\ 2k\ -\ 4k\ -\ 16i\ -\ 2j\ =$$

$$= -\ 24i\ +\ 6j\ -\ 6k \Rightarrow \vec{w}\ =\ 4i\ -\ j\ +\ k.$$

El vector pedido, $\vec{m}$, es un vector linealmente dependiente de $\vec{w}$ y de módulo la unidad:

$$\vec{m} = \frac{4i-j+k}{\sqrt{4^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{4i-j+k}{\sqrt{16+1+1}} = \frac{4i-j+k}{\sqrt{18}} = \frac{4i-j+k}{3\sqrt{2}}.$$

$$\underline{\vec{m}_1 = \frac{4}{3\sqrt{2}}i\ -\ \frac{1}{3\sqrt{2}}j\ +\ \frac{1}{3\sqrt{2}}k}\ \ y\ \ \underline{\vec{m}_2 = -\ \frac{4}{3\sqrt{2}}i\ +\ \frac{1}{3\sqrt{2}}j\ -\ \frac{1}{3\sqrt{2}}k}.$$

****

2º) En una empresa frutícola, la producción por árbol sigue una distribución normal de media 54,3 kg y desviación típica 6,5 kg.

a) ¿Cuál es el porcentaje de árboles que producen más de 57 kg?

b) ¿Qué porcentaje de árboles producen entre 50 y 57 kg?

c) Si se escoge al azar un árbol que está dentro del 70 % de los árboles que menos producen, ¿a lo sumo, cuántos kilogramos debería producir?

----

a)

$Datos$: $\mu = 54,3;\ \sigma = 6,5.$ $\qquad X \to N(\mu;\ \sigma) = N(54,3;\ 6,5).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-54,3}{6,5}.$

$P = P(X \geq 57) = P\left(Z \geq \frac{57-54,3}{6,5}\right) = P\left(Z \geq \frac{2,7}{6,5}\right) = P(Z \geq 0,42) =$

$= 1 - P(Z < 0,42) = 1 - 0,6628 = \underline{0,3372}.$

$$\underline{Producen\ más\ de\ 57\ kg\ el\ 33,72\ \%\ de\ los\ árboles.}$$

b)

$P = P(50 \leq Z \leq 57) = P\left(\frac{50-54,3}{6,5} \leq Z \leq \frac{57-54,3}{6,5}\right) = P\left(\frac{-4,3}{6,5} \leq Z \leq \frac{2,7}{6,5}\right) =$

$= P(-\ 0,66 \leq Z \leq 0,42) = P(Z < 0,42) - [1 - P(Z < 0,66)] =$

$= P(Z < 0,42) - 1 + P(Z < 0,66) = 0,6628 - 1 + 0,7454 = 1,4082 - 1 =$

$= \underline{0,4082}.$

$$\underline{Producen\ entre\ 50\ y\ 57\ kg\ el\ 40,82\ \%\ de\ los\ árboles.}$$

c)

$p(\overline{X} \leq Pr) = 0,70 \Rightarrow p\left(\frac{\overline{X}-54,3}{6,5} \geq \frac{Pr-54,3}{6,5}\right) = 0,70.$

Mirando en el interior de la tabla dada de las áreas limitadas por la curva $N(0,\ 1)$, con el valor de 0,70 se obtiene: 0,525.

$\frac{Pr-54,3}{6,5} = 0,525;\ \ Pr - 54,3 = 3,41 \Rightarrow Pr = 3,41 + 54,3 = 57,71.$

$$\underline{Deberá\ producir\ al\ menos\ 57,71\ kgs.}$$

****

3º) Sea la función $f(x) = x \cdot e^{-ax}$:

a) Calcule, según los valores de a, las asíntotas de la función $f(x)$.

b) Halle el valor de a para que f tenga en $x = 1$ un extremo relativo. ¿Es un máximo o un mínimo relativo?

----

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$a < 0$:

$$k = f(x) = \left(xe^{-ax}\right) = \frac{x}{e^{ax}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a \cdot e^{ax}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$k = f(x) = \left(x \cdot e^{-ax}\right) = \frac{x}{e^{ax}} = \; + \infty \; (no\ hay\ asíntota).$$

$a > 0$:

$$k = f(x) = \left(x \cdot e^{-ax}\right) = \frac{x}{e^{ax}} = \; - \infty \; (no\ hay\ asíntota).$$

$$k = f(x) = \left(xe^{-ax}\right) = \frac{x}{e^{ax}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a \cdot e^{ax}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{Para\ a < 0\ y\ a > 0\ el\ eje\ OX\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

$a = 0$:

La función resulta $f(x) = x$

$$\underline{Para\ a = 0\ la\ función\ misma\ es\ la\ asíntota\ oblícua\ y = x}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$f(x) = x \cdot e^{-ax} = \frac{x}{e^{ax}} \Rightarrow e^{ax} \neq 0, \; \forall a, x \in R.$$

$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$

$b)$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-ax} - x \cdot a \cdot e^{-ax} = e^{-ax}(1 - ax).$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow e^{-a}(1 - a) = 0;\ \ e^{-a} \neq 0,\ \forall a \in R \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

$$\underline{f(x)\ tiene\ un\ extremo\ relativo\ en\ x = 1\ para\ a = 1}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trate de un mínimo y, si es negativa de un máximo.

Para $a = 1$ es $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$.

$$f''(x) = -1 \cdot e^{-x} \cdot (1 - x) - 1 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x} \cdot (1 - x) - e^{-x} =$$

$$= -e^{-x} \cdot (1 - x + 1) = -e^{-x} \cdot (2 - x).$$

$$f''(1) = -e^{-1} \cdot (2 - 1) = -e^{-1} \cdot 1 = -e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0.$$

$$\underline{El\ extremo\ relativo\ que\ tiene\ f(x)\ para\ x = 1\ e\ y = 1\ es\ un\ máximo}.$$

****

4º) Sea el sistema de ecuaciones $\{cx + y - 2z = 6 \quad cx - 2y + z = 0 \quad - 2x + y + cz =- 6$:

a) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c.

b) Halle la solución o soluciones, si existen, cuando el parámetro c es 1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (c\,1 \ - 2\,c \ - 2\,1 \ - 2\,1\,c)$ y $M' = (c\,1 \ - 2\,c \ - 2\,1 \ - 2\,1\,c \quad 6\,0 \ - 6)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro c es el siguiente:

$|M| = |c\,1 \ - 2\,c \ - 2\,1 \ - 2\,1\,c| =- 2c^2 - 2c - 2 + 8 - c - c^2 =- 3c^2 - 3c + 6$

$c^2 + c - 2 = 0;\ c = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow c_1 =- 2,\ c_2 = 1.$

<u>$Para \{c\neq - 2\ c\neq1\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$</u>

$Para\ c =- 2 \Rightarrow M' = (- 2\,1 \ - 2 \ - 2 \ - 2\,1 \ - 2\,1 \ - 2 \quad 6\,0 \ - 6) \Rightarrow \{C_1, C_2,$

$\Rightarrow |- 2\,1\,6 \ - 2 \ - 2\,0 \ - 2\,1 \ - 6| =- 24 - 12 - 24 - 12 =- 72\neq0 \Rightarrow Rang\ M' =$

.

<u>$Para\ c =- 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$</u>

$Para\ c = 1 \Rightarrow M' = (1\,1 \ - 2\,1 \ - 2\,1 \ - 2\,1\,1 \quad 6\,0 \ - 6) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - F_1$

$\Rightarrow (1\,1 \ - 2\,0 \ - 3\,3\,0\,3 \ - 3 \quad 6 \ - 6\,6) \Rightarrow \{F_2 =- F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

<u>$Para\ c = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.$</u>

b)

Para $c = 1$ el sistema resulta: $\{x + y - 2z = 6 \quad x - 2y + z = 0 \quad - 2x + y + z =- 6$, que es compatible indeterminado. Despreciando una de las ecuaciones (tercera) y haciendo $z = \lambda$:

$x + y = 6 + 2\lambda\, x - 2y = -\lambda \quad \}\quad x + y = 6 + 2\lambda\ - x + 2y = \lambda \quad \} \Rightarrow 3y = 6 +$
.

$x + (2 + \lambda) = 6 + 2\lambda;\ \ x = 4 + \lambda.$

<u>$Solución: x = 4 + \lambda,\ y = 2 + \lambda,\ z = \lambda,\ \forall\lambda\in R.$</u>

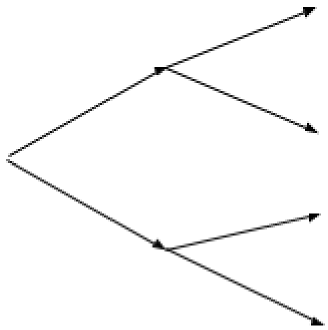
****

OPCIÓN B

1º) Una mujer, que sospecha estar embarazada, acude a la consulta del médico. Al examinarla cuidadosamente, el médico cree que está embarazada con una probabilidad de 0,6. Para confirmar el diagnóstico, el médico encarga un test que da negativo en el 4 % de los casos que la mujer está realmente embarazada. Mientras que el test da positivo en el 5 % de los casos en los que mujer no está embarazada. Calcule la probabilidad de que:

a) El test dé positivo.

b) La mujer esté embarazada sabiendo que el test da positivo.



a)

$$P = P(+) = P(E\cap +) + P(\overline{E}\cap +) = P(E)\cdot P(+/E) + P(\overline{E})\cdot P(+/\overline{E}) =$$

$$= 0,6\cdot 0,96 + 0,4\cdot 0,05 = 0,576 + 0,020 = \underline{0,596}.$$

b)

$$P = P(E/+) = \frac{P(E\cap +)}{P(+)} = \frac{P(E)\cdot P(+/E)}{P(E)\cdot P(+/E)+P(\overline{E})\cdot P(+/\overline{E})} = \frac{0,6\cdot 0,96}{0,6\cdot 0,96+0,4\cdot 0,05} =$$

$$= \frac{0,576}{0,576+0,020} = \frac{0,576}{0,596} = \frac{576}{596} = \underline{\frac{144}{149} = 0,9664}.$$

****

2º) Sea el punto $P(1,\ 2,\ -2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$:
$a)$ Determine la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta r.

$b)$ Determine el punto A de r más próximo a P.

$c)$ Halle la recta r' simétrica de r respecto al punto P.

$a)$

Un vector director de la recta r es $\vec{v_r} = (-1,\ 1,\ 2)$.

Un vector normal del plano π pedido, por ser perpendicular a la recta r, es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector director de la recta: $\vec{n} = (1,\ -1,\ -2)$.

La ecuación general del plano es $\pi \equiv x - y - 2z + D = 0$.

Por contener el plano π al punto $P(1,\ 2,\ -2)$ debe satisfacer su ecuación:

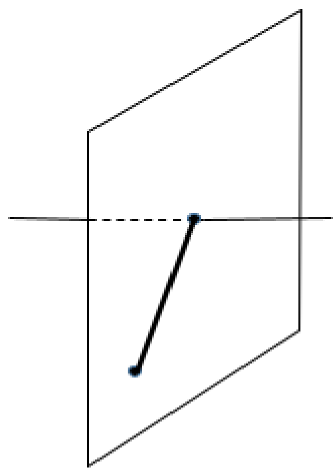
$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y - 2z + D = 0 \\ P(1,\ 2,\ -2) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 2 - 2 \cdot (-2) + D = 0;\ -$$

$\Rightarrow D = -3$.

$$\underline{\pi \equiv x - y - 2z - 3 = 0}.$$

$b)$

El punto A es la intersección de la recta r con el plano π, que es la solución del sistema que forman:



$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y - 2z - 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (2 - \lambda) - (1 + \lambda) - 2 \cdot 2\lambda - 3 = 0;$

$2 - \lambda - 1 - \lambda - 4\lambda - 3 = 0; \quad - 2 - 6\lambda = 0;$

$1 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = - \frac{1}{3}.$

$r \equiv \{x = 2 - \lambda\, y = 1 + \lambda\, z = 2\lambda \quad \Rightarrow \lambda = - \frac{1}{3} \Rightarrow \{x = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \quad y = 1 - \frac{1}{3} = -$

.

$c)$

Dos puntos de la recta $r \equiv \{x = 2 - \lambda\, y = 1 + \lambda\, z = 2\lambda$ son $M(2, 1, 0)\ y\ N(1, 2, 2)$.

Los puntos simétricos de $M\ y\ N$ con respecto a $P(1, 2, - 2)$ son $M'\ y\ N'$, respectivamente.

La recta r' pedida es la que pasa por los puntos $M'\ y\ N'$.

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PM'} \Rightarrow [(1, 2, - 2) - (2, 1, 0)] = [(x, y, z) - (1, 2, - 2)];$

$(- 1, 1, - 2) = (x - 1, y - 2, z + 2) \Rightarrow \{x - 1 = - 1 \to x = 0 \quad y - 2 = 1 \to y = 3$

.

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PN'} \Rightarrow [(1, 2, - 2) - (1, 2, 2)] = [(x, y, z) - (1, 2, - 2)];$

$(0, 0, - 4) = (x - 1, y - 2, z + 2) \Rightarrow \{x - 1 = 0 \to x = 1 \quad y - 2 = 0 \to y = 2$

.

$\overrightarrow{v_{r'}} = \overrightarrow{M'N'} = [(1, 2, - 6) - (0, 3, - 4)] = (1, - 1, - 2)$

$\underline{r' \equiv \{x = \lambda \qquad y = 3 - \lambda \qquad z = - 4 - 2\lambda}$.

****

3º) Sea la función $f(x) = x \cdot e^{-ax}$:

a) Calcule, según los valores de a, las asíntotas de la función $f(x)$.

b) Halle el valor de a para que f tenga en $x = 1$ un extremo relativo. ¿Es un máximo o un mínimo relativo?

4º) Sea el sistema de ecuaciones $\{cx + y - 2z = 6 \quad cx - 2y + z = 0 \quad -2x + y + cz = -6$:

a) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c.

b) Halle la solución o soluciones, si existen, cuando el parámetro c es 1.

$(RESUELTOS\ EN\ LA\ OPCIÓN\ A$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE MADRID

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices $A = (14\ 0\ 10\ 0\ 7\ 5\ 3\ 4\ 5a\ ),\ X = (x\ y\ z\ )\ y\ B = (2\ 37/2\ 11\ )$, se pide:

a) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro a.

b) Para $a = 0$, calcular, si es posible, A^{-1}.

c) Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$, en el caso de $a = 1$.

----

a)

$|A| = |14\ 0\ 10\ 0\ 7\ 5\ 3\ 4\ 5a\ | = 490a - 210 - 280 = 490a - 490 = 0 \Rightarrow a = 1$.

$$\underline{Para\ a \neq 1 \Rightarrow Rang\ A = 3}.$$

Un menor de A es $|14\ 0\ 0\ 7\ | \neq 0$, por lo cual:

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ A = 2}.$$

b)

Para $a = 0$ es $A = (14\ 0\ 10\ 0\ 7\ 5\ 3\ 4\ 0\ )$, que es invertible. La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$|A| = |14\ 0\ 10\ 0\ 7\ 5\ 3\ 4\ 0\ | = -\ 490.$ $\qquad A^t = (14\ 0\ 3\ 0\ 7\ 4\ 10\ 5\ 0\ ).$

$Adj.\ de\ A^t = (|7\ 4\ 5\ 0\ |\ \ -|0\ 4\ 10\ 0\ |\ |0\ 7\ 10\ 5\ |\ \ -|0\ 3\ 5\ 0\ |\ |14\ 3\ 10\ 0\ |\ \ -|14\ 0\ 10\ 5\ |$

.

$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{(-20\ 40\ -70\ 15\ -30\ -70\ -21\ -56\ 98\ )}{-490} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{490}\cdot(20\ \ -\ 40\ 70\ \ -\ 1}$

.

$c)$

$AX = B \Rightarrow \{a = 1\} \Rightarrow (14\ 0\ 10\ 0\ 7\ 5\ 3\ 4\ 5\ )\cdot(x\ y\ z\ ) = (2\ 37/2\ 11\ ) \Rightarrow \qquad 14x + 10z =$

.

El sistema es compatible indeterminado; para su resolución se desprecia una de las incógnitas (tercera) y se parametriza una de sus incógnitas ($z = \lambda$):

$14x + 10z = 2\ 7y + 5z = 18,5\ \} \qquad 7x + 5z = 1\ 14y + 10z = 37\ \} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \{x =$

.

$\underline{Solución:\ x = \frac{1}{7} - \frac{5}{7}\lambda,\ y = \frac{37}{14} - \frac{5}{7}\lambda,\ z = \lambda,\ \forall\lambda \in R.}$

****

2º) Se considera la función $f(x) = \{8e^{2x-4} \ si \ x\leq 2 \ \frac{x^3-4x}{x-2} \ si \ x > 2$ y se pide:

$a)$ Estudiar la continuidad de f en $x = 2$.

$b)$ Calcular las asíntotas horizontales de $f(x)$. ¿Hay alguna asíntota vertical?

$c)$ Calcular $I = \int_0^2 f(x)\cdot dx$.

$a)$

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 2$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\,x = 2\Rightarrow\{f(x) \ = 8e^{2x-4} \ = \ 8 = f(2) \ \ f(x) \ = \frac{x^3-4x}{x-2} = \ 8 \quad (*) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \ = f(x) \ = f(2) \Rightarrow \underline{f(x)\ es\ continua\ para\ x = 2}.$$

$$(*) \ \ \frac{x^3-4x}{x-2} = \frac{x\left(x^2-4\right)}{x-2} = \frac{x(x+2)(x-2)}{x-2} = \left(x^2 + 2x\right) \ = 4 + 4 = 8.$$

$b)$

Las asíntotas horizontales son de la forma $y = k$; son los valores finitos que toma la función cuando $x\rightarrow\pm\infty$.

$$Para\,x\leq 2\Rightarrow\{8e^{2x-4} \ = 8\cdot e^{-\infty} = \frac{8}{e^{\infty}} = \frac{8}{\infty} = 0 \ \ 8e^{2x-4} \ = \ 8\cdot e^{\infty} = \infty \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Para\,x\leq 2\text{: }asíntota\ horizontal\ y = 0\ (Eje\ X)}.$$

$$Para\,x > 2\Rightarrow\{\frac{x^3-4x}{x-2} =+ \infty \ \ \frac{x^3-4x}{x-2} = \ + \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Para\,x > 2\text{: }no\ hay\ asíntota\ horizontal.}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Para\,x < 2\ no\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$$

Para $x > 2$ la función es $f(x) = \frac{x^3-4x}{x-2} = x(x + 2)$, que no es racional.

$\underline{Para\ x > 2\ la\ función\ no\ tiene\ asíntotas\ verticales.}$

$c)$

$$I = \int_0^2 f(x)\cdot dx = \int_0^2 8e^{2x-4}\cdot dx = 8\cdot\int_0^2 e^{2x-4}\cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x = 2 \rightarrow t = 0\ x = 0 \rightarrow t = -4\} \Rightarrow 8\cdot\int_{-4}^{0} e^t\cdot\frac{1}{2}\cdot dt = 4\cdot\int_{-4}^{0} e^t\cdot dt =$$

$$= 4\cdot\left[e^t\right]_{-4}^{0} = 4\cdot\left(e^0 - e^{-4}\right) = 4\cdot\left(1 - \frac{1}{e^4}\right) = 4\cdot\frac{e^4-1}{e^4}.$$

$$\underline{I = \int_0^2 f(x)\cdot dx = 4\cdot\frac{e^4-1}{e^4}.}$$

****

3º) Se consideran los vectores $\vec{u}=(-1,\ 2,\ 3)$ y $\vec{v}=(2,\ 0,\ -1)$ y el punto $A(-4,\ 4,\ 7)$. Se pide:

a) Determinar un vector $\vec{w_1}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.

b) Hallar un vector no nulo $\vec{w_2}$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.

c) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overline{OA}$.

----

a)

El vector pedido $\vec{w_1}$, por ser ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es linealmente dependiente del producto vectorial de estos vectores:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-2i+6j-4k-j=-2i+5j-4k=(-2,\ 5,$$
.

$$\left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right|=\sqrt{(-2)^2+5^2+(-4)^2}=\sqrt{4+25+16}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}.$$

$$\underline{\vec{w_1}=-\frac{2}{3\sqrt{5}}i+\frac{5}{3\sqrt{5}}j-\frac{4}{3\sqrt{5}}k=-\frac{2\sqrt{5}}{15}i+\frac{\sqrt{5}}{3}j-\frac{4\sqrt{5}}{15}k.}$$

b)

Un vector combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es, por ejemplo:

$$\vec{z}=m\vec{u}+n\vec{v}=m\cdot(-1,\ 2,\ 3)+n\cdot(2,\ 0,\ -1)=(-m+2n,\ 2m,\ 3m-n)$$
.

Como el vector pedido, $\vec{w_2}$, es ortogonal a $\vec{v}$, tiene que ser $\vec{z}\cdot\vec{v}=0$.

$$\vec{z}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(-m+2n,\ 2m,\ 3m-n)(2,\ 0,\ -1)=0;$$

$$-2m+4n-3m+n=0;\ \ -5m+5n=0;\ \ m-n=0\Rightarrow m=n.$$

Haciendo, por ejemplo, $m=n=1$:

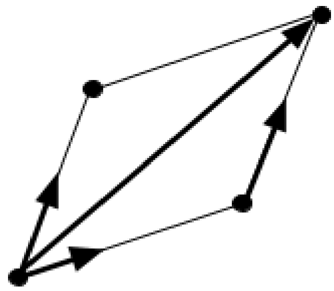
$$\vec{w}_2 = i + 2j + 2k.$$

$c)$

$\vec{OA} = \vec{OQ} + \vec{QA} = m\cdot\vec{u} + n\cdot\vec{v} \Rightarrow (-4,\ 4,\ 7) = m\cdot(-1,\ 2,\ 3) + n\cdot(2,\ 0,\ -1);$

$(-4,\ 4,\ 7) = (-m,\ 2m,\ 3m) + (2n,\ 0,\ -n) \Rightarrow -m + 2n = -4 \qquad 2m = 4$
.

$\vec{OQ} = (-m,\ 2m,\ 3m) \Rightarrow m = 2 \Rightarrow \underline{Q(-2,\ 4,\ 6)}.$



$\vec{QA} = (2n,\ 0,\ -n) \Rightarrow n = -1 \Rightarrow \vec{QA} = (-2,\ 0,\ 1).$

$\vec{OP} = \vec{QA} \Rightarrow (x,\ y,\ z) = (-2,\ 0,\ 1) \Rightarrow \underline{P(-2,\ 0,\ 1)}.$

****

4º) Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13,8 % de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43 % de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?

b) Cierto test diagnostica correctamente el 96 % de los casos positivos de diabetes, pero da un 2 % de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

----

a)

$$Datos: P(D) = 0,138; \ P(\overline{D}) = 0,862; \ P(No/D) = 0,43; \ P(Si/D) = 0,57$$

.

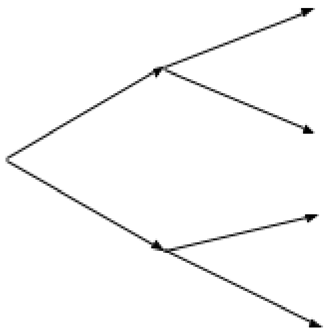
$$P(Si/D) = \frac{P(D \cap Si)}{P(D)} \Rightarrow 0,57 = \frac{P(D \cap Si)}{0,138} \Rightarrow P(D \cap Si) = 0,57 \cdot 0,138 = 0,07866.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ sea\ diabético\ y\ lo\ sepa\ es\ del\ 7,87\ \%}.$$

$$P = P(\overline{D} \cup No) = P(\overline{D \cap Si}) = 1 - P(D \cap Si) = 1 - 0,07866 = 0,92134.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ no\ sea\ diabético\ y\ no\ lo\ sepa\ es\ del\ 92,13\ \%}.$$

b)



$$P = P(D/Po) = \frac{P(D \cap Po)}{P(Po)} = \frac{P(D) \cdot P(Po/D)}{P(D) \cdot P(Po/D) + P(\overline{D}) \cdot P(Po/\overline{D})} = \frac{0,138 \cdot 0,96}{0,138 \cdot 0,96 + 0,862 \cdot 0,02} =$$

$$= \frac{0,13248}{0,13248 + ,01724} = \frac{0,13248}{0,14972} = \underline{0,88485}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Sean x, y, z los días que han pasado en Francia, Alemania y Suiza, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y + z = 15 \; (20 + 20 + 8)x + (25 +$$

$$x + y + z = 15 \; 48x + 48y + 63z = 765 \qquad x = 2z \} \Rightarrow$$

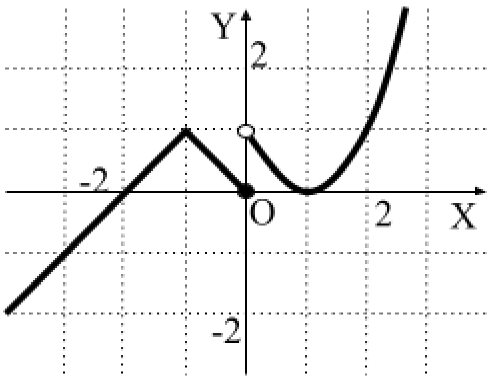
$$\Rightarrow y = 15 - 3z \; y = \frac{765-159z}{48} \} \Rightarrow 15 - 3z = \frac{765-159z}{48};\; 720 - 144z = 765 - 159z;\; 15z$$

$$\Rightarrow z = 3;\; y = 15 - 9 = 6;\; x = 6.$$

$\underline{\textit{Han estado } 6 \textit{ días en Francia, } 6 \textit{ en Alemania y } 3 \textit{ en Suiza.}}$

****

2º) El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $f(x)$. Usando la información de la figura, se pide:



a) Indicar los valores de $f(-\ 1)\ y\ f^{'}(1)$.

b) Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x =-\ 1\ y\ x\ =\ 0$.

c) Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $x\ =-\ 1\ \ y\ \ x\ =\ 0$.

d) Determinar el valor de $\int_{-2}^{0} f(x)\cdot dx$.

----

a)

$\underline{f(-\ 1) =\ 1}$.

El valor de la derivada en un punto es la pendiente de la tangente a la función en ese punto, por lo cual: $\underline{f^{'}(1) =\ 0}$.

b)

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\ x\ =-\ 1\Rightarrow\{f(x)\ \ =\ 1\qquad\qquad f(x)\ \ =\ 1\ =\ f(-\ 1)\ \ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ f(x)\ \ =\ f(x)\ \ =\ f(-\ 1).$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x\ =-\ 1}.$

$Para\ x\ =\ 0\Rightarrow\{f(x)\ \ =\ 0\ =\ f(0)\ f(x)\ \ =\ 1\qquad\qquad \Rightarrow\ f(x)\ \ \neq\ f(x)\ .$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ discontinua\ en\ x\ =\ 0\ (salto\ finito)}.$

c)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual:

$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x\ =\ 0}.$

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$x = -1 \Rightarrow \{f'(-1^-) = 1\ (pendiente) \quad f'(-1^+) = -1\ (pendiente) \Rightarrow f'(-1^-) \neq f'(-$
.

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x = -1}.$$

$d)$

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} (x + 2)dx + \int_{-1}^{0} (-x)dx = \int_{-2}^{-1} (x + 2)dx - \int_{-1}^{0} xdx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{-0} = \left[\frac{(-1)^2}{2} + 2\cdot(-1)\right] - \left[\frac{(-2)^2}{2} + 2\cdot(-2)\right] - \left[0 - \frac{(-1)^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - 2 - 2 + 4 + \frac{1}{2} = 1.$$

$$\underline{\int_{-2}^{0} f(x)dx = 1.}$$

****

3º) Dados el punto $P(0,\ -1,\ 1)$ y las rectas r, que pasa por el punto $Q(1,\ 0,\ 1)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (0,\ 1,\ 2)$, se pide:

a) Hallar la ecuación implícita del plano π que contiene a r y pasa por P.

b) Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a r.

c) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1 y T_2, contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P.

----

a)

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{PQ} = (1,\ 1,\ 0)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{PQ}\right) \equiv |x - 1\ y\ z - 1\ 0\ 1\ 2\ 1\ 1\ 0| = 0;\ \ 2y - (z - 1) - 2(x - 1) = 0;$$

$$2y - z + 1 - 2x + 2 = 0;\ \ -2x + 2y - z + 3 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv 2x - 2y + z - 3 = 0}.$$

b)

El haz de planos α perpendiculares a r tiene por ecuación: $\alpha \equiv y + 2z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano β que contiene al punto $P(0,\ -1,\ 1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\alpha \equiv y + 2z + D = 0 \qquad P(0,\ -1,\ 1)\ \} \Rightarrow -1 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow \beta \equiv y +$$

.

El punto S, intersección de la recta r con el plano β, es la solución del sistema que forman:

$$\beta \equiv y + 2z - 1 = 0 \qquad r \equiv \{x = 1 \qquad y = \lambda \qquad z = 1 + 2\lambda\ \} \Rightarrow \lambda + 2(1 + 2$$

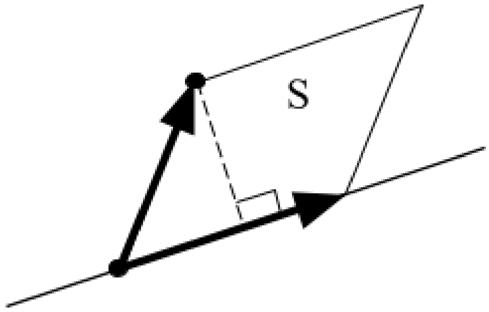
$$5\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5} \Rightarrow S \Rightarrow \left\{x = 1 \qquad y = -\frac{1}{5} \qquad z = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}\right\} \Rightarrow \underline{S\left(1,\ -\right.}$$

.

$c)$

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.

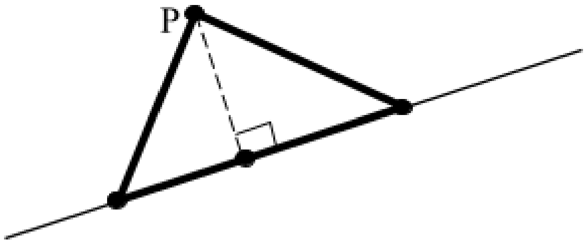


$$S = \left|\vec{v}_r \wedge \vec{QP}\right| S = \left|\vec{v}_r\right| \cdot h \} \Rightarrow \left|\vec{v}_r \wedge \vec{QP}\right| = \left|\vec{v}_r\right| \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = d(P, r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{QP}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}.$$

$$h = d(P, r) = \frac{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{QP}\right|}{\left|\vec{v}_r\right|} = \frac{\|i\ j\ k\ 0\ 1\ 2\ -1\ -1\ 0\ \|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|-2j+k+2i|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|2i-2j+k|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{\sqrt{30}}$$

$$= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo T_1PM:

$$x = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - h^2} = \sqrt{5 - \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{5 - \frac{9}{5}} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

$$S_{T_1PT_2} = \frac{2x \cdot h}{2} = x \cdot h = \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{12}{5}.$$

$$\underline{S_{T_1PT_2} = \frac{12}{5}\ u^2 = 2,4\ u^2.}$$

****

4º) La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 8,5$ y desviación típica $\sigma = 2,5$. Se pide:

a) Calcular el valor a tal que $P(X \leq a) = 0,05$.

b) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9,3.

----

a)

$Datos$: $\mu = 8,5$; $n = 1$; $\sigma = 2,5$.

$$X \to N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(8,5;\ \frac{2,5}{\sqrt{1}}\right) = N(8,5;\ 2,5).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-8,5}{2,5}$.

El valor de a es negativo, por lo cual:

$$p(\overline{X} \leq \alpha) = 1 - 0,05 = 0,95 \Rightarrow p\left(Z \leq \frac{X-8,5}{2,5}\right) = 0,95.$$

Mirando en el interior de la tabla dada de las áreas limitadas por la curva $N(0,\ 1)$, con el valor de 0,95 se obtiene: 1,645.

$$\frac{X-8,5}{2,5} = 1,645;\ X - 8,5 = 4,1125 \Rightarrow X = 8,5 + 4,1125 = 12,6125.$$

$$\underline{a = -\ 12,6125}.$$

b)

$$P = P(8 \leq Z \leq 9,3) = P\left(\frac{8-8,5}{2,5} \leq Z \leq \frac{9,3-8,5}{2,5}\right) = P\left(\frac{-0,5}{2,5} \leq Z \leq \frac{0,8}{2,5}\right) =$$

$$= P(-\ 0,2 \leq Z \leq 0,32) = P(Z < 0,32) - [1 - P(Z < 0,2)] =$$

$$= P(Z < 0,32) - 1 + P(Z < 0,2) = 0,6255 - 1 + 0,5793 = 1,2048 - 1 =$$

$$= \underline{0,2048}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE MADRID

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema de ecuaciones $\{x + my = 1 \quad - 2x - (m + 1)y + z =- 1 \quad x + (2$
, se pide:

a) Discutir el sistema en función del parámetro m.

b) Resolver el sistema cuando $m = 0$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = (1\, m\, 0\ \ - 2\ \ - m - 1\, 1\, 1\, 2m - 1\, m + 2\,)$ y $A' = (1\, m\, 0\ \ - 2\ \ - m - 1\, 1\, 1\, 2m - 1\, m + 2\ \ \ 1\ \ - 1\, 2 + 2m\,)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$|A| = |1\, m\, 0\ \ - 2\ \ - m - 1\, 1\, 1\, 2m - 1\, m + 2\,| =$

$= (- m - 1)(m + 2) + m - (2m - 1) + 2m(m + 2) =$

$=- m^2 - 2m - m - 2 + m - 2m + 1 + 2m^2 + 4m = m^2 - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 =- 1,\ a_2 =- 1.$

$\underline{Para\,\{m \neq - 1\, m \neq 1\,\} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para $m =- 1 \Rightarrow A' = (1\ \ -1\ 0\ \ -2\ 0\ 1\ 1\ \ -3\ 1\ \ \ 1\ \ -1\ 0\ ) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \left\{C_1,\ C_2,\ C_4\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ \ -1\ 1\ \ -2\ 0\ \ -1\ 1\ \ -3\ 0\ | = 6 + 1 - 3 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$

$\underline{Para\ m =- 1 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

Para $m = 1 \Rightarrow A' = (1\ 1\ 0\ \ -2\ \ -2\ 1\ 1\ 1\ 3\ \ \ 1\ \ -1\ 4\ ) \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \left\{C_1,\ C_3,\ C_4\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 0\ 1\ \ -2\ 1\ \ -1\ 1\ 3\ 4\ | = 4 - 6 - 1 + 3 = 0 \Rightarrow Rang\ A' = 2.$

$\underline{Para\ m = 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$b)$

Para $m = 0$ el sistema resulta $\{x = 1\ \ \ \ -2x - y + z =- 1\ x - y + 2z = 2$, que es compatible determinado.

Sustituyendo el valor de $x = 1$ en las otras ecuaciones:

$-2 - y + z =- 1\ 1 - y + 2z = 2\ \ \}\ \ \ -y + z = 1\ \ -y + 2z = 1\} \Rightarrow z =$

.

$\underline{Solución: x = 1,\ y =- 1,\ z = 0}.$

****

2º) a) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0,92$, $m_2 = 0,94$, $m_3 = 0,89$, $m_4 = 0,90$ y $m_5 = 0,91$. Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función: $E(x) = \left(x - m_1\right)^2 + \left(x - m_2\right)^2 + \cdots\cdots + \left(x - m_5\right)^2$ alcanza el mínimo. Calcule dicho valor x.

b) Aplique el método de integración por partes para calcular la siguiente integral: $I = \int_1^2 x^2 \cdot Lx \cdot dx$, donde L significa logaritmo neperiano.

----

a)

$$E(x) = (x - 0,92)^2 + (x - 0,94)^2 + (x - 0,89)^2 + (x - 0,9)^2 + (x - 0,91)^2 =$$

$$= \left(x^2 - 1,84x + 0,8464\right) + \left(x^2 - 1,88x + 0,8836\right) + \left(x^2 - 1,78x + 0,7921\right) +$$

$$+ \left(x^2 - 1,8x + 0,8100\right) + \left(x^2 - 1,82x + 0,8281\right) =$$

$$= 5x^2 - 9,12x + 4,1602.$$

Otra forma de obtener la función de forma muy aproximada es la siguiente:

$$\overline{m} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{N} = \frac{0{,}92+0{,}94+0{,}89+0{,}90+0{,}91}{5} = \frac{4{,}56}{5} = 0,912.$$

$$E(x) = \left(x - m_1\right)^2 + \left(x - m_2\right)^2 + \cdots\cdots + \left(x - m_5\right)^2 = \sum_{1=1}^{i=m} \left(x - m_i\right)^2 =$$

$$= N \cdot (x - \overline{m})^2 = 5 \cdot (x - 0,912)^2.$$

La condición necesaria para que una función tenga un mínimo relativo es que se anule su primera derivad y sea positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera derivada.

$$E'(x) = 10 \cdot (x - 0,912). \qquad E''(x) = 10 > 0 \Rightarrow Mínimo.$$

$$E'(x) = 0 \Rightarrow 10 \cdot (x - 0,912) = 0 \Rightarrow x = 0,912.$$

$\underline{La\ suma\ de\ los\ cuadrados\ de\ los\ errores\ es\ mínima\ para\ x\ =\ 0,912}.$

$b)$

En primer lugar resolvemos la integral indefinida:

$$A = \int x^2 \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \; dv = x^2 \cdot dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3} \right\} \Rightarrow Lx \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot Lx - \frac{1}{3} \cdot \int x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3} \cdot Lx - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{9} \cdot (3Lx - 1) + C = A.$$

$$I = \int_1^2 x^2 Lx \cdot dx = \left[\frac{x^3}{9} \cdot (3Lx - 1) \right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{9} \cdot (3L2 - 1) \right] - \left[\frac{1^3}{9} \cdot (3L1 - 1) \right] =$$

$$= \frac{8}{9} \cdot (3L2 - 1) - \frac{1}{9} \cdot (3L1 - 1) = \frac{8}{3} L2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3} L2 - \frac{7}{9}.$$

$$\underline{I = \int_1^2 x^2 Lx \cdot dx = \frac{8}{3} L2 - \frac{7}{9}.}$$

****

3º) Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$, se pide:

a) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.

b) Para el cuadrado de vértices consecutivos ABCD, con $A(2, 1, 3)$ y $B(1, 2, 3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

----

a)

El lado del cubo es igual que la distancia entre los planos paralelos π_1 y π_2.

La distancia entre los planos α_1 y α_2 paralelos dados por sus ecuaciones generales $\alpha_1 \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $\alpha_2 \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0$ viene dada por la fórmula $d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$:

$$\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0 \text{ y } \pi_2 \equiv 4x + 6y - 12z + 10 = 0$$

$$l = d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|10-1|}{\sqrt{4^2+6^2+12^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{16+36+144}} = \frac{9}{\sqrt{196}} = \frac{9}{14}.$$

$$V = l^3 = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{9^3}{14^3} = \frac{729}{2.744} = 0,2657.$$

$\underline{\textit{El volumen del cubo es de } 0,2657 \textit{ unidades cúbicas.}}$

b)

Los plano $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$ y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$ determinan la recta $s \equiv \begin{cases} 2x + 3y - 6z + 5 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$s \equiv \begin{cases} 2x + 3y - 6z + 5 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow 2x + 3y = -5 + 6\lambda \; x$;

$\begin{cases} 2x + 3y = -5 + 6\lambda \\ 3x - 3y = 6 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow 5x = 1 + 3\lambda;\ \ x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\lambda.\ \ \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\lambda -$

$y = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\lambda - 2 + \lambda = -\frac{9}{5} + \frac{8}{5}\lambda \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\lambda \\ y = -\frac{9}{5} + \frac{8}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

.

Los puntos $A(2,\ 1, 3)$ y $B(1,\ 2,\ 3)$ determinan el vector: $\overrightarrow{BA} = (1,\ \ -1,\ 0)$.

La recta que contiene a los puntos A y B es $t \equiv \{x = 2 + \lambda\ y = 1 - \lambda\ z = 3$.

El haz de planos β perpendiculares a la recta t es $\beta \equiv x - y + K = 0$.

De los infinitos planos de haz β, el plano α que contiene al punto B es el que satisface su ecuación:

$\beta \equiv x - y + K = 0 \qquad B(1,\ 2,\ 3)\ \} \Rightarrow 1 - 2 + K = 0 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow \alpha \equiv x - y + 1 =$
.

El punto C es la intersección del plano α y la recta s:

$\alpha \equiv x - y + 1 = 0\ s \equiv \{x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\lambda \quad y = -\frac{9}{5} + \frac{8}{5}\lambda\ z = \lambda \qquad \} \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\lambda + \frac{9}{5}$
.

El punto C es: $s \equiv \{x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\lambda \quad y = -\frac{9}{5} + \frac{8}{5}\lambda\ z = \lambda \qquad \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow \{x = 2\ y = 3\ z = 3\ \} \Rightarrow \underline{C(2}$
.

Hay diversas formas de obtener el punto D; una de ellas es la siguiente:

El centro del cuadrado M es el punto medio del segmento de extremos $A(2,\ 1, 3)$ y $C(2,\ 3,\ 3) \Rightarrow M(2,\ 2,\ 3)$.

El centro del cuadrado M también es el punto medio del segmento de extremos $B(1,\ 2, 3)$ y $D(x,\ y,\ z)$.

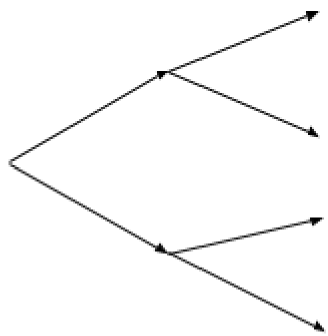
$\frac{1+x}{2} = 2 \Rightarrow x = 3;\ \ \frac{2+y}{2} = 2 \Rightarrow y = 2;\ \ \frac{3+z}{2} = 3 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow \underline{D(3,\ 2,\ 3)}$.

****

4º) El 60 % de las ventas de unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15 % de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8 % si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

a) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.

b) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?



a)

$$P = P(D) = P(R) \cdot P(D/R) + P(\overline{R}) \cdot P(\overline{R}/D) = 0,6 \cdot 0,15 + 0,4 \cdot 0,08 =$$

$$= 0,090 + 0,032 = \underline{0,122}.$$

b)

$$P = P(D/R) = \frac{P(R \cap D)}{P(R)} = \frac{P(R) \cdot P(D/R)}{P(R) \cdot P(D/R) + P(\overline{R}) \cdot P(\overline{R}/D)} = \frac{0,6 \cdot 0,15}{0,6 \cdot 0,15 + 0,4 \cdot 0,08} =$$

$$= \frac{0,090}{0,090 + 0,032} = \frac{0,090}{0,122} = \frac{90}{122} = \underline{\frac{45}{61} = 0,7377}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = (m\ 0\ 2\ \ -\ 2\ 4\ m\ 0\ 1\ \ -\ 1\ )\ y\ B = (-\ 2\ 0\ 0\ )$, se pide:

a) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.

b) Para $m = 0$, calcular $A\cdot B\ \ y\ \ A^{-1}\cdot B$.

c) Calcular $B\cdot B^{t}\ \ y\ \ B^{t}\cdot B$, donde B^{t} denota la matriz traspuesta de B.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |m\ 0\ 2\ \ -\ 2\ 4\ m\ 0\ 1\ \ -\ 1\ | =-\ 4m - 4 - m^{2} = 0;\ \ m^{2} + 4m + 4 = 0;$

$(m + 2)^{2} = 0 \Rightarrow m =-\ 2.$

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall m \in R - \{-\ 2\}}.$

b)

Para $m = 0 \Rightarrow A\cdot B = (0\ 0\ 2\ \ -\ 2\ 4\ 0\ 0\ 1\ \ -\ 1\ )\cdot(-\ 2\ 0\ 0\ ) = \underline{(0\ 4\ 0\ )}$.

Para $m = 0 \Rightarrow A = (0\ 0\ 2\ \ -\ 2\ 4\ 0\ 0\ 1\ \ -\ 1\ )$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{F_{1} \leftrightarrow F_{2}\} \Rightarrow (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_{1} \rightarrow -\ \frac{1}{2}F_{1}\right\} \Rightarrow \left(0\ \ -\ \frac{1}{2}\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\right) \Rightarrow \{F_{2} \leftrightarrow F_{3}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(0\ \ -\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\right) \Rightarrow \left\{F_{1} \rightarrow F_{1} + 2F_{2}\ F_{3} \rightarrow \frac{1}{2}F_{3}\right\} \Rightarrow \left(0\ \ -\ \frac{1}{2}\ 2\ 0\ 0\ 1\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{F_{1} \rightarrow F_{1} + 2F_{3}\ F_{2} \rightarrow F_{2} + F_{3}\right\} \Rightarrow \left(1\ \ -\ \frac{1}{2}\ 2\ \frac{1}{2}\ 0\ 1\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot(2\ \ -\ 1\ 4\ 1$

.

Para

$m = 0 \Rightarrow A^{-1}\cdot B = \frac{1}{2}\cdot(2\ \ -\ 1\ 4\ 1\ 0\ 2\ 1\ 0\ 0\ )\cdot(-\ 2\ 0\ 0\ ) = \frac{1}{2}\cdot(-\ 4\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ ) = \underline{(-\ 2\ \ -}$

.

c)

$B \cdot B^t = (-\ 2\ 0\ 0\,) \cdot (-\ 2\ 0\ 0\,) = \underline{(4\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\,)}$.

$B^t \cdot B\ = (-\ 2\ 0\ 0\,) \cdot (-\ 2\ 0\ 0\,) = \underline{(4)}$. (matriz de una fila y una columna)

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, se pide:

a) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.

b) Calcular $f'(4)$.

c) Hallar el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

La función $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$ puede redefinirse como $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & si\ x < 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} & si\ x \geq 0 \end{cases}$.

Las asíntotas horizontales de una función son los valores finitos que alcanza la función cuando x tiende a más infinito o menos infinito.

$$f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{-\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2+9}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{9}{\infty}}} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+0}} = \frac{-1}{1} = -1.$$

$$\underline{La\ recta\ y = -1\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ (-\infty,\ 0).}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+9}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{\infty}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 1\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ (0,\ +\infty).}$$

$$g(x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow g'(x) = \frac{-1\cdot\sqrt{x^2+9}+x\cdot\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+9}}}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2} = -\frac{\sqrt{x^2+9}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} = -\frac{\frac{x^2+9-x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} =$$

$$= \frac{-9}{\left(x^2+9\right)\cdot\sqrt{x^2+9}}.$$

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow h'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+9}-x\cdot\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+9}}}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+9}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} = \frac{\frac{x^2+9-x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} =$$

$$= \frac{9}{\left(x^2+9\right)\cdot\sqrt{x^2+9}}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-9}{\left(x^2+9\right)\cdot\sqrt{x^2+9}} & si\ x < 0 \\ \frac{9}{\left(x^2+9\right)\cdot\sqrt{x^2+9}} & si\ x \geq 0 \end{cases}.$$

$$\underline{f'(4) = \frac{9}{\left(4^2+9\right)\cdot\sqrt{4^2+9}} = \frac{9}{25\cdot\sqrt{25}} = \frac{9}{125}}.$$

$c)$

La función $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & si\ x < 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} & si\ x \geq 0 \end{cases}$ tiene ordenadas positivas en el intervalo $(-\ 1,\ 1)$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx = \int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx + \int_{0}^{1} f(x)\cdot dx = \int_{-1}^{0} \frac{-x\cdot dx}{\sqrt{x^2+9}} + \int_{0}^{1} \frac{x\cdot dx}{\sqrt{x^2+9}} =$$

$= A + B.$ (*)

Resolvemos en primer lugar la integral indefinida:

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\cdot dx \Rightarrow \left\{ x^2 + 9 = t \quad 2x\cdot dx = dt \quad x\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot dt \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\cdot\int t^{-\frac{1}{2}}\cdot dt = \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2 + 9} + C.$$

Sustituyendo el valor obtenido en las expresiones de A y B:

$$A = \int_{-1}^{0} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}\cdot dx = \int_{0}^{-1} \frac{x\cdot dx}{\sqrt{x^2+9}} = \left[\sqrt{x^2 + 9}\right]_0^{-1} = \sqrt{(-\ 1)^2 + 9} - \sqrt{0^2 + 9} =$$

$$= \sqrt{1 + 9} - 3 = \sqrt{10} - 3.$$

$$B = \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\cdot dx = \left[\sqrt{x^2 + 9}\right]_0^{11} = \sqrt{1^2 + 9} - \sqrt{0^2 + 9} = \sqrt{10} - 3.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$S = \sqrt{10} - 3 + \sqrt{10} - 3 = 2\sqrt{10} - 6.$$

$$\underline{S = \left(2\sqrt{10} - 6\right) u^2 \cong 0,32\ u^2}.$$

****

3º) Dados el punto $P(1,\ 1,\ 1)$ y las rectas $r\equiv\{2x-y=2\ 5x+z=6$, $s\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1/3}$, se pide:

$a)$ Hallar la distancia del punto P a la recta r.

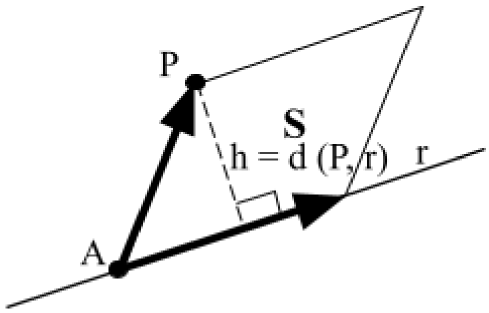
$b)$ Estudiar la posición relativa de las rectas $r\ y\ s$.

$c)$ Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pase por el punto P.

$a)$

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.



$$S=\left|\vec{v_r}\wedge\vec{AP}\right|\ S=\left|\vec{v_r}\right|\cdot h\ \}\Rightarrow\left|\vec{v_r}\wedge\vec{AP}\right|=\left|\vec{v_r}\right|\cdot h\Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow h=d(P,r)=\frac{\left|\vec{v_r}\wedge\vec{AP}\right|}{\left|\vec{v_r}\right|}}.$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r\equiv\{2x-y=2\ 5x+z=6\Rightarrow x=\lambda\Rightarrow y=-2+2\lambda;\ z=6-5\lambda\Rightarrow r\equiv\{x=\lambda\qquad y$
.

Un punto y un vector director de r son $A(0,\ -2,\ 6)$ y $\vec{v_r}=(1,\ 2,\ -5)$.

$\vec{AP}=[P-A]=[(1,\ 1,\ 1)-(0,\ -2,\ 6)]=(1,\ 3,\ -5)$.

Aplicando la fórmula al punto P y a la recta r:

$$d(P,r)=\frac{\left|\vec{v_r}\wedge\vec{AP}\right|}{\left|\vec{v_r}\right|}=\frac{\|i\ j\ k\ 1\ 2\ -5\ 1\ 3\ -5\ \|}{\sqrt{1^2+2^2+(-5)^2}}=\frac{|-10i-5j+3k-2k+15i+5j|}{\sqrt{1+4+25}}=\frac{|5i+k|}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{5^2+1^2}}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{25+1}}{\sqrt{30}}$$

$= \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{13}{15}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{13 \cdot 15}}{15} = \underline{\frac{\sqrt{195}}{15}\ u = d(P, r)}.$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El haz de planos perpendiculares a la recta r tiene la siguiente ecuación general: $\alpha \equiv x + 2y - 5z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $P(1,\ 1,\ 1)$ es el que satisface su ecuación:

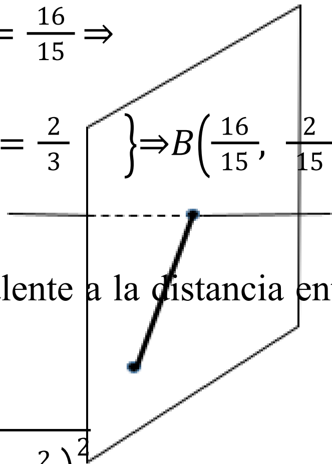
$\alpha \equiv x + 2y - 5z + D = 0 \qquad P(1,\ 1,\ 1) \} \Rightarrow 1 + 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D =$

$\Rightarrow \pi \equiv x + 2y - 5z + 2 = 0.$

El punto B, intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv x + 2y - 5z + 2 = 0 \qquad r \equiv \{ x = \lambda \quad y = -2 + 2\lambda\ z = 6 - 5\lambda \quad \} \Rightarrow \lambda +$

$\lambda - 4 + 4\lambda - 30 + 25\lambda + 2 = 0;\ 30\lambda - 32 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{16}{15} \Rightarrow$



$\Rightarrow \left\{ x = \frac{16}{15} \qquad y = -2 + \frac{32}{15} = \frac{2}{15}\ z = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3} \right\} \Rightarrow B\left(\frac{16}{15},\ \frac{2}{15},\ \frac{2}{3}\right)$

.

La distancia pedida del punto P a la recta r es equivalente a la distancia entre los puntos B y P, o sea el módulo de $\left|\overrightarrow{BP}\right|$:

$$d(P,\ r) = \left|\overrightarrow{BP}\right| = \sqrt{\left(1 - \frac{16}{15}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{15}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{15}\right)^2 + \left(\frac{13}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{225} + \frac{169}{225} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1+169+25}{225}} = \frac{\sqrt{195}}{15}.$$

$$\underline{d(P,\ r) = \frac{\sqrt{195}}{15}\ unidades.}$$

$b)$

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(0,\ -2,\ 6)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 2,\ -5)$. Recta s:

$B(2, \ -1, \ 1)$ y $\vec{v}_s = (-3, \ 3, \ 1)$.

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \vec{AB} = [B - A] = [(2, \ -1, \ 1) - (0, \ -2, \ 6)] = (2, \ 1, \ -5)$.

Según que los vectores $\left\{\vec{v}_r, \ \vec{v}_s, \ \vec{w}\right\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\left\{\vec{v}_r, \ \vec{v}_s, \ \vec{w}\right\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\left\{\vec{v}_r, \ \vec{v}_s, \ \vec{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 15 + 4 + 30 - 1 - 30 =$$

$$= 3 \neq 0 \Rightarrow Rang\left\{\vec{v}_r, \ \vec{v}_s, \ \vec{w}\right\} = 3 \Rightarrow \vec{v}_r, \ \vec{v}_s, \ \vec{w} \ no \ son \ coplanarios.$$

$$\underline{Las \ rectas \ r \ y \ s \ se \ cruzan}.$$

$c)$

El haz de planos β perpendiculares a la recta s tiene la siguiente ecuación general: $\beta \equiv 3x - 3y - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano γ que contiene al punto $P(1, \ 1, \ 1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv 3x - 3y - z + D = 0 \\ P(1, \ 1, \ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D$$

$$\underline{\gamma \equiv 3x - 3y - z + 1 = 0}.$$

****

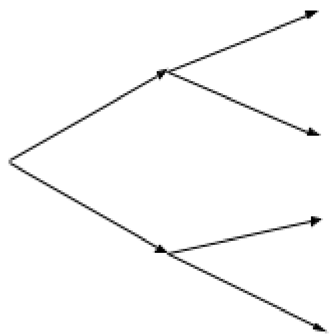
4º) En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75 % de los productos fabricados son de tipo A y el 25 % de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5 % de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2,5 % de las veces.

a) Si se fabrican 5.000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?

b) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6.000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

----

a)



$$P = P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(B/D) =$$

$$= 0,75 \cdot 0,025 + 0,25 \cdot 0,050 = 0,01875 + 0,01250 = 0,03125.$$

$$5.000 \cdot 0,03125 = 156,25.$$

$$\underline{Se\ espera\ que\ sean\ defectuosos\ 157\ productos}.$$

b)

La probabilidad de que un producto sea defectuoso es $p = 0,025$.

$$q = 1 - p = 1 - 0,025 = 0,975.$$

$$Media = \mu = n \cdot p = 6.000 \cdot 0,025 = 150.$$

$$Desviación\ típica = \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{6.000 \cdot 0,025 \cdot 0,975} = \sqrt{146,25} =$$

$$= 12,1.$$

$Datos$: $n = 6.000$; $\mu = 150$; $\sigma = 12,1$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 150}{12,1}$.

$$P = P(X > 160) = P\left(Z > \frac{160-150}{12,1}\right) = P\left(Z > \frac{10}{12,1}\right) = P(Z > 0,83) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0,83) = 1 - 0,7967 = \underline{0,2033}.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ haya\ más\ de\ 160\ defectuosos\ es\ 0,2033}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas. No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

OPCIÓN A

1º) Considere la matriz $A = (1\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)$.

$a)$ Calcule las potencias sucesivas $A^2,\ A^3,\ A^4$.

$b)$ ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor $n \in N$?

$a)$

$$A^2 = A \cdot A = (1\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \cdot (1\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) = \underline{(1\ 0\ 4\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = (1\ 0\ 4\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \cdot (1\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) = \underline{(1\ 0\ 6\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)}.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (1\ 0\ 6\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \cdot (1\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) = \underline{(1\ 0\ 8\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)}.$$

$b)$

Considerando la sucesión $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots$, que es una progresión aritmética de primer término 2, de diferencia 2.

El término general de una progresión aritmética es $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.

Aplicando la fórmula al caso que nos ocupa:

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2 + 2n - 2 = 2n.$$

$\underline{A^n = (1\ 0\ 2n\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ),\ \forall n \in N}.$

****

2º) a) Descomponga el número 10 en dos sumandos positivos de manera que la suma de uno de ellos más el doble del logaritmo neperiano del otro sea máxima.

b) Calcule dicha suma máxima.

----

a)

Sean los números x y $(10 - x)$.

$S(x) = x + 2L(10 - x)$.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo es que se anule su primera derivada.

$$S'(x) = 1 + 2 \cdot \frac{-1}{10-x} = 1 - \frac{2}{10-x} = \frac{10-x-2}{10-x} = \frac{8-x}{10-x}.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8-x}{10-x} = 0;\ \ 8 - x = 0 \Rightarrow x = 8.$$

Para diferenciar los máximos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera, se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$S''(x) = \frac{-1 \cdot (10-x) - (8-x) \cdot (-1)}{(10-x)^2} = \frac{-10+x+8-x}{(10-x)^2} = \frac{-2}{(10-x)^2}.$$

$$S''(8) = \frac{-2}{(10-8)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 8.$$

$\underline{Los\ números\ pedidos\ son\ 8\ y\ 2,\ respectivamente}.$

b)

$S = 8 + 2L2 = 8 + L2^2 = 8 + L4.$

$\underline{La\ suma\ máxima\ pedida\ es\ 8 + L4 \cong 9,386}.$

****

3º) $a)$ Calcule la siguiente integral indefinida: $I = \int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} \cdot dx$.

$b)$ Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

$a)$

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ 2x^2 + 1 = t \quad 4x \cdot dx = dt \quad x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot dt \right\} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot dt = \frac{1}{4} \cdot \int$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2}\sqrt{t} + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} \cdot dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 1} + C.}$$

$b)$

En el intervalo $(0, 2)$ todas las ordenadas de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$ son positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^2 f(x) \cdot dx = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} \cdot dx = \left[\frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 1} \right]_0^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 2^2 + 1} \right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 0^2 + 1} \right) = \frac{1}{2}\sqrt{9} - \frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\underline{S = 1\, u^2.}$$

****

4º) Considere el plano π dado por la ecuación $\pi\equiv 3x - 2y + z = 3$.

a) Estudie la posición relativa del plano π y de la recta $r\equiv\begin{cases} x + 3y + 3z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$.

b) En caso de que la recta r sea paralela al plano π, calcule la distancia entre ambos. En caso de que la recta r corte al plano π, calcule el punto de corte y el ángulo de corte entre ambos.

----

a)

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{matrix} 3x - 2y + z = 3 \\ x + 3y + 3z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{matrix}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango M = Rango M' = 2 ⇛ La recta está contenida en el plano.

2. -- Rango M =2, Rango M' = 3 ⇛ La recta es paralela al plano.

3. -- Rango M = Rango M' = 3 ⇛ La recta es secante al plano.

$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 1 - 9 + 4 = 14 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3.$

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$$

b)

Un vector normal del plano $\pi\equiv 3x - 2y + z - 3 = 0$ es $\vec{n} = (3, -2, 1)$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r\equiv\begin{cases} x + 3y + 3z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow y = 1 - 2\lambda;\ x + 3 - 6\lambda + 3\lambda = 0$

$x = -3 + 3\lambda \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Un vector director de r es $\vec{v_r} = (3, -2, 1)$, que es el mismo que $\vec{n}$.

Por ser el vector director de la recta paralelo (coincidente) al vector normal del plano:

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ perpendiculares\ (forman\ 90°)}.$

****

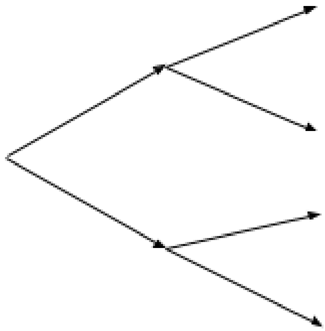
5º) Una máquina funciona en modo automático el 70 % de los días y el resto de los días funciona en modo manual. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo automático es 0,15. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo manual es 0,05.

a) Calcule la probabilidad de que no tenga ningún fallo.

b) Si un día tiene un fallo, ¿cuál es la probabilidad de que haya funcionado en modo manual?

----

a)



$$P = P(\overline{F}) = P(A \cap \overline{F}) + P(M \cap \overline{F}) = P(A) \cdot P(\overline{F}/A) + P(M) \cdot P(\overline{F}/M) =$$

$$= 0,7 \cdot 0,85 + 0,3 \cdot 0,95 = 0,595 + 0,285 = \underline{0,880}.$$

b)

$$P = P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M) \cdot P(F/M)}{1 - P(\overline{F})} = \frac{0,3 \cdot 0,05}{1 - 0,880} = \frac{0,015}{0,120} = \frac{15}{120} = \underline{0,125}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere el sistema de ecuaciones $\{x - y + z = 4a\, y + z =- 4 \quad x + 2z = a^2$ en función del parámetro a:

a) Justifique que el sistema nunca es compatible determinado.

b) Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

----

a)

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema nunca es compatible determinado cuando las matrices de coeficientes y ampliada no tienen el mismo rango.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1 \ - 1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,2\,)$ y $M' = \left(1 \ - 1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,2 \quad 4a \ - 4\,a^2\right)$.

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$|M| = |1 \ - 1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,2\,| = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$

El rango de la matriz de coeficientes en función de a es el siguiente:

$M' = \left(1 \ - 1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,2 \quad 4a \ - 4\,a^2\right) \Rightarrow \left\{F_3 \to F_3 - F_1\right\} \Rightarrow \left(1 \ - 1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\right.$

$\Rightarrow \left\{F_3 \to F_3 - F_2\right\} \Rightarrow \left(1 \ - 1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,0 \quad 4a \ - 4\,a^2 - 4a + 4\right) = \left[1 \ - 1\,1\,0\,1\,1\,0\right.$

.

$Para\ m = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.$

$Para\ m \neq 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$

$\underline{Queda\ justificado\ que\ el\ sistema\ nunca\ es\ compatible\ determinado}.$

b)

Como se ha probado en el apartado anterior:

$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ indeterminado\ para\ a = 2.}$

****

2º) Considere la función dada por $f(x) = \{ \quad e^{ax} \quad si\ x < 0\ a + b \cdot sen\, x\ \ si\ \ x \geq 0$. Determina los valores de $a\, y\, b$ para los cuales la función $f(x)$ es continua y derivable en $x = 0$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\ x = 0 \Rightarrow \{f(x) = e^{ax} = e^{0} = 1 \qquad f(x) = (a + b\cdot sen\,x) = a = f($

$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{a = 1}$.

La función resulta $f(x) = \{ \quad e^{x} \quad si\ x < 0\ 1 + b\cdot sen\,x\ si\ x\geq 0$.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando el correspondiente valor de b.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$f^{'}(x) = \{ \ e^{x}\ si\ x < 0\ b\cdot cos\,x\ si\ x\geq 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f^{'}(0) = \{1\ si\ x < 0\ b\ si\ x\geq 0$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{'}\left(0^{-}\right) = f^{'}\left(0^{+}\right) \Rightarrow \underline{b = 1}$.

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ x = 0\ para\ a = b = 1}$.

****

3º) a) Calcule la siguiente integral indefinida: $I = \int x \cdot e^{x} \cdot dx$.

b) Determine la primitiva de la función $f(x) = x \cdot e^{x}$ que pasa por el punto $P(0,\ 1)$.

----

a)

$$I = \int x \cdot e^{x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = x \rightarrow du = dx \quad e^{x} \cdot dx = dv \rightarrow v = e^{x} \right\} \Rightarrow x \cdot e^{x} - \int e^{x} \cdot dx =$$

$$= x \cdot e^{x} - e^{x} + C = e^{x}(x - 1) + C.$$

$$\underline{I = \int x \cdot e^{x} \cdot dx = e^{x}(x - 1) + C.}$$

b)

$F(x) = e^{x}(x - 1) + C.$

Por contener $F(x)$ al punto $P(0,\ 1)$ es $F(0) = 1$:

$F(0) = 1 \Rightarrow e^{0} \cdot (0 - 1) + C = 1;\ \ 1 \cdot (-1) + C = 1;\ \ -1 + C = 1 \Rightarrow C = 2$

.

$$\underline{F(x) = e^{x}(x - 1) + 2}.$$

****

4º) Considere el punto $P(0,\ 1,\ 2)$ y la recta $r\equiv\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$:

a) Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano π que es perpendicular a la recta r y pasa por el punto P.

b) Calcule la distancia del punto P al plano $\pi\equiv x + y + z = 5$.

----

a)

La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r\equiv\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -1 + \lambda \\ x - y = \end{cases}$$

$$y = -1 + \lambda - 2x = -1 + \lambda - \frac{4}{3} = -\frac{7}{3} + \lambda \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{7}{3} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (0,\ 1,\ 1)$.

El haz de planos β perpendiculares a r tiene la expresión $\beta\equiv y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene al punto $P(0,\ 1,\ 2)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta\equiv y + z + D = 0 \\ P(0,\ 1,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 2 + D = 0;\ \ 3 + D = 0 \Rightarrow D = -$$

.

$$\underline{\pi\equiv y + z - 3 = 0}.$$

b)

La distancia de un punto $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d\left(P_0, \pi\right) = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(0,\ 1,\ 2)$ y al plano $\pi\equiv x + y + z - 5 = 0$:

$$d(P, \pi) = \frac{|1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|0 + 1 + 2 - 5|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}\ unidades}.$$

****

5º) En la peña del Atlético de Madrid, el 70 % de sus miembros prefiere que Antoine Griezmann continúe jugando en el equipo durante la próxima temporada, el 50 % prefiere que Fernando Torres continúe jugando en el equipo la próxima temporada y el 30 % prefiere que ambos jugadores sigan jugando en el equipo la próxima temporada. Elegido al azar un miembro de la peña, se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que al menos alguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que ninguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que solo Fernando Torres siga jugando en el equipo la próxima temporada?

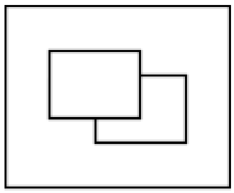
$Datos$: $P(G) = 0,7$; $P(T) = 0,5$; $P(G \cap T) = 0,3$.

a)

$$P = P(G \cup T) = P(G) + P(T) - P(G \cap T) = 0,7 + 0,5 - 0,3 = \underline{0,9}.$$

b)

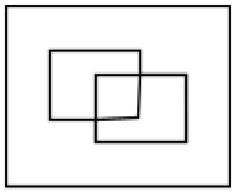
$$P(\overline{G} \cap \overline{T}) = 1 - P(G \cup T) = 1 - 0,9 = \underline{0,1}.$$



c)

$$P = P(T \cap \overline{G}) = P(T) - P(G \cap T) =$$

$$= 0,5 - 0,3 = \underline{0,2}$$



****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas. No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

OPCIÓN A

1º) Considere la matriz $A = (-\ 2\ 1\ 3\ -\ 2)$.

a) Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su inversa.

b) Determine la matriz X que cumple la ecuación $AX = A + A^t$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.

----

a)

$|A| = |-\ 2\ 1\ 3\ -\ 2| = 4 - 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible}$. C. q. c.

$A^t = (-\ 2\ 3\ 1\ -\ 2)$.

$Adj.\ de\ A^t = (-\ 2\ -\ 1\ -\ 3\ -\ 2) \Rightarrow \underline{A^{-1} = -\ (2\ 1\ 3\ 2)}$.

b)

$A \cdot X = A + A^t;\ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot \left(A + A^t\right);\ I \cdot X = A^{-1} \cdot \left(A + A^t\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot \left(A + A^t\right)}$.

$A + A^t = (-\ 2\ 1\ 3\ -\ 2) + (-\ 2\ 3\ 1\ -\ 2) = (-\ 4\ 4\ 4\ -\ 4)$.

$X = A^{-1} \cdot \left(A + A^t\right) = (2\ 1\ 3\ 2) \cdot (4\ -\ 4\ -\ 4\ 4) = \underline{(4\ -\ 4\ 4\ -\ 4) = 4 \cdot (1\ -\ 1\ 1\ -\ 1}$

.

****

2º) Calcule los siguientes límites:

$a)\ \left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right).$ $\qquad b)\ \frac{L(\cos x+sen\, x)}{x}.$

$a)$

$$\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)=\infty-\infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2-\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2-x^2+2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=\frac{4}{\infty+\infty}=\frac{4}{\infty}=0$$

.

$$\underline{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)=0.}$$

$b)$

$$\frac{L(\cos x+sen\, x)}{x}=\frac{L(\cos 0+sen\, 0)}{0}=\frac{L(1+0)}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{-sen\, x+\cos x}{\cos x+sen\, x}}{1}=\frac{-sen\, x+\cos x}{\cos x+sen\, x}=\frac{-sen\, 0+\cos 0}{\cos 0+sen\, 0}=\frac{-0+1}{1+0}=\frac{1}{1}=1.$$

$$\underline{\frac{L(\cos x+sen\, x)}{x}=1.}$$

****

3º) $a)$ Calcule la siguiente integral indefinida: $I = \int sen\, x \cdot e^{\cos \cos x} \cdot dx$.

$b)$ Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$, y la gráfica de la función $f(x) = sen\, x \cdot e^{\cos \cos x}$.

$a)$

$$I = \int sen\, x \cdot e^{\cos \cos x} \cdot dx \Rightarrow \{\cos \cos x = t \;\; sen\, x \cdot dx = -\, dt\} \Rightarrow -\int e^{t} \cdot dt = -\, e^{\cos \cos x}$$

.

$$\underline{I = \int sen\, x \cdot e^{\cos \cos x} \cdot dx = -\, e^{\cos \cos x} + C.}$$

$b)$

En el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ todas las ordenadas de la función $f(x) = sen\, x \cdot e^{\cos \cos x}$ son positivas, por lo cual la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(sen\, x \cdot e^{\cos \cos x}\right) \cdot dx = \left[-\, e^{\cos \cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[e^{\cos \cos x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

$$= e^{\cos \cos 0} - e^{\cos \cos \frac{\pi}{2}} = e^{1} - e^{0} = e - 1.$$

$$\underline{S = (e - 1)\, u^2}.$$

****

4º) Considere las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x + 3y + 5z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$.

a) Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) Determine la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano π que contiene a ambas rectas.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x + 3y + 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 - 3\lambda \\ x + 3y = 1 - 5 \end{cases}$

$\Rightarrow 7y = -1 - 7\lambda \Rightarrow y = -\frac{1}{7} - \lambda; \;\; x + 3 \cdot \left(-\frac{1}{7} - \lambda\right) = 1 - 5\lambda;$

$x - \frac{3}{7} - 3\lambda = 1 - 5\lambda; \;\; x = \frac{10}{7} - 2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{10}{7} - 2\lambda \\ y = -\frac{1}{7} - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow$

.

$s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \vec{v_s} = (2,\ 1,\ -1).$

Las componentes de $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$ son proporcionales.

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ paralelas}.$

b)

Un punto de r es $P\left(\frac{10}{7},\ -\frac{1}{7},\ 0\right)$. Un punto de s es $Q(5,\ 0,\ 0)$.

$\vec{PQ} = [Q - P] = \left[Q(5,\ 0,\ 0) - \left(\frac{10}{7},\ -\frac{1}{7},\ 0\right)\right] = \left(\frac{25}{7},\ \frac{1}{7},\ 0\right).$

Vectores directores del plano son $\vec{v_s} = (2,\ 1,\ -1)$ y $\vec{w} = 7\vec{PQ} = (25,\ 1,\ 0)$.

$\pi\left(Q; \vec{v_s},\ \vec{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 25 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

$-25y + 2z - 25z + (x - 5) = 0; \;\; x - 5 - 25y - 23z = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\pi \equiv x - 25y - 23z - 5 = 0}.$

****

5º) En una clase hay 40 estudiantes, de los cuales 25 son chicas y el resto son chicos. Además, 30 estudiantes han aprobado las matemáticas, de los cuales 10 son chicos.

a) Elegido un estudiante al azar, se pide:

a_1) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya aprobado las matemáticas?

a_2) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica y haya aprobado las matemáticas?

b) Si se elige un estudiante que ha aprobado las matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que sea una chica?

----

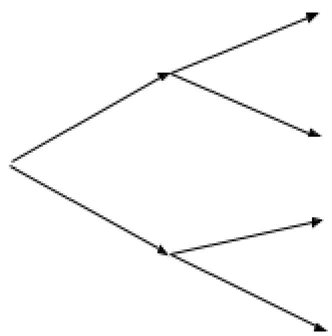
a)

$Mujer \Rightarrow P = \frac{25}{40} = 0,625 \Rightarrow \{Aprueba \rightarrow P = \frac{20}{25} = 0,800 \quad No\ aprueba \rightarrow P = \frac{5}{25} = 0,$

.

$Hombre \Rightarrow P = \frac{15}{40} = 0,375 \Rightarrow \{Aprueba \rightarrow P = \frac{10}{15} = 0,667 \quad No\ aprueba \rightarrow P = \frac{5}{15} =$

.



a_1)

$$P = P(\overline{A}) = P(M) \cdot P(\overline{A}/M) + P(H) \cdot P(\overline{A}/H) =$$

$$= 0,625 \cdot 0,200 + 0,375 \cdot 0,333 = 0,125 + 0,125 = \underline{0,250}.$$

a_2)

$$P = P(M \cap A) = P(M) \cdot P(A/M) = 0,625 \cdot 0,800 = \underline{0,500}$$

b)

$$P = P(M/A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{P(M) \cdot P(A/M)}{1 - P(\overline{A})} = \frac{0,625 \cdot 0,800}{1 - 0,25} = \frac{0,500}{0,75} = \underline{0,6667}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere el sistema de ecuaciones homogéneo $\{ax + y + az = 0 \quad x + y + az = 0 \quad 2x + (a - 1)y + az = 0$ en función del parámetro a:

a) Determine los valores del parámetro a para los que el sistema tiene únicamente la solución trivial $(0,\ 0,\ 0)$.

b) Si es posible, resuélvalo para el valor del parámetro $a = 2$.

----

a)

La matriz de coeficientes es $M = (a\ 1\ a\ 1\ 1\ a\ 2\ a - 1\ a\ )$.

Por tratarse de un sistema lineal homogéneo, a efector de rango, las matrices de coeficientes y ampliada son equivalente.

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = |a\ 1\ a\ 1\ 1\ a\ 2\ a - 1\ a\ | = a^2 + a(a - 1) + 2a - 2a - a - a^2(a - 1) =$$

$$= a^2 + a^2 - a - a - a^3 + a^2 =- a^3 + 3a^2 - 2a =- a\left(a^2 - 3a + 2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 0;\ \ a^2 - 3a + 2 = 0;\ \ a = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{3\pm1}{2} \Rightarrow a_2 = 1,\ a_3 = 2.$$

$\forall a \in R - \{0,\ 1,\ 2\} \Rightarrow Rang\ M = 3.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e iguales al número de incógnitas; en el caso que nos ocupa el número de incógnitas es tres, por lo cual:

$\underline{Es\ sistema\ tiene\ \text{ú}nicamente\ la\ soluci\text{ó}n\ trivial\ \forall a \in R - \{0,\ 1,\ 2\}}.$

b)

$Para\ a = 2 \Rightarrow M = (2\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 2\ ) \Rightarrow \left\{C_2 = 2C_2\right\} \Rightarrow Rang\ M = 2.$

$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2 < n^{\underline{o}}\ inc\text{ó}g. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

Para $a = 2$ el sistema resulta $\{2x + y + 2z = 0\ x + y + 2z = 0\ \ 2x + y + 2z = 0$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\{2x + y + 2z = 0\ x + y + 2z = 0$. Haciendo $z = \lambda$:

$2x + y =- 2\lambda \ \ x + y =- 2\lambda \} \ 2x + y =- 2\lambda \ \ - x - y = 2\lambda \} \Rightarrow x = 0; \ \ y =- 2\lambda$
.

$\underline{Solución: x = 0, \ \ y =- 2\lambda, \ \ z = \lambda, \ \ \forall\lambda\in R}.$

****

2º) Considere la función dada por $f(x) = x\sqrt{18 - x^2}$ con $-4 < x < 4$.

a) Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus puntos críticos.

b) Justifique si la función $f(x)$ tiene algún máximo o mínimo.

----

a)

$$f(x) = x\sqrt{18 - x^2} = \sqrt{18x^2 - x^4}.$$

$$f'(x) = \frac{36x-4x^3}{2\sqrt{18x^2-x^4}} = \frac{4x(9-x^2)}{2x\sqrt{18-x^2}} \Rightarrow \underline{f'(x) = \frac{2(9-x^2)}{\sqrt{18-x^2}}}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un punto crítico (máximo o mínimo) es que se anule su primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(9-x^2)}{\sqrt{18-x^2}} = 0;\ \ 2(9 - x^2) = 0;\ \ 9 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 3.$$

$$f(-3) = -3\cdot\sqrt{18 - (-3)^2} = -3\cdot\sqrt{18 - 9} = -3\sqrt{9} = -9.$$

$$f(3) = 3\cdot\sqrt{18 - 3^2} = 3\cdot\sqrt{18 - 9} = 3\sqrt{9} = 9.$$

$$\underline{Son\ puntos\ críticos\ de\ la\ función\ A(-3, -9)\ y\ B(3, 9)}.$$

b)

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 2\cdot\frac{-2x\cdot\sqrt{18-x^2}-(9-x^2)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{18-x^2}}}{\left(\sqrt{18-x^2}\right)^2} = 2\cdot\frac{-2x\cdot\sqrt{18-x^2}+\frac{x(9-x^2)}{\sqrt{18-x^2}}}{18-x^2} =$$

$$= 2\cdot\frac{\frac{-2x(18-x^2)+x(9-x^2)}{\sqrt{18-x^2}}}{18-x^2} = 2\cdot\frac{-36x+2x^3+9x-x^3}{(18-x^2)\sqrt{18-x^2}} = 2\cdot\frac{x^3-27x}{(18-x^2)\sqrt{18-x^2}}.$$

$$f''(-3) = 2\cdot\frac{(-3)^3-27\cdot(-3)}{(18-9)\sqrt{18-9}} = 2\cdot\frac{-27+81}{9\cdot 3} = 2\cdot(-1 + 3) = 4 > 0 \Rightarrow Mínimo$$

.

$$f''(3) = 2 \cdot \frac{3^3 - 27 \cdot 3}{(18-9)\sqrt{18-9}} = 2 \cdot \frac{27-81}{9 \cdot 3} = 2 \cdot (1 - 3) = -4 < 0 \Rightarrow Máximo$$

$\underline{El\,punto\,A(-3, -9)\,es\,un\,mínimo\,y\,el\,B(3,\,9)\,un\,máximo}.$

Este apartado se puede resolver de una forma más sencilla teniendo en cuenta que la función $f(x)$ continua en su dominio puede estudiarse el crecimiento o decrecimiento y un punto del intervalo $(-3,\ 3)$, por ejemplo, para $x = 0$.

$f'(0) = \frac{2(9-0)}{\sqrt{18-0}} > 0 \Rightarrow$ Creciente para $x = 0$, de donde se llega a la conclusión anterior, que el mínimo es $A(-3,\ -3)$ y el máximo $B(3,\ 3)$.

****

3º) a) Calcule la siguiente integral indefinida: $I = \int x \cdot Lx \cdot dx$.

b) Determine la primitiva de la función $f(x) = x \cdot Lx$ que pasa por el punto $P(1,\ 0)$.

----

a)

$$I = \int x \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \; x \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \right\} \Rightarrow Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot d$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1) + C.$$

$$\underline{I = \int x \cdot Lx \cdot dx = \frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1) + C.}$$

b)

$$F(x) = \int f(x) dx = \frac{x^2}{4} \cdot (2Lx - 1) + C = \int x \cdot Lx \cdot dx = \frac{x^2}{4}(2Lx - 1) + C.$$

Por pasar $F(x)$ por $P(1,\ 0)$ es $F(1) = 0$:

$$F(1) = 0 \Rightarrow \frac{1^2}{4}(2L1 - 1) + C = 0; \quad \frac{1}{4}(2 \cdot 0 - 1) + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{4}.$$

$$\underline{F(x) = \frac{1}{4}\left[x^2(2Lx - 1) + 1\right]}.$$

****

4º) Considere los puntos $P(1,\ 1,\ 3)$ y $Q(1,\ 5,\ 0)$ la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z = -3 \\ -x + y = 4 \end{cases}$:

$a)$ Compruebe que el punto P no está en la recta r y que el punto Q si lo está.

$b)$ Determine el punto R de la recta r tal que el triángulo PQR sea rectángulo en P (es decir, con ángulo recto en el vértice P).

$c)$ Calcule el área de dicho triángulo PQR.

$a)$

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z = -3 \\ -x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 + 2\lambda \\ -x \end{cases}$$

$$y = 4 + x = 4 + 1 + 2\lambda = 5 + 2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 5 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

$$P(1,\ 1,\ 3) \in r \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 + 2\lambda \\ 1 = 5 + 2\lambda \\ 3 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda \notin R \Rightarrow \underline{P(1,\ 1,\ 3) \notin r}.$$

$$Q(1,\ 5,\ 0) \in r \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 + 2\lambda \\ 5 = 5 + 2\lambda \\ 0 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \underline{Q(1,\ 5,\ 0) \in r}.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ P\ no\ pertenece\ a\ r\ y\ Q\ si}.$$

$b)$

Los puntos de la recta r tiene por expresión general $R(1 + 2\lambda,\ 5 + 2\lambda,\ \lambda)$.

Los puntos $P,\ Q\ y\ R$ determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(1,\ 5,\ 0) - (1,\ 1,\ 3)] = (0,\ 4,\ -3).$$

$$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(1 + 2\lambda,\ 5 + 2\lambda,\ \lambda) - (1,\ 1,\ 3)] = (2\lambda,\ 4 + 2\lambda,\ \lambda - 3).$$

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \Rightarrow (0,\ 4,\ -3) \cdot (2\lambda,\ 4 + 2\lambda,\ \lambda - 3) = 16 + 8\lambda - 3\lambda + 9 = 0;$$

$$5\lambda + 25 = 0;\ \lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -5.$$

$\lambda =- 5 \Rightarrow R \Rightarrow \{x = 1 - 10 =- 9 \; y = 5 - 10 =- 5 \; z =- 5 \quad \} \Rightarrow \underline{R(- 9}$

.

$c)$

Una forma de hallar el área del triángulo es por la fórmula básica del área de un triángulo como base por altura dividido por dos.

$$\overrightarrow{PR} = (- 10, \ - 6, \ - 8).$$

$$S = \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PR}\right|}{2} = \frac{\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2} \cdot \sqrt{(-10)^2+(-6)^2+(-8)^2}}{2} = \frac{\sqrt{16+9} \cdot \sqrt{100+36+64}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{200}}{2} = \frac{5 \cdot 10 \cdot \sqrt{2}}{2} = 25\sqrt{2}.$$

$$\underline{S_{PQR} = 25\sqrt{2}\, u^2.}$$

Otra forma de hallar el área del triángulo es la siguiente:

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2} \| i \; j \; k \; 0 \; 4 \; - 3 \; - 10 \; - 6 \; - 8 \| = \| i \; j \; k \; 0 \; - 4 \; 3 \; 5 \; 3 \; 4 \| =$$

$$= |- 16i + 15j + 20k - 9i| = |- 25i + 15j + 20k| = 5 \cdot |- 5i + 3j + 4k| =$$

$$= 5 \cdot \sqrt{(- 5)^2 + 3^2 + 4^2} = 5 \cdot \sqrt{25 + 9 + 16} = 5 \cdot \sqrt{50} = 5 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 25\sqrt{2}.$$

$$\underline{S_{PQR} = 25\sqrt{2}\, u^2.}$$

****

5º) Realizada una encuesta entre los habitantes de una ciudad, se ha llegado a la conclusión de que el 40 % de sus habitaciones lee habitualmente el periódico local, el 30 % lee revistas del corazón y el 20 % lee ambos tipos de publicaciones. Elegido un habitante al azar, se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que lea al menos alguno de los dos tipos de publicaciones?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no lea ninguno de los dos tipos de publicaciones?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que lea solo revistas del corazón?

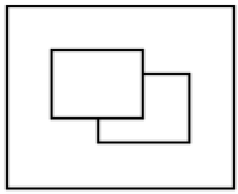
$Datos$: $Periódico$: $P(P) = 0,4$; $Revistas$: $P(R) = 0,3$; $Ambos$: $P(P \cap R) = 0,2$.

a)

$$P = P(P \cup R) = P(P) + P(R) - P(P \cap R) = 0,4 + 0,3 - 0,2 = \underline{0,5}.$$

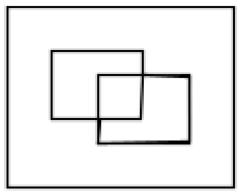
b)

$$P = P(\overline{P} \cap \overline{R}) = 1 - P(P \cup R) = 1 - 0,5 = \underline{0,5}.$$



c)

$$P = P(R \cap \overline{P}) = P(R) - P(P \cap R) = 0,3 - 0,2 = \underline{0,1}.$$



****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones, A o B.

OPCIÓN A

1º) Estudia el sistema de ecuaciones $\{(a-3)x+(a-2)y+2z=-1 \quad (2a-6)x+(3a-6)y+5z=-1 \quad (3-a)$ dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M=(a-3\ a-2\ 2\ 2a-6\ 3a-6\ 5\ 3-a\ 0\ a-2\ ),\ M'=\Big(a-3\ a-2\ 2\ 2a-6$
.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M|=|a-3\ a-2\ 2\ 2a-6\ 3a-6\ 5\ 3-a\ 0\ a-2\ |=|a-3\ a-2\ 2\ 2(a-$

$=3(a-3)(a-2)^2+5(a-2)(3-a)-6(a-2)(3-a)-2(a-3)(a-2)^2=$

$=(a-3)(a-2)^2-(a-2)(3-a)=(a-3)(a-2)^2+(a-2)(a-3)=$

$=(a-3)(a-2)[(a-2)+1]=(a-1)(a-2)(a-3)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3.$

$Para\ \{a\neq1\ a\neq2\ a\neq3\ \}\Rightarrow Rang\ M\ =\ Rang\ M'\ =\ 3\ =\ nº\ incóg.\Rightarrow S.\ C.\ D.$

$Para\ a=1\Rightarrow M'=(-2\ \ -1\ 2\ \ -4\ \ -3\ 5\ 2\ 0\ \ -1\ \ \ -1\ \ -1\ 2\ )\Rightarrow\Big\{C_1-$

$\Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = (-\ 1\ 0\ 2\ \ -\ 2\ 0\ 5\ 1\ 0\ 0\ \ \ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 1\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C$

$\Rightarrow |-\ 1\ 2\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 5\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ | = -\ 5 - 2 + 5 + 4 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$Para\ a = 3 \Rightarrow M' = (0\ 1\ 2\ 0\ 3\ 5\ 0\ 0\ 1\ \ \ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 2\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 2\ \ -\ 1\ 3\ 5\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 2\ | = 10 - 3 + 1 - 12 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ \{a = 2\ a = 3\ \} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

Para $a = 1$ el sistema resulta $\{-\ 2x - y + 2z = -\ 1\ \ \ \ -\ 4x - 3y + 5z = -\ 1\ 2x - z = 2$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se desprecia la segunda ecuación y se hace $x = \lambda$:

$z = -\ 2 + 2\lambda;\ \ -\ 2\lambda - y - 4 + 4\lambda = -\ 1 \Rightarrow y = -\ 3 + 2\lambda.$

$\underline{Solución: x = \lambda,\ \ y = -\ 3 + 2\lambda,\ \ z = -\ 2 + 2\lambda,\ \ \forall\lambda \in R.}$

Se resuelve ahora para $a \neq 1,\ a \neq 2\ y\ a \neq 3$ por el método de Gauss:

$M' = \left(a - 3\ a - 2\ 2\ 2a - 6\ 3a - 6\ 5\ 3 - a\ 0\ a - 2\ \ \ \ -\ 1\ \ -\ 1\ a^2 - 4a + 5\right) \Rightarrow \{F$

$\Rightarrow \left(a - 3\ a - 2\ 2\ 0\ a - 2\ 1\ 0\ a - 2\ a\ \ \ \ -\ 1\ 1\ a^2 - 4a + 4\right) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(a - 3\ a - 2\ 2\ 0\ a - 2\ 1\ 0\ 0\ a - 1\ \ \ \ -\ 1\ 1\ a^2 - 4a + 3\right) \Rightarrow z = \frac{a^2-4a+3}{a-1} = \frac{(a-1)(a-}{a-1}$
.

$(a - 2)y + a - 3 = 1;\ \ (a - 2)y = 4 - a \Rightarrow y = \frac{4-a}{a-2}.$

$(a - 3)x + (a - 2)\frac{4-a}{a-2} + 2(a - 3) = -\ 1;\ (a - 3)x + 4 - a + 2a - 6 = -\ 1;$

$(a - 3)x + a - 2 = -\ 1;\ \ (a - 3)x + a - 2 = 1 - a \Rightarrow x = \frac{1-a}{a-3}.$

$Solución$: $x = \frac{1-a}{a-3}$, $y = \frac{4-a}{a-2}$, $z = a - 3$, $\forall a \in R - \{2, 3\}$.

****

2º) Halla el simétrico del punto $P(2,\ 5,\ 2)$ respecto de la recta $r\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r\equiv\{x=-\ 1\ +\ 2\lambda\ y\ =\ 2\ -\ \lambda\quad z\ =-\ 1\ +\ 2\lambda$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r}=(2,\ \ -\ 1,\ 2)$.

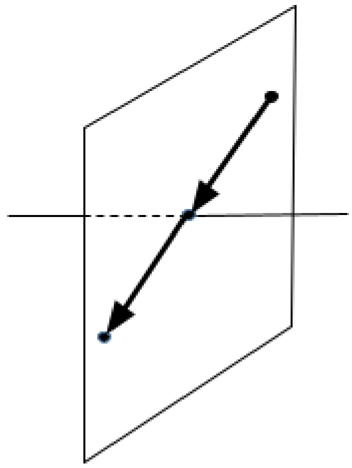
El haz de planos perpendiculares a r es $\beta\equiv 2x\ -\ y\ +\ 2z\ +\ D\ =\ 0$.

El plano $\alpha\in\beta$ que contiene al punto $P(2,\ 5,\ 2\ )$ es el siguiente:

$\beta\equiv 2x\ -\ y\ +\ 2z\ +\ D\ =\ 0\qquad P(2,\ 5,\ 2\ )\ \}\Rightarrow 2\cdot 2\ -\ 5\ +\ 2\cdot 2\ +\ D\ =\ 0;\ \ 4\ -$

$3\ +\ D\ =\ 0;\ \ D\ =-\ 3\Rightarrow\alpha\equiv 2x\ -\ y\ +\ 2z\ -\ 3\ =\ 0.$

El punto B intersección de r y α es el siguiente:



$\alpha\equiv 2x\ -\ y\ +\ 2z\ -\ 3\ =\ 0\qquad r\equiv\{x\ =-\ 1\ +\ 2\lambda\ y\ =\ 2\ -\ \lambda\quad z\ =-\ 1\ +\ 2\lambda\ \}$

$2(-\ 1\ +\ 2\lambda)-(2\ -\ \lambda)+\ 2(-\ 1\ +\ 2\lambda)-\ 3\ =\ 0;$

$-\ 2\ +\ 4\lambda\ -\ 2\ +\ \lambda\ -\ 2\ +\ 4\lambda\ -\ 3\ =\ 0;\ \ 9\lambda\ -\ 9\ =\ 0;\ \ \lambda\ -\ 1\ =\ 0\Rightarrow\lambda\ =\ 1.$

$\{x\ =-\ 1\ +\ 2\lambda\ y\ =\ 2\ -\ \lambda\quad z\ =-\ 1\ +\ 2\lambda\ \}\Rightarrow\lambda\ =\ 1\Rightarrow\{x\ =-\ 1\ +\ 2\ =\ 1\ y\ =\ 2\ -\ 1\ =$

.

Para que P' sea el simétrico de P con respecto a r tiene que cumplirse que:

$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{BP'}\Rightarrow[B\ -\ P]=\left[P'\ -\ B\right];$

$[(1,\ 1,\ 1)-(2,\ 5,\ 2\ )]=[(x,\ y,\ z)-(1,\ 1,\ 1)];$

$(-\ 1,\ \ -\ 4,\ \ -\ 1)=(x\ -\ 1,\ y\ -\ 1,\ z\ -\ 1)\Rightarrow\{x\ -\ 1\ =-\ 1\rightarrow x\ =\ 0\quad y\ -\ 1\ =-\ 4-$

.

****

3º) Demuestra que existe $a\in(0,\ 2)$ tal que $f^{'}(a) = 1$, siendo la función $f(x)$ de expresión $f(x) = sen\ \frac{\pi+\pi x}{2}\cdot cos\ \frac{\pi x}{2}\cdot L\left(2e^{x} + 2x - x^{2}\right)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

$$f^{'}(x) = \frac{\pi}{2}\cdot cos\ \frac{\pi+\pi x}{2}\cdot cos\ \frac{\pi x}{2}\cdot L\left(2e^{x} + 2x - x^{2}\right) -$$

$$- sen\ \frac{\pi+\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot sen\ \frac{\pi x}{2}\cdot L\left(2e^{x} + 2x - x^{2}\right) + sen\ \frac{\pi+\pi x}{2}\cdot cos\ \frac{\pi x}{2}\cdot\frac{2e^{x}+2-2x}{2e^{x}+2x-x^{2}}.$$

Las funciones $f(x)$ y $f^{'}(x)$ son continuas y derivables en el intervalo $(0,\ 2)$.

$$f^{'}(0) = \frac{\pi}{2}\cdot cos\ \frac{\pi}{2}\cdot cos\ 0\cdot L\ (2 + 0 - 0) -$$

$$- sen\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot sen\ 0\cdot L\ (2 + 0 - 0) + sen\ \frac{\pi}{2}\cdot cos\ 0\cdot\frac{2+2-0}{2+0-0} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 0\cdot 1\cdot L\ 2 - 1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 0\cdot L\ 2 + 1\cdot 1\cdot 2 = 0 + 0 + 2 = 2$$

$$f^{'}(1) = \frac{\pi}{2}\cdot cos\ \frac{\pi+\pi}{2}\cdot cos\ \frac{\pi}{2}\cdot L\ (2e + 2 - 1) -$$

$$- sen\ \frac{\pi+\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot sen\ \frac{\pi}{2}\cdot L\ (2e + 2 - 1) + sen\ \frac{\pi+\pi}{2}\cdot cos\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2e+2-2}{2e+2-1} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot cos\ \pi\cdot 0\cdot L\ (2e + 1) - 0\cdot\frac{\pi}{2}\cdot sen\ \frac{\pi}{2}\cdot L\ (2e + 2 - 1) + 0\cdot cos\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2e+2-2}{2e+2-1} =$$

$$= 0 - 0 + 0 = 0.$$

En el intervalo $(0,\ 1) \in (0,\ 2)$ le es aplicable a $f^{'}(x)$ el teorema de los Valores Intermedios o propiedad de Darboux que dice: “si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,\ b]$ y un número k está comprendido entre los valores extremos de la función, o sea, $f(a)\leq k\leq f(b)$ o $f(a)\geq k\geq f(b)$, entonces existe un valor $c\in[a,\ b]$ tal que $f(c) = k$”.

Como quiera que es $f^{'}(0) = 2 > 1 > f^{'}(1) = 0$:

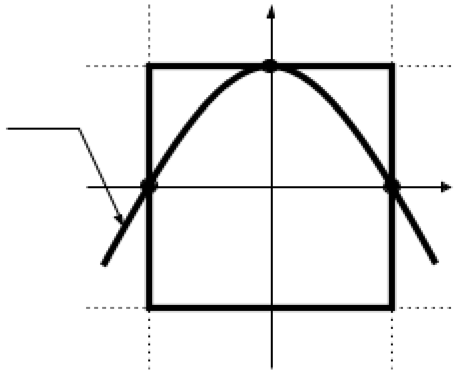
$$\underline{\exists a\in(0,\ 2)\ tal\ que\ f^{'}(a) = 1,\ como\ teníamos\ que\ demostrar}.$$

****

4º) La gráfica de la función $f(x) = \cos cos \frac{\pi x}{2}$ divide al cuadrado de centro $O(0,\ 0)$ y lado 2 en tres regiones. Calcula el área de cada una de esas tres regiones.

Teniendo en cuenta que $f(0) = 1;\ f(-1) = f(1) = 0$, la representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la figura adjunta.

De la observación de la figura se deducen las superficies a calcular, que son las siguientes:



$$S_1 = S_3 = \int_0^1 [1 - f(x)]\cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \cos cos \frac{\pi x}{2}\right)\cdot dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \cos cos \frac{\pi x}{2} \cdot dx =$$

$$= [x]_0^1 - A = 1 - 0 - A = 1 - A = S_1. \quad (*)$$

$$A = \int_0^1 \cos cos \frac{\pi x}{2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ x = 1 \to t = \frac{\pi}{2}\ x = 0 \to t = 0 \right\} \Rightarrow \frac{2}{\pi}\cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos cos\, t \cdot dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot [sen\, t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\cdot\left(sen\,\frac{\pi}{2} - sen\, 0\right) = \frac{2}{\pi}\cdot(1 - 0) = \frac{2}{\pi}.$$

Sustituyendo el valor obtenido en (*):

$$S_1 = 1 - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi-2}{\pi}.$$

$$\underline{S_1 = S_3 = \frac{\pi-2}{\pi}\, u^2 \cong 0,36\, u^2.}$$

La superficie S_2 puede obtenerse de forma sencilla restando a la superficie del cuadrado las superficies $S_1\ y\ S_3$; no obstante se resuelve por integrales.

$$S_2 = \int_{-1}^{1} [f(x) - (-1)]\cdot dx = \int_{-1}^{1} \left(1 + \cos cos \frac{\pi x}{2}\right)\cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx + \int_{-1}^{1} \cos cos \frac{\pi x}{2} \cdot dx = [x]_{-1}^{1} + B = 1 - (-1) + B = 2 + B = S_2.$$

(**)

$$B = \int_{-1}^{1} \cos cos \frac{\pi x}{2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ x = 1 \to t = \frac{\pi}{2} \; x = -1 \to t = -\frac{\pi}{2} \right\} \Rightarrow \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos cos\, t \cdot dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot [sen\, t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \left[sen \frac{\pi}{2} - sen \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \left(sen \frac{\pi}{2} + sen \frac{\pi}{2} \right) = \frac{4}{\pi}.$$

Sustituyendo el valor obtenido en (**):

$$S_2 = 2 + \frac{4}{\pi} = \frac{2\pi+4}{\pi}.$$

$$\underline{S_2 = \frac{2\pi+4}{\pi} u^2 \cong 3,27\, u^2.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Siendo la matriz $A = (t\ 2\ t + 2\ \ -t\ t\ 0\ 0\ 1\ 2\ )$, calcula el valor del parámetro t para que se cumpla la igualdad $\left|A^{-1}\right| =- 1$.

$$\left|A^{-1}\right| = \left|\frac{1}{A}\right| = \frac{1}{|A|} =- 1 \Rightarrow |A| =- 1.$$

$$|A| = |t\ 2\ t + 2\ \ -t\ t\ 0\ 0\ 1\ 2\ | = 2t^2 - t(t + 2) + 4t = 2t^2 - t^2 - 2t + 4t =- 1;$$

$$t^2 + 2t =- 1;\ \ t^2 + 2t + 1 = 0;\ \ (t + 1)^2 = 0 \Rightarrow t =- 1.$$

$$\underline{\left|A^{-1}\right| =- 1\ para\ t =- 1}.$$

****

2º) Halla la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas de ecuaciones $r\equiv\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+z-5=0 \end{cases}$ y $s\equiv\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{1}$.

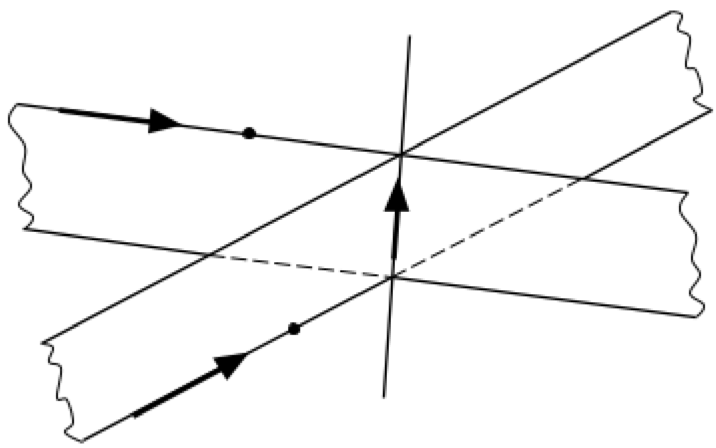
La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r\equiv\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+z-5=0 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda \Rightarrow z=5-2\lambda;\ \ y=3-x-z=$$

$$=3-\lambda-5+2\lambda=-2+\lambda \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=5-2\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $A(0,\ -2,\ 5)$ y $\vec{v_r}=(1,\ 1,\ -2)$.

Un punto y un vector director de s son $B(2,\ -3,\ 1)$ y $\vec{v_s}=(-2,\ 1,\ 1)$.



Un vector $\vec{w}$ perpendicular a los vectores $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de estos vectores:

$$\vec{w'}=\vec{v_r}\wedge\vec{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=i+4j+k+2k+2i-j=3i+3j+3k$$

$$\Rightarrow \vec{w}=(1,\ 1,\ 1).$$

Determinamos dos planos π_1 y π_2 de las siguientes características:

$$\pi_1\left(A;\ \vec{v_r},\ \vec{w}\right)\equiv\begin{vmatrix} x & y+2 & z-5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

$$x-2(y+2)+(z-5)-(z-5)+2x-(y+2)=0;$$

$3x - 3(y+2) = 0;\ \ x - (y+2) = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x - y - 2 = 0.$

$$\pi_2\left(B;\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$(x-2) + (y+3) - 2(z-1) - (z-1) - (x-2) + 2(y+3) = 0;$

$3(y+3) - 3(z-1) = 0;\ \ (y+3) - (z-1) = 0;\ \ y + 3 - z + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_2 \equiv y - z + 4 = 0.$

La recta pedida t es la intersección de los planos obtenidos anteriormente, π_1 y π_2: $t \equiv \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \end{cases}.$

Para expresar t en función continua hacemos $y = \lambda$:

$x = 2 + \lambda;\ \ z = 4 + \lambda \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}.$

La expresión de t dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{t \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{1}}.$$

****

3º) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+3x-4} \cdot dx.$ $\qquad$ $I_2 = \int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} \cdot dx.$

$$I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+3x-4} \cdot dx.$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0; \; x = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-3\pm5}{2} \Rightarrow x_1 =- 4, \; x_2 = 1.$$

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1).$$

$$\frac{x+1}{x^2+3x-4} = \frac{M}{x+4} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx-M+Nx+4N}{(x+4)(x-1)} = \frac{(M+N)x+(-M+4N)}{x^2+3x-4} \Rightarrow \quad M + N = 1 \; - M + 4N$$

$$\Rightarrow 5N = 2; \; N = \frac{2}{5}; \; M + \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow M = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

$$I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+3x-4} \cdot dx = \int \left(\frac{\frac{3}{5}}{x+4} + \frac{\frac{2}{5}}{x-1} \right) \cdot dx = \frac{3}{5} \cdot L|x + 4| + \frac{2}{5} \cdot L|x - 1| + C =$$

$$= L\sqrt[5]{(|x + 4|)^3 \cdot (x - 1)^2} + C.$$

$$\underline{I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+3x-4} \cdot dx = L\sqrt[5]{(|x + 4|)^3 \cdot (x - 1)^2} + C.}$$

$$I = \int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} \cdot dx = \int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ 1 + e^x = t \;\; e^x \cdot dx = dt \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t^2} \cdot dt =$$

$$= \int t^{-2} \cdot dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C =- \frac{1}{t} + C =- \frac{1}{1+e^x} + C.$$

$$\underline{I_2 = \int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} \cdot dx =- \frac{1}{1+e^x} + C.}$$

****

4º) Halla los extremos relativos y los puntos de inflexión de la siguiente función: $f(x) = x^4 - x^2$.

Por ser $f(-x) = f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = 4x^3 - 2x.$ $\qquad f''(x) = 12x^2 - 2.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 2x = 0;\ 2x\left(2x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0;$

$2x^2 - 1 = 0;\ x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$

$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Máximo: O(0,\ 0)}.$

$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 12 \cdot \frac{1}{2} - 2 = 4 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{Mínimo: P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{4}\right)}.$

Por simetría con respecto al eje Y: $\underline{Mínimo: Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{4}\right)}$.

Una función tiene un punto de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada, siendo distinto de cero el valor de la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 2 = 0;\ 6x^2 - 1 = 0;\ x^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{6};\ x_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}.$

$f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''(x_1) \neq 0 \; y \; f'''(x_2) \neq 0 \Rightarrow P.\ I.\ para\ x = x_1\ y\ x = x_2.$

Siendo $x^2 = \frac{1}{6}$ es $f\left(\mp \frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{1}{36} - \frac{1}{6} = \frac{1-6}{36} = -\frac{5}{36}.$

Teniendo en cuenta la simetría de la función con respecto al eje Y:

$\underline{Puntos\ de\ inflexión: M\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \ -\frac{5}{36}\right)\ y\ N\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{5}{36}\right)}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones, A o B.

OPCIÓN A

1º) Estudia el sistema de ecuaciones $\{x + 2y = 1 \quad x + (a + 4)y + (a + 1)z = 0 \quad -(a +$ dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \left(1\ 2\ 0\ 1\ a + 4\ a + 1\ 0\ \ - a - 2\ a^2 + 3a + 2\right) y\ M' = \left(1\ 2\ 0\ 1\ a + 4\ a + 1\ 0\ \ -\right.$
.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = \left|1\ 2\ 0\ 1\ a + 4\ a + 1\ 0\ \ - a - 2\ a^2 + 3a + 2\right| =$

$= (a + 4)\left(a^2 + 3a + 2\right) - (a + 1)(- a - 2) - 2\left(a^2 + 3a + 2\right) =$

$= a^3 + 3a^2 + 2a + 4a^2 + 12a + 8 + a^2 + 2a + a + 2 - 2a^2 - 6a - 4 =$

$= a^3 + 6a^2 + 11a + 6 = 0.$

Resolviendo por Ruffini:

	1	6	11	6
-1		-1	-5	-6
	1	5	6	$\boxed{0}$
-2		-2	-6	
	1	3	$\boxed{0}$	
-3		-3		
	1	$\boxed{0}$		

$\Rightarrow a_1 =- 1,\ a_2 =- 2,\ a_3 =- 3.$

$\underline{Para\ \{a \neq - 1\ a \neq - 2\ a \neq - 3\ \} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D}$
.

$Para\ a =- 1 \Rightarrow M' = (1\ 2\ 0\ 1\ 3\ 0\ 0\ \ - 1\ 0\ \ \ \ 1\ 0\ 3\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{C_1,\ C_2,\ C_4\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow]1\ 2\ 1\ 1\ 3\ 0\ 0\ -\ 1\ 3\ [= 9 - 1 - 6 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$Para\ m =- 2 \Rightarrow M' = (1\ 2\ 0\ 1\ 2\ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ 1\ 0\ 2\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{C_2 = 2C_1\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{C_1,\ C_3,\ C_4\right\} \Rightarrow]1\ 0\ 1\ 1\ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ 2\ [=- 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ \{a =- 1\ a =- 2\ \} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$Para\ a =- 3 \Rightarrow M' = (1\ 2\ 0\ 1\ 1\ -\ 2\ 0\ 1\ 2\ \ 1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 - F_2 = F_3\right\} \Rightarrow Rang\ M' =$
.

$\underline{Para\ a =- 3 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

Se resuelve en primer lugar para $a \neq - 1$, $a \neq - 2\ y\ a \neq - 3$ por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|1\ 2\ 0\ 0\ a+4\ a+1\ a+4\ -a-2\ a^2+3a+2\ |}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{(a+4)\left(a^2+3a+2\right)+2(a+1)(a+4)+(a+2)(a+1)}{(a+1)(a+2)(a+3)} =$$

$$= \frac{a^3+3a^2+2a+4a^2+12a+8+(a+1)(2a+8+a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{a^3+7a^2+14a+8+(a+1)(3a+10)}{(a+1)(a+2)(a+3)} =$$

$$= \frac{a^3+7a^2+14a+8+3a^2+10a+3a+10}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{a^3+10a^2+27a+18}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{(a+1)(a+3)(a+6)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{a+6}{a+2} = x.$$

$$y = \frac{|1\ 1\ 0\ 1\ 0\ a+1\ 0\ a+4\ a^2+3a+2\ |}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{-(a+4)(a+1)-\left(a^2+3a+2\right)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{-a^2-5a-4-a^2-3a-2}{(a+1)(a+2)(a+3)} =$$

$$= \frac{-2a^2-8a-6}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{-2\cdot\left(a^2+4a+3\right)}{(a+1)(a+2)(a+3)} =- 2\cdot\frac{(a+1)(a+3)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{-2}{a+2} = y.$$

$$z = \frac{|1\ 2\ 1\ 1\ a+4\ 0\ 0\ -a-2\ a+4\ |}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{(a+4)(a+4)-a-2-2(a+4)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{a^2+8a+16-a-2-2a-8}{(a+1)(a+2)(a+3)} =$$

$$= \frac{a^2+5a+6}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{(a+2)(a+3)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{1}{a+1} = z.$$

$\underline{Solución:\ x = \frac{a+6}{a+2};\ \ y = \frac{-2}{a+2};\ \ z = \frac{1}{a+1},\ \forall a \in R - \{- 1,\ - 2,\ - 3\}.}$

Para $a =- 3$ el sistema resulta $\{x + 2y = 1\ \ \ x + y - 2z = 0\ y + 2z = 1$, que es compatible indeterminado. Despreciando la segunda ecuación y haciendo $z = \lambda$:

$y = 1 - 2\lambda; \;\; x = 1 - 2y = 1 - 2(1 - 2\lambda) = 1 - 2 + 4\lambda = -1 + 4\lambda$

.

$\underline{Solución: x = -1 + 4\lambda; \;\; y = 1 - 2\lambda; \;\; z = \lambda, \;\; \forall\lambda \in R.}$

****

2º) Sean los puntos $P(7,\ 4,\ 2)$, $Q(1,\ 2,\ -2)\ y\ R(2,\ 1,\ -3)$. Uno de ellos es el centro de un rombo, y los otros dos, vértices. Halla los dos vértices restantes.

Los puntos $P(7,\ 4,\ 2)$, $Q(1,\ 2,\ -2)\ y\ R(2,\ 1,\ -3)$ determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{QP} = [P - Q] = [(7,\ 4,\ 2) - (1,\ 2,\ -2)] = (6,\ 2,\ 4).$$

$$\overrightarrow{RP} = [P - R] = [(7,\ 4,\ 2) - (2,\ 1,\ -3)] = (5,\ 3,\ 5).$$

$$\overrightarrow{QR} = [R - Q] = [(2,\ 1,\ -3) - (1,\ 2,\ -2)] = (1,\ -1,\ -1).$$

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{RP} = (6,\ 2,\ 4) \cdot (5,\ 3,\ 5) = 30 + 6 + 20 = 56 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{QP}\ y\ \overrightarrow{RP}\ no\ son\ \perp.$$

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = (6,\ 2,\ 4) \cdot (1,\ -1,\ -1) = 6 - 2 - 4 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{QP}\ y\ \overrightarrow{RP}\ son\ \perp.$$

$$\underline{El\ centro\ del\ rombo\ es\ el\ punto\ Q(1,\ 2,\ -2).}$$

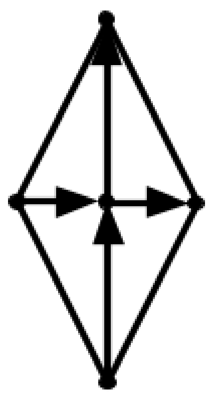
$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-7)^2 + (2-4)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56}.$$

$$\overline{PR} = \sqrt{(2-7)^2 + (1-4)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{25 + 9 + 25} = \sqrt{59}.$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}.$$

De lo anterior se deduce que los puntos $P\ y\ R$ determinan un lado del rectángulo y los puntos $P\ y\ Q$ determinan un segmento que es la mitad de la diagonal mayor y los puntos $Q\ y\ R$ determinan un segmento que es la mitad de la diagonal menor.

De la observación de la figura adjunta se deducen las igualdades de los siguientes vectores:



$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{TQ} \Rightarrow (1,\ -1,\ -1) = [Q - T];$$

$(1,\ -1,\ -1) = [(1,\ 2,\ -2) - (x,\ y,\ z)] = (1 - x,\ 2 - y,\ -2 - z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{1 - x = 1 \rightarrow x = 0 \quad 2 - y = -1 \rightarrow y = 3 \quad -2 - z = -1 \rightarrow z = -1\} \Rightarrow \underline{T(0,}$

.

$\vec{QP} = \vec{SQ} \Rightarrow (6,\ 2,\ 4) = [Q - S] = [(1,\ 2,\ -2) - (x,\ y,\ z)] =$

$(6,\ 2,\ 4) = (1 - x,\ 2 - y,\ -2 - z) \Rightarrow \{1 - x = 6 \rightarrow x = -5 \quad 2 - y = 2 \rightarrow y = 0$

.

****

3º) Calcula las siguientes integrales:

$a)\ I = \int e^{\cos cos\ 3x} \cdot sen\ 3x \cdot dx.$ $\qquad$ $b)\ I = \int \frac{sen\ 2x}{1+cos^2(2x)} \cdot dx.$

$a)$

$$I = \int e^{\cos cos\ 3x} \cdot sen\ 3x \cdot dx \Rightarrow \{ \cos cos\ (3x) = t\ -\ 3 \cdot sen\ x \cdot dx = dt\ sen\ x \cdot dx = -\frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot e^{t} + C = -\frac{1}{3} \cdot e^{\cos cos\ (3x)} + C.$$

$$\underline{I = \int e^{\cos cos\ 3x} \cdot sen\ 3x \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot e^{\cos cos\ (3x)} + C.}$$

$b)$

$$I = \int \frac{sen\ 2x}{1+cos^2(2x)} \cdot dx = \int \frac{2 \cdot sen\ x \cdot \cos cos\ x}{1+cos^2(2x)} \cdot dx \Rightarrow \{ \cos cos\ 2x = t\ -\ 2 \cdot sen\ 2x \cdot dx = dt\ s$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot arc\ tag\ t + C = -\frac{1}{2} \cdot arc\ tag\ (\cos cos\ 2x) + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{sen\ 2x}{1+cos^2(2x)} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot arc\ tag\ (\cos cos\ 2x) + C.}$$

****

4º) Halla las asíntotas (no es necesario hacer el estudio de la posición de la curva respecto a ellas) y los extremos relativos de la función $y = f(x) = \frac{2x^2+6}{x-1}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{2x^2+6}{x-1} = +\infty \quad k = f(x) = \frac{2x^2+6}{x-1} = -\infty \Big\} \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas}$$

.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \frac{f(x)}{x}$ y $n = [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{2x^2+6}{x-1}}{x} = \frac{2x^2+6}{x^2-x} = 2.$$

$$n = [f(x) - mx] = \left(\frac{2x^2+6}{x-1} - 2x\right) = \frac{2x^2+6-2x^2+2x}{x-1} =$$

$$= \frac{2x+6}{x-1} = 2.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua:\ y = 2x + 2}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista un máximo o un mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

$$y' = f'(x) = \frac{4x\cdot(x-1)-\left(2x^2+6\right)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{4x^2-4x-2x^2-6}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x-6}{(x-1)^2} = \frac{2\left(x^2-2x-3\right)}{(x-1)^2}.$$

$$y' = f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\left(x^2-2x-3\right)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0;\ \ x = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} =$$

$$= \frac{2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} = 1\pm 2 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$y'' = f''(x) = \frac{(4x-4)\cdot(x-1)^2 - 2\left(x^2-2x-3\right)\cdot[2\cdot(x-1)\cdot 1]}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x-4)\cdot(x-1) - 4\left(x^2-2x-3\right)}{(x-1)^3} = \frac{4x^2-4x-4x+4-4x^2+8x+12}{(x-1)^3} = \frac{16}{(x-1)^3}.$$

$$f''(-1) = \frac{16}{(-1-1)^3} = \frac{16}{-8} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = \frac{2\cdot(-1)^2+6}{-1-1} = \frac{2+6}{-2} = -4 \Rightarrow \underline{Máximo: A(-1,\ -4)}.$$

$$f''(3) = \frac{16}{(3-1)^3} = \frac{16}{8} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 3.$$

$$f(3) = \frac{2\cdot 3^2+6}{3-1} = \frac{18+6}{2} = 12 \Rightarrow \underline{Mínimo: B(3,\ 12)}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Sea la matriz $A = (-\ 1\ 1\ 2\ a\ b\ c\ x\ y\ z)$ tal que $|A| =-\ 1$. Calcular el determinante de la matriz $A^2 \cdot B^t$ siendo $B = (x\ y\ z\ 2a\ -\ x\ 2b\ -\ y\ 2c\ -\ z\ a\ +\ 1\ b\ -\ 1\ c\ -\ 2\ )$.

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de las matrices y que el determinante de una matriz es igual que el determinante de su matriz traspuesta:

$$\left|A^2 \cdot B^t\right| = |A \cdot A \cdot B| = |A| \cdot |A| \cdot |B| =-\ 1 \cdot (-\ 1) \cdot |B| = |B|.$$

Considerando la propiedad de los determinantes que dice que si todos los elementos de una línea están formados por dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en la suma de dos determinantes en los que las demás líneas permanecen invariantes:

$$|B| = |x\ y\ z\ 2a\ -\ x\ 2b\ -\ y\ 2c\ -\ z\ a\ +\ 1\ b\ -\ 1\ c\ -\ 2\ | =$$

$$= |x\ y\ z\ 2a\ 2b\ 2c\ a\ +\ 1\ b\ -\ 1\ c\ -\ 2\ | + |x\ y\ z\ \ -\ x\ \ -\ y\ \ -\ z\ a\ +\ 1\ b\ -\ 1\ c\ -\ 2\ | = |$$

$$= 2 \cdot |x\ y\ z\ a\ b\ c\ a\ +\ 1\ b\ -\ 1\ c\ -\ 2\ | = 2 \cdot |x\ y\ z\ a\ b\ c\ a\ b\ c\ | + 2 \cdot |x\ y\ z\ a\ b\ c\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 2$$

$$=-\ 2 \cdot |x\ y\ z\ a\ b\ c\ \ -\ 1\ 1\ 2\ | =+\ 2 \cdot |-\ 1\ 1\ 2\ a\ b\ c\ x\ y\ z\ | = 2 \cdot |A| = 2 \cdot (-\ 1) = \underline{-\ 2}$$

.

Para el resultado anterior se han tenido en cuanta las propiedades de los determinantes que dicen que si dos líneas de un determinante son proporcionales el valor del determinante es cero y que si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

$$\underline{\left|A^2 \cdot B^t\right| =-\ 2}$$

****

2º) Halla unas ecuaciones continuas de la recta t que pasa por el punto $P(-\ 4,\ 0,\ 5)$ y corta a las rectas $r \equiv \{x + y + z - 1 = 0\ x + y + 1 = 0$ $y\ s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$r \equiv \{x + y + z - 1 = 0\ x + y + 1 = 0 \quad \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow x = -\ 1 - \lambda;\ \ z = 1 - x - \lambda =$

$= 1 + 1 + \lambda - \lambda = 2 = z \Rightarrow r \equiv \{x = -\ 1 - \lambda\ y = \lambda \quad z = 2 \quad .$

Un punto y un vector director de r son $Q(-\ 1,\ 0,\ 2)$ y $\vec{v}_r = (-\ 1,\ 1,\ 0)$.

Los puntos P y Q determinan el vector:

$\vec{PQ} = [Q - P] = [(-\ 1,\ 0,\ 2) - (-\ 4,\ 0,\ 5)] = (3,\ 0,\ -\ 3)$.

El plano π_1 que contiene a la recta r y al punto P tiene la siguiente expresión general:

$\pi_1\left(P;\ \vec{v}_r,\ \vec{PQ}\right) \equiv |x + 4\ y\ z - 5\ \ -1\ 1\ 0\ 3\ 0\ \ -3| = 0;\ \ -\ 3(x + 4) - 3(z - 5) - 3$

$(x + 4) + (z - 5) + y = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x + y + z - 1 = 0$.

Un punto y un vector director de la recta s son: $R(2,\ 3,\ 0)\ y\ \vec{v}_s = (2,\ 1,\ 1)$

Los puntos P y R determinan el vector:

$\vec{PR} = [R - P] = [(2,\ 3,\ 0) - (-\ 4,\ 0,\ 5)] = (6,\ 3,\ -\ 5)$.

El plano π_2 que contiene a la recta s y al punto P tiene la siguiente expresión general:

$\pi_2\left(P;\ \vec{v}_s,\ \vec{PR}\right) \equiv |x + 4\ y\ z - 5\ 2\ 1\ 1\ 6\ 3\ \ -5| = 0;$

$-\ 5(x + 4) + 6y + 6(z - 5) - 6(z - 5) - 3(x + 4) + 10y = 0;$

$-8(x+4)+16y=0;\ x+4-2y=0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x-2y+4=0.$

La recta t es la intersección de los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$: $t \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-2y+4=0 \end{cases}.$

La expresión de la recta t por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$t \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-2y+4=0 \end{cases} \Rightarrow y=\lambda \Rightarrow x=-4+2\lambda;\ \ z=1-x-y$$

$$=1+4-2\lambda-\lambda=5-3\lambda=z.$$

$$t \equiv \begin{cases} x=-4+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=5-3\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{t \equiv \frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-3}}.$$

****

3º) Demuestra que existe $a\in(2,\ 3)$ tal que $f(a) =- \frac{3}{2}$, siendo $f(x) =\ \cos cos\ (\pi x)\ \cdot\sqrt[3]{x^3\ -\ 2x^2\ -\ 1}$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

La función $f(x) =\ \cos cos\ (\pi x)\ \cdot\sqrt[3]{x^3\ -\ 2x^2\ -\ 1}$ es continua en su dominio, que es R, por ser el producto de dos funciones continuas en R, por lo cual le es aplicable el teorema de los Valores Intermedios a cualquier intervalo finito que se considere.

El teorema de los Valores Intermedios dice que: "si una función $f(x)$ es continua en el intervalo $[m,\ n]$ se cumple que para un valor p tal que $f(m) <\ p\ <\ f(n)$ o también $f(m) >\ p\ >\ f(n)$, existe al menos un valor $a\in[m,\ n]$ tal que $f(a) =\ p$".

Aplicando el mencionado teorema a la función $f(x)$ en el intervalo $[2,\ 3]$.

$$f(2) =\ \cos cos\ (2\pi)\ \cdot\sqrt[3]{2^3\ -\ 2\cdot2^2\ -\ 1} =\ 1\cdot\sqrt[3]{8\ -\ 8\ -\ 1} = \sqrt[3]{-\ 1} =-\ 1.$$

$$f(3) =\ \cos cos\ (3\pi)\ \cdot\sqrt[3]{3^3\ -\ 2\cdot3^2\ -\ 1} =-\ 1\cdot\sqrt[3]{27\ -\ 18\ -\ 1} =-\ \sqrt[3]{-\ 8} =-\ 2.$$

Como quiera que $f(2) >- \frac{3}{2} >\ f(3)$, queda probado que:

$\underline{La\ función\ f(x)\ toma\ el\ valor\ -\frac{3}{2},\ al\ menos\ una\ vez,\ en\ el\ intervalo\ (2,\ 3).}$

****

4º) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las siguientes funciones: $f(x) =- x^2 + 3x$ y $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & si\, x\leq 2 \\ 3 - x & si\, x > 2 \end{cases}$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Los puntos de corte de dos funciones tienen como abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$x\leq 2\Rightarrow f(x) = g(x)\Rightarrow - x^2 + 3x = \frac{x}{2};\ - 2x^2 + 6x = x;\ 2x^2 - 5x = 0;$$

$$x(2x - 5) = 0\Rightarrow x = 0,\ x = \frac{5}{2}\nleq 2\Rightarrow Solución:\ x_1 = 0.$$

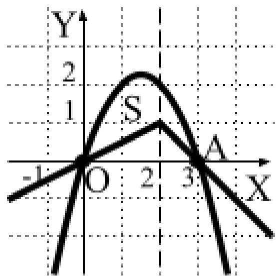
$$x > 0\Rightarrow f(x) = g(x)\Rightarrow - x^2 + 3x = 3 - x;\ x^2 - 4x + 3 = 0;$$

$$x = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{4\pm 2}{2} = 2\pm 1\Rightarrow x_2 = 1\ngeq 2,\ x = 3\Rightarrow Solución:\ x_2 = 3.$$

Considerando el valor $x = 1\Rightarrow 0 < 1 < 3$:

$$f(1) =- 1^2 + 3\cdot 1 =- 1 + 3 = 2.\ g(1) = \frac{1}{2}.\ \ f(1) > g(1).$$

Teniendo en cuanta lo anterior, la superficie a calcular, que se ilustra en la figura adjunta, es la siguiente:



$$S = \int_0^3 [f(x) - g(x)]\cdot dx = \int_0^2 \left[\left(- x^2 + 3x\right) - \frac{x}{2}\right]\cdot dx +$$

$$+ \int_2^3 \left[\left(- x^2 + 3x\right) - (3 - x)\right]\cdot dx =$$

$$= \int_0^2 \left(- x^2 + \frac{5x}{2}\right)\cdot dx + \int_2^3 \left(- x^2 + 4x - 3\right)\cdot dx =$$

$$= \left[- \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4}\right]_0^2 + \left[- \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x\right]_2^3 = \left[- \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4}\right]_0^2 + \left[- \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_2^3 =$$

$$= \left(- \frac{2^3}{3} + \frac{5\cdot 2^2}{4}\right) - 0 + \left(- \frac{3^3}{3} + 2\cdot 3^2 - 3\cdot 3\right) - \left(- \frac{2^3}{3} + 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2\right) =$$

$$=- \frac{8}{3} + 5 - 9 + 18 - 9 + \frac{8}{3} - 8 + 6 = 5 - 8 + 6 = 11 - 8 = 3.$$

$$\underline{S = 3u^2}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones, A y B. Solamente se podrán usar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

1º) Determinar el rango de la matriz $A = (1\ 1\ a + 1\ a\ 0\ 0\ 0\ a\ 2\quad 1\ 2\ 0\ )$, según los valores de a.

Procediendo por el método de Gauss:

$(1\ 1\ a + 1\ a\ 0\ 0\ 0\ a\ 2\quad 1\ 2\ 0\ ) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - aF_1\} \Rightarrow (1\ 1\ a + 1\ 0\ - a\ - a^2 - a\ 0\ a\ 2$

$\Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_2\} \Rightarrow (1\ 1\ a + 1\ 0\ - a\ - a^2 - a\ 0\ 0\ - a^2 - a + 2\quad 1\ 2 - a\ 2 - a$

(*) $\quad - a^2 - a + 2 = 0;\ a^2 + a - 2 = 0;\ a = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 =- 2,\ a_2 = 1 \Rightarrow \Rightarrow - a^2 - a + 2 =- (a + 2)(a - 1).$

$\Rightarrow [1\ 1\ a + 1\ 0\ - a\ - a^2 - a\ 0\ 0\ - (a + 2)(a - 1)\quad 1\ 2 - a\ 2 - a]$. (la tercera fila no se puede anular).

$\underline{Rang\ A = 3,\ \forall a \in R}.$

****

2º) Sea el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, sea la recta $r \equiv \{x = 1\ y = t\ z = t$ y sea el punto $P(1,\ 1,\ 0)$.

a) Hallar la ecuación del plano β perpendicular a r y que contenga al punto P.

b) Hallar el punto $P^{'}$ simétrico de P respecto del plano π.

----

a)

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (0,\ 1,\ 1)$.

El haz de planos α perpendiculares a r es $\alpha \equiv y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano β que contiene al punto $P(1,\ 1,\ 0)$ es el que satisface su ecuación:

$\alpha \equiv y + z + D = 0 \quad P(1,\ 1,\ 0)\ \} \Rightarrow 1 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -\ 1.$

$$\underline{\beta \equiv y + z - 1 = 0}.$$

b)

El vector normal del plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ es $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ 1)$.

La recta s perpendicular al plano π que contiene al punto $P(1,\ 1,\ 0)$ tiene la siguiente expresión, dada por unas ecuaciones paramétricas: $s \equiv \{x = 1 + \lambda\ y = 1 + \lambda\ z = \lambda$.

El punto Q de corte de s con π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv x + y + z = 1 \quad s \equiv \{x = 1 + \lambda\ y = 1 + \lambda\ z = \lambda \quad \} \Rightarrow (1 + \lambda) + (1 +$

$3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\ \frac{1}{3}$.

$Q \Rightarrow \{x = 1 + \lambda\ y = 1 + \lambda\ z = \lambda \quad \} \Rightarrow \lambda = -\ \frac{1}{3} \Rightarrow \{x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\ y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

.

El punto $P^{'}(x,\ y,\ z)$ es simétrico de $P(2,\ -\ 1,\ 3)$ cuando sea $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP^{'}}$:

$[Q - P] = \left[P^{'} - Q\right];\ \left[\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\ \frac{1}{3}\right) - (1,\ 1,\ 0)\right] = \left[(x,\ y,\ z) - \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\ \frac{1}{3}\right)\right];$

$$\left(-\frac{1}{3}, -\ \frac{1}{3},\ \ -\frac{1}{3}\right) = \left(x\ -\frac{2}{3},\ y\ -\frac{2}{3},\ z\ +\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \left\{x\ -\frac{2}{3} = -\ \frac{1}{3} \rightarrow x\ = \frac{1}{3}\quad y\ -\frac{2}{3} = -\right.$$

.

$$\underline{P^{'}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)}$$

****

3º) Dada la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de máximos, mínimos y asíntotas.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x \cdot e^x \cdot (2-x)}{e^{2x}} = \frac{x \cdot (2-x)}{e^x} = \frac{2x - x^2}{e^x}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x \cdot (2-x)}{e^x} = 0;\ \ x(2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Por ser $f(x)$ una función continua en su dominio, que es R, las raíces de la derivada dividen al dominio en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, $x = 1 \in (0, 2)$:

$$f'(1) = \frac{1 \cdot (2-1)}{e^1} = \frac{1}{e} > 0.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (0, 2)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(2-2x) \cdot e^x - x \cdot (2-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot \left(2 - 2x - 2x + x^2\right)}{e^{2x}} = \frac{x^2 - 4x + 2}{e^x}.$$

$$f''(0) = \frac{2}{e^0} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \underline{Mín. \Rightarrow O(0, 0)}.$$

$$f''(2) = \frac{4-8+2}{e^2} = \frac{-2}{e^2} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{2^2}{e^2} = \frac{4}{e^2} \Rightarrow \underline{Máx. \Rightarrow Q\left(2, \frac{4}{e^2}\right)}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{x^2}{e^x} = \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ de\ abscisas)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función.}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$e^x \neq 0,\ \forall x \in R.$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales.}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

****

4º) Calcular la siguiente integral indefinida: $I = \int x^2 \cdot e^{-3x} \cdot dx$.

$$I = \int x^2 \cdot e^{-3x} \cdot dx.$$

$$I = \int x^2 \cdot e^{-3x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = x^2 \to du = 2x dx \; e^{-3x} dx = dv \to v = -\frac{1}{3} e^{-3x} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 \cdot \frac{1}{3} e^{-3x} + \int \frac{1}{3} e^{-3x} \cdot 2x \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot e^{-3x} + \frac{2}{3} \cdot \int e^{-3x} \cdot x \cdot dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot e^{-3x} + \frac{2}{3} A. \qquad (*)$$

$$A = \int x \cdot e^{-3x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = x \to du = dx \; e^{-3x} dx = dv \to v = -\frac{1}{3} e^{-3x} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x \cdot \frac{1}{3} e^{-3x} + \int \frac{1}{3} e^{-3x} \cdot dx = -\frac{1}{3} x \cdot e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} + C = -\frac{1}{9} e^{-3x} (3x + 1) + C$$

.

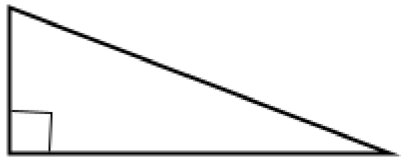
Sustituyendo en (*) el valor de A:

$$I = -\frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot e^{-3x} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} e^{-3x} (3x + 1) + C = -\frac{1}{27} e^{-3x} \left(9x^2 + 6x + 2\right) + C.$$

$$\underline{I = \int x^2 \cdot e^{-3x} \cdot dx = -\frac{1}{27} e^{-3x} \left(9x^2 + 6x + 2\right) + C.}$$

****

5º) Calcular el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 8 cm.



Superficie: $S = \frac{b \cdot c}{2} \Rightarrow Máxima.$

Por el teorema de Pitágoras: $8^2 = b^2 + c^2$.

$c = \sqrt{64 - b^2}$. Sustituyendo en la superficie:

$S(b) = \frac{b \cdot \sqrt{64 - b^2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{64b^2 - b^4}$.

La superficie será máxima cuando se anule su primera derivada:

$S'(b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{128b - 4b^3}{2 \cdot \sqrt{64b^2 - b^4}} = 0 \Rightarrow 128b - 4b^3 = 0;\ \ 4b\left(32 - b^2\right) = 0 \Rightarrow$

$b_1 = 0;\ \ 32 - b^2 = 0;\ \ b = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2} \Rightarrow b_2 = -4\sqrt{2},\ b_3 = 4\sqrt{2}.$

La solución $b = 0$ es para mínimo.

El valor negativo carece de sentido lógico, por lo cual: $b = 4\sqrt{2}$.

$c = \sqrt{64 - b^2} = \sqrt{64 - 32} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$

$S = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 8 \cdot 2 = 16.$

$\underline{Es\ un\ triángulo\ rectángulo\ isósceles\ de\ 16\ cm^2\ de\ á.}$

****

OPCIÓN B

1º) $a)$ Discutir el sistema $S(a) = \{x + ay - z = 2 \quad 2x + y + az = 0 \quad 3x + (a + 1)y - z =$ en función de a.

$b)$ ¿Hay solución para $a = 1$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\, a \;\; - 1\; 2\; 1\; a\; 3\; a + 1 \;\; - 1\,)$ y $M' = (1\, a \;\; - 1\; 2\; 1\; a\; 3\; a + 1 \;\; - 1 \quad 2\; 0\; a - 1\,)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1\, a \;\; - 1\; 2\; 1\; a\; 3\; a + 1 \;\; - 1\,| = - 1 - 2(a + 1) + 3a^2 + 3 + 2a - a(a$

$= 2 - 2a - 2 + 3a^2 + 2a - a^2 - a = 2a^2 - a = 0;\;\; a(2a - 1) = 0 \Rightarrow \{a_1 = 0\; a_2 =$

.

<u>$Para \left\{a \neq 0\; a \neq \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$</u>

$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = (1\, 0 \;\; - 1\; 2\; 1\; 0\; 3\; 1 \;\; - 1 \quad 2\; 0 \;\; - 1\,) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{C_1,\ C_2,\ C_4\right\}$

$\Rightarrow |1\; 0\; 2\; 2\; 1\; 0\; 3\; 1 \;\; - 1\,| = - 1 + 4 - 6 = - 3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$Para\ a = \frac{1}{2} \Rightarrow M' = \left(1\, \frac{1}{2} \;\; - 1\; 2\; 1\; \frac{1}{2}\; 3\; \frac{3}{2} \;\; - 1 \quad 2\; 0 \;\; - \frac{1}{2}\right)$; a efectos de rango equivalente a la matriz: $2M' = (2\, 1 \;\; - 2\; 4\; 2\; 1\; 6\; 3 \;\; - 2 \quad 4\; 0 \;\; - 1\,) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{C_2,\ C_3,\ C_4\right\} \Rightarrow |1 \;\; - 2\; 4\; 2\; 1\; 0$

$= - 1 - 16 - 12 - 4 = - 33 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

<u>$Para \left\{a \neq 0\; a \neq \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$</u>

$b)$

Para $a = 1$ el sistema resulta $S(1) = \{x + y - z = 2 \quad 2x + y + z = 0 \quad 3x + 2y - z = 0$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|2\ 1\ -1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 2\ -1\ |}{2\cdot 1^2 - 1} = \frac{-2-4}{1} =-\ 6.$$

$$y = |1\ 2\ \ -\ 1\ 2\ 0\ 1\ 3\ 0\ \ -\ 1\ | = 6\ +\ 4\ =\ 10.$$

$$z = |1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 0\ 3\ 2\ 0\ | = 8\ -\ 6\ =\ 2.$$

$\underline{Solución: x =-\ 6,\ \ y\ =\ 10,\ \ z\ =\ 2}.$

****

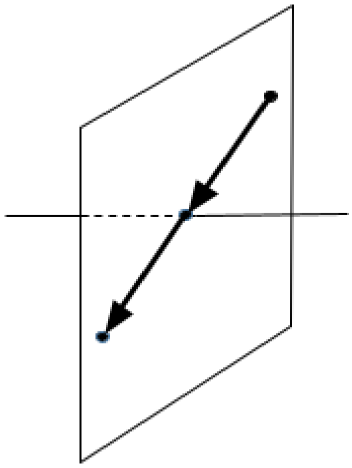
2º) Determinar el punto simétrico de $A(-3, 1, -7)$ respecto a la recta r de ecuaciones paramétricas $r \equiv \{x = -1 + t \ \ y = 3 + 2t \ \ z = -1 + 2t$.

Un vector director de r es $\vec{v}_r = (1, 2, 2)$.

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv x + 2y + 2z + D = 0$.

El plano $\alpha \in \beta$ que contiene al punto $A(-3, 1, -7)$ es el siguiente:

$\beta \equiv x + 2y + 2z + D = 0$ $\quad A(-3, 1, -7) \} \Rightarrow -3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-7) + D$



$-3 + 2 - 14 + D = 0; \ -15 + D = 0; \ D = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \equiv x + 2y + 2z + 15 = 0$.

El punto B intersección de r y α es el siguiente:

$\alpha \equiv x + 2y + 2z + 15 = 0$ $\quad r \equiv \{x = -1 + t \ \ y = 3 + 2t \ \ z = -1 + 2t$

$-1 + t + 2(3 + 2t) + 2(-1 + 2t) + 15 = 0;$

$-1 + t + 6 + 4t - 2 + 4t + 15 = 0; \ 9t + 18 = 0; \ t + 2 = 0 \Rightarrow t = -2$.

$\{x = -1 + t \ \ y = 3 + 2t \ \ z = -1 + 2t\} \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \{x = -1 - 2 = -3 \ y = 3 - 4$

.

Para que A' sea el simétrico de A con respecto a r tiene que cumplirse que:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP'} \Rightarrow [B - A] = \left[A' - B\right];$

$[(-3, -1, -5) - (-3, 1, -7)] = [(x, y, z) - (-3, -1, -5)];$

$(0, \; -2, \; 2) = (x + 3, \; y + 1, \; z + 5) \Rightarrow \{x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \quad y + 1 = -2 \rightarrow y = -3$

.

****

3º) De la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, se sabe que su gráfica pasa por el punto $P(1,\ 0)$ y que tiene un extremo en $x = 0$ de valor 1.

$a)$ Hallar $A,\ B\ y\ C$.

$b)$ ¿El extremo situado en el punto $x = 0$ es máximo o mínimo?

$a)$

Por pasar por el punto $P(1,\ 0)$: $f(1) = 0$:

$f(1) = 1^3 + A\cdot 1^2 + B\cdot 1 + C = 0;\ \ A + B + C = -1.$ (1)

Por tener un extremo relativo para $x = 0$ es $f'(0) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B.$

$f'(0) = 0 \Rightarrow \underline{B = 0}.$

Por tener un extremo en $x = 0$ de valor 1 es $f(0) = 1$:

$f(0) = 1 \Rightarrow \underline{C = 1}.$

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos de $B\ y\ C$:

$A + B + C = -1 \Rightarrow A + 0 + 1 = -1 \Rightarrow \underline{A = -2}.$

$b)$

La función resulta: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1.$

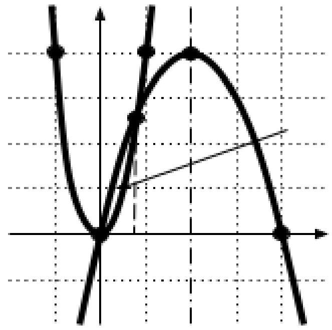
$f'(x) = 3x^2 - 4x.$ $f''(x) = 6x - 4.$

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow Máximo.$

$\underline{La\ función\ f(x)\ en\ x = 0\ lo\ que\ tiene\ es\ un\ máximo\ relativo}.$

****

4º) La curva $y = f(x) = 4x^2$ y la curva $y = g(x) = 4x - x^2$ delimitan un recinto finito del plano. Dibujar dicho recinto y calcular su área.



Los puntos de corte de las dos funciones tienen como abscisas las soluciones de la ecuación que resultas de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 4x^2 = 4x - x^2;\ \ 5x^2 - 4x = 0;$$

$$x(5x - 4) = 0 \Rightarrow \{x_1 = 0 \to O(0,\ 0)\ x_2 = \frac{4}{5} \to A\left(\frac{4}{5},\ \frac{64}{25}\right).$$

La función $y = f(x) = 4x^2$ es una parábola convexa (∪) de vértice el origen de coordenadas y que contiene a los puntos $C(-\ 1,\ 4)\ y\ D(1,\ 4)$.

La función $y = g(x) = 4x - x^2$ es una parábola cóncava (∩) de vértice el punto $V(2,\ 4)$ y que contiene al origen y al punto $A(4,\ 0)$.

La superficie a calcular se deduce de la figura adjunta y su valor es el siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{4}{5}} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_0^{\frac{4}{5}} \left[\left(4x - x^2\right) - 4x^2\right] \cdot dx = \int_0^{\frac{4}{5}} \left(4x - 5x^2\right) dx =$$

$$= \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{5x^3}{3}\right]_0^{\frac{4}{5}} = \left[\frac{4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2}{2} - \frac{5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3}{3}\right] - 0 = \frac{2 \cdot 4^2}{5^2} - \frac{5 \cdot 4^3}{3 \cdot 5^3} = \frac{32}{25} - \frac{64}{75} = \frac{96 - 64}{75} = \frac{32}{75}$$

.

$$\underline{S = \frac{32}{75}\ u^2 = 0,427\ u^2.}$$

****

5º) Hallar razonadamente el último dígito del número $P = (2.018)^{2.018} \cdot (3)^{2.018}$.

Las sucesivas potencia de cualquier número natural que termine en 8 tienen las siguientes sucesivas terminaciones: $8,\ 4,\ 2,\ 6,\ 8,\ 4,\ 2,\ 6, \cdots$

$$\begin{array}{r|l} 2.018 & 4 \\ \hline 018 & 504 \\ 2 & \end{array}$$

De la sucesión anterior se deduce que las terminaciones son, sucesivamente, 8, 4, 2 o 6, según que los restos de dividir el exponente por 4 sean, sucesivamente, 1, 2, 3 o 0.

Por ser el resto 2 el número $(2.018)^{2.018}$ termina en 4.

$3^0 = 1,\ 3^1 = 3;\ 3^2 = 9;\ 3^3 = 27;\ 3^4 = 81;\ 3^5 = 243,\ \cdots\cdots$

Nótese que las sucesivas potencias de 3 terminan en 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, $\cdots$

En general 3^n termina en el resto de la división de n entre 4.

En particular $3^{2.018}$ termina igual que 3^2 que es 9.

$\underline{El\ número\ P = (2.018)^{2.018} \cdot (3)^{2.018}\ igual\ que\ 4 \cdot 9,\ o\ sea\ en\ 6.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II　　　　　　　　　　Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones, A y B. Solamente se podrán usar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

1º) Determinar el rango de la matriz $A = (1\ 1\ a + 1\ a\ 0\ 0\ 0\ a\ 2 \quad 1\ 2\ 0\ )$, según los valores de a.

Procediendo por el método de Gauss:

$(1\ 1\ a + 1\ a\ 0\ 0\ 0\ a\ 2 \quad 1\ 2\ 0\ ) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 - aF_1\} \Rightarrow (1\ 1\ a + 1\ 0\ - a\ - a^2 - a\ 0\ a\ 2$

$\Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_2\} \Rightarrow (1\ 1\ a + 1\ 0\ - a\ - a^2 - a\ 0\ 0\ - a^2 - a + 2 \quad 1\ 2 - a\ 2 - a\ )$

(*) $\quad - a^2 - a + 2 = 0;\ a^2 + a - 2 = 0;\ a = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 =- 2,\ a_2 = 1 \Rightarrow \Rightarrow - a^2 - a + 2 =- (a + 2)(a - 1).$

$\Rightarrow [1\ 1\ a + 1\ 0\ - a\ - a^2 - a\ 0\ 0\ - (a + 2)(a - 1) \quad 1\ 2 - a\ 2 - a].$ (la tercera fila no se puede anular).

$\underline{Rang\ A = 3,\ \forall a \in R}.$

****

2º) Sea el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, sea la recta $r \equiv \{x = 1\ y = t\ z = t$ y sea el punto $P(1, 1, 0)$.
a) Hallar la ecuación del plano β perpendicular a r y que contenga al punto P.

b) Hallar el punto $P^{'}$ simétrico de P respecto del plano π.

----

a)

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (0, 1, 1)$.

El haz de planos α perpendiculares a r es $\alpha \equiv y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano β que contiene al punto $P(1, 1, 0)$ es el que satisface su ecuación:

$\alpha \equiv y + z + D = 0 \quad P(1, 1, 0)\ \} \Rightarrow 1 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1.$

$$\underline{\beta \equiv y + z - 1 = 0}.$$

b)

El vector normal del plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ es $\overrightarrow{n} = (1, 1, 1)$.

La recta s perpendicular al plano π que contiene al punto $P(1, 1, 0)$ tiene la siguiente expresión, dada por unas ecuaciones paramétricas: $s \equiv \{x = 1 + \lambda\ y = 1 + \lambda\ z = \lambda$.

El punto Q de corte de s con π es la solución del sistema que forman:

$\pi \equiv x + y + z = 1 \quad s \equiv \{x = 1 + \lambda\ y = 1 + \lambda\ z = \lambda \quad \} \Rightarrow (1 + \lambda) + (1 + \lambda$

$3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$.

$Q \Rightarrow \{x = 1 + \lambda\ y = 1 + \lambda\ z = \lambda \quad \} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Rightarrow \{x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\ y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$
.

El punto $P^{'}(x, y, z)$ es simétrico de $P(2, -1, 3)$ cuando sea $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP^{'}}$:

$[Q - P] = \left[P^{'} - Q\right];\ \left[\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) - (1, 1, 0)\right] = \left[(x, y, z) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right];$

$$\left(-\frac{1}{3}, -\ \frac{1}{3},\ \ -\frac{1}{3}\right) = \left(x - \frac{2}{3},\ y - \frac{2}{3},\ z + \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \left\{x - \frac{2}{3} = -\ \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{1}{3} \quad y - \frac{2}{3} = -\right.$$

.

$$\underline{P^{'}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)}$$

****

3º) Dada la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de máximos, mínimos y asíntotas.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x \cdot e^x \cdot (2-x)}{e^{2x}} = \frac{x \cdot (2-x)}{e^x} = \frac{2x - x^2}{e^x}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x \cdot (2-x)}{e^x} = 0;\ \ x(2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Por ser $f(x)$ una función continua en su dominio, que es R, las raíces de la derivada dividen al dominio en los intervalos $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 2)$ y $(2,\ +\infty)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, $x = 1 \in (0,\ 2)$:

$$f'(1) = \frac{1 \cdot (2-1)}{e^1} = \frac{1}{e} > 0.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (0,\ 2)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty,\ 0) \cup (2,\ +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(2-2x) \cdot e^x - x \cdot (2-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x \cdot \left(2 - 2x - 2x + x^2\right)}{e^{2x}} = \frac{x^2 - 4x + 2}{e^x}.$$

$$f''(0) = \frac{2}{e^0} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \underline{Mín. \Rightarrow O(0,\ 0)}.$$

$f''(2) = \frac{4-8+2}{e^2} = \frac{-2}{e^2} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 2.$

$f(2) = \frac{2^2}{e^2} = \frac{4}{e^2} \Rightarrow \underline{Máx. \Rightarrow Q\left(2, \frac{4}{e^2}\right)}.$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$k = f(x) = \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{x^2}{e^x} = \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$

$\Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0.$

$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ de\ abscisas)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función.}$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$e^x \neq 0,\ \forall x \in R.$

$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales.}$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

****

4º) Calcular la siguiente integral indefinida: $I = \int x^2 \cdot e^{-3x} \cdot dx$.

$$I = \int x^2 \cdot e^{-3x} \cdot dx.$$

$$I = \int x^2 \cdot e^{-3x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = x^2 \rightarrow du = 2xdx \; e^{-3x}dx = dv \rightarrow v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - x^2 \cdot \frac{1}{3}e^{-3x} + \int \frac{1}{3}e^{-3x} \cdot 2x \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot e^{-3x} + \frac{2}{3} \cdot \int e^{-3x} \cdot x \cdot dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot e^{-3x} + \frac{2}{3}A. \qquad (*)$$

$$A = \int x \cdot e^{-3x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ u = x \rightarrow du = dx \; e^{-3x}dx = dv \rightarrow v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - x \cdot \frac{1}{3}e^{-3x} + \int \frac{1}{3}e^{-3x} \cdot dx = -\frac{1}{3}x \cdot e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C = -\frac{1}{9}e^{-3x}(3x + 1) + C$$

.

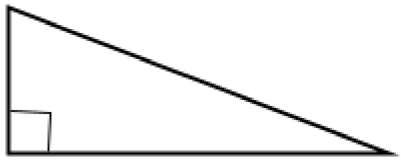
Sustituyendo en (*) el valor de A:

$$I = -\frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot e^{-3x} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9}e^{-3x}(3x + 1) + C = -\frac{1}{27}e^{-3x}\left(9x^2 + 6x + 2\right) + C.$$

$$\underline{I = \int x^2 \cdot e^{-3x} \cdot dx = -\frac{1}{27}e^{-3x}\left(9x^2 + 6x + 2\right) + C.}$$

****

5º) Calcular el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 8 cm.



Superficie: $S = \frac{b \cdot c}{2} \Rightarrow Máxima.$

Por el teorema de Pitágoras: $8^2 = b^2 + c^2$.

$c = \sqrt{64 - b^2}$. Sustituyendo en la superficie:

$S(b) = \frac{b \cdot \sqrt{64 - b^2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{64b^2 - b^4}$.

La superficie será máxima cuando se anule su primera derivada:

$S'(b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{128b - 4b^3}{2 \cdot \sqrt{64b^2 - b^4}} = 0 \Rightarrow 128b - 4b^3 = 0;\ \ 4b\left(32 - b^2\right) = 0 \Rightarrow$

$b_1 = 0;\ \ 32 - b^2 = 0;\ \ b = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2} \Rightarrow b_2 = -4\sqrt{2},\ b_3 = 4\sqrt{2}.$

La solución $b = 0$ es para mínimo.

El valor negativo carece de sentido lógico, por lo cual: $b = 4\sqrt{2}$.

$c = \sqrt{64 - b^2} = \sqrt{64 - 32} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$

$S = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 8 \cdot 2 = 16.$

$\underline{Es\ un\ triángulo\ rectángulo\ isósceles\ de\ 16\ cm^2\ de\ á.}$

****

OPCIÓN B

1º) $a)$ Discutir el sistema $S(a) = \{x + ay - z = 2 \quad 2x + y + az = 0 \quad 3x + (a + 1)y - z =$ en función de a.

$b)$ ¿Hay solución para $a = 1$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\ a\ \ -1\ 2\ 1\ a\ 3\ a + 1\ \ -1\ )$ y $M' = (1\ a\ \ -1\ 2\ 1\ a\ 3\ a + 1\ \ -1\quad 2\ 0\ a - 1\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1\ a\ \ -1\ 2\ 1\ a\ 3\ a + 1\ \ -1\ | = -1 - 2(a + 1) + 3a^2 + 3 + 2a - a(a$
$= 2 - 2a - 2 + 3a^2 + 2a - a^2 - a = 2a^2 - a = 0;\ \ a(2a - 1) = 0 \Rightarrow \{a_1 = 0\ a_2 =$
.

<u>$Para \left\{a \neq 0\ a \neq \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$</u>

$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = (1\ 0\ \ -1\ 2\ 1\ 0\ 3\ 1\ \ -1\quad 2\ 0\ \ -1\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{C_1,\ C_2,\ C_4\right\}$

$\Rightarrow |1\ 0\ 2\ 2\ 1\ 0\ 3\ 1\ \ -1\ | = -1 + 4 - 6 = -3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$Para\ a = \frac{1}{2} \Rightarrow M' = \left(1\ \frac{1}{2}\ \ -1\ 2\ 1\ \frac{1}{2}\ 3\ \frac{3}{2}\ \ -1\quad 2\ 0\ -\frac{1}{2}\right)$; a efectos de rango equivalente a la matriz: $2M' = (2\ 1\ \ -2\ 4\ 2\ 1\ 6\ 3\ \ -2\quad 4\ 0\ \ -1\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{C_2,\ C_3,\ C_4\right\} \Rightarrow |1\ \ -2\ 4\ 2\ 1\ 0$

$= -1 - 16 - 12 - 4 = -33 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

<u>$Para \left\{a \neq 0\ a \neq \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$</u>

$b)$

Para $a = 1$ el sistema resulta $S(1) = \{x + y - z = 2 \quad 2x + y + z = 0 \quad 3x + 2y - z = 0$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|2\ 1\ -1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 2\ -1\ |}{2\cdot 1^2 - 1} = \frac{-2-4}{1} =- 6.$$

$$y = |1\ 2\ \ -\ 1\ 2\ 0\ 1\ 3\ 0\ \ -\ 1\ | = 6 + 4 = 10.$$

$$z = |1\ 1\ 2\ 2\ 1\ 0\ 3\ 2\ 0\ | = 8 - 6 = 2.$$

$\underline{Solución: x =- 6,\ \ y = 10,\ \ z = 2}.$

****

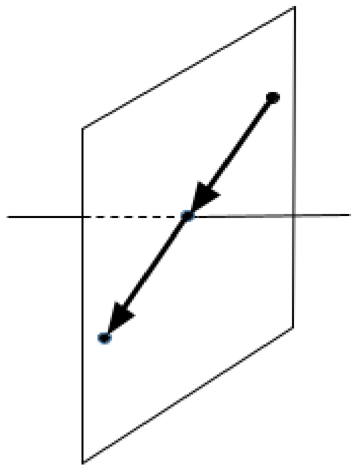
2º) Determinar el punto simétrico de $A(-3, 1, -7)$ respecto a la recta r de ecuaciones paramétricas $r \equiv \{x = -1 + t \;\; y = 3 + 2t \;\; z = -1 + 2t$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, 2, 2)$.

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv x + 2y + 2z + D = 0$.

El plano $\alpha \in \beta$ que contiene al punto $A(-3, 1, -7)$ es el siguiente:

$\beta \equiv x + 2y + 2z + D = 0 \quad A(-3, 1, -7) \} \Rightarrow -3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-7) + D$



$-3 + 2 - 14 + D = 0; \;\; -15 + D = 0; \;\; D = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \equiv x + 2y + 2z + 15 = 0.$

El punto B intersección de r y α es el siguiente:

$\alpha \equiv x + 2y + 2z + 15 = 0 \quad r \equiv \{x = -1 + t \;\; y = 3 + 2t \;\; z = -1 + 2t$

$-1 + t + 2(3 + 2t) + 2(-1 + 2t) + 15 = 0;$

$-1 + t + 6 + 4t - 2 + 4t + 15 = 0; \;\; 9t + 18 = 0; \;\; t + 2 = 0 \Rightarrow t = -2.$

$\{x = -1 + t \;\; y = 3 + 2t \;\; z = -1 + 2t \} \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \{x = -1 - 2 = -3 \; y = 3 - 4$
.

Para que A' sea el simétrico de A con respecto a r tiene que cumplirse que:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP'} \Rightarrow [B - A] = \left[A' - B\right];$

$[(-3, -1, -5) - (-3, 1, -7)] = [(x, y, z) - (-3, -1, -5)];$

$(0, \ -2, \ 2) = (x + 3, \ y + 1, \ z + 5) \Rightarrow \{x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \quad y + 1 = -2 \rightarrow y = -3$

.

****

3º) De la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, se sabe que su gráfica pasa por el punto $P(1,\ 0)$ y que tiene un extremo en $x = 0$ de valor 1.

a) Hallar $A,\ B\ y\ C$.

b) ¿El extremo situado en el punto $x = 0$ es máximo o mínimo?

----

a)

Por pasar por el punto $P(1,\ 0)$: $f(1) = 0$:

$f(1) = 1^3 + A\cdot 1^2 + B\cdot 1 + C = 0;\ \ A + B + C = -1.$ (1)

Por tener un extremo relativo para $x = 0$ es $f'(0) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B.$

$f'(0) = 0 \Rightarrow \underline{B = 0}.$

Por tener un extremo en $x = 0$ de valor 1 es $f(0) = 1$:

$f(0) = 1 \Rightarrow \underline{C = 1}.$

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos de $B\ y\ C$:

$A + B + C = -1 \Rightarrow A + 0 + 1 = -1 \Rightarrow \underline{A = -2}.$

b)

La función resulta: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1.$

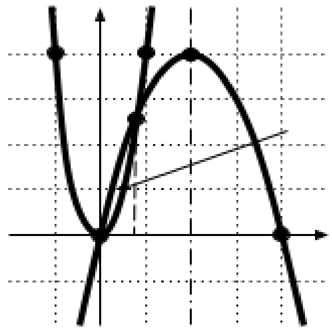
$f'(x) = 3x^2 - 4x.$ $f''(x) = 6x - 4.$

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow Máximo.$

$\underline{La\ función\ f(x)\ en\ x = 0\ lo\ que\ tiene\ es\ un\ máximo\ relativo}.$

****

4º) La curva $y = f(x) = 4x^2$ y la curva $y = g(x) = 4x - x^2$ delimitan un recinto finito del plano. Dibujar dicho recinto y calcular su área.



Los puntos de corte de las dos funciones tienen como abscisas las soluciones de la ecuación que resultas de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 4x^2 = 4x - x^2;\ \ 5x^2 - 4x = 0;$$

$$x(5x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0,\ 0) \\ x_2 = \frac{4}{5} \rightarrow A\left(\frac{4}{5},\ \frac{64}{25}\right) \end{cases}.$$

La función $y = f(x) = 4x^2$ es una parábola convexa ($\cup$) de vértice el origen de coordenadas y que contiene a los puntos $C(-1,\ 4)$ y $D(1,\ 4)$.

La función $y = g(x) = 4x - x^2$ es una parábola cóncava ($\cap$) de vértice el punto $V(2,\ 4)$ y que contiene al origen y al punto $A(4,\ 0)$.

La superficie a calcular se deduce de la figura adjunta y su valor es el siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{4}{5}} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_0^{\frac{4}{5}} \left[\left(4x - x^2\right) - 4x^2\right] \cdot dx = \int_0^{\frac{4}{5}} \left(4x - 5x^2\right) dx =$$

$$= \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{5x^3}{3}\right]_0^{\frac{4}{5}} = \left[\frac{4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2}{2} - \frac{5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3}{3}\right] - 0 = \frac{2 \cdot 4^2}{5^2} - \frac{5 \cdot 4^3}{3 \cdot 5^3} = \frac{32}{25} - \frac{64}{75} = \frac{96 - 64}{75} = \frac{32}{75}$$

.

$$\underline{S = \frac{32}{75}\ u^2 = 0,427\ u^2.}$$

****

5º) Hallar razonadamente el último dígito del número $P = (2.018)^{2.018} \cdot (3)^{2.018}$.

Las sucesivas potencia de cualquier número natural que termine en 8 tienen las siguientes sucesivas terminaciones: $8,\ 4,\ 2,\ 6,\ 8,\ 4,\ 2,\ 6, \cdots$

$$\begin{array}{r|l} 2.018 & 4 \\ \hline 018 & 504 \\ 2 & \end{array}$$

De la sucesión anterior se deduce que las terminaciones son, sucesivamente, 8, 4, 2 o 6, según que los restos de dividir el exponente por 4 sean, sucesivamente, 1, 2, 3 o 0.

Por ser el resto 2 el número $(2.018)^{2.018}$ termina en 4.

$3^0 = 1,\ 3^1 = 3;\ 3^2 = 9;\ 3^3 = 27;\ 3^4 = 81;\ 3^5 = 243, \cdots\cdots$

Nótese que las sucesivas potencias de 3 terminan en 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, $\cdots$

En general 3^n termina en el resto de la división de n entre 4.

En particular $3^{2.018}$ termina igual que 3^2 que es 9.

$\underline{El\ número\ P = (2.018)^{2.018} \cdot (3)^{2.018}\ igual\ que\ 4 \cdot 9,\ o\ sea\ en\ 6}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones, A y B. Solamente se podrán usar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

1º) Calcula el rango de la matriz $A = (1\ 0\ 4\ 0\ a\ 4\ -\ 1\ 3\ a\quad 2\ 0\ -\ 2\ )$, según los valores de a.

Procediendo por el método de Gauss:

$$(1\ 0\ 4\ 0\ a\ 4\ -\ 1\ 3\ a\quad 2\ 0\ -\ 2\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \to F_3 + F_1\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 4\ 0\ a\ 4\ 0\ 3\ a\ +\ 4\quad 2\ 0\ 0\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \to \tfrac{1}{a}F_2\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ 4\ 0\ 1\ \tfrac{4}{a}\ 0\ 3\ a\ +\ 4\quad 2\ 0\ 0\right) \Rightarrow \left\{F_3 \to F_3 - 3F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1\ 0\ 4\ 0\ 1\ \tfrac{4}{a}\ 0\ 0\ \tfrac{a^2+4a-12}{a}\quad 2\ 0\ 0\right).$$

Para $\frac{a^2+4a-12}{a} = 0 \Rightarrow Rang\ A = 2$:

$$\frac{a^2+4a-12}{a} = 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 = 0;\ \ a = \frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{64}}{2} = \frac{-4\pm 8}{2} =$$

$$= -\ 2\pm 4 \Rightarrow a_1 = -\ 6,\ a_2 = 2.$$

$\underline{Para\ \{a = -\ 6\ a\ =\ 2\ \} \Rightarrow Rang\ A = 2;\ \ para\ \{a \neq -\ 6\ a \neq 2\ \} \Rightarrow Rang\ A = 3}.$

****

2º) Se dan los puntos $A(3,\ 3,\ 3)$, $B(2,\ 3,\ 4)$, $C(0,\ 0,\ 4)\ y\ D(3,\ 0,\ 1)$.

a) ¿Están en el mismo plano? En caso afirmativo hallar la ecuación del plano. En caso negativo razonar la respuesta.

$b)$ Calcular a para que el punto $P(a,\ a,\ 8)$ esté en la recta que pasa por A y C.

$a)$

Los puntos A, B, C y D determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{BA} = [A - B] = [(3,\ 3,\ 3) - (2,\ 3,\ 4)] = (1,\ 0,\ -1).$

$\overrightarrow{CA} = [A - C] = [(3,\ 3,\ 3) - (0,\ 0,\ 4)] = (3,\ 3,\ -1).$

$\overrightarrow{DA} = [A - D] = [(3,\ 3,\ 3) - (3,\ 0,\ 1)] = (0,\ 3,\ 2).$

Para que los puntos A, B, C y D sean coplanarios, los vectores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{DA}$ tienen que ser coplanarios, o sea, que su rango tiene que ser menor de tres; el determinante que forman tiene que valer cero:

$$Rang\left\{\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{DA}\right\} < 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 9 + 3 = 0.$$

$\underline{Los\ puntos\ A,\ B,\ C\ y\ D\ son\ coplanarios.}$

La ecuación general del plano π que determinan tiene como vectores directores a dos cualesquiera de los hallados y uno cualquiera de los puntos, por ejemplo:

$$\pi\left(C;\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{CA}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ \ -3y + 3(z-4) + 3x + y$$

$$-2y + 3z - 12 + 3x = 0.$$

$\underline{\pi \equiv 3x - 2y + 3z - 12 = 0}.$

$b)$

La recta r que pasa por $A(3,\ 3,\ 3)$ y $C(0,\ 0,\ 4)$ tiene por vector director al que determinan estos puntos: $\overrightarrow{CA} = (3,\ 3,\ -1).$

La recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}.$

Para que la recta r contenga al punto $P(a,\ a,\ 8)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$3\lambda = a \Rightarrow \lambda = \frac{a}{3}. \qquad 4 - \lambda = 8 \Rightarrow 4 - \frac{a}{3} = 8;\ \frac{a}{3} = -4 \Rightarrow a = -12.$$

$\underline{Para\ a = -12\ la\ recta\ que\ pasa\ por\ A\ y\ C\ contiene\ al\ punto\ P}.$

****

3º) Sea f la función definida por: $f(x) = \{3 - ax^2, \ si\, x \leq 1 \quad \frac{2}{ax} \quad si\ x > 1$. Estudiar su continuidad y su derivabilidad en función de a.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, que para forzar su continuidad y derivabilidad se va a determinar el valor de a.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\, x = 1 \Rightarrow \{f(x) = \left(3 - ax^2\right) = 3 - a = f(1)\ f(x) == \frac{2}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(1) \Rightarrow 3 - a = \frac{2}{a} \Rightarrow 3a - a^2 = 2;\ a^2 - 3a + 2 = 0.$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 2.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R\ para\ a = 1\ y\ para\ a = 2}.$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando el correspondiente valor de a.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$f'(x) = \{- 2ax \ si \quad x \leq 1 \ - \frac{2}{a^2} \ \ si\ x > 1$. $\qquad f'\left(1^-\right) =- 2a$. $f'\left(1^+\right) =- 2$.

$$f'\left(1^-\right) = f'\left(1^+\right) \Rightarrow - 2a =- 2 \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ para\ a = 1}.$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ y\ derivable\ \text{únicamente}\ para\ a = 1}.$

****

4º) Calcular la siguiente integral indefinida: $I = \int \frac{2x-1}{x(x+1)^2} \cdot dx$.

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2} = \frac{A\left(x^2+2x+1\right)+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2} =$$

$$= \frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2} \Rightarrow \quad A + B = 0\, 2A + B + C = 2$$

$$-2 + 1 + C = 2; \;\; C = 2 + 1 = 3.$$

$$I = \int \frac{2x-1}{x(x+1)^2} \cdot dx = \int \left[\frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} \right] \cdot dx =$$

$$= -L|x| + L|x+1| + 3 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C = L\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{3}{x+1} + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{2x-1}{x(x+1)^2} \cdot dx = L\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{3}{x+1} + C.}$$

****

5º) De todos los números positivos $x\ e\ y$ tales que $x + y = 10$, encontrar aquellos para los que el producto $P = x^2 \cdot y$ sea máximo.

$$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x.$$

$$P(x) = x^2 \cdot (10 - x) = -x^3 + 10x^2.$$

Para que una función tenga un máximo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada. Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; es necesario que la segunda derivada sea negativa para los valores que anulan la primera.

$$P'(x) = -3x^2 + 20x.$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 20x = 0;\ \ -x(3x - 20) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{20}{3}.$$

$$P''(x) = -6x + 20.$$

$$P''(0) = -6 \cdot 0 + 20 > 0 \Rightarrow Para\ mínimo.$$

$$P''\left(\frac{20}{3}\right) = -6 \cdot \frac{20}{3} + 20 = -40 + 20 = -20 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = \frac{20}{3}.$$

$$y = 10 - \frac{20}{3} = \frac{10}{3}.$$

$$\underline{El\ producto\ P = x^2 \cdot y\ es\ máximo\ para\ x = \frac{20}{3}\ e\ y = \frac{10}{3}.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dado el sistema de ecuaciones $S(a) = \{x + 2y - z = 2 \quad x + (a + 1)y - az = 2a\ x + ay + (a + 1)z = 1$:

a) Discutirlo según los distintos valores de a.

b) ¿Hay solución para $a = 2$? En caso afirmativo calcular dicha solución. En caso negativo razonar la respuesta.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\ 2\ \ -1\ 1\ a + 1\ \ -a\ 1\ a\ a + 1\ )$ y $M' = (1\ 2\ \ -1\ 1\ a + 1\ \ -a\ 1\ a\ a + 1\ \ \ 2\ 2a\ 1\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1\ 2\ \ -1\ 1\ a + 1\ \ -a\ 1\ a\ a + 1\ | = (a + 1)^2 - a - 2a + (a + 1) + a^2 - 2(a$

$= a^2 + 2a + 1 - 3a - a - 1 + a^2 = 2a^2 - 2a = 0;\ a^2 - a = 0;\ \ a(a - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = 1.$

$\underline{Para\ \{a \neq 0\ a \neq 1\ \} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D}.$

$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = (1\ 2\ \ -1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ \ 2\ 0\ 1\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 2\ 2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ | = 1 - 2 - 2 = -3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = (1\ 2\ \ -1\ 1\ 2\ \ -1\ 1\ 1\ 2\ \ \ 2\ 2\ 1\ ) \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$

.

$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I}.$

b)

$\underline{Hay\ solución\ para\ a = 2: el\ sistema\ es\ compatible\ determinado}.$

Para $a = 2$ el sistema resulta: $\{x + 2y - z = 2 \;\; x + 3y - 2z = 4 \; x + 2y + 3z = 1$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|2\ 2\ -1\ 4\ 3\ -2\ 1\ 2\ 3\ |}{2\cdot 2^2 - 2\cdot 2} = \frac{18-8-4+3+8-24}{8-4} = \frac{21-28}{4} = -\frac{7}{4}.$$

$$y = \frac{|1\ 2\ -1\ 1\ 4\ -2\ 1\ 1\ 3\ |}{4} = \frac{12-1-4+4+2-6}{4} = \frac{14-7}{4} = \frac{7}{4}.$$

$$z = \frac{|1\ 2\ 2\ 1\ 3\ 4\ 1\ 2\ 1\ |}{4} = \frac{3+4+8-6-8-2}{4} = \frac{15-16}{4} = -\frac{1}{4}.$$

$$\underline{Solución: x = -\frac{7}{4},\ y = \frac{7}{4},\ z = -\frac{1}{4}.}$$

****

2º) Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $P(2,\ -1,\ 2)$ y a la recta r de ecuación $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

Un punto y un vector director de r son $Q(0,\ 3,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ -1)$.

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{QP} = [P - Q] = (2,\ -4,\ 1)$.

La ecuación del plano pedido es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{QP}\right) \equiv |x - 2\ y + 1\ z - 2\ 2\ 1\ -1\ 2\ -4\ 1| = 0;$$

$$(x - 2) - 2(y + 1) - 8(z - 2) - 2(z - 2) - 4(x - 2) - 2(y + 1) = 0;$$

$$-3(x - 2) - 4(y + 1) - 10(z - 2) = 0;\ \ 3(x - 2) + 4(y + 1) + 10(z - 2) = 0;$$

$$3x - 6 + 4y + 4 + 10z - 20 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv 3x + 4y + 10z - 22 = 0.}$$

****

3º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-4}$, se pide:

$a)$ Hallar las asíntotas de f.

$b)$ Hallar los intervalos donde es creciente y donde es decreciente.

$c)$ ¿Tiene extremos la función f? En caso afirmativo, ¿en qué puntos?

$a)$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-4} = 1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 1}\ .$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2.$$

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -2,\ x = 2}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

$b)$

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto para los valores reales de x que anulan el denominador: $D(f) \Rightarrow R - \{-2,\ 2\}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-4)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x\cdot(x^2-4-x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x}{(x^2-4)^2}.$$

$$Para\ x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: (-\infty,\ -2) \cup (-2,\ 0)}.$$

$$Para\ x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: (0,\ 2) \cup (2,\ +\infty)}.$$

$b)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para los valores que anula la primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{\left(x^2-4\right)^2} = 0; \quad -2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{-2\cdot\left(x^2-4\right)^2+2x\cdot\left[2\cdot\left(x^2-4\right)\cdot 2x\right]}{\left(x^2-4\right)^4} = \frac{-2\cdot\left(x^2-2\right)+8x^2}{\left(x^2-4\right)^3} = \frac{-2x^2+4+8x^2}{\left(x^2-4\right)^3} = \frac{6x^2+4}{\left(x^2-4\right)^3} =$$

$$= \frac{2\cdot\left(3x^2+2\right)}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{2\cdot\left(3\cdot 0^2+2\right)}{\left(0^2-4\right)^3} = \frac{-4}{-64} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

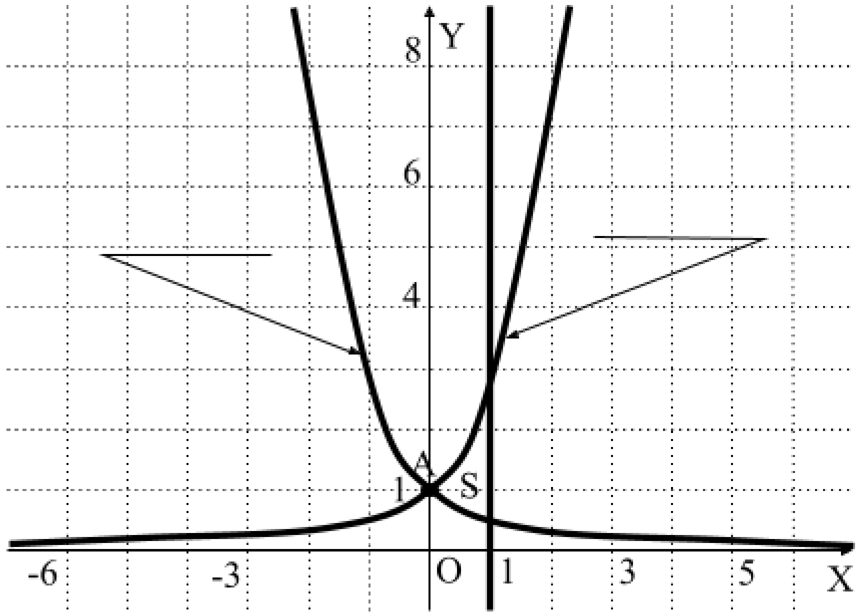
$$f(0) = \frac{0^2-3}{0^2-4} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{Mínimo: A\left(0,\ \frac{3}{4}\right)}.$$

****

4º) Representar el recinto del plano limitado por las curvas $y = e^{x}$, $y = e^{-x}$ y por la recta $x = 1$. Calcular su área.

$a)$

La funciones $f(x) = e^{x}$ y $g(x) = e^{-x}$ son simétricas con respecto al eje de ordenadas y se cortan en el punto $A(0,\ 1)$.



La función $f(x) = e^{x}$ es monótona creciente por ser $f'(x) = e^{x} > 0,\ \forall x \in R$.

Por ser $f(x) \ = 0$, el semieje –X es asíntota horizontal de $f(x) = e^{x}$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{0}^{1} \left(e^{x} - e^{-x}\right) \cdot dx = \left[e^{x} + e^{-x}\right]_{0}^{1} = \left(e^{1} + e^{-1}\right) - \left(e^{0} + e^{-0}\right) =$$

$$= e + \frac{1}{e} - (1 + 1) = e + \frac{1}{e} - 2 = \frac{e^{2}+1-2e}{e}.$$

$Nota$: $\int e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \{- x = d\ dx = - dt\} \Rightarrow - \int e^{t} \cdot dt = - e^{t} = - e^{-x}.$

$$\underline{S = \frac{e^{2}+1-2e}{e}\ u^{2} \cong 2,086\ u^{2}.}$$

****

5º) Si llamamos P a la suma de todos los números pares menores que 1.001 y T a la suma de todos los múltiplos de 3 menores que 1.001, ¿cuánto vale $P - T$?

Los números pares menores que 1.001 forman las siguiente progresión aritmética: $\div 2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdot,\ 1.000$, que tiene las siguientes características:

$a_1 = 2;\ \ d = 2;\ \ a_n = 1.000.$

La fórmula del término general de una ÷ es $a_n = a_1 + (n - 1)\cdot d$.

$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{1.000-2}{2} + 1 = \frac{998}{2} + 1 = 499 + 1 = 500.$

La suma de los términos de una ÷ es $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$.

$P = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{2+1.000}{2}\cdot 500 = \frac{1.002}{2}\cdot 500 = 501\cdot 500 = 250.500.$

Los números múltiplos de tres menores que 1.001 forman las siguiente progresión aritmética: $\div 3,\ 6,\ 9,\ \cdots\cdot,\ 999$, que tiene las siguientes características:

$a_1 = 3;\ \ d = 3;\ \ a_n = 999.$

$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{999-3}{3} + 1 = \frac{996}{3} + 1 = 332 + 1 = 333.$

$T = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{3+999}{2}\cdot 333 = \frac{1.002}{2}\cdot 333 = 501\cdot 333 = 166.833.$

$$\underline{P - T = 250.500 - 166.833 = 83.667}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE VALENCIA

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 1 \\ (a-1)y + z = 0 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}$, donde a es un parámetro real. Se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible.

b) Las soluciones del sistema cuando $a = 1$.

c) Las soluciones del sistema cuando $a = 0$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a-1 & a \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 + 1 - a = a^2 - 2a + 1 + 1 - a$

$= a^2 - 3a + 2 = 0;\ a = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{3\pm1}{2} \Rightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 2.$

$$Para \begin{cases} a\neq1 \\ a\neq2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$$

$$Para\ a\ =\ 1 \Rightarrow M^{'}\ =\ (1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \quad 1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{L_1\ =\ L_3\right\} \Rightarrow Rang\ M^{'}\ =\ 2.$$

$$Para\ a\ =\ 1 \Rightarrow Rang\ M\ =\ Rang\ M^{'}\ =\ 2\ <\ nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.$$

$$Para\ a\ =\ 2 \Rightarrow M^{'}\ =\ (1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 2\ 1 \quad 1\ 0\ 2\ ) \Rightarrow Rang\ M^{'} \Rightarrow \left\{C_2,\ C_3,\ C_4\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 2\ 2\ |\ =\ 2\ -\ 1\ =\ 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M^{'}\ =\ 3.$$

$$Para\ a\ =\ 2 \Rightarrow Rang\ M\ =\ 2;\ Rang\ M^{'}\ =\ 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible$$

$$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ \forall a \in R\ -\ \{2\}.}$$

$b)$

Para $a = 1$ el sistema resulta $\{x\ +\ y\ =\ 1\ z\ =\ 0 \quad x\ +\ y\ =\ 1$, equivalente al sistema $\{x\ +\ y\ =\ 1\ z\ =\ 0$, que es compatible indeterminado; haciendo $y\ =\ \lambda$: $x\ =\ 1\ -\ \lambda$.

$$\underline{Solución: x\ =\ 1\ -\ \lambda,\ y\ =\ \lambda,\ z\ =\ 0,\ \forall \lambda \in R.}$$

$c)$

Para $a\ =\ 0$ el sistema resulta $\{x\ +\ y\ =\ 1 \quad -\ y\ +\ z\ =\ 0\ x\ -\ z\ =\ 0$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x\ =\ \frac{|1\ 1\ 0\ 0\ -1\ 1\ 0\ 0\ -1\ |}{2}\ =\ \frac{1}{2}. \qquad y\ =\ \frac{|1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ -1\ |}{2}\ =\ \frac{1}{2}.$$

$$z\ =\ \frac{|1\ 1\ 1\ 0\ -1\ 0\ 1\ 1\ 0\ |}{2}\ =\ \frac{1}{2}.$$

$$\underline{Solución: x\ =\ y\ =\ z\ =\ \frac{1}{2},\ \ \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Se tiene el plano $\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$, la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto $A(1, 1, 1)$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

$a)$ La recta r que pasa por A, corta a la recta s y es paralela al plano π.

$b)$ El plano β que pasa por A, es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s.

$c)$ Discute si el punto $P(3, 2, 1)$ está en la recta t paralela a s que pasa por $Q(5, 3, 1)$.

$a)$

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es $s \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

Un punto genérico de s es $B(2\lambda, \lambda, 0)$.

Un vector director de r es:

$$\vec{v}_r = \vec{AB} = B - A = [(2\lambda, \lambda, 0) - (1, 1, 1)] = (2\lambda - 1, \lambda - 1, -1).$$

Un vector normal del plano $\pi \equiv x - y + z - 3 = 0$ es $\vec{n} = (1, -1, 1)$.

Por ser la recta r paralela al plano π, el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, por lo cual, su producto escalar es cero:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (2\lambda - 1, \lambda - 1, -1) \cdot (1, -1, 1) = 0;\ \ 2\lambda - 1 - \lambda + 1 - 1 = 0;$$

$$\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \vec{v}_r = (2 \cdot 1 - 1, 1 - 1, -1) = (1, 0, -1).$$

La expresión de r dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas, es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 \\ z = 1 - \mu \end{cases}}.$$

$b)$

Un vector director de la recta s es $\vec{v}_s = (2, 1, 0)$.

El plano β, por per perpendicular a π, tiene como vector director al vector normal de π y, por ser paralelo a la recta s, también tiene como vector director al vector director de s. La expresión general de β es la siguiente:

$$\beta\left(A; \vec{n}, \vec{v}_s\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$2(y - 1) + (z - 1) + 2(z - 1) - (x - 1) = 0;$

$-(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0; \quad -x + 1 + 2y - 2 + 3z - 3 = 0.$

$$\underline{\beta \equiv x - 2y - 3z + 4 = 0}.$$

$c)$

La recta t paralela a s que pasa por $Q(5, 3, 1)$ es $t\equiv\{x = 5 + 2\delta \; y = 3 + \delta \;\; z = 1$.

Para que el punto $P(3, 2, 1)$ pertenezca a la recta t tiene que satisfacer su ecuación:

$t\equiv\{x = 5 + 2\delta \; y = 3 + \delta \;\; z = 1 \quad \Rightarrow 5 + 2\delta = 3 \;\; 3 + \delta = 2\,\}\Rightarrow\delta = -1\Rightarrow P(3,$
.

$\underline{El\ punto\ P(3, 2, 1)\ est\acute{a}\ en\ la\ recta\ paralela\ a\ s\ que\ pasa\ por\ Q(5, 3, 1)}.$

****

3º) Consideramos la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx\cdot \cos cos\,(\pi x)$, que depende de los parámetros a, b, c. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La relación entre los coeficientes a, b, c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$.

b) La relación que deben verificar los coeficientes a, b y c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$.

c) $I = \int_0^1 x\cdot \cos cos\,(\pi x)\cdot dx$.

----

a)

$$f(1) = 22 \Rightarrow a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1\cdot \cos cos\,(\pi\cdot 1) = 22;$$

$$a + b + c\cdot \cos cos\,\pi = 22;\ \ a + b + c\cdot(-1) = 22 \Rightarrow \underline{a + b - c = 22}.$$

b)

El punto P tiene la siguiente expresión: $P[1,\ f(1)] \approx P(1,\ 22)$.

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto, por lo cual, por ser la recta horizontal es $m = f'(1) = 0$.

$$f(x) = 3ax^2 + 2bx + c\cdot[1\cdot \cos cos\,(\pi x) + \pi x\cdot sen\,(\pi x)] =$$

$$= 3ax^2 + 2bx + c\cdot \cos cos\,(\pi x) + c\cdot\pi x\cdot sen\,(\pi x).$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 + c\cdot \cos cos\,(\pi\cdot 1) + c\cdot\pi\cdot 1\cdot sen\,(\pi\cdot 1) = 0;$$

$$3a + 2b + c\cdot(-1) + c\cdot\pi\cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{3a + 2b - c = 0}.$$

c)

$$I = \int_0^1 x\cdot \cos cos\,(\pi x)\cdot dx.$$

Se resuelve, en primer lugar, la integral indefinida:

$$A = \int x\cdot \cos cos\,(\pi x)\cdot dx \Rightarrow \{ u = x \to du = dx\ \ \cos cos\,(\pi x)\cdot dx = dv \to v = \frac{1}{\pi}\cdot(\pi x$$

$$\Rightarrow x\cdot\frac{1}{\pi}\cdot(\pi x) - \int\frac{1}{\pi}\cdot(\pi x)\cdot dx = \frac{x}{\pi}\cdot(\pi x) - \frac{1}{\pi}\int(\pi x)\cdot dx =$$

$$= \frac{x}{\pi}\cdot(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\cdot\cos cos\,(\pi x) = A.$$

$$I = \int_0^1 x\cdot\cos cos\,(\pi x)\cdot dx = \left[\frac{x}{\pi}\cdot(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\cdot\cos cos\,(\pi x)\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}\cdot\pi + \frac{1}{\pi^2}\cdot\cos cos\,\pi\right] - \left[\frac{0}{\pi}\cdot 0 + \frac{1}{\pi^2}\cos cos\,0\right] = 0 + \frac{1}{\pi^2}\cdot\cos cos\,\pi - 0 - \frac{1}{\pi^2}\cdot co$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\cdot(-1) - \frac{1}{\pi^2}\cdot 1 = -\frac{2}{\pi^2}.$$

$$\underline{I = \int_0^1 x\cdot\cos cos\,(\pi x)\cdot dx = -\frac{2}{\pi^2}.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Resolver los siguientes apartados, *escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Dados $A\ y\ B$, matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A\ y\ BA = B$, deducir que $A^2 = A\ y\ B^2 = B$.

b) Dada la matriz $A = (1\ 0\ 0\ 0\ )$, se pide encontrar los parámetros $a,\ b$ para que la matriz $B = (a\ 0\ 1\ b\ )$ cumpla que $B^2 = B$ pero $AB \neq A\ u\ BA \neq B$.

c) Sabiendo que $|x\ 1\ 0\ y\ 2\ 1\ z\ 3\ 2\ | = 3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes
$|2x\ 1\ 0\ 2y\ 2\ 1\ 2z\ 3\ 2\ |\ y\ |x + 1\ 1\ 0\ y + 3\ 2\ 1\ z + 5\ 3\ 2\ |$.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = (A \cdot B) \cdot A = A \cdot B \cdot A = A \cdot (B \cdot A) = A \cdot B = \underline{A,\ c.q.d.}$$

$$B^2 = B \cdot B = (B \cdot A) \cdot B = B \cdot A \cdot B = B \cdot (A \cdot B) = B \cdot A = \underline{B,\ c.q.d.}$$

b)

$$B^2 = B \cdot B = (a\ 0\ 1\ b\ ) \cdot (a\ 0\ 1\ b\ ) = \left(a^2\ 0\ a + b\ b^2\right).$$

$$B^2 = B \Rightarrow \left(a^2\ 0\ a + b\ b^2\right) = (a\ 0\ 1\ b\ ) \Rightarrow \{a^2 = a \quad a + b = 1\ b^2 = b \quad \} \Rightarrow \{1 \rightarrow a =$$

.

$$1 \rightarrow a = 1,\ b = 0 \Rightarrow A \cdot B = (1\ 0\ 0\ 0\ ) \cdot (1\ 0\ 1\ 0\ ) = (1\ 0\ 0\ 0\ ) = A \Rightarrow No\ vale.$$

$$2 \rightarrow a = 0,\ b = 1 \Rightarrow A \cdot B = (1\ 0\ 0\ 0\ ) \cdot (0\ 0\ 1\ 1\ ) = (0\ 0\ 0\ 0\ ) \neq A \Rightarrow Si\ vale.$$

$$2 \rightarrow a = 0,\ b = 1 \Rightarrow B \cdot A = (0\ 0\ 1\ 1\ ) \cdot (1\ 0\ 0\ 0\ ) = (0\ 0\ 1\ 0\ ) \neq B \Rightarrow Si\ vale.$$

$\underline{Los\ valores\ que\ cumplen\ las\ condiciones\ pedidas\ son\ a = 0\ y\ b = 1}.$

c)

$$|2x\ 1\ 0\ 2y\ 2\ 1\ 2z\ 3\ 2\ | = 2 \cdot |x\ 1\ 0\ y\ 2\ 1\ z\ 3\ 2\ | = 2 \cdot 3 = \underline{6}.$$

Se ha utilizado la propiedad de los determinantes de que si se multiplica o divide una línea de un determinante por un valor real, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho valor real.

$$|x + 1\ 1\ 0\ y + 3\ 2\ 1\ z + 5\ 3\ 2\ | = |x\ 1\ 0\ y\ 2\ 1\ z\ 3\ 2\ | + |1\ 1\ 0\ 3\ 2\ 1\ 5\ 3\ 2\ | = 3 +$$

.

Se han utilizado las dos siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene una línea que es combinación lineal de otras líneas su valor es cero. (en el 2º determinante la primera columna es la suma de las otras dos)

****

2º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y - z = 8 \end{cases}$, se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) La ecuación del plano π que es paralelo a la recta r y pasa por los puntos $A(5,\ 0,\ 1)$ y $B(4,\ 1,\ 0)$.

c) La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior.

----

a)

$r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y - z = 8 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda;\ x = 3 - \lambda;\ z = x + 4y - 8 =$

$= 3 - \lambda + 4\lambda - 8 = -5 + 3\lambda = z \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -5 + 3\lambda \end{cases}}$

.

b)

Un vector director de la recta r es $\vec{v_r} = (-1,\ 1,\ 3)$.

Los puntos A y B determinan el vector $\vec{BA} = [A - B] = (1,\ -1,\ 1)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$\pi\left(A;\ \vec{v_r},\ \vec{BA}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 5 & y & z - 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

$(x - 5) + 3y + (z - 1) - (z - 1) + 3(x - 5) + y = 0;\ \ 4(x - 5) + 3y = 0;$

$(x - 5) + y = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x + y - 5 = 0}$.

c)

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1,\ 1,\ 0)$.

$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = (-1,\ 1,\ 3) \cdot (1,\ 1,\ 0) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow$ La recta r es paralela al plano π.

La distancia de la recta r al plano π es la misma que la distancia de cualquier punto de la recta al plano. Un punto de la recta r es $P(3,\ 0,\ -5)$.

La distancia de un punto $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$

viene dada por la fórmula $d\left(P_0, \pi\right) = \frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(3,\ 0,\ -5)$ y al plano $\pi \equiv x + y - 5 = 0$:

$$d(r,\ \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1\cdot 3+1\cdot 0+0\cdot(-5)-5|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|3+0+0-5|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{2}\ unidades}.$$

****

3º) Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de 600 cm^2 de área de manera que por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y a derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

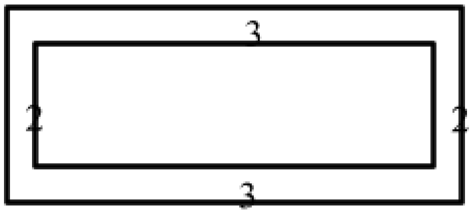
a) El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R.

b) El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima.

c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima.

----

a)



De la observación de la figura se deduce que:

$(x - 4)(y - 6) = 600;\ xy - 6x - 4y + 24 = 600;\ xy - 6x - 4y = 576;$

$xy - 4y = 576 + 6x;\ y(x - 4) = 576 + 6x \Rightarrow y = \frac{576+6x}{x-4}.$

Sustituyendo el valor de y en la expresión de la superficie:

$$S(x,\ y) = x \cdot y \Rightarrow S(x) = x \cdot \frac{576+6x}{x-4} = 6 \cdot \frac{96x+x^2}{x-4}.$$

$$\underline{S(x) = 6 \cdot \frac{96x+x^2}{x-4}.}$$

b)

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S'(x) = 6 \frac{(96+2x)\cdot(x-4)-\left(96x+x^2\right)\cdot 1}{(x-4)^2} = 6 \frac{96x-384+2x^2-8x-96x-x^2}{(x-4)^2} = 6 \frac{x^2-8x-384}{(x-4)^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 6 \cdot \frac{x^2-8x-384}{(x-4)^2} = 0;\ x^2 - 8x - 384 = 0;\ x = \frac{8 \pm \sqrt{64+1.536}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{1.600}}{2} = \frac{8 \pm 40}{2} = 4 \pm 20 \Rightarrow \{x_1 = -16 < 0 \quad x_2 = 24 \qquad .$$

La raíz negativa carece de sentido, por lo cual: $x = 24$.
Se justifica a continuación que el valor hallado es para mínimo:

$$S''(x) = 6 \frac{(2x-8)\cdot(x-4)^2 - (x^2-8x-384)\cdot[2(x-4)\cdot 1]}{(x-4)^4} = 6 \frac{(2x-8)\cdot(x-4) - 2(x^2-8x-384)}{(x-4)^3} =$$

$$= 6\cdot \frac{2x^2-8x-8x+32-2x^2+16x+768}{(x-4)^3} = 6\cdot \frac{800}{(x-4)^3} = \frac{5.400}{(x-4)^3}.$$

$$S''(24) = \frac{5.400}{(24-4)^3} = \frac{540}{(20)^3} > 0 \Rightarrow Mínimo,\ c.\ q.\ j.$$

$$\underline{x = 24\ cm.}$$

$c)$

$$y = \frac{576+6\cdot 24}{24-4} = \frac{576+144}{20} = \frac{720}{20} = 36.$$

$\underline{La\ cartulina\ de\ \acute{a}raa\ m\acute{i}nima\ tiene\ 24\ cm\ de\ base\ y\ 36\ cm\ de\ altura.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE VALENCIA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se tiene el sistema de ecuaciones $\{y - z = 1 - a \quad -x + z = 5 \quad -ax + y - z = 1$, donde a es un parámetro real. Se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado.

b) Las soluciones del sistema cuando $a = 3$.

c) Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (0\ 1\ -1\ -1\ 0\ 1\ -a\ 1\ -1)$ y $M' = (0\ 1\ -1\ -1\ 0\ 1\ -a\ 1\ -1\quad 1-a\ 5\ 1)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |0\ 1\ -1\ -1\ 0\ 1\ -a\ 1\ -1| = 1 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = 0.$

$\underline{Para\ a \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

b)

Para $a = 3$ el sistema es $\{y - z = -2 \quad -x + z = 5 \quad -3x + y - z = 1$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|-2\ 1\ -1\ 5\ 0\ 1\ 1\ 1\ -1\ |}{-3} = \frac{-5+1+2+5}{-3} = \frac{3}{-3} =- \ 1.$$

$$y = \frac{|0\ -2\ -1\ -1\ 5\ 1\ -3\ 1\ -1\ |}{-3} = \frac{1+6-15+2}{-3} = \frac{9-15}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

$$z = \frac{|0\ 1\ -2\ -1\ 0\ 5\ -3\ 1\ 1\ |}{-3} = \frac{2-15+1}{-3} = \frac{3-15}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4.$$

$$\underline{Solución: x =- \ 1, \ \ y = \ 2, \ \ z = \ 4}.$$

$c)$

$Para\ a = 0 \Rightarrow M^{'} = (0\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ \ \ \ 1\ 5\ 1\ ) \Rightarrow \{F_1 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M^{'} = 2$
.

$$\underline{Para\ a = \ 0 \Rightarrow Rang\ M = \ Rang\ M^{'} = \ 2 < \ nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I}.$$

Para $a = 0$ el sistema es $\{y - z = 1 \quad - x + z = 5\, y - z = 1$, equivalente a $\{y - z = 1 \quad - x + z = 5$, que es compatible indeterminado. Haciendo $z = \lambda$:

$$\underline{Solución: x =- \ 5 \ + \ \lambda, \ \ y \ = \ 1 \ + \ \lambda, \ \ z \ = \ \lambda, \ \ \forall\lambda \in R}.$$

****

2º) Dados los puntos $A(-1, 2, \lambda)$, $B(2, 3, 5)$ y $C(3, 5, 3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A, B y C.

b) El área del triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$.

c) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$
.

----

a)

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(2, 3, 5) - (-1, 2, \lambda)] = (3, 1, 5 - \lambda)$.

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(3, 5, 3) - (-1, 2, \lambda)] = (4, 3, 3 - \lambda)$.

$\overrightarrow{BC} = [C - B] = [(3, 5, 3) - (2, 3, 5)] = (1, 2, -2)$.

Por ser el segmento AC la hipotenusa del triángulo rectángulo, el ángulo recto es el vértice B, por lo cual, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ tienen que ser perpendiculares.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow (3, 1, 5 - \lambda) \cdot (1, 2, -2) = 3 + 2 - 10 + 2\lambda = 0;$

$2\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{2}$.

$\underline{El\ triángulo\ es\ rectángulo\ en\ B\ para\ \lambda = \frac{5}{2}}$.

b)

Cuando $\lambda = 6$ es $\overrightarrow{AB} = (3, 1, -1)$ y $\overrightarrow{AC} = (4, 3, -3)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \|i\ j\ k\ 3\ 1\ -1\ 4\ 3\ -3\ \| = \frac{1}{2} \cdot |-3i - 4j + 9k - 4k + 3i +$

$= \frac{1}{2} \cdot |5j + 5k| = \frac{5}{2} \cdot |j + k| = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2} = \underline{\frac{5\sqrt{2}}{2} u^2}.$

$c)$

Para $\lambda = 6$ es $\overrightarrow{AB} = (3, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (4, 3, -3)$.

Considerando, por ejemplo, el punto $B(2, 3, 5)$, la ecuación del plano pedido es la siguiente:

$\pi\left(B; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv |x - 2\ y - 3\ z - 5\ 3\ 1\ -1\ 4\ 3\ -3| = 0;$

$-3(x - 2) - 4(y - 3) + 9(z - 5) - 4(z - 5) + 3(x - 2) + 9(y - 3) = 0;$

$5(y - 3) + 5(z - 5) = 0;\ \ y - 3 + z - 5 = 0.$

$$\underline{\pi \equiv y + z - 8 = 0}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.

c) El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas $x = 2\ y\ x = 3$.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto para los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 - x = 0;\ \ x(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{0,\ 1\}}$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = 0 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 0\ (Eje\ X)}\ .$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = 0\ (Eje\ Y),\ x = 1}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{-1\cdot(2x-1)}{\left(x^2-x\right)^2} = \frac{1-2x}{\left(x^2-x\right)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-2x}{\left(x^2-2\right)^2} = 0;\ \ 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

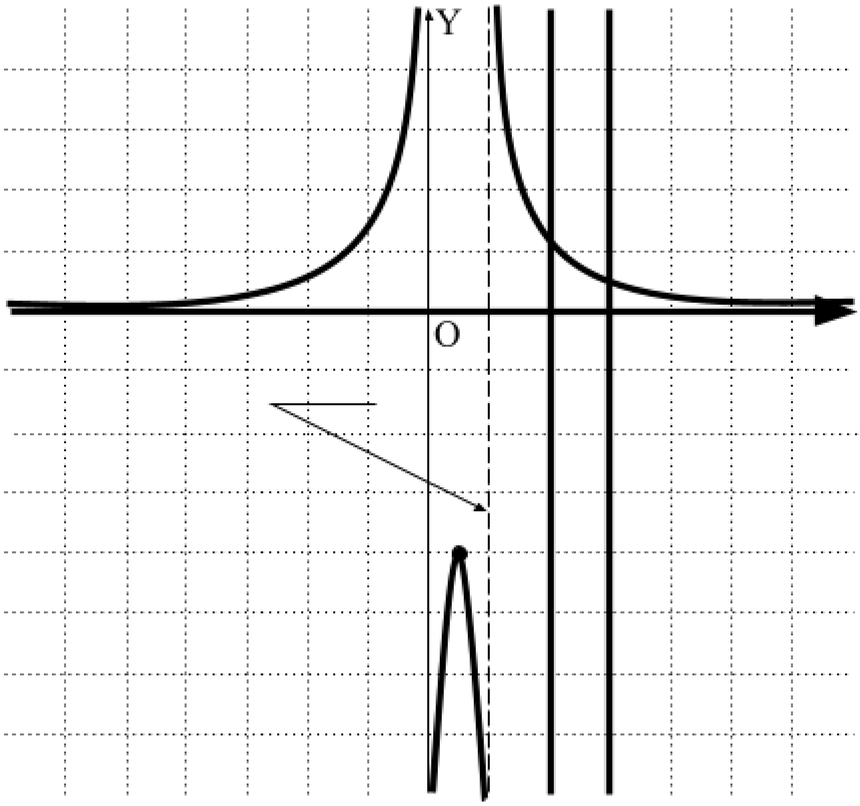
$$Para\ x < \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento:\ (-\infty,\ 0) \cup \left(0,\ \frac{1}{2}\right)}.$$

$Para\, x > \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: \left(\frac{1}{2},\ 1\right) \cup (1,\ +\infty)}.$

$c)$

Para ilustrar la resolución de este apartado se hace una representación gráfica, aproximada, de la función, para lo cual se tiene en cuenta que la función tiene un máximo relativo para $x = \frac{1}{2}$, como puede deducirse de los periodos de crecimiento y de decrecimiento.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1-2}{4}} = -4 \Rightarrow Máximo: A\left(\frac{1}{2},\ -4\right).$$



La superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_2^3 f(x) \cdot dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2 - x} \cdot dx. \quad (*)$$

$$I = \int \frac{1}{x^2 - x} \cdot dx.$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -4,\ x_2 = 2.$$

$$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2).$$

$\frac{1}{x^2-x} = \frac{M}{x} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx-M+Nx}{x(x+4)} = \frac{(M+N)x+(-M)}{x^2-x} \Rightarrow M + N = 0 \quad - M = 1 \} \Rightarrow M =- 1;$

.

$$I = \int \frac{dx}{x^2-x} = \int\left(\frac{M}{x} + \frac{N}{x-1}\right)\cdot dx = \int\left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)\cdot dx =- Lx + L|x - 1| + C =$$

$$= L\left|\frac{x-1}{x}\right| + C.$$

Sustituyendo este valor de la integral indefinida en (*):

$$S = \int_2^3 \frac{1}{x^2-x}\cdot dx = \left(L\left|\frac{3-1}{3}\right|\right) - \left(L\left|\frac{2-1}{2}\right|\right) = L\frac{2}{3} - L\frac{1}{2} = L2 - L3 - L1 + L2 =$$

$$= 2L2 - L3 - 0 = L\frac{4}{3}.$$

$$\underline{S = L\frac{4}{3}\, u^2 \cong 0,29\, u^2}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = aA + bI$.

b) Los valores de a y β para los cuales $A^4 = aA + \beta I$.

c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2.

----

a)

$$A^2 + 2A = 3I;\ \ A\cdot(A + 2I) = 3I;\ \ A\cdot\left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I\right) = I.$$

Por definición de inversa de una matriz: $A\cdot A^{-1} = I$:

$$A\cdot\left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I\right) = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I.$$

Como se nos dice que $A^{-1} = aA + bI \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{3}\ y\ b = \frac{2}{3}}$.

b)

$$A^2 + 2A = 3I;\ \ A^2 = 3I - 2A \Rightarrow A^4 = A^2\cdot A^2 = (3I - 2A)\cdot(3I - 2A).$$

$$A^4 = 9I^2 - 6IA - 6AI + 4A^2 = 9I - 12A + 4A^2 =$$

$$= 9I - 12A + 4\cdot(3I - 2A) = 9I - 12A + 12I - 8A = -20A + 21I.$$

Como se nos dice que $A^4 = aA + \beta IbI \Rightarrow \underline{a = -20\ y\ \beta = 21}$.

c)

$$|B| = 2.$$

Por ser B una matriz cuadrada de orden 3 es:

$$\left|2B^{-1}\right| = 2^3\cdot\left|B^{-1}\right| = 8\cdot\left|\frac{1}{B}\right| = 8\cdot\frac{1}{|B|} = 8\cdot\frac{1}{2} = 4.$$

$$\underline{\left|2B^{-1}\right| = 4}.$$

****

2º) Dados el punto $A(5,\ 7,\ 3)$ y la recta $r\equiv\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$, se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La recta s que corta a la recta r, pasa por el punto A, y es perpendicular a r.

b) La distancia del punto A a la recta r.

c) La distancia del punto $B(1,\ 1,\ 1)$ al plano π que pasa por $P(3,\ -1,\ 0)$ y es perpendicular a la recta r.

----

a)

Un punto y un vector director de r son $C(3,\ -1,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,\ -3,\ -2)$

.

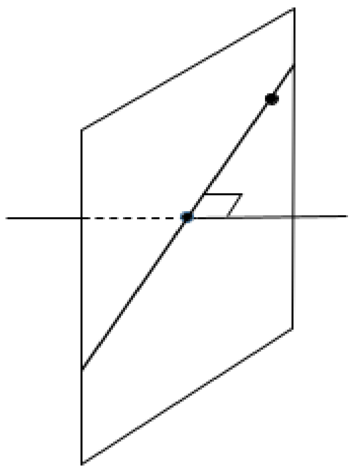
El haz de planos perpendiculares a r es $\alpha\equiv x-3y-2z+D=0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano β que contiene al punto $A(5,\ 7,\ 3)$ es el que satisface su ecuación:

$\alpha\equiv x-3y-2z+D=0 \qquad A(5,\ 7,\ 3)\}\Rightarrow 5-3\cdot 7-2\cdot 3+D=0;\ 5-$

$5-27+D=0;\ -22+D=0\Rightarrow D=22\Rightarrow$

$\Rightarrow\beta\equiv x-3y-2z+22=0$.



La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r\equiv\{x=3+\lambda \quad y=-1-3\lambda\ z=-2\lambda$.

El punto Q de intersección de r y β es el siguiente:

$\alpha\equiv x-3y-2z+22=0 \qquad r\equiv\{x=3+\lambda \quad y=-1-3\lambda\ z=-2\lambda$

$3+\lambda+3+9\lambda+4\lambda+22=0;\ 14\lambda+28=0\Rightarrow\lambda=-2.$

$\{x=3+\lambda \quad y=-1-3\lambda\ z=-2\lambda \quad \}\Rightarrow\lambda=-2\Rightarrow\{x=3-2=1 \qquad y=-$

.

Un vector director de la recta pedida s es $\overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{QA}=[A-Q]=(4,\ 2,\ -1)$

.

$$\underline{s \equiv \{x = 5 + 4\mu\, y = 7 + 2\mu\, z = 3 - \mu}\,.$$

$b)$

Por ser perpendiculares las rectas r y s, la distancia del punto A a la recta r es equivalente al módulo del vector $\overrightarrow{QA}$:

$$d(A,\ r) = \left|\overrightarrow{QA}\right| = \sqrt{(5\ -\ 1)^2 + (7\ -\ 5)^2 + (3\ -\ 4)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-\ 1)^2} =$$

$$= \sqrt{16\ +\ 4\ +\ 1} = \sqrt{21}.$$

$$\underline{d(A,\ r) = \sqrt{21}\ unidades}.$$

$c)$

De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $P(3,\ \ -\ 1,\ 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\alpha \equiv x\ -\ 3y\ -\ 2z\ +\ D\ =\ 0 \qquad P(3,\ \ -\ 1,\ 0)\ \} \Rightarrow 3\ -\ 3\cdot(-\ 1) -\ 2\cdot 0\ +\ D\ =\ 0$$

$$6\ +\ D\ =\ 0 \Rightarrow D\ =-\ 6 \Rightarrow \pi \equiv x\ -\ 3y\ -\ 2z\ -\ 6\ =\ 0.$$

La distancia de un punto $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ al plano $\gamma \equiv Ax\ +\ By\ +\ Cz\ +\ D\ =\ 0$ viene dada por la fórmula $d\left(P_0, \gamma\right) = \frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv x\ -\ 3y\ -\ 2z\ -\ 6\ =\ 0$ y al punto $B(1,\ 1,\ 1)$:

$$d(B, \pi) = \frac{|1\cdot 1-3\cdot 1-2\cdot 1-6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2}} = \frac{|1-3-2-6|}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{10\sqrt{14}}{14} = \underline{\frac{5\sqrt{14}}{7}\ unidades}.$$

****

3º) Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud x, se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud $100 - x$, se construye un cuadrado. Se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

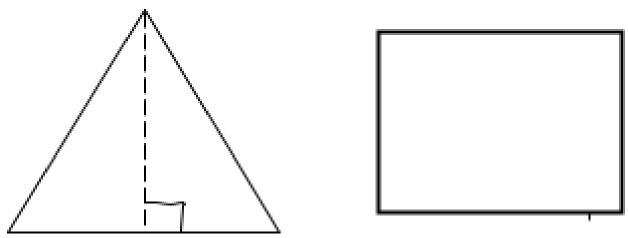
a) La función de variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \leq x \leq 100$.

b) El valor de la variable x en el intervalo $[0,\ 100]$ para el cual dicha función (suma de las áreas en función de x obtenida en el apartado anterior) alcanza su mínimo valor.

c) El valor de la variable x en el intervalo $[0,\ 100]$ para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido.

----

a)



$$h = \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{4x^2 - x^2}{36}} = \sqrt{\frac{3x^2}{36}} = \frac{\sqrt{3}}{6}x$$

$$S_T(x) = S_t(x) + S_c(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}x + \left(\frac{100-x}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{10.000 - 200x + x^2}{16} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}x^2 + 90.000 - 1.800x + 9x^2}{144}.$$

$$\underline{S_T(x) = \frac{1}{144} \cdot \left[\left(4\sqrt{3} + 9\right)x^2 - 1.800x + 90.000\right].}$$

b)

Para que una función tenga un mínimo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'_T(x) = \frac{1}{144} \cdot \left[2\left(4\sqrt{3} + 9\right)x - 1.800\right].$$

$$S'_T(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{144} \cdot \left[2\left(4\sqrt{3} + 9\right)x - 1.800\right] = 0;\ \ 2\left(4\sqrt{3} + 9\right)x - 1.800 = 0;$$

$\left(4\sqrt{3} + 9\right)x - 900 = 0 \Rightarrow x = \frac{900}{4\sqrt{3}+9} = \frac{900\cdot\left(4\sqrt{3}-9\right)}{\left(4\sqrt{3}+9\right)\left(4\sqrt{3}-9\right)} = \frac{900\cdot\left(4\sqrt{3}-9\right)}{48-81} = \frac{900\cdot\left(9-4\sqrt{3}\right)}{33} =$

$= \frac{300\cdot\left(9-4\sqrt{3}\right)}{11}.$

Para justificar la condición de que se trata de un mínimo se tiene en cuenta que la condición necesaria anterior de mínimo no es suficiente: para que existe el mínimo es necesario que sea positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S_T''(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{144}\cdot\left[2\left(4\sqrt{3} + 9\right)\right] = \frac{4\sqrt{3}+9}{72} > 0 \Rightarrow Mínimo,\ c.q.j.$$

$$\underline{x = \frac{300\cdot\left(9-4\sqrt{3}\right)}{11}\ cm \cong 56,50\ cm.}$$

Por no tener más que una solución la primera derivada no existe la condición de máximo en el intervalo $(0,\ 100)$, por lo cual, el máximo tiene que darse en uno de los extremos del intervalo $[0,\ 100]$.

$$S_T(0) = \frac{1}{144}\cdot\left[\left(4\sqrt{3} + 9\right)\cdot 0^2 - 1.800\cdot 0 + 90.000\right] = \frac{90.000}{144} = 625.$$

$$S_T(100) = \frac{1}{144}\cdot\left[\left(4\sqrt{3} + 9\right)\cdot 100^2 - 1.800\cdot 100 + 90.000\right] =$$

$= \frac{100}{144}\cdot\left[\left(4\sqrt{3} + 9\right)\cdot 100 - 1.800 + 900\right] = \frac{25}{36}\cdot\left[\left(4\sqrt{3} + 9\right)\cdot 100 - 900\right] =$

$= \frac{2.500}{36}\cdot\left(4\sqrt{3} + 9 - 9\right) = \frac{625}{9}\cdot 4\sqrt{3} = 481,13.$

$$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ para\ x = 0}.$$

La interpretación geométrica es que no existe el triángulo y los 100 cm se utilizan para construir un cuadrado de 25 cm de lado.

****