MATEMÁTICAS aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2018

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

1º) a) Plantee, sin resolver, las restricciones de este problema e indique la función a optimizar: "Un ganadero alimenta a sus ovejas con maíz y pienso. Cada kilogramo de maíz aporta 600 g de hidratos de carbono y 200 g de proteínas, mientras que cada kilogramo de pienso aporta 300 g de hidratos de carbono y 600 g de proteínas. Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1.800 g de hidratos de carbono y 2.400 g de proteínas. Si 1 kg de maíz cuesta 0,50 euros y 1 kg de pienso cuesta 0,25 euros, calcule cuántos kilogramos de cada producto tendría que comprar el ganadero para alimentar cada día a una oveja con un gasto mínimo".

b) Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices: $x \geq 0,\ \ x \leq 2y + 2,\ \ x + y \leq 5$. Calcule el máximo de $F(x,\ y) = 4x + 3y$ en este recinto, así como el punto donde se alcanza.

----

a)

Sean $x\,e\,y$ los números de kg de maíz y pienso que se utilizan, respectivamente.

El sistema de inecuaciones que se deduce del enunciado y que constituyen las restricciones, es el siguiente:

$0,6x + 0,3y \leq 1,8\ \ 0,2x + 0,6y \leq 2,4 \quad x \geq 0;\ y \geq 0\ \}\ \ \underline{2x + y \geq 6\ \ \ x + 3y \geq 8\ x \geq 0;\ y}$

.

La función de objetivos, que debe de ser mínima, es: $\underline{f(x,\ y) = 0,5x + 0,25y}$.

$b)$

El sistema de inecuaciones que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x \geq 0 \; x \leq 2y + 2 \;\; x + y \leq 5 \} \;\; x - 2y \leq 2 \quad x + y \leq 5 \qquad x \geq 0 \}.$$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

x	2	6
y	0	2

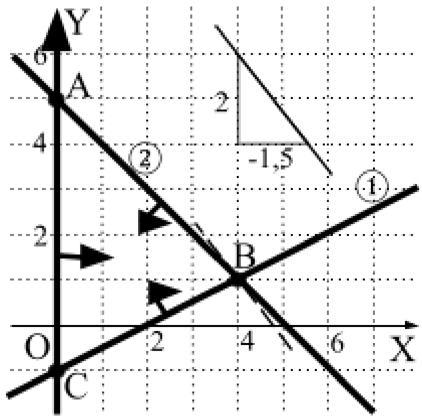
① $\Rightarrow x - 2y \leq 2 \Rightarrow y \geq \frac{x-2}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

x	5	0
y	0	5

② $\Rightarrow x + y \leq 5 \Rightarrow y \leq 5 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow x + y = 5 \qquad x = 0 \} \Rightarrow A(0,\ 5).$



$B \Rightarrow \quad x - 2y = 2 \; 2x + 2y = 10 \} \Rightarrow 3x = 12;\ \ x = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(4,\ 1).$

$C \Rightarrow \qquad x = 0 \; x - 2y = 2 \} \Rightarrow C(0,\ -1).$

La función de objetivos es: $F(x,\ y) = 4x + 3y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow F(0,\ 5) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 0 + 15 = 15.$

$B \Rightarrow F(4,\ 1) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 16 + 3 = 19.$

$C \Rightarrow F(0,\ -1) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 0 - 3 = -3.$

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$F(x,\ y) = 4x + 3y = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x \Rightarrow m = -\frac{2}{1{,}5}.$$

$$\underline{El\ máximo\ se\ alcanza\ en\ el\ punto\ B(4,\ 1)}.$$

****

2º) La función de costes de una empresa se pueden determinar mediante la siguiente expresión: $f(x) = 40 - 6x + x^2$, para $x \geq 0$, donde x representa la cantidad producida de un determinado artículo.

a) ¿Disminuye el coste alguna vez? Determine la cantidad producida de dicho artículo cuando el coste es mínimo y cuál es dicho coste.

b) ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo? Si el coste fuese 80, ¿cuántas serían las unidades producidas?

c) Represente gráficamente la función.

----

a)

El coste disminuirá cuando la función sea decreciente.

Una función es decreciente cuando su derivada es negativa.

$$f'(x) = -6 + 2x.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6 + 2x = 0;\ \ -3 + x = 0 \Rightarrow x = 3.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x < 3,\ \forall x \in D(f).$$

$$\underline{El\ coste\ disminuye\ cuando\ cuando\ se\ producen\ menos\ de\ 3\ artículos}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un mínimo relativo es que se anule su primera derivada y sea positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 3.$$

$$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ cuando\ se\ producen\ 3\ artículos}.$$

$$f(3) = 40 - 6 \cdot 3 + 3^2 = 40 - 18 + 9 = 31.$$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 31\ unidades\ monetarias}.$$

$b)$

$$f(0) = 40 - 6 \cdot 0 + 0^2 = 40.$$

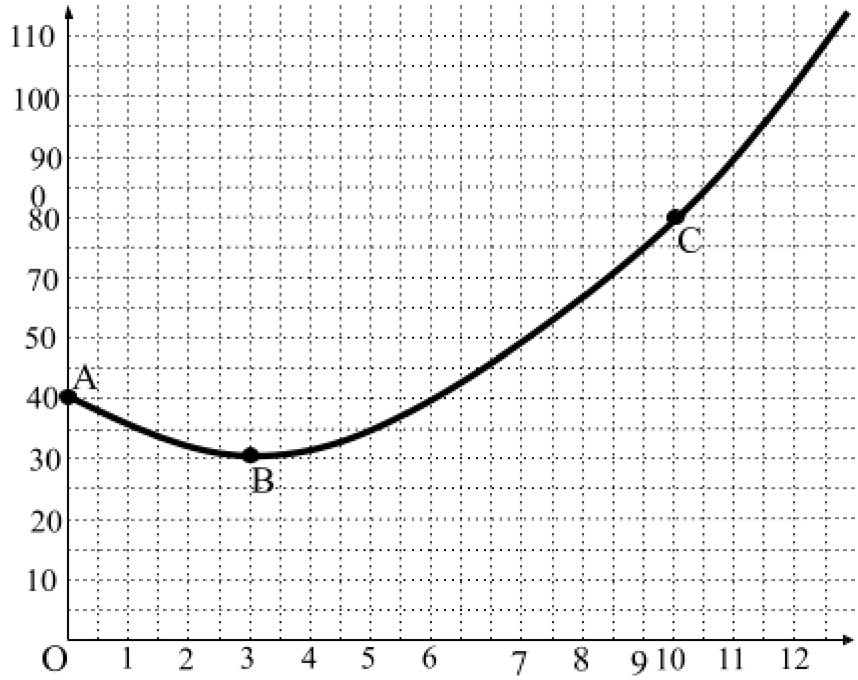
$\underline{Si\ no\ se\ produce\ nada\ el\ coste\ es\ de\ 40\ unidades\ monetarias}.$

$$f(x) = 80 \Rightarrow 40 - 6x + x^2 = 80;\ \ x^2 - 6x - 40 = 0;\ \ x = \frac{6 \pm \sqrt{36+160}}{2} =$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2} = 3 \pm 7 \Rightarrow x_1 = -4 \notin D(f),\ x_2 = 10.$$

$\underline{Cuando\ el\ coste\ es\ de\ 80\ unidades\ monetarias\ se\ producen\ 10\ unidades}.$

$c)$



****

3º) En una determinada población residen 5.000 personas en el centro y 10.000 en la periferia. Se sabe que el 95 % de los residentes en el centro y que el 20 % de los que viven en la periferia opina que el Ayuntamiento debería restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población:

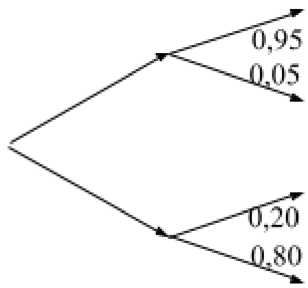
a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso?

c) Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad?

----

a)



$$P = P(R) = P(Ce \cap R) + P(Pe \cap R) =$$

$$= P(Ce) \cdot P(R/C) + P(Pe) \cdot P(R/Pe) = \frac{1}{3} \cdot 0,95 + \frac{2}{3} \cdot 0,20 = 0,3167 + 0,1333 =$$

$$= \underline{0,45}.$$

b)

$$P = P(Ce \cap R) = P(Ce) \cdot P(R/C) = \frac{1}{3} \cdot 0,95 = \underline{0,3167}.$$

c)

$$P = P(Ce/R) = \frac{P(Ce \cap R)}{P(R)} = \frac{P(Ce) \cdot P(R/C)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,95}{0,45} = \frac{0,3167}{0,45} = \underline{0,7038}.$$

****

4º) Se dispone de cuatro tornillos de 1, 2, 3 y 4 gramos de peso, respectivamente.

a) Mediante muestreo aleatoria simple, exprese todas las muestras posibles de tamaño 2.

b) Determine la media y la varianza de los pesos medios muestrales.

----

a)

$$\underline{\{1,\ 2\}\ \{1,\ 3\}\ \{1,\ 4\}\ \{2,\ 3\}\ \{2,\ 4\}\ \{3,\ 4\}}.$$

b)

$$\overline{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = \underline{2,5}.$$

$$\sigma = \frac{\Sigma\left(x-x_i\right)^2}{N} = \frac{(1-2,5)^2+(2-2,5)^2+(3-2,5)^2+(4-2,5)^2}{4} = \frac{(-1,5)^2+(0,5)^2+(0,5)^2+(1,5)^2}{4} =$$

$$= \frac{2,25+0,25+0,25+2,25}{4} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

Como el tamaño muestral es 2, la varianza de la media es:

$$Varianza\ (\overline{x}) = \frac{\sigma}{2} = \frac{1,65}{2} = \underline{0,625}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Se consideran las matrices $A = (-\ 1\ 0\ 1\ 2\ )$ y $B = (2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ )$.

a) ¿Se verifica la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2A\cdot B$?

b) Resuelva la ecuación matricial: $X\cdot A = 2B^t + I_2$.

----

a)

$$(A + B)^2 = [(-\ 1\ 0\ 1\ 2\ ) + (2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ )]^2 = (1\ 1\ 1\ 1\ )^2 = (1\ 1\ 1\ 1\ )\cdot(1\ 1\ 1\ 1\ ) =$$

$$= \underline{(2\ 2\ 2\ 2\ )}.$$

$$A^2 + B^2 + 2A\cdot B = (-\ 1\ 0\ 1\ 2\ )\cdot(-\ 1\ 0\ 1\ 2\ ) + (2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ )\cdot(2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ ) +$$

$$+ 2\cdot(-\ 1\ 0\ 1\ 2\ )\cdot(2\ 1\ 0\ \ -\ 1\ ) = (1\ 0\ 1\ 4\ ) + (4\ 1\ 0\ 1\ ) + 2\cdot(-\ 2\ \ -\ 1\ 2\ \ -\ 1\ ) =$$

$$= (5\ 1\ 1\ 5\ ) + (-\ 4\ \ -\ 2\ 4\ \ -\ 2\ ) = \underline{(1\ \ -\ 1\ 5\ 3\ )}.$$

$$\underline{Como\ se\ observa:\ (A + B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2A\cdot B.}$$

Nota: El que no se cumpla la identidad anterior es debido que, en general, el producto de matrices no tiene la propiedad conmutativa.

b)

$$X\cdot A = 2B^t + I_2;\ X\cdot A\cdot A^{-1} = \left(2B^t + I_2\right)\cdot A^{-1};\ \ X\cdot I = \left(2B^t + I_2\right)\cdot A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = \left(2B^t + I_2\right)\cdot A^{-1}}. \quad (*)$$

$$2B^t = 2\cdot(2\ 0\ 1\ \ -\ 1\ ) = (4\ 0\ 2\ \ -\ 2\ ).$$

$$2B^t + I_2 = (4\ 0\ 2\ \ -\ 2\ ) + (1\ 0\ 0\ 1\ ) = (5\ 0\ 2\ \ -\ 1\ ).$$

Se obtiene la inversa de $A = (-\ 1\ 0\ 1\ 2\ )$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow -\ F_1\right\} \Rightarrow (-\ 1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\right\} \Rightarrow (-\ 1\ 0\ 1\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow \tfrac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \left(-\ 1\ 0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \left(-\ 1\ 0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot(-\ 2\ 0\ 1\ 1\ ).$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión (*):

$$X = \left(2B^{t} + I_{2}\right)\cdot A^{-1} = (5\ 0\ 2\ \ -\ 1\ )\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\ 2\ 0\ 1\ 1\ ) = \frac{1}{2}\cdot(-\ 10\ 0\ \ -\ 5\ \ -\ 1\ ).$$

$$\underline{X = \left(-\ 5\ 0\ \ -\frac{5}{2}\ \ -\frac{1}{2}\right).}$$

****

2º) Sea la función $f(x) = \{x^3 + ax^2\, si\, x < 1\; bx + \frac{2}{x}\;\; si\;\; x\geq 1$:

a) Calcule los valores de $a\, y\, b$ para que la función sea continua y derivable en $x = 1$.

b) Para $b = 3$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa $x = 2$.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\, y\, b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\, x = 1 \Rightarrow \{f(x) \; = \left(x^3 + ax^2\right) = \; 1 + a \qquad f(x) \; = \left(bx + \frac{2}{x}\right) = \; b + 2 = f(1) =$

$\Rightarrow f(x) \; = f(x) \; = f(1) \Rightarrow 1 + a = b + 2; \;\; a - b = 1.$ (1)

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de $a\, y\, b$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$f'(x) = \{3x^2 + 2ax\;\, si\, x < 1\; b - \frac{2}{x^2}\;\; si\;\; x\geq 1\; \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f'(1) = \{3 + 2a\;\, si\;\, x < 1\; b -$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow f'\left(1^-\right) = f'(1) \Rightarrow 3 + 2a = b - 2; \;\; 2a - b =- 5.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$a - b = 1\; 2a - b =- 5\, \} \;\; - a + b =- 1\; 2a - b =- 5\, \} \Rightarrow a =- 6; \;\; - 6 - b = 1 =$
.

<u>$La\, función\, f(x)\, es\, continua\, y\, derivable\, en\, x = 1\, para\, a =- 6\, y\, b =- 7.$</u>

$b)$

Para $b = 3$ la función tiene la siguiente expresión:

$f(x) = \{x^3 + ax^2 \, si \, x < 1 \; 3x + \frac{2}{x} \; si \; x \geq 1$ y para $x = 2$ es $f(x) = 3x + \frac{2}{x}$.

El punto de tangencia es $f(2) = 3 \cdot 2 + \frac{2}{2} = 6 + 1 = 7 \Rightarrow P(2, 7)$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto:

$f'(x) = 3 - \frac{2}{x^2}$. $\quad m = f'(2) = 3 - \frac{2}{2^2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

La ecuación de la recta punto-pendiente es: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$.

$y - 7 = \frac{5}{2} \cdot (x - 2); \; 2y - 14 = 5x - 10$.

$\underline{La\ recta\ tangente\ pedida\ es\ t \equiv 5x - 2y + 4 = 0}$.

****

3º) Un campus universitario dispone de 3.000 plazas numeradas de aparcamiento para vehículos, distribuidas en tres zonas A, B y C. La zona A está constituida por las plazas del 1 al 1.500, estando 1.350 de ellas protegidas del sol. La zona B la conforman las plazas numeradas del 1.501 al 2.500, estando el 80 % protegidas del sol. La zona C contiene las plazas numeradas del 2.501 hasta 3.000, estando solamente 250 protegidas del sol. Aleatoriamente se elige una de las plazas de aparcamiento del campus:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en la zona A o en la B?

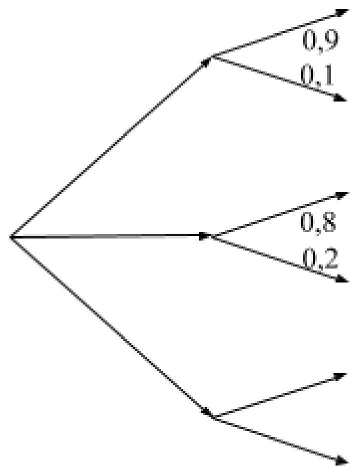
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no esté protegida del sol?

c) Si ha elegido una plaza protegida del sol, ¿cuál es la probabilidad de que esté ubicada en la zona B?

La proporción de plazas de A es: $\frac{1.500}{3.000} = \frac{1}{2} \Rightarrow \{Protegidas\colon \frac{1.350}{1.500} = 0,9 \; No\, protegidas\colon 0,1$.

La proporción de plazas de B es: $\frac{1.000}{3.000} = \frac{1}{3} \Rightarrow \{Protegidas\colon 0,8 \quad No\, protegidas\colon 0,2$.

La proporción de plazas de C es: $\frac{500}{3.000} = \frac{1}{6} \Rightarrow \{Protegidas\colon \frac{250}{500} = 0,5 \; No\, protegidas\colon 0,5$.



a)

$$P = P(A \cup B) = \frac{1.500+1.000}{3.000} = \frac{2.500}{3.000} = \frac{5}{6} = 0,8333.$$

b)

$$P = P(\overline{Pr}) = P(A \cap \overline{Pr}) + P(B \cap \overline{Pr}) + P(C \cap \overline{Pr}) =$$

$$= P(A) \cdot P(\overline{Pr}/A) + P(B) \cdot P(\overline{Pr}/B) + P(C) \cdot P(\overline{Pr}/C) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0,1 + \frac{1}{3}\cdot 0,2 + \frac{1}{6}\cdot 0,5 = 0,0500 + 0,0667 + 0,0833 = \underline{0,2000}.$$

$c)$

$$P = P(B/Pr) = \frac{P(B \cap Pr)}{P(Pr)} = \frac{P(B)\cdot P(Pr/B)}{1-P(\overline{Pr})} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0,8}{1-0,2} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0,8}{0,8} = \underline{\frac{1}{3} = 0,3333}.$$

****

4º) En un estudio sobre la utilización de nuevas tecnologías entre los estudiantes de Bachillerato, se ha realizado una encuesta a 500 estudiantes elegidos mediante muestreo aleatoria simple, resultando que 380 de ellos son usuarios de una determinada red social.

a) Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de estudiantes que son usuarios de esa red social.

b) Suponiendo que se mantiene la proporción muestral, determine el número mínimo de estudiantes a los que sería preciso entrevistar para que, con un nivel de confianza del 96 %, el error cometido al estimar la proporción de usuarios de la citada red social no supere el 2 %.

----

a)

Para un nivel de confianza del 97 %.

$$\alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,17.$$

$$(1 - 0,015 = 0,9850 \rightarrow z = 2,17).$$

Datos: $n = 500;\ \ p = \frac{380}{500} = 0,76;\ \ q = 0,24;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0,76 - 2,17 \cdot \sqrt{\frac{0,76 \cdot 0,24}{500}};\ 0,76 + 2,17 \cdot \sqrt{\frac{0,76 \cdot 0,24}{500}}\right);$$

$$(0,76 - 2,17 \cdot 0,0191;\ 0,76 + 2,17 \cdot 0,0191);\ \ (0,76 - 0,0414;\ 0,76 + 0,0414).$$

$$\underline{I.\ C._{97\ \%} = (0,7186;\ 0,8014).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 96 % es:

$$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 1 - 0,96 = 0,04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 2,055.$$

$$1 - 0,02 = 0,9800 \rightarrow z = 2,055).$$

Datos: $p = 0,76;\ \ q = 0,24;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,055;\ \ E = 0,02.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E} \cdot \sqrt{p \cdot q} \Rightarrow n = \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{E^2} \cdot p \cdot q =$

$$= \frac{2{,}055^2}{0{,}02^2} \cdot 0{,}76 \cdot 0{,}24 = 10.557{,}56 \cdot 0{,}1824 = 1.925{,}70.$$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 1.926\ estudiantes.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

1º) Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + 2y \leq 11; \;\; x \geq 2y - 5; \;\; 3x + y \leq 18; \;\; x \geq 0; \;\; y \geq 0.$$

a) Represente gráficamente la región que definen y calcule sus vértices.

b) Halle los puntos de esa región en los que la función $F(x, y) = 2x + 3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y calcule dichos valores.

c) Justifique si el punto $P(5,5; 2)$ pertenece a la región factible.

----

a)

x	7	5
y	2	3

$① \Rightarrow x + 2y \leq 11 \Rightarrow y \leq \frac{11-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	5	1
y	5	3

$② \Rightarrow x \geq 2y - 5;\ x - 2y \geq -5 \Rightarrow y \leq \frac{x+5}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	6	4
y	0	6

$③ \Rightarrow 3x + y \leq 18 \Rightarrow y \leq 18 - 3x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

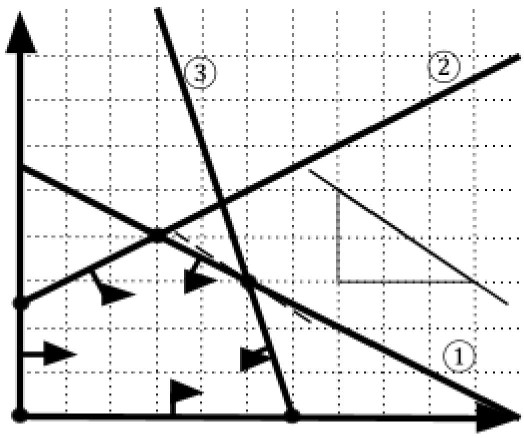
La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow x + 2y = 11\ x - 2y = -5 \} \Rightarrow 2x = 6;\ \ x = 3;\ \ 3 + 2y = 11;\ \ 2y = 8 \Rightarrow A(3$
.

$B \Rightarrow x + 2y = 11\ 3x + y = 18 \}\ \ -x - 2y = -11\ \ \ 6x + 2y = 36 \} \Rightarrow 5x = 25$

$2y = 6;\ \ y = 3 \Rightarrow A(5,\ 3)$



$C \Rightarrow \qquad y = 0\ 3x + y = 18 \} \Rightarrow C(6,\ 0).$

$D \Rightarrow \qquad x = 0\ x - 2y = -5 \} \Rightarrow C(0,\ 2'5).$

$b)$

Función objetivo: $F(x,\ y) = 2x + 3y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow F(3,\ 4) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 6 + 12 = 18.$

$B \Rightarrow F(5,\ 3) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 10 + 9 = 19.$

$C \Rightarrow F(6,\ 0) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 = 12 + 0 = 12.$

$D \Rightarrow F(0,\ 2'5) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2,5 = 0 + 7,5 = 7,5.$

El valor máximo se produce en el punto $B(5,\ 3)$ y el mínimo, lógicamente, se obtiene en el origen.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$F(x,\ y) = 2x + 3y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = \frac{2}{-3}.$

$\underline{Solución: Máximo\ B(5,\ 3)\ y\ mínimo\ O(0,\ 0)}.$

$c)$

Un punto pertenece a la sección factible cuando satisface todas las condiciones impuestas.

$P(5,5;2) \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 2y \leq 11 \\ x - 2y \geq -5 \\ 3x + y \leq 18 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5,5 + 2 \cdot 2 \nleq 11 \rightarrow NO$ 5,5

.

<u>$El\ punto\ P(5,5;2)\ no\ pertenece\ a\ la\ zona\ factible.$</u>

****

2º) El consumo de cereales en una ciudad, en miles de toneladas, viene dado por la función $c(t) = t^3 - 15t^2 + 63t + 10$, para $0 \leq t \leq 12$, donde t representa el tiempo en meses

a) ¿En qué instante se alcanza el máximo consumo de cereales y cuántas toneladas se consumen en ese momento?

b) ¿En qué intervalo de tiempo decrece el consumo de cereales?

c) Represente gráficamente la función.

----

a)

$c(0) = 10 \Rightarrow A(0,\ 10).$

Una función polinómica tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$c'(t) = 3t^2 - 30t + 63.$ $\qquad\qquad$ $c''(t) = 6t - 30.$

$c'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 30t + 63 = 0;\ t^2 - 10t + 21 = 0;\ t = \frac{10 \pm \sqrt{100-84}}{2} =$

$= \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2} = 5 \pm 2 \Rightarrow t_1 = 3,\ t_2 = 7.$

$c''(3) = 6 \cdot 3 - 30 = 18 - 30 = -12 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ t = 3.$

$c(3) = 3^3 - 15 \cdot 3^2 + 63 \cdot 3 + 10 = 27 - 135 + 189 + 10 = 91.$

$c(3) = 91 \Rightarrow B(3,\ 91) \Rightarrow Máximo\ relativo.$

$c''(7) = 6 \cdot 7 - 30 = 42 - 30 = 12 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ t = 7.$

$c(7) = 7^3 - 15 \cdot 7^2 + 63 \cdot 7 + 10 = 343 - 735 + 441 + 10 =$

$= 794 - 735 = 59 \Rightarrow C(7,\ 59) \Rightarrow Mínimo\ relativo.$

$c(12) = 12^3 - 15 \cdot 12^2 + 63 \cdot 12 + 10 = 1.728 - 2.160 + 756 + 10 =$

$= 2.494 - 2.160 = 334 \Rightarrow Máximo\ absoluto.$

$\underline{El\ consumo\ máximo\ de\ cereales\ se\ produce\ a\ los\ 12\ meses.}$

$\underline{El\ consumo\ máximo\ de\ cereales\ es\ de\ 334.000\ toneladas}.$

$b)$

Por ser $c(t)$ una función polinómica es continua en su dominio, por lo cual, del apartado anterior se deducen los intervalos de crecimiento y decrecimiento; no obstante se hace su estudio por la primera derivada.

Una función es decreciente cuando su primera derivada es negativa.

Por tratarse de una función polinómica, las raíces de su primera derivada dividen el dominio de la función en los intervalos $(0,\ 3)$, $(3,\ 7)\ y\ (7,\ 12)$ donde la función es creciente o decreciente de forma alternativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $1 \in (0,\ 3)$:

$$c'(1) = 3 \cdot 1^2 - 30 \cdot 1 + 63 = 3 - 30 + 63 = 36 > 0 \Rightarrow Creciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

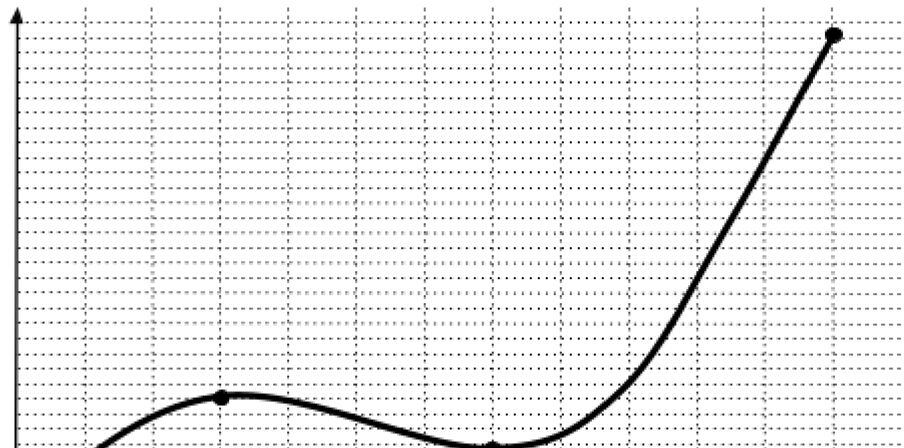
$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (0,\ 3) \cup (7,\ 12)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (3, 7)}.$$

$\underline{El\ consumo\ de\ cereales\ crece\ de\ enero\ a\ marzo\ y\ de\ julio\ a\ diciembre}.$

$c)$

Para la represente gráficamente la función se tiene en cuenta lo determinado en los apartados anteriores.



La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.

****

3º) En una localidad, el 25 % de los habitantes asiste periódicamente a la consulta del dentista, el 10 % se hace una analítica y el 8 % hace ambas cosas.

a) Razone si los sucesos "asistir a la consulta del dentista" y "hacerse una analítica" son independientes.

b) ¿Qué porcentaje de habitantes ni se hace una analítica ni va al dentista?

c) Si elegimos un habitante al azar de esa localidad de entre los que no van al dentista, ¿cuál es la probabilidad de que se haga una analítica?

$Datos$: $P(D) = 0,25$; $P(A) = 0,10$; $P(D \cap A) = 0,08$.

a)

Dos sucesos D y A son independientes cuando $P(D \cap A) = P(D) \cdot P(A)$:

$P(D) \cdot P(A) = 0,25 \cdot 0,10 = 0,025 \neq 0,08 = P(D \cap A)$.

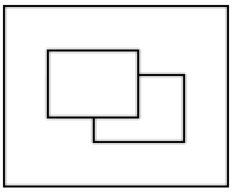
$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ D\ y\ A\ no\ son\ independientes}$.

b)

$P = P(\overline{D} \cap \overline{A}) = 1 - P(D \cup A)$.   (*)

$P(D \cup A) = P(D) + P(A) - P(D \cap A) =$

$= 0,25 + 0,10 - 0,08 = 0,35 - 0,08 = 0,27$.

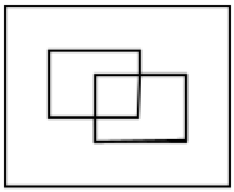


Sustituyendo en (*) el valor obtenido:

$P = P(\overline{D} \cap \overline{A}) = 1 - P(D \cup A) = 1 - 0,27 = \underline{0,73 = 73\ \%}$.

c)

$P(A/\overline{D}) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})}$.



$P(A \cap \overline{D}) = P(A) - P(A \cap D) = 0,10 - 0,08 = 0,02$.

$P(A/\overline{D}) = \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(A) - P(A \cap \overline{D})}{1 - P(D)} = \frac{0,10 - 0,08}{1 - 0,25} = \frac{0,02}{0,75} = \underline{\frac{2}{75} = 0,0267}$.

****

4º) En una zona escolar formada por tres centros de secundaria, se desea estimar la proporción del alumnado que lleva teléfono móvil al instituto. Se toma una muestra aleatoria simple de 121 estudiantes, de los cuales 74 lo llevan.

a) Determine un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de este alumnado que lleva el móvil al instituto. ¿Entre qué dos porcentajes varía esa proporción a ese nivel de confianza?

b) Si con la misma muestra se disminuye el nivel de confianza, ¿qué efecto tendrá esa disminución en el error de estimación?

c) Si en la misma zona se elige mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional otra muestra de 121 estudiantes, considerando que el segundo centro escolar tiene el doble de alumnos que el primero y el tercero tiene el triple que el primero, ¿cuántos alumnos de cada centro deben tomar para constituir la muestra?

----

a)

Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,17.$$

$$(1 - 0,015 = 0,9850 \rightarrow z = 2,17).$$

$Datos$: $p = \frac{74}{121}$; $q = 1 - 9 = 1 - \frac{74}{121} = \frac{121-74}{121} = \frac{47}{121}$; $n = 121$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(\frac{74}{121} - 2,17 \cdot \sqrt{\frac{\frac{74}{121} \cdot \frac{47}{121}}{121}};\ \frac{74}{121} + 2,17 \cdot \sqrt{\frac{\frac{74}{121} \cdot \frac{47}{121}}{121}}\right);$$

$$\left(\frac{74}{121} - 2,17 \cdot \sqrt{\frac{3.478}{1.771.561}};\ \frac{74}{121} + 2,17 \cdot \sqrt{\frac{3.478}{1.771.561}}\right);$$

$$\left(\frac{74}{121} - 2,17 \cdot 0,0443;\ \frac{74}{121} + 2,17 \cdot 0,0443\right);\ \left(\frac{74}{121} - 0,0961;\ \frac{74}{121} + 0,0961\right);$$

$$(0,6116 - 0,0961;\ 0,6116 + 0,0961).$$

$$\underline{I.\ C._{97\,\%} = (0,5155;\ 0,7077).}$$

$\underline{La\ proporción\ está\ comprendida\ entre\ el\ 51,55\ \%\ y\ el\ 70,77\ \%}$

$b)$

Teniendo en cuenta que la expresión del error máximo es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$ y que a medida que aumenta el nivel de confianza aumenta el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$:

$\underline{Si\ se\ disminuye\ el\ nivel\ de\ confianza\ también\ se\ diminuye\ el\ error.}$

$c)$

Como el muestreo aleatoria estratificado es proporcional al número de elementos de cada estrato, considerando como $x,\ 2x\ y\ 3x$ el número de estudiantes de los centros 1º, 2º y 3º, respectivamente, sería:

$$x + 2x + 3x = 121;\ \ 6x = 121 \Rightarrow x = \frac{121}{6} = 20,17.$$

$$2x = \frac{121}{3} = 40,33. \qquad\qquad 3x = \frac{121}{2} = 60,5.$$

Redondeando, corresponden a cada centro:

$\underline{Primer\ centro\ 20,\ segundo\ 40\ y\ tercero,\ 61\ estudiantes.}$

****

OPCIÓN B

1º) Sean las matrices $A = (1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ )\ y\ B = (1\ 0\ \ -\ 1\ 2\ 1\ 0\ )$.

a) Calcule $A^{2018} + A^{2019}$.

b) Resuelva la ecuación matricial: $X{\cdot}A + B{\cdot}B^{t} = 2A$.

----

a)

$$A^{2} = A{\cdot}A = (1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ ){\cdot}(1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ ) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) = I.$$

$$A^{3} = A^{2}{\cdot}A = I{\cdot}A = A.$$

$$En\ general:\ A^{n} = \{A\ si\ n\ es\ impar\ I\ si\ n\ es\ par\ .$$

$$A^{2018} + A^{2019} = I + A = (1\ 0\ 0\ 1\ ) + (1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ ) = (2\ 0\ 1\ 0\ ).$$

$$\underline{A^{2018} + A^{2019} = (2\ 0\ 1\ 0\ )}.$$

b)

$$X{\cdot}A + B{\cdot}B^{t} = 2A;\ \ X{\cdot}A = 2A - B{\cdot}B^{t} = M;\ \ X{\cdot}A{\cdot}A^{-1} = M{\cdot}A^{-1};$$

$X{\cdot}I = M{\cdot}A^{-1} \Rightarrow \underline{X = M{\cdot}A^{-1}}$.

$$M = 2A - B{\cdot}B^{t} = 2{\cdot}(1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ ) - (1\ 0\ \ -\ 1\ 2\ 1\ 0\ ){\cdot}(1\ 2\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 0\ ) =$$

$= (2\ 0\ 2\ \ -\ 2\ ) - (2\ 2\ 2\ 5\ ) = (0\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 7\ ) = M.$

La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 - F_1\right\} \Rightarrow (1\ 0\ \ -\ 1\ 1\ ) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow -F_2\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow A^{-1} = (1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ ) = A.$

$$X = M{\cdot}A^{-1} = (0\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 7\ ){\cdot}(1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ ) = \underline{(-\ 2\ 2\ \ -\ 7\ 7\ )}.$$

****

2º) El beneficio, en miles de euros, que ha obtenido una almazara a lo largo de 50 años viene dado por la expresión $B(t) = \{-\ 0,04t^{2} + 2,4t\ \ si\ \ 0 \leq t < 40\ \ \frac{40t-320}{t}\ \ si\ \ 40 \leq t \leq 50$ donde t es el tiempo transcurrido.

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función $B(t)$ en el intervalo $[0,\ 50]$.

b) Estudie la monotonía de la función $B(t)$ y determine en qué momento fueron mayores los beneficios de la almazara, así como el beneficio máximo.

c) Represente la gráfica de la función y explique la evolución del beneficio.

----

a)

La función $B(t)$ es continua en su dominio, excepto para $t = 40$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$t = 40 \Rightarrow \{B(t) = \left(-0,04t^2 + 2,4t\right) = -64 + 96 = 32\ B(t) = \frac{40t-320}{t} = \frac{1.600-32}{40}$$

$$\Rightarrow B(t) = B(t) = B(40) \Rightarrow \underline{La\ función\ B(t)\ es\ continua\ en\ [0,\ 50]}.$$

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha existen y son iguales en ese punto.

$$B'(t) = \{-0,08t + 2,4\ \ si\ \ 0 \le t < 40\ \ 40 - \frac{320}{t^2}\ \ si\ \ 40 \le t \le 50 \Rightarrow \{B'\left(40^-\right) = -3,2 +$$

$$\Rightarrow B'\left(40^-\right) \neq B'\left(40^+\right) \Rightarrow B(t)\ no\ es\ derivable\ para\ t = 40.$$

$$\underline{La\ función\ B(t)\ es\ derivable\ en\ su\ dominio,\ excepto\ para\ t = 40}.$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

En el intervalo $[0,\ 40)$ la función es $B(t) = -0,04t^2 + 2,4t$, que es una parábola cóncava (∩) por ser negativo el coeficiente de x^2 cuyo vértice es el siguiente:

$$B'(t) = 0 \Rightarrow -0,08t + 2,4 = 0;\ \ -8t + 240 = 0;\ \ -t + 30 = 0 \Rightarrow t = 30.$$

$B(30) = -0,04\cdot 30^2 + 2,4\cdot 30 = -36 + 72 = 36.$

Los valores de la función en los extremos del intervalo $[0, 40)$ son los siguientes:

$B(0) = 0 \Rightarrow O(0, 0).$

$B(40) = -0,04\cdot 40^2 + 2,4\cdot 40 = -64 + 96 = 32 \Rightarrow A(40, 32).$

La función tiene un máximo relativo en el punto $V(30, 36)$.

En el intervalo $[40, 50]$ la función es $B(t) = \frac{40t-320}{t}$, que tiene como asíntota horizontal a la recta $y = 40$, por ser $\frac{40t-320}{t} = 40$.

$B'(t) = 40 - \frac{320}{t^2} > 0, \ \forall t \in [40, 50] \Rightarrow B(t)\ creciente\ en\ [40, 50].$

Por ser continua la función para $t = 40 \Rightarrow A(40, 32)$.

El valor final de la función es el siguiente:

$B(50) = 40 - \frac{320}{50^2} = 40 - 0,128 = 39,872 \Rightarrow B(50, 39'872).$

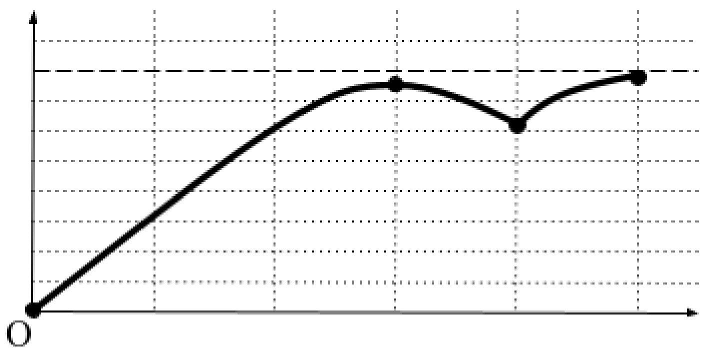
De lo anterior se deducen las respuestas pedidas:

$\underline{Crecimiento: B'(t) > 0 \Rightarrow t \in (0, 30) \cup (40, 50).}$

$\underline{Decrecimiento: B'(t) < 0 \Rightarrow t \in (30, 40).}$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ produce\ para\ t = 30\ y\ es\ de\ 36.000\ euros.}$

$c)$



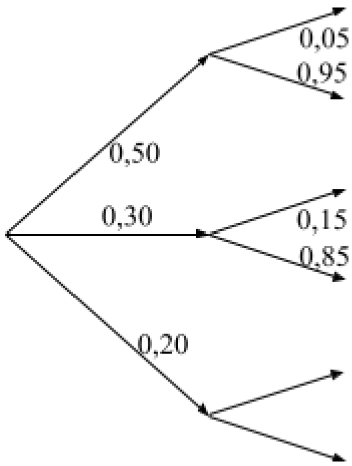
El beneficio crece desde el comienzo hasta los 30 años; después decrece durante 10 años para terminar creciendo los 10 últimos años con tendencia a resultan constante con un rendimiento de 40.000 euros.

****

3º) Un hotel dispone de tres lavadoras industriales L_1, L_2 y L_3 para el servicio de lavandería. El 50 % de los lavados los realiza L_1, el 30 % los hace L_2 y el resto L_3. La lavadora L_1 produce un 5 % de lavados defectuosos, L_2 produce un 15 % y L_3 un 20 %. Se elige al azar un lavado del hotel:

a) Calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

b) Calcule la probabilidad de que el lavado haya sido realizado por L_1, sabiendo que ha sido defectuoso.



a)

$$P = P(\overline{D}) = P\left(L_1 \cap \overline{D}\right) + P\left(L_2 \cap \overline{D}\right) + P\left(L_3 \cap \overline{D}\right) =$$

$$= P\left(L_1\right) \cdot P\left(\overline{D}/L_1\right) + P\left(L_2\right) \cdot P\left(\overline{D}/L_2\right) + P\left(L_3\right) \cdot P\left(\overline{D}/L_3\right) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,95 + 0,3 \cdot 0,85 + 0,2 \cdot 0,80 = 0,475 + 0,255 + 0,160 = \underline{0,890}.$$

c)

$$P = P\left(L_1/D\right) = \frac{P\left(L_1 \cap D\right)}{P(D)} = \frac{P\left(L_1\right) \cdot P\left(D/L_1\right)}{1 - P(D)} = \frac{0,5 \cdot 0,05}{1 - 0,890} = \frac{0,025}{0,110} = \underline{0,2273}.$$

****

4º) La edad de los empleados de una empresa sigue una ley Normal de varianza 64 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria simple de 16 empleados de dicha empresa obteniéndose las siguientes edades:

30, 42, 38, 45, 52, 60, 21, 26, 33, 44, 28, 49, 37, 41, 38, 40.

a) Obtenga un intervalo de confianza para estimar la edad media de los empleados, con un nivel de confianza del 97 %.

b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la edad media de los empleados, con un error inferior a 2 años y nivel de confianza del 99 %.

----

a)

$\sigma^2 = 64 \Rightarrow \sigma = \sqrt{64} = 8.$

$\overline{x} = \frac{30+42+38+45+52+60+21+26+33+44+28+49+37+41+38+40}{16} = \frac{624}{16} = 39.$

Para un nivel de confianza del 97 % es:

$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,17.$

$1 - 0,015 = 0,9850 \rightarrow z = 2,17).$

Datos: $n = 16;\ \overline{x} = 39;\ \sigma = 8;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(39 - 2,17 \cdot \frac{8}{\sqrt{16}};\ 39 + 2,17 \cdot \frac{8}{\sqrt{16}}\right);\ (39 - 2,17 \cdot 2;\ 39 + 2,17 \cdot 2);$

$(39 - 4,34;\ 39 + 4,34).$

$$\underline{I.\ C._{97\ \%} = (34,66;\ \ 43,34).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$

$1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$

Datos: $\sigma = 8;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575;\ E = 2.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,575 \cdot \frac{8}{2}\right)^2 =$
$= (2,575 \cdot 4)^2 = 10,3^2 = 106,09.$

$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de } 107 \textit{ empleados.}}$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE ARAGÓN

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B.

OPCIÓN A

1º) Una empresa de carpintería tiene dos fábricas A y B en las que produce sillas, mesas y taburetes, y tiene que decidir el número de horas de trabajo en cada una de las dos fábricas para la semana próxima. Por cada hora de trabajo de la fábrica A, se producen 1 silla, 2 mesas y 4 taburetes, por cada hora de trabajo de la fábrica B se producen 4 sillas, 3 mesas y 2 taburetes. Durante la semana próxima la empresa tiene que producir, al menos, 80 sillas, 120 mesas y 96 taburetes. El coste por cada hora de trabajo de la fábrica A es de 1.500 euros, mientras que el coste por cada hora de trabajo en la fábrica B es de 1.000 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de horas que tiene que trabajar cada una de las fábricas para minimizar el coste. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

Sean $x\,e\,y$ el número horas de trabajo semanal de las fábricas A y B, respectivamente.

El sistema de inecuaciones que se deduce del enunciado es el siguiente:

$x + 4y \geq 80\ 2x + 3y \geq 120\ \ 4x + 2y \geq 96\ \ \ x \geq 0;\ y \geq 0\,\}$ $\quad x + 4y \geq 80\ 2x + 3y \geq 120$

.

La función de objetivos es: $f(x,\ y) = 1.500x + 1.000y$.

x	0	80
y	20	0

$①\Rightarrow x + 4y \geq 80 \Rightarrow y \geq \frac{80-x}{4} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

x	0	60
y	40	0

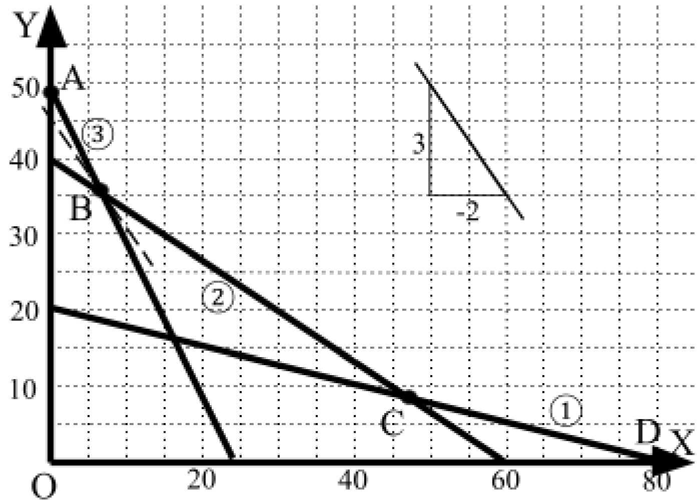
$②\Rightarrow 2x + 3y \geq 120 \Rightarrow y \geq \frac{120-2x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

x	0	24

y	48	0

③$\Rightarrow 2x + y \geq 48 \Rightarrow y \geq 48 - 2x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.
Los vértices de la región factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \quad x = 0\ 2x + y = 48 \} \Rightarrow A(0,\ 48).$

$B \Rightarrow 2x + 3y = 120 \quad 2x + y = 48 \}$

$2x + 3y = 120\ \ - 2x - y =- 48 \} \Rightarrow 2y = 72;$

$y = 36;\ \ 2x + 36 = 48;\ \ 2x = 12;$

$x = 6 \Rightarrow B(6,\ 36).$

$C \Rightarrow \quad x + 4y = 80\ 2x + 3y = 120 \} \qquad 2x + 8y = 160\ \ - 2x - 3y =- 120 \} \Rightarrow 5y$

$x = 48 \Rightarrow C(48,\ 8).$

$D \Rightarrow \quad y = 0\ x + 4y = 80 \} \Rightarrow D(80,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 48) = 1.500 \cdot 0 + 1.000 \cdot 48 = 0 + 48.000 = 48.000.$

$B \Rightarrow f(6;\ 36) = 1.500 \cdot 6 + 1.000 \cdot 36 = 9.000 + 36.000 = 45.000.$

$C \Rightarrow f(48,\ 8) = 1.500 \cdot 48 + 1.000 \cdot 8 = 72.000 + 8.000 = 90.000.$

$D \Rightarrow f(80,\ 0) = 1.500 \cdot 80 + 1.000 \cdot 0 = 120.000 + 0 = 120.000.$

El mínimo se produce en el punto $B(6,\ 36)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 1.500x + 1.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1.500}{1.000}x = -\frac{3}{2}x \Rightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ se\ obtiene\ trabajando\ la\ fábrica\ A\ 6\ horas\ y\ la\ B\ 36\ horas}.$$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 45.000\ euros}.$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{2x+3}$, calcular:

a) Dominio de f.

b) ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador: $2x + 3 = 0;\ \ x = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}}$.

b)

La función puede expresarse de la forma $f(x) = \frac{(x-1)^2}{2x+3}$.

Como quiera que $(x-1)^2 > 0,\ \forall x \in D(f)$, será $f(x) > 0$ cuando lo sea la expresión $2x + 3$:

$$2x + 3 = 0;\ \ x = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{f(x) > 0,\ \forall x \in \left(-\frac{3}{2},\ 1\right) \cup (1,\ +\infty)}.$$

c)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x^2-2x+1}{2x+3} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$2x + 3 = 0; \;\; x = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = -\frac{3}{2}\ es\ asíntota\ vertical.}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2-2x+1}{2x+3}}{x} = \frac{x^2-2x+1}{2x^2+3x} = \frac{1}{2}.$$

$$n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \left(\frac{x^2-2x+1}{2x+3} - \frac{x}{2}\right)\frac{2x^2-4x+1-2x^2-3x}{4x+6} =$$

$$\frac{-7x+1}{4x+6} = -\frac{7}{4}.$$

$$\underline{La\ recta\ y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función.}$$

$d)$

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que anulan su primera derivada.

$$f'(x) = \frac{(2x-2)\cdot(2x+3)-\left(x^2-2x+1\right)\cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{4x^2+6x-4x-6-2x^2+4x-2}{(2x+3)^2} = \frac{2x^2+6x-8}{(2x+3)^2} =$$

$$= \frac{2\left(x^2+3x-4\right)}{(2x+3)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\left(x^2+3x-4\right)}{(2x+3)^2} = 0; \;\; x^2 + 3x - 4 = 0; \;\; x = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{2} =$$

$$= \frac{-3\pm5}{2} \Rightarrow x_1 = -4, \; x_2 = 1.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x) = \frac{(4x+6)(2x+3)^2-2\left(x^2+3x-4\right)[2\cdot(2x+3)2]}{(2x+3)^4} = \frac{(4x+6)(2x+3)-8\left(x^2+3x-4\right)}{(2x+3)^3} =$$

$$= \frac{8x^2+12x+12x+18-8x^2-24x+32}{(2x+3)^3} = \frac{50}{(2x+3)^3}.$$

$$f''(-\ 4) = \frac{50}{(-8+3)^3} <\ 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x\ =-\ 4.$$

$$f(-\ 4) = \frac{(-4)^2-2\cdot(-4)+1}{2\cdot(-4)+3} = \frac{16+8+1}{-8+3} = \frac{25}{-5} =-\ 5 \Rightarrow \underline{Máximo \Rightarrow A(-\ 4,\ \ -\ 5)}.$$

$$f''(1) = \frac{50}{(-2+3)^3} =\ 50\ >\ 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x\ =\ 1.$$

$$f(1) = \frac{1^2-2\cdot1+1}{2\cdot1+3} = \frac{1-2+1}{2+3} = \frac{0}{5} =\ 0 \Rightarrow \underline{Mínimo \Rightarrow B(1,\ 0)}.$$

****

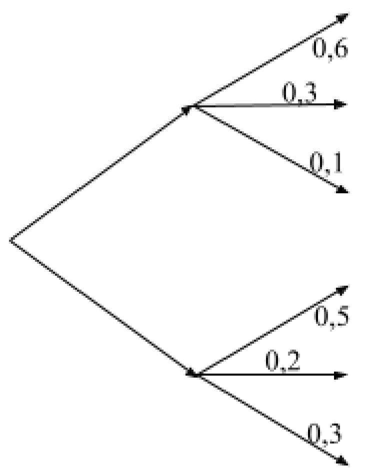
3º) Un concesionario se dedica a la venta de tres modelos de coches: A, B y C. En el concesionario trabajan dos vendedores: María y Pedro. El mes pasado María realizó el 55 % de las ventas y Pedro el 45 % restante. Además, de las ventas de María, un 60 % fueron del modelo A, un 30 % del modelo B y un 10 % del modelo C. De las ventas de Pedro, un 50 % fueron del modelo A, un 20 % del modelo B y un 30 % del modelo C.

a) Elegimos al azar una de las ventas realizadas el mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un coche del modelo B vendido por María?

b) Elegimos al azar una de las ventas del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

c) Elegimos al azar una de las ventas de modelo B del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una venta de María?

d) Elegimos al azar (con reemplazamiento) dos ventas del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea una venta de María?



a)

$$P = P(Ma \cap B) = P(Ma) \cdot P(B/Ma) = 0,55 \cdot 0,3 = \underline{0,165}.$$

b)

$$P = P(B) = P(Ma \cap B) + P(Pe \cap B) =$$

$$= P(Ma) \cdot P(B/Ma) + P(Pe) \cdot P(B/Pe) = 0,55 \cdot 0,3 + 0,45 \cdot 0,2 =$$

$$= 0,165 + 0,090 = \underline{0,255}.$$

c)

$$P = P(Ma/B) = \frac{P(Ma \cap B)}{P(B)} = \frac{P(Ma) \cdot P(B/Ma)}{P(Ma) \cdot P(B/Ma) + P(Pe) \cdot P(B/Pe)} = \frac{0,55 \cdot 0,3}{0,55 \cdot 0,3 + 0,45 \cdot 0,2} =$$

$$= \frac{0,165}{0,165+0,090} = \frac{0,165}{0,255} = \frac{165}{255} = \underline{\frac{11}{17} = 0,6471}.$$

$d)$

$$P = P(MaMa) + P(MaPe) + P(PeMa) =$$

$$= 0,55 \cdot 0,55 + 0,55 \cdot 0,45 + 0,45 \cdot 0,55 = 0,3025 + 0,2475 + 0,2475 =$$

$$= \underline{0,7975}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Discutir, según los valores de a, el sistema $2x + ay + az = 4 \quad - x + ay + z = a \quad x + y + az = 3 \}$. Resolverlo para $x = - 3$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema son las siguientes:

$M = (2\ a\ a\ \ - 1\ a\ 1\ 1\ 1\ a\ )$ y $M' = (2\ a\ a\ \ - 1\ a\ 1\ 1\ 1\ a\ \ \ 4\ a\ 3\ )$.

El rango de M en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |2\ a\ a\ \ - 1\ a\ 1\ 1\ 1\ a\ | = 2a^2 - a + a - a^2 - 2 + a^2 = 2a^2 - 2 =$

$= 2\left(a^2 - 1\right) = 0;\ \ a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a_1 = - 1;\ a_2 = 1.$

$\underline{Para\ \{a \neq - 1\ a \neq 1\ \} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para $a = - 1$ es $M' = (2\ \ - 1\ \ - 1\ \ - 1\ \ - 1\ 1\ 1\ 1\ \ - 1\ \ \ 4\ \ - 1\ 3\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{C_1,\ C_2,\ C_4\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |2\ \ - 1\ 4\ \ - 1\ \ - 1\ \ - 1\ 1\ 1\ 3\ | = - 6 - 4 + 1 + 4 + 2 - 3 = - 6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' =$

.

$\underline{Para\ a = - 1 \Rightarrow Ran\ M = 2;\ Ran\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

Para $a = 1$ es $M' = (2\ 1\ 1\ \ - 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ \ 4\ 1\ 3\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_3\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ 1\ 1\ \ - 1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ \ \ 3\ 1\ 4\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow F_2 + F_1\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1\right\} \Rightarrow (1\ 1\ 1\ 0\ 2\ 2\ 0\ \ -$

$\Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

$b)$

Para $a = - 3$ el sistema es $2x - 3y - 3z = 4 \quad - x - 3y + z = - 3 \quad x + y - 3z = 3 \}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|4\ -3\ -3\ -3\ -3\ 1\ 3\ 1\ -3\ |}{2\left(3^2-1\right)} = \frac{36+9-9-27-4+27}{2\cdot 8} = \frac{32}{16} = 2.$$

$$y = \frac{|2\ 4\ -3\ -1\ -3\ 1\ 1\ 3\ -3\ |}{16} = \frac{18+9+4-9-6-12}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

$$z = \frac{|2\ -3\ 4\ -1\ -3\ -3\ 1\ 1\ 3\ |}{16} = \frac{-18-4+9+12+6-9}{16} = \frac{-4}{16} =- \frac{1}{4}.$$

$$\underline{Solución: x = 2,\ y = \frac{1}{4},\ z =- \frac{1}{4}.}$$

****

2º) Una empresa va a lanzar al mercado un nuevo juguete para la campaña de Navidad. Tiene que decidir el precio de venta al público del juguete, que estará entre 1 y 10 euros. Ha realizado un estudio y sabe que el beneficio B que obtendrá en la campaña dependerá del precio de venta que le ponga al juguete. Así, si le pone un precio de venta x (en euros), el beneficio que obtendrá será de $B(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$, donde B está expresado en millones de euros.

a) ¿Para qué valores de $x \in [1,\ 10]$ el beneficio es positivo?

b) ¿Qué precio de venta $x \in [1,\ 10]$ tiene que poner al juguete para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

c) Calcular $\int_1^{10} B(x) \cdot dx$.

----

a)

$$B(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 = \frac{9x - 18 - x^2}{x^2} = -\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2}.\ \ D(B) \Rightarrow R - \{0\}.$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0;\ \ x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 6.$$

Teniendo en cuenta que $x^2 > 0,\ \forall x \in D(B)$, el signo de la función depende de la expresión $-\left(x^2 - 9x + 18\right)$.

Las raíces halladas dividen el dominio de la función en los siguientes intervalos: $(-\infty,\ 3),\ (3,\ 6)\ y\ (6,\ +\infty)$, donde el signo de la función es, alternativamente, positivo o negativo.

Considerando, por ejemplo el valor $x = 1 \in (-\infty,\ 3)$ es:

$$B(1) = -\frac{1^2 - 9 \cdot 1 + 18}{1^2} = -\frac{1 - 9 + 18}{1} = -10 < 0.$$

$\underline{El\ beneficio\ es\ positivo\ \forall x \in (3,\ 6)}$.

b)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo relativo es que se anule su primera derivada:

$$B'(x) = -\frac{9}{x^2} + \frac{18 \cdot 2x}{x^4} = -\frac{9}{x^2} + \frac{36}{x^3} = \frac{-9x + 36}{x^3}.$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-9x+36}{x^3} = 0; \quad -9x + 36 = 0; \quad -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4.$$

Para justificar que se trata de un máximo, la segunda derivada tiene que ser negativa para el valor que anula la primera derivada:

$$B''(x) = \frac{-9\cdot x^3 - (-9x+36)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-9x-3(-9x+36)}{x^4} = \frac{-9x\mp 27x-108}{x^4} = \frac{18x-108}{x^4}.$$

$$B''(4) = \frac{18\cdot 4-108}{4^4} = \frac{18-27}{4^3} < 0 \Rightarrow Máximo,\ c.\ q.\ j.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ para\ x = 4\ euros.}$$

$$B(4) = \frac{9}{4} - \frac{18}{4^2} - 1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{8} - 1 = \frac{18-9-8}{8} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 125.000\ euros.}$$

$c)$

$$\int_1^{10} B(x)\cdot dx = \int_1^{10}\left(\frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1\right)\cdot dx = \int_1^{10}\frac{9}{x}\cdot dx - \int_1^{10}\frac{18}{x^2}\cdot dx - \int_1^{10} dx =$$

$$= 9\int_1^{10}\frac{1}{x}\cdot dx + 18\int_{10}^{1} x^{-2}\cdot dx + \int_{10}^{1} dx = 9\cdot[Lx]_1^{10} + 18\cdot\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{10}^{1} + [x]_{10}^{1} =$$

$$= 9\cdot(L10 - L1) + 18\cdot\left[-\frac{1}{x}\right]_{10}^{1} + 1 - 10 = 9L10 + 18\cdot\left[\frac{1}{x}\right]_1^{10} - 9 =$$

$$= 9L10 + 18\cdot\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{1}\right) - 9 = 9L10 + \frac{18}{10} - 18 - 9 = 9L10 + 1,8 - 27 =$$

$$= 9L10 - 25,2.$$

$$\underline{\int_1^{10} B(x)\cdot dx = 9L10 - 25,2 \cong -4,477.}$$

****

3º) a) Dados dos suceso A y B tales que $P(A) = 0,6,\ \ P(B) = 0,8\ y\ P(A/B) = 0,7$, calcular $P(A \cap B)\ y\ P(A \cup B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?

b) Se sabe que el gasto semanal en ocio de los jóvenes de una ciudad tiene distribución normal de desviación típica 6 euros. Se toma una muestra de 10 jóvenes y se les pregunta el gasto en ocio de la pasada semana, con los siguientes resultados (expresados en euros): $24,5\ \ 11\ \ 16,5\ \ 18,5\ \ 21,5\ \ 25\ \ 6,5\ \ 12\ \ 10,5\ \ 9,5$. Construya un intervalo de confianza de nivel 94 % para la media del gasto semanal en ocio de los jóvenes de la ciudad.

----

a)

$Datos$: $P(A) = 0,6,\ \ P(B) = 0,8\ y\ P(A/B) = 0,7$.

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$

$\underline{P(A \cap B) = 0,56}.$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,8 - 0,56 = 1,4 - 0,56 =$

$= 0,84.$

$\underline{P(A \cup B) = 0,84}.$

Si A y B son independientes se cumple que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow 0,56 \neq 0,6 \cdot 0,8 = 0,48$

$\underline{Los\ sucesos\ A\ y\ B\ no\ son\ independientes}.$

b)

$\overline{x} = \frac{24,5+11+16,5+18,5+21,5+25+6,5+12+10,5+9,5}{10} = \frac{155,5}{10} = 15,55\ euros.$

Para un nivel de confianza del 94 % es:

$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 1 - 0,94 = 0,06 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,03} = 1,88.$

$1 - 0,03 = 0,9700 \rightarrow z = 1,88).$

Datos: $n = 10;\ \ \overline{x} = 15,55;\ \sigma = 6;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,88.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(15,55 - 1,88 \cdot \frac{6}{\sqrt{10}};\ 15,55 + 1,88 \cdot \frac{6}{\sqrt{10}}\right);$$

$$(15,55 - 1,88 \cdot 1,8974;\ 15,55 + 1,88 \cdot 1,8974);$$

$$(15,55 - 3,5670;\ 15,55 + 3,5670).$$

$$\underline{I.\ C._{94\,\%} = (11,9830;\ \ 19,1170).}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE ARAGÓN

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B.

OPCIÓN A

1º) Un artesano del vidrio va a fabricar figuras de dos tipos durante la próxima semana: cisne y elefante. Cada figura de cisne necesita 0,1 kg de vidrio y 30 minutos de trabajo, mientras que cada figura de elefante necesita 0,2 kg de vidrio y 20 minutos de trabajo. El artesano puede utilizar como máximo 16 kg de vidrio y 40 horas de trabajo. Además, el número de figuras de cisne que fabrique ha de ser menor o igual que el doble de figuras de elefante. Por cada figura de cisne obtiene un beneficio de 10 euros y por cada figura de elefante obtiene un beneficio de 8 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de figuras de cada tipo que tiene que fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

Sean $x\ e\ y$ el número de cisnes y elefantes que fabrica el artesano del vidrio, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$0,1x + 0,2y \leq 16\ \ 30x + 20y \leq 2.400 \quad x \leq 2y \quad x \geq 0;\ y \geq 0\ \}$ o mejor: $x + 2y \leq 160\ \ 3x + 2y \leq 240 \quad x \leq 2y \quad x \geq 0;\ y \geq 0\ \}$.

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

x	0	160
y	80	0

1 $\Rightarrow x + 2y \leq 160 \Rightarrow y \leq \frac{160-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	80
y	120	0

2 $\Rightarrow 3x + 2y \leq 240 \Rightarrow y \leq \frac{240-3x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si$

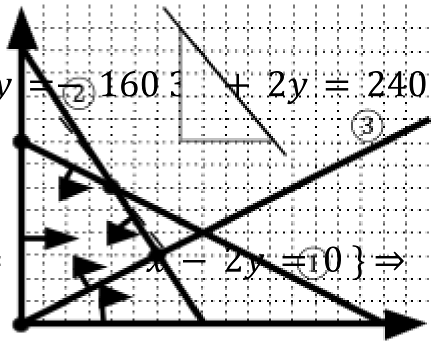
x	0	100
y	0	50

③$\Rightarrow x \le 2y \Rightarrow y \ge \frac{x}{2} \Rightarrow P(20,\ 0) \to No.$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = 10x + 8y$.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 2x + 3y = 240 \end{array} \right\} \Rightarrow A(0,\ 80).$



$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 160 \\ 3x + 2y = 240 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -x - 2y = -160 \\ 3x + 2y = 240 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 80;\ \ x = 40;\ \ y = 60 \Rightarrow B(40,\ 60).$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 240 \\ x = 2y \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 240 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = 240;\ \ x = 60;\ \ y = 30 \Rightarrow C(60,\ 30).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 80) = 10 \cdot 0 + 8 \cdot 80 = 0 + 640 = 640.$

$B \Rightarrow f(40,\ 60) = 10 \cdot 40 + 8 \cdot 60 = 400 + 480 = 880.$

$C \Rightarrow f(60,\ 30) = 10 \cdot 60 + 8 \cdot 30 = 600 + 240 = 840.$

El máximo se produce en el punto $B(40,\ 60)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 10x + 8y = 0 \Rightarrow y = -\frac{10}{8}x = -\frac{5}{4}x \Rightarrow m = -\frac{5}{4}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ lo\ consigue\ fabricando\ 40\ cisnes\ y\ 60\ elefantes.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 880\ euros.}$

****

2º) Dada la función definida para $x \in R$, $f(x) = \{ax + 1 \quad si \ x < -2 \ \frac{x+b}{x^2+1} \ si \ -2 \leq x < 0 \ x^3 - 9x^2 + 24x + 4 \ si \ x \geq 0$:

a) Calcular a y b sabiendo que f es continua en todos sus puntos.

b) Calcular el mínimo valor que toma la función f para $x \in [3, 8]$.

c) Calcular $I = \int_1^2 f(x) \cdot dx$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = -2$ y $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para \ x = -2 \Rightarrow \{f(x) = (ax + 1) = \ -2a + 1 \qquad f(x) = \frac{x+b}{x^2+1} = \frac{-2+b}{4+1} = \frac{b-2}{5} =$

$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(-2) \Rightarrow -2a + 1 = \frac{b-2}{5}; \ -10a + 5 = b - 2;$

$10a + b = 7.$ (1)

$Para \ x = 0 \Rightarrow \{f(x) = \frac{x+b}{x^2+1} = \frac{b}{1} = b \qquad f(x) = \left(x^3 - 9x^2 + 24x +\right.$

$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{b = 4}.$

Sustituyendo el valor de b en la expresión (1): $10a + 4 = 7 \Rightarrow \underline{a = \frac{3}{10}}.$

b)

Para $x \in [3, 8]$ la función es $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 4.$

Los valores de la función en los extremos del intervalo [3, 8] son los siguientes:

$f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 + 4 = 27 - 81 + 72 + 4 = 103 - 81 = 22.$

$f(8) = 8^3 - 9 \cdot 8^2 + 24 \cdot 8 + 4 = 512 - 576 + 192 + 4 = 708 - 576 =$

$= 132.$

Las condiciones necesarias para que una función polinómica tenga un mínimo relativo es que se anule su primera derivada y que sea positiva el valor de la segunda derivada para los valores que anulan a la primera.

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24. \qquad f''(x) = 6x - 18.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0; \; x^2 - 6x + 8 = 0; \; x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} =$

$= \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 3 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 2, \; x_2 = 4.$

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = 12 - 18 = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 2.$

$f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 24 - 18 = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 4.$

$f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 + 4 = 64 - 144 + 96 + 4 = 164 - 144 = 20$

.

$\underline{El\ menor\ valor\ de\ la\ función\ f(x)\ para\ x \in [3,\ 8]\ es\ f(4) = 20}.$

$c)$

$$I = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \int_1^2 \left(x^3 - 9x^2 + 24x + 4\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} + \frac{24x^2}{2} + 4x\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 + 4x\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^4}{4} - 3 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2\right) - \left(\frac{1}{4} - 3 + 12 + 4\right) =$$

$$= 4 - 24 + 48 + 8 - \frac{1}{4} - 13 = 60 - 37 - \frac{1}{4} = 23 - \frac{1}{4} = \frac{92-1}{4} = \frac{91}{4}.$$

$$\underline{I = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \frac{91}{4}}.$$

****

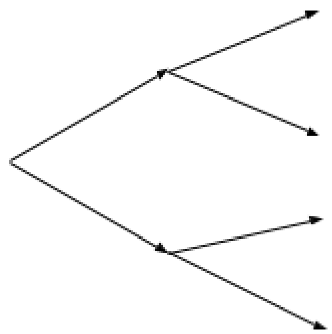
3º) En una caseta de feria se puede jugar a lanzar balones a una canasta. El juego consiste en lanzar 2 balones; si se encesta al menos un lanzamiento, entonces se gana un premio. Luís va a jugar una partida: la probabilidad que tiene de encestar cada lanzamiento es de 0,3 y los lanzamientos son independientes.

a) ¿Qué probabilidad tiene Luís de encestar los dos lanzamientos?

b) ¿Qué probabilidad tiene Luís de ganar el premio?

c) Si Luís ha ganado el premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado el primer lanzamiento?

d) Sea A el suceso "Luís falla el primer lanzamiento" y B el suceso "Luís gana el premio". ¿Son los sucesos A y B independientes?



a)

$$P = P(A_1A_2) = 0,3 \cdot 0,3 = \underline{0,09}.$$

b)

$$P = P(G) = P(A_1A_2) + P(A_1F_2) + P(F_1A_2) =$$

$$= 0,3 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,3 = 0,09 + 0,21 + 0,21 = \underline{0,51}.$$

c)

$$P = P(F_1/G) = \frac{P(F_1 \cap G)}{P(G)} = \frac{P(F_1A_2)}{P(A_1A_2)+P(A_1F_2)+P(F_1A_2)} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{0,3 \cdot 0,3+0,3 \cdot 0,7+0,7 \cdot 0,3} =$$

$$= \frac{0,21}{0,09+0,21+0,21} = \frac{0,21}{0,51} = \underline{0,4118}.$$

d)

$$P(A) = P(F_1) = 0,7.$$

$$P(B) = P(G) = P(A_1A_2) + P(A_1F_2) + P(F_1A_2) = 0,51.$$

Los sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,51 = 0,357 \neq P(A \cap B) = P\left(F_1 A_2\right) = 0,21$.

$\underline{Los\ sucesos\ A\ y\ B\ no\ son\ independientes}$.

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices: $A = (-\ 8\ \ -\ 3\,1\,0\,4\,2\,)$, $B = (-\ 1\,0\,2\,3\,1\,4\,)$, $C = (1\,0\ \ -\ 1\ \ -\ 1\,1\,2\,)$ y $D = (2\ \ -\ 1\ \ -\ 2\,2\,1\,0\ \ -\ 6\,1\,3\,)$.

a) Calcular $(A\cdot B)^2$.

b) Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2A + 3X = 4C$.

c) Calcular, si existe, la matriz inversa de D.

----

a)

$A\cdot B = (-\ 8\ \ -\ 3\,1\,0\,4\,2\,)\cdot(-\ 1\,0\,2\,3\,1\,4\,) = (8\ -\ 6\ +\ 1\,0\ -\ 9\ +\ 4\,0\ +\ 8\ +\ 2\,0\ +\ 1$

.

$(A\cdot B)^2 = (A\cdot B)\cdot(A\cdot B) = (3\ \ -\ 5\,10\,20\,)\cdot(3\ \ -\ 5\,10\,20\,) = \underline{(-\ 41\ \ -\ 115\,230\,350}$

.

b)

$2A + 3X = 4C;\ \ 3X = 4C - 2A \Rightarrow \underline{X = \frac{1}{3}\cdot(4C - 2A)}.$

$4C - 2A = 4\cdot(1\,0\ \ -\ 1\ \ -\ 1\,1\,2\,) - 2\cdot(-\ 8\ \ -\ 3\,1\,0\,4\,2\,) =$

$= (4\,0\ \ -\ 4\ \ -\ 4\,4\,8\,) - (-\ 16\ \ -\ 6\,2\,0\,8\,4\,) = (20\,6\ \ -\ 6\ \ -\ 4\ \ -\ 4\,4\,).$

$$\underline{X = \frac{1}{3}\cdot(20\,6\ \ -\ 6\ \ -\ 4\ \ -\ 4\,4\,).}$$

c)

$|D| = |2\ \ -\ 1\ \ -\ 2\,2\,1\,0\ \ -\ 6\,1\,3\,| = 6 - 4 - 12 + 6 = -\ 4.\quad D^t = (2\,2\ \ -\ 6\ \ -$

.

$Adj.\ de\ D^t = (|1\,1\,0\,3\,|\ \ -\ |-\ 1\,1\ \ -\ 2\,3\,|\,|-\ 1\,1\ \ -\ 2\,0\,|\ \ -\ |2\ \ -\ 6\,0\,3\,|\,|2\ \ -\ 6$

.

$$\underline{D^{-1} = -\ \frac{1}{4}\cdot(3\,1\,2\ \ -\ 6\ \ -\ 6\ \ -\ 4\,8\,4\,4\,).}$$

****

2º) Un programa de televisión emitido ayer duró 120 minutos. La cuota de pantalla que tuvo el programa, medida en porcentaje, fue variando a lo largo del tiempo según la función $C(x) = \frac{1}{200}\left(-x^2 + 100x + 7.500\right)$, donde $x \in [0,\ 120]$ es el tiempo en minutos transcurrido desde el inicio del programa y C es la cuota de pantalla en porcentaje.

a) Encontrar los valores de tiempo, si los hubo, en los que la cuota de pantalla fue igual a 18.

b) ¿En qué instantes de tiempo se alcanzaron la mínima y la máxima cuotas de pantalla del programa? ¿Cuáles fueron dichas cuotas?

c) Calcular $\int_{10}^{20} C(x) \cdot dx$.

----

a)

$$C(x) = 18 \Rightarrow \frac{1}{200}\left(-x^2 + 100x + 7.500\right) = 18;$$

$$-x^2 + 100x + 7.500 = 3.600;\ x^2 - 100x - 3.900 = 0;$$

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{10.000 + 15.600}}{2} = \frac{100 \pm \sqrt{25.600}}{2} = \frac{100 \pm 160}{2} = 50 \pm 80 \Rightarrow x_1 = -30,\ x_2 = 130.$$

La solución negativa carece de sentido y $130 \notin [0,\ 120]$.

$\underline{La\ cuota\ de\ pantalla\ nunca\ fue\ 18\ \%\ en\ el\ programa.}$

b)

Los valores de los extremos de la función son los siguientes:

$$C(0) = \frac{7.500}{200} = 37,5.$$

$$C(120) = \frac{1}{200}\left(-120^2 + 100 \cdot 120 + 7.500\right) = \frac{100}{200}(-144 + 120 + 75) =$$

$$= 0,5 \cdot (-144 + 195) = 0,5 \cdot 51 = 25,5.$$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) es condición necesaria que se anule su primera derivada.

$$C'(x) = \frac{1}{20}(-2x + 100). \qquad C''(x) = \frac{1}{20}(-2) = -\frac{1}{10} > Maximo.$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{20}(-\ 2x + 100) = 0; \quad -\ 2x + 100 = 0 \Rightarrow x = 50.$$

$$C(50) = \frac{1}{200}\left(-\ 50^2 + 100 \cdot 50 + 7.500\right) = \frac{50}{200}(-\ 50 + 100 + 150) =$$
$$= 0,25 \cdot (-\ 50 + 250) = 0,25 \cdot 200 = 50.$$

$$\underline{La\ mínima\ cuota\ de\ pantalla\ se\ produjo\ a\ los\ 120\ minutos\ y\ fue\ del\ 25,5\ \%.}$$

$$\underline{La\ máxima\ cuota\ de\ pantalla\ se\ produjo\ a\ los\ 50\ minutos\ y\ fue\ del\ 50\ \%.}$$

$c)$

$$\int_{10}^{20} C(x) \cdot dx = \frac{1}{200} \cdot \int_{10}^{20} \left(-\ x^2 + 100x + 7.500\right) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{200} \cdot \left[-\ \frac{x^3}{3} + \frac{100x^2}{2} + 7.500x\right]_{10}^{20} = \frac{1}{200} \cdot \left[-\ \frac{x^3}{3} + 50x^2 + 7.500x\right]_{10}^{20} =$$

$$= \frac{1}{200} \cdot \left[\left(-\ \frac{20^3}{3} + 50 \cdot 20^2 + 7.500 \cdot 20\right) - \left(-\ \frac{10^3}{3} + 50 \cdot 10^2 + 7.500 \cdot 10\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{200} \cdot \left(-\ \frac{8.000}{3} + 20.000 + 150.000 + \frac{1.000}{3} - 5.000 - 75.000\right) =$$

$$= \frac{1}{200} \cdot \left(-\ \frac{7.000}{3} + 170.000 - 80.000\right) = \frac{1}{200} \cdot \left(-\ \frac{7.000}{3} + 90.000\right) =$$

$$= -\ \frac{35}{3} + 450 = 438,33.$$

$$\underline{\int_{10}^{20} C(x) \cdot dx = 438,33.}$$

****

3º) a) En un instituto hay 335 estudiantes de Bachillerato, 195 de los cuales están en primer curso y 140 están en segundo curso. Se eligen al azar dos estudiantes distintos de entre estos 335. ¿Cuál es la probabilidad de que estén en el mismo curso?

b) En una encuesta sobre hábitos alimentarios en una ciudad se ha tomado una muestra de 300 individuos y se les ha preguntado si son vegetarianos. De los 300 individuos, 72 son vegetarianos y los 228 restantes no lo son. Calcular el intervalo de confianza al 94 % para la proporción de personas de la ciudad que son vegetarianas.

----

a)

Probabilidad de estar en el primer curso: $P(1) = \frac{195}{335} = \frac{39}{67}$.

Probabilidad de estar en el segundo curso: $P(2) = \frac{140}{335} = \frac{28}{67}$.

$$P = P(11) + P(22) = \frac{39}{67} \cdot \frac{39}{67} + \frac{28}{67} \cdot \frac{28}{67} = \frac{1.521+784}{4.489} = \frac{2.305}{4.489} = \underline{0,5135}.$$

b)

$p = \frac{72}{300} = \frac{24}{100} = 0,24.$ $\qquad q = \frac{228}{300} = \frac{76}{100} = 0,76.$

Para un nivel de confianza del 94 %;

$\alpha = 1 - 0,94 = 0,06 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,03} = 1,88.$

$(1 - 0,03 = 0,9700 \rightarrow z = 1,88).$

Datos: $n = 300$; $p = 0,24$; $q = 0,76$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,88.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0,24 - 1,88 \cdot \sqrt{\frac{0,24 \cdot 0,76}{300}};\ 0,24 + 1,88 \cdot \sqrt{\frac{0,24 \cdot 0,76}{300}}\right);$$

$(0,24 - 1,88 \cdot 0,0247;\ 0,24 + 1,88 \cdot 0,0247);\ (0,24 - 0,0464;\ 0,24 + 0,0464)$
.

$$\underline{I.\ C._{94\,\%} = (0,1936;\ 0,2864).}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1º) Sean las matrices $A = (-\ 1\, m\ \ -m\ -\ 1\ 3m\,)$, $B = (x\ y\,)$ y $C = (4\ 12\,)$.

a) Si $A \cdot B = C$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

----

a)

$A \cdot B = C \Rightarrow (-\ 1\, m\ \ -m\ -\ 1\ 3m\,) \cdot (x\ y\,) = (4\ 12\,) \Rightarrow \underline{\qquad\qquad -x + my = 4\ (-\ m}$

.

b)

El rango de la matriz de coeficiente en función de m es el siguiente:

$|A| = |-\ 1\, m\ \ -m\ -\ 1\ 3m\,| = -\ 3m - m(-\ m - 1) = -\ 3m + m^2 + m = 0;$

$m^2 - 2m = 0;\ \ m(m - 2) = 0 \Rightarrow m_1 = 0,\ m_2 = 2.$

La matriz ampliada es $A' = (-\ 1\, m\, 4\ \ -m\ -\ 1\ 3m\ 12\,)$.

$Para\, m = 0 \Rightarrow A' = (-\ 1\ 0\ 4\ \ -\ 1\ 0\ 12\,) \Rightarrow |-\ 1\ 4\ \ -\ 1\ 12\,| \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$Para\, m = 2 \Rightarrow A' = (-\ 1\ 2\ 4\ \ -\ 3\ 6\ 12\,) \Rightarrow \{F_2 = 3F_1\} \Rightarrow Rang\ M' = 1.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Para\ \{m \neq 0\ m \neq 2\ \} \Rightarrow Rang\ A\ =\ Rang\ A'\ =\ 2\ =\ nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

$$\underline{Para\ m\ =\ 0 \Rightarrow Rang\ A\ =\ 1;\ Rang\ A'\ =\ 2 \Rightarrow Sistima\ incompatible.}$$

$$\underline{Para\ m\ =\ 2 \Rightarrow Rang\ A\ =\ Rang\ A'\ =\ 1\ <\ nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

$$\underline{Como\ se\ observa:\ cuando\ existe\ solución\ no\ es\ única.}$$

Para $m = 1$ el sistema resulta $-\ x\ +\ y\ =\ 4\ \ -\ 2x\ +\ 3y\ =\ 12\ \}$. Resolviendo por reducción:

$$2x\ -\ 2y\ =-\ 8\ \ -\ 2x\ +\ 3y\ =\ 12\ \} \Rightarrow y\ =\ 4;\ \ x\ =\ 0.$$

$$\underline{Solución:\ x\ =\ 0,\ y\ =\ 4.}$$

****

2º) La cotización de las acciones (en euros) de una determinada sociedad suponiendo que la bolsa funcionó de continuo todos los días de un mes de 30 días, respondió a la siguiente ley: $f(x) = \frac{x^3 - 45x^2 + 243x + 30.000}{100}$, $con\ 0 \leq x \leq 30$, donde x representa el tiempo (en días).

a) Determina el período de tiempo en el que la cotización descendió. ¿En qué momento la cotización fue máxima? ¿A cuánto ascendió dicha cotización? ¿En qué momento la cotización fue mínima?

b) Estudia y representa la gráfica de la función f en el intervalo $[0,\ 30]$.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1}{100} \cdot \left(3x^2 - 90x + 243\right).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{100} \cdot \left(3x^2 - 90x + 243\right) = 0;\ \ 3x^2 - 90x + 243 = 0;$$

$$x^2 - 30x + 81 = 0;\ \ x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 324}}{2} = \frac{30 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{30 \pm 24}{2} \Rightarrow x_1 = 27,\ x_2 = 3.$$

Por tratarse de una función polinómica de tercer grado, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función en los intervalos $(0,\ 3)$, $(3,\ 27)\ y\ (27,\ 30)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, $x = 1 \in (0,\ 3)$:

$$f'(1) = \frac{1}{100} \cdot \left(3 \cdot 1^2 - 90 \cdot 1 + 243\right) = \frac{156}{100} > 0 \Rightarrow Creciente.$$

De lo anterior se deduce que:

$$\underline{La\ cotización\ decreció\ entre\ los\ días\ 3\ y\ 27.}$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{1}{100} \cdot (6x - 90) = \frac{1}{50} \cdot (3x - 45).$$

$$f''(3) = \frac{1}{50} \cdot (3 \cdot 3 - 45) = -\frac{36}{10} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 3.$$

$$\underline{La\ cotización\ fue\ máxima\ al\ final\ del\ tercer\ día.}$$

$$f(3) = \frac{3^3 - 45 \cdot 3^2 + 243 \cdot 3 + 30.000}{100} = \frac{27 - 405 + 729 + 30.000}{100} = \frac{30.351}{100} = 303,51.$$

$$\underline{La\ cotización\ máxima\ fue\ de\ 303,51\ euros\ la\ acción.}$$

$$f''(27) = \frac{1}{50} \cdot (3 \cdot 27 - 45) = \frac{81 - 45}{50} = \frac{36}{50} > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 27.$$

$$\underline{La\ cotización\ fue\ mínima\ al\ final\ del\ día\ 27.}$$

$$f(27) = \frac{27^3 - 45 \cdot 27^2 + 243 \cdot 27 + 30.000}{100} = \frac{19.683 - 32.805 + 6.561 + 30.000}{100} = \frac{56.244 - 32.805}{100} =$$

$$= \frac{23.439}{100} = 234,39.$$

$$\underline{La\ cotización\ mínima\ fue\ de\ 234,39\ euros\ la\ acción.}$$

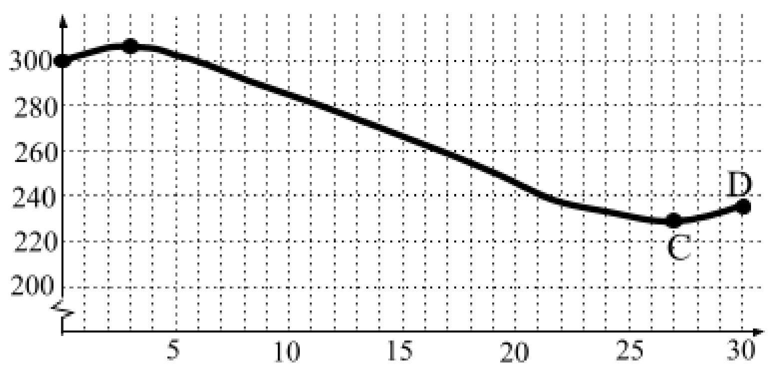
$b)$

$$f(0) = \frac{30.000}{100} = 300.$$

$$f(30) = \frac{30^3 - 45 \cdot 30^2 + 243 \cdot 30 + 30.000}{100} = \frac{27.000 - 40.500 + 7290 + 30.000}{100} = \frac{64.290 - 40.500}{100} =$$

$$= \frac{23.790}{100} = 237,9.$$

Con los datos obtenidos en el apartado anterior puede hacerse una representación gráfica, aproximada de la función, que es la que aparece en la figura siguiente.

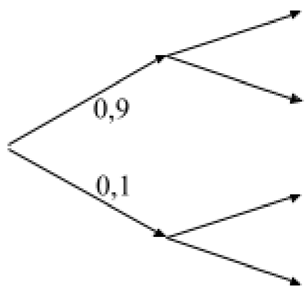


****

3º) En un determinado banco, el 90 % de los clientes tienen fondos. De ellos, el 40 % tiene talonario de cheques. En cambio, entre los clientes sin fondos, el porcentaje de ellos que tienen talonario de cheques pasa de ser del 100 %. Si se elige un cliente al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga fondos y talonario de cheques?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga talonario de cheques?



a)

$$P = P(F \cap T) = P(F) \cdot P(T/F) = 0,9 \cdot 0,4 = \underline{0,36}.$$

b)

$$P = P(T) = P(F) \cdot P(T/F) + P(\overline{F}) \cdot P(T/\overline{F}) = 0,9 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 1,0 =$$

$$= 0,9 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 1,0 = 0,36 + 0,10 = \underline{0,46}.$$

****

4º) Para estimar la altura media de los hombres de un país, se considera una muestra aleatoria de 1.600 hombres para la que se obtiene que la estatura media es de 180,3 cm. Se supone además que la estatura sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 4 cm.

a) Construye un intervalo de confianza para la altura media de los hombres de ese país, al 95 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera altura media de los hombres a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1 cm y un nivel de confianza del 95 %?
(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,9$
.

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$
$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $n = 1.600$; $\overline{x} = 180,3$; $\sigma = 4$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}$, σ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(180,3 - 1,96 \cdot \frac{4}{\sqrt{1.600}};\ 180,3 + 1,96 \cdot \frac{4}{\sqrt{1.600}}\right);$$

$(180,3 - 1,96 \cdot 0,1;\ 180,3 + 1,96 \cdot 0,1)$; $(180,3 - 0,196;\ 180,3 + 0,196)$.

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = (180,104;\ 180,496).}$$

b)

Datos: $\sigma = 4$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$; $E = 1$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,96 \cdot \frac{4}{1}\right)^2 =$

$$= (1,96 \cdot 4)^2 = 7,84^2 = 61,47.$$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 62\ hombres}.$

****

OPCIÓN B

1º) Una empresa fabrica dos tipos de lápices. En la producción diaria se sabe que: el número de lápices de tipo B producidos supera como mucho en 500 unidades a los de tipo a; entre los dos tipos no superan las 2.000 unidades y de tipo B se producen al menos 500 unidades.

a) ¿Cuántos lápices de cada tipo puede producir al día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría producir 1.000 lápices de tipo A y 600 de tipo B?

b) El coste de fabricación de cada lápiz de tipo A es de 0,25 euros y el de cada lápiz de tipo B es de 0,2 euros. ¿Cuántos lápices de cada tipo debe producir para minimizar el coste total de fabricación?, ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

----

a)

Sean x e y el número de lápices de los tipos A y B que fabrica diariamente la empresa, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{l} y - x \le 500 \\ x + y \le 2.000 \\ x \ge 0;\ y \ge 500 \end{array}\right\}$.

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

x	0	1.000
y	500	0

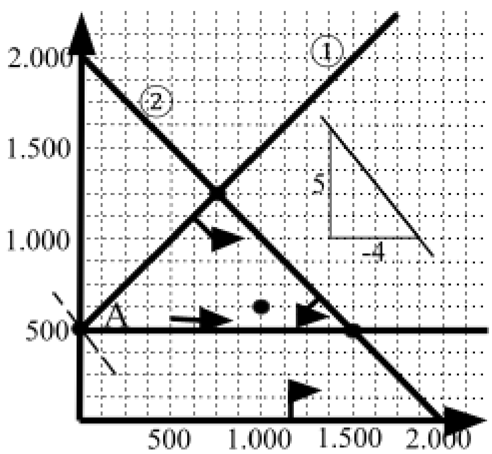
① $\Rightarrow y - x \le 500 \Rightarrow y \le x + 500 \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

x	0	2.000
y	2.000	0

② $\Rightarrow x + y \le 2.000 \Rightarrow y \le 2.000 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si$

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 500 \\ y - x = 500 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 500).$



$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y - x = 500 \\ x + y = 2.000 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 2.500 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 1.250;\ \ x = 750 \Rightarrow B(750,\ 1.250).$

$C \Rightarrow \quad y = 500 \; x + y = 2.000 \} \Rightarrow C(1.500,\ 500).$

Por pertenecer el punto $P(1.000;\ 600)$ a la región factible:

$\underline{Se\ pueden\ producir\ en\ un\ día\ 1.000\ lápices\ tipo\ A\ y\ 600\ tipo\ B}.$

$b)$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = 0,25x + 0,2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 500) = 0,25 \cdot 0 + 0,2 \cdot 500 = 0 + 50 = 50.$

$B \Rightarrow f(750,\ 1.250) = 0,25 \cdot 750 + 0,2 \cdot 1.250 = 187,5 + 250 = 437,5.$

$C \Rightarrow f(1.500,\ 500) = 0,25 \cdot 1.500 + 0,2 \cdot 500 = 375 + 100 = 475.$

El mínimo se produce en el punto $A(0,\ 500)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 0,25x + 0,2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{0,25}{0,2}x = -\frac{25}{20}x = -\frac{5}{4}x \Rightarrow m = -\frac{5}{4}.$$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ lo\ consigue\ fabricando\ únicamente\ 500\ lápices\ tipo\ B}.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 50\ euros}.$

****

2º) Dada la función $f(x) = 4x^3 - 36x$, se pide:

a) Encontrar la primitiva $F\ de\ f$ verificando que $F(1) = 0$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x =- 1\ y\ x = 1$.

----

a)

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int\left(4x^3 - 36x\right)\cdot dx = \frac{4x^4}{4} - \frac{36x^2}{2} = x^4 - 18x^2 + C.$$

$$F(1) = 0 \Rightarrow 1^4 - 18\cdot 1^2 + C = 0;\ \ 1 - 18 + C = 0 \Rightarrow C = 17.$$

$$\underline{F(x) = x^4 - 18x^2 + 17}.$$

b)

Los cortes con los ejes de la función $f(x) = 4x^3 - 36x$ son los siguientes:

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow O(0,\ 0)$.

$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 36x = 0;\ \ 4x\left(x^2 - 9\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow O(0,\ 0),\ B(-\ 3,\ 0)\ y\ C(3,\ 0)$.

Los máximos y mínimos relativos de la función f son los siguientes:

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = 12x^2 - 36.$ $\qquad\qquad$ $f''(x) = 24x.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 36 = 0;\ \ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 =- \sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3}.$

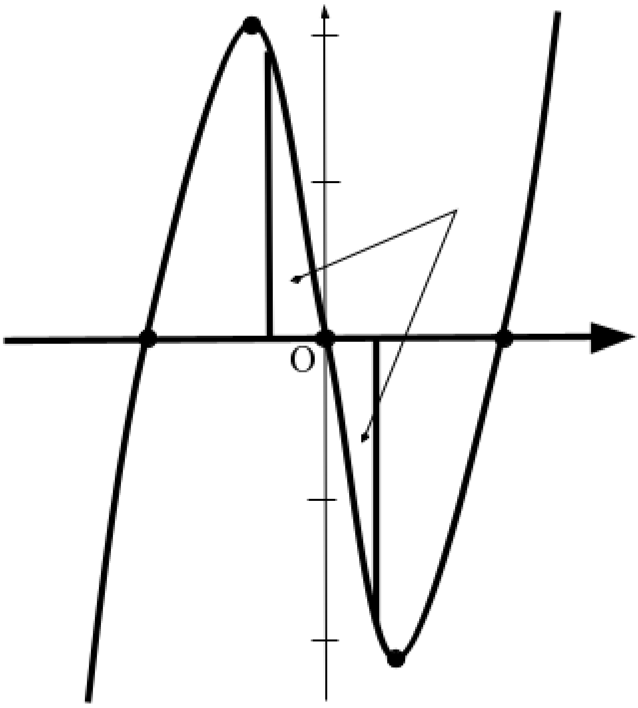
$f''\left(-\sqrt{3}\right) =- 24\sqrt{3} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x =- \sqrt{3}.$

$f\left(-\sqrt{3}\right) = 4\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 36\cdot\left(-\sqrt{3}\right) =- 12\sqrt{3} + 36\sqrt{3} = 24\sqrt{3}.$

$Máximo$: $C\left(-\sqrt{3},\ 24\sqrt{3}\right) \approx C(-1,73;\ \ 41,57)$.

Por simetría con respecto al origen, por ser $f(-x) = -f(x)$:
$Mínimo$: $D\left(\sqrt{3},\ \ -24\sqrt{3}\right) \approx D(1,73;\ \ -41,57)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



De la simetría de la función y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2\int_{1}^{0}\left(4x^3 - 36x\right)dx = 2\cdot\left[x^4 - 18x^2\right]_1^0 = 2\cdot\left[0 - \left(1^3 - 18\cdot1^2\right)\right] =$$

$$= 2\cdot(-1 + 18) = 2\cdot17 = \underline{34\, u^2}.$$

****

3º) En una clase formada por 10 chicos y 10 chicas, el 40 % de los chicos tienen francés como asignatura optativa. Además se sabe que el 5 % de la clase son chicas que tienen francés como asignatura optativa.

a) ¿Qué porcentaje de la clase tiene francés como asignatura optativa?

b) Dentro del grupo de estudiantes que tiene francés como asignatura optativa, ¿qué porcentaje son chicas?

$$Datos: P(Va) = 0,5;\ \ P(Mu) = 0,5;\ \ P(F/Va) = 0,4;\ \ P(Mu \cap F) = 0,05.$$

a)

$$P = P(F) = P(Va \cap F) + P(Mu \cap F) = P(Va) \cdot P(F/Va) + 0,05 =$$

$$= 0,5 \cdot 0,4 + 0,05 = 0,20 + 0,05 = \underline{0,25 = 25\ \%}.$$

$$P = P(Mu/F) = \frac{P(Mu \cap F)}{P(F)} = \frac{0,05}{0,25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = \underline{0,20 = 20\ \%}$$

****

4º) Para estimar la proporción de personas adultas que tienen determinada enfermedad en un país se considera una muestra aleatoria de 1.000 adultos de dicho país, de los cuales 100 personas padecen la enfermedad.

a) Halla, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de personas que padecen dicha enfermedad en ese país.

b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?

Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90;\ F(1,64) = 0,95;\ F(1,96) = 0,975;\ F(2,33) = 0,99;\ F(2,58) = 0,9$
.

----

a)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$

$$1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$$

$$Datos:\ p = \frac{100}{1.000} = 0,1;\ \ q = 0,9;\ \ n = 1.000;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p,\ q\ y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0,1 - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{1.000}};\ 0,1 + 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{1.000}}\right);$$

$(0,1 - 1,645 \cdot 0,0095;\ 0,1 + 1,645 \cdot 0,0095);\ \ (0,1 - 0,0156;\ 0,1 + 0,0156)$
.

$$\underline{I.\ C._{90\ \%} = (0,0844;\ 0,1156).}$$

b)

$$E = \frac{0,1156 - 0,0844}{2} = \frac{0,0312}{2} = 0,0156.$$

$$\underline{El\ error\ es\ E = 0,0156 = 1,56\ \%.}$$

$$\underline{El\ error\ disminuye\ al\ aumentar\ la\ muestra.}$$

Nótese que si la muestra fuese la población el error, teóricamente, seria cero.

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE ASTURIAS

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El examen presenta dos opciones: A y B. El alumno deberá elegir una de ellas y responder razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1º) En una cafetería, la mesa A pide 6 cafés y 3 tostadas por lo que paga 12 euros y la mesa B pide 6 cafés y m tostadas por lo que paga 13,6 euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el precio de un café y el precio de una tostada, respectivamente.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la mesa B se hayan pedido 4 tostadas? En caso afirmativo, ¿cuánto cuesta cada café?

----

a)

El sistema que resulta del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 6x + 3y = 12 \\ 6x + mx = 13,6 \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ 30x + 5my = 68 \end{array}\right\}}$$

.

b)

La matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 30 & 5m \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 30 & 5m & 68 \end{pmatrix}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 30 & 5m \end{vmatrix} = 10m - 30 = 0;\ m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3.$

$$\underline{Para\ m \neq 3 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$Para\ m = 3 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 30 & 15 & 68 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_2, C_3\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 15 & 68 \end{vmatrix} = 68 - 60 = 8 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 2.$

$$\underline{Para\, m = 3 \Rightarrow Rang\ A = 1;\ Rang\ A' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$\underline{Existen\ infinitas\ soluciones\ para\ cualquier\ valor\ de\ m \neq 15.}$$

Para $m = 4$ el sistema resulta $\left. \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ 30x + 20y = 68 \end{array} \right\}$, equivalente al siguiente sistema: $\left. \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ 15x + 10y = 34 \end{array} \right\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 34 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 15 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{40-34}{20-15} = \frac{6}{5} = 1,2.\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 15 & 34 \end{vmatrix}}{5} = \frac{68-60}{5} = \frac{8}{5} = 1,6.$$

$$\underline{El\ precio\ de\ cada\ caf\acute{e}\ es,\ en\ este\ caso,\ de\ 1,2\ euros.}$$

****

2º) El directivo de una empresa cobra cada mes un suelto fijo de 4.000 euros, más una comisión de 30 euros por cantidad de producto vendido, en toneladas. Además, si un mes las ventas superan las 200 toneladas, el directivo recibe un suplemento de 1.000 euros.

a) Si $f(x)$ representa el sueldo mensual del directivo en función de las toneladas vendidas x, obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x = 200$.

b) Estudia y representa la función f para valores de x en el intervalo $[0, \infty)$. Considera un mes en el que no se han superado las 200 toneladas de producto vendido, si el directivo ha cobrado el sueldo máximo posible, ¿cuántas ventas ha habido? ¿Y si el directivo ha cobrado el sueldo mínimo posible?

----

a)

$$\underline{f(x) = \{4.000 + 30x \ si \ 0 < x \leq 200 \quad 5.000 + 30x \quad si \ x > 200}.$$

b)

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x = 200 \Rightarrow \{f(x) = (4.000 + 30x) = 10.000 = f(200) \ f(x) = (5.000 + 30x) = 11$$

$$\Rightarrow f(x) \neq f(x).$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ continua\ para\ x = 200}.$$

Como quiera que $f(x) = \infty$, $\underline{no\ existe\ el\ sueldo\ máximo}$.

$$\underline{El\ sueldo\ mínimo\ es\ no\ vendiendo\ nada;\ es\ de\ 4.000\ euros\ mensuales}.$$

Para la representación gráfica se obtienen puntos de la función:

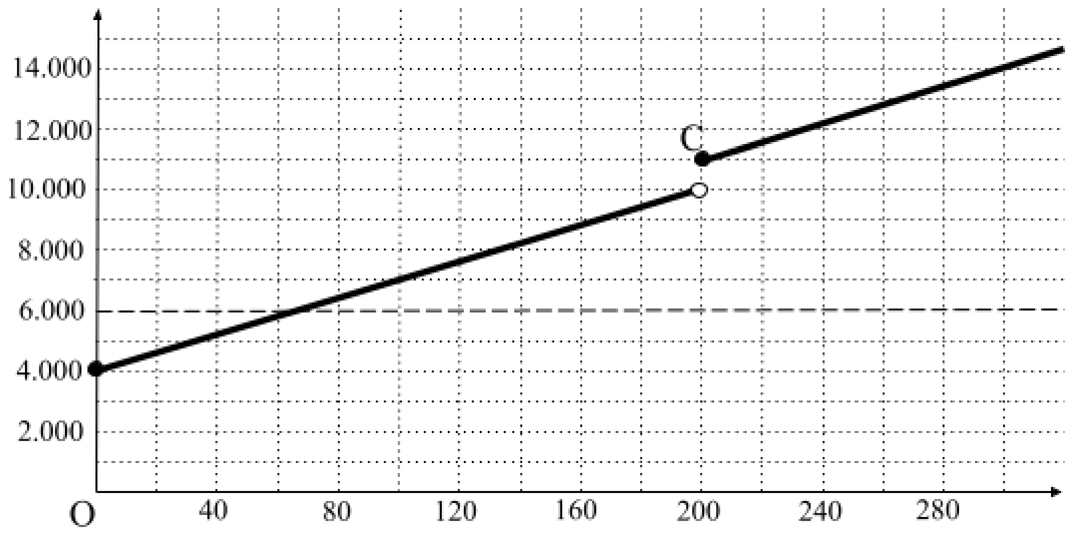
$f(0) = 4.000 \Rightarrow A(0;\ 4.000)$.

$f\left(200^-\right) = 10.000 \Rightarrow B\left(200^-;\ 10.000\right)$.

$f(200) = 11.000 \Rightarrow C(200;\ 11.000)$.

La función es una recta en el intervalo $[0,\ 200)$ y, en el intervalo $[200,\ +\infty)$ es otra recta de la misma pendiente que la del intervalo anterior.

La representación gráfica, aproximada, es la que indica la figura adjunta.

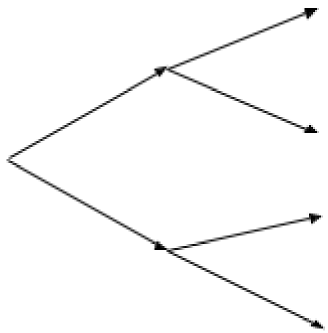

14.000
12.000
10.000
8.000
6.000
4.000
2.000
O
40
80
120
160
200
240
280
C

****

3º) En una empresa trabajan 10 hombres y 20 mujeres. La mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen titulación superior. Si se sabe que un día asisten al trabajo 29 personas, encuentra la probabilidad de que la persona que falta sea:

a) Hombre y tenga titulación superior.

b) Hombre o tenga titulación superior.



a)

$$P = P(H \cap T) = P(H) \cdot P(T/H) = \frac{1}{3} \cdot 0,5 = \underline{\frac{1}{6} = 0,1667}.$$

b)

$$P = P(H \cup T) = P(H) + P(M \cap T) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0,5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\frac{2}{3} = 0,6667}$$

.

****

4º) a) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de mujeres que ocupan cargos ministeriales en el mundo a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,03 y un nivel de confianza del 95 %?

b) En una muestra aleatoria de 550 ministerios de distintos países realizada en enero de 2.017 se obtuvo que solo 99 de los cargos ministeriales estaban ocupados por mujeres. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de mujeres que ocupan cargos ministeriales en el mundo.

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,9$
.

----

a)

Como no se conoce la proporción se considera el caso más desfavorable, es decir el que hace lo mayor posible la desviación típica, que es para $p = q = 0,5$.

Para un nivel de confianza del 95 %;

$\alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $p = q = 0,5;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96;\ E = 0,03.$

Sabiendo que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$:

$$E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{E^2} = 1,96^2 \cdot \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,03^2} = 3,8416 \cdot \frac{0,25}{0,0009} =$$

$$= 3,8416 \cdot 277,7778 = 1.067,11.$$

$\underline{\textit{El número mínimo de mujeres que hay que consultar es de } 1.068.}$

b)

Datos: $n = 550;\ p = \frac{99}{550} = 0,18;\ q = 1 - 0,18 = 0,82;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0,18\ -\ 1,96\cdot\sqrt{\frac{0,18\cdot 0,82}{550}};\ 0,18\ +\ 1,96\cdot\sqrt{\frac{0,18\cdot 0,82}{550}}\right);$$

$(0,18\ -\ 1,96\cdot 0,0164;\ 0,18\ +\ 1,96\cdot 0,0164);\ \ (0,18\ -\ 0,0321;\ 0,18\ +\ 0,0321)$
.

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = \left(0'1479;\ 0'2121\right)}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Una pintura se comercializa en dos colores A y B que se obtienen a partir de los tres colores primarios: rojo, azul y amarillo. Para obtener un bote de color A se necesitan 3 unidades de rojo y 2 unidades de azul. Par obtener un bote de color B se necesitan 5 unidades de rojo y 1 unidad de amarillo. Un día concreto, la empresa de pinturas tiene en el almacén 45 unidades de rojo, 20 de azul y 6 de amarillo.

a) ¿Cuántos botes de color A y cuántos de color B puede obtener ese día para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrán obtener 2 botes de cada color?

b) Si el beneficio obtenido con cada bote de color A es de 100 euros y con cada bote de color B es de 200 euros y se supone que vende todo lo que fabrica, ¿cuántos botes de cada tipo debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿y para maximizar el número total de botes fabricados?

----

a)

Sean $x\,e\,y$ el número de botes de los tipos A y B que se obtienen, respectivamente.

Las restricciones impuestas son: $\left.\begin{array}{l}3x+5y\leq 45\\2x\leq 20\\0\leq y\leq 6\end{array}\right\}$ $o\ mejor$: $\left.\begin{array}{l}3x+5y\leq 45\\0\leq x\leq 10\\0\leq y\leq 6\end{array}\right\}$.

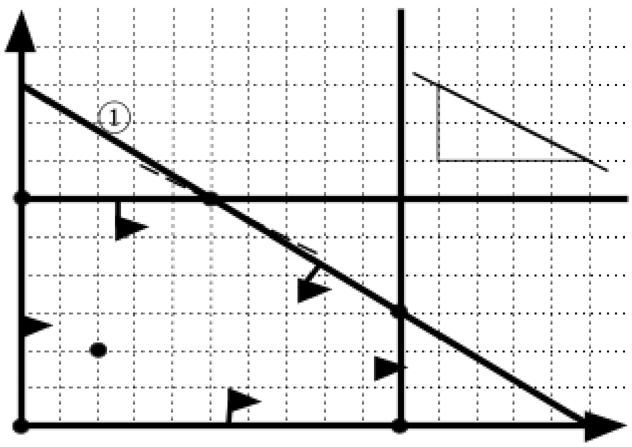
La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

x	0	15
y	9	0

①$\Rightarrow 3x+5y\leq 45 \Rightarrow y\leq \frac{45-3x}{5} \Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A\Rightarrow \left.\begin{array}{l}y=6\\x=0\end{array}\right\}\Rightarrow A(0,\ 6).$



$B\Rightarrow \left.\begin{array}{l}y=6\\3x+5y=45\end{array}\right\}\Rightarrow$

$3x+30=45;\ \ 3x=15;\ \ x=5\Rightarrow$

$\Rightarrow B(5,\ 6)$.

$C \Rightarrow 3x + 5y = 45 \quad x = 10 \} \Rightarrow 30 + 5y = 45;\ \ 5y = 15 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow C(10,\ 3)$.

$D \Rightarrow x = 10 \quad y = 0 \} \Rightarrow D(10,\ 0)$.

Como se observa el punto $P(2,\ 2)$ pertenece a la zona factible, por lo cual:

$\underline{Se\ pueden\ obtener\ dos\ botes\ de\ cada\ color\ un\ día\ cualquiera.}$

$b)$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = 100x + 200y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 6) = 100 \cdot 0 + 200 \cdot 6 = 0 + 1.200 = 1.200$.

$B \Rightarrow f(5,\ 6) = 100 \cdot 5 + 200 \cdot 6 = 500 + 1.200 = 1.700$.

$C \Rightarrow f(10,\ 3) = 100 \cdot 10 + 200 \cdot 3 = 1.000 + 600 = 1.600$.

$D \Rightarrow f(10,\ 0) = 100 \cdot 10 + 200 \cdot 0 = 1.000 + 0 = 1.000$.

El máximo se produce en el punto $B(5,\ 6)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 100x + 200y = 0 \Rightarrow y = -\frac{100}{200}x = -\frac{1}{2}x = -\frac{2}{4}x \Rightarrow m = -\frac{2}{4}.$$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ fabricando\ 5\ botes\ de\ A\ y\ 6\ botes\ de\ B.}$

La función que maximiza el número de botes es $g(x,\ y) = x + y$.

Los valores de la nueva función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 6) = 0 + 6 = 6$. $\quad B \Rightarrow f(5,\ 6) = 5 + 6 = 11$.

$C \Rightarrow f(10,\ 3) = 10 + 3 = 13$. $\quad D \Rightarrow f(10,\ 0) = 10 + 0 = 10$.

El máximo se produce en el punto $C(10,\ 3)$.

$\underline{El\ número\ de\ botes\ es\ máximo\ fabricando\ 10\ botes\ de\ A\ y\ 3\ botes\ de\ B.}$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{10}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Encontrar la primitiva $F\ de\ f$ verificando que $F(4) = 0$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitado por la curva y el eje X entre $x = 1\ y\ x = 3$.

----

a)

$$F(x) = \int \frac{10}{(x+1)^2} \cdot dx \Rightarrow \{x + 1 = t\ dx = dt\} \Rightarrow \int \frac{10}{t^2} \cdot dt = \frac{10 \cdot t^{-1}}{-1} + C = - \frac{10}{t} + C =$$

$$= - \frac{10}{x+1} + C.$$

$$F(4) = 4 \Rightarrow - \frac{10}{4+1} + C = 4; \quad - \frac{10}{5} + C = 4; \quad - 2 + C = 4 \Rightarrow C = 6.$$

$$F(x) = - \frac{10}{x+1} + 6 = \frac{-10+6x+6}{x+1} = \frac{6x-4}{x+1}$$

$$\underline{F(x) = \frac{6x-4}{x+1}}.$$

b)

Por ser $f(x) = \frac{10}{(x+1)^2} = 0$, la recta $y = 0$, eje X, es asíntota horizontal de la función.

El punto de corte de la función con el eje Y es $A(10,\ 0)$.

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es $D(f) = R - \{-1\}$, la recta $x = -1$ es asíntota vertical de la función.

La función $f(x)$ es positiva en su dominio: $f(x) > 0,\ \forall x \in D(f)$.

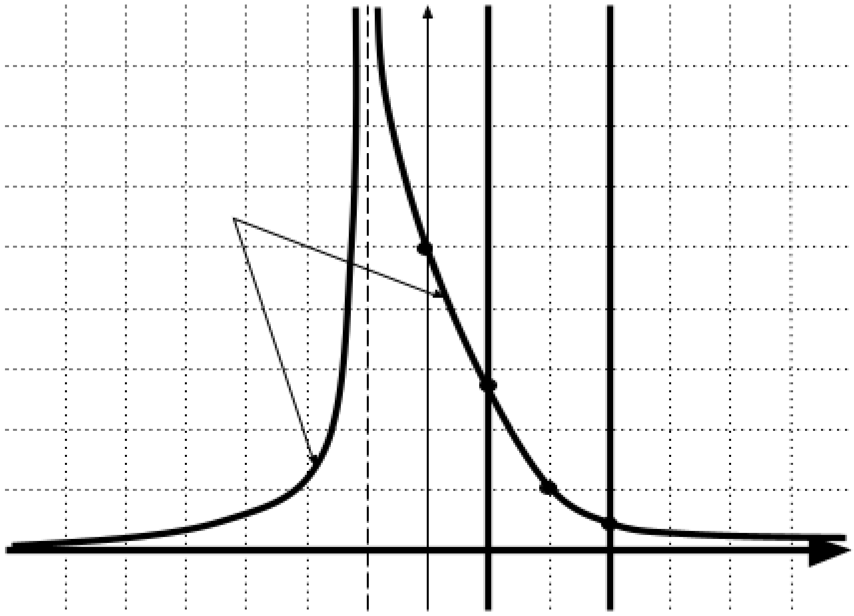
Otros puntos de la gráfica son: $B\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$, $C\left(2,\ \frac{10}{9}\right)$, $D\left(3,\ \frac{5}{8}\right)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es que aparece en la figura adjunta.

De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^3 f(x)\cdot dx = \left[-\frac{10}{x+1}\right]_1^3 = \left[\frac{10}{x+1}\right]_3^1 = \left(\frac{10}{1+1}\right) - \left(\frac{10}{3+1}\right) = \frac{10}{2} - \frac{10}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

$$\underline{S = \frac{5}{2}\, u^2 = 2,5\, u^2.}$$

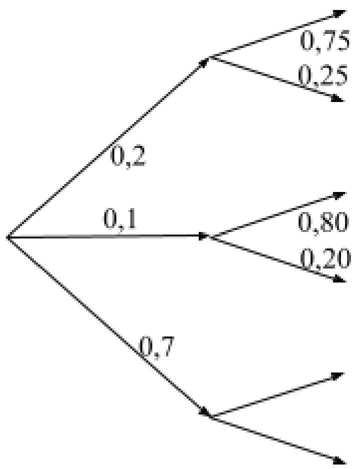


****

3º) El 20 % de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 10 % son economistas, no habiendo empleados con dos titulaciones. El 75 % de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 80 % de los economistas también, mientras que de los no ingenieros y los no economistas solamente el 10 % ocupa un puesto directivo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado elegido al azar sea directivo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado elegido al azar entre los directivos sea ingeniero?



a)

$$P = P(D) = P(I) \cdot P(D/I) + P(E) \cdot P(D/E) + P(O) \cdot P(D/O) =$$

$$= 0,2 \cdot 0,75 + 0,1 \cdot 0,80 + 0,7 \cdot 0,10 = 0,150 + 0,080 + 0,070 = \underline{0,30}.$$

b)

$$P = P(I/D) = \frac{P(I \cap D)}{P(D)} = \frac{P(I) \cdot P(D/I)}{P(I) \cdot P(D/I) + P(E) \cdot P(D/E) + P(O) \cdot P(D/O)} =$$

$$= \frac{0,2 \cdot 0,75}{0,2 \cdot 0,75 + 0,1 \cdot 0,80 + 0,7 \cdot 0,10} = \frac{0,150}{0,150 + 0,080 + 0,070} = \frac{0,15}{0,30} = \underline{0,50}.$$

****

4º) Un grupo de psicólogos desea conocer el comportamiento de los cocientes intelectuales de un colectivo de individuos con cierta patología común. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 400 de ellos, obteniendo que la suma de los cocientes intelectuales de estas 400 personas es 36.690. Se supone además que el cociente intelectual sigue una distribución normal con desviación típica 2,6.

a) Construir un intervalo de confianza para el cociente intelectual medio de este colectivo, al 99 % de confianza.

b) ¿Cuál será el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero cociente intelectual medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,8 y un nivel de confianza del 99 %?
Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1,28) = 0,90;\ F(1,64) = 0,95;\ F(1,96) = 0,975;\ F(2,33) = 0,99;\ F(2,58) = 0,9$
.

----

a)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$

$1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$

Datos: $n = 400;\ \overline{x} = \frac{36.690}{400} = 91,725;\ \sigma = 2,6;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(91,725 - 2,575\cdot\frac{2,6}{\sqrt{400}};\ 91,725 + 2,575\cdot\frac{2,6}{\sqrt{400}}\right);$

$(91,725 - 2,575\cdot 0,13;\ 91,725 + 2,575\cdot 0,13);$

$(91,725 - 0,3348;\ 91,725 + 0,3348);$

$$\underline{I.\ C._{99\ \%} = (91,3902;\ 92,0598).}$$

b)

Datos: $\sigma = 2,6;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575;\ E = 0,8.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,575\cdot\frac{2,6}{0,8}\right)^2 =$

$$= (2,575 \cdot 3,25)^2 = 8,36875^2 = 70,04.$$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 71\ individuos}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contestad de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Podéis utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) Considerar las matrices siguientes: $A = (1\ 0\ 2\ k\ 0\ 1)\ y\ B = (k\ 0\ -\ 1\ 1\ 1\ 2)$, donde k es un parámetro real.

a) Calcular $A \cdot B$, y determinar en función de los valores de k, si la matriz $A \cdot B$ tiene inversa.

b) Estudiar lo mismo que en el apartado a) pero ahora con la matriz $B \cdot A$.

c) Para $k =- 2$ encontrar la matriz inversa de $B \cdot A$.

----

a)

$$A \cdot B = (1\ 0\ 2\ k\ 0\ 1) \cdot (k\ 0\ -\ 1\ 1\ 1\ 2) = \underline{(k\ 0\ -\ 1\ 3k\ k\ 2k\ -\ 2\ 1\ 1\ 2)}.$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A \cdot B| = |k\ 0\ -\ 1\ 3k\ k\ 2k\ -\ 2\ 1\ 1\ 2| = 2k^2 - 3k + k - k(2k - 2) = 0;$$

$2k^2 - 2k - 2k^2 + 2k = 0.$

$$\underline{La\ matriz\ A \cdot B\ no\ tiene\ inversa\ \forall k \in R}.$$

b)

$$B \cdot A = (k\ 0\ -\ 1\ 1\ 1\ 2) \cdot (1\ 0\ 2\ k\ 0\ 1) = \underline{(k\ -\ 1\ 3\ k\ +\ 2)}.$$

$$|B \cdot A| = |k\ -\ 1\ 3\ k\ +\ 2| = k^2 + 2k + 3 = 0;\ \ k = \frac{-2 \pm \sqrt{4-9}}{2} \Rightarrow k \notin R.$$

$\underline{La\ matriz\ B{\cdot}A\ es\ invertible\ \forall k{\in}R.}$

$c)$

Para $k\ =-\ 2$ es $B{\cdot}A\ = (-\ 2\ \ -\ 1\ 3\ 0\ ).$

$|B{\cdot}A| = |-\ 2\ \ -\ 1\ 3\ 0\ | =\ 3;\qquad (B{\cdot}A)^t = (-\ 2\ 3\ \ -\ 1\ 0\ ).$

$Adj.\ de\ (B{\cdot}A)^t = (0\ 1\ \ -\ 3\ \ -\ 2\ ) \Rightarrow (B{\cdot}A)^{-1} = \frac{Adj.\ de\ (B{\cdot}A)^t}{|B{\cdot}A|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{(B{\cdot}A)^{-1} = \frac{1}{3}{\cdot}(0\ 1\ \ -\ 3\ \ -\ 2\ ).}$

****

2º) Los beneficios (en miles de euros) por la venta de un producto en función de la inversión realizada en promoción (en miles de euros) vienen dados por la siguiente función: $B(x) = \{ \;\; 5x + 15 \quad si \quad 0 < x \leq 3 \;\; -(x-3)^2 + 30 \;\; si \;\; 3 < x \leq 8$:

a) ¿Es continua la función $B(x)$?

b) ¿Es derivable? Dar el conjunto donde es derivable la función.

c) Hacer un dibujo de la función en su dominio.

d) Determinar el beneficio máximo y el beneficio mínimo.

e) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de los beneficios.

----

a)

La función $B(x)$, por ser polinómica, es continua en su dominio, excepto para $x = 3$ cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\, x = 3 \Rightarrow \{ f(x) \;= (5x + 15) = \; 30 = f(3) \; f(x) \;= \left[-(x-3)^2 + 30\right] = 30 \;\; \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \;= f(x) \;= f(3).$

$\underline{La\; función\; B(x)\; es\; continua\; para\; x = 3}.$

b)

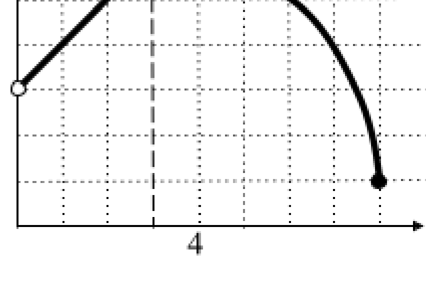
Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual:

$\underline{B(x)\; no\; es\; derivable\; para\; x = 3}.$

$\underline{B(x)\; es\; derivable\; \forall x \in (0,\, 3) \cup (3,\, 8)}.$

c)

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la figura adjunta.



d)

De la observación de la figura se deducen el máximo y el mínimo de la función, que son los siguientes:

El máximo se produce para $x = 3 \Rightarrow B(3) = 5 \cdot 3 + 15 = 15 + 15 = 30$.

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 30.000\ euros}.$$

El mínimo se produce para $x = 8 \Rightarrow B(8) = -(8 - 3)^2 + 30 = -5^2 + 30 =$

$= 5.$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 5.000\ euros}.$$

$e)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$B'(x) = \begin{cases} 5 & si \quad 0 < x \leq 3 \\ -2(x-3) & si \quad 3 < x \leq 8 \end{cases}.$$

$$\underline{Crecimiento: B'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0,\ 3)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: B'(x) < 0 \Rightarrow x \in (3,\ 8)}.$$

****

3º) Un dado está cargado de forma que la probabilidad de obtener un 6 es de $\frac{1}{2}$ y que las probabilidades de obtener cada una de las otras caras son iguales a p. Se lanza dicho dado, calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) Se obtiene un dos.

b) No se obtiene un tres.

c) Se obtiene un número par.

d) Se obtiene un número impar.

La probabilidad de obtener un número distinto de 6 es equiprobable para el resto de los números, por lo cual:

$$5p + \frac{1}{2} = 1;\ \ 10p + 1 = 2;\ \ 10p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{10}.$$

a) $\underline{P = p = \frac{1}{10}}$.

b) La probabilidad pedida es la unidad menos la probabilidad de obtener 3:

$$P = 1 - p = 1 - \frac{1}{10} = \underline{\frac{9}{10} = 0,9}.$$

c)

$$P = P(2) + P(4) + P(6) = p + p + \frac{1}{2} = 2p + \frac{1}{2} = \frac{2}{10} + \frac{1}{2} = \frac{2+5}{10} = \underline{\frac{7}{10} = 0,7}$$

.

d)

$$P = P(1) + P(3) + P(5) = p + p + p = 3p = \underline{\frac{3}{10} = 0,3}.$$

****

4º) En una fábrica de pilas se sabe que la desviación típica de la duración de un determinado tipo de pilas es de 80 horas.

a) Si $\alpha = 0,2$ (nivel de significación), y en una muestra de 50 de esas pilas la duración media es de 500 horas, determinar el intervalo de confianza para la duración media poblacional.

b) Si la duración de ese tipo de pilas siguiera una normal de media 500 horas y la desviación típica 80 horas, ¿cuál sería la probabilidad de que la duración media de 9 pilas fuese mayor que 520 horas?

----

a)

Para un nivel de significación de $\alpha = 0,2 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,1} = 1,28$

$(1 - 0,1 = 0,9000 \rightarrow z = 1,28)$.

Datos: $n = 50;\ \overline{x} = 500;\ \sigma = 80;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,28$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(500 - 1,28 \cdot \frac{80}{\sqrt{50}};\ 500 + 1,28 \cdot \frac{80}{\sqrt{50}}\right);$

$(500 - 1,28 \cdot 11,31377;\ 500 + 1,28 \cdot 11,31377);$

$(500 - 14,4815;\ 500 + 14,4815);\ \ (485,5185;\ 514,4815)$.

$$\underline{I.\ C._{80\ \%} = (485,5185;\ 514,4815).}$$

b)

$Datos$: $\mu = 500;\ n = 9;\ \sigma = 80$.

$X \rightarrow N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(500;\ \frac{80}{\sqrt{9}}\right) = N(500;\ 26,67)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-500}{26,67}$.

$P = P(X > 520) = P\left(Z > \frac{520-500}{26,67}\right) = P\left(Z > \frac{20}{26,67}\right) = P(Z > 0,75) =$

$= 1 - P(Z \leq 0,75) = 1 - 0,7734 = \underline{0,2266}$.

****

OPCIÓN B

1º) El precio de la estancia diaria en un hotel es de 50 euros por persona. Los niños pagan el 50 % de este precio, y los jubilados pagan el 60 % del precio. Determinar el número de personas que no son niños ni jubilados, el número de niños y el de jubilados que había un día en el hotel si se sabe que: había 200 personas, el nombre de jubilados era igual al 25 % del número de niños y que recaudaron un total de 5.680 euros por todas las estancias.

$a)$

Sean x, y, z las personas que no son niños ni jubilados, los niños y los jubilados que había ese día en el hotel, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y + z = 200 \quad z = 0,25y \; 50x + 25y + 30z = 5.680 \}$$

.

$$x + 4z + z = 200 \; 10x + 20z + 6z = 1.136 \} \quad x + 5z = 200 \; 10x + 26$$

$$5x + 25z = 1.000 \; -5x - 13z = -568 \} \Rightarrow 12z = 432; \; z = \frac{432}{12} = 36.$$

$$x + 5 \cdot 36 = 200; \; x = 200 - 180 = 20.$$

$$20 + y + 36 = 200; \; y = 200 - 56 = 144.$$

$\underline{\textit{Había } 20 \textit{ personas que no son niños ni jubilados, } 144 \textit{ niños y } 36 \textit{ jubilados.}}$

****

2º) Considerar la función $f(x, y) = x - y$.

a) Representar el conjunto de puntos del plano definido por:

$A = \{(x, y): 3x + y \geq 15;\ y - x \leq -5;\ 2x + 3y \leq 60;\ y \geq 0\}$ y calcular el valor máximo de $f(x, y)$ en A. ¿Se podría eliminar alguna de las desigualdades que definen el conjunto A de manera que todavía fuese el mismo conjunto?

b) Decir si la función $f(x, y)$ alcanza el valor máximo en el conjunto:

$A = \{(x, y): 3x + y \leq 15;\ x - y \geq 5;\ x \geq 0\}$.

----

a)

Las condiciones del ejercicio son las siguientes: $\left.\begin{array}{l} 3x + y \geq 15 \\ y - x \leq -5 \\ 2x + 3y \leq 60 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$.

x	0	5
y	15	0

① $\Rightarrow 3x + y \geq 15 \Rightarrow y \geq 15 - 3x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

x	5	15
y	0	10

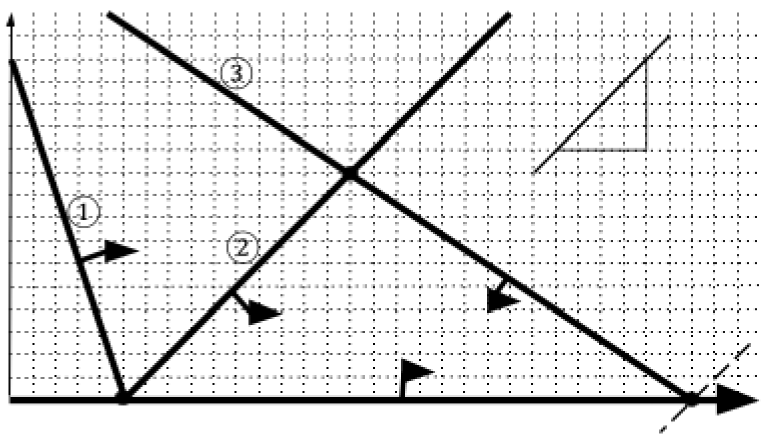
② $\Rightarrow y - x \leq -5 \Rightarrow y \leq x - 5 \rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

x	15	30
y	00	0

③ $\Rightarrow 2x + 3y \leq 60 \Rightarrow y \leq \frac{60-2x}{3} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

$\underline{La\ zona\ factible\ es\ la\ misma\ si\ se\ elimina\ la\ condición\ 3x + y \geq 15.}$



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$P \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y - x = -5 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 5 \Rightarrow P(5, 0).$

$Q \Rightarrow \quad y - x = -5 \; 2x + 3y = 60 \} \quad -2x + 2y = -10 \; 2x + 3y = 60 \} \Rightarrow 5y = 50;$
$x = 15 \Rightarrow Q(15,\ 10).$

$R \Rightarrow 2x + 3y = 60 \qquad y = 0 \} \Rightarrow 2x = 60;\ \ x = 30 \Rightarrow R(30,\ 0).$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = x - y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$P \Rightarrow f(5,\ 0) = 5 - 0 = 5.$

$Q \Rightarrow f(15,\ 10) = 15 - 10 = 5.$

$R \Rightarrow f(30,\ 0) = 30 - 0 = 30.$

$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ R\ y\ su\ valor\ es\ 30}.$

También se hubiera obtenido el punto R por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = x - y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{1}x = \frac{4}{4}x \Rightarrow m = \frac{4}{4}.$

$b)$

Las nuevas condiciones del ejercicio son las siguientes: $3x + y \leq 15 \quad x - y \geq 5 \qquad x \geq 0 \}.$

x	5	7
y	0	-6

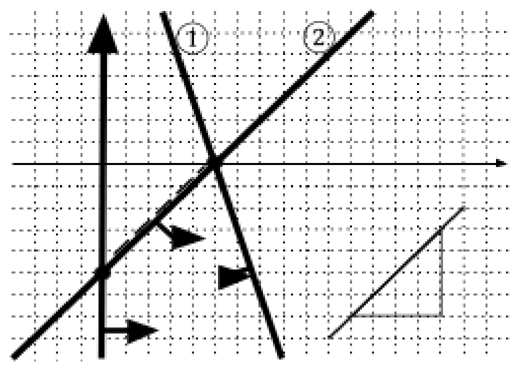
①$\Rightarrow 3x + y \leq 15 \Rightarrow y \leq 15 - 3x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	5	10
y	0	5

②$\Rightarrow x - y \geq 5 \Rightarrow y \leq x - 5 \rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

La nueva región factible, que es abierta, es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la nueva zona factible son los siguientes:



$P \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y = 15 \\ x - y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x = 20;\ x = 5.$

$y = 0 \Rightarrow P(5,\ 0).$

$Q \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = 5 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = -5 \Rightarrow Q(0,\ -5).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$P \Rightarrow f(5,\ 0) = 5 - 0 = 5.$

$Q \Rightarrow f(0,\ -5) = 0 - (-5) = 5.$

$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ en\ todos\ los\ puntos\ del\ segmento\ de\ extremos\ P\ y\ Q}.$

También se hubiera obtenido el segmento PQ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = x - y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{1}x = \frac{4}{4}x \Rightarrow m = \frac{4}{4}.$

****

3º) Considere la función $h(x) = x^2 \cdot e^{x^3}$.

a) Calcular una primitiva de esta función.

b) Calcular la siguiente integral definida: $I = \int_{\sqrt[3]{L2}}^{\sqrt[3]{L3}} x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx$, y comprobar que su valor es $\frac{1}{3}$.

----

a)

$$H(x) = \int x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx \Rightarrow \left\{ x^3 = t \quad x^2 dx = \frac{1}{3} dt \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \int e^t \cdot dt = \frac{1}{3} e^t + C.$$

$$\underline{H(x) = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.}$$

b)

$$I = \int_{\sqrt[3]{L2}}^{\sqrt[3]{L3}} x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \left[e^{x^3} \right]_{\sqrt[3]{L2}}^{\sqrt[3]{L3}} = \frac{1}{3} \cdot \left(e^{L3} - e^{L2} \right) = \frac{1}{3} \cdot (3 - 2) = \frac{1}{3}.$$

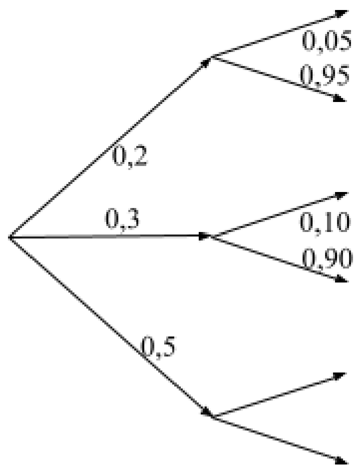
$$\underline{I = \int_{\sqrt[3]{L2}}^{\sqrt[3]{L3}} x^2 \cdot e^{x^3} \cdot dx = \frac{1}{3} \; como \; se \; pedía \; comprobar.}$$

****

4º) En una universidad, en la que no hay más que estudiantes de ingeniería, de ciencias y de letras, acaban la carrera el 5 % de ingeniería, el 10 % de ciencias y el 20 % de letras. Se sabe que el 20 % estudian ingeniería, el 30 %, ciencias y el 50 %, letras. Tomado un estudiante al azar, se pide:

a) Probabilidad de que haya acabado la carrera y sea de ingeniería.

b) Nos dicen que ha acabado la carrera, probabilidad de que sea de ingeniería.



a)

$$P = P(A \cap I) = P(I) \cdot P(A/I) = 0,2 \cdot 0,05 = \underline{0,01}.$$

b)

$$P = P(I/A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} = \frac{P(I) \cdot P(A/I)}{P(I) \cdot P(A/I) + P(C) \cdot P(A/C) + P(L) \cdot P(A/L)} =$$

$$= \frac{0,2 \cdot 0,05}{0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,10 + 0,5 \cdot 0,20} = \frac{0,01}{0,01 + 0,03 + 0,10} = \frac{0,01}{0,14} = \underline{0,0714}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE BALEARES

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano Corbacho)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contestad de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Se valorará la corrección y la claridad en el lenguaje (matemático y no matemático) empleado por el alumno. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Podéis utilizar calculadora de cualquier tipo, científica, gráfica o programable, pero no se autorizará el uso de las que traigan información almacenada o puedan transmitirla.

OPCIÓN A

1º) Determinar una matriz X que verifique:

$$(1\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 3)\cdot X = (1\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 9\ 3\ -3) + 2\cdot(1\ 1\ 1\ 2\ 3\ 0\ 3\ 4\ 5).$$

Calcular, si es posible, la matriz inversa de X.

$$(1\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 3)\cdot X = (1\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 9\ 3\ -3) + 2\cdot(1\ 1\ 1\ 2\ 3\ 0\ 3\ 4\ 5) =$$

$$= (1\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 9\ 3\ -3) + (2\ 2\ 2\ 4\ 6\ 0\ 6\ 8\ 10) = (3\ 2\ 1\ 4\ 6\ 0\ 15\ 11\ 7).$$

$$M\cdot X = N \Rightarrow M = (1\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 3);\ \ N = (3\ 2\ 1\ 4\ 6\ 0\ 15\ 11\ 7).$$

$$M^{-1}\cdot M\cdot X = M^{-1}\cdot N;\ \ I\cdot X = M^{-1}\cdot N \Rightarrow \underline{X = M^{-1}\cdot N}.$$

Se obtiene la inversa de M por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow \frac{1}{2}F_2\ F_3 \rightarrow \frac{1}{3}F_3\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \left(1\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{3}\right).$$

$$X = M^{-1}\cdot N = \left(1\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{3}\right)\cdot(3\ 2\ 1\ 4\ 6\ 0\ 15\ 11\ 7) = \left(3\ 2\ 1\ 2\ 3\ 0\ 5\ \frac{11}{3}\ \frac{7}{3}\right)$$

.

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 5 & \frac{11}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}}$$

****

2º) El rendimiento de los trabajadores de una fábrica (valorado en una escala de 0 a 100), durante una jornada de 8 horas, viene dado por la siguiente función:

$$r(t) = \begin{cases} -10t^2 + 60t & si\ 0 \le t < 4 \\ 80 & si\ 4 \le t < 6 \\ 170 - 15t & si\ 6 \le t \le 8 \end{cases}$$

, donde t es el tiempo en horas.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento ¿Cuál es el rendimiento máximo?

b) ¿En qué instantes de la jornada laboral el rendimiento se sitúa en la mitad de la escala?

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$r'(t) = \begin{cases} -20t + 60 & si\ 0 \le t < 4 \\ 0 & si\ 4 \le t < 6 \\ -15 & si\ 6 \le t \le 8 \end{cases}.$$

$$-20t + 60 = 0;\ \ -t + 3 = 0;\ \ t = 3.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función $r(t)$, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: r'(t) > 0 \Rightarrow t \epsilon (0,\ 3)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: r'(t) < 0 \Rightarrow t \epsilon (3,\ 4) \cup (6,\ 6)}.$$

$$\underline{En\ el\ intervalo\ (4,\ 6)\ la\ función\ r(t)\ es\ constante}.$$

b)

$$Intervalo\ [0,\ 4]:\ \ -10t^2 + 60t = 50;\ \ -t^2 + 6t - 5 = 0;\ t^2 - 6t + 5 = 0;$$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = 3 \pm 2 \Rightarrow t_1 = 1;\ t_2 = 5 \notin (0,\ 4).$$

$$Intervalo\ [6,\ 8]:\ \ 170 - 15t = 50;\ \ 15t = 120;\ \ t = \frac{120}{15} = 8.$$

$$\underline{El\ rendimiento\ se\ situa\ en\ la\ mitad\ de\ la\ escala\ para\ t = 1\ y\ para\ t = 8}.$$

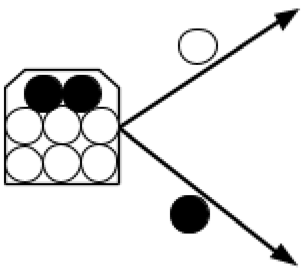
****

3º) Una urna contiene 6 bolas blancas y 2 negras. Se dispone además de una baraja española (1) de 48 cartas y de una baraja de póquer o francesa (2) de 52 cartas. Se extrae una bola al azar. Si es blanca se extrae al azar una carta de la baraja española. Si es negra se extrae al azar una carta de la baraja de póquer.

a) Calcular la probabilidad de que la carta extraída sea figura.

b) Si la carta extraída ha sido figura, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra?

(1) La baraja española tiene 48 naipes, repartidos entre cuatro palos: oros, copas, espadas y bastos. La baraja de 48 cartas está numerada del 1 (as) al 9, siendo las figuras el 10 (sota), el 11 (caballo) y 12 (rey).
(2) La baraja francesa consta de 52 cartas distribuidas entre 4 palos (corazones, diamantes, picas y tréboles) siendo numeradas del 1 (as) al 10 y seguidas por las figuras que llevan la J (de voz inglesa jack o paje), la Q (de queen o reina) y la K (de king o rey).



a)

$$P = P(F) = P(B \cap F) + P(N \cap F) = P(B) \cdot P(F/B) + P(N) \cdot P(F/N) =$$

$$= \frac{6}{8} \cdot \frac{12}{48} + \frac{2}{8} \cdot \frac{12}{52} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} = \frac{3}{16} + \frac{3}{52} = \frac{39+12}{208} = \underline{\frac{51}{208} = 0,2452.}$$

b)

$$P = P(N/F) = \frac{P(N \cap F)}{P(F)} = \frac{P(N) \cdot P(F/N)}{P(B) \cdot P(F/B) + P(N) \cdot P(F/N)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13}} = \frac{\frac{3}{52}}{\frac{3}{16} + \frac{3}{52}} = \frac{\frac{3}{52}}{\frac{39+12}{208}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 208}{52 \cdot 51} = \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 17} = \underline{\frac{4}{17} = 0,2353.}$$

****

4º) A lo largo de las diferentes pruebas de acceso a la universidad (PAUs) se ha observado que la distribución de las calificaciones de la asignatura MACSH sigue una ley normal de media 5,3 y desviación típica 0,8.

a) Cuál es la probabilidad de que una muestra de 49 alumnos tenga una media superior a 5,7?

b) ¿Cuál es la probabilidad que un alumno escogido al azar suspenda la asignatura MACSH, entendiendo por suspender obtener una calificación menor que 5 puntos?

----

a)

$Datos$: $\mu = 5,3;\ n = 49;\ \sigma = 0,8.$

$$X \rightarrow N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(5,3;\ \frac{0,8}{\sqrt{49}}\right) = N(5,3;\ 0,11).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-5,3}{0,11}$.

$$P = P(X > 5,7) = P\left(Z > \frac{5,7-5,3}{0,11}\right) = P\left(Z > \frac{0,4}{0,11}\right) = P(Z > 3,64) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3,64) = 1 - 0,9999 = \underline{0,0001}.$$

b)

$Datos$: $\mu = 5,3;\ n = 1;\ \sigma = 0,8.$

$$X \rightarrow N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(5,3;\ \frac{0,8}{\sqrt{1}}\right) = N(5,3;\ 0,8).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-5,3}{0,8}$.

$$P = P(X < 5) = P\left(Z < \frac{5-5,3}{0,8}\right) = P\left(Z < \frac{-0,3}{0,8}\right) = P(Z < -0,375) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0,375) = 1 - 0,6461 = \underline{0,3539}.$$

****

OPCIÓN B

1º) El administrador de la comunidad de vecinos quiere saber qué cobra a la hora un electricista, un fontanero y un albañil. Para eso, sabe que:

--- En el 4ºB, el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas, y tuvieron que pagar 78 euros de mano de obra.

--- En el 3ºA, pagaron 85 euros por las dos horas que estuvo el fontanero y la hora que estuvo el albañil.

--- En el 1ºA, mi casa, estuvo 1 hora el fontanero, 1 hora el electricista y 3 horas el albañil, y nos cobraron 133 euros.

¿Cuánto cobra por hora cada profesional?

Sean x, y, z lo que cobran en una hora de trabajo el electricista, el fontanero y el albañil, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$x + 2z = 78 \quad 2y + z = 85 \, x + y + 3z = 133 \} \quad x + 2z = 78 \quad 2y$

$2y + z = 85 \;\; y + z = 55 \} \quad 2y + z = 85 \;\; -y - z = -55 \} \Rightarrow y = 30; \;\; 30 + z =$

.

$x + 2 \cdot 25 = 78; \;\; x = 78 - 50 = 28.$

<u>*El electricista cobra por hora 28 euros, el fontanero 30 y el albañil 25.*</u>

****

2º) Dos grupos diferentes, G1 y G2, de la misma empresa pueden llevar a término un proyecto de jardinería. Se trata de ajardinar tres zonas: A, B y C. En la tabla siguiente se recoge el número de unidades que puede ajardinar cada grupo durante una semana:

	Zona A	Zona B	Zona C
Grupo G1	4	10	7
Grupo G2	10	5	7

Han de ajardinar un mínimo de 40 unidades de la zona A, 50 unidades de la zona B y 49 unidades de la zona C, y el coste semanal se estima en 3.300 euros para el grupo G1 y en 4.000 euros para el grupo G2.
¿Cuántas semanas tendrá que trabajar cada grupo para acabar el proyecto con el coste mínimo? Se tiene que plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

Sean x e y las semanas que trabajan los grupos G1 y G2, respectivamente.

El sistema de inecuaciones es:
$4x + 10y \geq 40 \;\; 10x + 5y \geq 50 \;\; 7x + 7y \geq 49 \;\; x \geq 0; \; y \geq 0 \} \;\; 2x + 5y \geq 20 \;\; 2x + y \geq$
.

x	10	0
y	0	4

①$\Rightarrow 2x + 5y \geq 20 \Rightarrow y \geq \frac{20-2x}{5} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

x	0	5
y	10	0

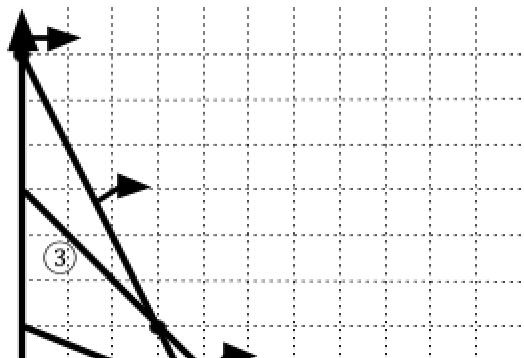
②$\Rightarrow 2x + y \geq 10 \Rightarrow y \geq 10 - 2x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

x	0	7
y	7	0

③$\Rightarrow x + y \geq 7 \Rightarrow y \geq 7 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

La región factible, que es abierta, es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x + y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 10).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + y = 10 \\ x + y = 7 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} 2x + y = 10 \\ -x - y = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3;\ \ y = 4 \Rightarrow B(4,\ 3).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 5y = 20 \\ x + y = 7 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} 2x + 5y = 20 \\ -2x - 2y = -14 \end{array}\right\} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3y = 6;\ \ y = 2;\ \ x = 5 \Rightarrow C(5,\ 2).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 2x + 5y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 20;\ \ x = 10 \Rightarrow D(10,\ 0).$

La función de objetivos cuando lo que se pretende es determinar el mínimo consumo es $f(x,\ y) = 3.300x + 4.000y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 10) = 3.300 \cdot 0 + 4.000 \cdot 10 = 0 + 40.000 = 40.000.$

$B \Rightarrow f(4,\ 3) = 3.300 \cdot 4 + 4.000 \cdot 3 = 13.200 + 12.000 = 25.200.$

$C \Rightarrow f(5,\ 2) = 3.300 \cdot 5 + 4.000 \cdot 2 = 16.500 + 8.000 = 24.500.$

$D \Rightarrow f(10,\ 0) = 3.300 \cdot 10 + 4.000 \cdot 0 = 33.000 + 0 = 33.000.$

El valor mínimo se produce en el punto $B(4,\ 3)$.

$\underline{El\ grupo\ G1\ tiene\ que\ trabajar\ cuatro\ semanas\ y\ el\ grupo\ G2\ tres\ semanas}.$

****

3º) Considerar la función $h(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$.

a) Calcular una primitiva de la función $h(x)$.

b) Calcular la siguiente integral definida: $I=\int_{0}^{L2}\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot dx$, y comprobar que su valor es $\frac{3}{4}$.

----

a)

$$H(x)=\int\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\int e^{x}\cdot dx+\frac{1}{2}\cdot\int e^{-x}\cdot dx=\frac{e^{x}}{2}+\frac{1}{2}\cdot A. \quad (*)$$

$$A=\int e^{-x}\cdot dx\Rightarrow\left\{-x=t\ dx=-dt\right\}\Rightarrow-\int e^{t}\cdot dt=-e^{t}+C=-e^{-x}+C.$$

Sustituyendo el valor obtenido de A en la expresión (*):

$$H(x)=\frac{e^{x}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(-e^{-x}\right)+C=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}+C.$$

$$\underline{H(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}+C=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)+C.}$$

b)

$$I=\int_{0}^{L2}\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(e^{x}-e^{-x}\right)\right]_{0}^{L2}=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(e^{L2}-e^{-L2}\right)-\left(e^{0}-e^{-0}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{L2}-\frac{1}{e^{L2}}-1+1\right)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}.$$

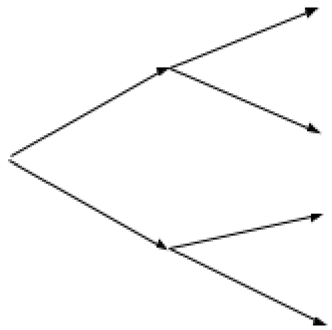
$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ I=\int_{0}^{L2}\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot dx=\frac{3}{4}.}$$

****

4º) Un restaurante tiene contratados a dos camareros, Joan y Catalina, para atender el servicio de comedor. Catalina pone el servicio el 70 % de los días y se confunde al colocar la cubertería el 5 % de los días que pone el servicio. Joan, por el contrario, coloca mal alguna pieza el 25 % de los días que pone el servicio.

a) Esta mañana, el encargado del restaurante pasa revista al servicio: ¿cuál es la probabilidad de que encuentre algún servicio mal colocado?

b) Por desgracia, el encargado encontró unos cubiertos mal colocados y desea conocer la probabilidad de que haya sido Joan.



a)

$$P = P(M) = P(J \cap M) + P(C \cap M) = P(J) \cdot P(M/J) + P(C) \cdot P(M/C) =$$

$$= 0,3 \cdot 0,25 + 0,7 \cdot 0,05 = 0,075 + 0,035 = \underline{0,11}.$$

c)

$$P = P(J/M) = \frac{P(J \cap M)}{P(M)} = \frac{P(J) \cdot P(M/J)}{P(J) \cdot P(M/J) + P(C) \cdot P(M/C)} = \frac{0,3 \cdot 0,25}{0,3 \cdot 0,25 + 0,7 \cdot 0,05} =$$

$$= \frac{0,075}{0,075 + 0,035} = \frac{0,075}{0,11} = \underline{0,6818}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

OPCIÓN A

1º) De ocho a once de la mañana, se estima que un número de teléfono de cada diez está apagado. Una empresa de servicios telefónicos realiza 400 llamadas a distintos teléfonos en ese tramo horario. Justificando la respuesta:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, estén apagados 40 teléfonos?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que estén apagados 40 teléfonos?

$c)$ ¿Cuál es la probabilidad de que estén apagados entre 40 y 50 teléfonos?

Se trata de una distribución binomial con $p = 0,1; q = 0,9\ y\ n = 400$.

Por ser n suficientemente grande se cumple que $n \cdot p > 5\ y\ n \cdot q > 5$, por lo cual se puede aproximar la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$\mu = n \cdot p = 400 \cdot 0,1 = 40;\ \ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{400 \cdot 0,1 \cdot 0,9} = 6.$

$X = B(400;\ 0,1) \approx N(40,\ 6).$

Tipificando la variable: $X \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-40}{6}.$

$a)$

$P(X \leq 40) = P\left(Z \leq \frac{40-40}{6}\right) = P(Z \leq 0) = \underline{0,5}.$

$b)$

$P(39,5 \leq X \leq 40,5) = P\left(\frac{39,5-40}{6} \leq Z \leq \frac{40,5-40}{6}\right) = P\left(\frac{-0,5}{6} \leq Z \leq \frac{0,5}{6}\right) =$

$= P(-\ 0,08 \leq Z \leq 0,08) = P(Z \leq 0,08) - P(Z \leq -\ 0,08) =$

$= P(Z \leq 0,08) - [1 - P(Z \leq 0,08)] = 2 \cdot P(Z \leq 0,08) - 1 = 2 \cdot 0,5319 - 1 =$

$= 1,0638 - 1 = \underline{0,0638}.$

$c)$

$$P(40 \leq X \leq 50) = P\left(\frac{40-40}{6} \leq Z \leq \frac{50-40}{6}\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{5}{3}\right) =$$

$= P(Z \leq 1,67) - P(Z \leq 0) = 0,9525 - 0,5 = \underline{0,4525}.$

****

2º) Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 96 taxis de una ciudad y se ha registrado para cada uno de ellos el número total de kilómetros recorridos durante un día laboral, resultando una media de 240 km, con una desviación típica de 60 km.

a) A partir de los datos de la muestra anterior determinar un intervalo de confianza al 95 % para la distancia media en km recorrido por un taxi en un día.

b) ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se desea estimar la distancia media recorrida en un día con un error menor que 10 km y con confianza del 99 %.

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $n = 96;\ \overline{x} = 240;\ \sigma = 60;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(240 - 1,96\cdot\frac{60}{\sqrt{96}};\ 240 + 1,96\cdot\frac{60}{\sqrt{96}}\right);$

$(240 - 1,96\cdot6,1237;\ 240 + 1,96\cdot6,1237);\ (240 - 12,0025;\ 240 + 12,0025)$
.

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = (227,7997;\ 252,0025).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$

$1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$

Datos: $\sigma = 60;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575;\ E = 10.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,575\cdot\frac{60}{10}\right)^2 =$

$= (2,575\cdot6)^2 = 15,45^2 = 238,70.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 239\ taxis}.$

****

3º) Se quiere cubrir con un espejo el espacio generado al construir un arco moderno de Gaudí, que coincide con el área encerrada entre las funciones $y = -x^2 + 14x - 41$ e $y = 4$ (con las unidades expresadas en metros).

a) Hacer una gráfica de la superficie que hay que cubrir. Calcular dicha superficie.

b) El coste del espejo es de 16,25 euros el metro cuadrado. A esta cantidad hay que añadir la mano de obra, que es un 24 % de lo que cuesta el espejo, más el gasto del transporte, que es de 85 euros, ¿a cuánto asciende el coste total?

----

a)

Los puntos de intersección de la función $y = -x^2 + 14x - 41$ con la recta dada $y = 4$ son los siguientes:

$$y = -x^2 + 14x - 41 \qquad y = 4 \} \Rightarrow -x^2 + 14x - 41 = 4;\ x^2 - 14$$

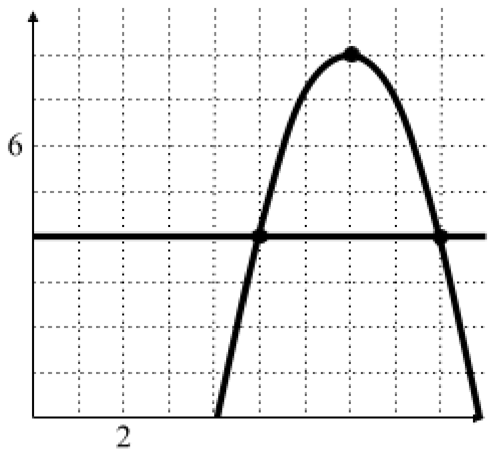
$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196-180}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{14 \pm 4}{2} = 7 \pm 2 \Rightarrow \{ x_1 = 5 \rightarrow A(5,\ 4)\ x_2 = 9 \rightarrow B(9,\ 4).$$

El vértice de la parábola es el siguiente:

$$y' = -2x + 14 = 0 \rightarrow x = 7.$$

$$y_{(7)} = -7^2 + 14 \cdot 7 - 41 =$$

$$= -49 + 98 - 41 = 8 \Rightarrow V(7,\ 8).$$



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

$$S = \int_5^9 \left[\left(-x^2 + 14x - 41\right) - 4\right] \cdot dx = \int_5^9 \left(-x^2 + 14x - 45\right) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{14x^2}{2} - 45x\right]_5^9 = \left[-\frac{x^3}{3} + 7x^2 - 45x\right]_5^9 = \left(-\frac{9^3}{3} + 7 \cdot 9^2 - 45 \cdot 9\right) -$$

$$-\left(-\frac{5^3}{3} + 7 \cdot 5^2 - 45 \cdot 5\right) = -243 + 567 - 405 + \frac{125}{3} - 175 + 225 =$$

$= 792 - 823 + \frac{125}{3} = \frac{125}{3} - 31 = \frac{125-93}{3} = \underline{\frac{32}{3}\ u^2 \cong 10,67\ u^2}.$

$b)$

Precio del espejo: $P = 16,25 \cdot S = 16,25 \cdot \frac{32}{3} = 173,33$ euros.

Precio mano obra: $M_o = 24\ \%\ de\ P = 0,24 \cdot P = 0,24 \cdot 173,33 = 41,6$ euros.

Precio del transporte: $T = 85$ euros.

Precio total: $P_T = P + M_o + T = 173,33 + 41,6 + 85 = 299,93.$

$\underline{El\ coste\ total\ del\ espejo\ es,\ aproximadamente,\ de\ 300\ euros}.$

****

4º) Un asesor fiscal hace declaraciones de la renta a personas físicas y a pymes (pequeñas y medianas empresas). Por cada declaración de persona física cobra 120 euros, y emplea 3 horas para recopilar la información necesaria y 1 hora para pasarla a la aplicación informática. Por cada pyme cobra 300 euros, y emplea 6 horas en recopilar la información y 4 horas en pasarla a la aplicación. Hay 10 personas físicas y 20 pymes a las que el asesor fiscal está obligado por contrato a hacer sus declaraciones. Durante el tiempo que dura la campaña de la renta el asesor dispone de un total de 360 horas para recopilar información, y 210 horas para usar la aplicación informática. Si quiere maximizar sus ingresos:

a) Plantear el correspondiente problema y representar la región factible.

b) ¿Cuál es la solución óptima? ¿Y el valor máximo de ingresos?

----

a)

Sean x e y, el número de declaraciones a personas físicas y pymes que realiza el asesor fiscal, respectivamente.

El sistema de inecuaciones que resulta es: $x\geq 10;\ y\geq 20\ \ 3x+6y\leq 360\ \ x+4y\leq 210\,\}$ $x\geq 10;\ y\geq 20\ \ x+2y\leq 120\ \ x+4y\leq 21$
.

x	60	100
y	30	10

①$\Rightarrow x+2y\leq 120\Rightarrow y\leq \frac{120-x}{2}\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

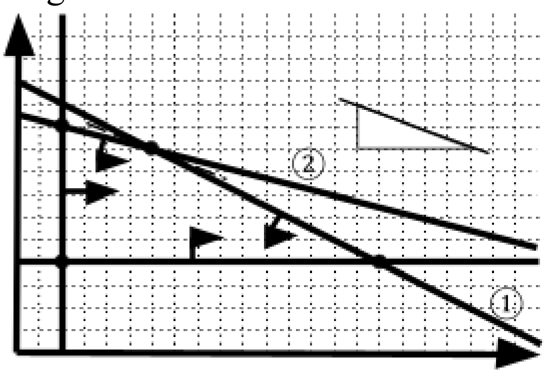
x	90	30
y	30	45

②$\Rightarrow x+4y\leq 210\Rightarrow y\leq \frac{210-x}{4}\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

La región factible es la que aparece sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A\Rightarrow x=10\ y=20\,\}\Rightarrow A(10,\ 20).$



$B\Rightarrow\ \ \ \ \ x=10\ x+4y=210\,\}\Rightarrow 10+4y=210;$

$4y=200;\ \ y=50\Rightarrow B(10,\ 50).$

$C \Rightarrow x + 2y = 120\ x + 4y = 210\}\ \ -x - 2y = -120\ x + 4y = 210\} \Rightarrow 2y = 90;\ \ y$
.
$D \Rightarrow x + 2y = 120\qquad y = 20\} \Rightarrow x + 40 = 120 \Rightarrow D(80,\ 20).$

$b)$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = 120x + 300y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(10,\ 20) = 120 \cdot 10 + 300 \cdot 20 = 1.200 + 6.000 = 7.200.$

$B \Rightarrow f(10,\ 50) = 120 \cdot 10 + 300 \cdot 50 = 1.200 + 15.000 = 16.200.$

$C \Rightarrow f(30,\ 45) = 120 \cdot 30 + 300 \cdot 45 = 3.600 + 13.500 = 17.100.$

$D \Rightarrow f(80,\ 20) = 120 \cdot 80 + 300 \cdot 20 = 9.600 + 6.000 = 15.600.$

El valor máximo se produce en el punto $C(30,\ 45)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 120x + 300y = 0 \Rightarrow y = -\frac{120}{300}x = -\frac{2}{5}x \Rightarrow m = -\frac{2}{5}.$

$\underline{La\ solución\ óptima\ es\ hacer\ 30\ declaraciones\ personales\ y\ 45\ a\ pymes}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 17.100\ euros}.$

****

OPCIÓN B

1º) En los murales frigoríficos de un supermercado, se encuentran a la venta 250 yogures de la marca A, 150 de la marca B y 100 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es del 2 % para la marca A, 3 % para la marca B y 15 % para la marca C. Se elige un yogur al azar:

a) Dibujar un diagrama en árbol que represente los posibles resultados de la elección.

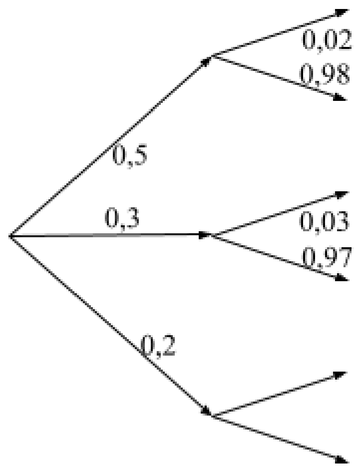
b) Calcular la probabilidad de que el yogur elegido esté caducado.

c) Si se ha cogido un yogur y está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A?

----

a)

$$250 + 150 + 100 = 500 \Rightarrow A = \frac{250}{500} = 0,5; \;\; B = \frac{150}{500} = 0,3; \;\; C = \frac{100}{500} = 0,2.$$



b)

$$P = P(Ca) = P(A \cap Ca) + P(B \cap Ca) + P(C \cap Ca) =$$

$$= P(A) \cdot P(Ca/A) + P(B) \cdot P(Ca/B) + P(C) \cdot P(Ca/C) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,2 \cdot 0,15 = 0,010 + 0,009 + 0,030 = \underline{0,049}.$$

c)

$$P = P(A/Ca) = \frac{P(A \cap Ca)}{P(Ca)} = \frac{P(A) \cdot P(Ca/A)}{P(Ca)} = \frac{0,5 \cdot 0,02}{0,049} = \frac{0,010}{0,049} = \underline{0,2041}.$$

****

2º) Un hospital realiza un estudio sobre la edad de las personas que son atendidas en el servicio de urgencias. Con este fin se selecciona una muestra de 225 personas elegidas al azar entre las ingresadas en urgencias durante el último año, observándose que 81 de estas personas tienen más de 70 años:

a) Construir un intervalo para estimar con un nivel de confianza del 90 % la proporción de personas mayores de 70 años atendidas en urgencias.

b) Si se mantiene la misma proporción muestral, con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál debería ser el tamaño de la muestra para estimar la proporción de mayores de 70 años con un error menor que 0,03?

----

a)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$

$$1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$$

$$Datos:\ p = \frac{81}{225} = 0,36;\ \ q = 1 - 0,36 = 0,64;\ \ n = 225;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p,\ q\ y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0,36 - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,36 \cdot 0,64}{225}};\ 0,36 + 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,36 \cdot 0,64}{225}}\right);$$

$$(0,36 - 1,645 \cdot 0,032;\ 0,36 + 1,645 \cdot 0,032);\ \ (0,36 - 0,0526;\ 0,36 + 0,0526).$$

$$\underline{I.\ C._{90\ \%} = (0,3074;\ 0,4126).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

$$\text{Datos: } \sigma = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0,36 \cdot 0,64}{225}} = 0,032;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96;\ \ E = 0,03.$$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E} \right)^2 \cdot p \cdot q = \left(\frac{1,96}{0,03} \right)^2 \cdot 0,36 \cdot 0,64 =$

$= 4.268,44 \cdot 0,2304 = 983,45.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 984\ personas.}$

****

3º) En un periodo de 10 años, la audiencia de una determinada serie de una televisión autonómica, expresada en decenas de miles de personas, siguió la función:

$$A(x) = \{ \ x^2 + 2, \quad 0 \leq x < 2 \ \frac{-3x+30}{4}, \ 2 \leq x \leq 10$$

donde x representa el número de años transcurridos desde la primera emisión. Justificando las respuestas:

$a)$ ¿Es continua la función $A(x)$? ¿Cuándo crece y cuándo decrece esta función?

$b)$ ¿Cuándo obtuvo la serie su máxima audiencia y cuántos espectadores tuvo en ese momento?

$c)$ ¿Cuál fue la audiencia al principio de la emisión de la serie? Si se decide dejar de emitir cuando la audiencia sea de 15.000 personas, ¿en qué momento se dejaría de emitir?

$a)$

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para \ x = 2 \Rightarrow \{ A(x) = \left(x^2 + 2\right) = 4 + 2 = 6 \ A(x) = \frac{-3x+30}{4} = \frac{24}{4} = 6 = f(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x) = A(x) = f(2).$$

$$\underline{La \ función \ A(x) \ es \ continua \ en \ su \ dominio}.$$

En el intervalo $[0, \ 2)$ la función es la parábola $y = x^2 + 2$, que es convexa $(\cup)$ y cuyo vértice es el punto $V(0, \ 2)$.

En el intervalo $[2, \ 10]$ la función es la recta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{2}$ que es decreciente por ser negativa el valor de su pendiente.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: x \in (0, \ 2)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: x \in (2, \ 10)}.$$

$b)$

De los periodos de crecimiento y decrecimiento se deduce que:

$$\underline{La \ máxima \ audiencia \ se \ produjo \ cuando \ x = 2}.$$

$$A(2) = \frac{-3\cdot2+30}{4} = \frac{-6+30}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

$$\underline{La\ máxima\ audiencia\ fue\ de\ 60.000\ espectadores.}$$

$c)$

$$A(0) = 0^2 + 2 = 0 + 2 = 2.$$

$$\underline{La\ audiencia\ al\ comienzo\ de\ la\ serie\ fue\ de\ 20.000\ espectadores}$$

$$A(x) = 1,5 \Rightarrow \frac{-3x+30}{4} = 1,5; \quad -3x + 30 = 6; \;\; 3x = 24; \;\; x = 8.$$

$$\underline{Debe\ dejar\ de\ emitirse\ a\ los\ 8\ años\ del\ comienzo\ de\ la\ serie.}$$

****

4º) Un kiosco vende periódicos, libros y revistas. Los periódicos se venden a 1 euros, las revistas a 5 euros y los libros a 12 euros. El importe total de las ventas realizadas la semana pasada ascendió a 1.500 euros. Por cada 3 revistas se vendieron 10 periódicos, y el importe de la venta de libros fue igual a la cuarta parte del importe total de las ventas de periódicos y revistas.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Resolver el sistema anterior: ¿cuántos libros, periódicos y revistas vendió el kiosco la semana pasada?

----

a)

Sean x, y, z los periódicos, revistas y libros que vende semanalmente el kiosco, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$x + 5y + 12z = 1.500 \quad 3x = 10y \quad 12y = \frac{x+5y}{4} \} \quad x + 5y + 12$

.

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|1.500\ 5\ 12\ 0\ -10\ 0\ 0\ 5\ -48\ |}{|1\ 5\ 12\ 3\ -10\ 0\ 1\ 5\ -48\ |} = \frac{1.500 \cdot |-10\ 0\ 5\ -48\ |}{480+180+120+720} = \frac{1.500 \cdot 480}{1.500} = 480.$$

$$y = \frac{|1\ 1.500\ 12\ 3\ 0\ 0\ 1\ 0\ -48\ |}{1.500} = \frac{-1.500 \cdot |3\ 0\ 1\ -48\ |}{1.500} = 144.$$

$$z = \frac{|1\ 5\ 1.500\ 3\ -10\ 0\ 1\ 5\ 0\ |}{1.500} = \frac{1.500 \cdot |3\ -10\ 1\ 5\ |}{1.500} = 15 + 10 = 25.$$

$\underline{El\ kiosco\ vendió\ la\ semana\ pasada\ 480\ periódicos,\ 144\ revistas\ y\ 25\ libros.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

OPCIÓN A

1º) A partir de una muestra de 100 usuarios del servicio de deportes, se estima que el valor medio de edad de estos usuarios está entre 22,83 y 27,17 años (ambos incluidos). Suponiendo que esta variable es normal, con una desviación típica de 10 años:

a) ¿Cuál es la media muestral obtenida?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Usando la estimación puntual de la media obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de edad de 16 usuarios del servicio de deportes sea menor o igual que 24 años?

----

a)

$$\bar{x} = \frac{27{,}17+22{,}83}{2} = \frac{50}{2} = \underline{25\ años}.$$

b)

$$E = \frac{27{,}17-22{,}83}{2} = \frac{4{,}34}{2} = 2,17.$$

Datos: $n = 100;\ \ \sigma = 10;\ \ E = 2,17.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{2{,}17\cdot\sqrt{100}}{10} = 2,17.$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0,\ 1)$ a 2,17 le corresponde el valor de 0,9850, por lo cual:

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9850 = 0,0150 \Rightarrow \alpha = 2\cdot 0,0150 = 0,03.$$

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ es\ del\ 97\ \%.}$$

$c)$

$Datos$: $n = 16$; $\mu = 25$; $\sigma = 10$.

$$N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow N\left(25;\ \frac{10}{\sqrt{16}}\right) = N\left(25;\ \frac{10}{4}\right) = N(25;\ 2,5).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-25}{2,5}$.

$$P = P(Z \leq 24) = P\left(Z \leq \frac{24-25}{2,5}\right) = P\left(Z \leq \frac{-1}{2,5}\right) = P(Z \leq -0,4) =$$

$$= 1 - P(Z \leq -0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446.$$

<u>*La probabilidad pedida es del* 34, 46 %.</u>

****

2º) El 20 % de los habitantes de cierta población dice siempre la verdad y otro 20 % miente siempre. El 75 % de los que dicen siempre la verdad son felices; mientras son felices el 50 % de los mentirosos y el 20 % del resto de la población.

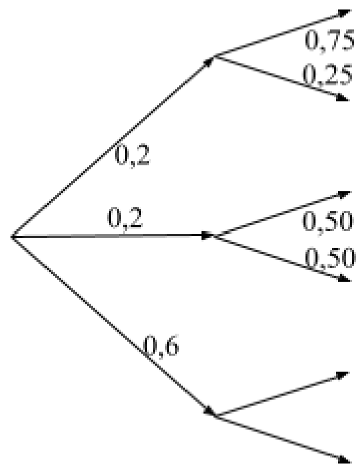
a) Construir el árbol de probabilidades.

b) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea feliz.

c) Se ha elegido una persona al azar, que resulta ser feliz, ¿cuál es la probabilidad de que diga siempre la verdad?

----

a)



b)

$$P = P(\overline{F}) = P(V \cap \overline{F}) + P(M \cap \overline{F}) + P(O \cap \overline{F}) =$$

$$= P(V) \cdot P(\overline{F}/V) + P(M) \cdot P(\overline{F}/M) + P(O) \cdot P(\overline{F}/O) =$$

$$= 0,2 \cdot 0,25 + 0,2 \cdot 0,50 + 0,6 \cdot 0,80 = 0,05 + 0,10 + 0,48 = \underline{0,63}.$$

c)

$$P = P(V/F) = \frac{P(V \cap F)}{P(F)} = \frac{P(V) \cdot P(F/V)}{1 - P(\overline{F})} = \frac{0,2 \cdot 0,75}{1 - 0,63} = \frac{0,150}{0,370} = \underline{0,4054}.$$

****

3º) El rendimiento, en tanto por ciento, de un jugador de fútbol, depende de la cantidad de minutos que esté jugando. Si la duración de un partido es de 90 minutos y la función que da el rendimiento en función de esos minutos es $R(t) = -\frac{1}{20}t^2 + 2t + 80$.

a) ¿En qué momento el jugador tiene mayor rendimiento? ¿Cuál es dicho rendimiento?

b) ¿En qué momento el jugador tiene el mismo rendimiento que cuando comenzó el partido?

c) Si el entrenador quiere cambiarlo cuando está al 20 % de su rendimiento, ¿en qué minuto debe cambiarlo?

----

a)

Para que una función tenga un máximo relativo tiene que anularse su primera derivada y ser negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$R'(t) = -\frac{1}{10}t + 2.$ $\quad\quad$ $R''(t) = -\frac{1}{10} < 0 \Rightarrow Máximo.$

$R'(t) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{10}t + 2 = 0; \; -t + 20 = 0 \Rightarrow t = 20.$

$\underline{Alcanza\ el\ máximo\ rendimiento\ a\ los\ 20\ minutos}.$

$R(20) = -\frac{1}{20}\cdot 20^2 + 2\cdot 20 + 80 = -20 + 40 + 80 = 100.$

$\underline{El\ rendimiento\ máximo\ es\ del\ 100\ \%}.$

b)

El rendimiento al comienzo es: $R(0) = 80.$

$R(t) = 80 \Rightarrow -\frac{1}{20}t^2 + 2t + 80 = 80; \; -\frac{1}{20}t^2 + 2t = 0; \; -t^2 + 40t = 0;$

$-t(t - 40) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, \; t_2 = 40.$

$\underline{Alcanza\ el\ mismo\ rendimiento\ que\ al\ principio\ a\ los\ 40\ minutos}.$

c)

$R(t) = 20 \Rightarrow -\frac{1}{20}t^2 + 2t + 80 = 20; \; -\frac{1}{20}t^2 + 2t + 60 = 0;$

$$t^2 - 40t - 1.200 = 0; \ t = \frac{40 \pm \sqrt{1.600 + 4.800}}{2} = \frac{40 \pm \sqrt{6.400}}{2} = \frac{40 \pm 80}{2} = 20 \pm 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = -20, \ t_2 = 60.$$

La solución negativa carece de sentido lógico.

$$\underline{Debe\ cambiar\ al\ futbolista\ a\ los\ 60\ minutos.}$$

****

4º) En un grupo hay 288 personas de entre 18 y 25 años clasificados como estudiantes, empleados y sin ocupación. Por cada cinco estudiantes hay tres empleados y los sin ocupación representan el 80 % del resto.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) ¿Cuántos estudiantes, empleados y sin ocupación hay?

----

a)

Sean $x,\ y,\ z$ los estudiantes, empleados y sin ocupación del grupo de personas, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y + z = 288 \quad 5x = 3y\, z = 80\ \%\ de\ (x + y)\ \}x + y + z = 288$$

.

$$\underline{x + y + z = 288 \quad 5x - 3y = 0\ 4x + 4y - 5z = 0\ \}.}$$

b)

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|A| = |1\ 1\ 1\ 5\ \ -3\ 0\ 4\ 4\ \ -5\ | = 15 + 20 + 12 + 25 = 72 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius.

$$Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg \Rightarrow S.\ C.\ D.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|288\ 1\ 1\ 0\ -3\ 0\ 0\ 4\ -5\ |}{72} = \frac{288 \cdot |-3\ 0\ 4\ -5\ |}{72} = 4 \cdot 15 = 60.$$

$$y = \frac{|1\ 288\ 1\ 5\ 0\ 0\ 4\ 0\ -5\ |}{72} = \frac{-288 \cdot |5\ 0\ 4\ -5\ |}{72} = -4 \cdot (-25) = 100.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 288\ 5\ -3\ 0\ 4\ 4\ 0\ |}{72} = \frac{288 \cdot |5\ -3\ 4\ 4\ |}{72} = 4 \cdot (20 + 12) = 4 \cdot 32 = 128.$$

$$\underline{En\ el\ grupo\ hay\ 60\ estudiantes,\ 100\ empleados\ y\ 128\ no\ tienen\ ocupación.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Un estudio realizado sobre 600 personas de una ciudad indica que 360 consultan 15 o más veces su teléfono móvil cada tres horas.

a) Con una confianza del 97 %, construir un intervalo de confianza para la proporción de personas que consulta menos de 15 veces su teléfono móvil cada tres horas.

b) Si para estimar la proporción de personas que consulta 15 o más veces su teléfono móvil cada tres horas se obtiene el intervalo $[0,5424;\ 0,6576]$, ¿cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Si la población de la ciudad es de 10.000 personas, usando el nivel de confianza del apartado b), ¿entre qué límites está el número de los que consulta menos de 15 veces su teléfono móvil cada tres horas?

----

a)

Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1-\alpha=0,97 \rightarrow \alpha=1-0,97=0,03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0,015}=2,17.$$

$$1-0,015=0,9850 \rightarrow z=2,17).$$

$$Datos:\ p=\frac{600-360}{600}=\frac{240}{360}=0,4;\quad q=0,6;\quad n=600;\quad z_{\frac{\alpha}{2}}=2,17.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p,\ q\ y\ n$, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}};\ p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0,4-2,17\cdot\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{600}};\ 0,4+2,17\cdot\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{600}}\right);$$

$$(0,4-2,17\cdot 0,02;\ 0,4+2,17\cdot 0,02);\quad (0,4-0,0434;\ 0,4+0,0434).$$

$$\underline{I.\ C._{97\ \%}=(0,3566;\ 0,4434).}$$

b)

$$E=\frac{0,6576-0,5424}{2}=\frac{0,1152}{2}=0,0576.$$

Datos: $n=600;\quad \sigma=\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}=\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{600}}=0,02;\quad E=0,0576.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E}{\sigma} = \frac{0{,}0576}{0{,}02} = 2,88.$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0,\ 1)$ a 2,88 le corresponde el valor de 0,9980, por lo cual:

$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9980 = 0,0020 \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0,0040 = 0,004.$

$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ es\ del\ 99,60\ \%}.$

$c)$

En principio se nos pide un intervalo de confianza:

$Datos$: $p = 0,4;\ \ \sigma = 0,02;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,88.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p,\ \sigma\ y\ z_{\frac{\alpha}{2}}$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma;\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma\right)$.

$(0,4 - 2,88 \cdot 0,02;\ 0,4 + 2,88 \cdot 0,02);\ \ (0,4 - 0,0576;\ 0,4 + 0,0576) \Rightarrow$

$\Rightarrow I.\ C._{97\ \%} = (0,3424;\ 0,4576).$

Multiplicando los extremos del intervalo por 10.000:

$\underline{Consultan\ el\ teléfono\ entre\ 3.424\ y\ 4.576\ con\ nivel\ de\ confianza\ del\ 99,8\ \%}$

.

****

2º) El tiempo que tardan en descargarse las baterías de un dispositivo electrónico es una variable con distribución normal de media 3,8 días y desviación típica 1 día. Si se manejas baterías de ese dispositivo, calcular:

a) La probabilidad de que la duración media de una muestra de 16 baterías este entre 4,1 y 4,3 días.

b) La probabilidad de que la duración media de una muestra de 25 baterías no sea mayor que 3,35 días.

----

a)

$Datos$: $n = 16;\ \mu = 3,8;\ \sigma = 1.$

$$X \rightarrow N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(3,8;\ \frac{1}{\sqrt{16}}\right) = N\left(3,8;\ \frac{1}{4}\right) = N(3,8;\ 0,25).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-3,8}{0,25}$.

$$P = P(4,1 \leq X \leq 4,3) = P\left(\frac{4,1-3,8}{0,25} \leq Z \leq \frac{4,3-3,8}{1}\right) = P\left(\frac{0,3}{0,25} \leq Z \leq \frac{0,5}{0,25}\right) =$$

$$= P(1,2 \leq Z \leq 2) = P(Z < 2) - P(Z < 1,2) = 0,9772 - 0,8849 = \underline{0,0923}.$$

b)

$Datos$: $\mu = 3,8;\ n = 25;\ \sigma = 1.$

Tipificando la variable:

$$X \rightarrow N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(3,8;\ \frac{1}{\sqrt{25}}\right) = N(3,8;\ 0,2).$$

$$P = P(Z > 3,35) = P\left(Z > \frac{3,35-3,8}{0,2}\right) = P\left(Z > \frac{-0,45}{0,2}\right) = P(Z > -2,25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2,25) = 1 - 0,9878 = \underline{0,0122 = 1,22\ \%}.$$

****

3º) El recubrimiento de lona de una terraza tiene una zona deteriorada cuya superficie está limitada por $y = f(x) = (x - 2)^2$ e $y = g(x) = - 4x + 8$. Si se mide en metros, se pide:

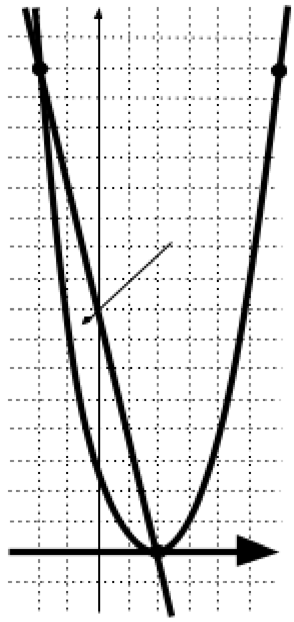
a) Representar la zona deteriorada.

b) Para repararla, se ha de utilizar lona cuyo coste (incluido trabajo de reparación) es de 18 euros por metro cuadrado. Si en el trabajo de reparación se desperdicia la tercera parte de lona adquirida, ¿cuánto costará la reparación?

----

a)

La función $y = (x - 2)^2$ es una parábola convexa (∪) cuyo vértice es el punto $V(0,\ 2)$ y que corta al eje de ordenadas en el punto $A(0,\ 4)$.



Los puntos de corte de las dos funciones tienen por abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} y = (x - 2)^2 \\ y = - 4x + 8 \end{array}\right\} \Rightarrow (x - 2)^2 = - 4x + 8;\ \ x^2 - 4x + 4 =$$

$$= - 4x + 8;\ \ x^2 = 4 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = - 2 \rightarrow B(- 2,\ 16) \\ x_2 = 2 \rightarrow V(2,\ 0) \end{array}\right\}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta.

b)

De la observación de la figura se deduce la superficie útil a calcular, que es la siguiente:

$$S_{útil} = \int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)]\cdot dx = \int_{-2}^{2} \left[(- 4x + 8) - (x - 2)^2\right]\cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[- 4x + 8 - \left(x^2 - 4x + 4\right)\right]\cdot dx = \int_{0}^{2} \left(- x^2 + 4\right)\cdot dx = \left[- \frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2\right) - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2)\right] = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}\ m^2$$
.

Como se desperdicia un tercio de la superficie, la superficie útil representa dos tercios de la superficie total:

$$S_{út} = \frac{2}{3} S_T \Rightarrow S_T = \frac{3}{2} S_{út} = \frac{3}{2} \cdot \frac{32}{3} = 16\ m^2 \Rightarrow \underline{Coste = 16 \cdot 18 = 288\ euros.}$$

****

4º) La encargada de una floristería ha de hacer un pedido semanal de plantas de interior y plantas de exterior. Al proveedor le paga 1 euro por cada planta de interior y 2 euros por cada planta de exterior. Necesita atender al menos la demanda de un cliente, que solicita cada semana 20 plantas de interior y 30 de exterior. Además, el transporte del pedido se supone unos costes, que son de 0,60 euros por cada planta de interior y 0,80 euros por cada planta de exterior, y la floristería tiene por norma no sobrepasar los 48 euros de costos de transporte por cada pedido semanal. Por otro lado, la encargada recibe una prima de 0,60 euros por cada planta de interior que venda y una prima de 0,50 euros por cada planta de exterior que venda, y quiere conseguir al menos 30 euros en este pedido.

a) Si quiere minimizar el precio que le tiene que pagar al proveedor, formular el correspondiente problema. Dibujar la región factible.

b) Resolver el problema planteado en a) calculando también cuánto le paga al proveedor y cuánto es el gasto de transporte.

----

a)

Sean x e y el número de plantas de interior y exterior que componen el pedido semanal, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $0,6x + 0,8y \leq 48\ 0,6x + 0,5y \geq 30\quad x \geq 20;\ y \geq 30 \}\ \ 3x + 4y \leq 240\ 6x + 5y \geq 300\ x \geq 2$
.

x	0	80
y	60	0

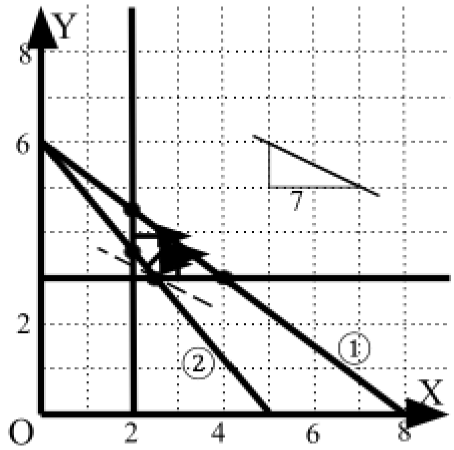
$① \Rightarrow 3x + 4y \leq 240 \Rightarrow y \leq \frac{240-3x}{4} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	50
y	60	0

$② \Rightarrow 6x + 5y \geq 300 \Rightarrow y \geq \frac{300-6x}{5} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \quad x = 20 \; 3x + 4y = 240 \} \Rightarrow 60 + 4y = 240;$
$4y = 180; \; y = 45 \Rightarrow A(20, \; 45).$

$B \Rightarrow \quad y = 30 \; 3x + 4y = 240 \} \Rightarrow 3x + 120 = 240;$

$3x = 120; \; x = 40 \Rightarrow B(40, \; 30).$

$C \Rightarrow \quad y = 30 \; 6x + 5y = 300 \} \Rightarrow 6x + 150 = 300; \; 6x = 150; \; x = 25 \Rightarrow C(25, \; 3$
.

$D \Rightarrow \quad x = 20 \; 6x + 5y = 300 \} \Rightarrow 120 + 5y = 300; \; 5y = 180; \; y = 36 \Rightarrow C(20, \; 3$
.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, \; y) = x + 2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(20, \; 45) = 20 + 2 \cdot 45 = 20 + 90 = 110.$

$B \Rightarrow f(40, \; 30) = 40 + 2 \cdot 30 = 40 + 60 = 100.$

$C \Rightarrow f(25, \; 30) = 25 + 2 \cdot 30 = 25 + 60 = 85.$

$D \Rightarrow f(20, \; 36) = 20 + 2 \cdot 36 = 20 + 72 = 92.$

El mínimo se produce en el punto $C(25, \; 30)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

$\underline{El\ mínimo\ coste\ lo\ obtiene\ con\ 25\ plantas\ de\ interior\ y\ 30\ de\ exterior}.$

$b)$

$\underline{Le\ paga\ al\ proveedor\ 85\ euros}.$

$$Transporte = 0,6 \cdot 25 + 0,8 \cdot 30 = 15 + 24 = 39.$$

$\underline{Los\ costes\ del\ transporte\ ascienden\ a\ 39\ euros}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) a) Analizar el rango de la matriz $A = \left(1\ 2 - a^2\ 0\ - 3\ a\ - 2\ 2\ 4\right)$ según los valores del parámetro a.

b) Utilizando los resultados obtenidos en el apartado anterior, analizar si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tienen o no tienen solución:

b_1) $\{x + 2y =- 1 \quad - 3y = 1 \quad - 2x + 2y = 4$. b_2) $\{x + 2y =- 4 \quad - 3y = 2 \quad - 2x + 2y = 4$.

c) Resolver los casos compatibles del apartado b).

----

a)

$|A| = \left|1\ 2 - a^2\ 0\ - 3\ a\ - 2\ 2\ 4\right| =- 12 - 4a + 6a^2 - 2a = 0;\ 6a^2 - 6a - 12 =$

$a^2 - a - 2 = 0;\ a = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm3}{2} \Rightarrow a_1 =- 1,\ a_2 = 2.$

$\underline{Para\ a \neq - 1\ y\ a \neq 2 \Rightarrow Rang\ A = 3}.$

$Para\ a =- 1 \Rightarrow |A| = |1\ 2\ - 1\ 0\ - 3\ - 1\ - 2\ 2\ 4\ | \Rightarrow |1\ 2\ 0\ - 3\ | \neq 0.$

$Para\ a = 2 \Rightarrow |A| = |1\ 2\ - 4\ 0\ - 3\ 2\ - 2\ 2\ 4\ | \Rightarrow |1\ 2\ 0\ - 3\ | \neq 0.$

$\underline{Para\ a =- 1\ y\ a = 2 \Rightarrow Rang\ A = 2}.$

$b)$

$b_1)$ Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema $\{x + 2y =- 1 \quad - 3y = 1 \qquad - 2x + 2y = 4$ tienen los siguientes rangos:

$M = (1\ 2\ 0 \ - 3 \ - 2\ 2\ ) \Rightarrow Rang\ M = 2.$

$\left|M'\right| = |1\ 2 \ - 1\ 0 \ - 3\ 1 \ - 2\ 2\ 4\ | =- 12 - 4 + 6 - 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$$

$b_2)$

Del apartado $a)$ se deduce que: $\{x + 2y =- 4 \quad - 3y = 2 \qquad - 2x + 2y = 4 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ M = 2 = Rang\ M' = 2 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D}.$$

$c)$

Se resuelve el sistema $\{x + 2y =- 4 \quad - 3y = 2 \qquad - 2x + 2y = 4$ despreciando una ecuación (3ª):

$x + 4y =- 4 \qquad - 3y = 2\ \} \Rightarrow y =- \frac{2}{3};\ \ x - \frac{8}{3} =- 4;\ \ x = \frac{8}{3} - 4 =- \frac{4}{3}.$

$$\underline{Solución: x =- \frac{4}{3},\ y =- \frac{2}{3}}.$$

****

2º) $a)$ Un agricultor cultiva árboles finales. En concreto tiene a su cargo 10 limoneros y cada uno produce 70 frutos. Tiene pensado ampliar el huerto pero ha calculado que por cada nuevo árbol plantado, disminuye en 5 unidades el número de limones producido por cada ejemplar. ¿Cuántos árboles más debería plantar para obtener la producción total máxima?

$b)$ Calcular el área total de la región delimitada por la curva $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje OX.

$a)$

Sean x el número de nuevos árboles plantados.

La producción de cada limonero es de $(70 - 5x)$ limones.

$Producción = Número\ árboles \times producción\ de\ cada\ árbol \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) = (10 + x)(70 - 5x) = 700 - 50x + 70x - 5x^2 =$

$= -5x^2 + 20x + 700.$

La producción será máxima cuando se anule su primera derivada:

$P'(x) = -10x + 20 = 0;\ \ -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$

$\underline{Para\ obtener\ la\ producción\ máxima\ hay\ que\ plantar\ 2\ limoneros}.$

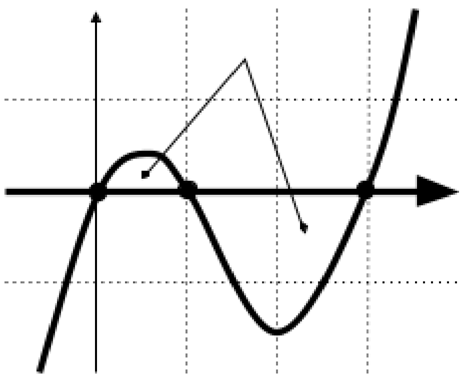
$b)$

Los cortes con el eje X de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ son los siguientes:

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0;\ \ x\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;$

$x^2 - 4x + 3 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow x_2 = 1,\ x_3 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}, \underline{A(1,\ 0)}$y $\underline{B(3,\ 0)}$.



La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la figura adjunta.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx + \int_3^1 f(x) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 3x\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 3x\right]_3^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 3\right) - 0 + \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 3\right) - \left(\frac{81}{4} - 36 + 9\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 3\right) - \frac{81}{4} + 27$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{8}{3} + 6 - \frac{81}{4} + 27 = 33 + \frac{1}{2} - \frac{8}{3} - \frac{81}{4} = \frac{396+6-32-243}{12} = \frac{402-275}{12} = \frac{127}{12}$$

.

$$\underline{S = \frac{127}{12}\, u^2 \cong 10,58\, u^2.}$$

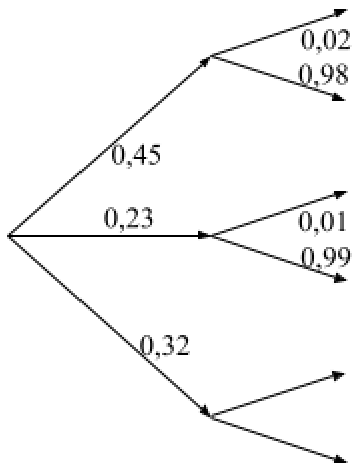
****

3º) Una fábrica de botones cuesta con tres máquinas, A, B y C, por las que pasan respectivamente el 45 %, el 23 % y el 32 % de la producción total. El 2 % de los botones que pasan por la máquina A salen defectuosos, en el caso de la B es el 1 % y en el de la C el 3 %. Seleccionamos un botón al azar de entre todos los que han salido de la fábrica:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso y haya pasado por la máquina B?

c) Si es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina C?



a)

$$P = P(\overline{D}) = P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D}) + P(C \cap \overline{D}) =$$

$$= P(A) \cdot P(\overline{D}/A) + P(B) \cdot P(\overline{D}/B) + P(C) \cdot P(\overline{D}/C) =$$

$$= 0,45 \cdot 0,98 + 0,23 \cdot 0,99 + 0,32 \cdot 0,97 = 0,4410 + 0,2277 + 0,3104 = \underline{0,9791}.$$

b)

$$P = P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D/B) = 0,23 \cdot 0,01 = \underline{0,0023}.$$

c)

$$P = P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P(D/C)}{1 - P(\overline{D})} = \frac{0,32 \cdot 0,03}{1 - 0,9791} = \frac{0,0096}{0,0209} = \underline{0,4593}.$$

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) Un pastelero dispone de 125 kg de harina, 25 kg de azúcar y 30 kg de mantequilla para elaborar dos tipos de tarta: hojaldre y chocolate. Una docena de tartas de hojaldre requiere 2,5 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Para una docena de tartas de chocolate se necesitan 5 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Si el beneficio obtenido de cada docena de tartas de hojaldre es de 15 euros y da cada docena de tartas de chocolate es de 25 euros, ¿con cuántas docenas de cada tipo de dulce se obtendrán los máximos beneficios?

Sean $x\,e\,y$ las docenas de tartas de hojaldre y chocolate que elabora el pastelero, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 2,5x + 5y \le 125 \\ x + 0,5y \le 25 \\ x + y \le 30 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5x + 10y \le 250 \end{array}$$

.

x	0	50
y	25	0

$① \Rightarrow x + 2y \le 50 \Rightarrow y \le \frac{50-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	25
y	50	0

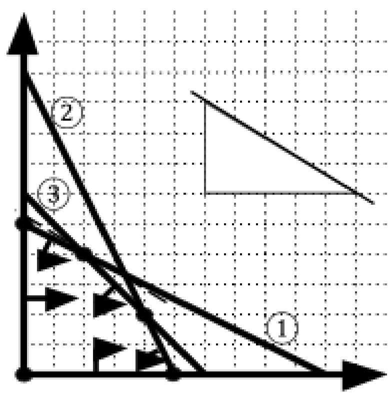
$② \Rightarrow 2x + y \le 50 \Rightarrow y \le 50 - 2x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	30
y	30	0

$③ \Rightarrow x + y \le 30 \Rightarrow y \le 30 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y = 50 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 25).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y = 50 \\ x + y = 30 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + 2y = 50 \\ -x - y = -30 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 20 \Rightarrow B(10,\ 20).$

$C \Rightarrow 2x + y = 50 \quad x + y = 30 \} \quad 2x + y = 50 \quad -x - y = -30 \} \Rightarrow x = 20 \Rightarrow C($
.

$D \Rightarrow 2x + y = 50 \qquad y = 0 \} \Rightarrow D(25,\ 0).$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = 15x + 25y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 25) = 15 \cdot 0 + 25 \cdot 12 = 0 + 300 = 300.$

$B \Rightarrow f(10,\ 20) = 15 \cdot 10 + 25 \cdot 20 = 150 + 500 = 650.$

$C \Rightarrow f(20,\ 10) = 15 \cdot 20 + 25 \cdot 10 = 300 + 250 = 550.$

$D \Rightarrow f(25,\ 0) = 15 \cdot 25 + 25 \cdot 0 = 375 + 0 = 375.$

El valor mínimo se produce en el punto $B(10,\ 20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 15x + 25y = 0 \Rightarrow y = -\frac{15}{25}x = -\frac{3}{5}x \Rightarrow m = -\frac{3}{5}.$

$\underline{Máximos\ beneficios\ con\ 10\ docenas\ de\ hojaldre\ y\ 20\ docenas\ de\ chocolate}.$

****

2º) $a)$ Dada la función $f(x) = \{\frac{2x+4}{3x^2+3x-6}\ si\ x \neq -2\ y\ x \neq 1 \quad ax \quad si\ x = -2$:

$a_1)$ Determinar los valores del parámetro a para los cuales $f(x)$ es continua en $x = -2$.

$a_2)$ Determinar las asíntotas verticales de $f(x)$. Esbozar la posición de la gráfica de la función respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

$b)$ Dada la función $f(x) = x^3 + ax + 5$, calcular el valor de a para que $\int_{-1}^{3} f(x) \cdot dx = 60$.

$a_1)$

Teniendo en cuenta que:

$$3x^2 + 3x - 6 = 0;\ x^2 + x - 2 = 0;\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1 \Rightarrow 3x^2 + 3x - 6 = 3(x+2)(x-1).$$

La función $f(x)$ puede redefinirse de la siguiente forma:

$$f(x) = \{\frac{2(x+2)}{3(x+2)(x-1)}\ si\ x \neq -2\ y\ x \neq 1 \quad ax \quad si\ x = -2 \quad = \{\frac{2}{3(x-1)}\ si\ x \neq -2\ y$$

.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = -2 \Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{2}{3(x-1)} = -\frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(-2) \Rightarrow -\frac{2}{9} = -2a \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{9}}.$$

$a_2)$

Las asíntotas verticales en funciones racionales son los valores reales de la variable que anulan el denominador.

Teniendo en cuenta que

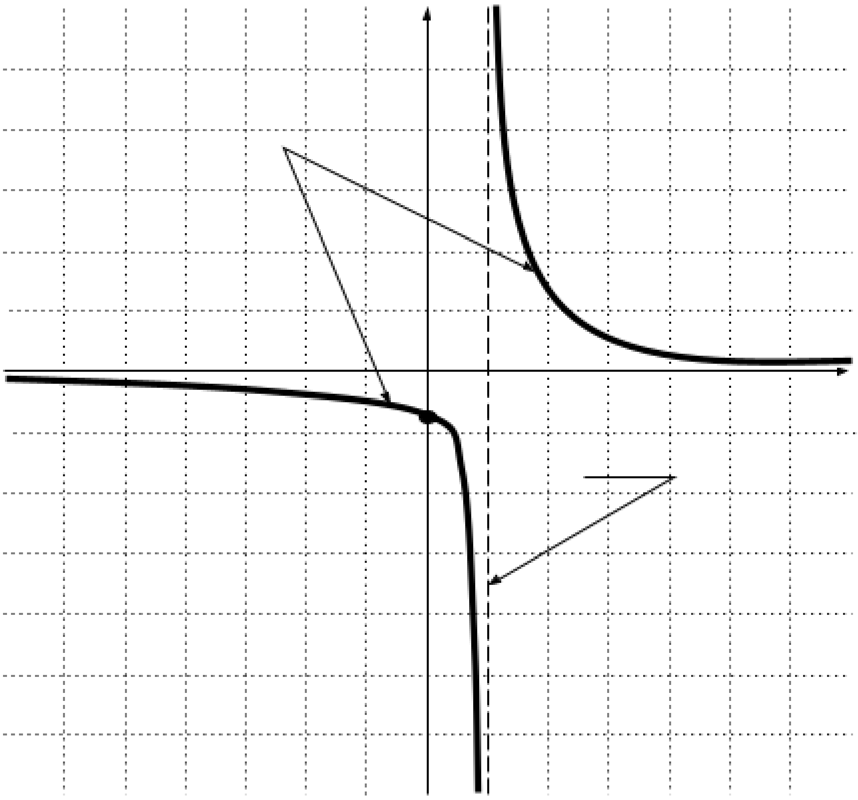
$f(x) = \{\frac{2}{3(x-1)}\ si\ x \neq -2\ y\ x \neq 1 \quad \frac{1}{9}x \quad si\ x = -2$:

$\underline{La\ única\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función\ es\ la\ recta\ x = 1}.$

Teniendo en cuenta los siguientes límites laterales de la función:
$f(x) = \frac{2}{3(x-1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty. \quad f(x) = \frac{2}{3(x-1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$

Teniendo en cuanta, además, que $f(x) = f(x) = \frac{2}{3(x-1)} = 0.$

La representación gráfica, aproximada, de la función se indica en la figura siguiente.



$b)$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\cdot dx = 60 \Rightarrow \int_{-1}^{3} \left(x^3 + ax + 5\right)\cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{ax^2}{2} + 5x\right]_{-1}^{3} = 60;$$

$$\left(\frac{3^4}{4} + \frac{a\cdot 3^2}{2} + 5\cdot 3\right) - \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{a\cdot(-1)^2}{2} + 5\cdot(-1)\right] = 60;$$

$$\frac{81}{4} + \frac{9a}{2} + 15 - \frac{1}{4} - \frac{a}{2} + 5 = 60;\ \frac{80}{4} + \frac{8a}{2} + 20 = 60;\ 40 + 4a = 40 \Rightarrow \underline{a = 0}$$
.

****

3º) La asistencia anual a espectáculos teatrales de los habitantes de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 2. Una muestra aleatoria de 850 personas da como resultado una media de 7 asistencias al año.

a) Obtener el intervalo de confianza del 94 % para la asistencia media anual.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97 % sea la mitad del obtenido en el apartado anterior?

----

a)

Para un nivel de confianza del 94 % es:

$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 1 - 0,94 = 0,06 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,03} = 1,88.$

$1 - 0,03 = 0,9700 \rightarrow z = 1,88).$

Datos: $n = 850;\ \overline{x} = 7;\ \sigma = 2;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,88.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(7 - 1,88 \cdot \frac{2}{\sqrt{850}};\ 7 + 1,88 \cdot \frac{2}{\sqrt{850}}\right);\ (7 - 1,88 \cdot 0,0686;\ 7 + 1,88 \cdot 0,0686);$

$(7 - 0,1290;\ 7 + 0,1290).$

$$\underline{I.\ C._{94\ \%} = (6,8710;\ 7,1290).}$$

b)

$E_1 = \frac{7,1290 - 6,8710}{2} = \frac{0,2580}{2} = 0,129.$

El nuevo error pedido es: $E = \frac{E_1}{2} = \frac{0,129}{2} = 0,0645.$

Para un nivel de confianza del 97 % es:

$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,17.$

$1 - 0,015 = 0,9850 \rightarrow z = 2,17).$

Datos: $\sigma = 2;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17;\ E = 0,0645.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,17 \cdot \frac{2}{0,0645}\right)^2 =$

$= (2,17 \cdot 31,0078)^2 = 67,287^2 = 4.527,52.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 4.528\ personas}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elija una de las dos opciones. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) a) Calcular el valor de a para los cuales la matriz $A = (a - 2\ 0\ \ -3\ \ -1\ a + 3\ 0\ 1\ \ -1\ 1\ )$ tiene inversa.

b) Utilizando los resultados obtenidos en el apartado anterior, determinar para qué valores del parámetro a, las siguientes matrices tienen inversa:

b_1) A^2. b_2) La traspuesta de A: A^t.

c) Considera la matriz del apartado a) para $a = 1$, y las matrices: $B = (-\ 1\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0\ 1\ \ -1\ 1\ )$ y $C = (2\ 1\ 3\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0\ )$. Resolver la ecuación matricial $A^{-1}XB + C = I$.

----

a)

Una función tiene inversa (es invertible) cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = |a - 2\ 0\ \ -3\ \ -1\ a + 3\ 0\ 1\ \ -1\ 1\ | = (a - 2)(a + 3) - 3 + 3(a + 3) = a^2$ -

$-\ 2a - 6 - 3 + 3a + 9 = a^2 + 4a = 0;\ \ a(a + 4) = 0 \Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = -\ 4.$

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{0,\ \ -\ 4\}}.$

b)

b_1)

$a = 0 \Rightarrow A = (-\ 2\ 0\ \ -3\ \ -1\ 3\ 0\ 1\ \ -1\ 1\ ).$

$A^2 = A \cdot A = (-\ 2\ 0\ \ -3\ \ -1\ 3\ 0\ 1\ \ -1\ 1\ ) \cdot (-\ 2\ 0\ \ -3\ \ -1\ 3\ 0\ 1\ \ -1\ 1\ ) = (1$

.

$\left|A^2\right| = |1\ 3\ 3\ \ -\ 1\ 9\ 3\ 0\ \ -\ 4\ \ -\ 2\,| = -\ 18\ +\ 12\ +\ 12\ -\ 6\ =\ 0.$

$a = -\ 4 \Rightarrow A\ = (-\ 6\ 0\ \ -\ 3\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 1\ ).$

$A^2\ =\ A \cdot A\ = (-\ 6\ 0\ \ -\ 3\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 1\ ) \cdot (-\ 6\ 0\ \ -\ 3\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1$

.

$\left|A^2\right| = |33\ 3\ 15\ 7\ 1\ 3\ \ -\ 4\ 0\ \ -\ 2\,| = -\ 66\ -\ 36\ +\ 60\ +\ 42\ =\ 102\ -\ 102\ =\ 0$

.

$\underline{Para\ a\ =\ 0\ y\ a\ = -\ 4\ la\ matriz\ A^2\ no\ es\ invertible}.$

$b_2)$

$a\ =\ 0 \Rightarrow A\ = (-\ 2\ 0\ \ -\ 3\ \ -\ 1\ 3\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 1\ ) \Rightarrow A^t = (-\ 2\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 3\ \ -\ 1\ \ -$

.

$\left|A^t\right| = |-\ 2\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 3\ \ -\ 1\ \ -\ 3\ 0\ 1\,| = -\ 6\ -\ 3\ +\ 9\ =\ 0.$

$a = -\ 4 \Rightarrow A\ = (-\ 6\ 0\ \ -\ 3\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 1\ ) \Rightarrow A^t = (-\ 6\ \ -\ 1\ 1\ 0\ \ -\ 1\ \ -$

.

$\left|A^t\right| = |-\ 6\ \ -\ 1\ 1\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 3\ 0\ 1\,| = 6\ -\ 3\ -\ 3\ =\ 0.$

$\underline{Para\ a\ =\ 0\ y\ a\ = -\ 4\ la\ matriz\ A^t\ no\ es\ invertible}.$

$c)$

Para $a\ =\ 1 \Rightarrow A\ = (-\ 1\ 0\ \ -\ 3\ \ -\ 1\ 4\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 1\ ).$

$A^{-1}XB\ +\ C\ =\ I;\ \ A^{-1}XB\ =\ I\ -\ C;\ \ A \cdot A^{-1} \cdot X \cdot B \cdot B^{-1}\ =\ A \cdot (I\ -\ C) \cdot B^{-1};$

$I \cdot X \cdot I\ =\ A \cdot (I\ -\ C) \cdot B^{-1} \Rightarrow \underline{X\ =\ A \cdot (I\ -\ C) \cdot B^{-1}}.$

$A \cdot (I\ -\ C) = A \cdot [(1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) - (2\ 1\ 3\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0\ )] = A \cdot (-\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 3\ 0\ \ -\ 1\ 0$

$= (-\ 1\ 0\ \ -\ 3\ \ -\ 1\ 4\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 1\ ) \cdot (-\ 1\ \ -\ 1\ \ -\ 3\ 0\ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 1\ ) = (4\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 3\ 3$

.

La inversa de B se obtiene por el método de Gauss-Jordan:

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow -\ F_1\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (-\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \to F_3 - F_1\right\} \Rightarrow (-\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \to \tfrac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \left(-\ 1\ 0\ 0\ 0\ \tfrac{1}{2}\ 0\ 1\ 0\ 1\right) \Rightarrow \left\{F_3 \to F_3 + F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-\ 1\ 0\ 0\ 0\ \tfrac{1}{2}\ 0\ 1\ \tfrac{1}{2}\ 1\right) \Rightarrow \left\{F_3 \to \tfrac{1}{3}F_3\right\} \Rightarrow \left(-\ 1\ 0\ 0\ 0\ \tfrac{1}{2}\ 0\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{6}\ \tfrac{1}{3}\ \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 +\ 2F_3\right\} \Rightarrow \left(-\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{2}{3}\ 0\ \tfrac{1}{2}\ 0\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{6}\ \tfrac{1}{3}\ \right) \Rightarrow B^{-1} = \left(-\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{2}{3}\ 0\ \tfrac{1}{2}\ 0\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{6}\ \right.$$

.

$$X\ =\ A\cdot(I\ -\ C)\cdot B^{-1} = (4\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 3\ 3\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 2\ )\cdot\left(-\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{2}{3}\ 0\ \tfrac{1}{2}\ 0\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{6}\ \tfrac{1}{3}\ \right) =$$

$$= (4\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 3\ 3\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 2\ )\cdot\tfrac{1}{6}\cdot(-\ 2\ 2\ 4\ 0\ 3\ 0\ 2\ 1\ 2\ ) = \tfrac{1}{6}\cdot(-\ 8\ 11\ 16\ 4\ \ -\ 4\ 10\ 0\ \ -$$

.

$$\underline{X\ = \tfrac{1}{6}\cdot(-\ 8\ 11\ 16\ 4\ \ -\ 4\ 10\ 0\ \ -\ 6\ \ -\ 12\ ).}$$

****

2º) a) El coste, en euros, de fabricar x unidades de un producto es $C(x) = 3x + 25$. Se ha fijado un precio de venta por unidad que también depende del número de unidades producidas: $13 - \frac{x^2}{750}$ euros. ¿Cuántas unidades deben fabricarse para obtener los máximos beneficios? ¿Cuál es el precio de venta por unidad que debe fijarse para obtener dichos beneficios?

b) Dada la función $f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+5}$:

b_1) Determinar sus asíntotas verticales. Esbozar la posición de la gráfica respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

b_2) Calcular la integral definida $I = \int_1^2 \frac{x+3}{x^2+6x+5} \cdot dx$.

----

a)

La función ingresos es: $I(x) = x \cdot \left(13 - \frac{x^2}{750}\right) = 13x - \frac{x^3}{750}$.

Los beneficios son la diferencia entre los ingresos y los gastos:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 13x - \frac{x^3}{750} - (3x + 25) = 10x - \frac{x^3}{750} - 25.$$

Una función tiene un máximo cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$B'(x) = 10 - \frac{x^2}{250}$. $\qquad B''(x) = -\frac{x}{125} < 0,\ \forall x > 0$.

$$B'(x) = 0 \Rightarrow 10 - \frac{x^2}{250} = 0;\ \ 2.500 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 50.$$

La solución negativa carece de sentido, por lo cual, $x = 50$.

$\underline{Para\ obtener\ los\ beneficios\ máximos\ deben\ fabricarse\ 50\ unidades.}$

$$P(50) = 13 - \frac{50^2}{750} = 13 - \frac{2.500}{750} = 13 - 3,33 = 9,67.$$

$\underline{El\ precio\ por\ unidad\ para\ el\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 9,67\ euros.}$

b)

b_1)

Las asíntotas verticales de una función racional son los valore reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 + 6x + 5 = 0;\ x = \frac{-6\pm\sqrt{36-20}}{2} = \frac{-6\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{-6\pm 4}{2} \Rightarrow x_1 =- 5,\ x_2 =- 1.$$

$\underline{Las\ asíntotas\ verticales\ de\ la\ función\ f(x)\ son\ x =- 5\ y\ x =- 1}$.

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+5} = \frac{x+3}{(x+5)(x+1)} = \frac{-5+3}{\left(-5^- +5\right)(-5+1)} = \frac{-2}{0^-\cdot(-4)} =$$

$$= \frac{1}{0^-\cdot 2} = \frac{1}{0^-} =- \infty.$$

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+5} = \frac{x+3}{(x+5)(x+1)} = \frac{-5+3}{\left(-5^+ +5\right)(-5+1)} = \frac{-2}{0^+\cdot(-4)} =$$

$$= \frac{1}{0^+\cdot 2} = \frac{1}{0^+} =+ \infty.$$

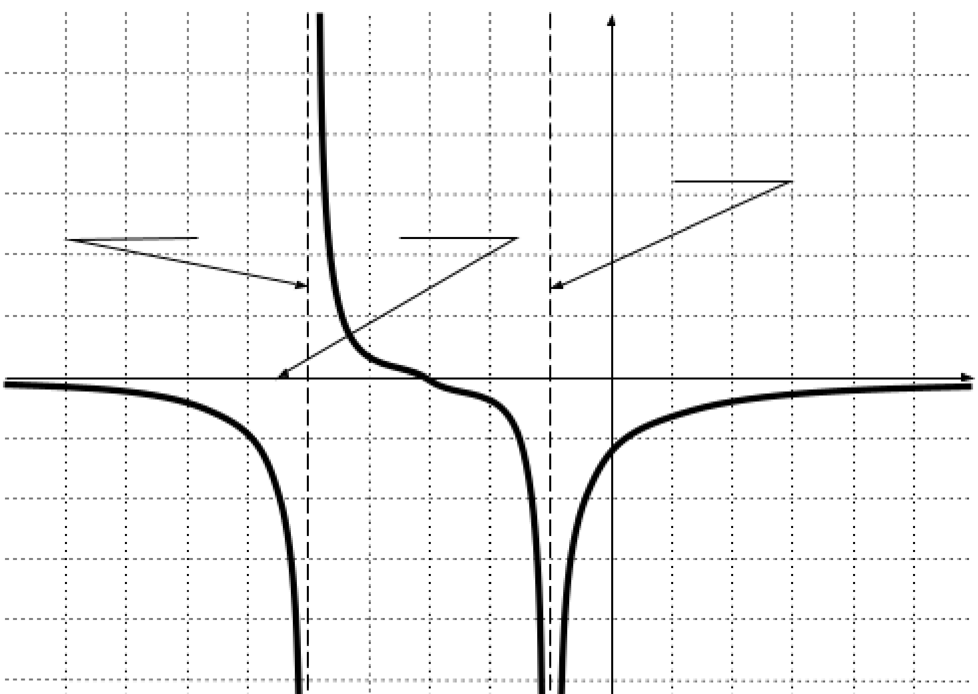
$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+5} = \frac{x+3}{(x+5)(x+1)} = \frac{-1+3}{(-1+5)\left(-1^- +1\right)} = \frac{2}{4\cdot 0^-} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 0^-} = \frac{1}{0^-} =- \infty.$$

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+5} = \frac{x+3}{(x+5)(x+1)} = \frac{-1+3}{(-1+5)\left(-1^+ +1\right)} = \frac{2}{4\cdot 0^+} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 0^+} = \frac{1}{0^+} =+ \infty.$$

Teniendo en cuenta que $f(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+5} = 0$, el eje de abscisas es asíntota horizontal, el esbozo de la función se indica en la figura siguiente.



b_2)

$$I = \int_1^2 \frac{x+3}{x^2+6x+5} \cdot dx.$$

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida $S = \int \frac{x+3}{x^2+6x+5} \cdot dx$.

$$\frac{x+3}{x^2+6x+5} = \frac{x+3}{(x+5)(x+1)} = \frac{M}{x+5} + \frac{N}{x+1} = \frac{Mx+M+Nx+5N}{(x+5)(x+1)} = \frac{(M+N)x+(M+5N)}{x^2+6x+5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} M + N = 1 \\ M + 5N = 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -M - N = -1 \\ M + 5N = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 4N = 2;\ N = \frac{1}{2};$$

.

$$S = \int \frac{x+3}{x^2+6x+5} \cdot dx = \int \left(\frac{M}{x+5} + \frac{N}{x+1} \right) \cdot dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+1} \right) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2}[L|x + 5| + L|x + 1|] + C = \frac{1}{2} L|(x + 5)(x + 1)| + C = \frac{1}{2} L\left|x^2 + 6x + 5\right| + C$$

$$I = \int_1^2 \frac{x+3}{x^2+6x+5} dx = \frac{1}{2}\left[L\left|x^2 + 6x + 5\right|\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[L\left|2^2 + 6\cdot 2 + 5\right| - L\left|1^2 + 6\cdot 1 + 5\right|\right] = \frac{1}{2} \cdot [L21 - L12] = \frac{1}{2} \cdot L\frac{21}{12} = \frac{1}{2} \cdot L\frac{7}{4}$$

.

$$\underline{I = \int_1^2 \frac{x+3}{x^2+6x+5} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot L\frac{7}{4} = \frac{1}{2} \cdot L1,75 \cong 0,28.}$$

****

3º) El Centro de Idiomas de la Universidad de Cantabria realiza un examen de inglés a todos los alumnos de nuevo ingreso en el curso 2.017/2.018. La nota obtenida sigue una distribución normal con desviación típica 1,9. Una muestra aleatoria de 100 alumnos da como resultado una nota media de 6,28.

a) Obtener el intervalo de confianza del 90 % para la nota media.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

----

a)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,75.$

$1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,75).$

Datos: $n = 100;\ \overline{x} = 6,28;\ \sigma = 1,9;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,75.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(6,28 - 1,75 \cdot \frac{1,9}{\sqrt{100}};\ 6,28 + 1,75 \cdot \frac{1,9}{\sqrt{100}}\right);$

$(6,28 - 1,75 \cdot 0,19;\ 6,28 + 1,75 \cdot 0,19);\ (6,28 - 0,3325;\ 6,28 + 0,3325).$

$$\underline{I.\ C._{90\ \%} = (5,9475;\ 6,6125).}$$

b)

$E_{anterior} = \frac{6,6125-5,9475}{2} = \frac{0,6650}{2} = 0,3325.$

$E = \frac{E_{anterior}}{4} = \frac{0,3325}{4} = 0,0831.$

Para un nivel de confianza del 98 % es:

$1 - \alpha = 0,98 \rightarrow \alpha = 1 - 0,98 = 0,02 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,01} = 2,33.$

$1 - 0,01 = 0,9900 \rightarrow z = 2,33$

Datos: $\sigma = 1,9;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,33;\ E = 0,0831.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,33 \cdot \frac{1,9}{0,0831}\right)^2 =$

$= (2,33 \cdot 22,86)^2 = 53,2571^2 = 2.836,32,04.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 2.837\ alumnos.}$

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) Una asociación de vecinos ha programado una excursión en la que se han inscrito 540 personas. La compañía con la que han contratado el viaje dispone de 12 autocares de 60 plazas y de 9 de 40 plazas, pero en las fechas previstas para el viaje solo se podrá contar con 10 conductores. Por otro lado, alquilar un autocar grande supone 100 euros; y uno pequeño, 65 euros. ¿Cuántos autocares de cada tipo deberán alquilarse para minimizar los costes?

Sean x e y el número de autobuses de 60 plazas y 40 plazas que se utilizan, respectivamente.

Las restricciones del problema son:

$0 \leq x \leq 12 \quad 0 \leq y \leq 9 \quad x + y \leq 10 \; 60x + 40y \geq 540 \} \quad 0 \leq x \leq 12 \quad 0 \leq y$

.

x	0	10
y	10	0

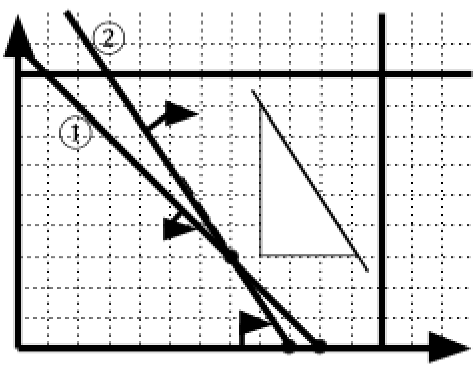
①$\Rightarrow x + y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	9	5
y	0	6

②$\Rightarrow 3x + 2y \geq 27 \Rightarrow y \geq \frac{27-3x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow x + y = 10 \; 3x + 2y = 27 \} \; - 2x - 2y = - 20 \; 3x + 2y = 27 \} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 7; \;\; y = 3 \Rightarrow A(7,\ 3).$

$B \Rightarrow x + y = 10 \qquad y = 0 \} \Rightarrow B(10,\ 0).$

$C \Rightarrow 3x + 2y = 27 \qquad y = 0 \} \Rightarrow x = 9 \Rightarrow C(9,\ 0).$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = 100x + 65y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(7,\ 3) = 100 \cdot 7 + 65 \cdot 3 = 700 + 195 = 895.$

$B \Rightarrow f(10,\ 0) = 100 \cdot 10 + 65 \cdot 0 = 1.000 + 0 = 1.000.$

$C \Rightarrow f(9,\ 0) = 100 \cdot 9 + 65 \cdot 0 = 900 + 0 = 900.$

El valor mínimo se produce en el punto $A(7,\ 2)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 100x + 65y = 0 \Rightarrow y = -\frac{100}{65}x = -\frac{5}{3{,}25}x \Rightarrow m = -\frac{5}{3{,}25}.$$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ se\ consigue\ contratanto\ 7\ autobuses\ grandes\ y\ 3\ pequeños.}$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 895\ euros.}$

****

2º) Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - 12x$:

a) Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

d) Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $g(x) =- 6x$.

e) Calcular el área de la región anterior.

----

a)

$Eje\ Y \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \underline{O(0, 0)}$.

$Eje\ X \rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 - 12x = 0;\ x\left(x^2 + x - 12\right) = 0;\ x_1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \underline{O(0, 0)};\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow x_2 =- 4 \rightarrow \underline{A(- 4, 0)},\ x_3 = 3 \rightarrow \underline{B(3, 0)}$.

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 12$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 12 = 0;\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+144}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{188}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 42}}{6} =$

$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{42}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{42}}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{-1-\sqrt{42}}{3} \cong - 2,49,\ x_1 = \frac{-1+\sqrt{42}}{3} \cong 1,83.$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en R por ser una función polinómica, los valores que anulan la primera derivada dividen el dominio de la función en los tres intervalos $\left(- \infty, \frac{-1-\sqrt{42}}{3}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{42}}{3}, \frac{-1+\sqrt{42}}{3}\right)$ y $\left(\frac{-1+\sqrt{42}}{3}, + \infty\right)$, que son crecientes o decrecientes de forma alternativa.

Teniendo en cuenta que, por ejemplo, el valor $x = 0 \in \left(\frac{-1-\sqrt{42}}{3}, \frac{-1+\sqrt{42}}{3}\right)$, el valor de la derivada es $f'(0) =- 12 < 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{42}}{3}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{42}}{3}, +\infty\right)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon \left(\frac{-1-\sqrt{42}}{3}, \frac{-1+\sqrt{42}}{3}\right)}.$$

La condición necesaria para que una función polinómica tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = 6x + 2.$$

$$f''\left(\frac{-1-\sqrt{42}}{3}\right) = 6 \cdot \frac{-1-\sqrt{42}}{3} + 2 = -2 - 2\sqrt{42} + 2 = -2\sqrt{42} < 0 \Rightarrow$$
Máximo relativo para $x = \frac{-1-\sqrt{42}}{3}$.

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{42}}{3}\right) \cong f(-2,49) = (-2,49)^3 + (-2,49)^2 - 12 \cdot (-2,49) =$$

$$= -15,50 + 6,22 + 29,92 = 20,64 \Rightarrow \underline{Máx.\ M(-2,49,\ 20,64)}.$$

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{42}}{3}\right) \cong f(1,83) = 1,83^3 + 1,83^2 - 12 \cdot 1,83 =$$

$$= 6,10 + 3,34 - 21,92 = -12,48 \Rightarrow \underline{Mín.\ N(1,83,\ -12,48)}.$$

$c)$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 2 = 0;\ \ 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Los periodos de concavidad y convexidad son los siguientes:

$$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)}.$$

$$\underline{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)}.$$

Una función tiene un punto de inflexión cuando pasa de ser cóncava a convexa o viceversa, es decir, cuando se anula su segunda derivada. Esta propiedad, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el punto de inflexión tiene que ser distinta de cero los valores de la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f'''(x) = 0 \Rightarrow 6 \neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ inflexión\ para\ x = -\frac{1}{3}.$$

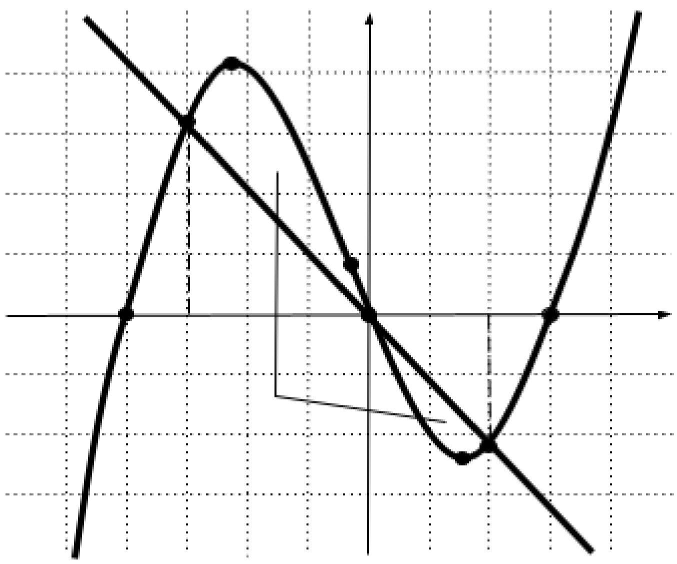
$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + 4 = \frac{-1+3+108}{27} = \frac{110}{27}$$

.

$$\underline{Punto\ de\ Inflexión: P\left(-\frac{1}{3}, \frac{110}{27} \cong 4,1\right).}$$

$d)$

Los puntos de corte de la función y la recta se obtienen de la resolución de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:



$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 + x^2 - 12x \qquad g(x) = -6x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + x^2 - 12x = -6x;$$

$$x^3 + x^2 - 6x = 0;$$

$$x\left(x^2 + x - 6\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;$$

$$x^2 + x - 6 = 0; \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} =$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_2 = -3, \ x_3 = 2.$$

Los puntos de corte son $O(0,\ 0),\ R(-\ 3,\ 18)\ y\ S(2,\ \ -\ 12)$.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta.

$e)$

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-3}^{0} [f(x) - g(x)]\cdot dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\cdot dx =$$

$$= \int_{-3}^{0} \left[\left(x^3 + x^2 - 12x\right) - (-\ 6x)\right]\cdot dx + \int_{0}^{2} \left[(-\ 6x) - \left(x^3 + x^2 - 12x\right)\right]\cdot dx =$$

$$= \int_{-3}^{0} \left(x^3 + x^2 - 6x\right)\cdot dx + \int_{0}^{2} \left(-\ x^3 - x^2 + 6x\right)\cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_{-3}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_{0}^{2} =$$

$$= 0 - \left[\frac{(-3)^4}{4} + \frac{(-3)^3}{3} - 3\cdot(-\ 2)^2\right] + \left(-\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} + 3\cdot 2^2\right) - 0 =$$

$$= -\frac{81}{4} + 9 + 12 - 4 - \frac{8}{3} + 12 = -\frac{81}{4} - \frac{8}{3} + 29 = \frac{-243-32+348}{12} = \frac{73}{12}.$$

$$\underline{S = \frac{73}{12}\ u^2 \cong 6,08\ u^2.}$$

****

3º) De los alumnos matriculados en 1º en los grados de Economía, Administración y Dirección de Empresas y Derecho, de determinada universidad, conocemos su nivel de inglés. Los datos desglosados aparecen en la tabla adjunta.

	G. Económicas	G. Adm. y D. Empr.	G. Derecho	Total
Nivel alto	20	33	34	87
Nivel medio	78	167	76	321
Nivel bajo	27	20	65	112
Total	125	220	175	520

Escogemos un alumno al azar:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que esté estudiando derecho?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que estudie Económicas y tenga nivel bajo?

$c)$ Si sabemos que el alumno tiene un nivel medio, ¿cuál es la probabilidad de que esté estudiando Administración y D. de Empresas?

$a)$

$$P = \frac{175}{520} = \underline{\frac{35}{104} = 0,3365.}$$

$b)$

$$P = P\left(E \cap N_b\right) = \frac{125}{520} \cdot \frac{27}{125} = \underline{\frac{27}{520} = 0,0519.}$$

$c)$

$$P = \left(ADE/N_m\right) = \frac{P\left(ADE \cap N_m\right)}{P\left(N_m\right)} = \frac{\frac{167}{520}}{\frac{321}{520}} = \underline{\frac{167}{321} = 0,5202}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) En una nave industrial se realiza el montaje de dos tipos de bicicleta: de paseo y de montaña. Para cada jornada de trabajo tenemos las siguientes restricciones: el número de bicicletas de paseo montadas debe estar entre 1 y 2. El número de bicicletas de montaña montadas debe estar entre 3 y 6. Si al triple de bicicletas de paseo montadas sumamos el número de bicicletas de montaña montadas, el resultado debe ser al menos 9. El montaje de una bicicleta de paseo precisa una hora, mientras que el de una bicicleta de montaña necesita dos horas. Pretendemos cumplir todas las condiciones expuestas en un tiempo mínimo. Para ello se pide:

a) Expresa la función de objetivos.

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

c) Halla el número de bicicletas de cada clase que se deben montar para que se cumplan todas las condiciones en un tiempo mínimo, y calcula cuál será ese tiempo mínimo.

----

a)

$$\underline{La\ función\ de\ objetivos\ es\ f(x,\ y) = x + 2y}.$$

b)

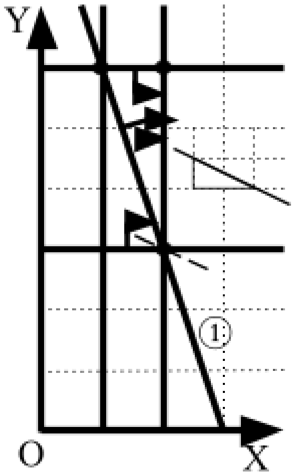
Sean x e y el número de bicicletas de paseo y de montaña que se montan en la nave industrial, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio son: $\underline{\left.\begin{array}{l} 1 \le x \le 2 \\ 3 \le y \le 6 \\ 3x + y \ge 9 \end{array}\right\}}$

x	2	3
y	3	0

①$\Rightarrow 3x + y \ge 9 \Rightarrow y \ge 9 - 3x \Rightarrow O(0,\ 0) \to No.$

La región factible es la zona sombreada que aparece en la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad x = 1\ 3x + y = 9\ \} \Rightarrow A(1,\ 6).$

$B \Rightarrow x = 3\ y = 6\ \} \Rightarrow B(3,\ 6).$

$C \Rightarrow \quad y = 3\ 3x + y = 9\ \} \Rightarrow C(2,\ 3).$

$c)$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = x + 2y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(1,\ 6) = 1 + 2 \cdot 6 = 1 + 12 = 13.$

$B \Rightarrow f(3,\ 6) = 3 + 2 \cdot 6 = 3 + 12 = 15.$

$C \Rightarrow f(2,\ 3) = 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8.$

El valor mínimo se produce en el punto $C(2,\ 3)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m = -\frac{1}{2}.$

$\underline{El\ mínimo\ se\ obtiene\ montando\ 2\ bicicletas\ de\ paseo\ y\ 3\ de\ montaña}.$

$\underline{El\ tiempo\ mínimo\ es\ de\ 8\ horas}.$

****

2º) Las acciones de tres empresas, A, B y C, tienen los siguientes valores: Empresa A: 20 euros por acción; Empresa B: 25 euros por acción; Empresa C: 40 euros por acción.
Hemos gastado 7.000 euros en comprar acciones de estas tres empresas. Las acciones compradas de la empresa A son la mitad de la suma de las compradas de B y C. En total hemos comprado 255 acciones, exclusivamente de estas tres empresas.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas acciones hemos comprado de cada empresa.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Sean $x,\ y,\ z$ los precios de las acciones que se compran a las empresas A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$20x + 25y + 40z = 7.000 \qquad x + y + z = 255 \qquad x = \frac{y+z}{2} \}4x$$

.

$$\underline{4x + 5y + 8z = 1.400 \qquad x + y + z = 255 \qquad 2x - y - z = 0 \}}.$$

b)

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|A| = |4\ 5\ 8\ 1\ 1\ 1\ 2\ \ -1\ \ -1\,| = -4 - 8 + 10 - 16 + 4 + 5 = -9 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 3$$

.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius.

$$Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg \Rightarrow S.\ C.\ D.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|1.400\ 5\ 8\ 255\ 1\ 1\ 0\ -1\ -1\,|}{-9} = \frac{-1.400-2.040+1.400+1.275}{-9} = \frac{-2.040+1.275}{-9} = \frac{-765}{-9} = 85$$

.

$$y = \frac{|4\ 1.400\ 8\ 1\ 255\ 1\ 2\ 0\ -1\,|}{-9} = \frac{-1.020+2.800-4.080+1.400}{-9} = \frac{4.200-5.100}{-9} = \frac{-900}{-9} = 100$$

.

$$z = \frac{|4\ 5\ 1.400\ 1\ 1\ 255\ 2\ -1\ 0\ |}{-9} = \frac{-1.400+2.550-2.800+1.020}{-9} = \frac{3.570-4.200}{-9} = \frac{-630}{-9} = 70$$

.

$\underline{Hemos\ comprado\ 85\ acciones\ a\ la\ empresa\ A,\ \ 100\ a\ la\ B\ y\ 70\ a\ la\ C}.$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{4x - t\ \ si\ \ x \leq 1\ (x - 2)^2 + t\ \ si\ \ x > 1\ .$

a) ¿Para qué valores de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$?

b) Para $t = 0$, representa gráficamente la función f.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor de t para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\ x = 1 \Rightarrow \{f(x) = (4x - t) = 4 - t = f(1)\ f(x) = \left[(x - 2)^2 + t\right] = 1 + t \quad =$

$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(1) \Rightarrow 4 - t = 1 + t;\ \ 3 = 2t \Rightarrow t = \frac{3}{2}.$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = 1\ para\ t = \frac{3}{2}.}$

b)

Para $t = 0$ la función es $f(x) = \{\ 4x\ \ si\ \ x \leq 1\ (x - 2)^2\ \ si\ \ x > 1\ .$

Para la representación gráfica de la función tendremos en cuenta lo siguiente:

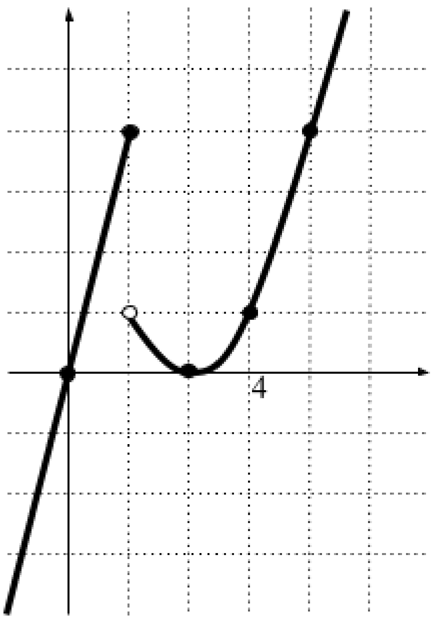
En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es una semirrecta de origen $A(1, 4)$ que contiene al punto $O(0, 0)$.

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función es la parábola $f(x) = x^2 - 4x + 4$ cuyo vértice es el siguiente:

$f'(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2.$

$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0 \Rightarrow V(2, 0).$

Otros puntos de la parábola son los siguientes: $B(1, 1),\ C(3, 1)\ y\ D(4, 4).$



La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la figura adjunta.

****

4º) De la función $G(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ sabemos que tiene un punto de inflexión en el punto $P(2, -44)$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 6$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros $a,\ b\ y\ c$.

Por contener $G(x)$ al punto $P(2, -44)$ es $G(2) = -44$.

$G(2) = a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 = -44;\ \ 4a + 2b + c = -22.$ (1)

Por tener un punto de inflexión en el punto $P(2, -44)$ es $G''(2) = 0$.

$G'(x) = 3ax^2 + 2bx + c. \qquad G''(x) = 6ax + 2b.$

$G''(2) = 0 \Rightarrow 6a\cdot 2 + 2b = 0;\ \ 6a + b = 0.$ (2)

Por tener un mínimo relativo para $x = 6$ es $G'(6) = 0$.

$G'(6) = 0 \Rightarrow 3a\cdot 6^2 + 2b\cdot 6 + c = 0;\ \ 108a + 12b + c = 0.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$4a + 2b + c = -22 \qquad 6a + b = 0\ 108a + 12b + c = 0 \} \rightarrow b = -6a \Rightarrow 4a - 1$

$-8a + c = -22\ 36a + c = 0 \}\ 8a - c = 22\ 36a + c = 0 \} \Rightarrow 44a = 22 \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{2}}$

. $\underline{b = -3}$.

$36\cdot\frac{1}{2} + c = 0;\ \ 18 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = -18}.$

****

5º) En un municipio el 40 % de los habitantes son aficionados a la lectura, el 50 % al cine, y al 70 % les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.

a) Se elige un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine?

b) Si elegimos un habitante al azar y le gusta el cine, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura?

$$Datos: P(L) = 0,4;\ \ P(C) = 0,5;\ \ P(L \cup C) = 0,7.$$

a)

$$P(L \cup C) = P(L) + P(C) - P(L \cap C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(L \cap C) = P(L) + P(C) - P(L \cup C) = 0,4 + 0,5 - 0,7 = \underline{0,2}.$$

b)

$$P = P(L/C) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{0,2}{0,5} = \underline{0,4}.$$

****

6º) Se desea investigar la resistencia en kg/cm^2 de cierto material suministrado por un proveedor, se sabe que esa resistencia sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 15\ kg/cm^2$. Se tomó una muestra aleatoria de 400 elementos de ese material y se comprobó que la resistencia media de dicha muestra era de $110\ kg/cm^2$.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la resistencia de ese material, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza.

c) Se puede admitir que la media de resistencia μ del material pueda ser de $111\ kg/cm^2$ con una confianza del 95 %. Razona tu respuesta.

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $n = 400;\ \overline{x} = 110;\ \sigma = 15;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(110 - 1,96\cdot\frac{15}{\sqrt{400}};\ 110 + 1,96\cdot\frac{15}{\sqrt{400}}\right);$

$(110 - 1,96\cdot0,75;\ 110 + 1,96\cdot0,75);\ (110 - 1,47;\ 110 + 1,47).$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = (108,53;\ \ 111,47).}$$

b)

El nivel de confianza es inversamente proporcional a la amplitud del intervalo, de tal manera que:

$$\underline{A\ mayor\ nivel\ de\ confianza\ menor\ amplitud\ del\ intervalo\ y\ viceversa.}$$

c)

$\underline{Se\ puede\ admitir\ que\ \mu\ =\ 111\ porque\ 111\ \in (108,53;\ \ 111,47)}$.

****

OPCIÓN B

1º) a) Dada la matriz $A = (2\ 7\ \ -1\ \ -3\ )$ se pide que compruebes que su cuadrado coincide con su inversa, es decir: $A^2 = A^{-1}$.

b) Calcula $A^3\ y\ A^4$.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = (2\ 7\ \ -1\ \ -3\ ) \cdot (2\ 7\ \ -1\ \ -3\ ) = (-\ 3\ \ -\ 7\ 1\ 2\ ).$$

$|A| = |2\ 7\ \ -1\ \ -3\ | = 1;\ \ A^t = (2\ \ -1\ 7\ \ -3\ );\ \ Adj.\ de\ A^t = (-\ 3\ \ -\ 7\ 1\ 2\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{Adj.\,de\,A^t}{|A|} = (-\ 3\ \ -\ 7\ 1\ 2\ ).$

<u>*Queda comprobado que* $A^2 = A^{-1}$</u>.

b)

$$A^3 = A^2 \cdot A = (-\ 3\ \ -\ 7\ 1\ 2\ ) \cdot (2\ 7\ \ -1\ \ -3\ ) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) = I.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A.$$

<u>$A^3 = I\ y\ A^4 = A$</u>.

****

2º) Hemos gastado 7.000 euros en comprar 85 acciones de la empresa A, 100 acciones de la empresa B y 70 acciones de la empresa C. El valor de una acción de la empresa C es el doble que el de una acción de la empresa A. El valor de una acción de la empresa B supera en 5 euros al de una acción de la empresa A.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor de una acción de cada una de las empresas mencionadas.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Sean $x,\ y,\ z$ los precios de las acciones que se compran a las empresas A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 85x+100y+70z=7.000 \\ z=2x \\ y=x+5 \end{array}\right\}.$$

b)

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 17 & 20 & 14 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=28+20+17=65\neq 0 \Rightarrow Rang\ A=3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius.

$$Rang\ A=Rang\ A'=3=n^{\underline{o}}\ incóg \Rightarrow S.\ C.\ D.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1.400 & 20 & 14 \\ 0 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{65}=\frac{1\cdot\begin{vmatrix} 1.400 & 20 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{65}=\frac{1.400-100}{65}=\frac{1.300}{65}=20.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 17 & 1.400 & 14 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{65}=\frac{140+1.400+85}{65}=\frac{1.625}{65}=25.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 17 & 20 & 1.400 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{65}=\frac{-2\cdot\begin{vmatrix} 20 & 1.400 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{65}=\frac{-2\cdot(100-1.400)}{65}=\frac{2.600}{65}=40.$$

$\underline{La\ acción\ de\ A\ cuesta\ 20\ euros,\ la\ de\ B,\ 25\ euros\ y\ la\ de\ C,\ 40\ euros.}$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{|x| + 5t \quad si\, x \leq 0 \;\; (x + t)^2 - 10x \;\; si \;\; x > 0$:

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$?

b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \; + \infty)$.

c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, \; + \infty)$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor de t para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\, x = 0 \Rightarrow \{ f(x) \; = (|x| + 5t\,) = \; 5t = f(0) \; f(x) \; = \left[(x + t)^2 - 10x\right] = \; t^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \; = f(x) \; = f(0) \Rightarrow 5t = t^2 \Rightarrow t(t - 5) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, \; t_2 = 5.$$

$\underline{La\, función\, f(x)\; es\; continua\; en\, x = 0\; para\, t = 0\; y\, para\, t = 5}$.

b)

Para $t = 2$ en $(0, \; + \infty)$ la función es $f(x) = (x + 2)^2 - 10x =$

$= x^2 + 4x + 4 - 10x = x^2 - 6x + 4$, que es una parábola convexa (∪) cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \Rightarrow V(3, \; - 5).$$

$\underline{El\text{ único }extremo\; relativo\; de\, f(x)\; es\; su\; mínimo\, V(3, \; - 5)}$.

c)

Del apartado anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento en el intervalo $(0, \; + \infty)$, que son los siguientes:

$\underline{Decrecimiento: f'(x) < \; 0 \Rightarrow x \epsilon (0, \; 3)}$.

$\underline{Crecimiento: f'(x) \; > \; 0 \Rightarrow x \epsilon (3, + \infty)}$.

****

4º) Cierto club de fútbol acaba de cumplir 25 años de existencia. A lo largo de este tiempo su número de socios se ha ajustado a la función: $S(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - 54x + 180$ donde x está en años, con $0 \leq x \leq 25$ y $S(x)$ está en cientos de socios. Se pide:

a) Calcula cuántos socios tiene el club en su inicio $(x = 0)$ y cuántos en este momento $(x = 25)$.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de socios a lo largo de estos 25 años.

c) Determina cuándo ha tenido el club su número máximo de socios y su número mínimo de socios, y cuántos socios tuvo en cada uno de estos momentos.

\----------

a)

$$S(0) = 180.$$

$$S(25) = -\frac{1}{3}\cdot 25^3 + \frac{21}{2}\cdot 25^2 - 54\cdot 25 + 180 =$$

$$= 25\cdot\left(-\frac{625}{3} + \frac{525}{2} - 54\right) + 180 = 25\cdot\frac{-1.250+1.575-324}{6} + 180 =$$

$$= 25\cdot\frac{1.575-1.574}{6} + 180 = \frac{25}{6} + 180 = \frac{25+1.080}{6} = \frac{1.105}{6} \cong 184,17.$$

$$\underline{Al\ inicio\ había\ 18.000\ socios\ y\ ahora\ hay\ 18.417.}$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$S'(x) = -x^2 + 21x - 54. \qquad S''(x) = -2x + 21.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 21x - 54 = 0;\ x^2 - 21x + 54 = 0;\ x = \frac{21\pm\sqrt{441-216}}{2} =$$

$$= \frac{21\pm\sqrt{225}}{2} = \frac{21\pm 15}{2} \Rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = 18.$$

$$S''(3) = -2\cdot 3 + 21 = -6 + 21 = 15 > 0 \Rightarrow Mínimo.$$

$$S''(18) = -2\cdot 18 + 21 = -36 + 21 = -15 < 0 \Rightarrow Máximo.$$

Teniendo en cuenta la continuidad de $f(x)$, por ser polinómica, el máximo y el mínimo determinan los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{El\ número\ de\ socios\ aumento\ de\ 3\ a\ 18\ años.}$$

$$\underline{El\ número\ de\ socios\ disminuyó\ de\ 0\ a\ 3\ años\ y\ de\ 18\ a\ 25\ años.}$$

$c)$

$$S(3) = -\frac{1}{3}\cdot 3^3 + \frac{21}{2}\cdot 3^2 - 54\cdot 3 + 180 = -9 + \frac{189}{2} - 162 + 180 =$$

$$= 9 + 94,5 = 103,5.$$

$$S(18) = -\frac{1}{3}\cdot 18^3 + \frac{21}{2}\cdot 18^2 - 54\cdot 18 + 180 =$$

$$= 18\cdot(-108 + 189 - 54 + 10) = 18\cdot 37 = 666.$$

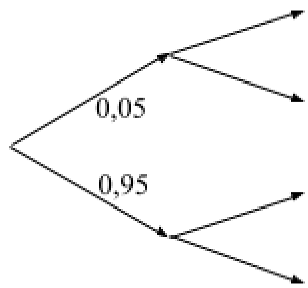
$$\underline{El\ mayor\ nº\ de\ socios\ fue\ de\ 66.600\ y\ el\ menor,\ 10.350.}$$

****

5º) En un cierto banco el 5 % de los créditos concedidos son para la compra de una motocicleta. De los créditos concedidos para la compra de una motocicleta, el 40 % resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una motocicleta, se sabe que el 10 % de ellos resultan impagados.

a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados.

b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito fuera para una motocicleta?



a)

$$P = P(\overline{Pa}) = P(Mo \cap \overline{Pa}) + P(Ot \cap \overline{Pa}) =$$

$$= P(Mo) \cdot P(\overline{Pa}/Mo) + P(Ot) \cdot P(\overline{Pa}/Ot) = 0,05 \cdot 0,4 + 0,95 \cdot 0,1 =$$

$$= 0,020 + 0,095 = \underline{0,115}.$$

b)

$$P = P(Mo/Pa) = \frac{P(Mo \cap Pa)}{P(Pa)} = \frac{P(Mo) \cdot P(Pa/Mo)}{1 - P(\overline{Pa})} = \frac{0,05 \cdot 0,6}{1 - 0,115} = \frac{0,030}{0,885} = \underline{0,0339}.$$

****

6º) Una empresa quiere estudiar cada cuánto tiempo los clientes vuelven a comprar ropa de su marca, sabe que el tiempo entre compras se distribuye según una normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 4$ días. Se tomó una muestra aleatoria de 10 clientes y se comprobó que el tiempo hasta la siguiente compra fue de 50, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 68 y 71 días, respectivamente.

a) Halla el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo entre compras de esta marca, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza, con el mismo nivel de confianza.

c) ¿Crees que la media poblacional μ del tiempo entre compras puede ser 64 días con una probabilidad del 99 %? Razona tu respuesta.

----

a)

$$\overline{x} = \frac{50+58+59+60+62+63+64+65+68+71}{10} = \frac{620}{10} = 62.$$

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $n = 10;\ \overline{x} = 62;\ \sigma = 4;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(62 - 1,96 \cdot \frac{4}{\sqrt{10}};\ 62 + 1,96 \cdot \frac{4}{\sqrt{10}}\right);$

$(62 - 1,96 \cdot 1,2649;\ 62 + 1,96 \cdot 1,2649);\ (62 - 2,4792;\ 62 + 2,4792).$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = (59,5008;\ \ 64,4792).}$$

b)

La amplitud del intervalo depende directamente del error máximo que se comete y, el error viene dado por la expresión $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, la amplitud aumenta o disminuye de forma inversamente proporcional al número de elementos de la muestra y de forma directamente proporcional al nivel de confianza utilizado.

$\underline{La\ amplitud\ se\ disminuye\ aumentando\ la\ muestra\ y\ el\ nivel\ de\ confianza.}$

$c)$

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1 - \alpha = 0,99 \to \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$

$1 - 0,005 = 0,9950 \to z = 2,575).$

Datos: $n = 10;\ \ \overline{x} = 62;\ \sigma = 4;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575.$

El intervalo de confianza es:

$\left(62 - 2,575 \cdot \frac{4}{\sqrt{10}};\ 62 + 2,575 \cdot \frac{4}{\sqrt{10}}\right);$

$(62 - 2,575 \cdot 1,2649;\ 62 + 2,575 \cdot 1,2649);\ \ (62 - 3,2571;\ 62 + 3,2571) \Rightarrow$

$\Rightarrow I.\ C._{99\ \%} = (58,7429;\ \ 65,2571).$

Por ser $\mu = 64 \in (58,7429;\ \ 65,2571)$:

$\underline{La\ media\ poblacional\ si\ puede\ ser\ de\ 64\ días\ con\ una\ confianza\ del\ 99\ \%.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) Considera el siguiente problema de programación lineal: Minimizar la función $F(x,\ y) = -\ x + 6y$, sujeta a las siguientes restricciones: $x + 7y \leq 58;\ \ 4x + 5y \geq 48;\ \ 3x - 2y \leq 13$.

a) Dibuja la región factible.

b) Determina los vértices de la región factible.

c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor.

----

a)

x	2	16
y	8	6

$①\Rightarrow x + 7y \leq 58 \Rightarrow y \leq \frac{58-x}{7} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

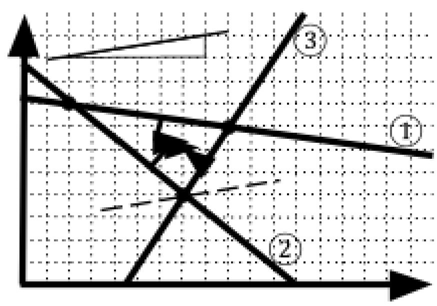
x	2	12
y	8	0

$②\Rightarrow 4x + 5y \geq 48 \Rightarrow y \leq \frac{48-4x}{5} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

x	9	11
y	7	10

$③\Rightarrow 3x - 2y \leq 13 \Rightarrow y \geq \frac{3x-13}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible son los siguientes:

b)

$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 7y = 58 \\ 4x + 5y = 48 \end{array} \right\}$ $\left. \begin{array}{l} 4x + 28y = 232 \\ -4x - 5y = -48 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 23y = 184;\ \ y = 8;\ \ x + 56 = 58;\ \ x = 2 \Rightarrow A(2,\ 8).$

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 7y = 58 \\ 3x - 2y = 13 \end{array} \right\}$ $\left. \begin{array}{l} 3x + 21y = 174 \\ -3x + 2y = -13 \end{array} \right\} \Rightarrow 23y = 161;\ \ y = 7;$

$x + 49 = 58;\ \ x = 9 \Rightarrow B(9,\ 7).$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 5y = 48 \\ 3x - 2y = 13 \end{array} \right\}$ $\left. \begin{array}{l} 8x + 10y = 96 \\ 15x - 10y = 65 \end{array} \right\} \Rightarrow 13x = 161;\ \ x = 7;$

$21 - 2y = 13;\ \ 2y = 8;\ \ y = 4 \Rightarrow C(7,\ 4).$

$c)$

La función de objetivos es $F(x,\ y) = -x + 6y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(2,\ 8) = -2 + 6 \cdot 8 = -2 + 48 = 46.$

$B \Rightarrow f(9,\ 7) = -9 + 6 \cdot 7 = -9 + 42 = 33.$

$C \Rightarrow f(7,\ 4) = -7 + 6 \cdot 4 = -7 + 24 = 17.$

El valor mínimo se produce en el punto $C(7,\ 4)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$F(x,\ y) = -x + 6y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{6}x \Rightarrow m = \frac{1}{6}.$

$\underline{La\ solución\ es\ el\ punto\ C(7,\ 4)\ y\ su\ valor\ es\ 17.}$

****

2º) En la bodega de Antonio hay botellas de vino blanco, de vino tinto y de vino rosado. Si sumamos las botellas de vino blanco con las de tinto obtenemos el triple de las botellas de rosado. La suma de las botellas de tinto con las de rosado supera en 40 unidades a las botellas de blanco. Además sabemos que Antonio tiene en su bodega 280 botellas.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botellas hay de cada tipo de vino.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Sean x, y, z las botellas de vino blanco, tino y rosado que tiene la bodega de Antonio, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y = 3z \;\; y + z = x + 40 \, x + y + z = 280 \} \;\; \underline{x + y - 3z = 0 \;\; - x + y}$$

.

b)

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|A| = |1\,1 \;\; - 3 \;\; - 1\,1\,1\,1\,1\,1\,| = 1 + 3 + 1 + 3 - 1 + 1 = 8 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 3$$

.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius.

$$Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg \Rightarrow S.\ C.\ D.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|0\ 1\ -3\ 40\ 1\ 1\ 280\ 1\ 1\,|}{8} = \frac{-120+280+840-40}{8} = \frac{1.120-160}{8} = \frac{960}{8} = 120.$$

$$y = \frac{|1\ 0\ -3\ -1\ 40\ 1\ 1\ 280\ 1\,|}{8} = \frac{40+840+120-280}{8} = \frac{1.000-280}{8} = \frac{720}{8} = 90.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 0\ -1\ 1\ 40\ 1\ 1\ 280\,|}{8} = \frac{280+40-40+280}{8} = \frac{560}{8} = 70.$$

$\underline{En\ la\ bodega\ hay\ 120\ botellas\ e\ vino\ blanco,\ 90\ de\ tinto\ y\ 70\ de\ rosado}.$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{|x + 2| + t \ si \ x\leq 0 \ (x - t)^2 \ si \ x > 0$.

a) ¿Para qué valores de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$?

b) Calcula los extremos relativos de $f(x)$ en el intervalo $(0, \ +\infty)$ con $t = 3$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \ +\infty)$ con $t = 3$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\, x = 0 \Rightarrow \{f(x) \ = (|x + 2| + t) = \ 2 + t = f(0) \ f(x) \ = (x - t)^2 = \ t^2$$

$$\Rightarrow f(x) \ = f(x) \ = f(0) \Rightarrow 2 + t = t^2; \ t^2 - t - 2 = 0; \ t = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} =$$

$$= \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = -1; \ t_2 = 2.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = 0\ para\ t = -1\ y\ t = 2}$.

b)

En el intervalo $(0, \ +\infty)$ con $t = 3$ la función es $f(x) = (x - 3)^2$.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = 3\cdot(x - 3)\cdot 1 = 3(x - 3)$. $\qquad f''(x) = 3 > 0 \Rightarrow Mínimo$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x - 3) = 0; \ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$.

$f(3) = (3 - 3)^2 = 0$.

$\underline{Mínimo\ relativo: P(3, \ 0)}$.

$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \ + \infty)$ con $t = 3$ siendo $f^{'}(x) = 3(x - 3)$, son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f^{'}(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (0, \ 3)}.$$

$$\underline{Crecimiento: f^{'}(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (3, + \infty)}.$$

****

4º) Dada la función $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$ se pide que calcules los parámetros $a,\ b\ y\ c$ sabiendo que dos de los puntos de inflexión de esta función son $O(0,\ 0)\ y\ P(1,\ 7)$.

Por pasar por $O(0,\ 0)$ es $f(0) = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

La función resulta $f(x) = ax^5 + bx^3$.

Por pasar por $P(1,\ 7)$ es $f(1) = 7$:

$f(1) = 7 \Rightarrow a \cdot 1^5 + b \cdot 1^3 = 7;\ \ a + b = 7.$ (1)

Para que una función polinómica tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada en ese punto y sea distinta de cero la tercera derivada.

$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2.$ $\qquad f''(x) = 20ax^3 + 6bx.$

$f'''(x) = 60ax^2 + 6b.$

$Para\ O(0,\ 0) \Rightarrow f''(0) = 0\ f'''(0) \neq 0\ \} \Rightarrow b \neq 0.$

$f''(1) = 0 \Rightarrow 20a \cdot 1^3 + 6b \cdot 1 = 0;\ \ 10a + 3b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$a + b = 7\ 10a + 3b = 0\ \}\ \ -3a - 3b = -21\ 10a + 3b = 0\ \ \} \Rightarrow 7a = -21 \Rightarrow$

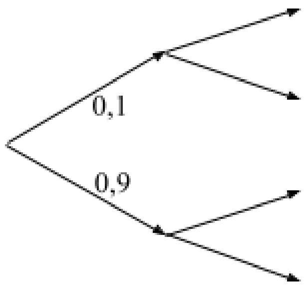
.

****

5º) El 10 % de los habitantes de una región padece cierta enfermedad. Para diagnosticar la misma, se dispone de un procedimiento que no es completamente fiable, ya que da positivo en el 97 % de los casos de personas con la enfermedad, pero también da positivo en el 1 % de personas que no padecen la enfermedad.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona obtenga un diagnóstico positivo?

b) Si una persona obtiene negativo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la enfermedad?



a)

$$P = P(Po) = P(E \cap Po) + P(\overline{E} \cap Po) =$$

$$= P(E) \cdot P(Po/E) + P(\overline{E}) \cdot P(Po/\overline{B}) = 0,1 \cdot 0,97 + 0,9 \cdot 0,01 = 0,097 + 0,009 =$$

$$= \underline{0,106}.$$

b)

$$P = P(E/Ne) = \frac{P(E \cap Ne)}{P(Ne)} = \frac{P(E) \cdot P(Ne/E)}{P(E) \cdot P(Ne/E) + P(\overline{E}) \cdot P(Ne/\overline{B})} = \frac{0,1 \cdot 0,03}{0,1 \cdot 0,03 + 0,9 \cdot 0,99} =$$

$$= \frac{0,003}{0,003+0,891} = \frac{0,003}{0,894} = \underline{0,0034}.$$

****

6º) Para hacer un estudio del uso de las nuevas tectologías (NT) por parte de los jóvenes de un centro escolar, se tomó una muestra aleatoria de 10 menores, siendo el número de horas semanales que hacían uso de las nuevas tecnologías: 4,2; 4,6; 5; 5,7; 5,8; 5,9; 6,1; 6,2; 6,5 y 7,3, respectivamente.

Sabiendo que la variable "número de horas diarias de uso de NT" sigue una distribución normal de desviación típica 2,1 horas, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza para el nº medio diario de horas que hacen uso de las NT los alumnos de dicho centro con un nivel de confianza del 97 %.

b) Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza.

c) ¿Crees que la media poblacional μ del número medio de horas es 4 con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta.

----

a)

$$\overline{x} = \frac{4,2+4,6+5+5,7+5,8+5,9+6,1+6,2+6,5+7,3}{10} = \frac{57,3}{10} = 5,73\ horas.$$

Para un nivel de confianza del 97 % es:

$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,17.$

$1 - 0,015 = 0,9850 \rightarrow z = 2,17).$

Datos: $n = 10;\ \overline{x} = 5,73;\ \sigma = 2,1;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(5,73 - 2,17\cdot\frac{2,1}{\sqrt{10}};\ 5,73 + 2,17\cdot\frac{2,1}{\sqrt{10}}\right);$

$(5,73 - 2,17\cdot 0,6641;\ 5,73 + 2,17\cdot 0,6641);\ (5,73 - 1,4410;\ 5,73 + 1,4410)$.

$$\underline{I.\ C._{97\ \%} = (4,2890;\ \ 7,1710).}$$

b)

Sabiendo que el error es $z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y que la desviación típica es un invariante de cada muestra el intervalo se disminuye disminuyendo el error para lo cual:

$\underline{El\ intervalo\ disminuye\ aumentando\ la\ muestro\ o\ el\ nivel\ de\ confianza.}$

$c)$

Sabemos que la media poblacional es $\mu = \overline{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para un nivel de confianza (probabilidad) del 90 % es:

$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$

$1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

Datos: $n = 10;\ \ \overline{x} = 5,73;\ \sigma = 2,1;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$

$\mu = \overline{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5,73 \pm 1,645 \cdot \frac{2,1}{\sqrt{10}} = 5,73 \pm 1,645 \cdot 0,6641 =$

$= 5,73 \pm 1,0924 \Rightarrow 4,6376 < \mu < 6,8224.$

$\underline{Como\ puede\ observarse,\ la\ media\ poblacional\ no\ puede\ ser\ \mu = 4}.$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices: $A = (-\ 1\ \ -\ 2\ 0\ 3\ 0\ 3\ ); B = (2\ 2\ \ -\ 5\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 3\ ); C = (4\ \ -\ 4\ 1\ )\ y\ D = (0\ \ -\ 1\ 3$
:

a) De los siguientes productos, explica razonadamente cuáles pueden realizarse y cuáles no: $A\cdot B$; $A\cdot C$; $A\cdot D\ y\ C\cdot D$.

b) De los productos anteriores, realiza correctamente aquéllos que den como resultado una matriz cuadrada.

----

a)

El producto de dos matrices cumple que: $M_{(a,\,b)}\cdot N_{(b,\,m)} = P_{(a,\,m)}$.

$A_{(2,\,3)}\cdot B_{(3,\,2)} = P_{(2,\,2)} \Rightarrow \underline{Es\ posible}$. $A_{(2,\,3)}\cdot C_{(3,\,1)} = P_{(2,\,1)} \Rightarrow \underline{Es\ posible}$.

$A_{(2,\,3)}\cdot D_{(1,\,3)} \Rightarrow \underline{No\ es\ posible}$. $C_{(3,\,1)}\cdot D_{(1,\,3)} = P_{(3,\,3)} \Rightarrow \underline{Es\ posible}$.

b)

Los únicos productos indicados en el apartado anterior que resultan matrices cuadradas son $A\cdot B\ y\ C\cdot D$.

$A\cdot B = (-\ 1\ \ -\ 2\ 0\ 3\ 0\ 3\ )\cdot(2\ 2\ \ -\ 5\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 3\ ) = \underline{(8\ \ -\ 2\ 3\ \ -\ 3\ )}$.

$C\cdot D = (4\ \ -\ 4\ 1\ )\cdot(0\ \ -\ 1\ 3\ ) = \underline{(0\ \ -\ 4\ 12\ 0\ 4\ \ -\ 12\ 0\ \ -\ 1\ 3\ )}$.

****

2º) Cierto concesionario de automóviles posee una nave industrial en la que guardan 100 automóviles dispuestos para su venta inmediata. Los coches guardados en la nave son de tres tipos: gasolina, diésel e híbridos. Los más numerosos son los coches diésel, y la diferencia entre los diésel y los de gasolina es igual a la mitad del número de híbridos. Los menos numerosos son los híbridos, y la diferencia entre los de gasolina y los híbridos es igual a la tercera parte de los diésel.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos coches hay de cada clase.

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

----

a)

Sean $x,\ y,\ z$ los coches de gasolina, diésel e híbridos que se guardan en la nave industrial, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y + z = 100 \qquad y - x = \frac{z}{2} \qquad x - z = \frac{y}{3} \} \ x + y + z = 100 \qquad 2y -$$

.

b)

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|A| = |1\ 1\ 1\ 2\ \ -2\ 1\ 3\ \ -1\ \ -3\,| = 6 - 2 + 3 + 6 + 1 + 6 = 20 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 3$$

.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius.

$$Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg \Rightarrow S.\ C.\ D.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|100\ 1\ 1\ 0\ -2\ 1\ 0\ -1\ -3\,|}{20} = \frac{100\cdot|-2\ 1\ -1\ -3\,|}{20} = 5\cdot(6 + 1) = 35.$$

$$y = \frac{|1\ 100\ 1\ 2\ 0\ 1\ 3\ 0\ -3\,|}{20} = \frac{-100\cdot|2\ 1\ 3\ -3\,|}{20} = -\ 5\cdot(-\ 6 - 3) = 45.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 100\ 2\ -2\ 0\ 3\ -1\ 0\,|}{20} = \frac{100\cdot|2\ -2\ 3\ -1\,|}{20} = 5\cdot(-\ 2 + 6) = 20.$$

$\underline{En\ la\ nave\ industrial\ hay\ 35\ coches\ de\ gasolina,\ 45\ diésel\ y\ 20\ híbridos.}$

****

3º) Se considera la función $f(x) = \{ \ x + t \quad si\, x < -1 \qquad 4 \quad si\ -1 \le x \le 1\ (x - 4)^2 - 5\ \ si\ \ x > 1$:

$a)$ Halla el valor de t para que f sea continua en $x = -1$.

$b)$ Para $t = 3$, representa gráficamente la función f.

$a)$

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = -1\, y\, x = 1$, cuya continuidad es dudosa; a continuación se estudia la continuidad pedida para $x = -1$.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\, x = -1 \Rightarrow \{ f(x) \ = (x + t) = \ t - 1 \ \ f(x) \ = 4 = \ 4 = f(-1) \ \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \ = f(x) \ = f(-1) \Rightarrow t - 1 = 4 \Rightarrow t = 5.$

$\underline{La\, función\, f(x)\, es\, continua\, en\, x = -1\, para\, t = 5}.$

$b)$

$(x - 4)^2 - 5 = x^2 - 8x + 16 - 5 = x^2 - 8x + 11.$

Para $t = 3$ la función es $f(x) = \{ \ x + 3 \quad si\ \ s < -1 \qquad 4 \quad si\ \ -1 \le x \le 1\, x^2 - 8x + 11\ \ si\ \ x > 1$.

Para la representación gráfica de la función tendremos en cuenta lo siguiente:

En el intervalo $(-\infty,\ -1)$ la función es una semirrecta de origen $B(-1,\ 2)$ que contiene al punto $A(-3,\ 0)$.

En el intervalo $[-1,\ 1]$ es el segmento de extremos $C(-1,\ 4)$ y $D(1,\ 4)$.

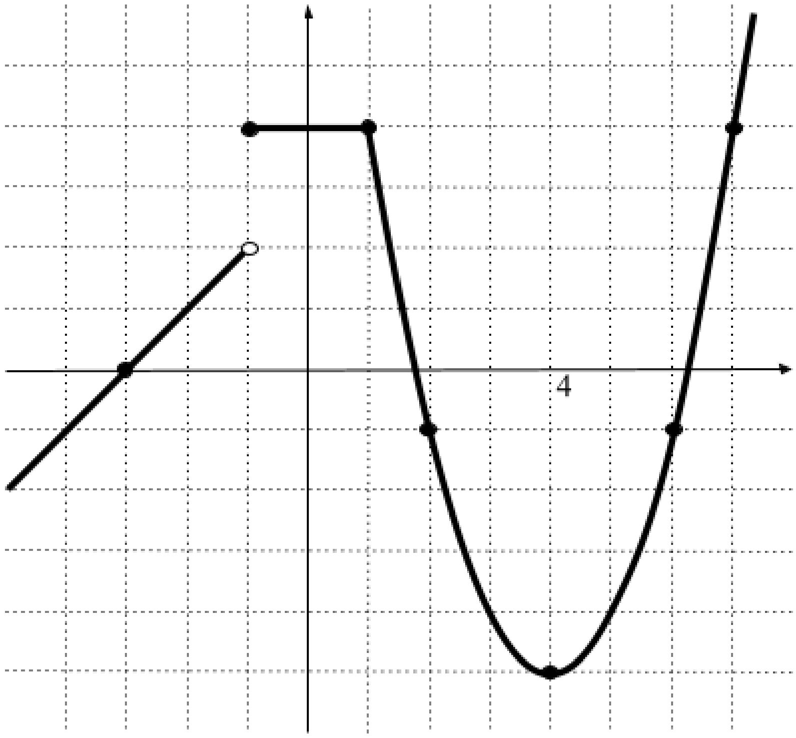
En el intervalo $(1,\ +\infty)$ la función es la parábola $f(x) = x^2 - 8x + 11$ cuyo vértice es el siguiente:

El vértice de la parábola es el siguiente:

$f'(x) = 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 4.$

$f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 11 = 16 - 32 + 11 = -5 \Rightarrow V(4,\ -5).$
Otros puntos de la parábola son $E(2,\ -1),\ F(6,\ -1)\ y\ G(7,\ 4).$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la figura adjunta.



****

4º) Un paciente está siendo sometido a un tratamiento experimental y para ello estudiamos entre las 0 y las 9 horas de un día su concentración en sangre de cierta proteína, en mg/litro. Esa concentración se ajusta a la función: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + 40$ donde $f(x)$ está en mg/litro y x en horas, con $0 \leq x \leq 9$.

a) Determina cuáles son los valores inicial $(x = 0)$ y final $(x = 9)$ de la concentración de esa proteína en la sangre del paciente.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la concentración.

c) Determina en qué horas se alcanzan los valores máximo y mínimo respectivamente de la concentración de la proteína, y qué valores son esos.

----

a)

$$f(0) = 40.$$

$$f(9) = \frac{1}{3} \cdot 9^3 - 4 \cdot 9^2 + 7 \cdot 9 + 40 = 243 - 324 + 63 + 40 = 22.$$

$$\underline{La\ concentración\ inicial\ de\ sangre\ en\ mg\ por\ litro\ es\ 40\ y\ la\ final\ 22.}$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = x^2 - 8x + 7.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0;\ \ x = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = 4 \pm 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 7.$$

Por ser $f(x)$ polinómica es continua en su dominio, por lo cual, las raíces de la primera derivada dividen su dominio en los intervalos $(0,\ 1)$, $(1,\ 7)\ y\ (7,\ 9)$, en los cuales los valores de la derivada son, alternativamente, positivos y negativos. Considerando, por ejemplo, el valor $x = 2 \in (1, 7)$ es:

$$f'(2) = 2^2 - 8 \cdot 2 + 7 = 4 - 16 + 7 = -5 < 0.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento\text{: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0,\ 1) \cup (7,\ 9)}.$$

$$\underline{Decrecimiento\text{: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (1,\ 7)}.$$

$c)$

Teniendo en cuenta la continuidad de la función y los periodos de crecimiento y decrecimiento se deduce el máximo y el mínimo de la función; no obstante, se deducen por la segunda derivada.

Es condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo que se anule su primera derivada; para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x) = 2x - 8.$$

$$V''(1) = 2 \cdot 1 - 8 = 2 - 8 = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 1.$$

$$\underline{Alcanza\ el\ valor\ máximo\ al\ final\ de\ la\ primera\ hora}.$$

$$f(1) = \frac{1}{3} - 4 + 7 + 40 = \frac{1}{3} + 43 = \frac{130}{3} \cong 43,33.$$

$$\underline{La\ concentración\ máxima\ es\ de\ 43,33\ mg\ por\ litro}.$$

$$f''(7) = 2 \cdot 7 - 8 = 14 - 8 = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 7.$$

$$f(7) = \frac{1}{3} \cdot 7^3 - 4 \cdot 7^2 + 7 \cdot 7 + 40 = \frac{343}{3} - 196 + 49 + 40 = \frac{343}{3} - 107 =$$

$$= \frac{22}{3} \cong 7,33.$$

$$\underline{La\ concentración\ mínima\ es\ de\ 7,33\ mg\ por\ litro}.$$

****

5º) En una clase de 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.

a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas).

b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Cuenca?

----

a)

Aplicando la regla de Laplace (con reemplazamiento):

$$P = \frac{27-14}{27} \cdot \frac{27-14}{27} = \frac{13}{27} \cdot \frac{13}{27} = \frac{169}{729} = \underline{0,2318}.$$

b)

Aplicando la regla de Laplace (sin reemplazamiento):

$$P = \frac{5}{27} \cdot \frac{4}{26} \cdot \frac{3}{25} \cdot \frac{2}{24} \cdot \frac{1}{23} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{23} = \frac{1}{80.730} = 0,000012386 =$$

$$= \underline{1,2386 \cdot 10^{-5}}.$$

****

6º) El tiempo de conexión a internet por semana de los alumnos de una universidad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 1$ hora. Se eligió una muestra aleatoria de 100 alumnos y se observó que la media de tiempo en internet para esa muestra era de 5 horas.

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de conexión a internet con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 4$ horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas.

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94,64 %?

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $n = 100;\ \overline{x} = 5;\ \sigma = 1;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(5 - 1,96 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}};\ 5 + 1,96 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}}\right);\ (5 - 1,96 \cdot 0,1;\ 5 + 1,96 \cdot 0,1);$

$(5 - 0,196;\ 5 + 0,196).$

$\underline{I.\ C._{95\ \%} = (4,804;\ \ 5,196).}$

b)

Sabemos que la media poblacional es $\mu = \overline{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$

$4,02 < \mu < 5,98.$

$\underline{Como\ puede\ observarse,\ la\ media\ poblacional\ no\ puede\ ser\ \mu = 4.}$

$\underline{La\ amplitud\ aumenta\ o\ disminuye\ de\ forma\ inversa\ con\ respecto\ a\ n}$

$$y$$

$$\underline{aumenta\ o\ disminuye\ de\ forma\ directa\ con\ respecto\ al\ nivel\ de\ confianza.}$$

$c)$

Para un nivel de confianza del 94,64 % es:

$1 - \alpha = 0,9464 \rightarrow \alpha = 1 - 0,9464 = 0,0536 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,0268} = 1,93.$

$1 - 0,0268 = 0,9732 \rightarrow z = 1,93).$

Datos: $n = 100$; $\sigma = 1$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,93.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,93 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}} = 1,93 \cdot 0,1 = 0,193$$

$$\underline{El\ error\ máximo\ admisible\ es\ E = 0,193}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones y desarrollar las preguntas de la misma. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que se puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Una empresa de asistencia ha de enviar enfermeros y médicos a una residencia de mayores para cubrir las vacaciones. Por limitación de espacio, sólo pueden acudir cada vez un máximo de 12 profesionales. Además, en cada visita cada enfermero acumula 2 descansos y cada médico acumula 4 descansos. La empresa sólo dispone de 8 médicos y no le interesa generar más de 36 descansos en cada asistencia. Si la empresa obtiene un beneficio neto de 50 euros por cada enfermero y de 80 euros por cada médico que va a la residencia, calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántos enfermeros y médicos han de acudir cada vez a la residencia para obtener el máximo beneficio neto por parte de la empresa de asistencia. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

Sean x e y los enfermeros y médicos que utiliza la empresa, respectivamente.

El sistema de inecuaciones que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y \leq 12 \quad x \geq; \ y \leq 8 \ 2x + 4y \leq 36 \} \quad x + y \leq 12 \ \ x \geq; \ y \leq 8 \ x + 2y \leq 18 \}.$$

La función de objetivos es: $f(x, y) = 50x + 80y$.

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

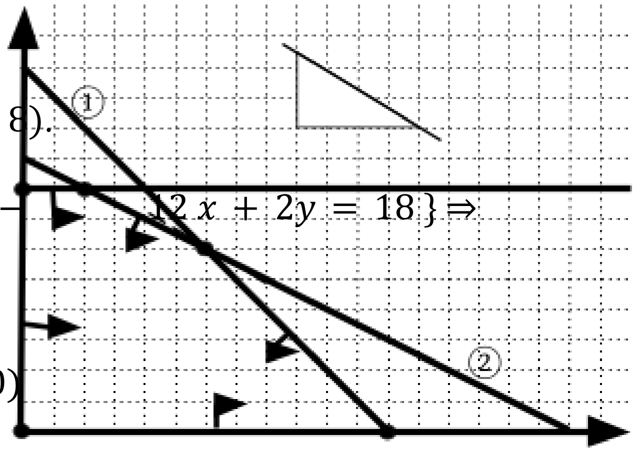
x	12	0
y	0	12

① $\Rightarrow x + y \leq 12 \Rightarrow y \leq 12 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si$.

x	18	0
y	0	9

②$\Rightarrow x + 2y \leq 18 \Rightarrow y \leq \frac{18-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 8 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 8).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 8 \\ x + 2y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow B(2,\ 8).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ x + 2y = 18 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -x - y = -12 \\ x + 2y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 6;\ \ x = 6 \Rightarrow C(6,\ 6).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x + y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow D(12,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 8) = 50 \cdot 0 + 80 \cdot 8 = 0 + 640 = 640.$

$B \Rightarrow f(2,\ 8) = 50 \cdot 2 + 80 \cdot 8 = 100 + 640 = 740.$

$C \Rightarrow f(6,\ 6) = 50 \cdot 6 + 80 \cdot 6 = 300 + 480 = 780.$

$D \Rightarrow f(12,\ 0) = 50 \cdot 12 + 80 \cdot 0 = 600 + 0 = 600.$

El máximo se produce en el punto $C(6,\ 6)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 50x + 80y = 0 \Rightarrow y = -\frac{50}{80}x = -\frac{5}{8}x \Rightarrow m = -\frac{2,5}{4}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ obtiene\ con\ 6\ enfermeros\ y\ 6\ médicos.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 780\ euros.}$

****

2º) Se considera la función $f(x) = \{x^3 + ax + 10\ si\ 0 \le x \le 5\ \ \frac{100}{x-3} + bx^2\ si\ x > 5$, donde $a\, y\, b$ son parámetros.

a) Determina los valores de $a\, y\, b$ para que $f(x)$ sea continua y tenga un mínimo relativo en $x = 2$.

b) Para $a = 0$, halla el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0, 5]$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es $D(f) \Rightarrow [0, \infty)$, excepto para $x = 5$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\, y\, b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\, x = 5 \Rightarrow \{f(x) = \left(x^3 + ax + 10\right) = 135 + 5a = f(5)\ f(x) = \left(\frac{100}{x-3} + bx^2\right) = 5$

$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(5) \Rightarrow 135 + 5a = 50 + 25b;\ 5a - 25b = -85;$

$a - 5b = -17.$ (*)

Para $x = 2$ la función es $f(x) = x^3 + ax + 10$.

Para que una función tenga un mínimo relativo en un punto son condiciones necesarias que se anule su primera derivada y que sea positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(x) = 3x^2 + a.$ $f''(x) = 6x;\ f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow Mínimo.$

$f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -12}.$

Sustituyendo el valor de a obtenido en la expresión (*):

$-12 - 5b = -17;\ 12 + 5b = 17;\ 5b = 5 \Rightarrow \underline{b = 1}.$

b)

Para $a = 0$ y en el intervalo $[0, 5]$ la función es $f(x) = x^3 + 10$.

En el intervalo considerado $[0, 5]$, todas las ordenadas de $f(x)$ son positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^5 f(x) \cdot dx = \int_0^5 \left(x^3 + 10\right) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} + 10x\right]_0^5 = \left(\frac{5^4}{4} + 10 \cdot 5\right) - 0 =$$

$$= \frac{625}{4} + 50 = \frac{625+200}{4} = \frac{825}{4} = 206,25.$$

$$\underline{S = 206,25\, u^2}.$$

****

3º) Se sabe que el salario mensual de los trabajadores de dos empresas A y B sigue la distribución normal.

a) Si en la empresa A el salario mensual medio es de 1.200 euros y su desviación típica es 400 euros, ¿cuál es la probabilidad de que un trabajador cobre más de 1.740 euros al mes?

b) Si en la empresa B el 80,23 % de los trabajadores cobra menos de 1.570 euros, calcula la desviación típica del salario mensual sabiendo que el salario medio mensual es de 1.400 euros.

----

a)

$Datos$: $\mu = 1.200;\ n = 1;\ \sigma = 400.$

Tipificando la variable:

$$X \rightarrow N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(1.200;\ \frac{400}{\sqrt{1}}\right) = N(1.200;\ 400).$$

$$P = P(Z > 1.749) = P\left(Z > \frac{1.740-1.200}{400}\right) = P\left(Z > \frac{540}{400}\right) = P(Z > 1,35) =$$

$$= \underline{0,9115 = 91,15\ \%}.$$

b)

$Datos$: $\mu = 1.400;\ n = 1;\ p = 0,8023.$

$$X \rightarrow N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(1.400;\ \frac{\sigma}{\sqrt{1}}\right) = N(1.400;\ \sigma) = 0,8023.$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{1.570-1.400}{\sigma} = 0,8023 \Rightarrow \sigma = \frac{170}{0,8023} = 211,9.$

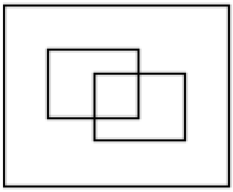
$$\underline{\sigma = 211,9}.$$

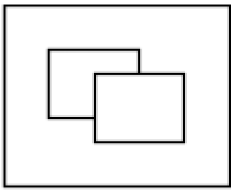
****

4º) Se sabe que si ha ocurrido A, la probabilidad de que ocurra B es 0,3. Halla la probabilidad de que, si ha ocurrido A no ocurra B.

$Datos: P(B/A) = 0,3.$

$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = 0,3.$





$P = P(\overline{B}/A) = \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)} = \frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)} =$

$= 1 - \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = 1 - 0,3 = 0,7.$

$$\underline{P = P(\overline{B}/A) = 0,7}.$$

****

OPCIÓN B

1º) En un hotel se alojaron ayer 25 huéspedes procedentes de tres países, Italia, Portugal y Japón. Su gasto total en el hotel fue de 3.610 euros, correspondiendo 140 euros a cada huésped italiano, 130 euros a cada portugués y 160 euros a cada japonés. El registro del hotel muestra que el número de portugueses fue la cuarta parte de la suma de los números de huéspedes de los otros dos países. Determina el número de huéspedes de cada uno de los 3 países.

Sean x, y, z los huéspedes procedentes de Italia, Portugal y Japón, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y + z = 25\ 140x + 130y + 160z = 3.610 \quad y$$

.

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$|A| = |1\ 1\ 1\ 14\ 13\ 16\ 1\ -4\ 1| = 13 - 56 + 16 - 13 + 64 - 14 = 80 - 70 =$

$= 10 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 3.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius.

$Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg \Rightarrow S.\ C.\ D.$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|25\ 1\ 1\ 361\ 13\ 16\ 0\ -4\ 1|}{10} = \frac{325-1.444+1.600-361}{10} = \frac{1.925-1.805}{10} = \frac{120}{10} = 12.$$

$$y = \frac{|1\ 25\ 1\ 14\ 361\ 16\ 1\ 0\ 1|}{10} = \frac{361+400-361-350}{10} = \frac{400-350}{10} = \frac{50}{10} = 5.$$

$$z = \frac{|1\ 1\ 25\ 14\ 13\ 361\ 1\ -4\ 0|}{10} = \frac{-1.400+361-325+1.444}{10} = \frac{1.805-1.725}{10} = \frac{80}{10} = 8.$$

$\underline{En\ el\ hotel\ se\ alojaron\ 12\ italianos,\ 5\ portugueses\ y\ 8\ japoneses.}$

****

2º) Una empresa de aguas realiza un estudio de mercado y descubre que la curva de beneficios mensuales viene dada, en miles de euros, por la siguiente función: $B(x) = 10x - x^2 - 21$, donde x representa, en euros, el precio de venta de una caja de botellas. Si este producto se vende en cajas de 10 botellas, calcula el precio de venta de una botella para que el beneficio obtenido sea máximo y calcula el importe de ese beneficio.

La función $B(x) = -x^2 + 10x - 21$ es una parábola cóncava ($\cap$) cuyo vértice (máximo) es el siguiente:

$B'(x) = -2x + 10.$ $\qquad B''(x) = -2 < 0 \Rightarrow Justificación\ de\ máximo.$

$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10 = 0;\ \ -x + 5 = 0 \Rightarrow x = 5.$

El precio que produce el beneficio máximo es de 5 euros la caja de 10 botellas.

$$\underline{El\ beneficio\ obtenido\ es\ máximo\ cuando\ se\ vende\ la\ botella\ a\ 0,5\ euros.}$$

$B(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 - 21 = -25 + 50 - 21 = 4.$

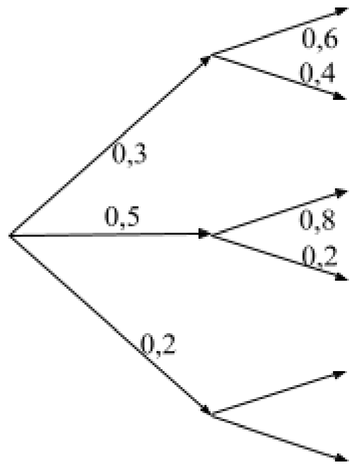
$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 4.000\ euros.}$$

****

3º) Una corporación informática utiliza 3 bufetes de abogados para resolver sus casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30 % de los casos legales y gana en los tribunales el 60 % de los casos presentados, el bufete B recibe el 50 % de los casos legales y gana el 80 % de los casos presentados, mientras que el bufete C recibe el 20 % de los casos legales y gana el 70 % de los casos presentados. Se elige al azar uno de los casos presentados en los tribunales:

a) Determina la probabilidad de que la empresa gane el caso.

b) Si el caso elegido se ha ganado, calcula la probabilidad de que haya sido encargado al bufete A.



a)

$$P = P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G) + P(C \cap G) =$$

$$= P(A) \cdot P(G/A) + P(B) \cdot P(G/B) + P(C) \cdot P(G/C) =$$

$$= 0,3 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,18 + 0,40 + 0,14 = \underline{0,57}.$$

b)

$$P = P(A/G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{P(A) \cdot P(G/A)}{P(A) \cdot P(G/A) + P(B) \cdot P(G/B) + P(C) \cdot P(G/C)} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,6}{0,3 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,7} = \frac{0,18}{0,18 + 0,40 + 0,14} = \frac{0,18}{0,57} = \underline{0,3158}.$$

****

4º) En una clase de yoga hay 7 mujeres y 12 hombres. Si se escoge a tres personas al azar, halla la probabilidad de que se seleccionen dos mujeres y un hombre.

$$P = P(MMH) + P(MHM) + P(HMM) =$$

$$= \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} \cdot \frac{12}{17} + \frac{7}{19} \cdot \frac{12}{18} \cdot \frac{6}{17} + \frac{12}{19} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{6}{17} = 3 \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} \cdot \frac{12}{17} = \frac{7}{19} \cdot \frac{12}{17} = \frac{84}{323} = \underline{0,2601}$$

.

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones y desarrollar las preguntas de la misma. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que se puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Los trabajadores de un taller artesano elaboran collares y pulseras de bisutería. En la elaboración de un collar se tardan 2 horas, mientras que se emplea 1 hora en la elaboración de una pulsera. Los materiales de los que disponen les permiten fabricar como mucho 50 piezas (entre collares y pulseras) y el tiempo dedicado a su elaboración no puede exceder de 80 horas. Sabiendo que obtienen un beneficio de 5 euros por la venta de un collar y de 4 euros por la venta de una pulsera, utiliza técnicas de programación lineal para calcular el número de collares y pulseras que tienen que elaborar para que su beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Sean $x \, e \, y$ el número de collares y pulseras que se elaboran en el taller artesano, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $x + y \leq 50 \;\; 2x + y \leq 80 \; x \geq 0; \; y \geq 0 \}$.

x	0	50
y	50	0

$①\Rightarrow x + y \leq 50 \Rightarrow y \leq 50 - x \Rightarrow O(0,\, 0) \rightarrow Si.$

x	0	40
y	80	0

$②\Rightarrow 2x + y \leq 80 \Rightarrow y \geq 80 - 2x \Rightarrow O(0,\, 0) \rightarrow Si.$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\, y) = 5x + 4y$.

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

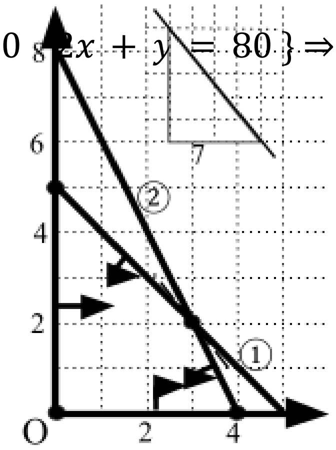
Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + y = 50 \end{cases} \Rightarrow A(0,\ 50).$

$B \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ 2x + y = 80 \end{cases} \quad \begin{cases} -x - y = -50 \\ 2x + y = 80 \end{cases} \Rightarrow$

$x = 30;\, y = 20 \Rightarrow B(30,\ 20).$

$C \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x + y = 80 \end{cases} \Rightarrow C(40,\ 0).$



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 50) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 50 = 0 + 160 = 200.$

$B \Rightarrow f(30,\ 20) = 5 \cdot 30 + 4 \cdot 20 = 150 + 80 = 230.$

$C \Rightarrow f(40,\ 0) = 5 \cdot 40 + 4 \cdot 0 = 200 + 0 = 200.$

El máximo se produce en el punto $B(30,\ 20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 5x + 4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{4}x \Rightarrow m = -\frac{5}{4}.$

$\underline{El\ benefico\ es\ máximo\ elaborando\ 30\ collares\ y\ 20\ pulseras}.$

$\underline{Los\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 230\ euros}.$

****

2º) Se considera la función $f(x) = \{4 - x \ si \ x < 4 \, x^2 - 16 \ si \, x \geq 4$.

$a)$ Estudia razonadamente la continuidad de $f(x)$.

$b)$ Analizar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

$a)$

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 4$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para \, x = 4 \Rightarrow \{ f(x) \ = (4 - x) = 0 \ f(x) \ = \left(x^2 - 16\right) = \ 0 = f(4) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \ = f(x) \ = f(4).$$

$\underline{La \, función \, f(x) \, es \, continua \, en \, su \, dominio, \ que \, es \, R}.$

$b)$

La función $f(x)$ en el intervalo $(- \infty, \, 4)$ es $f(x) = 4 - x$, que es una recta de pendiente negativa, por lo cual es monótona decreciente en este intervalo.

En el intervalo $[4, \ + \infty)$ la función es $f(x) = x^2 - 16$, que es una parábola convexa $(\cup)$ cuyo vértice (mínimo) es el siguiente:

$$f'(x) = \ 2x. \qquad f''(x) = \ 2 \ > \ 0 \Rightarrow Justificación \, de \, mínimo.$$

$$f'(x) = \ 0 \Rightarrow 2x \ = \ 0 \Rightarrow x \ = \ 0 \Rightarrow V(0, \ - \ 16).$$

Aunque $V(0, \ - 16) \notin [4, \ + \infty)$ indica que la función es monótona creciente en el intervalo.

$\underline{Decrecimiento: f'(x) < \ 0 \Rightarrow x \epsilon (- \ \infty, \ 4)}.$

$\underline{Crecimiento: f'(x) \ > \ 0 \Rightarrow x \epsilon (4, + \ \infty)}.$

****

3º) Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1.480 euros. El sueldo de un trabajadora es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 euros.

a) Halla el intervalo de confianza del 90 % para el sueldo medio de un trabajador.

b) Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador ser de 10 euros, con un confianza del 99 %, halla el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir.

----

a)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha=0,90\rightarrow\alpha=1-0,90=0,10\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0,05}=1,645.$

$1-0,05=0,9500\rightarrow z=1,645).$

Datos: $n=625;\ \overline{x}=1.480;\ \sigma=250;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1,645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(1.480-1,645\cdot\frac{250}{\sqrt{625}};\ 1.480+1,645\cdot\frac{250}{\sqrt{625}}\right);$

$(1.480-1,645\cdot10;\ 1.480+1,645\cdot10);\ (1.480-16,45;\ 1.480+16,45).$

$$\underline{I.\ C._{90\ \%}=(1.463,55;\ 1.496,45).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0,99\rightarrow\alpha=1-0,99=0,01\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0,005}=2,575.$

$1-0,005=0,9950\rightarrow z=2,575).$

Datos: $\sigma=250;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=2,575;\ E=10.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\ \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2,575\cdot\frac{250}{10}\right)^2=$

$=(2,575\cdot25)^2=64,375^2=4.144,14.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 4.145\ trabajadores}.$

****

4º) El 40 % de los internautas utiliza Dropbox o Google Drive para almacenar archivos en la nube. Sabiendo que el 25 % emplea Dropbox y el 20 % emplea Google Drive, ¿qué porcentaje de internautas emplea ambos?

$Datos: P(D \cup GD) = 0,4; \ \ P(D) = 0,25; \ \ P(GD) = 0,2.$

$P(D \cup GD) = P(D) + P(GD) - P(D \cap GD) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(D \cap GD) = P(D) + P(GD) - P(D \cup GD) = 0,4 + 0,25 - 0,2 = 0,45.$

$\underline{Emplean\ ambos\ sistemas\ el\ 45\ \%\ de\ los\ internautas}.$

****

OPCIÓN B

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\{x + 3y + z = 1 \quad 3x + y + (a - 1)z = 3\, x + y + z = 4$, en función del parámetro a:

a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

b) Resuelve el sistema para $a = 3$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\ 3\ 1\ 3\ 1\ a - 1\ 1\ 1\ 1\ )$ y $M' = (1\ 3\ 1\ 3\ 1\ a - 1\ 1\ 1\ 1 \quad 1\ 3\ 4\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1\ 3\ 1\ 3\ 1\ a - 1\ 1\ 1\ 1\ | = 1 + 3 + 3(a - 1) - 1 - 9 - (a - 1) = 0;$

$3a - 3 - 6 - a + 1 = 0;\ \ 2a - 8 = 0;\ \ a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4.$

$\underline{Para\ a \neq 4 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 4 \Rightarrow M' = (1\ 3\ 1\ 3\ 1\ 3\ 1\ 1\ 1 \quad 1\ 3\ 4\ ) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 3\ 1\ 3\ 1\ 3\ 1\ 1\ 4\ | = 4 + 3 + 9 - 1 - 3 - 36 = - 28 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{Para\ a = 4 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

b)

Se resuelve para $a = 3$ por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|1\ 3\ 1\ 3\ 1\ 2\ 4\ 1\ 1\ |}{2 \cdot 3 - 8} = \frac{1+3+24-4-2-9}{-2} = \frac{28-15}{-2} = \frac{13}{-2} = - \frac{13}{2}.$$

$$y = \frac{|1\ 1\ 1\ 3\ 3\ 2\ 1\ 4\ 1\ |}{-2} = \frac{3+12+2-3-8-3}{-2} = \frac{17-14}{-2} = \frac{3}{-2} = - \frac{3}{2}.$$

$$z = \frac{|1\ 3\ 1\ 3\ 1\ 3\ 1\ 1\ 4\ |}{-2} = \frac{4+3+9-1-3-36}{-2} = \frac{16-40}{-2} = \frac{-24}{-2} = 12.$$

$$\underline{Solución: x = - \frac{13}{2},\ \ y = - \frac{3}{2},\ \ z = 12.}$$

****

2º) Se espera que en los próximos diez años, los beneficios (en millones de euros) de una empresa, vengan dados por la función $P(t) = t^2 - 10t + 16$, donde $t \in (0,\ 10]$ es el tiempo transcurrido en años desde el momento inicial.

a) Determina en qué momento del tiempo los beneficios serán de 16 millones de euros.

b) Determina en qué momento los beneficios serán mínimos.

----

a)

$$P(t) = 16 \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 16;\ \ t(t - 10) = 0 \Rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 10.$$

$$\underline{Los\ beneficios\ son\ de\ 16\ millones\ de\ euros\ al\ comienzo\ y\ a\ los\ 10\ años.}$$

b)

La función $P(t) = t^2 - 10t + 16$ es una parábola convexa ($\cup$) cuyo mínimo es el siguiente:

$$P'(t) = 2t - 10. \qquad\qquad P''(t) = 2 < 0 \Rightarrow Justificación\ de\ mínimo.$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow 2t - 10 = 0;\ \ t - 5 = 0 \Rightarrow t = 5.$$

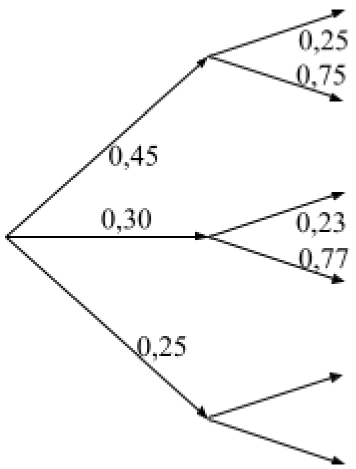
$$\underline{Los\ beneficios\ serán\ mínimos\ a\ los\ 5\ años\ del\ comienzo.}$$

****

3º) Una cadena de supermercados envasa tres variedades de queso en paquetes al vacío, en las proporciones que se indican: curado (45 %), semicurado (30 %) y tierno (25 %). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 25 % del queso curado, el 23 % del semicurado y el 20 % del tierno. Se elige al azar un paquete de queso:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de importación?

b) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado?



a)

$$P = P(\overline{I}) = P(C \cap \overline{I}) + P(S \cap \overline{I}) + P(T \cap \overline{I}) =$$

$$= P(C) \cdot P(\overline{I}/C) + P(S) \cdot P(\overline{I}/S) + P(T) \cdot P(\overline{I}/T) =$$

$$= 0,45 \cdot 0,75 + 0,30 \cdot 0,77 + 0,25 \cdot 0,80 = 0,3375 + 0,2310 + 0,2000 = \underline{0,7685}$$

.

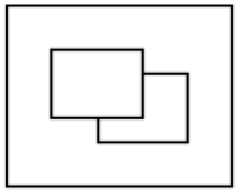
c)

$$P = P(C/I) = \frac{P(C \cap I)}{P(I)} = \frac{P(C) \cdot P(I/C)}{1 - P(\overline{I})} = \frac{0,45 \cdot 0,25}{1 - 0,7685} = \frac{0,1125}{0,2315} = \underline{0,4860}.$$

****

4º) La probabilidad de que un alumno de Matemáticas apruebe un examen tipo test es del 80 %, mientras que la probabilidad de que apruebe un examen de problemas es del 60 %. Si la probabilidad de aprobar los dos exámenes es del 50 %, calcula la probabilidad de que no apruebe ninguno de los dos exámenes.

$Datos$: $P(M) = 0,8;\ \ P(Pr) = 0,6;\ \ P(M \cap Pr) = 0,5.$



$P(M \cup Pr) = P(M) + P(Pr) - P(M \cap Pr) =$

$= 0,8 + 0,6 - 0,5 = 1,4 - 0,5 = 0,9.$

$P(\overline{M} \cap \overline{Pr}) = 1 - P(M \cup Pr) = 1 - 0,9 = \underline{0,1}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere las matrices de la forma $M = (2\ a\ \ -\ a\ 0\ )$, donde a es un número real.

a) Determine el valor de a de manera que $M^2 = (3\ 2a\ \ -\ 2a\ \ -\ 1\ )$.

b) Determine el valor de a de manera que $M^{-1} = (0\ 1\ \ -\ 1\ 2\ )$, siendo M^{-1} la matriz inversa de M. Es decir, $M \cdot M^{-1} = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

----

a)

$$M^2 = M \cdot M = (2\ a\ \ -\ a\ 0\ ) \cdot (2\ a\ \ -\ a\ 0\ ) = \left(4 - a^2\ 2a\ \ -\ 2a\ \ -a^2\right).$$

$$M^2 = (3\ 2a\ \ -\ 2a\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow \left(4 - a^2\ 2a\ \ -\ 2a\ \ -a^2\right) = (3\ 2a\ \ -\ 2a\ \ -\ 1\ ) \Rightarrow 4 -$$

$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a_1 = -\ 1,\ a_2 = 1.$

$$\underline{M^2 = (3\ 2a\ \ -\ 2a\ \ -\ 1\ )\ para\ a = -\ 1\ y\ para\ a = 1}.$$

b)

$M \cdot M^{-1} = I \Rightarrow (2\ a\ \ -\ a\ 0\ ) \cdot (0\ 1\ \ -\ 1\ 2\ ) = I;\ (-\ a\ 2\ +\ 2a\ 0\ \ -\ a\ ) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -\ 1.$

$$\underline{M^{-1} = (0\ 1\ \ -\ 1\ 2\ )\ para\ a = -\ 1}.$$

****

2º) Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{x-a}$, donde a es un parámetro real.

$a)$ Busque para qué valores del parámetro a la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 1$ es paralela a la recta $y + 3x + 5 = 0$.

$b)$ Para el valor del parámetro $a = 1$, encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos donde alcanza los máximos y mínimos relativos de la función f.

$a)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

La pendiente de la recta $y + 3x + 5 = 0$ es $y =- 3x - 5 \Rightarrow m =- 3$.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x-a)-x^2\cdot 1}{(x-a)^2} = \frac{2x^2-2ax-x^2}{(x-a)^2} = \frac{x^2-2ax}{(x-a)^2}.$$

$$m = f'(1) =- 3 \Rightarrow \frac{1^2-2a\cdot 1}{(1-a)^2} = \frac{1-2a}{(1-a)^2} =- 3;\ \ 1 - 2a =- 3\left(1 - 2a + a^2\right);$$

$$1 - 2a =- 3 + 6a - 3a^2;\ \ 3a^2 - 8a + 4 = 0;\ \ a = \frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2\cdot 3} = \frac{8\pm\sqrt{16}}{6} = \frac{8\pm 4}{6} =$$

$$= \frac{4\pm 2}{3} \Rightarrow \underline{a_1 = \frac{2}{3}}\ y\ \underline{a_2 = 2}.$$

$b)$

Para $a = 1$ la función resulta: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Como quiera que el denominador de la primera derivada es siempre positivo en el dominio de la función, que $D(f) \Rightarrow R - \{1\}$, la derivada será positiva o negativa cuando lo sea el numerador $x(x - 2)$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0;\ \ x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

Teniendo en cuenta que $f(x) =- \infty\ y\ f(x) =+ \infty$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (0, 1) \cup (1, 2)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2 - x(x-2)\cdot[2(x-1)\cdot 1]}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)\cdot(x-1) - 2x(x-2)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{2}{(0-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Máximo: O(0, 0)}.$$

$$f''(2) = \frac{2}{(2-1)^3} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4 \Rightarrow \underline{Mínimo: A(2, 4)}.$$

****

3º) Pol quedó ayer con unos amigos en un bar y tomaron 4 refrescos, 3 bocadillos y 5 bolas de helado. Todo ello les costó 19,50 euros. Días atrás, había ido al mismo bar con su primo Martín, y por 2 refrescos, 1 bocadillo y 2 bolas de helado habían pagado 8,10 euros. En este bar todos los refrescos valen lo mismo, todos los bocadillos tienen el mismo precio y las bolas de helados se venden también a precio único.

a) Hoy Pol ha vuelto con otros amigos y han tomado 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 bolas de helado. Explique razonadamente cuánto han pagado en total.

b) Si 1 refresco, 1 bocadillo y 1 bola de helado cuestan 5,10 euros, ¿cuánto vale el refresco, el bocadillo y la bola de helado separadamente?

----

a)

Sean $x,\ y,\ z$ lo que cuesta un refresco, un bocadillo y una bola de helado, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y + 5z = 19,50 \\ 2x + y + 2z = 8,10 \\ 6x + 5y + 8z = N \end{array}\right\}.$$

El rango de la matriz A de coeficientes es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 50 + 36 - 30 - 40 - 48 = 0 \Rightarrow Rang\ A = 3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, para que el sistema sea compatible es necesario que las matrices de coeficientes y ampliada tienen que ser iguales, por lo cual, $Rang\ A' = 2$.

Procediendo por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 19,5 \\ 2 & 1 & 2 & 8,1 \\ 6 & 5 & 8 & N \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_1 \leftrightarrow F_2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 8,1 \\ 4 & 3 & 5 & 19,5 \\ 6 & 5 & 8 & N \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2 \right.$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 8,1 \\ 0 & 1 & 1 & 3,3 \\ 0 & 2 & 2 & N - 24,3 \end{array}\right) \Rightarrow N - 24,3 = 2 \cdot 3,3 = 6,6;\ \ N = 30,9$$

.

<u>$Han\ pagado\ en\ total\ 30,9\ euros.$</u>

b)

El nuevo sistema de ecuaciones que resulta es:

$4x + 3y + 5z = 19,50 \quad 2x + y + 2z = 8,10 \quad x + y + z = 5,10\}$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|19,5\ 3\ 5\ 8,1\ 1\ 2\ 5,1\ 1\ 1\ |}{|4\ 3\ 5\ 2\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ |} = \frac{\frac{1}{10}\cdot|195\ 3\ 5\ 81\ 1\ 2\ 51\ 1\ 1\ |}{4+10+6-5-8-6} = \frac{\frac{1}{10}\cdot(195+306+405-255-390-243)}{1} =$$

$$= \frac{906-888}{10} = \frac{18}{10} = 1,8.$$

$$y = |4\ 19,5\ 5\ 2\ 8,1\ 2\ 1\ 5,1\ 1\ | = \frac{1}{10}\cdot|4\ 195\ 5\ 2\ 81\ 2\ 1\ 51\ 1\ | = \frac{324+510+390-405-408-390}{10}$$

$$= \frac{834-813}{10} = \frac{21}{10} = 2,1.$$

$$z = |4\ 3\ 19,5\ 2\ 1\ 8,1\ 1\ 1\ 5,1\ | = \frac{1}{10}\cdot|4\ 3\ 195\ 2\ 1\ 81\ 1\ 1\ 51\ | = \frac{204+390+243-195-324-306}{10}$$

$$= \frac{837-825}{10} = \frac{12}{10} = 1,2.$$

$\underline{Un\ refresco\ vale\ 1,8\ euros,\ un\ bocadillo\ 2,1\ euros\ y\ una\ bola\ 1,2\ euros.}$

****

4º) Una empresa de materiales para coches fabrica dos modelos de una pieza determinada, que llamaremos A y B. Cada modelo se fabrica en una hora, mediante un proceso que consta de dos fases. En la primera fase del proceso se destinan 5 trabajadores, y en la segunda, 12. Para fabricar cada modelo, en la primera fase se necesita 1 trabajador para cada pieza, en cambio, en la segunda fase se necesitan 2 trabajadores para el modelo A y 3 trabajadores para el modelo B. El beneficio que se obtiene es de 40 euros por el modelo A y 50 euros para el modelo B.

a) Determine la función objetivo y las restricciones, y dibuje la región factible.

b) ¿Cuántas piezas de cada modelo por hora se deberán fabricar para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es este beneficio máximo?

----

a)

Sean $x\, e\, y$ el número de piezas de los modelos A y B que se fabrican, respectivamente.

$\underline{La\ función\ de\ objetivos\ es\ f(x,\ y) = 40x + 50y.}$

Las restricciones son las siguientes: $x + y \leq 5\ 2x + 3y \leq 12\ \ x \geq 0;\ y \geq 0\ \}.$

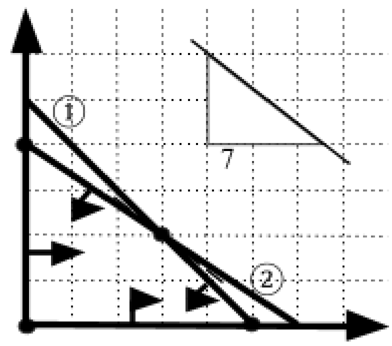
x	0	5
y	5	0

$①\Rightarrow x + y \leq 5 \Rightarrow y \leq 5 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	6
y	4	0

$②\Rightarrow 2x + 3y \leq 12 \Rightarrow y \geq \frac{12-2x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad x = 0\ 2x + 3y = 12\ \} \Rightarrow A(0,\ 4).$

$B \Rightarrow \quad x + y = 5\ 2x + 3y = 12\ \}\ \ - 2x - 2y =- 10\ 2x + 3y = 12\ \} \Rightarrow y = 2$

.

$C \Rightarrow \quad y = 0\ x + y = 5\ \} \Rightarrow C(5,\ 0).$

b)

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 4) = 40 \cdot 0 + 50 \cdot 4 = 0 + 200 = 200.$

$B \Rightarrow f(3,\ 2) = 40 \cdot 3 + 50 \cdot 2 = 120 + 100 = 220.$

$C \Rightarrow f(5,\ 0) = 40 \cdot 5 + 50 \cdot 0 = 200 + 0 = 200.$

El mínimo se produce en el punto $B(3,\ 2)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 40x + 50y = 0 \Rightarrow y = -\frac{40}{50}x = -\frac{4}{5}x = -\frac{2}{2{,}5}x \Rightarrow m = -\frac{2}{2{,}5}.$$

$\underline{Beneficio\ máximo: fabricando\ por\ hora\ 3\ piezas\ tipo\ A\ y\ 2\ tip0\ B}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ por\ hora\ es\ de\ 220\ euros}.$

****

5º) Una compañía de móviles presentó hace un año un teléfono inteligente al precio de 750 euros. Recientemente, un estudio de mercado ha llegado a la conclusión de que, con este precio, compran el teléfono 2.000 clientes al mes, y que la relación entre estas dos variables es lineal, de manera que por cada 10 euros que se incrementa el precio del móvil, lo compran 100 clientes menos, y al revés: por cada 10 euros de descuento sobre el precio inicial de 750 euros la compran 100 clientes más.

a) Deducir que la función que determina los ingresos mensuales de la compañía según el precio es $I(p) =- 10p^2 + 9.500p$.

b) Hallar cuál debe ser el precio del móvil para obtener ingresos, el precio del móvil que produce los ingresos máximos y el valor de estos ingresos máximos.

----

a)

Sean $10x$ los euros que sube o baja el precio de los teléfonos

El precio por unidad es $p = 750 + 10x \Rightarrow x = \frac{p-750}{10}$.

El número de compradores es de $N = 2.000 - 100x$.

$Ingresos = Número\ unidades \times precio\ unitario \Rightarrow$

$\Rightarrow I(p) = \left(2.000 - 100 \cdot \frac{p-750}{10}\right) \cdot p = [2.000 - 10 \cdot (p - 750)] \cdot p =$

$= (2.000 - 10p + 7.500) \cdot p = (- 10p + 9.500) \cdot p.$

$\underline{En\ efecto: la\ función\ ingresos\ es\ I(p) =- 10p^2 + 9.500p}.$

b)

Los ingresos serán máximos cuando se anule su primera derivada:

$I'(p) =- 20p + 9.500 = 0;\ 2p = 950 \Rightarrow p = 475.$

$\underline{Para\ obtener\ el\ máximo\ beneficio\ hay\ que\ vender\ los\ móviles\ a\ 475\ euros.}$

$I(475) =- 10 \cdot 475^2 + 9.500 \cdot 475 = 4.750 \cdot (- 475 + 950) =$

$= 4.750 \cdot 475 = 2.256.250.$

$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ 2.256.250\ euros}.$

****

6º) El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función $P(t) = \frac{5+t^2}{(t+1)^2}$, donde t mide el número de años transcurridos.

a) ¿Cuál es la población inicial y la población después de 9 años? ¿A partir de qué número la población será inferior a un millón de individuos?

b) Con el paso de los años, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos de la población?

----

a)

$$P(0) = \frac{5}{(0+1)^2} = 5.$$

$$P(9) = \frac{5+9^2}{(9+1)^2} = \frac{5+81}{10^2} = \frac{86}{100} = 0,86.$$

$$\underline{Al\ comienzo\ había\ 5.000.000\ de\ individuos\ y\ a\ los\ 9\ años,\ 860.000}$$

b)

$$P(t) = \frac{5+t^2}{(t+1)^2} = \frac{t^2+5}{t^2+2t+1} = 1.$$

$$\underline{Con\ el\ paso\ de\ los\ años\ se\ estabiliza\ la\ población\ en\ 1.000.000\ individuos.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere la función $f(x) = \{\ 2x + 3\ \ si\ \ x \leq -1\ ax + b\ \ si\ -1 < x < 2\ \ x^2\ \ si\ \ x \geq 2$. Encuentre los valores de $a\ y\ b$ para que la función sea continua para todos los valores reales.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = -1\ y\ x = 2$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\ x = -1 \Rightarrow \{f(x) = (2x + 3) = -2 + 3 = 1 = f(-1)\ f(x) = (ax + b) = -$

$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(-1) \Rightarrow 1 = -a + b.$ (1)

$Para\ x = 2 \Rightarrow \{f(x) = (ax + b) = 2a + b\ f(x) = x^2 = 4 = f(2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(2) \Rightarrow 2a + b = 4.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$-a + b = 1\ 2a + b = 4\}\ a - b = -1\ 2a + b = 4\} \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow \underline{a = 1\ y\ b = 2}$

.

****

2º) Al terminar un curso de pintura, los alumnos reciben como obsequio un estuche con rotuladores y colores. Se regalan dos tipos de estuches: los rojos, que contienen 1 rotulador y 2 colores y cuestan 9 euros, y los verdes, que llevan 3 rotuladores y 1 color y cuestan 15 euros. La escuela dispone de 200 rotuladores y 100 colores para llenar los estuches. Necesita preparar al menos 40 estuches y que el número de estuches rojos no supere el número de estuches verdes; con estos datos, la escuela quiere calcular el precio que tendrá que pagar por estos estuches.

a) Determine la función de objetivos, y dibuje la región de las posibles opciones de la escuela.

b) Calcule cuantos estuches de cada tipo hay que preparar para que el gasto sea mínimo y diga cuál es ese gasto mínimo.

----

a)

Sean $x\,e\,y$ el número de estuches rojos y verdes que se obsequian, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio son: $x+3y\leq 200$ $2x+y\leq 100$ $x+y\geq 40$ $x\leq y$ $x\geq 0; y\geq 0$ }.

<u>$La\ función\ de\ objetivos\ es\ f(x,\ y) = 9x + 15y.$</u>

x	140	50
y	20	50

①$\Rightarrow x+3y\leq 200 \Rightarrow y\leq \frac{200-x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

x	0	50
y	100	0

②$\Rightarrow 2x+y\leq 100 \Rightarrow y\leq 100-2x \Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

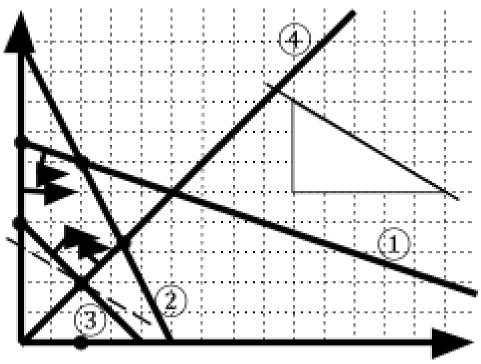
x	0	40
y	40	0

③$\Rightarrow x+y\geq 40 \Rightarrow y\geq 40-x \Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow No.$

x	9	11
y	7	10

④$\Rightarrow x\leq y \Rightarrow y\geq x \Rightarrow P(20,\ 0)\rightarrow No.$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



b)

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow x + 3y = 200 \qquad x = 0 \} \Rightarrow A\left(0,\ \frac{200}{3}\right)$.

$B \Rightarrow x + 3y = 200\ 2x + y = 100 \} \quad 2x + 6y = 400\ -2x - y = -100 \} \Rightarrow 5y$
$2x + 60 = 100;\ x = 20 \Rightarrow B(20,\ 60)$.

$C \Rightarrow 2x + y = 100 \qquad x = y \} \Rightarrow 3y = 100;\ y = x = \frac{100}{3} \Rightarrow C\left(\frac{100}{3},\ \frac{100}{3}\right)$
.

$D \Rightarrow x + y = 40 \qquad x = y \} \Rightarrow 2y = 40;\ y = x = 20 \Rightarrow D(20,\ 20)$.

$E \Rightarrow x + y = 40 \qquad x = 0 \} \Rightarrow E(0,\ 40)$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f\left(0,\ \frac{200}{3}\right) = 9 \cdot 0 + 15 \cdot \frac{200}{3} = 0 + 1.000 = 1.000$.

$B \Rightarrow f(20,\ 60) = 9 \cdot 20 + 15 \cdot 60 = 180 + 900 = 1.080$.

$C \Rightarrow f\left(\frac{100}{3},\ \frac{100}{3}\right) = 9 \cdot \frac{100}{3} + 15 \cdot \frac{100}{3} = 300 + 500 = 800$.

$D \Rightarrow f(20,\ 20) = 9 \cdot 20 + 15 \cdot 20 = 180 + 300 = 480$.

$E \Rightarrow f(0,\ 40) = 9 \cdot 0 + 15 \cdot 40 = 0 + 600 = 600$.

El valor mínimo se produce en el punto $D(20,\ 20)$.

También se hubiera obtenido el punto D por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 9x + 15y = 0 \Rightarrow y = -\frac{9}{15}x = -\frac{3}{5}x \Rightarrow m = -\frac{3}{5}$.

$\underline{El\ gasto\ es\ mínimo\ preparando\ 20\ estuches\ de\ cada\ tipo}$.

$\underline{El\ gasto\ mínimo\ es\ de\ 480\ euros}$.

****

3º) Un inversor ha obtenido un beneficio de 1.500 euros tras invertir un total de 40.000 euros en tres empresas diferentes. Estos beneficios se desglosan de la siguiente manera: la cantidad invertida en la empresa A le ha reportado un 2 % de beneficios, la cantidad invertida en la empresa B, un 5 %, y la cantidad invertida en la empresa C, un 7 %. El dinero invertido en la empresa B ha sido el mismo que en las otras dos empresas juntas. ¿Cuál fue la cantidad invertida en cada una de las empresas?

Sean $x,\ y,\ z$ las inversiones que se realiza el inversor en las empresas A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y + z = 40.000\ 0,02x + 0,05y + 0,07z = 1.500$$

.

Restando miembro a miembro a la primera la tercera ecuación:

$2y = 40.000 \Rightarrow y = 20.000.$

$x + 20.000 + z = 40.000\ 2x + 5 \cdot 20.000 + 7z = 150.000 \}\quad x + z = 20.($

$- 2x - 2z = - 40.000\ 2x + 7z = 50.000 \} \Rightarrow 5z = 10.000;\ \ z = 2.000.$

$x + y + z = 40.000;\ \ x + 20.000 + 2.000 = 40.000;\ \ x = 18.000.$

$\underline{Invirtió\ 18.000\ euros\ en\ A,\ 20.000\ euros\ en\ B\ y\ 2.000\ euros\ en\ C}.$

****

4º) El gasto mensual en tabaco de un fumador viene determinado por su salario mediante la función $f(x) = \frac{400x}{x^2+4}$, en la que x representa el salario en miles de euros y $f(x)$ el gasto mensual en tabaco en euros.

a) Determine el salario para el que el gasto en tabaco es máxima. ¿A cuánto asciende este gasto?

b) ¿Para qué salarios el gasto mensual es inferior a 60 euros?

----

a)

Para que una función tenga un máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada y, además, que sea negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f'(x) = \frac{400\cdot(x^2+4)-400x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{400x^2+1.600-800x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{1.600-400x^2}{(x^2+4)^2} = 400\cdot\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 400\cdot\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2} = 0;\ \ 4 - x^2 = 0.$$

Como el salario no puede ser negativo, la solución lógica es $x = 2$.

$$f''(x) = 400\cdot\frac{-2x\cdot(x^2+4)^2-(4-x^2)[2(x^2+4)\cdot 2x]}{(x^2+4)^4} = 400\cdot\frac{-2x\cdot(x^2+4)-4x\cdot(4-x^2)}{(x^2+4)^3} =$$

$$= 400\cdot\frac{-2x^3-8x-16x+4x^3}{(x^2+4)^3} = 400\cdot\frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3} = 800x\cdot\frac{x^2-12}{(x^2+4)^3}.$$

$$f''(2) = 800\cdot 2\cdot\frac{2^2-12}{(2^2+4)^3} = -\frac{1.600\cdot 8}{8^3} < 0 \Rightarrow \text{Justificación de máximo.}$$

<u>*El gasto en tabaco es máximo cuando el salario es de 2.000 euros.*</u>

$$f(2) = \frac{400\cdot 2}{2^2+4} = \frac{800}{8} = 100.$$

<u>*El gasto máximo en tabaco es de 100 euros.*</u>

b)

$$f(x) < 60 \Rightarrow \frac{400x}{x^2+4} < 60;\ \ \frac{20x}{x^2+4} < 3;\ \ 20x < 3x^2 + 12;\ 3x^2 - 20x + 12 < 0.$$

$3x^2 - 20x + 12 = 0; \; x = \frac{20 \pm \sqrt{400-144}}{6} = \frac{20 \pm \sqrt{256}}{6} = \frac{20 \pm 16}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}, \; x_2 = 6.$

$3x^2 - 20x + 12 = 3 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 6) = (3x - 2)(x - 6).$

$(3x - 2)(x - 6) < 0 \Rightarrow \frac{2}{3} < x < 6.$

$\underline{El\ gasto\ es\ menor\ de\ 60\ euros\ cuando\ el\ salario\ es\ 667 < x < 6.000,\ euros.}$

****

5º) Resuelve las siguientes preguntas:

a) Encuentre las matrices A y B que cumplen que $A - 2B = (1\ 13\ 0\ \ -5\ )$ y $2A + 3B = (2\ \ -9\ 7\ 4\ )$.

b) Determine los valores de $a,\ b,\ c\ y\ d$ para que se verifique la siguiente igualdad: $(1\ 2\ a\ 1\ )\cdot(0\ c\ 2\ \ -4\ ) = (b\ \ -5\ d\ \ -7\ )$.

----

a)
$A - 2B = (1\ 13\ 0\ \ -5\ )\ 2A + 3B = (2\ \ -9\ 7\ 4\ )\} - 2A + 4B = (-2\ \ -26\ 0\ 10\ )$

$$\underline{B = (0\ \ -5\ 1\ 2\ )}.$$

$A - 2B = (1\ 13\ 0\ \ -5\ )\ 2A + 3B = (2\ \ -9\ 7\ 4\ )\}3A - 6B = (3\ 39\ 0\ \ -15\ )\ \ 4A +$

$$\underline{A = (1\ 3\ 2\ \ -1\ )}.$$

b)
$(1\ 2\ a\ 1\ )\cdot(0\ c\ 2\ \ -4\ ) = (b\ \ -5\ d\ \ -7\ );\ \ (4\ c - 8\ 2\ ac - 4\ ) = (b\ \ -5\ d\ \ -7$

$\Rightarrow\ \ 4 = b\ \ \ c - 8 = -5\ \ \ \ d = 2\ a\cdot c - 4 = -7\ \}\Rightarrow c = 3;\ \ a\cdot 3 - 4 = -$

.

$$\underline{a = -1,\ b = 4,\ c = 3,\ d = 2}.$$

****

6º) Sabemos que la función $f(x)=\frac{ax+b}{cx+1}$ pasa por el punto $P(2,\ -5)$ y que las rectas $x\ =\ 1\ e\ y\ =\ 2$ son las asíntotas vertical y horizontal, respectivamente. Calcule los valores de $a,\ b\ y\ c$.

Por ser la recta $x\ =\ 1$ asíntota horizontal es $cx\ +\ 1\ =\ x\ -\ 1 \Rightarrow \underline{c\ =-\ 1}$.

La función resulta $f(x)=\frac{ax+b}{1-x}$.

Por ser la recta $y\ =\ 2$ asíntota vertical es $\frac{ax+b}{1-x}\ =\ 2 \Rightarrow \underline{a\ =-\ 2}$.

La función resulta $f(x)=\frac{-2x+b}{1-x}$.

Por pasar por el punto $P(2,\ -5)$ es $f(2)=-\ 5$.

$f(2)=-\ 5 \Rightarrow \frac{-2\cdot 2+b}{1-2}=-\ 5;\ \ -\ 4\ +\ b\ =\ 5 \Rightarrow \underline{b\ =\ 9}$.

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen.

OPCIÓN A

1º) Con el fin de incentivar sus ventas, un vivero de árboles frutales ofrece dos tipos de lotes: el lote A formado por 1 limonero, 1 naranjo y 1 manzano y el lote B por 2 limoneros y 1 manzano. Cada lote A le produce un beneficio de 30 euros y cada lote B un beneficio de 40 euros. Sabiendo que dispone como máximo de 1.600 limoneros, 800 naranjos y 1.000 manzanos, se pide:

a) ¿Cuántos lotes de cada tipo han de ofrecer para hacer máximos los beneficios?

b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.

----

a)

Sean $x\,e\,y$ el número de lotes de los tipos A y B que se ofrecen, respectivamente.

El sistema de inecuaciones que se deduce del enunciado es: $x + 2y \leq 16 \quad 0 \leq x \leq 8 \quad x + y \leq 10 \qquad y \geq 0 \}$.

x	0	6
y	8	0

①$\Rightarrow x + 2y \leq 16 \Rightarrow y \leq \frac{16-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	10
y	10	0

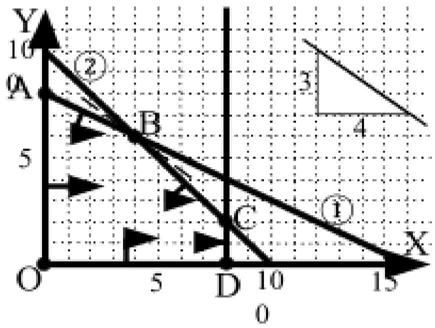
②$\Rightarrow x + y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = 30x + 40y$.

La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \quad x = 0\, x + 2y = 16 \} \Rightarrow A(0,\ 8).$
$B \Rightarrow x + 2y = 16 \ \ x + y = 10 \} \quad x + 2y = 16 \ \ -x - y = -10 \} \Rightarrow y = 6;\ \ x$
.



$C \Rightarrow \quad x = 8\, x + y = 10 \} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow C(8,\ 2).$
$D \Rightarrow y = 0\, x = 8 \} \Rightarrow D(8,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 8) = 30 \cdot 0 + 40 \cdot 8 = 0 + 0 = 320.$

$B \Rightarrow f(4,\ 6) = 30 \cdot 4 + 40 \cdot 6 = 120 + 240 = 360.$

$C \Rightarrow f(8,\ 2) = 30 \cdot 8 + 40 \cdot 2 = 240 + 80 = 320.$

$D \Rightarrow f(8,\ 0) = 30 \cdot 8 + 40 \cdot 0 = 240 + 0 = 240.$

El valor máximo se produce en el punto $B(4,\ 6)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 30x + 40y = 0 \Rightarrow y = -\frac{30}{40}x = -\frac{3}{4}x \Rightarrow m = -\frac{3}{4}.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ ofreciendo\ 4\ lotes\ de\ tipo\ A\ y\ 6\ de\ tipo\ B}.$

$b)$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 360\ euros}.$

****

2º) En el estudio realizado recientemente sobre cambio climático, por el grupo intergubernamental de expertos, se expusieron datos sobre la dimensión del hielo ártico en los océanos. Una función que ajusta esos valores desde el año 1.900 es la siguiente:

$E(t) = \{- 1,6t^2 + At + 9.656 \;\; si \;\; 0 \le t \le 60 \quad 16.400 - Bt \;\; si \;\; 60 < t \le 110$,

donde E es la extensión de hielo ártico en los océanos en millones de Km^2 y t el año de estudio. Se sabe que la función es continua y tiene un máximo en el año 1.937 ($t = 37$).

a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

b) Representar gráficamente la extensión de hielo ártico en los océanos en función del tiempo.

----

a)

Por ser $E(t)$ continua tiene que cumplirse que $E(t) = E(t) = E(60)$:

$$E(t) = \left(- 1,6t^2 + At + 9.656\right) =- 5.760 + 60A + 9.656 =$$

$= 60A + 3.896 = E(60)$.

$$E(t) = (16.400 - Bt) = 16.400 - 60B.$$

$$E(t) = E(t) = E(60) \Rightarrow 60A + 3.896 = 16.400 - 60B;$$

$60A + 60B = 16.400 - 3.896;\;\; 60A + 60B = 12.504;\;\; 5A + 5B = 1.042.$
(1)

Por tener la función $E(t)$ un máximo en el año 1.937 ($t = 37$) se tiene que cumplir que $E'(37) = 0$.

$$E'(t) = \{- 3,2t + A \;\; si \;\; 0 \le t \le 60 \quad - B \;\; si \;\; 60 < t \le 110 .$$

$$E'(37) = 0 \Rightarrow - 3,2 \cdot 37 + A = 0;\;\; A = 3,2 \cdot 37 = 118,4.$$

Sustituyendo este valor en (1):

$$5 \cdot 118,4 + 5B = 1.042;\;\; 5B = 1.042 - 592 = 450;\;\; B = \frac{450}{5} = 90.$$

$$\underline{A = 118,4 \; y \; B = 90}.$$

b)

La función resulta:

$E(t) = \{- 1,6t^2 + 118,4\cdot t + 9.656 \ si \ 0\leq t\leq 60 \quad 16.400 - 90\cdot t \ \ si \ \ 60 < t\leq 110$
.

El punto máximo es $E(37) =- 1,6\cdot 37^2 + 118,4\cdot 37 + 9.656 =$

$=- 1,6\cdot 1.369 + 4.380,8 + 9.656 =- 2.190,4 + 14.036,8 = 11.846,4\Rightarrow$

$\Rightarrow M(37;\ 11.846,4)$.

Otros puntos de la función son los siguientes:

$E(0) = 9.656\Rightarrow A(0;\ 9.660)$.

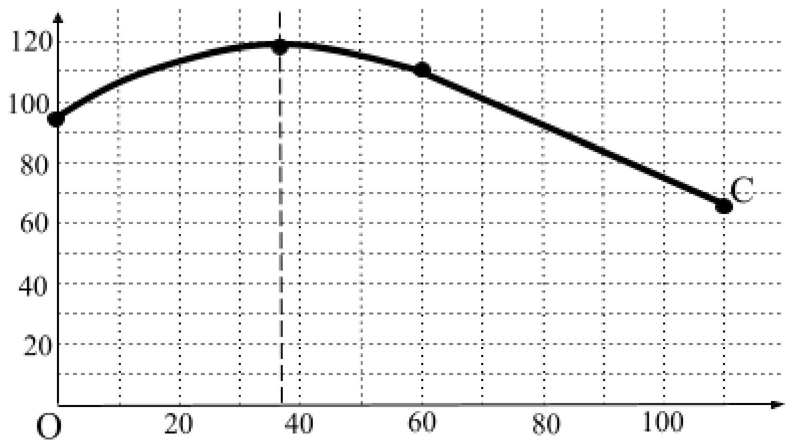
$E(60) =- 1,6\cdot 60^2 + 118,4\cdot 60 + 9.656 =- 5.760 + 7.104 + 9.656 =$

$= 11.000\Rightarrow B(60;\ 11.000)$.

$E(110) = 16.400 - 90\cdot 110 = 16.400 - 9.900 = 6.500\Rightarrow$

$\Rightarrow C(110;\ 6.500)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que indica la figura adjunta.



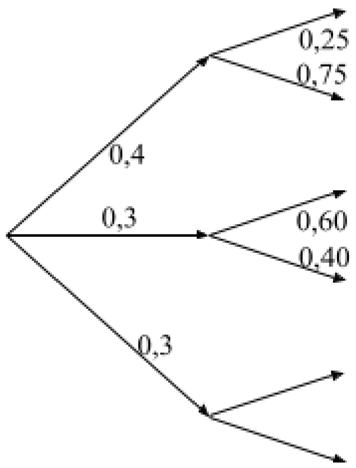
****

3º) Un fotógrafo aficionado hace copia de seguridad de sus imágenes en espacios virtuales. Tiene contratados tres servicios premium: Dropbox, Ondrive y Box. Por razones de espacio, cada imagen la incluye solamente en uno de ellos. En Dropbox tiene el 40 % de sus imágenes, el 30 % en Onedrive y el resto en Box. Cada imagen está etiquetada en uno de dos tipos posibles: Retratos o Paisajes. En Dropbox, el 25 % son retratos, en Ondrive el 60 % y en Box, el 90 %. El resto son paisajes.

a) Si escoge una imagen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea retrato?

b) Si escoge una imagen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea paisaje y esté en Box?

c) Si escoge una imagen al azar y es paisaje, ¿cuál es la probabilidad de que esté en Ondrive? Justificar las respuestas.



a)

$$P = P(Re) = P(D) \cdot P(Re/D) + P(O) \cdot P(Re/O) + P(B) \cdot P(Re/B) =$$

$$= 0,4 \cdot 0,25 + 0,3 \cdot 0,60 + 0,3 \cdot 0,90 = 0,10 + 0,18 + 0,27 = \underline{0,55}.$$

b)

$$P = P(Pa \cap B) = P(B) \cdot P(Pa/B) = 0,3 \cdot 0,1 = \underline{0,03}.$$

c)

$$P = P(O/Pa) = \frac{P(O \cap Pa)}{P(Pa)} = \frac{P(O) \cdot P(Pa/O)}{P(D) \cdot P(Pa/D) + P(O) \cdot P(Pa/O) + P(B) \cdot P(Pa/B)} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,40}{0,4 \cdot 0,75 + 0,3 \cdot 0,40 + 0,3 \cdot 0,10} = \frac{0,12}{0,30 + 0,12 + 0,03} = \frac{0,12}{0,45} = \underline{0,2667}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Sea la matriz $A = (-\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 2\ 2\ 1\ 0\ )$.

$a)$ Determinar la matriz X solución de la ecuación matricial: $A\cdot X + A^2 = 2A$.

$b)$ Hallar la matriz inversa de A. Justificar las respuestas.

$a)$

$$A\cdot X + A^2 = 2A;\ \ A\cdot X = 2A - A^2;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot\left(2A - A^2\right);$$

$I\cdot X = A^{-1}\cdot\left(2A - A^2\right) \Rightarrow \underline{X = A^{-1}\cdot\left(2A - A^2\right)}$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \to -F_1\ F_2 \to -F_2\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_3 \to F_3 - 2F_1\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-\ 1\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 2\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - F_2\ F_3 \to F_3 + F_2\right\} \Rightarrow (-\ 1\ 1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 2\ \ -$

$\Rightarrow \left\{F_3 \to -\frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(-\ 1\ 1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 0\ \ -\ 1\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - 2F_3\ F_2 \to F_2 + 2F\right.$

$\Rightarrow \left(1\ 0\ 1\ \ -\ 2\ 0\ \ -\ 1\ \ -\ 1\ \frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot(2\ 0\ 2\ \ -\ 4\ 0\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 1\ )$

.

$2A - A^2 = 2\cdot(-\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 2\ 2\ 1\ 0\ ) - (-\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 2\ 2\ 1\ 0\ )\cdot(-\ 1\ \ -\ 1\ 0\ 0$

$= (-\ 2\ \ -\ 2\ 0\ 0\ \ -\ 2\ 4\ 4\ 2\ 0\ ) - (1\ 2\ \ -\ 2\ 4\ 3\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ \ -\ 3\ 2\ ) = (-\ 3\ \ -\ 4\ 2\ \ -\ 4$

.

$X = A^{-1}\cdot\left(2A - A^2\right) = \frac{1}{2}\cdot(2\ 0\ 2\ \ -\ 4\ 0\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ 1\ \ -\ 1\ )\cdot(-\ 3\ \ -\ 4\ 2\ \ -\ 4\ \ -\ 5\ 6\ 6\ 5$

$= \frac{1}{2}\cdot(6\ 2\ 0\ 0\ 6\ \ -\ 4\ \ -\ 4\ \ -\ 2\ 4\ )$.

$$\underline{X = (3\ 1\ 0\ 0\ 3\ \ -\ 2\ \ -\ 2\ \ -\ 1\ 2\ )}.$$

$b)$

(Resuelto en el apartado anterior)

****

2º) En una urbanización se ha verificado durante un control que el consumo de agua en metros cúbicos, entre las 14 y las 21 horas, varía de acuerdo con la siguiente función:

$C(t) = -4t^3 + 210t^2 - 3.600t + 20.400,\ 14 \le t \le 21,$ siendo C el agua consumida en metros cúbicos y t la hora de realización del control. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar las horas de máximo y mínimo consumo de agua.

b) Hallar los valores de dichos consumos máximo y mínimo.

c) Calcular el área encerrada por la curva C y el eje de abscisas entre las 15 y las 20 horas.

----

a) b)

Es condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) en un punto que se anule su primera derivada en ese punto.

$$C'(t) = -12t^2 + 420t - 3.600.$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow -12t^2 + 420t - 3.600 = 0;\ t^2 - 35t + 300 = 0;$$

$$t = \frac{35 \pm \sqrt{1.225 - 1.200}}{2} = \frac{35 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{35 \pm 5}{2} \Rightarrow t_1 = 15,\ t_2 = 20.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$C''(t) = -24t + 420.$$

$$C''(15) = -24 \cdot 15 + 420 = -360 + 420 = 60 > 0 \Rightarrow Mín.\ para\ t = 15.$$

$$C(15) = -4 \cdot 15^3 + 210 \cdot 15^2 - 3.600 \cdot 15 + 20.400 =$$

$$= -13.500 + 47.250 - 54.000 + 20.400 = 150.$$

$$\underline{El\ consumo\ mínimo\ es\ de\ 150\ metros\ cúbicos.}$$

$$C''(20) = -24 \cdot 20 + 420 = -480 + 420 = -60 < 0 \Rightarrow Máx.\ para\ t = 20.$$

$$C(20) = -4 \cdot 20^3 + 210 \cdot 20^2 - 3.600 \cdot 20 + 20.400 =$$

$$= -\ 32.000\ +\ 84.000\ -\ 72.000\ +\ 20.400\ =\ 400.$$

$$\underline{El\ consumo\ máximo\ es\ de\ 400\ metros\ cúbicos}.$$

$c)$

$$S\ =\ \int_{15}^{20} C(t)\cdot dt\ =\ \int_{15}^{20}\left(-\ 4t^3\ +\ 210t^2\ -\ 3.600t\ +\ 20.400\right)\cdot dt\ =$$

$$=\left[-\ \frac{4\cdot t^4}{4} + \frac{210\cdot t^3}{3} - \frac{3.600\cdot t^2}{2} +\ 20.400\cdot t\right]_{15}^{20} =$$

$$=\left[-\ t^4\ +\ 70t^3\ -\ 1.800t^2\ +\ 20.400\cdot t\right]_{15}^{20} =$$

$$=\left(-\ 20^4\ +\ 70\cdot 20^3\ -\ 1.800\cdot 20^2\ +\ 20.400\cdot 20\right) -$$

$$-\left(-\ 15^4\ +\ 70\cdot 15^3\ -\ 1.800\cdot 15^2\ +\ 20.400\cdot 15\right) =$$

$$= -\ 160.000\ +\ 560.000\ -\ 720.000\ +\ 408000\ +\ 50.625\ -\ 236.250\ +\ 405.000\ -$$

$$-\ 306.000\ =\ 1.423.625\ -\ 1.422.250\ =\ 1.375.$$

$$\underline{S\ =\ 1.375\ u^2}.$$

****

3º) En una ciudad se desea estimar la proporción de hogares que reciclan sus envases de plástico. La ciudad está dividida en cuatro barrios (A, B, C y D) con 800, 2.000, 1.200 y 1.000 hogares, respectivamente. Se selecciona mediante muestreo estratificado con afijación proporcional una muestra de 400 hogares.

a) ¿Cuántos hogares de cada uno de los barrios se incluirán en la muestra?

b) Si en el barrio B, 64 hogares de la muestra reciclan, ¿cuál es la estimación de hogares que reciclan en ese barrio?

c) Proporcionar un intervalo de confianza al 95 % para la estimación puntual anterior. Justificar las respuestas.

----

a)

$$Total\ hogares: 800 + 2.000 + 1.200 + 1.000 = 5.000.$$

$$\left.\begin{array}{l} Si\ a\ 5.000\ corresponden\ 400 \\ a\ 800\ \ corresponden\ \ a \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{800 \cdot 400}{5.000} = \frac{320}{5} = 64.$$

$$b = \frac{2.000 \cdot 400}{5.000} = \frac{800}{5} = 160. \qquad c = \frac{1.200 \cdot 400}{5.000} = \frac{480}{5} = 96.$$

$$d = \frac{1.000 \cdot 400}{5.000} = \frac{400}{5} = 80.$$

$$\underline{A\ los\ barrios\ A,\ B,\ C\ y\ D\ corresponden\ 64,\ 160,\ 96\ y\ 80,\ respectivamente.}$$

b)

$$P = \frac{64}{320} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

$$\underline{En\ el\ barrio\ B\ reciclan\ el\ 20\ \%\ de\ los\ hogares.}$$

c)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$
$$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

Datos:

$$n = 400;\ \ p = 0,2;\ \ q = 0,8;\ \ \sigma = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{400}} = 0,02;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, $q\ y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0,2 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{400}};\ 0,2 + 1,76 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{400}}\right);$$

$(0,2 - 1,76 \cdot 0,02;\ 0,2 + 1,96 \cdot 0,02)$; $(0,2 - 0,0392;\ 0,2 + 0,0392)$.

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = (0,1608;\ 0,2392).}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Elegir una opción entre las dos que se proponen.

OPCIÓN A

1º) Una empresa vinícola produce dos tipos de vino, blanco y tinto. Por razones de comercialización, el número de botellas de vino blanco debe ser inferior al número de botellas de vino tinto y el máximo de botellas totales producidas no puede ser superior a 60.000. Además, a causa de la mala cosecha de uva no pueden producirse más de 40.000 botellas de vino tinto ni más de 25.000 botellas de vino blanco. Sabiendo que el beneficio obtenido por cada botella de vino tinto es de 2,5 euros y de 3 euros por cada botella de vino blanco y que se vende toda la producción, se pide:

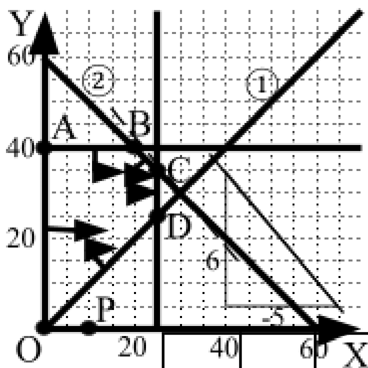
a) ¿Cuántas botellas de cada tipo han de producirse para hacer máximos los beneficios?

b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.

----

a)

Sean x e y el número de miles de botellas de vinos blanco y tinto que produce la empresa, respectivamente.



Las restricciones del ejercicio son: $x \leq y\ \ x+y \leq 60\ \ 0 \leq x \leq 25\ \ 0 \leq y \leq 40\ \}$.

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

x	0	60
y	0	60

① $\Rightarrow x \leq y \Rightarrow P(10,\ 0) \rightarrow No.$

x	60	0
y	0	60

② $\Rightarrow x+y \leq 60 \Rightarrow y \leq 60-x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si$

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 40).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 40 \\ x + y = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow B(20,\ 40).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 60 \\ x = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow C(25,\ 35).$ $D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = y \\ x = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow D(25,\ 25).$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = 3x + 2,5y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 40) = 3 \cdot 0 + 2,5 \cdot 40 = 0 + 100 = 100.$

$B \Rightarrow f(20,\ 40) = 3 \cdot 20 + 2,5 \cdot 40 = 60 + 100 = 160.$

$C \Rightarrow f(25,\ 35) = 3 \cdot 25 + 2,5 \cdot 35 = 75 + 87,5 = 162,5.$

$D \Rightarrow f(25,\ 25) = 3 \cdot 25 + 2,5 \cdot 25 = 75 + 62,5 = 137,5.$

El máximo se produce en el punto $C(25,\ 35)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 3x + 2,5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2,5}x = -\frac{30}{25}x = -\frac{6}{5}x \Rightarrow m = -\frac{6}{5}.$$

$\underline{Beneficio\ máximo:\ fabricando\ 25.000\ botellas\ de\ blanco\ y\ 35.000\ de\ tinto.}$

$b)$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 162.500\ euros.}$

****

2º) El consumo anual de combustible (en litros) por vehículo en Estados Unidos desde 1.960 a 2.000 se modeliza con la función $F(t) = 0,025t^3 - At^2 + Bt + 654,\ 0 \leq t \leq 40$, donde $F(t)$ es el número de litros y t el tiempo desde el año 1.960. Se sabe que en el año 1.970 ($t = 10$) el consumo fue de 711,5 litros y en 1.990 ($t = 30$) el consumo fue de 526,5 litros.

a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

b) Representar gráficamente el consumo medio de combustible en función del tiempo.

----

a)

Por ser en 1.970 un consumo de 711,5 litros es:

$$F(10) = 711,5 \Rightarrow 0,025 \cdot 10^3 - A \cdot 10^2 + B \cdot 10 + 654 = 711,5;$$

$$25 - 100A + 10B + 654 = 711,5: \ -100A + 10B = 32,5. \quad (1)$$

Por ser en 1.990 un consumo de 526,5 litros es:

$$F(30) = 711,5 \Rightarrow 0,025 \cdot 30^3 - A \cdot 30^2 + B \cdot 30 + 654 = 711,5;$$

$$675 - 900A + 30B + 654 = 526,5: \ -900A + 30B = -802,5. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} -100A + 10B = 32,5 \\ -900A + 30B = -802,5 \end{array}\right\} \ -100A + 10B = 32,5$$

$$2A = 3 \Rightarrow \underline{A = 1,5}.$$

$$-100 \cdot 1,5 + 10B = 32,5;\ 10B = 32,5 + 150 = 182,5 \Rightarrow \underline{B = 18,25}.$$

b)

La función resulta $F(t) = 0,025t^3 - 1,5t^2 + 18,25t + 654$.

Para facilitar la representación gráfica se determinan los máximos y mínimos de la función.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

$F'(t) = 0,075t^2 - 3t + 18,25.$

$F'(t) = 0 \Rightarrow 0,075t^2 - 3t + 18,25 = 0;\ 75t^2 - 3.000t + 18.250 = 0;$

$3t^2 - 120t + 730 = 0;\ t = \frac{120 \pm \sqrt{14.400 - 8.760}}{6} = \frac{120 \pm \sqrt{5.640}}{6} \cong \frac{120 \pm 75,1}{6} =$

$= 20 \pm 12,5 \Rightarrow t_1 = 7,5,\ t_2 = 32,5.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$F''(t) = 0,15t - 3.$

$F''(7,5) = 0,15 \cdot 7,5 - 3 = 1,125 - 3 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 7,5.$

$F(7,5) = 0,025 \cdot 7,5^3 - 1,5 \cdot 7,5^2 + 18,25 \cdot 7,5 + 654 =$

$= 10,55 - 84,38 + 136,88 + 654 = 717,05 \Rightarrow Máx. \Rightarrow P(7,5;\ 717,05).$

$F''(32,5) = 0,15 \cdot 32,5 - 3 = 4,875 - 3 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ t = 32,5.$

$F(32,5) = 0,025 \cdot 32,5^3 - 1,5 \cdot 32,5^2 + 18,25 \cdot 32,5 + 654 =$

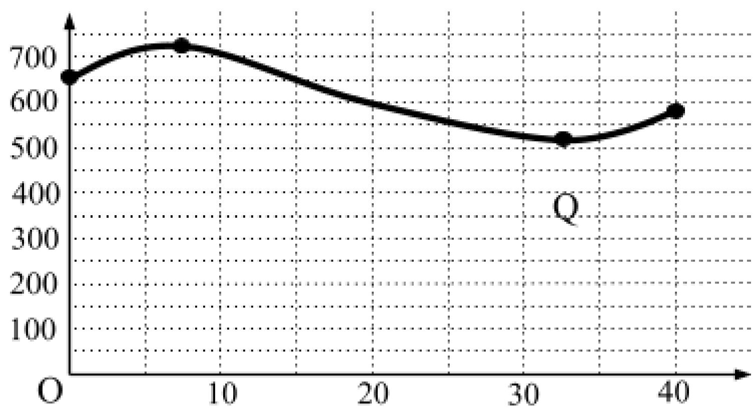
$= 858,20 - 1.584,38 + 593,13 + 654 = 520,95 \Rightarrow Mín. \Rightarrow Q(32,5;\ 520,95).$

Otros puntos son: $F(0) = 654 \Rightarrow A(0,\ 654).$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:

$F(40) = 0,025 \cdot 40^3 - 1,5 \cdot 40^2 + 18,25 \cdot 40 + 654 =$

$= 1.600 - 2.400 + 730 + 654 = 584 \Rightarrow B(40,\ 584).$



****

3º) Una región agrícola se dedica a la producción de tomates. Durante este año se ha utilizado un nuevo abono y se quiere estimar la cantidad de tomate producido por hectáreas. Se han muestreado 37 zonas y la producción media ha sido de 78 toneladas por hectárea. Se sabe que el número de toneladas por hectárea sigue una distribución normal con desviación típica 2.

a) Calcular el intervalo de confianza al 95 %.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 0,5? Justificar la respuesta.

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0,95 \to \alpha=1-0,95=0,05 \to z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0,025}=1,96.$

$1-0,025=0,9750 \to z=1,96).$

Datos: $n=37;\ \overline{x}=78;\ \sigma=2;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(78-1,96\cdot\frac{2}{\sqrt{37}};\ 78+1,96\cdot\frac{2}{\sqrt{37}}\right);\ (78-1,96\cdot0,3288;\ 78+1,96\cdot0,3288);$

$(78-0,6444;\ 78+0,6444).$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%}=(77,3556;\ 78,644).}$$

b)

Datos: $\sigma=2;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1,96;\ E=\frac{0,5}{2}=0,25.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1,96\cdot\frac{2}{0,25}\right)^2=$

$=(1,96\cdot8)^2=15,68^2=245,86.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 246\ zonas.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Sean las matrices $A = (2\ 1\ \ -1\ 1\ )$ y $B = (1\ 2\ 2\ 1\ )$. Hallar la matriz X que verifique $AX - B = BX + A$. Justificar la respuesta.

$$AX - B = BX + A;\ \ AX - BX = A + B;\ \ (A - B)\cdot X = A + B;$$

$$(A - B)^{-1}\cdot(A - B)\cdot X = (A - B)^{-1}\cdot(A + B);\ \ I\cdot X = (A - B)^{-1}\cdot(A + B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = (A - B)^{-1}\cdot(A + B)}.$$

$$A + B = (2\ 1\ \ -1\ 1\ ) + (1\ 2\ 2\ 1\ ) = (3\ 3\ 1\ 2\ ).$$

$$A - B = (2\ 1\ \ -1\ 1\ ) - (1\ 2\ 2\ 1\ ) = (1\ \ -1\ \ -3\ 0\ ).$$

Se obtiene la inversa de $(A - B)$ por el método de Gauss-Jordan:

$$(A - B/I) = (1\ 0\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \left\{F_2 \to F_2 + 3F_1\right\} \Rightarrow (1\ 0\ 3\ 1\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to -\tfrac{1}{3}F_3\right\} \Rightarrow \left(1\ 0\ \ -1\ \ -\tfrac{1}{3}\ \right) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 + F_3\right\} \Rightarrow \left(0\ \ -\tfrac{1}{3}\ \ -1\ \ -\tfrac{1}{3}\ \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A - B)^{-1} = \left(0\ \ -\tfrac{1}{3}\ \ -1\ \ -\tfrac{1}{3}\ \right) = -\tfrac{1}{3}\cdot(0\ 1\ 3\ 1\ ).$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X obtenida:

$$X = (A - B)^{-1}\cdot(A + B) = -\tfrac{1}{3}\cdot(0\ 1\ 3\ 1\ )\cdot(3\ 3\ 1\ 2\ ) = -\tfrac{1}{3}\cdot(1\ 2\ 10\ 11\ ).$$

$$\underline{X = \left(-\tfrac{1}{3}\ \ -\tfrac{2}{3}\ \ \tfrac{10}{3}\ \ -\tfrac{11}{3}\ \right) = -\tfrac{1}{3}\cdot(1\ 2\ 10\ 11\ ).}$$

****

2º) Una empresa ha estimado que, al cabo de 10 años de funcionamiento, el balance de sus ingresos y gastos (en miles de euros), en función de los años transcurridos, ha sido el siguiente: $I(t) =- 3t^2 + 62t,\ 0 \leq t \leq 10\ y\ G(t) = t^2 - 10t + 120,\ 0 \leq t \leq 10$, donde I representa los ingresos y G los gastos. Se pide, razonando las respuestas:

a) La función que expresa el beneficio de la empresa.

b) ¿Cuándo se obtiene el beneficio máximo? ¿A cuánto asciende?

c) Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $G(t)$ y el eje de abscisas en el intervalo $(0,\ 5)$.

----

a)

$$B(t) = I(t) - G(t) =- 3t^2 + 62t - \left(t^2 - 10t + 120\right) =$$

$$=- 3t^2 + 62t - t^2 + 10t - 120 =- 4t^2 + 72t - 120.$$

$$\underline{B(t) =- 4\left(t^2 - 18t + 30\right)}.$$

b)

El beneficio es máximo cuando se anula su primera derivada y es positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$B'(t) =- 4(2t - 18) =- 8(t - 9).$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow - 8(t - 9) = 0;\ \ t - 9 = 0 \Rightarrow t = 9.$$

$$B''(t) =- 9 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 9.$$

$$\underline{Se\ obtiene\ el\ máximo\ rendimiento\ para\ t = 9\ años}.$$

$$B(9) =- 4\left(9^2 - 18 \cdot 9 + 30\right) =- 4(81 - 162 + 30) =- 4(111 - 162) =$$

$$=- 4(- 51) = 204.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 204.000\ euros}.$$

c)

La función $G(t) = t^2 - 10t + 120$ tiene todas sus ordenadas positivas en el intervalo $(0,\ 5)$, por la cual la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^5 G(t)\cdot dt = \int_0^5 \left(t^2 - 10t + 120\right)\cdot dt = \left[\frac{t^2}{3} - \frac{10t^2}{2} + 120t\right]_0^5 =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - 5t^2 + 120t\right]_0^5 = \left(\frac{5^3}{3} - 5\cdot 5^2 + 120\cdot 5\right) - 0 = \frac{125}{3} - 75 + 600 =$$

$$= \frac{125}{3} + 525 = \frac{125+1.575}{3} = \frac{1.700}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{1.700}{3}\, u^2 \cong 56,67\, u^2.}$$

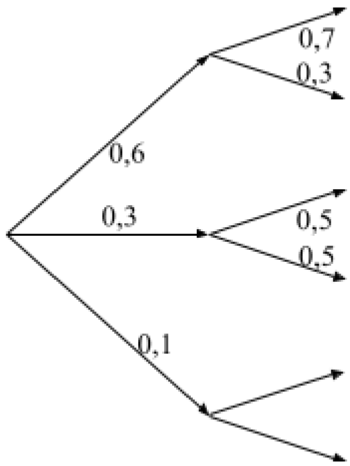
****

3º) Se está realizando un estudio sobre los turistas en cierta ciudad. Se sabe que el 60 % son europeos, el 30 % americanos y el resto asiáticos. El 70 % de los europeos son mujeres, el 50 % de los americanos son mujeres y el 30 % de los asiáticos son mujeres.

a) Si se seleccionan un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer americana?

b) Si se selecciona un turista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

c) Si nos dicen que se ha seleccionado un turista y es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que sea europea?



a)

$$P = P(M \cap Am) = P(Am) \cdot P(M/Am) = 0,3 \cdot 0,5 = \underline{0.15}.$$

b)

$$P = P(M) = P(Eu \cap M) + P(Am \cap M) + P(As \cap M) =$$

$$= P(Eu) \cdot P(M/Eu) + P(Am) \cdot P(M/Am) + P(AS) \cdot P(M/As) =$$

$$= 0,6 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,42 + 0,15 + 0,03 = \underline{0,60}.$$

c)

$$P = P(Eu/M) = \frac{P(Eu \cap M)}{P(M)} = \frac{P(Eu) \cdot P(M/Eu)}{P(Eu) \cdot P(M/Eu) + P(Am) \cdot P(M/Am) + P(AS) \cdot P(M/As)} =$$

$$= \frac{0,6 \cdot 0,7}{0,6 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,3} = \frac{0,42}{0,42 + 0,15 + 0,03} = \frac{0,42}{0,60} = \underline{0,70}.$$

****

<u>PRUEBA DE ACCESO (EBAU)</u>

<u>UNIVERSIDAD DE GALICIA</u>

<u>JUNIO – 2018</u>

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

<u>MATEMÁTICAS CC SS II</u> <u>Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos</u>

El alumno debe responder solamente a los ejercicios de una de las opciones.

<u>OPCIÓN A</u>

1º) Dadas las matrices $A = (1\ a\ 0\ \ -1\ )$, $B = (b\ 1\ 0\ \ -1\ )\ y\ C = (0\ c\ 0\ \ -c\ )$. Calcula las matrices $B - C\ y\ A \cdot B$. Calcula los valores de a, $b\ y\ c$ que verifican $B - C = A \cdot B$.

$$B - C = (b\ 1\ 0\ \ -1\ ) - (0\ c\ 0\ \ -c\ ) = \underline{(b\ 1 - c\ 0\ c - 1\ )}.$$

$$A \cdot B = (1\ a\ 0\ \ -1\ ) \cdot (b\ 1\ 0\ \ -1\ ) = \underline{(b\ 1 - a\ 0\ 1\ )}.$$

$$B - C = A \cdot B \Rightarrow (b\ 1 - c\ 0\ c - 1\ ) = (b\ 1 - a\ 0\ 1\ ) \Rightarrow \{a = c\ c - 1 = 1\ \} \Rightarrow a = c$$

.

$$\underline{B - C = A \cdot B,\ \forall b \in R\ y\ a = c = 2}.$$

****

2º) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$:

a) Calcula la primitiva F de f verificando que $F(2) = 1$.

b) Estudia el crecimiento y decrecimiento y representa gráficamente la función f.

c) Calcula el área limitada por la curva $f(x)$ y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$.

----

a)

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int \left(x^3 - 3x^2 + 2x\right)\cdot dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + C =$$

$$= \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + C.$$

$$F(2) = 1 \Rightarrow \frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 + C = 1;\ \ 4 - 8 + 4 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

$$\underline{F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 1.}$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0;\ x = \frac{6\pm\sqrt{36-24}}{6} = \frac{6\pm\sqrt{12}}{6} = \frac{6\pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3\pm\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3},\ x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}.$$

Considerando el dominio de la función, que es R por ser polinómica, las raíces de la primera derivada dividen el dominio de la función en los siguientes intervalos: $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, en los cuales la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$ es $f'(0) = 2 > 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$Crecimiento: \ f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, \ \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \ +\infty\right).$$

$$Decrecimiento: \ f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \ \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right).$$

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas son los siguientes:

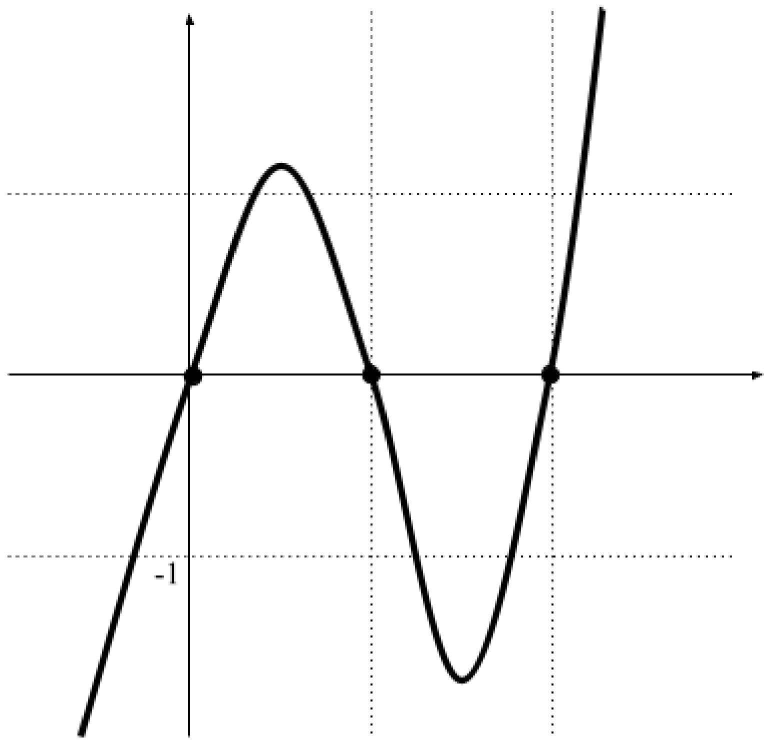
$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0; \ \ x\left(x^2 - 3x + 2\right) = 0; \Rightarrow x_1 = 0;$

$x^2 - 3x + 2 = 0; \ \ x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_2 = 1, \ x_3 = 2.$

Los puntos de corte con el eje X son: $O(0, \ 0), \ A(1, \ 0) \ y \ B(2, \ 0).$

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow O(0, \ 0).$

La representación gráfica de la función, aproximada, es la siguiente:



$c)$

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx + \int_2^1 f(x) \cdot dx = [F(x)]_0^1 + [F(x)]_2^1 =$$

$= F(1) - F(0) + F(1) - F(2) = 2F(1) - F(0) - F(2). \qquad (*)$

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \left(x^3 - 3x^2 + 2x \right) \cdot dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} =$$

$$= \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2.$$

Sustituyendo el valor de $F(x)$:

$$S = 2F(1) - F(0) - F(2) = 2 \cdot \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 \right) - 0 - \left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 \right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) - 4 + 8 - 4 = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{S = \frac{1}{2} u^2.}$$

****

3º) El peso (en gramos) de las empanadas que salen de un horno sigue una distribución normal con una desviación típica de 120 gramos. Si se estableció el intervalo $(1.499,9;\ 1.539,1)$ como intervalo de confianza para la media a partir de una muestra de 144 empanadas.

$a)$ ¿Cuál es el valor de la media muestral?, ¿con qué nivel de confianza se construyó el intervalo?

$b)$ ¿Cuántas empanadas, como mínimo, deberíamos pesar para que el nivel de confianza del intervalo anterior sea del 99 %?

$a)$

$$\overline{x} = \frac{1.539,1+1.499,9}{2} = \frac{3.039}{2} = \underline{1.519,5}.$$

$$E = \frac{1.539,1-1.499,9}{2} = \frac{39,2}{2} = 19,6.$$

Datos: $n = 144;\ \ \sigma = 120;\ \ E = 19,6.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{19,6\cdot\sqrt{144}}{120} = \frac{19,6\cdot 12}{120} = 1,96.$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0,\ 1)$ a 1,96 le corresponde el valor de 0,9750, por lo cual:

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9750;\ \ \alpha = 2 - 1,9500 = 0,05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95.$$

$\underline{\textit{El nivel de confianza utilizado es del } 95\ \%}.$

$b)$

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$

$1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$

Datos: $E = 19,6;\ \ \sigma = 120;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,575 \cdot \frac{120}{19,6}\right)^2 =$

$= (2,575 \cdot 6,1224)^2 = 15,7653^2 = 248,54.$

$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de } 249 \textit{ empanadas}}.$

****

4º) En una empresa, el 20 % de los trabajadores son mayores de 30 años, el 8 % desempeña algún puesto directivo y el 6 % es mayor de 30 años y desempeña algún puesto directivo.

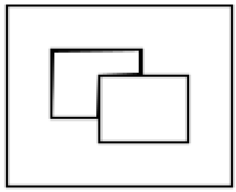
a) ¿Qué porcentaje de los trabajadores tiene más de 30 años y no desempeña ningún cargo directivo?

b) ¿Qué porcentaje de los trabajadores no es directivo ni mayor de 30 años.

c) Si la empresa tiene 100 trabajadores, ¿cuántos son directivos y no tienen más de 30 años?

$$Datos: P(>30) = 0,2;\ \ P(D) = 0,08;\ \ P(>30 \cap D) = 0,06.$$

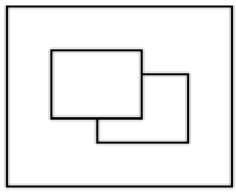
a)



$$P = P(\overline{D} \cap > 30) = P(>30) - P(>30 \cap D) =$$

$$= 0,2 - 0,06 = \underline{0,14 = 14\ \%}.$$

b)

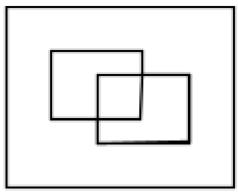


$$P = P(\overline{D} \cap \overline{>30}) = 1 - P(>30 \cup D) =$$

$$= 1 - [P(>30) + P(D) - P(>30 \cap D)] =$$

$$= 1 - (0,2 + 0,08 - 0,06) = 1 - 0,22 = \underline{0,78 = 78\ \%}.$$

c)



$$P = P(\overline{>30} \cap D) = P(D) - P(>30 \cap D) =$$

$$= 0,08 - 0,06 = 0,02 = 2\ \%.$$

$$\underline{Son\ directivos\ y\ no\ tienen\ más\ de\ 30\ años\ 2\ trabajadores.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Una pastelería hace con harina y nata dos tipos de bizcochos: suave y duro. Dispone de 160 kg de harina y 100 kg de nata. Para fabricar un bizcocho suave necesita 250 gramos de harina y 250 gramos de nata y para fabricar un bizcocho duro necesita 400 gramos de harina y 100 gramos de nata. Además, el número de bizcochos suaves fabricados debe exceder al menos en 100 unidades al número de bizcochos duros. Si los bizcochos suaves se venden a 6 euros y los bizcochos duros a 4,5 euros:

a) Formula un problema que controle la fabricación de bizcochos maximizando las ventas.

b) Representa la región factible.

c) ¿Qué cantidad se debe fabricar de cada tipo para maximizar dichas ventas? ¿A cuánto ascienden?

----

a)

Sean x e y los bizcochos suaves y duros que se fabrican, respectivamente.

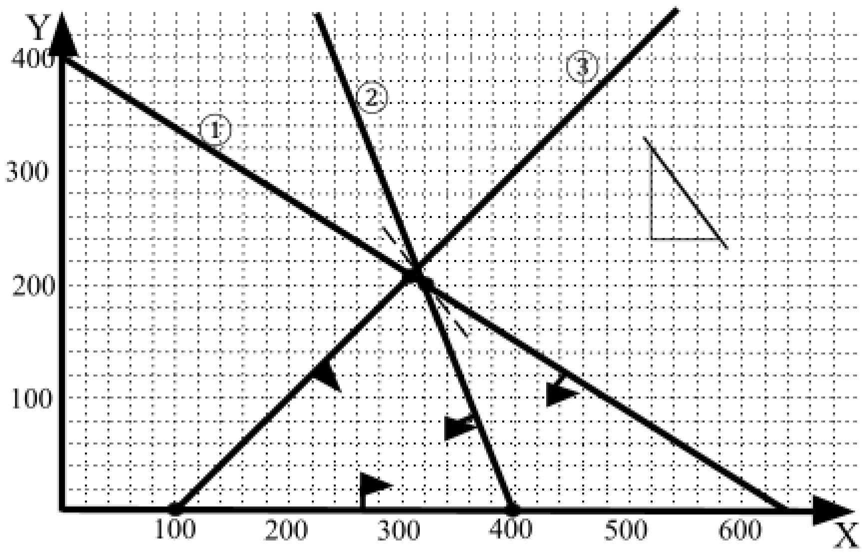
El sistema de inecuaciones que se deduce del enunciado es el siguiente:

$0,25x + 0,4y \leq 160$ $0,25x + 0,1y \leq 100$ $x \geq y + 100$ $x \geq 0;\ y \geq 10\ \}$ $25x +$

.

b)

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



x	0	640
y	400	0

①$\Rightarrow 5x + 8y \leq 3.200 \Rightarrow y \leq \frac{3.200 - 5x}{5} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	400	300
y	0	250

②$\Rightarrow 5x + 2y \leq 2.000 \Rightarrow y \leq \frac{2.000 - 5x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	100	500
y	0	400

③$\Rightarrow x - y \geq 100 \Rightarrow y \leq x - 100 \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No.$

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x - y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow A(100,\ 0).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x + 8y = 3.200 \\ x - y = 100 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 5x + 8y = 3.200 \\ 8x - 8y = 800 \end{array}\Big\} \Rightarrow$

$y = x - 100 = \frac{3.000}{13} - 100 = \frac{1.700}{13} \Rightarrow B\left(\frac{3.000}{13};\ \frac{1.700}{13}\right).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x + 8y = 3.200 \\ 5x + 2y = 2.000 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 5x + 8y = 3.200 \\ -5x - \end{array}$

$5x + 400 = 2.000;\ \ 5x = 1.600;\ \ x = 320 \Rightarrow C(320,\ 200).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 5x + 2y = 2.000 \end{array}\right\} \Rightarrow D(400,\ 0).$

$c)$

La función de objetivos es $f(x,\ y) = 6x + 4,5y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(100,\ 0) = 6 \cdot 100 + 0 = 600 + 0 = 600.$

$B \Rightarrow f\left(\frac{3.000}{13};\ \frac{1.700}{13}\right) = 6 \cdot \frac{3.000}{13} + 4,5 \cdot \frac{1.700}{13} = 1.384,6 + 588,5 = 1.973,1$

.

$C \Rightarrow f(320,\ 200) = 6 \cdot 320 + 4,5 \cdot 200 = 1.920 + 900 = 2.820.$

$D \Rightarrow f(400,\ 0) = 6 \cdot 400 + 4,5 \cdot 0 = 2.400 + 0 = 2.400.$

El máximo se produce en el punto $C(320,\ 200)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 6x + 4,5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{6}{4,5}x = -\frac{60}{45}x = -\frac{4}{3}x \Rightarrow m = -\frac{4}{3}.$$

$$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ fabricando\ 320\ bizcochos\ suaves\ y\ 200\ duros}.$$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 2.820\ euros}.$$

****

2º) El salario diario de un joven durante los cinco primeros años en determinada empresa se ajusta a la siguiente función: $S(t) = \begin{cases} 35 & si\ 0 \le t < 1 \\ 25 + 10t & si\ 1 \le t < 2 \\ -0,5t^2 + 4t + 39 & si\ 2 \le t \le 5 \end{cases}$, donde t representa el tiempo en años que lleva contratado.

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función salario y represéntala.

b) ¿En qué momento tuvo un salario máximo? ¿Y mínimo? Calcula dichos salarios.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$S'(t) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \le t < 1 \\ 10 & si\ 1 \le t < 2 \\ -t + 4 & si\ 2 \le t \le 5 \end{cases}.$$

El crecimiento y decrecimiento del salario fue el siguiente:

$\underline{El\ primer\ año\ el\ salario\ fue\ constante\ de\ 35\ euros\ diarios.}$

$\underline{El\ segundo\ año\ el\ salario\ aumentó\ a\ 30\ euros\ diarios.}$

$\underline{Los\ años\ tercero\ y\ cuarto\ años\ creció\ desde\ 30\ a\ 47\ euros.}$

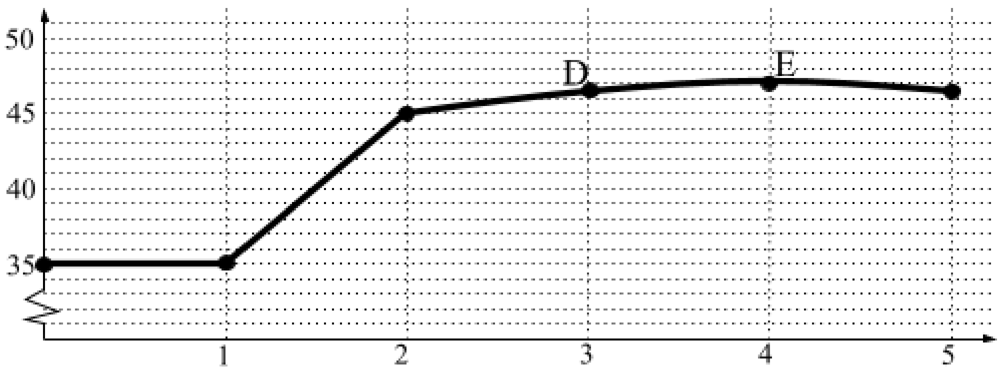
$\underline{El\ quinto\ año\ el\ salario\ decreció\ de\ 47\ a\ 46,5\ euros\ diarios.}$

Son puntos de la curva:

$S(0) = S(1) = 35 \Rightarrow A(0,\ 35);\ \ B(1,\ 35).$ $\qquad S(2) = 45 \Rightarrow C(2,\ 45).$

$S(4) = -0,5 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 39 = 47 \Rightarrow E(4;\ 47) \Rightarrow Máximo.$

$S(3) = S(5) = -0,5 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 39 = 46,5 \Rightarrow D(3;\ 46,5),\ F(5;\ 46,5).$



La representación gráfica, aproximada, es la que aparece en la figura adjunta.

$b)$

Para que una función tenga un máximo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada.

$$S'(t) = 0 \Rightarrow -t + 4 = 0; \; t = 4. \qquad S''(t) = -1 < 0 \Rightarrow Máximo.$$

$$\underline{El\ salario\ máximo\ lo\ alcanzó\ el\ cuarto\ año\ y\ es\ de\ 47\ euros}.$$

$$\underline{El\ salario\ mínimo\ fue\ el\ del\ primer\ año\ y\ fue\ de\ 35\ euros}.$$

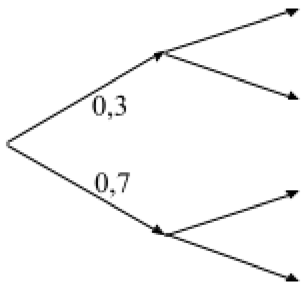
****

3º) El 30 % de las estudiantes de un instituto practica baloncesto. De entre las que practican baloncesto, el 40 % practica además tenis. De entre las que no practican baloncesto, un cuarto practica tenis. Elegida una estudiante de ese instituto al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique ambos deportes?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que practique tenis?

c) ¿Son independientes los sucesos "practicar tenis" y "practicar baloncesto"?



a)

$$P = P(B \cap T) = P(B) \cdot P(T/B) = 0,3 \cdot 0,4 = \underline{0,12}.$$

b)

$$P = P(T) = P(B \cap T) + P(\overline{B} \cap T) = P(B) \cdot P(T/B) + P(\overline{B}) \cdot P(T/\overline{B}) =$$

$$= 0,3 \cdot 0,40 + 0,7 \cdot 0,25 = 0,120 + 0,175 = \underline{0,295}.$$

c)

Dos sucesos B y T son independientes cuando $P(B \cap T) = P(B) \cdot P(T)$:

$$P(B) \cdot P(T) = 0,3 \cdot 0,295 = 0,0885 \neq 0,12 = P(B \cap T).$$

$\underline{\textit{Por lo expuesto anteriormente los sucesos } B \textit{ y } T \textit{ no son independientes}}.$

****

4º) Un consumidor cree que el peso medio de un producto es distinto del que indica el envase. Para estudiar este hecho, el consumidor toma una muestra aleatoria simple de 100 productos en los que se observó un peso medio de 245 gramos. Se supone además que el peso del producto por envase sigue una distribución normal con desviación típica de 9 gramos.

a) Construye un intervalo de confianza para el peso medio de ese producto al 95 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero peso media a partir de la media muestran con un error de estimación máximo de 2 gramos y un nivel de confianza del 90 %?

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

Datos: $n = 100;\ \overline{x} = 245;\ \sigma = 9;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(245 - 1,96 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}};\ 245 + 1,96 \cdot \frac{9}{\sqrt{100}}\right);$$

$$(245 - 1,96 \cdot 0,9;\ 245 + 1,96 \cdot 0,9);\ \ (245 - 1,764;\ 245 + 1,764).$$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = (243,236;\ \ 246,764).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$

$$1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$$

Datos: $\sigma = 9;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645;\ E = 2.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,645 \cdot \frac{9}{2}\right)^2 =$

$= (1,645 \cdot 4,5)^2 = 7,4025^2 = 54,79.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 55\ productos.}$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE GALICIA

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno debe responder solamente a los ejercicios de una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) Las ventas de tres productos P_1, P_2 y P_3, relacionados entre sí, dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales: $x + y + z = 6; x + y - z = 0; 2x - y + z = 3$, siendo $x,\ y,\ z$ las ventas de los productos P_1, P_2 y P_3, respectivamente.

a) Expresa el sistema en forma matricial $A \cdot X = B$.

b) Calcula la matriz inversa de A, siendo A la matriz cuadrada de orden 3 de los coeficientes.

c) Calcula las ventas $x,\ y,\ z$ para estos tres productos.

----

a)

El sistema resulta: $x + y + z = 6\ \ x + y - z = 0\ 2x - y + z = 3\ \}$.

La matriz de coeficientes es $A = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 2\ -1\ 1\ )$.

$$A \cdot X = B \Rightarrow \underline{(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 2\ -1\ 1\ ) \cdot (x\ y\ z\ ) = (6\ 0\ 3\ )}.$$

b)

$|A| = |1\ 1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 2\ -1\ 1\ | = 1 - 1 - 2 - 2 - 1 - 1 = - 6.\quad A^t = (1\ 1\ 2$

.

$Adj.\ de\ A^t = (|1\ -1\ -1\ 1\ |\ -|1\ -1\ 1\ 1\ |\ |1\ 1\ 1\ -1\ |\ -|1\ 2\ -1\ 1\ |\ |1\ 2\ 1\ 1\ |\ -$

.

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^{t}}{|A|} = \frac{(0\ -2\ -2\ -3\ -1\ 2\ -3\ 3\ 0\ )}{-6} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{6}\cdot(0\ 2\ 2\ 3\ 1\ \ -\ \ 2\ 3\ \ -\ \ 3\ 0\ )}$$

.

$c)$

$$A\cdot X\ =\ B;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X\ =\ A^{-1}\cdot B;\ \ I\cdot X\ =\ A^{-1}\cdot B \Rightarrow X\ =\ A^{-1}\cdot B.$$

$$X\ =\ A^{-1}\cdot B \Rightarrow (x\ y\ z\ ) = \frac{1}{6}\cdot(0\ 2\ 2\ 3\ 1\ \ -\ \ 2\ 3\ \ -\ \ 3\ 0\ )\cdot(6\ 0\ 3\ ) = \frac{1}{6}\cdot(6\ 12\ 18\ ) = (1\ 2\ 3\ )$$

.

$$\underline{Solución: x\ =\ 1,\ y\ =\ 2,\ z\ =\ 3}.$$

****

2º) Un nuevo producto tiene una demanda en miles de unidades que responde aproximadamente a la función $N(t) = 5 + \frac{20t}{1+t^2}$, $t \geq 0$ en meses.

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la demanda. Calcula la demanda máxima y el momento en el que se alcanza.

b) Evalúa la tendencia a largo plazo y representa la función.

c) ¿Después del máximo, bajaría la demanda de 11.000 unidades? ¿Cuándo?

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$N'(t) = 0 + \frac{20\cdot\left(1+t^2\right)-20t\cdot 2t}{\left(1+t^2\right)^2} = 20\cdot\frac{1+t^2-2t^2}{\left(1+t^2\right)^2} = 20\cdot\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}.$$

$$N'(t) = 0 \Rightarrow 20\cdot\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2} = 0;\ \ 1 - t^2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1,\ t_2 = -1 \notin D(N).$$

$$Crecimiento: N'(t) > 0 \Rightarrow t \in (0, 1).$$

$$Decrecimiento: N'(t) < 0 \Rightarrow t \in (1, +\infty).$$

La demanda crece el primer mes y decrece en el resto del tiempo.

Teniendo en cuenta que $N(t)$ es continua en su dominio y del estudio del crecimiento y decrecimiento se deduce que

La máxima demanda se produce al terminar el primer mes.

$$N(1) = 5 + \frac{20\cdot 1}{1+1^2} = 5 + \frac{20}{2} = 5 + 10 = 15.$$

La demanda máxima fue de 15.000 unidades.

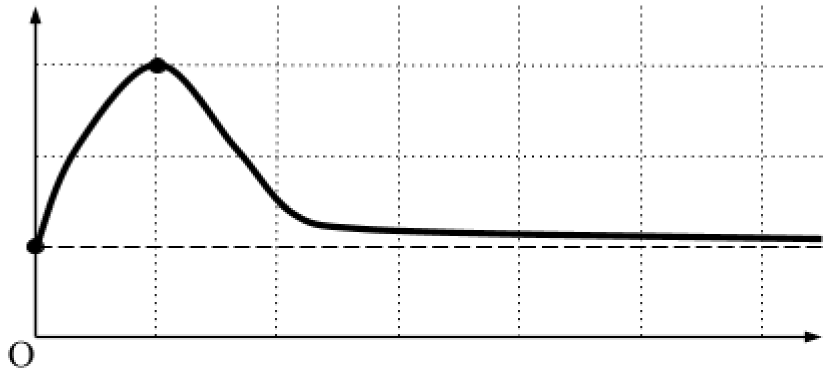
b)

$$N(t) = \left(5 + \frac{20t}{1+t^2}\right) = 5 + 0 = 5.$$

Con el tiempo la demandas se estabiliza en 5.000 unidades.

$N(0) = 5 + \frac{20 \cdot 0}{1+0^2} = 5.$ $\qquad N(1) = 15.$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



$c)$

Si la demanda decrece desde 15.000 unidades hasta 5.000 unidades, donde se estabiliza con el tiempo, y teniendo en cuenta el teorema de los Valores Intermedios que dice que "si una función es continua en su dominio alcanza todos los valores reales entre el máximo y el mínimo", por lo cual:

$\underline{La\ demanda\ desciende\ en\ algún\ momento\ hasta\ las\ 11.000\ unidades}.$

$N(t) = 11 \Rightarrow 5 + \frac{20t}{1+t^2} = 11;\ \frac{20t}{1+t^2} = 6;\ 20t = 6 + 6t^2;\ 6t^2 - 20t + 6 = 0;$

$2t^2 - 10t + 3 = 0;\ t = \frac{10 \pm \sqrt{100-24}}{8} = \frac{10 \pm \sqrt{76}}{8} = \frac{10 \pm \sqrt{4 \cdot 19}}{8} = \frac{10 \pm 2\sqrt{19}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{19}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1 = \frac{5+\sqrt{19}}{4} \cong 2,34;\ t_2 = \frac{5-\sqrt{19}}{4} \cong 0,16 < 1.$

La solución t_2 no se produce después del máximo.

$\underline{Tras\ es\ máximo\ baja\ la\ demanda\ de\ 11.000\ unidades\ dentro\ del\ 3^{er}\ mes}.$

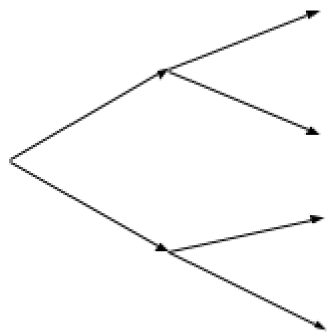
****

3º) En una empresa, el 30 % de los empleados son mujeres y el 70 % son hombres. De las mujeres, el 80 % tienen contrato indefinido, mientras que del grupo de los hombres, sólo el 70 % tiene ese tipo de contrato.

a) Calcula el porcentaje de personas de dicha empresa que tiene contrato indefinido.

b) Si un empleado tiene contrato indefinido obtén la probabilidad de que sea mujer.

c) ¿Son independientes los sucesos "ser hombre" y "tener contrato indefinido"?



a)

$$P = P(C) = P(M)\cdot P(C/M) + P(H)\cdot P(C/H) = 0,3\cdot 0,8 + 0,7\cdot 0,7 =$$

$$= 0,24 + 0,49 = \underline{0,73 = 73\ \%}.$$

b)

$$P = P(M/C) = \frac{P(M\cap C)}{P(C)} = \frac{P(M)\cdot P(C/M)}{P(M)\cdot P(C/M)+P(H)\cdot P(C/H)} = \frac{0,3\cdot 0,8}{0,3\cdot 0,8+0,7\cdot 0,7} =$$

$$= \frac{0,24}{0,24+0,49} = \frac{0,24}{0,73} = \underline{0,3288 = 32,88\ \%}.$$

c)

$P(H) = 0,3.$ $\quad P(C) = 0,73.$ $\quad P(H\cap C) = 0,7\cdot 0,7 = 0,49.$

Los sucesos H y C son independientes cuando $P(H\cap C) = P(H)\cdot P(C)$.

$P(H)\cdot P(C) = 0,3\cdot 0,73 = 0,219 \neq P(H\cap C) = 0,49.$

$$\underline{Los\ sucesos\ H\ y\ C\ no\ son\ independientes}.$$

****

4º) En un estanque se desea estimar el porcentaje de peces dorados. Para eso, se toma una muestra aleatoria de 700 peces y se encuentran que exactamente 70 de ellos son dorados.

a) Calcula, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de peces dorados en el estanque.

b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación?

c) Considera dicha muestra, ¿qué le ocurriría al error de estimación si aumentase el nivel de confianza? Justifica la respuesta.

----

a)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$

$1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$

$Datos$: $p = \frac{70}{700} = 0,1;\ \ q = 1 - 0,1 = 0,9;\ \ n = 700;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p,\ q\ y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$\left(0,1 - 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{700}};\ 0,1 + 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{700}}\right);$

$(0,1 - 2,575 \cdot 0,0113;\ 0,1 + 2,575 \cdot 0,0113);\ \ (0,1 - 0,0292;\ 0,1 + 0,0292)$.

$$\underline{I.\ C._{99\ \%} = (0,0708;\ 0,1292).}$$

b)

$E = \frac{0,1292 - 0,0708}{2} = \frac{0,0584}{2} = \underline{0,0292}.$

c)

El error de estimación puede expresarse de la forma $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$; si se aumenta el nivel de confianza aumenta el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ permaneciendo invariables los valores de $p,\ q\ y\ n$, se deduce que:

$$\underline{El\ error\ aumenta\ a\ medida\ que\ aumente\ el\ nivel\ de\ confianza.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Un centro comercial tiene en existencia 750 reproductores de DVD en el almacén A y otros 600 en el almacén B. Si quiere tener por lo menos 900 reproductores en la tienda y que los del almacén A no excedan el triple de los de B:

a) Formula el problema y representa gráficamente el conjunto de las soluciones. ¿Se podrían enviar 400 unidades desde cada almacén?

b) Si los costes unitarios de envío son 0,30 euros por unidad para el almacén A y 0,25 euros por unidad para el almacén B, ¿cuántas unidades se deben enviar desde cada almacén para minimizar el coste de transporte? ¿A cuánto asciende dicho coste?

----

a)

Sean $x\, e\, y$ el número de reproductores que tiene en la tienda el Centro Comercial de los almacenes A y B, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $x + y \geq 900 \quad x \leq 3y\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 \}$.

x	900	9
y	0	900

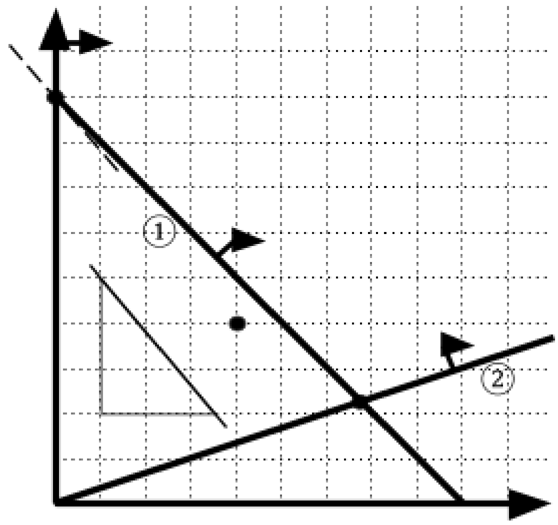
①$\Rightarrow x + y \geq 900 \Rightarrow y \geq 900 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \to No.$

x	0	900
y	0	300

②$\Rightarrow x \leq 3y \Rightarrow y \geq \frac{x}{3} \Rightarrow P(200,\ 0) \to No.$

La zona factible, que es abierta, es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \quad x = 0\ x + y = 900 \} \Rightarrow A(0,\ 900).$

$B \Rightarrow \quad x = 3y\ x + y = 900 \} \quad x - 3y = 0\ x + y = 900 \}$

$-x + 3y = 0\ x + y = 900 \} \Rightarrow 4y = 900;\ \ y = 225;$

$x = 675 \Rightarrow B(675,\ 225)$.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 0,30x + 0,25y$.

El punto $Q(400,\ 400)$ no pertenece a la zona factible.

$$\underline{No\ se\ pueden\ enviar\ 400\ reproductores\ DVD\ de\ cada\ almacén.}$$

$b)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 900) = 0,30 \cdot 0 + 0,25 \cdot 900 = 0 + 225 = 225.$

$B \Rightarrow f(675,\ 225) = 0,30 \cdot 675 + 0,25 \cdot 225 = 202,50 + 56,25 = 258,75.$

El mínimo se produce en el punto $A(0,\ 900)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 0,30x + 0,25y = 0 \Rightarrow y = -\frac{0,30}{0,25}x = -\frac{6}{5}x = -\frac{3}{2,5}x \Rightarrow m = -\frac{3}{2,5}.$$

$$\underline{El\ coste\ se\ minimiza\ enviando\ 675\ reproductores\ DVD\ de\ A\ y\ 225\ de\ B.}$$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ del\ transporte\ es\ de\ 225\ euros.}$$

****

2º) Un gimnasio abre al público a principios de 2.008, la función:

$G(t) = \{10(5t - t^2) \ si \ 0 \leq t \leq 4 \ 80 - 10t \ si \ 4 < t \leq 10$ indica como evolucionaron sus ganancias (en miles de euros) en función del tiempo t (en años) transcurrido desde su apertura, correspondiendo $t = 0$ a principios de 2.008.

a) Estudia en qué períodos se produjo un aumento y en los que se produjo una disminución de sus ganancias.

b) ¿A cuánto ascendieron las ganancias máximas? ¿En qué año se obtuvieron?

c) Representa la gráfica $G(t)$. ¿En algún año después de su apertura no se obtuvieron ganancias? ¿A partir de algún año dejó de ser rentable el gimnasio? ¿Cuándo?

----

a)

Se estudia en primer lugar la continuidad de la función para $t = 4$:

$$Para\ t = 4 \Rightarrow \{G(t) = \left[10\left(5t - t^2\right)\right] = 40 = G(4)\ G(t) = (80 - 10t) = 40$$

$$\Rightarrow G(t) = G(t) = G(4) \Rightarrow G(t)\ es\ continua\ en\ su\ dominio.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$G'(t) = \{10(5 - 2t) \ si \ 0 \leq t \leq 4 \ - 10 \ si \ 4 < t \leq 10 .$$

$$G'(t) = 0 \Rightarrow 10(5 - 2t) = 0; \ \ 5 - 2t = 0 \Rightarrow t = 2,5.$$

$$Crecimiento: G'(t) > 0 \Rightarrow t \epsilon (0; 2,5).$$

$$Decrecimiento: G'(t) < 0 \Rightarrow t \epsilon (2,5; 10).$$

$$\underline{Las\ ganancias\ crecieron\ hasta\ los\ 2\ años\ y\ medio\ y\ disminuyeron\ el\ resto}.$$

b)

Teniendo en cuenta la continuidad de la función y los periodos de crecimiento y decrecimiento, se deduce que:

$$\underline{Las\ ganancias\ máximas\ se\ produjeron\ a\ mediados\ del\ segundo\ año}.$$

$$G(2,5) = 10\left(5 \cdot 2,5 - 2,5^2\right) = 10(12,5 - 6,25) = 10 \cdot 6,25 = 62,5.$$

$\underline{Las\ ganancias\ máximas\ fueron\ de\ 62,5\ euros}.$

$c)$

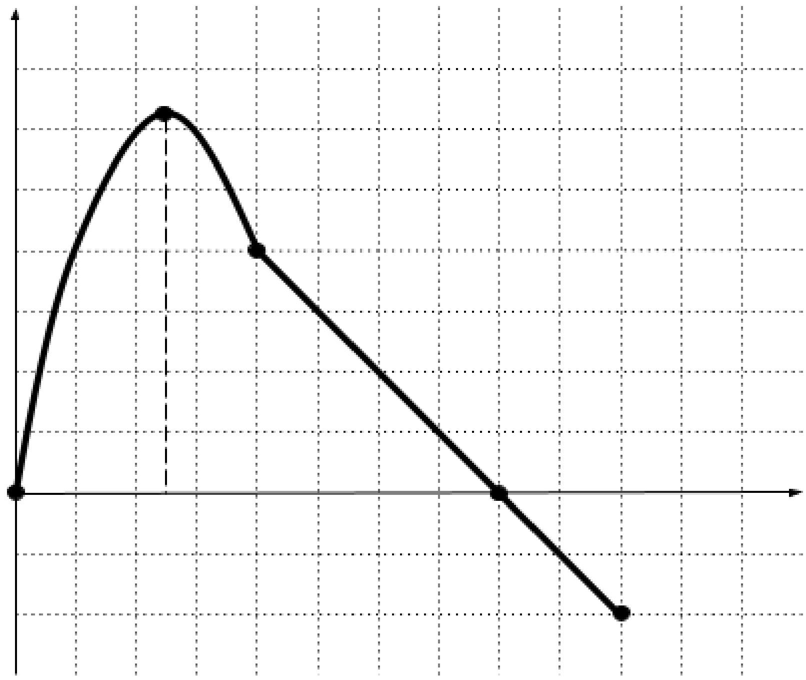
Para la representación gráfica de la función tenemos en cuenta lo siguiente:

$G(0)=\ 0 \rightarrow O(0,\ 0).$ $\qquad$ $G(2,5)=\ 62,5 \rightarrow A(2'5,\ 62'5) \Rightarrow Máximo.$

$G(4)=\ 40 \rightarrow B(40,\ 40).$ $G(8)=\ 0 \rightarrow C(8,\ 0).$

$G(10)=-\ 20 \rightarrow D(10,\ -\ 20).$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que indica la figura.



$\underline{No\ se\ obtivieron\ ganancias\ el\ octavo\ año.}$

$\underline{El\ gimnasio\ dejó\ de\ ser\ rentable\ a\ partir\ del\ octavo\ año}.$

****

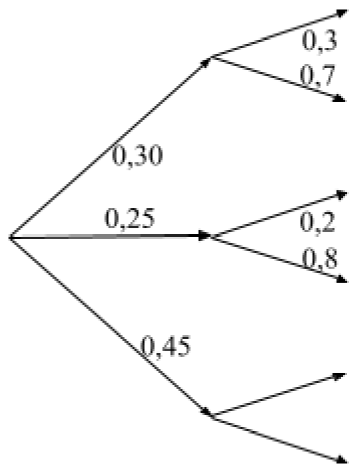
3º) En una población de cada 200 consumidores de una bebida isotónica 60 consuman la marca A, 50 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30 % de los consumidores de A, el 20 % de consumidores de B y el 40 % de consumidores de C son jóvenes.

a) Se selecciona al azar un consumidor de dicha bebida en esa población, ¿cuál es la probabilidad de que sea joven?

b) Si se seleccionó un joven calcula la probabilidad de que consuma la marca B.

c) ¿Son independientes los sucesos "ser joven" y "consumir la marca A"?

$$A = \frac{60}{200} = 0,30; \;\; B = \frac{50}{200} = 0,25; \;\; C = \frac{90}{200} = 0,45.$$



a)

$$P = P(Jo) = P(A \cap Jo) + P(B \cap Jo) + P(C \cap Jo) =$$

$$= P(A) \cdot P(Jo/A) + P(B) \cdot P(Jo/B) + P(C) \cdot P(Jo/C) =$$

$$= 0,30 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,2 + 0,45 \cdot 0,4 = 0,09 + 0,05 + 0,18 = \underline{0,32}.$$

b)

$$P = P(B/Jo) = \frac{P(B \cap Jo)}{P(Jo)} = \frac{P(B) \cdot P(Jo/B)}{P(Jo)} = \frac{0,25 \cdot 0,2}{0,32} = \frac{0,05}{0,32} = \underline{0,15625}.$$

c)

$P(Jo) = 0,320.$ $\quad P(A) = 0,30.$ $\quad P(A \cap Jo) = 0,30 \cdot 0,3 = 0,090.$

Los sucesos A y Jo son independientes cuando $P(A \cap Jo) = P(A) \cdot P(Jo)$.

$P(A) \cdot P(Jo) = 0,30 \cdot 0,320 = 0,096 \neq P(A \cap Jo) = 0,090.$

$\underline{\textit{Los sucesos } A \textit{ y } Jo \textit{ no son independientes}}.$

****

4º) Una empresa quiere racionalizar el gasto en teléfono móvil de sus agentes comerciales. Para eso se hace un estudio sobre una muestra de dichos agentes y se obtiene: "con una confianza del 95 %, la media del gasto mensual en teléfono móvil está entre 199,71 y 220,29 euros". Suponiendo que el gasto en teléfono móvil es una variable normal:

a) Calcula el gasto medio muestral y el error cometido en la estimación.

b) Si la desviación típica es de 42 euros, ¿qué tamaño tiene la muestra?

----

a)

$$G(m) = \overline{x} = \frac{220{,}29+199{,}71}{2} = \frac{420}{2} = \underline{210}.$$

$$E = \frac{220{,}29-199{,}71}{2} = \frac{20{,}58}{2} = \underline{10,29}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1,96.$$

$$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

Datos: $\sigma = 42$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$; $E = 10,29$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,96 \cdot \frac{42}{10{,}29}\right)^2 =$

$= (1,96 \cdot 4,0816)^2 = 8^2 = 64.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 64\ agentes}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta sólo una de las dos opciones propuestas (OCIÓN A/OPCIÓN B). No está permitido el uso de calculadoras gráficas o programables.

OPCIÓN A

Parte 1

Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1º) Sea $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32$.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función dada.

b) Determinar los extremos relativos de la función.

c) Calcula $\frac{f(x)}{x-2}$.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0;\ 12x\left(x^2 + x - 2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;$$

$$x^2 + x - 2 = 0;\ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow x_2 = -2,\ x_3 = 1.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en R por ser una función polinómica, los valores que anulan la primera derivada dividen el dominio de la función en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$, en los cuales la función es, alternativamente creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 2 \in (1, +\infty)$, el valor de la derivada es:

$f'(2) = 12 \cdot 2 \cdot (4 + 2 - 2) = 96 > 0 \Rightarrow Creciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-2, 0) \cup (1, +\infty), }.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, -2) \cup (0, 1), }.$$

$b)$

De la continuidad de la función y los periodos de crecimiento se deducen los máximos y mínimos relativos de la función; no obstante se determinan por su estudio mediante derivadas.

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$f''(x) = 36x^2 + 24x - 24.$

$f''(-2) = 36 \cdot (-2)^2 + 24 \cdot (-2) - 24 = 144 - 48 - 24 = 72 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Mínimo relativo para $x = -2$.

$f(-2) = 3 \cdot (-2)^4 + 4 \cdot (-2)^3 - 12 \cdot (-2)^2 - 32 = 48 - 32 - 48 - 32 =$

$= -64 \Rightarrow \underline{Mínimo: A(-2, -64)}.$

$f''(0) = -24 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo para $x = 0$.

$f(0) = -32 \Rightarrow Máximo\ relativo$: $\underline{B(0, -32)}$.

$f''(1) = 36 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 - 24 = 36 + 24 - 24 = 36 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Mínimo relativo para $x = 1$.

$f(1) = 3 \cdot 1^4 + 4 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 - 32 = 3 + 4 - 12 - 32 = 7 - 44 =$

$= -\ 37 \Rightarrow \underline{Mínimo: C(1,\ -\ 37)}.$

$c)$

$$\frac{f(x)}{x-2} = \frac{3x^4+4x^3-12x^2-32}{x-2} = \frac{3\cdot 2^4+4\cdot 2^3-12\cdot 2^2-32}{2-2} = \frac{48+32-48-32}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow$$

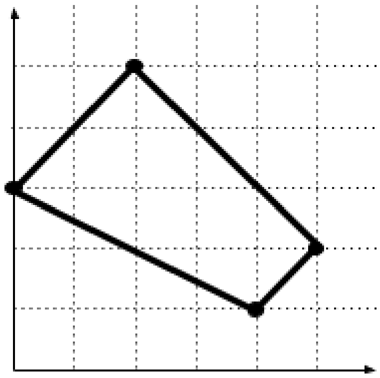
$$\Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \frac{12x^3+12x^2-24x}{1} = 12\cdot 2^3 + 12\cdot 2^2 - 24\cdot 2 =$$

$$= 12\cdot 2\cdot \left(2^2 + 2 - 2\right) = 24\cdot 4 = 96.$$

$$\underline{\frac{f(x)}{x-2} = 96.}$$

****

2º) La imagen que aparece a continuación muestra la región factible asociada con el conjunto de restricciones de un cierto problema de optimización.



$a)$ Determina el citado conjunto de restricciones.

$b)$ Maximiza la función $f(x,\ y) = 5y - x + 12$ en la región factible.

$a)$

La recta que pasa por los puntos $A(0,\ 3)$ y $B(2, 5)$ es:

$\frac{y-5}{3-5} = \frac{x-2}{0-2};\ \ \frac{y-5}{-2} = \frac{x-2}{-2};$

$y - 5 = x - 2 \Rightarrow r_1 \equiv x - y = -3.$

La recta que pasa por los puntos $B(2,\ 5)$ y $C(5, 2)$ es:

$\frac{y-2}{5-2} = \frac{x-5}{2-5};\ \ \frac{y-2}{3} = \frac{x-5}{-3};$

$-y + 2 = x - 5 \Rightarrow r_2 \equiv x + y = 7.$

La recta que pasa por los puntos $C(5,\ 2)$ y $D(4, 1)$ es:

$\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-4}{5-4};\ \ \frac{y-1}{1} = \frac{x-4}{1};$

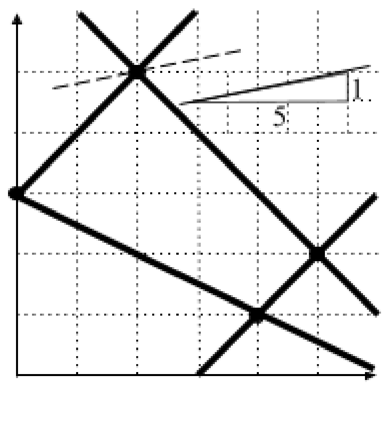
$y - 1 = x - 4 \Rightarrow r_3 \equiv x - y = 3.$

La recta que pasa por los puntos $D(4,\ 1)$ y $A(0, 3)$ es:

$\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-0}{4-0};\ \ \frac{y-3}{-2} = \frac{x}{4};$

$2y - 6 = -x \Rightarrow r_4 \equiv x + 2y = 6.$

Teniendo en cuenta que las rectas r_1, r_2 y r_3 contienen al origen de coordenadas considerando la zona factible y que la recta r_4 no lo contiene, las inecuaciones que denotan la zona factible son:



$\underline{x - y \leq -3 \quad x + y \leq 7 \quad x - y \leq 3\ x + 2y \geq 6 \}}.$

$b)$

La función a maximizar es $f(x,\ y) =- x + 5y + 12$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 3) =- 0 + 5 \cdot 3 + 12 = 0 + 15 + 12 = 27.$

$B \Rightarrow f(2,\ 5) =- 2 + 5 \cdot 5 + 12 =- 2 + 25 + 12 = 35.$

$C \Rightarrow f(5,\ 2) =- 5 + 5 \cdot 2 + 12 =- 5 + 10 + 12 = 17.$

$D \Rightarrow f(4,\ 1) =- 4 + 5 \cdot 1 + 12 =- 4 + 5 + 12 = 13.$

El máximo se produce en el punto $B(2,\ 5)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) =- x + 5y + 12 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{12}{5} \Rightarrow m = \frac{1}{5}.$

$\underline{El\ punto\ que\ maximiza\ la\ función\ dada\ es\ B(2,\ 5)}.$

****

3º) En un determinado hospital, el tiempo de espera para una intervención de cirugía vascular sigue una distribución normal con desviación típica de 15 días.

a) Al analizar el tiempo esperado por 100 pacientes atendidos en el servicio se obtuvo que la espera media fue de 43 días. Obtener un intervalo de confianza al 85 % para la media del tiempo de espera en cirugía vascular.

b) Tomando la muestra del apartado anterior, determinar el nivel de confianza que daría lugar a $(41,\ 45)$ como intervalo de confianza para la media del tiempo de espera.

----

a)

Para un nivel de confianza del 85 % es:

$1 - \alpha = 0,85 \rightarrow \alpha = 1 - 0,85 = 0,15 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,075} = 1,44.$

$1 - 0,075 = 0,9250 \rightarrow z = 1,44).$

Datos: $n = 100;\ \overline{x} = 43;\ \sigma = 15;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,44.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(43 - 1,44 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}};\ 43 + 1,44 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}\right);$

$(43 - 1,44 \cdot 1,5;\ 43 + 1,44 \cdot 1,5);\ \ (43 - 2,16;\ 43 + 2,16).$

$$\underline{I.\ C._{85\ \%} = (40,84;\ 45,16).}$$

b)

$E = \frac{45-41}{2} = \frac{4}{2} = 2.$ Datos: $n = 100;\ \sigma = 115;\ E = 2.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{2 \cdot \sqrt{100}}{15} = \frac{20}{15} = 1,3333.$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0,\ 1)$ a 1,33 le corresponde el valor de 0,9082, por lo cual:

$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9082;\ \ \alpha = 2 - 1,8164 = 0,1836 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,8164.$

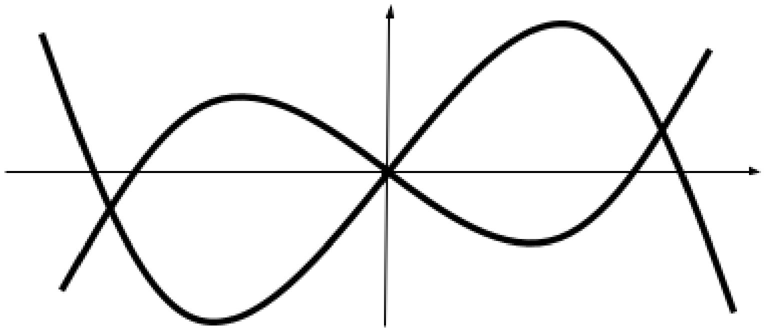
$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ es\ del\ 81,64\ \%}.$

****

Parte 2

Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

4º) Consideramos las funciones $f(x) = x\left(x^2 - 3\right)$ y $g(x) = -x\left(x^2 - 3\right)$.



a) Determinar el área de la región limitado por las curvas $y = f(x)\ e\ y = g(x)$. Dicha región aparece sombreada en la figura adjunta.

b) ¿En qué puntos de la curva $y = f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 9x + 2.018$? Determina la recta tangente en los puntos indicados.

----

a)

Los puntos de corte de ambas funciones tienen como abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x\left(x^2 - 3\right) = -x\left(x^2 - 3\right);\ \ x\left(x^2 - 3\right) + x\left(x^2 - 3\right) = 0;$$

$$2x\left(x^2 - 3\right) = 0;\ \ x\left(x^2 - 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{3}.$$

Los puntos de corte, además del origen, son $A\left(-\sqrt{3},\ 0\right)\ y\ B\left(0,\ \sqrt{3}\right)$. (El esquema que se nos da no es correcto, aunque no dificulta el cálculo del área pedida).

Ambas funciones son simétricas con respecto al origen, por ser $f(x) = f(-x)$ y $g(x) = g(-x)$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = 2\cdot\int_0^{\sqrt{3}}[g(x) - f(x)]\cdot dx = 2\cdot\int_0^{\sqrt{3}}\left[-x\left(x^2 - 3\right) - x\left(x^2 - 3\right)\right]\cdot dx =$$

$$= -4\cdot\int_0^{\sqrt{3}}\left[x\left(x^2 - 3\right)\right]\cdot dx = 4\cdot\int_{\sqrt{3}}^{0}\left(x^3 - 3x\right)\cdot dx = 4\cdot\left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{\sqrt{3}}^{0} =$$

$$= 0 - 4\cdot\left[\frac{\left(\sqrt{3}\right)^4}{4} - \frac{3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2}{2}\right] = -4\cdot\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right) = -9 + 18 = 9.$$

$$\underline{S = 9\,u^2}.$$

b)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

La pendiente de la recta $y = 9x + 2.018$ es $m = 9$.

$f(x) = x(x^2 - 3) = x^3 - 3x$. $\quad f'(x) = 3x^2 - 3$.

$f'(x) = 9 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 9;\ 3x^2 = 12;\ x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$.

$f(2) = 2\cdot(2^2 - 3) = 2$. Por simétrica con respecto al origen: $f(-2) = -2$.

$\underline{Los\ puntos\ de\ tangencia\ son\ P(-2,\ -2)\ y\ Q(2,\ 2)}$.

****

5º) Consideramos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -2(a-1)x - y + 2z = 4 \\ x + ay + z = 2 \\ 2x + y + 2(a+1)z = 4 \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro a el sistema es compatible y determinado?

b) Resuelve el sistema para $a = 0$. ¿Es posible resolver el sistema para $a = 1$?

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} -2a+2 & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} -2a+2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2a+2 & 4 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} -2a+2 & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2a+2 \end{vmatrix} = a\left(4a^2 - 4\right) + 2 - 2 - 4a + 2a -$$

$$+ 2a + 2 = 4a\left(a^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow a_1 = 0,\ a_2 = -1,\ a_3 = 1.$$

$$\underline{Para \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$$

b)

Para $a = 0$ es $M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{C_1 + C_2 = C_3\right\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$$

El sistema resulta $\begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \\ x + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se desprecia una ecuación (tercera) y se hace $z = \lambda \Rightarrow x = 2 - \lambda$.

$$2x - y + 2z = 4 \Rightarrow y = 2x + 2\lambda - 4 = 4 - 2\lambda + 2\lambda - 4 = 0.$$

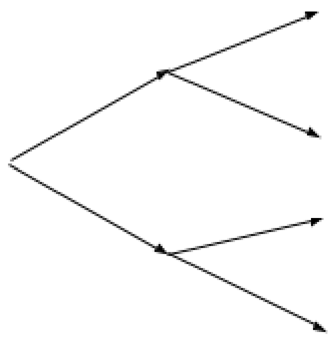
$$\underline{Solución: x = 2 - \lambda,\ \ y = 0,\ \ z = \lambda,\ \ \forall\lambda \in R.}$$

****

6º) Durante las fiestas de San Bernabé del pasado año, seis de cada diez personas que acudieron a la degustación del pan, el pez y el vino adquirieron la tradicional jarra de barro para tomar vino. Una de cada cuatro personas que adquirió la jarra no consumió vino y cuatro de cada cinco personas que no la compraron tampoco lo tomaron.

a) Calcula el porcentaje de personas que bebieron vino en la degustación.

b) Un amigo mío no tomó vino el año pasado, ¿cuál es la probabilidad de que mi amigo comprase la jarra?



a)

$$P = P(C) = P(J) \cdot P(C/J) + P(\overline{J}) \cdot P(C/\overline{J}) = 0,6 \cdot 0,25 + 0,4 \cdot 0,20 =$$

$$= 0,150 + 0,080 = \underline{0,230}.$$

b)

$$P = P(\overline{C}/J) = \frac{P(J \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(J) \cdot P(\overline{C}/J)}{1 - P(C)} = \frac{0,6 \cdot 0,75}{1 - 0,23} = \frac{0,45}{0,77} = \underline{0,5844}.$$

****

OPCIÓN B

Parte 1

Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

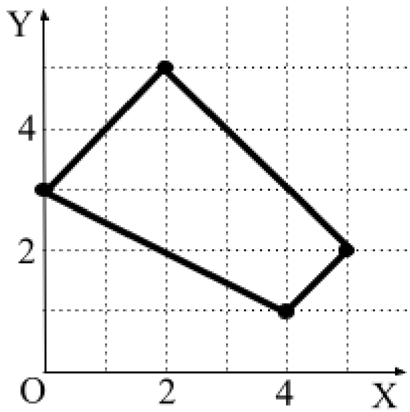
1º) Sea $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32$.

$a)$ Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función dada.

$b)$ Determinar los extremos relativos de la función.

$c)$ Calcula $\frac{f(x)}{x-2}$.

2º) La imagen que aparece a continuación muestra la región factible asociada con el conjunto de restricciones de un cierto problema de optimización.



$a)$ Determina el citado conjunto de restricciones.

$b)$ Maximiza la función $f(x, y) = 5y - x + 12$ en la región factible.

3º) En un determinado hospital, el tiempo de espera para una intervención de cirugía vascular sigue una distribución normal con desviación típica de 15 días.

$a)$ Al analizar el tiempo esperado por 100 pacientes atendidos en el servicio se obtuvo que la espera media fue de 43 días. Obtener un intervalo de confianza al 85 % para la media del tiempo de espera en cirugía vascular.

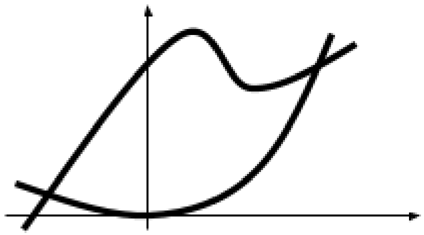
$b)$ Tomando la muestra del apartado anterior, determinar el nivel de confianza que daría lugar a $(41, 45)$ como intervalo de confianza para la media del tiempo de espera.

(RESUELTOS EN LA OPCIÓN A)

Parte 2

Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

4º) Sea $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1$.



a) ¿En qué puntos la curva $y = f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta $y = x + 2.018$?

b) Determinar el área de la región limitada por las curvas $y = f(x)$ e $y = x^4$. (La región cuya área se solicita aparece representada en la figura adjunta).

----

a)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

La pendiente de la recta $y = x + 2.018$ es $m = 1$.

$f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1.$ $\qquad$ $f'(x) = 4x^3 - 4x + 1.$

$f'(x) = 1 \Rightarrow 4x^3 - 4x + 1 = 1;\ \ 4x^3 - 4x = 0;\ \ 4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$

$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 2 - 1 + 1 = -1 \Rightarrow A(-1, -1)$.

$f(0) = 1 \Rightarrow B(0, 1).$

$f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 1 = 1 \Rightarrow C(1, 1).$

Los puntos de tangencia son $A(-1, -1)$, $B(0, 1)$ y $C(1, 1)$.

b)

Los puntos de corte de las funciones $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1$ e $y = x^4$ tienen como abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$f(x) = y \Rightarrow x^4 - 2x^2 + x + 1 = x^4;\ \ -2x^2 + x + 1 = 0;\ \ 2x^2 - x - 1 = 0;$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 1.$$

La superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} [f(x) - y] \cdot dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left[\left(x^4 - 2x^2 + x + 1\right) - x^4\right] \cdot dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(-2x^2 + x + 1\right) \cdot dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1\right) - \left[-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{2}{3} + 2 - \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = \frac{-16+48-1-3}{24} = \frac{28}{24} = \frac{7}{6}$$

$$\underline{S = \frac{7}{6}\ u^2 \cong 1,1667\ u^2.}$$

****

5º) Consideramos la matriz $A = (3a - 7 \ \ - 6\ 6\ 3a + 6\ )$.

a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Tomando $a = 1/3$, determinar una matriz X tal que $A\cdot X + 6I_2 = A^3 + A\cdot A^t$.

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de A e I_2 la matriz identidad de orden dos).

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = |3a - 7 \ \ - 6\ 6\ 3a + 6\ | = (3a - 7)(3a + 6) + 36 =$$

$$= 9a^2 + 18a - 21a - 42 + 36 = 9a^2 - 3a - 6 = 0;\ \ 3a^2 - a - 2 = 0;$$

$$a = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2\cdot 3} = \frac{1\pm\sqrt{25}}{6} = \frac{1\pm 5}{6} \Rightarrow a_1 = -\frac{2}{3},\ a_2 = 1.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \left\{-\frac{2}{3},\ 1\right\}}.$$

b)

Para $a = \frac{1}{3} \Rightarrow A = (-\ 6 \ \ -\ 6\ 6\ 7\ )$.

$$A\cdot X + 6I_2 = A^3 + A\cdot A^t;\ \ A\cdot X = A^3 + A\cdot A^t - 6I_2;$$

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot\left(A^3 + A\cdot A^t - 6I_2\right) \Rightarrow \underline{X = A^{-1}\cdot\left(A^3 + A\cdot A^t - 6I_2\right)}.$$

$$|A| = |-\ 6 \ \ -\ 6\ 6\ 7\ | = -\ 42 + 36 = -\ 6. \quad A^t = (-\ 6\ 6 \ \ -\ 6\ 7\ ).$$

$$Adj.\ de\ A^t = (7\ 6 \ \ -\ 6 \ \ -\ 6\ ) \Rightarrow A^{-1} = \left(-\ \frac{7}{6} \ \ -\ 1\ 1\ 1\right).$$

$$A^3 + A\cdot A^t - 6I_2 = A\cdot\left(A^2 + A^t\right) - 6I_2 =$$

$$= A\cdot\left[(-\ 6 \ \ -\ 6\ 6\ 7\ )\cdot(-\ 6 \ \ -\ 6\ 6\ 7\ ) + A^t - 6I_2\right] =$$

$$= A\cdot[(0 \ \ -\ 6\ 6\ 13\ ) + (7\ 6 \ \ -\ 6 \ \ -\ 6\ ) - (6\ 0\ 0\ 6\ )] = (-\ 6 \ \ -\ 6\ 6\ 7\ )\cdot(1\ 0\ 0\ 1\ ) = A$$

.

$$X = A^{-1}\cdot\left(A^3 + A\cdot A^t - 6I_2\right) = A^{-1}\cdot A = I.$$

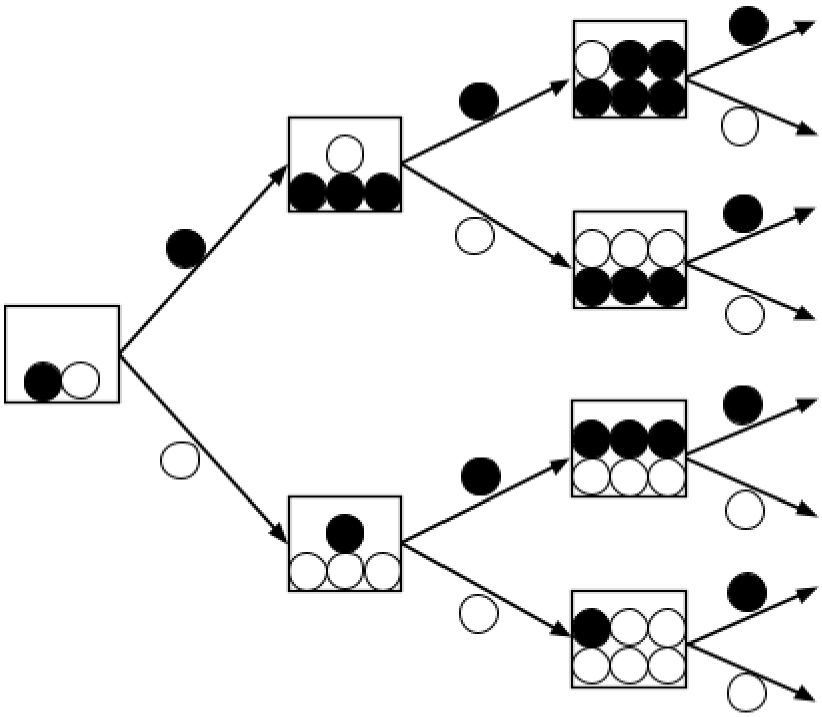
$$\underline{X = I}.$$

****

6º) En una caja tenemos inicialmente una bola negra y otra blanca. Cada vez que extraemos una bola, introducimos tres bolas del color de la extraída. Sacamos una primera bola y procedemos a hacer la reposición, sacamos una segunda bola y reponemos y sacamos una tercera bola.

a) Determinar la probabilidad de que en las tres extracciones hayamos sacada bolas del mismo color.

b) Determinar la probabilidad de que en las tres extracciones hayamos sacado dos bolas del mismo color y otra de color distinto?



a)

$$P = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2} = \underline{\frac{5}{8} = 0,625}.$$

b)

$$P = P(NNB) + P(NBN) + P(NBB) + P(BBN) + P(BNB) + P(BNN) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right) = 6\cdot\frac{1}{16}$$

$$= \underline{\frac{3}{8} = 0,375}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta sólo una de las dos opciones propuestas (OCIÓN A/OPCIÓN B). No está permitido el uso de calculadoras gráficas o programables.

OPCIÓN A

Parte 1

Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1º) Consideramos la función $f(x) = \frac{x(x+a)}{x^2-4}$, donde a es un cierto parámetro real.

a) Determina el valor de a si la recta tangente en $x = 0$ es paralela a la recta de ecuación $y = \frac{x}{4} + 2.018$. Dar la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ para el valor obtenido de a.

b) Tomando $a = 2$, determinar las asíntotas de $f(x)$.

----

a)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual al valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{[1\cdot(x+a)+x\cdot 1]\cdot\left(x^2-4\right)-x(x+a)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{(2x+a)\cdot\left(x^2-4\right)-2x^2\cdot(x+a)}{\left(x^2-4\right)^2} =$$

$$= \frac{2x^3-8x+ax^2-4a-2x^3-2ax^2}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{-8x-ax^2-4a}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{-ax^2-8x-4a}{\left(x^2-4\right)^2}.$$

$$m = f'(0) = \frac{-4a}{(-4)^2} = -\frac{a}{4}.$$

La pendiente de la recta $y = \frac{x}{4} + 2.018\ es\ m = \frac{1}{4}$.

$$-\frac{a}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{a = -1}.$$

$b)$

Para $a = 2$ es $f(x) = \frac{x(x+2)}{x^2-4} = \frac{x^2+2x}{x^2-4}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$k = f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-4} = 1$.

$\underline{La\ recta\ y = 1\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función.}$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2.$

$\underline{Las\ rectas\ x = -2\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales.}$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

****

2º) La productora cinematográfica Filmtropía va a rodar tres películas familiares en los próximos meses. En cada una de ellas debe contratar actores, actrices e intérpretes infantiles. Cada día de rodaje tiene presupuestada una cantidad fija de dinero para el pago de honorarios a los intérpretes. El número de actores y actrices es conocido pero el número de intérpretes infantiles es un valor t que puede variar. Las retribuciones de los actores y actrices se fijarán en función del número de intérpretes infantiles que se contraten. La distribución de intérpretes por película y el presupuesto diario aparecen en la tabla adjunta.

	Película 1	Película 2	Película 3
Actores	2	4	2
Actrices	1	4	3
Intérpretes infantiles	t	$3t-2$	$2t-1$
Presupuesto diario (miles de euros)	17	40	27

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar los honorarios de cada intérprete por día de trabajo.

b) Determinar dichos honorarios.

c) Como criterio para fijar el número de intérpretes infantiles se ha decidido que los actores y actrices deben cobrar lo mismo por cada día de trabajo. ¿Cuál será el número de intérpretes infantiles de cada película?

----

a)

Sean $x,\ y,\ z$ los salarios diarios de actores, actrices e intérpretes infantiles que contrata la productora, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce de la tabla es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+tz=17 \\ 4x+4y+(3t-2)z=40 \\ 2x+3y+(2t-1)z=27 \end{array}\right\}.$$

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 17 & 1 & t \\ 40 & 4 & 3t-2 \\ 27 & 3 & 2t-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & t \\ 4 & 4 & 3t-2 \\ 2 & 3 & 2t-1 \end{vmatrix}}=\frac{68(2t-1)+120t+27(3t-2)-108t-51(3t-2)-40(2t-1)}{8(2t-1)+12t+2(3t-2)-8t-6(3t-2)-4(2t-1)}=$$

$$=\frac{28(2t-1)+12t-24(3t-2)}{4(2t-1)+4t-4(3t-2)}=\frac{7(2t-1)+3t-6(3t-2)}{(2t-1)+t-(3t-2)}=\frac{14t-7+3t-18t+12}{2t-1+t-3t+2}=\frac{5-t}{1}=t-5.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 17 & t \\ 4 & 40 & 3t-2 \\ 2 & 27 & 2t-1 \end{vmatrix}}{1}=\frac{80(2t-1)+108t+34(3t-2)-80t-54(3t-2)-68(2t-1)}{1}=$$

$= 12(2t - 1) + 28t - 20(3t - 2) = 24t - 12 + 28t - 60t + 40 = 28 - 8t$
.

$$z = \frac{|2\ 1\ 17\ 4\ 4\ 40\ 2\ 3\ 27|}{1} = 216 + 204 + 80 - 136 - 240 - 108 = 500 - 484 =$$
.

$c)$

$$t + (3t - 2) + (2t - 1) = t + 3t - 2 + 2t - 1 = 6t - 3.$$

Considerando w el sueldo de actores y actrices, el sistema resultante es el siguiente:

$$3w + t = 17\ 8w + 3t - 2 = 40 \} \quad 3w + t = 17\ 8w + 3t = 42 \}.$$

$$- 24w - 8t =- 136\ 24w + 9t = 126 \} \Rightarrow t =- 10.$$

$\underline{En\ la\ 1^{\text{a}}\ película\ actuaron\ 10\ infantiles,\ en\ la\ 2^{\text{a}}\ 28\ y\ en\ la\ 3^{\text{a}},\ 19}.$

****

3º) En una fábrica de calzado de Arnedo, la producción diaria de pares de zapatos sigue una distribución normal con una desviación típica de 200 pares.

a) Si la media de la producción fuese de 1.200 pares de zapatos, ¿cuál sería la probabilidad de que la producción media de una muestra de 36 días superase los 1.225 pares de zapatos?

b) Si una muestra de 100 días de trabajo en la fábrica tiene una media de 1.180 pares de zapatos, determinar un intervalo de confianza al 85 % para la media de la producción.

----

a)

$Datos$: $\mu = 1.200;\ n = 36;\ \sigma = 200.$

$$X \to N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(1.200;\ \frac{200}{\sqrt{36}}\right) = N\left(1.200;\ \frac{100}{3}\right).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-1.200}{\frac{100}{3}}$.

$$P = P(Z \geq 1.225) = P\left(Z \geq \frac{1.225-1.200}{\frac{100}{3}}\right) = P\left(Z \geq \frac{75}{100}\right) = P(Z \geq 0,75) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0,75) = 1 - 0,7734 = \underline{0,2266}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 85 % es:

$$1 - \alpha = 0,85 \to \alpha = 1 - 0,85 = 0,15 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,075} = 1,44.$$

$$1 - 0,0750 = 0,9250 \to z = 1,44).$$

Datos: $n = 100;\ \overline{x} = 1.180;\ \sigma = 200;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,44.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(1.180 - 1,44 \cdot \frac{200}{\sqrt{100}};\ 1.180 + 1,44 \cdot \frac{200}{\sqrt{100}}\right);$$

$$(1.180 - 1,44 \cdot 10;\ 1.180 + 1,44 \cdot 10);\ (1.180 - 14,4;\ 1.180 + 14,4).$$

$$\underline{I.\ C._{85\,\%} = (1.165,6;\ 1.194,4).}$$

****

Parte 2

Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

4º) Consideramos un rectángulo cuyos lados miden x e y.

a) Encontrar el rectángulo de perímetro mínimo, si las longitudes de los lados del rectángulo verifican la relación $x\cdot y^2 = 4$.

b) Encontrar el rectángulo de área máxima, si las longitudes de los lados del rectángulo verifican la relación $x + 3y^2 = 1$.

----

a)

$$x\cdot y^2 = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{y^2}.$$

$$P = 2x + 2y \Rightarrow P(y) = 2\cdot\frac{4}{y^2} + 2y = \frac{8}{y^2} + 2y \Rightarrow Mín.$$

$$P'(y) = \frac{-8\cdot 2y}{y^4} + 2 = -\frac{16}{y^3} + 2.$$

$$P'(y) = 0 \Rightarrow -\frac{16}{y^3} + 2 = 0;\ \ \frac{8}{y^3} = 1;\ \ y^3 = 8 \Rightarrow y = 2.$$

$$P''(y) = -\frac{-16\cdot 3y^2}{y^6} = +\frac{48}{y^4}. \qquad P''(2) = +\frac{48}{2^4} > 0 \Rightarrow Mín.\ para\ y = 2.$$

$$x = \frac{4}{y^2} = \frac{4}{2^2} = \frac{4}{4} = 1.$$

$\underline{Las\ dimensiones\ del\ rectángulo\ son\ 1\ y\ 2\ unidades.}$

b)

$$x + 3y^2 = 1 \Rightarrow x = 1 - 3y^2.$$

$$S = x\cdot y \Rightarrow S(y) = \left(1 - 3y^2\right)\cdot y = y - 3y^3 \Rightarrow Máximo.$$

$$S'(y) = 1 - 9y^2.$$

$$S'(y) = 0 \Rightarrow 1 - 9y^2 = 0;\ \ y^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow y = \frac{1}{3}.$$

$$S''(y) = -18y. \qquad S''\left(\frac{1}{3}\right) = -18\cdot\frac{1}{3} = -6 < 0 \Rightarrow Máx.\ para\ y = \frac{1}{3}.$$

$$x = 1 - 3y^2 = 1 - 3\cdot\frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\underline{Las\ dimensiones\ del\ rect\acute{a}ngulo\ son\ \frac{1}{3}\ y\ \frac{2}{3}\ unidades.}$$

****

5º) Consideramos la matriz $A = [3a + 2\ 2(a + 1)\ \ -(a + 1)\ \ -1\ ]$.
a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Tomando $a = 1$, determinar una matriz X tal que $A\cdot X = 3A^{t} + A - 3\cdot I_{2}$.

Nota: A^{t} indica la matriz traspuesta de A e I_{2} la matriz identidad de orden dos.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = |3a + 2\ 2(a + 1)\ \ -(a + 1)\ \ -1\ | = -3a - 2 + 2(a + 1)^{2} =$$

$$= -3a - 2 + 2\left(a^{2} + 2a + 1\right) = -3a - 2 + 2a^{2} + 4a + 2 = 2a^{2} + a = 0;$$

$$a(2a + 1) = 0 \Rightarrow a_{1} = 0,\ a_{2} = -\tfrac{1}{2}.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \left\{0,\ -\tfrac{1}{2}\right\}}.$$

b)

Para $a = 1$ es $A = (5\ 4\ \ -2\ \ -1\ )$.

$$A\cdot X = 3A^{t} + A - 3\cdot I_{2};\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot\left(3A^{t} + A - 3\cdot I_{2}\right);$$

$$I\cdot X = A^{-1}\cdot\left(3A^{t} + A - 3\cdot I_{2}\right) \Rightarrow \underline{X = A^{-1}\cdot\left(3A^{t} + A - 3\cdot I_{2}\right)}.$$

$$A = (5\ 4\ \ -2\ \ -1\ );\ \ |A| = |5\ 4\ \ -2\ \ -1\ | = -5 + 8 = 3;\ \ A^{t} = (5\ \ -2\ 4\ \ -1\ )$$
.

$$Adj.\ de\ A^{t} = (-1\ \ -4\ 2\ 5\ ) \Rightarrow A^{-1} = \tfrac{1}{3}\cdot(-1\ \ -4\ 2\ 5\ ).$$

$$3A^{t} + A - 3\cdot I_{2} = 3\cdot(5\ \ -2\ 4\ \ -1\ ) + (5\ 4\ \ -2\ \ -1\ ) - 3\cdot(1\ 0\ 0\ 1\ ) =$$

$$= (15\ \ -6\ 12\ \ -3\ ) + (5\ 4\ \ -2\ \ -1\ ) + (-3\ 0\ 0\ \ -3\ ) = (17\ \ -2\ 10\ \ -7\ )$$
.

$$X = A^{-1}\cdot\left(3A^{t} + A - 3\cdot I_{2}\right) = \tfrac{1}{3}(-1\ \ -4\ 2\ 5\ )\cdot(17\ \ -2\ 10\ \ -7\ ) = \tfrac{1}{3}(-57\ 30\ 84\ \ -$$
.

$$\underline{X = (-\ 19\ 10\ 28\ \ -\ 13\ )}.$$

****

6º) De los habitantes de Logroño se sabe que tres cuartas partes han visitado en alguna ocasión San Sebastián y tres quintas partes han estado alguna vez en Zaragoza. Además, un cuarenta por ciento de los logroñeses reconoce haber visitado ambas ciudades.

a) Si mi amigo Juan, que es de Logroño, me ha dicho que el otro día estuvo comiendo en San Sebastián, ¿cuál es la probabilidad de que haya estado también en Zaragoza en alguna ocasión?

b) Luís, otro amigo mío de Logroño, es de poco viajar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya visitado ninguna de las dos ciudades?

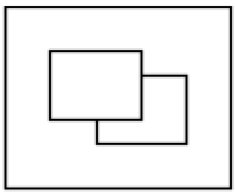
$Datos$: $P(Ss) = 0,75;\ \ P(Z) = 0,60;\ \ P(Ss \cap Z) = 0,40.$

a)

$$P\ =\ P(Z/Ss) = \frac{P(Ss \cap Z)}{P(Ss)} = \frac{0,40}{0,75} = \underline{0,5333}.$$

b)

$$P(Ss \cup Z) = P(Ss) + P(Z) - P(Ss \cap Z) =$$



$$0,75\ +\ 0,6\ -\ 0,4\ =\ 0,95.$$

$$P\ =\ P(\overline{Ss} \cap \overline{Z}) = 1\ -\ P(Ss \cup Z) =$$

$$=\ 1\ -\ 0,95\ =\ \underline{0,05}.$$

****

OPCIÓN B

Parte 1

Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1º) Consideramos la función $f(x) = \frac{x(x+a)}{x^2-4}$, donde a es un cierto parámetro real.

a) Determina el valor de a si la recta tangente en $x = 0$ es paralela a la recta de ecuación $y = \frac{x}{4} + 2.018$. Dar la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ para el valor obtenido de a.

b) Tomando $a = 2$, determinar las asíntotas de $f(x)$.

2º) La productora cinematográfica Filmtropía va a rodar tres películas familiares en los próximos meses. En cada una de ellas debe contratar actores, actrices e intérpretes infantiles. Cada día de rodaje tiene presupuestada una cantidad fija de dinero para el pago de honorarios a los intérpretes. El número de actores y actrices es conocido pero el número de intérpretes infantiles es un valor t que puede variar. La retribuciones de los actores y actrices se fijarán en función del número de intérpretes infantiles que se contraten. La distribución de intérpretes por película y el presupuesto diario aparecen en la tabla adjunta.

	Quiosco 1	Quiosco 2	Quiosco 3
Actores	2	4	2
Actrices	1	4	3
Intérpretes infantiles	t	$3t - 2$	$2t - 1$
Presupuesto diario (miles de euros)	17	40	27

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar los honorarios de cada intérprete por día de trabajo.

b) Determinar dichos honorarios.

c) Como criterio para fijar el número de intérpretes infantiles se ha decidido que los actores y actrices deben cobrar lo mismo por cada día de trabajo. ¿Cuál será el número de intérpretes infantiles de cada película?

3º) En una fábrica de calzado de Arnedo, la producción diaria de pares de zapatos sigue una distribución normal con una desviación típica de 200 pares.

a) Si la media de la producción fuese de 1.200 pares de zapatos, ¿cuál sería la probabilidad de que la producción media de una muestra de 36 días superase los 1.225 pares de zapatos?
b) Si una muestra de 100 días de trabajo en la fábrica tiene una media de 1.180 pares de zapatos, determinar un intervalo de confianza al 85 % para la media de la producción.

(RESUELTOS EN LA OPCIÓN A)

<u>Parte 2</u>

Responde a <u>dos de las tres preguntas</u> que se plantean a continuación.

4º) Consideremos la función $f(x) = \{- ax^3 + 6bx^2 - 3x,\ x < - 1 \quad ax + b,\ \ - 1 \leq x \leq 1 \ - ax^3 - 4bx^2 - 3x,\ x >$ con a y b dos parámetros reales .

a) ¿Para qué valores de a y b es continua la función dada?

b) Tomando $a = 1$ y $b = - 1$, calcular la integral definida $I = \int_0^3 f(x) \cdot dx$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = - 1$ y $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\ x = - 1 \Rightarrow \{ f(x) \ = \left(- ax^3 + 6bx^2 - 3x\right) = \ a + 6b + 3 \ \ f(x) \ = (ax + b) =$

$\Rightarrow f(x) \ = f(x) \ = f(- 1) \Rightarrow a + 6b + 3 = - a + b;\ \ 2a + 5b = - 3.$

$Para\ x = 1 \Rightarrow \{ f(x) \ = (ax + b) = \ a + b = f(1) \qquad f(x) \ = \left(- ax^3 - 4bx^2\right.$

$\Rightarrow f(x) \ = f(x) \ = f(1) \Rightarrow a + b = - a - 4b - 3;\ \ 2a + 5b = - 3.$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ su\ dominio\ \forall a,\ b \in R.}$

b)

Para $a = 1$ y $b = - 1$ la función es $f(x) = \{- x^3 - 6x^2 - 3x,\ x < - 1 \quad x - 1,\ \ - 1 \leq x \leq 1 \ - x^3 + 4x^2 - 3x,\ x > 1$
.

$$I = \int_0^3 f(x)\cdot dx = \int_0^1 (x - 1)\cdot dx + \int_1^3 f\left(- x^3 + 4x^2 - 3x\right)\cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + \left[- \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_1^3 =$$

$$= \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) - 0 + \left(- \frac{3^4}{4} + \frac{4\cdot 3^3}{3} - \frac{3\cdot 3^2}{2}\right) - \left(- \frac{1^4}{4} + \frac{4\cdot 1^3}{3} - \frac{3\cdot 1^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - 1 - \frac{81}{4} + 36 - \frac{27}{2} + \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = 35 - \frac{23}{2} - 40 - \frac{4}{3} = - 5 - \frac{23}{2} - \frac{4}{3} =$$

$$= - \frac{30+69+8}{6} = - \frac{107}{6}.$$

$$\underline{I = \int_0^3 f(x)\cdot dx = - \frac{107}{6}}.$$

****

5º) Sean $\{3(y-2)\leq x\leq 2y \; 2(2-y)\leq x\leq 6-y$ las restricciones asociadas a un cierto problema de optimización.

$a)$ Dibujar la región factible asociada a las restricciones dadas, indicando claramente los vértices de la misma.

$b)$ ¿Cuál es máximo de la función $f(x,\ y)=\ 3x\ +\ y$ en la región factible?

$c)$ Si a es un cierto valor real positivo y sabemos que el máximo de la función $g(x,\ y)=\ ax\ +\ 3y$ en la región factible es 15, ¿cuál es el valor de a?

$a)$

Las restricciones se pueden expresar de la forma:

$3y-6\leq x \quad x\leq 2y \; 4-2y\leq x \;\; x\leq 6-y\}$ o mejor: $x-3y\geq -6 \;\; x-2y\leq 0 \;\; x+2y\geq 4 \;\; x+y\leq 6\}$.

x	0	6
y	2	4

①$\Rightarrow x-3y\geq -6\Rightarrow y\leq \frac{x+6}{3}\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

x	0	6
y	0	3

②$\Rightarrow x-2y\leq 0\Rightarrow y\geq \frac{x}{2}\Rightarrow P(2,\ 0)\rightarrow No.$

x	0	4
y	2	0

③$\Rightarrow x+2y\geq 4\Rightarrow y\geq \frac{4-x}{2}\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow No.$

x	0	6
y	6	0

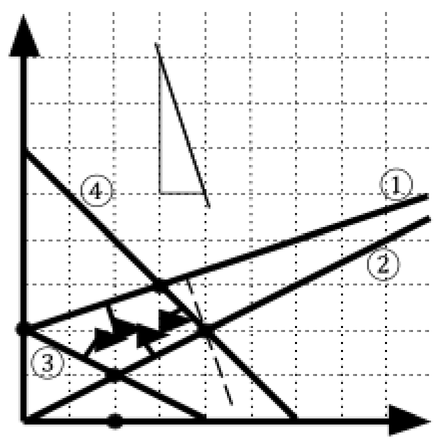
④$\Rightarrow x+y\leq 6\Rightarrow y\leq 6-x\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

$b)$

La función de objetivos es $f(x,\ y)=\ 3x\ +\ y$.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow x - 3y = -6 \quad x + 2y = 4 \} \quad -x + 3y = 6 \quad x + 2y = 4 \} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y = 10; \;\; y = 2; \;\; x + 4 = 4; \;\; x = 0 \Rightarrow A(0,\ 2).$

$B \Rightarrow x - 3y = -6 \quad x + y = 6 \} \quad -x + 3y = 6 \quad x + y = 6 \} \Rightarrow 4y = 12; \;\; y =$

.

$C \Rightarrow x - 2y = 0 \quad x + y = 6 \} \quad -x + 2y = 0 \quad x + y = 6 \} \Rightarrow 3y = 6; \;\; y = 2 \Rightarrow$

.

$D \Rightarrow x - 2y = 0 \; x + 2y = 4 \} \Rightarrow 2x = 4; \;\; x = 2; \;\; 2 + 2y = 4; \;\; y = 1 \Rightarrow D(2,\ 1)$

.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 2) = 3 \cdot 0 + 2 = 0 + 2 = 2.$

$B \Rightarrow f(3,\ 3) = 3 \cdot 3 + 3 = 9 + 3 = 12.$

$C \Rightarrow f(4,\ 2) = 3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14.$

$D \Rightarrow f(2,\ 1) = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7.$

El máximo se produce en el punto $C(4,\ 2)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 3x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{1}x \Rightarrow m = -\frac{3}{1}.$

$\underline{El\ máximo\ de\ la\ función\ f(x,\ y) = 3x + y\ es\ C(4,\ 2)}.$

$c)$

La función de objetivos es ahora $g(x,\ y) = ax + 3y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 2) = a \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 0 + 6 = 6.$

$B \Rightarrow f(3,\ 3) = a \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 3a + 9.$

$C \Rightarrow f(4,\ 2) = a \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 4a + 6.$

$D \Rightarrow f(2,\ 1) = a \cdot 2\ +\ 3 \cdot 1\ =\ 2a\ +\ 3.$

Teniendo en cuenta que $g(4,\ 2) = 2 \cdot g(2,\ 1)\ y\ g(3,\ 3) = 3 \cdot g(2,\ 1)$, el valor máximo se produce en el punto $B(3,\ 3)$, por lo cual:

$$3a\ +\ 9\ =\ 15;\ \ 3a\ =\ 6 \Rightarrow \underline{a\ =\ 2}.$$

****

6º) En la Escuela Oficial de Idiomas de mi ciudad, hay tres aulas de primer curso de inglés. La distribución de chicos y chicas en cada aula es como se muestra en la tabla adjunta:

	Aula 1	Aula 2	Aula 3
Chicos	21	16	16
Chicas	18	16	24

a) Determina la probabilidad de que al elegir un estudiante de primer curso sea chica.

b) Si elegimos una chica de primer curso al azar, ¿a qué aula es más probable que pertenezca?

----

a)

Aplicando la regla de Laplace:

$$P\ =\frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \frac{18+16+24}{21+16+16+18+16+24} = \frac{58}{111} = \underline{0,5225}.$$

b)

Probabilidad de pertenecer al Aula 1: $p\ = \frac{18}{21+18} = \frac{18}{39} =\ 0,4615.$

Probabilidad de pertenecer al Aula 2: $p\ = \frac{16}{16+16} = \frac{16}{32} =\ 0,5.$

Probabilidad de pertenecer al Aula 3: $p\ = \frac{24}{16+24} = \frac{24}{40} =\ 0,6.$

$$\underline{Es\ más\ probable\ que\ pertenezca\ al\ Aula\ 3}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger *una* de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las características siguientes: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, almacenamiento de datos alfanuméricos, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

OPCIÓN A

1º) Considérense las matrices $A = (0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ )\ y\ B = (3\ 2\ 3\ )$:

a) Calcúlese la matriz $M = \left[\left(A\cdot A^t\right)^2 - 2A\cdot A^t\right]^{11}$.

b) Determínense el número de filas y columnas de la matriz X que verifica que $X\cdot A^t = B^t$. Justifíquese si A^t es una matriz invertible y calcúlese la matriz X.

----

a)

$$A\cdot A^t = (0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ )\cdot(0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ ) = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ ).$$

$2A\cdot A^t = (2\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0\ 2\ )$.

$$\left(A\cdot A^t\right)^2 = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ )\cdot(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ ) = (2\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 2\ 0\ 2\ ).$$

$$M = \left[\left(A\cdot A^t\right)^2 - 2A\cdot A^t\right]^{11} = [(2\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 2\ 0\ 2\ ) - (2\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0\ 2\ )]^{11} =$$

$= (0\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ )^{11} = D^{11}$.   (*)

$D^2 = D\cdot D = (0\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ )\cdot(0\ 0\ 0\ 0\ \ -\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ ) = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ )$.

$D^3 = D^2 \cdot D = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0) \cdot (0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0) = (0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0).$

....

En general: $D^n = \left[0\ 0\ 0\ 0\ (-1)^n\ 0\ 0\ 0\ 0\right]$.

Teniendo en cuenta lo anterior, la expresión (*) resulta:

$$\underline{M = \left[\left(A \cdot A^t\right)^2 - 2A \cdot A^t\right]^{11} = \left[0\ 0\ 0\ 0\ (-1)^{11}\ 0\ 0\ 0\ 0\right] = (0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0).}$$

$b)$

Teniendo en cuanta que el producto de matrices $M_{(a,\,b)} \cdot N_{(b,\,m)} = P_{(a,\,m)}$:

$X_{(x,\,y)} \cdot A^t_{(2,\,3)} = B^t_{(1,\,3)} \Rightarrow \underline{X_{(1,\,2)}}$.

$A^t = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1) \Rightarrow \underline{A^t\ no\ puede\ ser\ invertible\ por\ no\ ser\ cuadrada}.$

Supóngase que $X = (m\ n)$:

$X \cdot A^t = B^t \Rightarrow (m\ n)(0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1) = (3\ 2\ 3);\quad (n\ m\ n) = (3\ 2\ 3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{X = (2\ 3)}.$$

****

2º) Considérese la región del plano definida por:

$$S=\left\{(x,\ y)\in R^{2}: x+2y\geq 4;\ \ x+2y\leq 12;\ \ x\leq 4;\ \ -x+2y\leq 12\right\}.$$

a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínense los puntos en los que la función $f(x,\ y)=3x-y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de f en dichos puntos.

----

a)

x	0	4
y	2	0

$①\Rightarrow x+2y\geq 4\Rightarrow y\geq\frac{4-x}{2}\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow No.$

x	6	0
y	3	6

$②\Rightarrow x+2y\leq 12\Rightarrow y\leq\frac{12-x}{2}\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

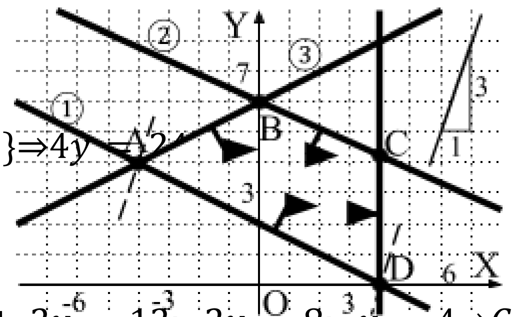
x	0	-6
y	6	3

$③\Rightarrow -x+2y\leq 12\Rightarrow y\leq\frac{12+x}{2}\Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=4 \\ -x+2y=12 \end{array}\right\}\Rightarrow 4y=16;$

$y=4;\ \ x+8=4;\ \ x=-4\Rightarrow A(-4,\ 4).$



$B\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=12 \\ -x+2y=12 \end{array}\right\}\Rightarrow 4y=24;$

$y=6;\ \ x+12=12;\ \ x=0\Rightarrow B(0,\ 6).$

$C\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=4 \\ x+2y=12 \end{array}\right\}\Rightarrow 4+2y=12;\ \ 2y=8;\ \ y=4\Rightarrow C(4,\ 4)$
.

$D\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=4 \\ x+2y=4 \end{array}\right\}\Rightarrow 4+2y=4;\ \ y=0\Rightarrow D(4,\ 0).$

b)

La función de objetivos es $f(x,\ y)=3x-y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A\Rightarrow f(-4,\ 4)=3\cdot(-4)-4=-12-4=-16.$

$B \Rightarrow f(0,\ 6) = 3 \cdot 0\ -\ 6\ =\ 0\ -\ 6\ = -\ 6.$

$C \Rightarrow f(4,\ 4) = 3 \cdot 4\ -\ 4\ =\ 12\ -\ 4\ =\ 8.$

$D \Rightarrow f(4,\ 0) = 3 \cdot 4\ -\ 0\ =\ 12\ -\ 0\ =\ 12.$

$\underline{El\ mínimo\ se\ produce\ en\ A(-\ 4,\ 4)\ y\ el\ máximo\ en\ D(4,\ 0)}.$

También se hubieran obtenido los puntos $A\ y\ D$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 3x\ -\ y\ =\ 0 \Rightarrow y\ =\ 3x \Rightarrow m\ = \frac{3}{1}.$

****

3º) Considérese la función real de variable real: $f(x) = \frac{x}{1-4x^2}$.

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Estúdiense las asíntotas de f.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1\cdot(1-4x^2)-x\cdot(-8x)}{(1-4x^2)^2} = \frac{1-4x^2+8x^2}{(1-4x^2)^2} = \frac{4x^2+1}{(1-4x^2)^2} \Rightarrow f'(x) > 0,\ \forall \in D(f).$$

La función es monótona creciente en su dominio.

$$1 - 4x^2 = 0;\ 4x^2 = 1;\ x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2}.$$

Teniendo en cuenta que $D(f) \Rightarrow R - \left\{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$:

$$\underline{f(x)\ es\ monótona\ creciente\ en\ x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)}.$$

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{x}{1-4x^2} = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ y = 0\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Las\ rectas\ x = -\frac{1}{2}\ y\ x = \frac{1}{2}\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

****

4º) Se va a celebrar una carrera popular. Entre los participantes, dos de cada tres hombres y tres de cada cuatro mujeres han entrenado para la carrera.

a) Se eligen al azar y de forma independiente un hombre y una mujer de entre los participantes. Calcúlese la probabilidad de que alguno de ellos haya entrenado para la carrera.

b) El 65 % de los participantes son hombres y el 35 % mujeres y se elige un participante al azar, calcúlese la probabilidad de que sea hombre sabiendo que ha entrenado para la carrera.

----

a)

Probabilidad de que un hombre haya entrenado: $P = P(HE) = \frac{2}{3}$.

Probabilidad de que una mujer haya entrenado: $P = P(ME) = \frac{3}{4}$.

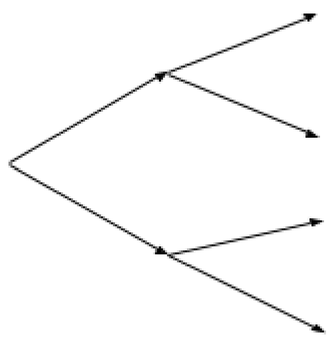
La probabilidad pedida es $P = (HE \cup ME)$.

Teniendo en cuenta que los sucesos "que un hombre haya entrenado" y "que una mujer haya entrenado" son independientes se cumple que $P(HE \cap ME) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

$$P = (HE \cup ME) = P(HE) + P(ME) - P(HE \cap ME) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{8+9-6}{12} =$$

$$= \underline{\frac{11}{12}} = 0,9167.$$

b)



$$P = (H/E) = \frac{P(E \cap H)}{P(E)} = \frac{P(H) \cdot P(E/H)}{P(H) \cdot P(E/H) + P(M) \cdot P(E/M)} = \frac{0,65 \cdot \frac{2}{3}}{0,65 \cdot \frac{2}{3} + 0,35 \cdot \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{0,4333}{0,4333 + 0,2625} = \frac{0,4333}{0,6958} = \underline{0,6227}.$$

****

5º) La distancia anual, en kilómetros (km), que recorren las furgonetas de una empresa de reparto, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica $\sigma = 24.000$ km.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que la amplitud del intervalo de confianza al 95 % para μ sea a lo sumo de 23.550 km.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de 25 furgonetas. Suponiendo que $\mu = 150.000$ km, calcúlese la probabilidad de que la distancia media anual observada, $\overline{X}$, esté entre 144.240 km y 153.840 km.

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $\sigma = 24.000;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96;\ \ E = \frac{23.550}{2} = 11.775.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,96 \cdot \frac{24.000}{11.775}\right)^2 =$

$= (1,96 \cdot 2,0382)^2 = 3,9949^2 = 15,96.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 16\ furgonteas}.$

b)

$Datos$: $\mu = 150.000;\ \ n = 25;\ \ \sigma = 24.000.$

$X \rightarrow N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(150.000;\ \frac{24.000}{\sqrt{25}}\right) = N(150.000;\ 4.800).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X - 150.000}{4.800}$.

$P = P(144.240 \leq Z \leq 153.840) =$

$= P\left(\frac{144.240-150.000}{4.800} \leq Z \leq \frac{153.840-150.000}{4.800}\right) = P\left(\frac{-5.760}{4.800} \leq Z \leq \frac{3840}{4.800}\right) =$

$= P(-1,2 \leq Z \leq 0,8) = P(Z < 0,8) - [1 - P(Z < 1,2)] =$

$= P(Z < 0,8) - 1 + P(Z < 1,2) = 0,7881 - 1 + 0,8849 = 1,6730 - 1 =$

$= \underline{0,6730}$.

****

OPCIÓN B

1º) Se considera el sistema de ecuaciones $x + 3y + z = a\ 2x + ay - 6z = 8\ \ x - 3y - 5z = 4\}$ dependiente del parámetro $a \in R$:

a) Discútase el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) Resuélvase para $a = 4$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\ 3\ 1\ 2\ a\ -6\ 1\ -3\ -5)$ y $M' = (1\ 3\ 1\ 2\ a\ -6\ 1\ -3\ -5\quad a\ 8\ 4)$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1\ 3\ 1\ 2\ a\ -6\ 1\ -3\ -5| =- 5a - 6 - 18 - a - 18 + 30 =- 6a -$

$= 6a + 12 = 0;\ \ a + 2 = 0 \Rightarrow a =- 2.$

$\underline{Para\ a =- 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D}.$

$Para\ a =- 2 \Rightarrow M' = (1\ 3\ 1\ 2\ -2\ -6\ 1\ -3\ -5\quad -2\ 8\ 4) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1$

$\Rightarrow |1\ 3\ -2\ 2\ -2\ 8\ 1\ -3\ 4| =- 8 + 12 + 24 - 4 + 24 - 24 = 24 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'$

.

$\underline{Para\ a =- 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$

b)

Para $a = 4$ el sistema resulta $\{x + 3y + z = 4\quad 2x + 4y - 6z = 8\ x - 3y - 5z = 4$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$x = \frac{|4\ 3\ 1\ 8\ 4\ -6\ 4\ -3\ -5|}{-6 \cdot 4 - 12} = \frac{-80-24-72-16-72+120}{-36} = \frac{120-264}{-36} = \frac{-144}{-36} = 4.$

$y = \frac{|1\ 4\ 1\ 2\ 8\ -6\ 1\ 4\ -5|}{-36} = \frac{-40+8-24-8+24+40}{-36} = \frac{0}{-36} = 0.$

$z = \frac{|1\ 3\ 4\ 2\ 4\ 8\ 1\ -3\ 4|}{2} = \frac{16-24+24-16+24-24}{-36} = \frac{0}{-36} = 0.$

$\underline{Solución: x = 4;\ y = z = 0}.$

****

2º) Los beneficios, en millones de euros, de una determinada inversión vienen dados por la función $f(x) = x^3 - 12x$, donde x representa cierto índice que puede tomar cualquier valor real.

a) Determínese, en el caso de que existe, el valor del índice para el que el beneficio es mayor que el de todos los valores de un entorno suyo. ¿Cuál sería el beneficio para ese valor del índice?

b) Supóngase que el valor actual del índice es $x = 4$ y que está previsto que éste experimente un incremento positivo. Justifíquese si el beneficio aumentará o disminuirá.

----

a)

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = 3x^2 - 12. \qquad f''(x) = 6x.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0;\ \ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2.$

$f''(-2) = 6 \cdot (-2) = -12 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2.$

$f''(2) = 6 \cdot 2 = 12 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ para\ un\ índice\ x = -2}.$$

$f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = -8 + 12 = 4.$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 4.000.000\ euros}.$$

b)

Se trata de saber si la función es creciente para $x = 4$.

$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 = 3 \cdot 16 - 12 = 36 - 12 = 24 > Creciente.$

$$\underline{En\ efecto,\ para\ x = 4\ el\ incremento\ es\ positivo}.$$

****

3º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \{x^3 + 2e^x \ si \ x < 0 \ \frac{2}{3+x} \ si \ x \geq 0$:

a) Determínese el dominio de $f(x)$ y estúdiese su continuidad.

b) Calcúlese $I = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx$.

----

a)

La función $f(x)$ está definida en R: $\underline{D(f) \Rightarrow R}$.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 0 \Rightarrow \{f(x) = \left(x^3 + 2e^x\right) = 0 + 2 = 2 \ f(x) = \frac{2}{3+x} = \frac{2}{3} = f(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \neq f(x) \Rightarrow La\ función\ f(x)\ no\ es\ continua\ para\ x = 0.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R,\ excepto\ para\ x = 0\ (salto\ finito)}.$$

b)

$$I = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{0} \left(x^3 + 2e^x\right) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} + 2e^x\right]_{-1}^{0} =$$

$$= \left(\frac{0^4}{4} + 2 \cdot e^0\right) - \left[\frac{(-1)^4}{4} + 2 \cdot e^{-1}\right] = 0 + 2 - \frac{1}{4} - \frac{2}{e} = \frac{8e-e-8}{4e} = \frac{7e-8}{4e}.$$

$$\underline{I = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx = \frac{7e-8}{4e}}.$$

****

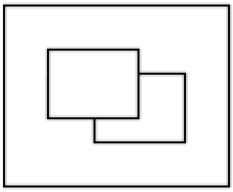
4º) Sean $A \, y \, B$ dos sucesos de un experimento aleatoria tales que $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,6 \; y \; P(A \cup B) = 0,8$. Calcúlese:

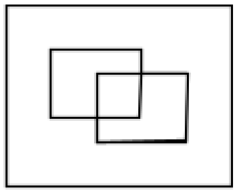
$a)$ $P(\overline{A} \cap B)$. $\qquad$ $b)$ $P(\overline{A \cup B}/A)$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

$a)$

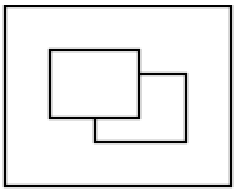
De la observación de los gráficos se deduce que:





$$\overline{A} \cap B = (A \cup B) - A.$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,8 - 0,4 = \underline{0,4}.$$



$b)$

$$P(\overline{A \cup B}/A) = \frac{P(\overline{A \cup B} \cap A)}{P(A)} = \frac{0}{0,4} = \underline{0}.$$

****

5º) Una empresa quiere lanzar un producto al mercado. Por ello desea estimar la proporción de individuos, P, que estarían dispuestos a comprarlo.

a) Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 3 % ($\pm 3\%$).

b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 individuos de los cuales 90 afirmaron que comprarían el producto. Obténgase un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de individuos que estarían dispuestos a comprar el producto.

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $p = q = 0,5;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96;\ \ E = 0,03.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{p \cdot q}}{E} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E}\right)^2 \cdot p \cdot q =$

$= \left(\frac{1,96}{0,03}\right)^2 0,5 \cdot 0,5 = 65,3333^2 \cdot 0,25 = 1.067,11.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 1.068\ individuos.}$

b)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$

$1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

$Datos$: $p = \frac{90}{450} = 0,2;\ \ q = 0,8;\ \ n = 450;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p,\ q\ y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$\left(0,2 - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{450}};\ 0,2 + 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{450}}\right);$

$$(0,2 - 1,645 \cdot 0,0189;\ 0,2 + 1,645 \cdot 0,0189);\quad (0,2 - 0,0310;\ 0,2 + 0,0310).$$

$$\underline{I.\ C._{90\,\%} = (0,1690;\ 0,2310)}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger *una* de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las características siguientes: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, almacenamiento de datos alfanuméricos, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

OPCIÓN A

1º) Se consideran las matrices $A = (3\ 1\ 8\ 3)\ y\ B = (3\ \ -1\ \ -8\ 3)$:

a) Compruébese que B es la matriz inversa de A.

b) Calcúlese la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

----

a)

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$|A| = |3\ 1\ 8\ 3| = 9 - 8 = 1.\quad A^t = (3\ 8\ 1\ 3)$.
$Adj.\ de\ A^t = (3\ \ -1\ \ -8\ 3)$.

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{(3\ -1\ -8\ 3)}{1} = (3\ \ -1\ \ -8\ 3).$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ B\ es\ la\ matriz\ inversa\ de\ A.}$

b)

$A \cdot X = B;\ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B;\ I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B}$.

$X = A^{-1} \cdot B = (3\ \ -1\ \ -8\ 3) \cdot (3\ \ -1\ \ -8\ 3) = (17\ \ -6\ \ -48\ 17)$.

$$\underline{X = (17 \quad -6 \quad -48\ 17)}.$$

****

2º) Sea S la región del plano definida por: $x+y\leq 50;\ \ 2x+y\leq 80;\ \ x\geq 0,\ \ y\geq 0.$

$a)$ Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

$b)$ Obténgase el valor máximo de la función $f(x,\ y)=5x+4y$ en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.

$a)$

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 50 \\ 2x+y\leq 80 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$.

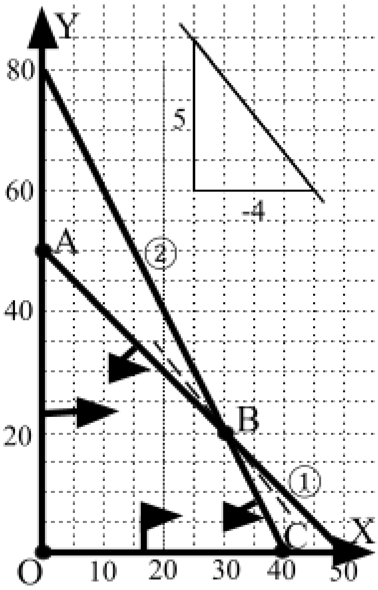
x	50	0
y	0	50

① $\Rightarrow x+y\leq 50 \Rightarrow y\leq 50-x \Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

x	40	0
y	0	80

② $\Rightarrow 2x+y\leq 80 \Rightarrow y\leq 80-2x \Rightarrow O(0,\ 0)\rightarrow Si.$

La zona factible es la sombreada de la figura.



Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x+y=50 \end{array}\right\}\Rightarrow A(0,\ 50).$

$B\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=50 \\ 2x+y=80 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} -x-y=-50 \\ 2x+y=80 \end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow x=30\Rightarrow B(30,\ 20).$

$C\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=0 \\ 2x+y=80 \end{array}\right\}\Rightarrow C(40,\ 0).$

$b)$

La función de rendimiento es $f(x,\ y)=5x+4y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A\Rightarrow f(0,\ 50)=5\cdot 0+4\cdot 50=0+200=200.$

$B \Rightarrow f(30,\ 20) = 5 \cdot 30 + 4 \cdot 20 = 150 + 80 = 230.$

$C \Rightarrow f(40,\ 0) = 5 \cdot 40 + 4 \cdot 0 = 200 + 0 = 200.$

El máximo se produce en el punto $B(30,\ 20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 5x + 4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{4}x \Rightarrow m = -\frac{5}{4}.$

$\underline{El\ valor\ máximo\ es\ de\ 230\ y\ se\ produce\ en\ el\ punto\ B(30,\ 20)}.$

****

3º) Dada la función real de variable real definida por: $f(x) = \{ \frac{x+2}{x-1} \;\; si \;\; x \leq 2 \; \frac{3x^2-2x}{x+2} \;\; si \;\; x > 2$.

$a)$ Estúdiese si $f(x)$ es continua en $x = 2$.

$b)$ Calcúlese la función derivada de $f(x)$ para $x < 2$.

$a)$

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 2$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$Para\, x = 2 \Rightarrow \{ f(x) \; = \frac{x+2}{x-1} = \; \frac{2+2}{2-1} = \frac{1}{4} = f(2) \; f(x) \; = \frac{3x^2-2x}{x+2} = \; \frac{12-6}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \; \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \; \neq f(x) \; = f(2).$

$\underline{La\, función\, f(x)\, no\, es\, continua\, para\, x = 2}.$

$b)$

Para $x < 2$ la función es $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$\underline{f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}}.$$

****

4º) En una agencia de viajes se ha observado que el 75 % de los clientes acude buscando un billete de transporte, el 80 % buscando una reserva de hotel. Se ha observado además que el 65 % busca las dos cosas. Elegido un cliente de dicha agencia al azar, calcúlese la probabilidad de que:

a) Acuda buscando un billete de transporte o una reserva de hotel.

b) Sabiendo que busca una reserva de hotel, también busque un billete de transporte.

$Datos$: $P(T) = 0,75$; $P(H) = 0,80$ y $P(T \cap H) = 0,65$.

a)

$$P(T \cup H) = P(T) + P(H) - P(T \cap H) = 0,75 + 0,80 - 0,65 =$$

$$= 1,55 - 0,65 = \underline{0,90}.$$

b)

$$P(T/H) = \frac{P(T \cap H)}{P(H)} = \frac{0,65}{0,80} = \frac{65}{80} = \underline{\frac{13}{16} = 0,8125}.$$

****

5º) La empresa Dulce SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal con media μ gramos y desviación típica $\sigma = 0,5$ gramos.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 0,25 gramos con un nivel de confianza del 95 %.

b) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral , $\overline{x}$, pese más de 12,25 gramos, sabiendo que $\mu = 12$ gramos.

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $\sigma = 0,5;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96;\ \ E = 0,25.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,96 \cdot \frac{0,5}{0,25}\right)^2 =$

$= (1,96 \cdot 2)^2 = 3,92^2 = 15,37.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 16\ sobres}.$

b)

$Datos$: $n = 25;\ \ \mu = 12;\ \ \sigma = 0,5.$

$N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow N\left(12;\ \frac{0,5}{\sqrt{25}}\right) = N\left(12;\ \frac{0,5}{5}\right) = N(12;\ 0,1).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 12}{0,1}.$

$P = P(Z > 12,25) = P\left(Z > \frac{12,25 - 12}{0,1}\right) = P\left(Z > \frac{0,25}{0,1}\right) = P(Z > 2,5) =$

$= 1 - P(Z \leq 2,5) = 1 - 0,9938 = \underline{0,0062}.$

****

OPCIÓN B

1º) Se considera el sistema de ecuaciones $x + ay + z = 1\; ax + y + (a - 1)z = a \quad x + y + z = a + 1\}$ dependiente del parámetro real a:

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 3$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema son las siguientes:

$M = (1\; a\; 1\; a\; 1\; a - 1\; 1\; 1\; 1\,)$ y $M' = (1\; a\; 1\; a\; 1\; a - 1\; 1\; 1\; 1 \quad 1\; a\; 1\,)$.

El rango de M en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1\; a\; 1\; a\; 1\; a - 1\; 1\; 1\; 1\,| = 1 + a + a(a - 1) - 1 - (a - 1) - a^2 =$

$= a + a^2 - a - a + 1 - a^2 = 0; \quad - a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$

$\underline{Para\, a = 1 \Rightarrow Ran\, M = Ran\, M' = 3 = nº\, incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

Para $a = 1$ es $M' = (1\; 1\; 1\; 1\; 1\; 0\; 1\; 1\; 1 \quad 1\; 1\; 1\,) \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\, M' = 2$

$\underline{Para\, a = 1 \Rightarrow Ran\, M = Ran\, M' = 2 < nº\, incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.}$

b)

Para $a = 3$ el sistema es $x + 3y + z = 1\; 3x + y + 2z = 3 \quad x + y + z = 4\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$x = \frac{|1\; 3\; 1\; 3\; 1\; 2\; 4\; 1\; 1\,|}{-3+1} = \frac{1+3+24-4-2-9}{-2} = \frac{28-15}{-2} = -\frac{13}{2}.$

$y = \frac{|1\; 1\; 1\; 3\; 3\; 2\; 1\; 4\; 1\,|}{-2} = \frac{3+12+2-3-8-3}{-2} = \frac{17-14}{-2} = -\frac{3}{2}.$

$z = \frac{|1\; 3\; 1\; 3\; 1\; 3\; 1\; 1\; 4\,|}{-2} = \frac{4+3+9-1-3-36}{-2} = \frac{16-40}{-2} = \frac{-24}{-2} = 12.$

$\underline{Solución: x = -\frac{13}{2},\ y = -\frac{3}{2},\ z = 12.}$

****

2º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$.

$a)$ Calcúlense el dominio las asíntotas de $f(x)$.

$b)$ Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$a)$

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$(x+1)^2 = 0;\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1.$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-1\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$k = f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{La\ recta\ x = -1\ es\ asíntota\ vertical.}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \frac{f(x)}{x}$ y $n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right]$.

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^3}{(x+1)^2}}{x} = \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1.$$

$$n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \left[\frac{x^2}{(x+1)^2} - x\right] \frac{x^2 - x\cdot(x+1)^2}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{x^2 - x\cdot\left(x^2 - 2x + 1\right)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 - x^3 + 2x^2 - x}{(x+1)^2} = \frac{-x^3 + 3x^2 - x}{(x+1)^2} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = x\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función.}$$

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot(x+1)^2 - x^3\cdot[2\cdot(x+1)\cdot 1]}{(x+1)^4} = \frac{3x^2\cdot(x+1) - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{3x^3 + 3x^2 - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0;\ x_3 = -3.$$

Las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$ y $(0, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva y negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, +\infty)$ es: $f'(1) = \frac{1^2\cdot(1+3)}{(1+1)^3} =$

$$= \frac{4}{8} > 0 \Rightarrow Creciente.$$

Teniendo en cuenta lo anterior y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento:\ x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento:\ x \in (-3, -1) \cup (-1, 0)}.$$

****

3º) Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x$.

$a)$ Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.

$b)$ Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

$a)$

Los cortes con los ejes de la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x$ son los siguientes:

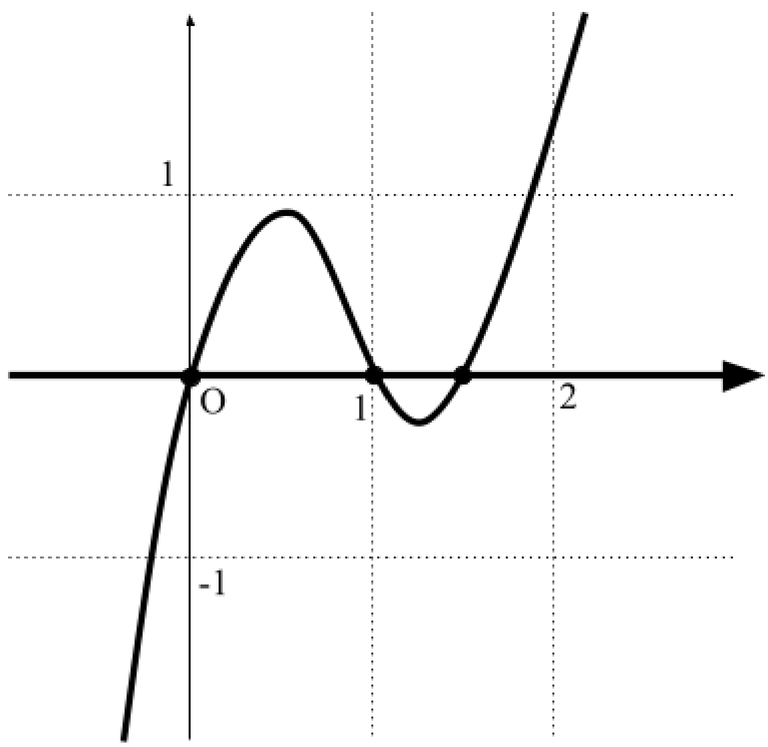
$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow O(0,\ 0)$.

$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 5x^2 + 3x = 0;\ \ x\left(2x^2 - 5x + 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;$

$2x^2 - 5x + 3 = 0;\ x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} \Rightarrow x_2 = 1,\ x_3 = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow O(0,\ 0),\ A(1,\ 0)\ y\ B\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$.

Teniendo en cuenta lo anterior y que $f(x) = -\infty$ y que $f(x) = +\infty$, la representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



De lo anterior y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx + \int_{\frac{3}{2}}^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 \left(2x^3 - 5x^2 + 3x\right) \cdot dx +$$

$$+ \int_{\frac{3}{2}}^1 \left(2x^3 - 5x^2 + 3x\right) \cdot dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{\frac{3}{2}}^1 =$$

$$= \left[\frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{\frac{3}{2}}^1 =$$

$$= \left(\frac{1^4}{2} - \frac{5 \cdot 1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2}\right) - 0 + \left(\frac{1^4}{2} - \frac{5 \cdot 1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2}\right) - \left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{2} - \frac{5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3}{3} + \frac{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2}\right] =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{3}{2}\right) - \frac{81}{32} + \frac{45}{8} - \frac{27}{8} = 1 - \frac{10}{3} + 3 - \frac{81}{32} + \frac{18}{8} = 4 - \frac{10}{3} - \frac{81}{32} + \frac{9}{4}$$

$$= \frac{4 \cdot 96 - 10 \cdot 32 - 81 \cdot 3 + 9 \cdot 24}{96} = \frac{384 - 320 - 243 + 216}{96} = \frac{600 - 563}{96} = \frac{37}{96}.$$

$$\underline{S = \frac{37}{96}\, u^2 \cong 0,385\, u^2.}$$

$b)$

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 3 \Rightarrow m = f'(0) = 3.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(0) = 0 \Rightarrow O(0,\ 0).$$

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$.

$$y - 0 = 3(x - 0);\ \ y = 3x.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente:

$$\underline{Tangente\text{: } t \equiv 3x - y = 0}.$$

****

4º) En una comunidad de vecinos en el 70 % de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el 30 % restante un nombre femenino. En dicha comunidad, la probabilidad de que un hombre trabaje es de 0,8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es 0,7. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:

a) Una persona que trabaja.

b) Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.

----

a)

$$P = P(T) = P(Ma \cap T) + P(Fe \cap T) =$$

$$= P(Ma) \cdot P(T/Ma) + P(Fe) \cdot P(T/Fe) = 0,7 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,56 + 0,21 =$$

$$= \underline{0,77}.$$

b)

$$P = P(Ma/T) = \frac{P(Ma \cap T)}{P(T)} = \frac{P(Ma) \cdot P(T/Ma)}{P(T)} = \frac{0,7 \cdot 0,8}{0,77} = \frac{0,56}{0,77} = \underline{0,7273}.$$

****

5º) El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ descargas y desviación típica $\sigma = 20$ descargas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99,5 descargas. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Supóngase que $\mu = 100$ descargas. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 horas, la media muestral, $\overline{x}$, esté entre 100 y 110 descargas.

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

Datos: $n = 40;\ \ \overline{x} = 99,5;\ \sigma = 20;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(99,5 - 1,96\cdot\frac{20}{\sqrt{40}};\ 99,5 + 1,96\cdot\frac{20}{\sqrt{40}}\right);$

$(99,5 - 1,96\cdot 3,1623;\ 99,5 + 1,96\cdot 3,1623);$

$(99,5 - 6,1981;\ 99,5 + 6,1981).$

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = (93,3019;\ \ 105,6981).}$$

b)

$Datos$: $\mu = 100;\ \ n = 10;\ \ \sigma = 20.$

$X \rightarrow N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(100;\ \frac{20}{\sqrt{10}}\right) = N(100;\ 6,32).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-100}{6,32}.$

$P = P(100 \le Z \le 110) = P\left(\frac{100-100}{6,32} \le Z \le \frac{110-100}{6,32}\right) = P\left(0 \le Z \le \frac{10}{6,32}\right) =$

$$= P(0 \leq Z \leq 1,58) = P(Z < 1,58) - P(Z < 0) = 0,9429 - 0,5 = \underline{0,4429}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

1º) Discutir el sistema $x + 2y - z = 6 \quad y + z = 1\, ax + y - 2z = 4 \}$ en función del parámetro a. Resolverlo para $a = 2$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (1\ 2\ -1\ 0\ 1\ 1\ a\ 1\ -2\ )$ y $M' = (1\ 2\ -1\ 0\ 1\ 1\ a\ 1\ -2\quad 6\ 1\ 4\ )$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M| = |1\ 2\ -1\ 0\ 1\ 1\ a\ 1\ -2\ | =- 2 + 2a + a - 1 = 0;\ 3a - 3 = 0;\ a - 1 =$

.

$\underline{Para\ a \neq 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M^{'} = 3 = n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.}$

$Para\ a = 1 \Rightarrow M^{'} = (1\ 2\ -1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ -2\quad 6\ 1\ 4\ ) \Rightarrow Rang\ M^{'} \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |1\ 2\ 6\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 4\ | = 4 + 2 - 6 - 1 =- 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M^{'} = 3.$

$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M^{'} = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

$b)$

Para $a = 2$ el sistema resulta $\{x + 2y - z = 6\ \ y + z = 1 \quad 2x + y - 2z = 4$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{|6\ 2\ -1\ 1\ 1\ 1\ 4\ 1\ -2\ |}{3\cdot2-3} = \frac{-12-1+8+4-6+4}{3} = \frac{-19+16}{3} = \frac{-3}{3} =-\ 1.$$

$$y = \frac{|1\ 6\ -1\ 0\ 1\ 1\ 2\ 4\ -2\ |}{3} = \frac{-2+12+2-4}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$x = \frac{|1\ 2\ 6\ 0\ 1\ 1\ 2\ 1\ 4\ |}{3} = \frac{4+4-12-1}{3} = \frac{8-13}{3} =-\ \frac{5}{3}.$$

$$\underline{Solución: x =-\ 1,\ \ y = \frac{8}{3},\ \ z =-\ \frac{5}{3}.}$$

****

2º) Una empresa fabrica un determinado producto, que vende al precio unitario de 15 euros. La función de costes, que representa el coste (en unidades monetarias) en función del número de unidades de producto, es $C(x) = 2x^2 - 45x + 300$, donde x es el número de unidades del producto. Hallar el número de unidades que ha de vender para obtener el máximo beneficio, sabiendo que el beneficio es igual al ingreso total obtenido por la venta menos los costes. Calcular el beneficio máximo.

La función ingresos es $I(x) = 15x$.

La función beneficios es: $B(x) = I(x) - C(x) = 15x - \left(2x^2 - 45x + 300\right) =$

$= 15x - 2x^2 + 45x - 300 = \underline{-2x^2 + 60x - 300 = B(x)}.$

Para que una función tenga un máximo relativo son condiciones necesarias que se anule su primera derivada y que sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(x) = -4x + 60.$ $\quad\quad f''(x) = -4 < 0 \Rightarrow Justificación\ de\ máximo.$

$f'(0) = 0 \Rightarrow -4x + 60 = 0;\ \ -x + 15 = 0 \Rightarrow x = 15.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ alcanza\ vendiendo\ 15\ unidades}.$

$B(15) = -2 \cdot 15^2 + 60 \cdot 15 - 300 = -2 \cdot 225 + 900 - 300 =$

$= 600 - 450 = 150.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 150\ unidades\ monetarias}.$

****

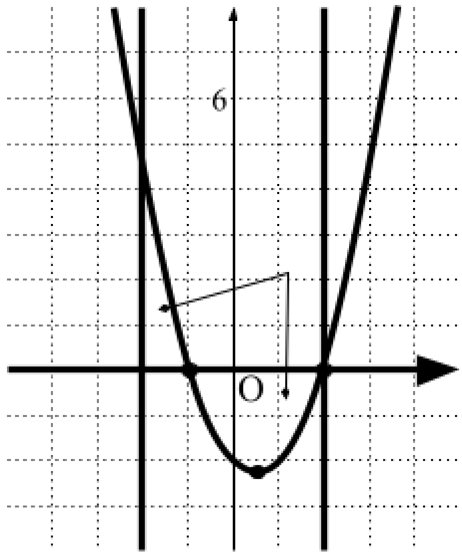
3º) Hallar el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $y = x^2 - x - 2$, el eje OX y las rectas $x =- 2$ y $x = 2$. Hacer la representación gráfica de dicha área.

Los puntos de intersección de la parábola con el eje OX son los siguientes:

$y = x^2 - x - 2 = 0;\ \ x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \{x_1 =- 1 \rightarrow A(- 1,\ 0)\ x_2 = 2 \rightarrow B(2,$

.

El vértice de la parábola es el siguiente:



$y' = 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}.$

$y_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 =$

$= \frac{1-2-8}{4} =- \frac{9}{4} \Rightarrow V\left(\frac{1}{2},\ \ - \frac{9}{4}\right).$

La representación gráfica de la situación se expresa, aproximadamente, en la figura adjunta, de la cual se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{-1} f(x)\cdot dx + \int_{2}^{-1} f(x)\cdot dx = [F(x)]_{-2}^{-1} + [F(x)]_{2}^{-1} =$$

$$= F(- 1) - F(- 2) + F(- 1) - F(2) = 2F(- 1) - F(- 2) - F(2)\ . \quad (*)$$

Teniendo en cuenta que $F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int\left(x^2 - x - 2\right)\cdot dx =$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$, sustituyendo en la expresión (*) resulta:

$$S = 2\cdot\left[\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2\cdot(- 1)\right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 2\cdot(- 2)\right] - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2\cdot 2\right) =$$

$$= 2\cdot\left(- \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(- \frac{8}{3} - 2 + 4\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) =$$

$$=- \frac{2}{3} - 1 + 4 + \frac{8}{3} - 2 - \frac{8}{3} + 6 = 7 - \frac{2}{3} = \frac{19}{3}$$

$$\underline{S = \frac{19}{3}\, u^2 \cong 6,333\, u^2.}$$

****

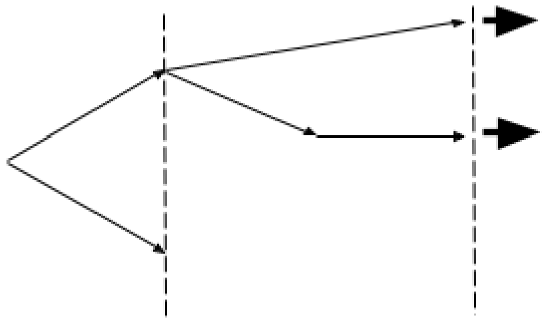
4º) El examen de una asignatura consta de tres pruebas. La primera prueba es superada por el 80 % de los alumnos que la realizan. Esta prueba es eliminatoria, por lo que si no se supera no se pueden realizar las otras, y se suspende la asignatura. La segunda prueba tiene dos convocatorias en las que puede superarse, la ordinaria y la extraordinaria (para alumnos que no la hayan superado en la ordinaria). Superan esta prueba el 35 % de los alumnos en la convocatoria ordinaria y el 50 % de los alumnos que se presentan a la extraordinaria. La tercera prueba solo pueden realizarla los alumnos que tienen las otras dos pruebas superadas, y la supera el 75 % de los alumnos presentados.

a) Calcular la probabilidad de superar las dos primeras pruebas.

b) Si el requisito para aprobar la asignatura es que se superen las tres pruebas, hallar la probabilidad de aprobar la asignatura.

----

a)



$$P = P(A_1)\cdot P(AO_2/A_1) + P(A_1)\cdot P(\overline{AO_2}/A_1)\cdot P(AE_2/A_1) =$$

$= 0,80\cdot 0,35 + 0,80\cdot 0,65\cdot 0,50 = 0,28 + 0,26 = \underline{0,54}$.

b)

$$P = P(A_1)\cdot P(AO_2/A_1)\cdot P(A_3) + P(A_1)\cdot P(\overline{AO_2}/A_1)\cdot P(AE_2/A_1)\cdot P(A_3) =$$

$= 0,80\cdot 0,35\cdot 0,75 + 0,80\cdot 0,65\cdot 0,50\cdot 0,75 = 0,28\cdot 0,75 + 0,26\cdot 0,75 =$

$= 0,75\cdot(0,28 + 0,26) = 0,75\cdot 0,54 = \underline{0,405}$.

****

5º) En una muestra aleatoria de tamaño 200 árboles de una población se ha obtenido que 45 tienen una plaga. Hallar un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de árboles de la población que tienen la plaga.

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$

$1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$

$Datos: \ p = \frac{45}{200} = 0,225; \ \ q = 0,775; \ \ n = 200; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p, \ q \ y \ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}; \ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$\left(0,225 - 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,225 \cdot 0,775}{200}}; \ 0,225 + 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,225 \cdot 0,775}{200}}\right);$

$(0,225 - 1,645 \cdot 0,0295; \ 0,225 + 1,645 \cdot 0,0295);$

$(0,225 - 0,0486; \ 0,225 + 0,0486).$

$$\underline{I. \ C._{90\ \%} = (0,1764; \ 0,2736).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Una fábrica produce dos modelos de bolsos, tipo A y tipo B. Cada bolso tipo A requiere 5 m^2 de piel y 5 horas de trabajo y cada bolso del modelo B requiere 5 m^2 de piel y 10 horas de trabajo. Dispone de 200 m^2 de piel y 225 horas de trabajo. Además, quiere producir mayor o igual número de bolsos tipo A que B. El beneficio obtenido es de 50 euros por cada bolso tipo A y 80 euros por cada bolso tipo B. Hallar el número de bolsos que debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

Sean $x \, e \, y$ el número bolsos de los tipos A y B que se fabrican, respectivamente.

Las restricciones son:

$$5x + 5y \leq 200 \quad 5x + 10y \leq 225 \quad x \geq y \quad x \geq 0; y \geq 0 \} \quad x + y \leq 40 \quad x + 2y \leq 45$$

.

x	40	0
y	0	40

①$\Rightarrow x + y \leq 40 \Rightarrow y \leq 40 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	45	25
y	0	16

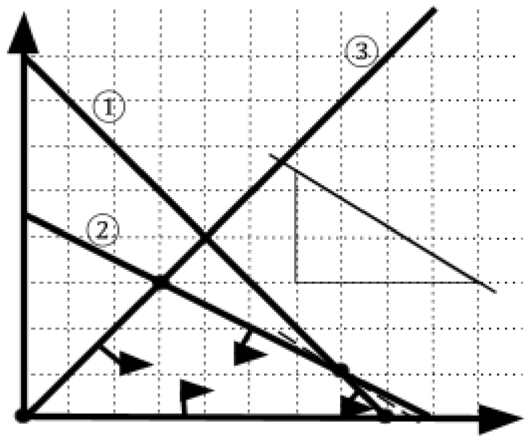
②$\Rightarrow x + 2y \leq 45 \Rightarrow y \leq \frac{45-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	40
y	0	40

③$\Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x \Rightarrow P(10,\ 0) \rightarrow Si.$

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$$A \Rightarrow x + 2y = 45 \qquad x = y \} \Rightarrow 3y + 45 = 0;$$

$y + 15 = 0;\ x = y = 15 \Rightarrow A(15,\ 15).$

$B \Rightarrow\ x + y = 40\, x + 2y = 45 \} - x - y =- 40\, x + 2y = 45\ \} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 5;\ \ x = 35 \Rightarrow B(35,\ 5).$

$C \Rightarrow \qquad y = 0\, x + y = 40 \} \Rightarrow C(40,\ 0).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,\ y) = 50x + 80y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(15,\ 15) = 50 \cdot 15 + 80 \cdot 15 = 750 + 1.200 = 1.950.$

$B \Rightarrow f(35,\ 5) = 50 \cdot 35 + 80 \cdot 5 = 1.750 + 400 = 2.150.$

$C \Rightarrow f(40,\ 0) = 50 \cdot 40 + 80 \cdot 0 = 2.000 + 0 = 2.000.$

El máximo se produce en el punto $B(35,\ 5)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,\ y) = 50x + 80y = 0 \Rightarrow y =- \frac{50}{80}x =- \frac{5}{8}x =- \frac{2,5}{4}x \Rightarrow m =- \frac{-2,5}{4}.$$

$$\underline{Debe\ fabricar\ 35\ bolsos\ tipo\ A\ y\ 5\ bolsos\ tipo\ B.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 2.150\ euros.}$$

****

2º) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{5x+1}}$. $\qquad b)\ g(x) = x^2 \cdot Lx^2$. $\qquad c)\ h(x) = e^{-3x+x^2}$.

$a)$

$$f(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{5x+1}} = -(5x+1)^{-\frac{1}{5}}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{5} \cdot (5x+1)^{-\frac{1}{5}-1} \cdot 5 = (5x+1)^{-\frac{6}{5}} = \frac{1}{(5x+1)^{\frac{6}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(5x+1)^6}}.$$

$$\underline{f'(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{(5x+1)^6}} = \frac{1}{(5x+1)\sqrt[5]{5x+1}} = \frac{\sqrt[5]{(5x+1)^4}}{(5x+1)^2}}.$$

$b)$

$$g(x) = x^2 \cdot Lx^2 = x^2 \cdot 2 \cdot Lx = 2x^2 \cdot Lx.$$

$$g'(x) = 4x \cdot Lx + 2x^2 \cdot \frac{1}{x} = 4x \cdot Lx + 2x.$$

$$\underline{g'(x) = 4x \cdot Lx + 2x = 2x \cdot (2Lx + 1)}.$$

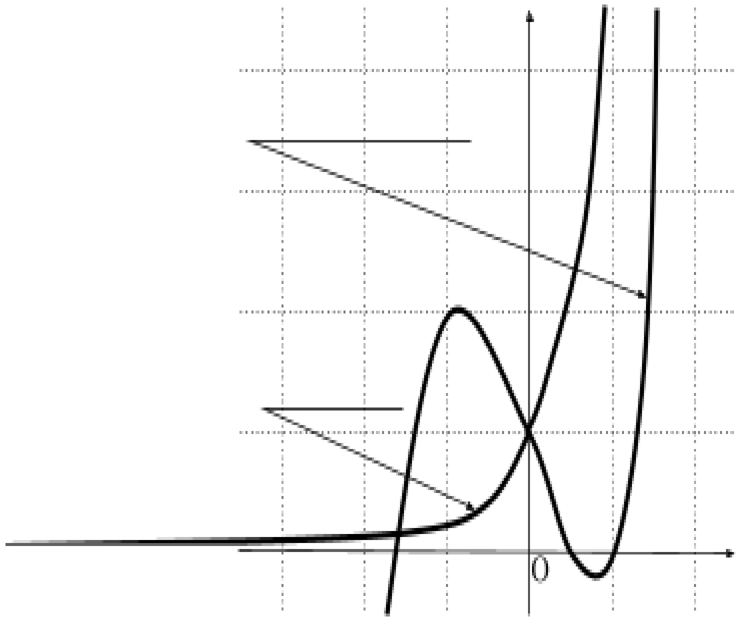
$c)$

$$h(x) = e^{-3x+x^2}.$$

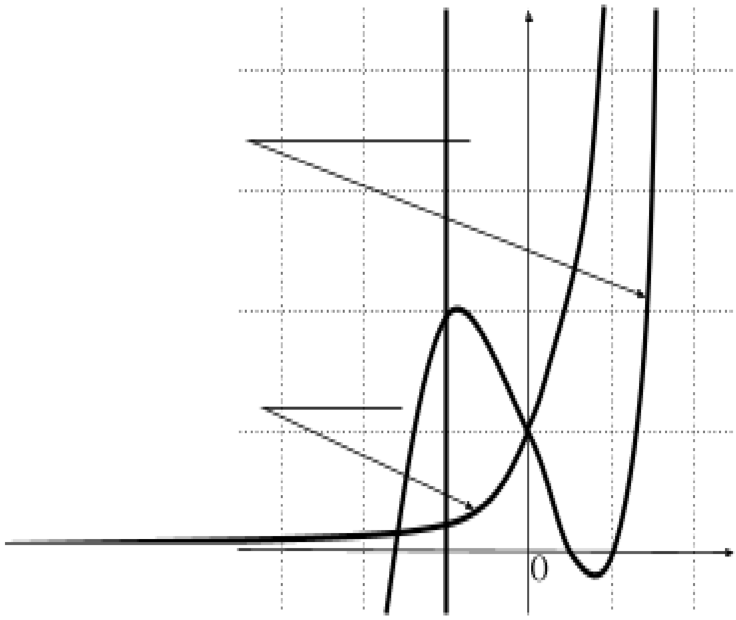
$$\underline{h'(x) = (2x - 3) \cdot e^{-3x+x^2}}.$$

****

3º) Dadas las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^3 - 2x + 1$, cuyas gráficas aparecen en la figura adjunta.



Hallar el área del recinto acotado limitado por las dos gráficas y las rectas $x = -1$ y $x = 0$.



De la observación de la figura, en el intervalo $(-1, 0)$, todas las ordenadas de la función $g(x) = x^3 - 2x + 1$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $f(x) = e^x$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{0} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-1}^{0} \left[\left(x^3 - 2x + 1\right) - e^x\right] \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} + x - e^x\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{x^4}{4} - x^2 + x - e^x\right]_{-1}^{0} =$$

$$= - e^0 - \left[\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^2 + (-1) - e^{-1}\right] = - 1 - \frac{1}{4} + 1 + 1 + \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{e} =$$

$$= \frac{4e-e+4}{4e} = \frac{3e+4}{4e}.$$

$$\underline{S = \frac{3e+4}{4e}\, u^2 = 1,12\, u^2.}$$

****

4º) La probabilidad de que un autobús llegue con retraso a una parada es 0,2. Si pasa cuatro veces a lo largo del día por la parada, calcular la probabilidad de que:

a) No llegue con retraso ninguna de las veces.

b) Llegue con retraso al menos una vez.

c) Al menos tres veces llegue con retraso.

d) Llegue con retraso exactamente dos veces consecutivas.

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$Retraso$: $p = 0,2$; $puntual$: $q = 0,8$; $n = 4$; $r = veces\ con\ retraso$.

Sabiendo que la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial es $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

a)

$r = 0 \Rightarrow p = \binom{4}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^4 = 1 \cdot 1 \cdot 0,4096 = \underline{0,4096}$.

b)

Que “llegue con retraso al menos una vez” es el suceso contrario de “no llegar tarde ninguna vez”.

$P = 1 - 0,4096 = \underline{0,5994}$.

c)

$r = 3\ y\ r = 4 \Rightarrow p = \binom{4}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^1 + \binom{4}{4} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^0 =$

$= 4 \cdot 0,008 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,0016 \cdot 1 = 0,0256 + 0,0016 = \underline{0,0272}$.

d)

Las veces pueden ser: 1ª − 2ª; 2ª − 3ª; 3ª − 4ª; o sea: tres veces

$P = 3 \cdot (0,2 \cdot 0,2) = \underline{0,12}$.

****

5º) La altura para una determinada población sigue una distribución normal con una desviación típica conocida σ. Para hallar un intervalo de confianza para la media de la población se ha tomado una muestra aleatoria simple de 100 individuos, obteniéndose una altura media de 145 cm. Si el intervalo de confianza con un nivel de significación 0,05 construido a partir de los datos anteriores es $(135,2;154,8)$, hallar el valor de σ .

$E=\frac{154,8-135,2}{2}=\frac{19,6}{2}=9,8.$

Para un nivel de significación 0,05 es:

$\alpha=0,05\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0,025}=1,96.$

$(1-0,025=0,9750\rightarrow z=1,96).$

Datos: $n=100;\ \ E=9,8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1,96.$

$E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow\sigma=\frac{E\cdot\sqrt{n}}{z_{\frac{\alpha}{2}}}=\frac{9,8\cdot\sqrt{100}}{1,96}=\frac{98}{1,96}=50.$

$\underline{\mathit{La\ desviación\ típica\ es}\ \sigma=50}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matices $A = \left(1 \ -\frac{1}{2}\ 0 \ -3\ 1\ 1 \ -1\ 2 \ -1\right)$, $B = (2x\ 0\ z\ )$, $C = (0\ y\ 1\ )\ y\ D = (3\ 1 \ -5\ )$. Hallar $x,\ y,\ z$ para que se cumpla $A^t(B + C) = D$.

$$A^t = \left(1 \ -3 \ -1 \ -\frac{1}{2}\ 1\ 2\ 0\ 1 \ -1\right). \quad B + C = (2x\ 0\ z\ ) + (0\ y\ 1\ ) = (2x\ y\ z$$

.

$$A^t \cdot (B + C) = \left(1 \ -3 \ -1 \ -\frac{1}{2}\ 1\ 2\ 0\ 1 \ -1\right)\cdot(2x\ y\ z + 1\ ) = (2x - 3y - z -$$

.

$$A^t \cdot (B + C) = D \Rightarrow (2x - 3y - z - 1 \ - x + y + 2z + 2\ y - z - 1\ ) = (3\ 1 \ -5\ ) \Rightarrow$$

.

De la tercera ecuación: $y = -4 + z$. Sustituyendo en las otras ecuaciones:

$$2x - 3(-4 + z) - z = 4 \ - x + (-4 + z) + 2z = -1 \} \ 2x + 12 - 3z - z = 4$$

$$2x - 4z = -8 \ - 2x + 6z = 6\ \} \Rightarrow 2z = -2; \ z = -1; \ y = -4 - 1 = -5; \ - x - 3$$

.

$$\underline{Solución: x = -6,\ y = -5,\ z = -1}.$$

****

2º) Dada la función $f(x) = x^3 \cdot L(2x + 5) + ax + b$ con a y b números reales. Hallar a y b para que se cumpla $f(0) = 2$ y $f'(0) = 1$.

$$f(0) = 0 \cdot L(0 + 5) + 0 + b = b.$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow \underline{b = 2}.$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot L(2x + 5) + x^3 \cdot \frac{2}{2x+5} + a.$$

$$f'(0) = 1 \Rightarrow 0 \cdot L(0 + 5) + 0 \cdot \frac{2}{0+5} + a = 1;\ \ 0 + 0 + a = 1 \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

****

3º) Calcular las siguientes integrales:

$$a)\;\; I=\int_1^2 \left(-x^3+3x-2\right)\cdot dx. \qquad b)\;\; I=\int \frac{3x^2}{x^3+1}\cdot dx. \qquad c)\;\; I=\int 2e^{2x}\cdot dx.$$

----

a)

$$I=\int_1^2 \left(-x^3+3x-2\right)\cdot dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}-2x\right]_1^2=$$

$$=\left(-\frac{2^4}{4}+\frac{3\cdot 2^2}{2}-2\cdot 2\right)-\left(-\frac{1^4}{4}+\frac{3\cdot 1^2}{2}-2\cdot 1\right)=-4+6-4+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=\frac{1-6}{4}=-\frac{5}{4}.$$

$$\underline{I=\int_1^2 \left(-x^3+3x-2\right)\cdot dx=-\frac{5}{4}.}$$

b)

$$I=\int \frac{3x^2}{x^3+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{x^3+1=t \;\; 3x^2\cdot dx=dt\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t}\cdot dt=Lt+C=L\left(x^3+1\right)+C$$

.

$$\underline{I=\int \frac{3x^2}{x^3+1}\cdot dx=L\left(x^3+1\right)+C.}$$

c)

$$I=\int 2e^{2x}\cdot dx \Rightarrow \left\{2x=t \;\; dx=\frac{1}{2}dt\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \int e^t\cdot dt=e^t+C=e^{2x}+C.$$

También puede resolverse de la forma siguiente:

$$I=\int 2e^{2x}\cdot dx \Rightarrow \left\{e^{2x}=t \;\; 2\cdot e^{2x}\cdot dx=dt\right\} \Rightarrow \int dt=t+C=e^{2x}+C.$$

$$\underline{I=\int 2e^{2x}\cdot dx=e^{2x}+C.}$$

****

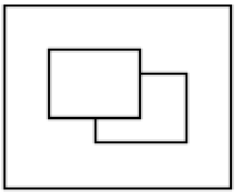
4º) Sabiendo que $P(A \cup B) = 0,95$; $P(A \cap B) = 0,35$; $P(A/B) = 0,5$. Hallar $P(A)$, $P(B)$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A/B)} = \frac{0,35}{0,5} = \underline{0,7}.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 0,95 - 0,7 + 0,35 = \underline{0,6}.$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,95 = \underline{0,05}.$$



****

5º) En una muestra aleatoria de 100 individuos se ha obtenido para el peso una media de 60 kg. Se sabe que el peso en la población de la que procede la muestra sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 kg.

a) Obtener un intervalo de confianza al 92 % para el peso medio de la población.

b) ¿Qué error máximo se comete en la estimación anterior?

----

a)

Para un nivel de confianza del 92 % es:

$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 1 - 0,92 = 0,08 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,04} = 1,75.$

$1 - 0,04 = 0,9600 \rightarrow z = 1,75).$

Datos: $n = 100;\ \overline{x} = 60;\ \sigma = 20;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,75.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\ \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(60 - 1,75 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}};\ 60 + 1,75 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right);\ (60 - 1,75 \cdot 2;\ 60 + 1,75 \cdot 2);$

$(60 - 3,5;\ 60 + 3,5).$

$$\underline{I.\ C._{92\ \%} = (56,5;\ \ 63,5).}$$

b)

El error máximo que se comete es la mitad del valor del intervalo de confianza:

$E = \frac{56,5-63,5}{2} = \frac{7}{2} = \underline{3,5}.$

También puede obtenerse de la forma siguiente:

Datos: $n = 100;\ \sigma = 20;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,75.$

$Siendo$: $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,75 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 1,75 \cdot 2 = \underline{3,5}.$

****

OPCIÓN B

1º) Un agricultor puede utilizar, como máximo, 120 hectáreas de terreno para dos tipos de cultivo, A y B. Quiere dedicar, al menos, 25 hectáreas al cultivo A, y el terreno dedicado al cultivo B debe ser como mínimo el doble que el dedicado al cultivo A. Cada hectárea de cultivo A le produce 300 euros de beneficio, mientras que cada hectárea de cultivo B le produce 215 euros. Hallar las hectáreas que debe dedicar a cada uno de los cultivos para conseguir el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderá dicho beneficio?

Sean x e y el número de hectáreas que cultiva el agricultor de los tipos A y B, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 120 \\ x\geq 25 \\ y\geq 2x \end{array}\right\}$.

x	0	120
y	120	0

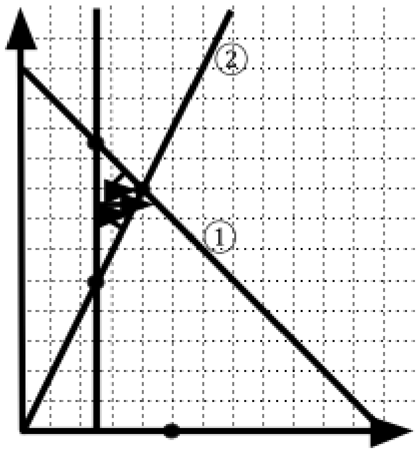
$① \Rightarrow x+y\leq 120 \Rightarrow y\leq 120-x \Rightarrow O(0,\ 0) \to Si.$

x	0	60
y	0	120

$② \Rightarrow y\geq 2x \Rightarrow P(50,\ 0) \to No.$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=120 \\ x=25 \end{array}\right\} \Rightarrow A(25,\ 95).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=120 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=120;\ \ x=40;$

$40+y=120;\ \ y=80 \Rightarrow B(40,\ 80).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=25 \\ x-2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=50 \Rightarrow C(25,\ 50).$

La función de objetivos es $f(x,\ y)=300x+215y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(25,\ 95) = 300 \cdot 25 + 215 \cdot 95 = 7.500 + 20.425 = 27.925.$$

$$B \Rightarrow f(40,\ 80) = 300 \cdot 40 + 215 \cdot 80 = 12.000 + 17.200 = 29.200.$$

$$C \Rightarrow f(25,\ 50) = 300 \cdot 25 + 215 \cdot 50 = 7.500 + 10.575 = 18.250.$$

El valor máximo se produce en el punto $B(40,\ 80)$.

$$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ con\ 40\ Ha\ tipo\ A\ y\ 60\ Ha\ tipo\ B.}$$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 29.200\ euros.}$$

****

2º) Dada la función $f(x) = 5x^3 e^{2x} + \frac{1}{x^2+1}$:

a) Calcular $f'(0)$.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $P(0,\ 1)$.

----

a)

$$f'(x) = 15x^2 \cdot e^{2x} + 10x^3 \cdot e^{2x} - \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

$$f'(0) = 0 \cdot e^0 + 0 \cdot e^0 - \frac{0}{(0+1)^2} = 0..$$

$$\underline{f'(0) = 0}.$$

b)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$m = f'(0) = 0.$$

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$.

$$y - 1 = 0(x - 0) = 0.$$

$$\underline{Tangente\colon\ t \equiv y - 1 = 0}.$$

****

3º) Hallar el valor del parámetro a para que se cumpla $\int_0^1 \left(ax^3 - 9x^2 + 10\right)dx = 2a$.

$$\int_0^1 \left(ax^3 - 9x^2 + 10\right)\cdot dx = \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{9x^3}{3} + 10x\right]_0^1 = \left[\frac{ax^4}{4} - 3x^3 + 10x\right]_0^1 = 2a;$$

$\left(\frac{a\cdot 1^4}{4} - 3\cdot 1^3 + 10\cdot 1\right) - 0 = 2a;\ \ \frac{a}{4} - 3 + 10 = 2a;\ \ \frac{a}{4} + 7 = 2a;\ \ a + 28 = 8a;$

$7a = 28 \Rightarrow \underline{a = 4}$.

****

4º) En un grupo hay 12 mujeres y 8 hombres. Se eligen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, tres personas.

a) Hallar la probabilidad de que las tres personas sean mujeres.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres personas no sean del mismo sexo?

c) Hallar la probabilidad de que salgan, al menos, dos hombres.

----

a)

$$P = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{10}{18} = \frac{3}{5} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{5}{9} = \frac{11}{19 \cdot 3} = \underline{\frac{11}{57} = 0,1030}.$$

b)

El suceso contrario a que "las tres personas no sean del mismo sexo" es "que las tres personas sean del mismo sexo", por lo cual la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 1 - [P(MMM) + P(HHH)] = 1 - \left(\frac{11}{57} + \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18}\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{11}{57} + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{1}{3}\right) = 1 - \left(\frac{11}{57} + \frac{14}{57 \cdot 5}\right) = 1 - \frac{55+14}{57 \cdot 5} = 1 - \frac{69}{285} = \frac{285-69}{285} = \frac{216}{285}$$

.

$$\underline{P = \frac{216}{285} = 0,7579}.$$

c)

$$P = P(HHH) + P(HHM) + P(HMH) + P(MHH) =$$

$$= P(HHH) + 3 \cdot P(HHM) = \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} + 3 \cdot \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{12}{18} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{19} \cdot 2 =$$

$$= \frac{14}{95} \cdot \left(\frac{1}{3} + 2\right) = \frac{14}{95} \cdot \frac{7}{3} = \underline{\frac{98}{285} = 0,3439}.$$

****

5º) En una muestra aleatoria de tamaño 150 de individuos de una población se ha obtenido que 32 utilizan el tranvía. Hallar un intervalo de confianza al 99 % para la proporción de individuos de la población que utilizan el tranvía.

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$

$1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$

Datos:

$n = 150; \;\; p = \frac{32}{150} = 0,213; \;\; q = 1 - 0,213 = 0,787; \;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y \, n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, \; p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0,213 - 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,213 \cdot 0,787}{150}}; \; 0,213 + 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,213 \cdot 0,787}{150}}\right);$$

$(0,213 - 2,575 \cdot 0,0334; \; 0,213 + 2,575 \cdot 0,0334);$

$(0,213 - 0,0861; \; 0,213 + 0,0861).$

$$\underline{I.\ C._{99\ \%} = (0,1269; \; 0,2991).}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) En una tienda por comprar 3 videojuegos, 1 auricular inalámbrico y 2 memorias USB nos cobran 230 euros. Si volvemos a la tienda y compramos 2 videojuegos, una memoria USB y devolvemos el auricular, nos cobran 60 euros.

i) Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones.

ii) Si nos cobran 70 euros por 1 videojuego y 1 memoria USB, plantee y resuelva el nuevo sistema de ecuaciones.

----

i)

Sean x, y, z el precio de un videojuego, un auricular inalámbrico y una memoria USB, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\underline{3x + y + 2z = 230 \quad 2x + y - z = 60 \}}.$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas cuyas matrices de coeficientes y ampliada son $M = (3\ 1\ 2\ 2\ 1\ -1)$ y $M' = (3\ 1\ 2\ 2\ 1\ -1\quad 230\ 60)$.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.$$

Para su resolución hacemos $z = \lambda$:

$$3x + y + 2z = 230 \quad 2x + y - z = 60 \} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow 3x + y = 230 - 2\lambda \quad 2x + y =$$

$$\Rightarrow x = 170 - 3\lambda;\ y = \lambda + 60 - 340 + 6\lambda = -280 + 6\lambda.$$

$\underline{Solución: x = 170 - 3\lambda,\ \ y =- 280 + 6\lambda,\ \ z = \lambda,\ \ \forall\lambda \in R.}$

$b)$

Es nuevo sistema es

$3x + y + 2z = 230 \quad 2x + y - z = 60 \qquad x + z = 70\,\}$

El rango de la nueva matriz de coeficientes es el siguiente:

$|A| = |3\ 1\ 2\ 2\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 1\,| = 3 - 1 - 2 - 2 =- 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 3.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius.

$Rang\ A = Rang\ A^{'} = 3 = nº\ incóg \Rightarrow S.\ C.\ D.$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$x = \frac{|230\ 1\ 2\ 60\ 1\ -1\ 70\ 0\ 1\,|}{-2} = \frac{230-70-140-60}{-2} = \frac{230-270}{-2} = \frac{-40}{-2} = 20.$

$y = \frac{|3\ 230\ 2\ 2\ 60\ -1\ 1\ 70\ 1\,|}{-2} = \frac{180+280-230-120+210-460}{-2} = \frac{670-810}{-2} = \frac{-140}{-2} = 70$

.

$z = \frac{|3\ 1\ 230\ 2\ 1\ 60\ 1\ 0\ 70\,|}{-2} = \frac{210+60-230-140}{-2} = \frac{270-370}{-2} = \frac{-100}{-2} = 50.$

$\underline{Un\ videojuego,\ un\ auricular\ y\ una\ memoria\ valen\ 20,\ 70\ y\ 50\ euros\ respect.}$

****

2º) i) Calcule el valor del parámetro a de la función $f(x) = \frac{ax^2}{x+1}$, sabiendo que $y = 3x - 1$ es la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$.

ii) Calcule las asíntotas de la función $f(x)$.

iii) Calcule los máximos y mínimos de la función $f(x)$.

----

i)

La pendiente de la recta tangente $y = 3x - 1$ es $m = 3$.

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = \frac{2ax\cdot(x+1)-ax^2\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2ax^2+2ax-ax^2}{(x+1)^2} = \frac{ax^2+2ax}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+2)}{(x+1)^2}.$$

$$m = f'(1) = 3 \Rightarrow \frac{a\cdot 1\cdot(1+2)}{(1+1)^2} = 3;\ \ \frac{3a}{4} = 3 \Rightarrow \underline{a = 4}.$$

La función resulta: $f(x) = \frac{4x^2}{x+1}$.

ii)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = f(x) = \frac{4x^2}{x+1} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x + 1 = 0;\ \ x = -1 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = -1\ es\ asíntota\ vertical.}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{4x^2}{x+1}}{x} = \frac{4x^2}{x^2+x} = 4.$$

$$n = \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \left(\frac{4x^2}{x+1} - 4x\right)\frac{4x^2-4x^2-4x}{4x+6} =$$

$$\frac{-4x+1}{4x+6} = -4.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 4x - 4\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función}.$$

$iii)$

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que anulan su primera derivada.

$$f'(x) = \frac{4x^2+8x}{(x+1)^2} = \frac{4x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x(x+2)}{(x+1)^2} = 0;\ \ 4x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x) = \frac{(8x+8)(x+1)^2-4x(x+2)[2\cdot(x+1)\cdot 1]}{(x+1)^4} = \frac{(8x+8)(x+1)-8x(x+2)}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{8x^2+8x+8x+8-8x^2-16x}{(x+1)^3} = \frac{8}{(x+1)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{8}{(0+1)^3} = 8 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo \Rightarrow O(0,\ 0)}.$$

$$f''(-2) = \frac{8}{(-2+1)^3} = -8 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2.$$

$$f(-2) = \frac{4\cdot(-2)^2}{-2+1} = \frac{16}{-1} = -16 \Rightarrow \underline{Máximo \Rightarrow A(-2,\ -16)}.$$

****

3º) La velocidad a la que circulan los vehículos por un determinado tramo de carretera sigue una distribución normal. A partir de 100 mediciones tomadas por un radar colocado en dicha carretera, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 95 % para la velocidad media (km/h) a la que circulan los automóviles por ese tramo: $(80,92; 89,94)$.

i) Calcule la varianza poblacional y calcule la velocidad media de la muestra de 100 mediciones tomadas por el radar.

ii) Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la velocidad media de los coches que circulan por ese tramo de carretera.
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

----

a)

$$\overline{x} = \frac{89,94+80,92}{2} = \frac{170,86}{2} = \underline{85,43}.$$

$$\underline{La\ velocidad\ media\ es\ de\ 85,43\ km/h.}$$

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

$E = \frac{89,94-80,92}{2} = \frac{9,02}{2} = 4,51.$

Datos: $n = 100$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$; $E = 4,51.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{z_{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{4,51\cdot\sqrt{100}}{1,96} = \frac{45,1}{1,96} = 23,01.$

$$\underline{La\ varianza\ poblacional\ es\ \sigma = 23,01.}$$

b)

Para un nivel de confianza del 97 % es:

$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 1 - 0,97 = 0,03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,17.$

$1 - 0,015 = 0,9850 \rightarrow z = 2,17).$

Datos: $n = 100$; $\overline{x} = 85,43$; $\sigma = 23,01$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}$, σ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(85,43\ -\ 2,17 \cdot \frac{23{,}01}{\sqrt{100}};\ 85,43\ +\ 2,17 \cdot \frac{23{,}01}{\sqrt{100}}\right);$$

$(85,43\ -\ 2,17 \cdot 2,301;\ 85,43\ +\ 2,17 \cdot 2,301);\ (85,43\ -\ 4,9932;\ 85,43\ +\ 4,9932)$.

$$\underline{I.\ C._{97\,\%} = (80,4368;\ 90,4232).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Los estudiantes de bachillerato de un centro escolar han recolectado 6.000 euros que quieren destinar a proyectos benéficos. Han seleccionado dos proyectos: el proyecto P1 colabora en la vacunación de niños y el proyecto P2 proporciona suplementos nutricionales a niños con alimentación incompleta. Por cada euro invertido en el proyecto P1 se podrá vacunar a tres niños y por cada euro invertido en el proyecto P2 se proporciona suplementos nutricionales a cinco niños. Los estudiantes deciden repartir el dinero en los proyectos de forma que se done para vacunas no más del doble de la donación para suplementos nutricionales. Además, quieren donar al menos 1.500 euros al proyecto de vacunación y no más de 3.500 euros al proyecto de alimentación. Determine cuántos euros deberán invertir en cada proyecto si se desea maximizar el número de niños beneficiados.

i) Plantee el problema. ii) Resuélvalo gráficamente.

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se elimina la restricción de no invertir más de 3.500 euros en suplementos nutricionales.

----

i)

Sean x e y el número de niños vacunados y que se les aplican suplementos nutricionales, respectivamente.

El sistema de inecuaciones es:

$3x + 5y \leq 6.000 \quad x \leq 2y \quad x \geq \frac{1.500}{3}; \;\; y \leq \frac{3.500}{5} \Big\} \quad \underline{3x + 5y \leq 6.000 \qquad x}$

.

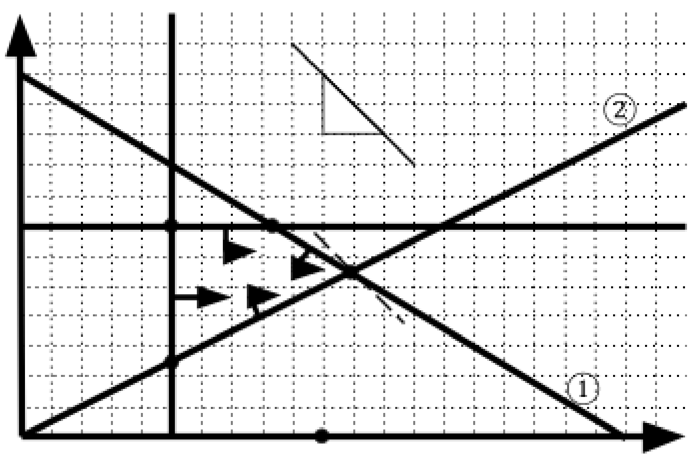
ii)

x	2.000	0
y	0	1.200

$①\Rightarrow 3x + 5y \leq 6.000 \Rightarrow y \leq \frac{6.000-3x}{5} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	2.000
y	0	1.000

$②\Rightarrow x - 2y \leq 0 \Rightarrow y \geq \frac{x}{2} \Rightarrow P(1.000,\ 0) \rightarrow No.$



La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.
La función de objetivos es $f(x,\ y) = x + y$.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow x = 500\ y = 700 \} \Rightarrow A(500,\ 700)$.

$B \Rightarrow 3x + 5y = 6.000 \qquad y = 700 \} \Rightarrow 3x + 3.500 = 6.000;\ \ 3x = 2.500;$

$= 833,33 \Rightarrow B(833,33;\ 700)$.

$C \Rightarrow 3x + 5y = 6.000 \qquad x = 2y \} \Rightarrow 6y + 5y = 6.000;\ \ 11y = 6.000;\ \ y$

$= 545,45;\ \ x = 1.090,91 \Rightarrow B(1.090,91;\ 545,45)$.

$D \Rightarrow x = 500\ \ x = 2y \} \Rightarrow D(500,\ 250)$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(500,\ 700) = 500 + 700 = 1.200$.

$B \Rightarrow f(833,33;\ 700) = 833,33 + 500 = 1.333,33$.

$C \Rightarrow f(1.090,91;\ 545,45) = 1.090,91 + 545,45 = 1.636,36$.

$D \Rightarrow f(500,\ 250) = 500 + 250 = 750$.

El valor máximo se produce en el punto $C(1.090,91;\ 545,45)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

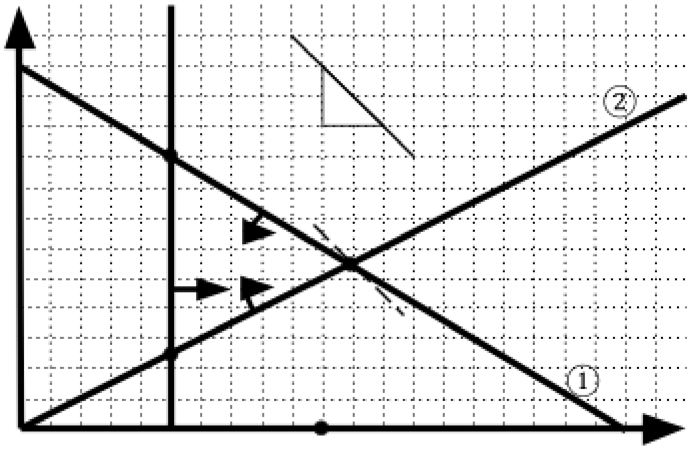
$f(x,\ y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{1}x = -\frac{2}{2}x \Rightarrow m = -\frac{2}{2}$.

$\underline{El\ máximo\ número\ de\ niños\ beneficiados\ es\ 1.636.}$

$iii)$
El nuevo sistema de inecuaciones resultante es
$3x + 5y \leq 6.000 \qquad x - 2y \leq 0 \qquad x \geq 500 \}$.

La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura siguiente.

La función de objetivos sigue siendo la misma: $f(x,\ y) = x + y$.



Los nuevos vértices de la sección factible son los siguientes:

Los puntos D y C se mantienen; desaparecen los puntos A y B y aparece el nuevo vértice M.

$M \Rightarrow \quad x = 500\ 3x + 5y = 6.000 \} \Rightarrow 1.500 + 5y = 6.000;\ \ 300 + y = 1.$

$y = 900 \Rightarrow M(500; 1.200)$.

$C \Rightarrow 3x + 5y = 6.000 \quad x = 2y \} \Rightarrow 6y + 5y = 6.000;\ \ 11y = 6.000;\ \ y =$

$= 545,45;\ \ x = 1.090,91 \Rightarrow B(1.090,91;\ 545,45)$.

$D \Rightarrow x = 500\ \ x = 2y \} \Rightarrow D(500,\ 250)$.

El valor máximo se sigue produciendo en el punto $C(1.090,91;\ 545,45)$.

$\underline{El\ máximo\ número\ de\ niños\ beneficiados\ sigue\ siendo\ de\ 1.636}$.

****

2º) Dada la función $f(x) = \{ \quad x \quad si \;\; x < -1 \; 2x^3 + 4x^2 - 3 \; si \; -1 \leq x < 2 \; \frac{5x}{x^2+1} \;\; si \;\; x \geq 2$.

i) Estudie la continuidad de la función.

ii) Calcule $f'(1)$ aplicando la definición de derivada.

iii) Calcule $I = \int_3^4 f(x) \cdot dx$.

----

i)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = -1 \; y \; x = 2$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

Para $x = -1$:

$\{ f(x) = x = -1 \qquad f(x) = \left(2x^3 + 4x^2 - 3\right) =$

$\Rightarrow f(x) = f(x) = f(1)$.

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ para\ x = -1}$.

$Para\ x = 2 \Rightarrow \{ f(x) = \left(2x^3 + 4x^2 - 3\right) = 16 + 16 - 3 = 29 \; f(x) = \frac{5x}{x^2+1} = \frac{10}{5} =$

$\Rightarrow f(x) \neq f(x) = f(2)$.

$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ continua\ para\ x = 2}$.

ii)

Para $x = 1$ la función es $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3$.

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\left[2 \cdot (x+h)^3 + 4 \cdot (x+h)^2 - 3\right] - \left(2x^3 + 4x^2 - 3\right)}{h} =$$

$$= \frac{\left\{2 \cdot (x+h)^2 [(x+h) + 2] - 3\right\} - \left(2x^3 + 4x^2 - 3\right)}{h} = \frac{\left[2 \cdot \left(x^2 + 2hx + h^2\right)(x + h + 2) - 3\right] - \left(2x^3 + 4x^2 - 3\right)}{h} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left(x^3 + hx^2 + 2x^2 + 2hx^2 + 2h^2x + 4hx + h^2x + h^3 + 2h^2\right) - 3 - \left(2x^3 + 4x^2 - 3\right)}{h} =$$

$$= \frac{2x^3+6hx^2+4x^2+6h^2x+8hx+2h^3+4h^2-3-2x^3-4x^2+3}{h} =$$

$$= \frac{6hx^2+6h^2x+8hx+2h^3+4h^2}{h} = \frac{2h\left(3x^2+3hx+4x+h^2+2h\right)}{h} =$$

$$= 2\cdot\left(3x^2 + 3hx + 4x + h^2 + 2h\right) = 2\cdot\left(3x^2 + 4x\right) = f^{'}(x).$$

$$f^{'}(-1) = 2\cdot\left[3\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1)\right] = 2\cdot(3-4) = -2.$$

$$\underline{f^{'}(-1) = -2}.$$

$iii)$

$$I = \int_3^4 f(x)\cdot dx = \int_3^4 \frac{5x}{x^2+1}\cdot dx \Rightarrow \{x = 4 \rightarrow t = 17\ x = 3 \rightarrow t = 10\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{10}^{17} \frac{1}{t}\cdot dt = [Lt]_{10}^{17} = L17 - L10 = L\frac{17}{10} = L1,7.$$

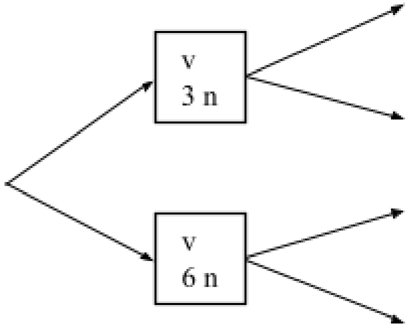
$$\underline{I = \int_3^4 f(x)\cdot dx = L1,7.}$$

****

3º) Dos estudiantes construyen un dado con 5 caras rojas y una cara azul, colocan 7 bolas verdes y 3 bolas negras en una caja A y colocan 6 bolas negras y 2 bolas verdes en una caja B. Se plantean el siguientes juego: lanzar el dado y sacar una bola de la caja A si la cara es roja y una bola de la caja B si la cara es azul. Lanzan el dado y sacan una bola. Calcule:

i) La probabilidad de que la bola sea verde.

ii) La probabilidad de que la cara del dado sea azul, sabiendo que la bola no es verde.



i)

$$P = P(V) = P(R \cap V) + P(A \cap V) = P(R) \cdot P(V/R) + P(A) \cdot P(V/A) =$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{12} + \frac{1}{8} = \frac{14+3}{24} = \underline{\frac{17}{24} = 0,7083.}$$

ii)

$$P = P(A/\overline{V}) = \frac{P(A \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{V}/A)}{1 - P(V)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{17}{24}} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{7}{24}} = \underline{\frac{1}{7} = 0,1429.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) Un estudiante de bachillerato ha decidido mejorar la dieta de su animal de compañía y analiza la composición de dos marcas de pienso (P1 y P2). La siguiente tabla recoge la información asociada a una ración de cada tipo de pienso:

	Hidratos carbono	Proteínas	Grasas	Hierro	Vitamina C	Precio venta (euros)
S1	4	7	2	0	0	0,8
S2	4	5	3	2	3	0,6

Su veterinario le ha recomendado una dosis diaria de hidratos de carbono entre 12 y 40 unidades, una dosis mínima diaria de vitamina C de 6 unidades, una dosis máxima de hierro diaria de 10 unidades y no sobrepasar 17 unidades de grasas al día. Determine cuántas raciones de cada tipo de pienso deberá usar para alimentar diariamente a su mascota si el estudiante desea maximizar la ingesta diaria de proteínas.

i) Plantee el problema. ii) Resuélvalo gráficamente.

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si el estudiante cambiara de opinión y deseara minimizar el gasto diario en pienso.

----

i)

Sean $x \, e \, y$ las raciones de piensos de los tipos P1 y P2 que el estudiante suministra diariamente a su mascota, respectivamente.

El sistema de inecuaciones que se deduce del enunciado es el siguiente:

$4x + 4y \geq 12$ $4x + 4y \leq 40$ $3y \geq 6$ $2y \leq 10$ $2x + 3y \leq 17$ $x \geq 0 \}$ x -

.

ii)

La función de objetivos es: $f(x,\ y) = 7x + 5y$.

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

x	0	3
y	3	0

①$\Rightarrow x + y \geq 3 \Rightarrow y \geq 3 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow No$.

x	10	5
y	0	5

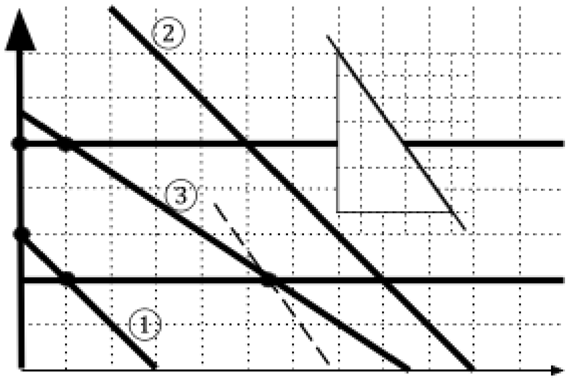
②$\Rightarrow x + y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si$.

x	1	7
y	5	1

③$\Rightarrow 2x + 3y \leq 17 \Rightarrow y \leq \frac{17-2x}{3} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si$.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 5 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 5)$.



$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 17 \\ y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x + 15 = 17;$

$2x = 2;\ \ x = 1 \Rightarrow B(1,\ 5)$.

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2 \\ 2x + 3y = 17 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x + 6 = 17;\ \ 2x = 11;\ \ x = 5,5 \Rightarrow C(5,5;2)$.

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2 \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow D(1,\ 2)$.

$E \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow E(0,\ 3)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 5) = 7 \cdot 0 + 5 \cdot 5 = 0 + 25 = 25$.

$B \Rightarrow f(1,\ 5) = 7 \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 7 + 25 = 32$.

$C \Rightarrow f(5,5;2) = 7 \cdot 5,5 + 5 \cdot 2 = 38,5 + 10 = 48,5$.

$D \Rightarrow f(1,\ 2) = 7 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 7 + 10 = 17$.

$E \Rightarrow f(0,\ 3) = 7 \cdot 0\ +\ 5 \cdot 3\ =\ 0\ +\ 15\ =\ 15.$

El máximo se produce en el punto $C(5,5;\ 2)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

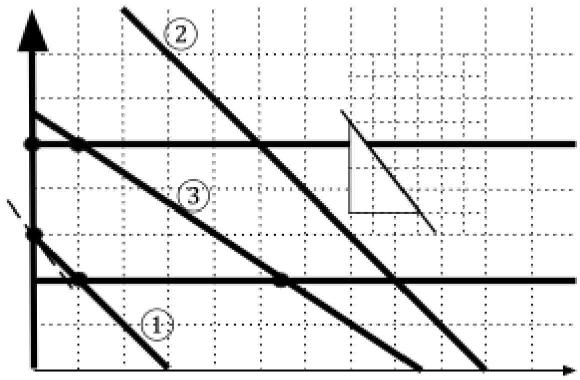
$f(x,\ y) = 7x\ +\ 5y\ =\ 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{5}x \Rightarrow m = -\frac{7}{5}.$

$\underline{\mathit{Las\ proteínas\ son\ máximas\ con}\ 5,5\ \mathit{raciones\ de}\ P1\ \mathit{y}\ 2\ \mathit{raciones\ de}\ P2}.$

$iii)$

La nueva función de objetivos es: $g(x,\ y) = 0,8x\ +\ 0,6y$.

Los valores de la nueva función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:



$A \Rightarrow f(0,\ 5) = 0,8 \cdot 0\ +\ 0,6 \cdot 5\ =$

$=\ 0\ +\ 3\ =\ 3.$

$B \Rightarrow f(1,\ 5) = 0,8 \cdot 1\ +\ 0,6 \cdot 5\ =$

$=\ 0,8\ +\ 3\ =\ 3,8.$

$C \Rightarrow f(5,5;\ 2) = 0,8 \cdot 5,5\ +\ 0,6 \cdot 2\ =\ 4,4\ +\ 1,2\ =\ 5,6.$

$D \Rightarrow f(1,\ 2) = 0,8 \cdot 1\ +\ 0,6 \cdot 2\ =\ 0,8\ +\ 1,2\ =\ 2.$

$E \Rightarrow f(0,\ 3) = 0,8 \cdot 0\ +\ 0,6 \cdot 3\ =\ 0\ +\ 1,8\ =\ 1,8.$

El mínimo se produce en el punto $E(0,\ 3)$.

También se hubiera obtenido el punto E por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 0,8x\ +\ 0,6y\ =\ 0 \Rightarrow y = -\frac{0,8}{0,6}x = -\frac{8}{6}x = -\frac{4}{3}x \Rightarrow m = -\frac{4}{3}.$

$\underline{\mathit{El\ mínimo\ coste}\ (1,8\ \mathit{euros})\ \mathit{se\ produce\ con\ solamente}\ 3\ \mathit{raciones\ de}\ P2}.$

****

2º) Calcule:

$i)\ \ I = \int_{-1}^{0} \frac{2x^2+5x+2}{x^2+1} \cdot dx. \qquad\qquad ii)\ \ I = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}} \cdot dx.$

$iii)$ Una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{3x}{\left(2-x^2\right)^2}$ que verifique $F(-\ 1) =\ 2.$

$i)$

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{2x^2+5x+2}{x^2+1} \cdot dx.$$

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida.

$$A = \int \frac{2x^2+5x+2}{x^2+1} \cdot dx = \int \left(\frac{2x^2+2}{x^2+1} + \frac{5x}{x^2+1} \right) \cdot dx = 2 \cdot \int dx + \int \frac{5x}{x^2+1} \cdot dx =$$

$= 2x + B.$ (*)

$B = \int \frac{5x}{x^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ x^2 + 1 = t \ \ 2xdx = dt \ \ 5xdx = \frac{5}{2}dt \right\} = \frac{5}{2} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{5}{2} \cdot Lt = \frac{5}{2} \cdot L\left(x^2\right.$

.

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de B: $A = 2x + \frac{5}{2} \cdot L\left(x^2 + 1\right).$

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{2x^2+5x+2}{x^2+1} \cdot dx = \left[2x + \frac{5}{2} \cdot L\left(x^2 + 1\right)\right]_{-1}^{0} =$$

$$= \left[0 + \frac{5}{2} \cdot L(0 + 1)\right] - \left\{2 \cdot (-\ 1) + \frac{5}{2} \cdot L\left[(-\ 1)^2 + 1\right]\right\} = 0 - \left(-\ 2 + \frac{5}{2} \cdot L2\right) =$$

$$= 2 - \frac{5}{2} \cdot L2 = \frac{4-5L2}{2} = \frac{4-L2^5}{2} = \frac{4-L32}{2}.$$

$$\underline{I = \int_{-1}^{0} \frac{2x^2+5x+2}{x^2+1} \cdot dx = \frac{4-L32}{2}.}$$

$ii)$

$I = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ e^{\sqrt{x}} = t \ \ \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot dx = dt \ \ \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2dt \right\} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} \int$

$= \sqrt{2} \cdot t + C = \sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{x}} + C.$

$$\underline{I = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}} \cdot dx = \sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{x}} + C.}$$

También puede resolverse este apartado de la forma siguiente:

$I = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \sqrt{x} = t \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx = dt \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2dt \right\} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} \int e^{t} dt =$

$= \sqrt{2} \cdot e^{t} + C = \sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{x}} + C.$

$iii)$

Una primitiva de la función $f(x) = \frac{3x}{\left(2-x^2\right)^2}$ que verifique $F(-1) = 2$.

$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \frac{3x}{\left(2-x^2\right)^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ 2 - x^2 = t \quad -2xdx = dt \quad 3xdx = -\frac{3}{2} dt \right\} \Rightarrow \int \frac{-\frac{3}{2}}{t^2}$

$= -\frac{3}{2} \cdot \int t^{-2} \cdot dt = -\frac{3}{2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{3}{2t} + C = \frac{3}{2 \cdot \left(2-x^2\right)} + C.$

$F(-1) = 2 \Rightarrow \frac{3}{2 \cdot \left[2-(-1)^2\right]} + C = 2; \quad \frac{3}{2 \cdot (2-1)} + C = 2; \quad \frac{3}{2} + C = 2; \quad 3 + 2C = 4;$

$2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$

$$\underline{F(x) = \frac{3}{2 \cdot \left(2-x^2\right)} + \frac{1}{2}.}$$

****

3º) Una importante compañía aérea está preocupada por la puntualidad de sus vuelos. A partir de una muestra de 400 vuelos, se observó que 320 salieron a tiempo y se calculó el siguiente intervalo de confianza para la proporción de vuelos que salen puntualmente $(0,7485; 0,8515)$.

i) Calcule el nivel de confianza del intervalo.

ii) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de vuelos no puntuales, con un nivel de confianza del 93 %.
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

----

a)

$$p = \frac{320}{400} = 0,8. \quad E = \frac{0,8515-0,7485}{2} = \frac{0,103}{2} = 0,0515.$$

Datos: $n = 400;\ p = 0,8;\ q = 0,2;\ E = 0,0515.$

Sabiendo que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = E \cdot \sqrt{\frac{n}{p \cdot q}} = 0,0515 \cdot \sqrt{\frac{400}{0,8 \cdot 0,2}} =$

$= 0,0515 \cdot 50 = 2,275.$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0,\ 1)$ a 2,275 le corresponde el valor de 0,9885, por lo cual:

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0,9885;\ \ \alpha = 2 - 1,9770 = 0,1230 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,8770.$$

$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ es\ del\ 87,70\ \%}.$

a)

Para un nivel de confianza del 93 %;

$\alpha = 1 - 0,93 = 0,07 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,035} = 1,81.$
$(1 - 0,035 = 0,9650 \rightarrow z = 1,81).$

Datos: $n = 400;\ p = 0,8;\ q = 0,2;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,81.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p,\ q\ y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0,8 - 1,81 \cdot \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{400}};\ 0,8 + 1,81 \cdot \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{400}}\right);$$

$$(0,8\,-\,1,81\cdot 0,02;\;0,8\,+\,1,81\cdot 0,02);\quad (0,8\,-\,0,0362;\;0,8\,+\,0,0362).$$

$$\underline{I.\ C._{93\,\%} = (0,7638;\;0,8362).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = (-\ 1\ 2\ )$, $B = (-\ 1\ 1\ 0\ 2\ 1\ 3\ )\ y\ C = (2\ 1\ 3\ 1\ )$, responda a las siguientes preguntas:

i) Calcule $A \cdot A^t - B \cdot B^t$. ii) Calcule $\left(C^{-1}\right)^2$.

iii) ¿Es invertible la matriz $A \cdot A^t$? Razone la respuesta.

----

i)

$$A \cdot A^t - B \cdot B^t = (-\ 1\ 2\ ) \cdot (-\ 1\ 2\ ) - (-\ 1\ 1\ 0\ 2\ 1\ 3\ ) \cdot (-\ 1\ 2\ 1\ 1\ 0\ 3\ ) =$$

$$= (1\ -2\ -2\ 4\ ) - (2\ -1\ -1\ 14\ ) = \underline{(-\ 1\ -1\ -1\ -10\ )}.$$

ii)

$$|C| = |2\ 1\ 3\ 1\ | = 2 - 3 = -1; \quad C^t = (2\ 3\ 1\ 1\ ); \quad Adj.\ de\ C^t = (1\ -1\ -3\ 2\ ).$$

$$C^{-1} = \frac{Adj.\ de\ C^t}{|C|} = \frac{(1\ -1\ -3\ 2\ )}{-1} = (-\ 1\ 1\ 3\ -2\ ).$$

$$\left(C^{-1}\right)^2 = C^{-1} \cdot C^{-1} = (-\ 1\ 1\ 3\ -2\ ) \cdot (-\ 1\ 1\ 3\ -2\ ) = \underline{(4\ -3\ -10\ 7\ )}.$$

iii)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$\left|A \cdot A^t\right| = |-\ 1\ -1\ -1\ -10\ | = 10 - 1 = 9 \neq 0.$$

$$\underline{La\ matriz\ A \cdot A^t\ es\ invertible}.$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{5-x}{1-x}$, calcule:

i) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x =- 1$.

ii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

iii) Asíntotas de la función.

iv) Dibuje la gráfica de la función $f(x)$.

----

i)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = \frac{-1\cdot(1-x)-(5-x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-1+x+5-x}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2}.$$

$$m = f'(-1) = \frac{4}{(1+1)^2} = \frac{4}{4} = 1.$$

$$f(-1) = \frac{5-(-1)}{1-(-1)} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow P(-1, 3).$$

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$.

$$y - 3 = 1\cdot(x + 1) = x + 1.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente:

$$\underline{Tangente\colon t \equiv x - y + 4 = 0.}$$

ii)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto para los valores reales de x que anulan el denominador: $D(f) \Rightarrow R - \{1\}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2} > 0,\ \forall x \in D(f).$$

$$\underline{La\ función\ es\ monótona\ creciente\ en\ su\ dominio.}$$

Como consecuencia de lo anterior:

$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ máximos\ ni\ mínimos\ relativos}.$

$iii)$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$k = f(x) = \frac{5-x}{1-x} = 1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 1}$.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$

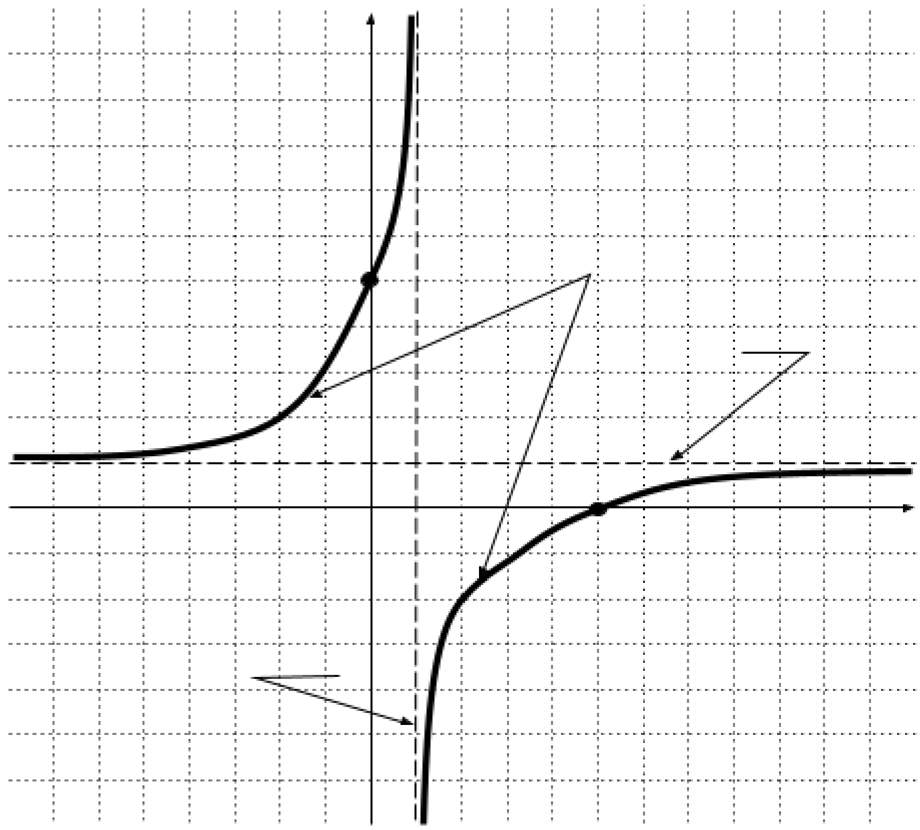
$\underline{La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función}.$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

$iv)$

Los puntos de corte con los ejes son $A(5,\ 1)\ y\ B(5,\ 0)$.

De los cortes con los ejes y de los apartados anteriores se deduce la representación gráfica de la función que es, aproximadamente, la que aparece en la figura adjunta.



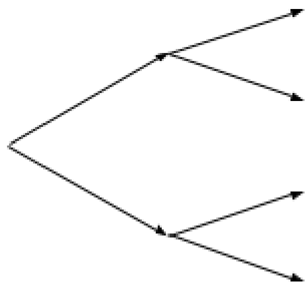
****

3º) En un aula de bachillerato, el 75 % de las chicas y el 60 % de los chicos son lectores habituales. El número de chicas en dicho aula duplica el número de chicos. Se selecciona un estudiante al azar. Calcule:

i) La probabilidad de que sea lector habitual.

ii) La probabilidad de que sea chico y so sea lector habitual.

ii) La probabilidad de que no sea chico, sabiendo que no es lector habitual.



i)

$$P = P(L) = P(M \cap L) + P(H \cap L) = P(M) \cdot P(L/M) + P(H) \cdot P(L/H) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 0,75 + \frac{1}{3} \cdot 0,60 = 0,50 + 0,20 = \underline{0,70}.$$

ii)

$$P = P(H \cap \overline{L}) = P(H) \cdot P(\overline{L}/H) = \frac{1}{3} \cdot 0,40 = \underline{0,1333}.$$

iii)

$$P = P(\overline{L}/M) = \frac{P(M \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \frac{P(M) \cdot P(\overline{L}/M)}{1 - P(L)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,25}{1 - 0,70} = \frac{0,1667}{0,30} = \underline{0,5556}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) Un estudiante de bachillerato ha decidido mejorar la dieta de su animal de compañía y analiza la composición de dos marcas de pienso (P1 y P2). La siguiente tabla recoge la información asociada a una ración de cada tipo de pienso:

	Hidratos carbono	Proteínas	Grasas	Hierro	Vitamina C	Precio venta (euros)
S1	4	7	2	0	0	0,8
S2	4	5	3	2	3	0,6

Su veterinario le ha recomendado una dosis diaria de hidratos de carbono entre 12 y 40 unidades, una dosis mínima diaria de vitamina C de 6 unidades, una dosis máxima de hierro diaria de 10 unidades y no sobrepasar 17 unidades de grasas al día. Determine cuántas raciones de cada tipo de pienso deberá usar para alimentar diariamente a su mascota si el estudiante desea maximizar la ingesta diaria de proteínas.

i) Plantee el problema. ii) Resuélvalo gráficamente.

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si el estudiante cambiara de opinión y deseara minimizar el gasto diario en pienso.

----

i)

Sean x e y las raciones de piensos de los tipos P1 y P2 que el estudiante suministra diariamente a su mascota, respectivamente.

El sistema de inecuaciones que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+4y\geq 12 \\ 4x+4y\leq 40 \\ 3y\geq 6 \\ 2y\leq 10 \\ 2x+3y\leq 17 \\ x\geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y\geq 3 \\ x+y\leq 10 \\ 2\leq y\leq 5 \\ 2x+3y\leq 17 \\ x\geq 0 \end{array}\right\}.$$

$ii)$

La función de objetivos es: $f(x, y) = 7x + 5y$.

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

① $\Rightarrow x + y \geq 3 \Rightarrow y \geq 3 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

x	0	3
y	3	0

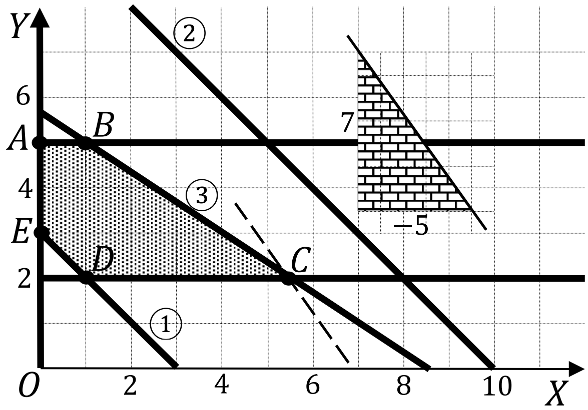
② $\Rightarrow x + y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	10	5
y	0	5

③ $\Rightarrow 2x + 3y \leq 17 \Rightarrow y \leq \frac{17-2x}{3} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	1	7
y	5	1

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 5 \\ x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(0, 5).$

$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + 3y = 17 \\ y = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x + 15 = 17;$

$2x = 2;\ \ x = 1 \Rightarrow B(1, 5).$

$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 2 \\ 2x + 3y = 17 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x + 6 = 17;\ \ 2x = 11;\ \ x = 5{,}5 \Rightarrow C(5{,}5; 2).$

$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 2 \\ x + y = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D(1, 2).$ $\qquad E \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 0 \\ x + y = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow E(0, 3)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 5) = 7 \cdot 0 + 5 \cdot 5 = 0 + 25 = 25.$

$B \Rightarrow f(1, 5) = 7 \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 7 + 25 = 32.$

$C \Rightarrow f(5{,}5; 2) = 7 \cdot 5{,}5 + 5 \cdot 2 = 38{,}5 + 10 = 48{,}5.$

$D \Rightarrow f(1, 2) = 7 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 7 + 10 = 17.$

$E \Rightarrow f(0, 3) = 7 \cdot 0 + 5 \cdot 3 = 0 + 15 = 15.$

El máximo se produce en el punto $C(5{,}5; 2)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

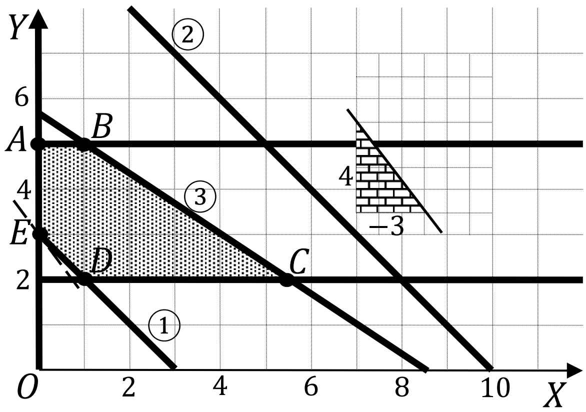
$$f(x, y) = 7x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{5}x \Rightarrow m = -\frac{7}{5}.$$

$$\underline{Las\ proteínas\ son\ máximas\ con\ 5{,}5\ raciones\ de\ P1\ y\ 2\ raciones\ de\ P2.}$$

$iii)$

La nueva función de objetivos es: $g(x, y) = 0{,}8x + 0{,}6y$.

Los valores de la nueva función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:



$A \Rightarrow f(0, 5) = 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 5 =$

$= 0 + 3 = 3.$

$B \Rightarrow f(1, 5) = 0{,}8 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 5 =$

$= 0{,}8 + 3 = 3{,}8.$

$C \Rightarrow f(5{,}5; 2) = 0{,}8 \cdot 5{,}5 + 0{,}6 \cdot 2 = 4{,}4 + 1{,}2 = 5{,}6.$

$D \Rightarrow f(1, 2) = 0{,}8 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 2 = 0{,}8 + 1{,}2 = 2.$

$E \Rightarrow f(0, 3) = 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 3 = 0 + 1{,}8 = 1{,}8.$

El mínimo se produce en el punto $E(0, 3)$.

También se hubiera obtenido el punto E por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 0{,}8x + 0{,}6y = 0 \Rightarrow y = -\frac{0{,}8}{0{,}6}x = -\frac{8}{6}x = -\frac{4}{3}x \Rightarrow m = -\frac{4}{3}.$$

$$\underline{El\ mínimo\ coste\ (1{,}8\ euros)\ se\ produce\ con\ solamente\ 3\ raciones\ de\ P2.}$$

****

2º) Calcule:

$i)\ \ I=\int_{-1}^{0}\frac{2x^2+5x+2}{x^2+1}\cdot dx.$ $\qquad ii)\ \ I=\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}\cdot dx.$

$iii)$ Una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{3x}{(2-x^2)^2}$ que verifique $F(-1)=2$.

$i)$

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{2x^2+5x+2}{x^2+1}\cdot dx.$$

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida.

$$A=\int\frac{2x^2+5x+2}{x^2+1}\cdot dx=\int\left(\frac{2x^2+2}{x^2+1}+\frac{5x}{x^2+1}\right)\cdot dx=2\cdot\int dx+\int\frac{5x}{x^2+1}\cdot dx=$$

$$=2x+B. \quad (*)$$

$$B=\int\frac{5x}{x^2+1}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x^2+1=t\\ 2xdx=dt\\ 5xdx=\frac{5}{2}dt\end{array}\right\}=\frac{5}{2}\cdot\int\frac{1}{t}\cdot dt=\frac{5}{2}\cdot Lt=\frac{5}{2}\cdot L(x^2+1).$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de B: $A=2x+\frac{5}{2}\cdot L(x^2+1)$.

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{2x^2+5x+2}{x^2+1}\cdot dx=\left[2x+\frac{5}{2}\cdot L(x^2+1)\right]_{-1}^{0}=$$

$$=\left[0+\frac{5}{2}\cdot L(0+1)\right]-\left\{2\cdot(-1)+\frac{5}{2}\cdot L[(-1)^2+1]\right\}=0-\left(-2+\frac{5}{2}\cdot L2\right)=$$

$$=2-\frac{5}{2}\cdot L2=\frac{4-5L2}{2}=\frac{4-L2^5}{2}=\frac{4-L32}{2}.$$

$$\underline{I=\int_{-1}^{0}\frac{2x^2+5x+2}{x^2+1}\cdot dx=\frac{4-L32}{2}}.$$

$ii)$

$$I=\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}e^{\sqrt{x}}=t\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot dx=dt\\ \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\cdot dx=2dt\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{2}}\int dt=$$

$$=\sqrt{2}\cdot t+C=\sqrt{2}\cdot e^{\sqrt{x}}+C.$$

$$\underline{I=\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}\cdot dx=\sqrt{2}\cdot e^{\sqrt{x}}+C.}$$

También puede resolverse este apartado de la forma siguiente:

$$I=\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \sqrt{x}=t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot dx=dt \\ \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx=2dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}}\int e^t dt=$$

$$=\sqrt{2}\cdot e^t+C=\sqrt{2}\cdot e^{\sqrt{x}}+C.$$

$iii)$

Una primitiva de la función $f(x)=\frac{3x}{(2-x^2)^2}$ que verifique $F(-1)=2$.

$$F(x)=\int f(x)\cdot dx=\int \frac{3x}{(2-x^2)^2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 2-x^2=t \\ -2xdx=dt \\ 3xdx=-\frac{3}{2}dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int \frac{-\frac{3}{2}}{t^2}\cdot dt=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\int t^{-2}\cdot dt=-\frac{3}{2}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}+C=\frac{3}{2t}+C=\frac{3}{2\cdot(2-x^2)}+C.$$

$$F(-1)=2 \Rightarrow \frac{3}{2\cdot[2-(-1)^2]}+C=2;\ \ \frac{3}{2\cdot(2-1)}+C=2;\ \ \frac{3}{2}+C=2;\ \ 3+2C=4;$$

$$2C=1 \Rightarrow C=\frac{1}{2}.$$

$$\underline{F(x)=\frac{3}{2\cdot(2-x^2)}+\frac{1}{2}.}$$

****

3º) Una importante compañía aérea está preocupada por la puntualidad de sus vuelos. A partir de una muestra de 400 vuelos, se observó que 320 salieron a tiempo y se calculó el siguiente intervalo de confianza para la proporción de vuelos que salen puntualmente $(0{,}7485; 0{,}8515)$.

i) Calcule el nivel de confianza del intervalo.

ii) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de vuelos no puntuales, con un nivel de confianza del 93 %.
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

----

a)

$$p = \frac{320}{400} = 0{,}8. \qquad E = \frac{0{,}8515-0{,}7485}{2} = \frac{0{,}103}{2} = 0{,}0515.$$

Datos: $n = 400$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $E = 0{,}0515$.

Sabiendo que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = E \cdot \sqrt{\frac{n}{p \cdot q}} = 0{,}0515 \cdot \sqrt{\frac{400}{0{,}8 \cdot 0{,}2}} =$

$= 0{,}0515 \cdot 50 = 2{,}575.$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0,1)$ a 2,575 le corresponde el valor de 0,9950, por lo cual:

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}9950;\ \ \alpha = 2 - 1{,}9900 = 0{,}0100 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}9000.$$

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ es\ del\ 90\ \%.}$$

a)

Para un nivel de confianza del 93 %;

$\alpha = 1 - 0{,}93 = 0{,}07 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}035} = 1{,}81.$
$(1 - 0{,}035 = 0{,}9650 \ \rightarrow z = 1{,}81).$

Datos: $n = 400$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}81$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p, q\ y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}8 - 1{,}81 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{400}};\ 0{,}8 + 1{,}81 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{400}}\right);$$

$$(0{,}8 - 1{,}81 \cdot 0{,}02;\ 0{,}8 + 1{,}81 \cdot 0{,}02);\ \ (0{,}8 - 0{,}0362;\ 0{,}8 + 0{,}0362).$$

$$\underline{I.C._{93\,\%} = (0{,}7638;\ 0{,}8362)}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes preguntas:

$i)$ Calcule $A \cdot A^t - B \cdot B^t$. $ii)$ Calcule $(C^{-1})^2$.

$iii)$ ¿Es invertible la matriz $A \cdot A^t$? Razone la respuesta.

$i)$

$$A \cdot A^t - B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}}.$$

$ii)$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1; \quad C^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad Adj.de\ C^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} = \frac{Adj.de\ C^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(C^{-1})^2 = C^{-1} \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}}.$$

$iii)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A \cdot A^t| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9 \neq 0.$$

$$\underline{La\ matriz\ A \cdot A^t\ es\ invertible}.$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{5-x}{1-x}$, calcule:

i) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$.

ii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

iii) Asíntotas de la función.

iv) Dibuje la gráfica de la función $f(x)$.

----

i)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = \frac{-1\cdot(1-x)-(5-x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-1+x+5-x}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2}.$$

$$m = f'(-1) = \frac{4}{(1+1)^2} = \frac{4}{4} = 1.$$

$$f(-1) = \frac{5-(-1)}{1-(-1)} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow P(-1, 3).$$

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y - 3 = 1 \cdot (x + 1) = x + 1.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente:

$$\underline{Tangente: t \equiv x - y + 4 = 0}.$$

ii)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto para los valores reales de x que anulan el denominador: $D(f) \Rightarrow R - \{1\}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{4}{(1-x)^2} > 0, \forall x \in D(f).$$

$$\underline{La\ función\ es\ monótona\ creciente\ en\ su\ dominio}.$$

Como consecuencia de lo anterior:

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ máximos\ ni\ mínimos\ relativos}.$$

$iii)$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{5-x}{1-x} = 1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 1}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

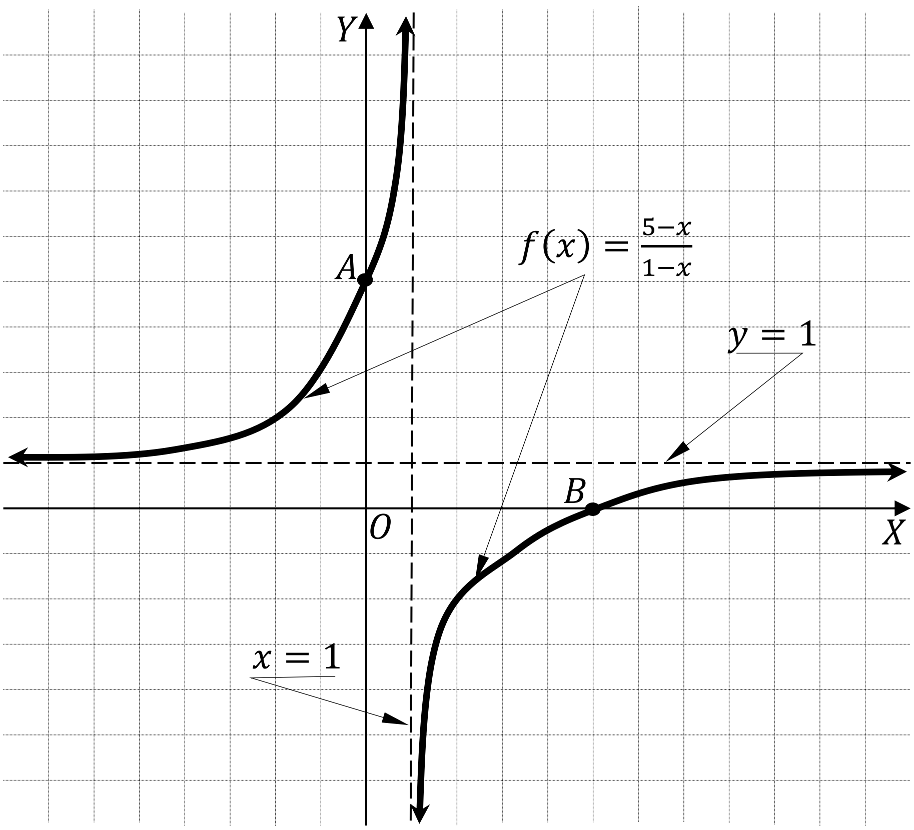
$$\underline{La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

$iv)$

Los puntos de corte con los ejes son $A(5, 1)\ y\ B(5, 0)$.

De los cortes con los ejes y de los apartados anteriores se deduce la representación gráfica de la función que es, aproximadamente, la que aparece en la figura adjunta.



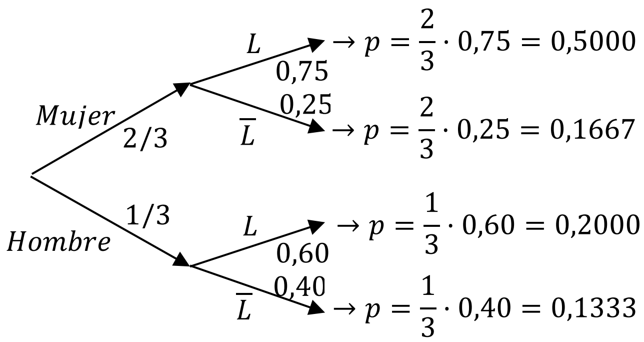
****

3º) En un aula de bachillerato, el 75 % de las chicas y el 60 % de los chicos son lectores habituales. El número de chicas en dicho aula duplica el número de chicos. Se selecciona un estudiante al azar. Calcule:

i) La probabilidad de que sea lector habitual.

ii) La probabilidad de que sea chico y so sea lector habitual.

ii) La probabilidad de que no sea chico, sabiendo que no es lector habitual.



i)

$$P = P(L) = P(M \cap L) + P(H \cap L) = P(M) \cdot P(L/M) + P(H) \cdot P(L/H) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 0,75 + \frac{1}{3} \cdot 0,60 = 0,50 + 0,20 = \underline{0,70}.$$

ii)

$$P = P\left(H \cap \overline{L}\right) = P(H) \cdot P\left(\overline{L}/H\right) = \frac{1}{3} \cdot 0,40 = \underline{0,1333}.$$

iii)

$$P = P\left(\overline{L}/M\right) = \frac{P\left(M \cap \overline{L}\right)}{P\left(\overline{L}\right)} = \frac{P(M) \cdot P\left(\overline{L}/M\right)}{1 - P(L)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,25}{1 - 0,70} = \frac{0,1667}{0,30} = \underline{0,5556}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no sean programables.

OPCIÓN A

1º) Un vehículo utiliza como combustible una mezcla de gasolina y queroseno. Se deben cumplir las restricciones: i) La capacidad del depósito es de 10 litros; ii) la cantidad G (en litros) de gasolina debe ser, como mínimo 2/3 de la de queroseno K, donde $K \geq 0$; iii) un litro de gasolina cuesta 1 euro y uno de queroseno 0,5 euros, siendo 8 euros el límite de gasto total. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Dibuja la región del plano KG en la que las cantidades de litro de gasolina G y queroseno K son compatibles con las restricciones i), ii) y iii).

b) La función $F(G,\ K) = 8G + 5K$ representa la distancia, en kilómetros, recorrida por el vehículo en función de los consumos de gasolina y queroseno. Calcular los valores óptimos de $G\ y\ K$ compatibles con las restricciones y que le permitan recorrer mayor distancia.

----

a)

Sean $x\ e\ y$ el número de litros de gasolina y queroseno que se utilizan, respectivamente.

Las restricciones son:

$x + y \leq 10 \quad x \geq \frac{2}{3}y \quad y \geq 0\ x + 0,5y \leq 8 \} \quad x + y \leq 10 \quad 3x - 2y \geq 0 \quad y$

.

x	10	0
y	0	10

$① \Rightarrow x + y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10 - x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	4
y	0	6

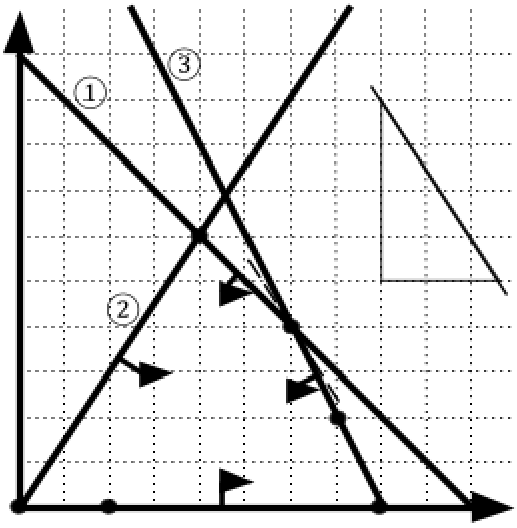
$② \Rightarrow 3x - 2y \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{3x}{2} \Rightarrow P(2,\ 0) \rightarrow Si.$

x	8	4
y	0	8

③$\Rightarrow 2x + y \leq 16 \Rightarrow y \leq 16 - 2x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ 3x - 2y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 20 \\ 3x - 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x = 20;\ \ x = 4;\ \ y = 6 \Rightarrow A(4,\ 6).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 10 \\ 2x + y = 16 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -x - y = -10 \\ 2x + y = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 6;\ \ y = 4 \Rightarrow B(6,\ 4).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 2x + y = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 8 \Rightarrow C(8,\ 0).$

$b)$

La función de objetivos es la siguiente: $F(G,\ K) = 8G + 5K.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(4,\ 6) = 8 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 32 + 30 = 62.$

$B \Rightarrow f(6,\ 4) = 8 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 48 + 20 = 68.$

$C \Rightarrow f(8,\ 0) = 8 \cdot 8 + 5 \cdot 0 = 64 + 0 = 64.$

El máximo se produce en el punto $B(6,\ 4)$.

También se hubiera obtenido el punto $B(6,\ 4)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$F(G,\ K) = 8g + 5k = 0 \Rightarrow y = -\frac{8}{5}x = -\frac{4}{2{,}5}x \Rightarrow m = -\frac{4}{2{,}5}.$

$$\underline{La\ distancia\ recorrida\ es\ máxima\ con\ 6\ litros\ de\ gasolina\ y\ 4\ de\ keroseno}.$$

$$\underline{La\ distancia\ máxima\ recorrida\ es\ de\ 68\ kilómetros}.$$

****

2º) Dada la función $h(x) = a + Lx - 6x + 2x^2$ definida en el intervalo $0,01 \leq x \leq 3$, donde la función Lx represente el logaritmo neperiano de x. Responder:

a) ¿Cuánto debe valer el parámetro a para que se cumpla $h(1) = -1$?

b) Dada la función $f(x) = 4 + Lx - 6x + 2x^2$, definida en el mismo intervalo anterior, ¿cuáles son las coordenadas de los máximos y mínimos locales de $f(x)$ en dicho intervalo? (Ayuda: resolver $f'(x) = 0$).

----

a)

$$h(1) = a + L1 - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 = a + 0 - 6 + 2 = a - 4.$$

$$h(1) = -1 \Rightarrow a - 4 = -1 \Rightarrow \underline{a = 3}.$$

b)

Para que una función tenga un extremo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 6 + 4x.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - 6 + 4x = 0;\ \ 1 - 6x + 4x^2 = 0;\ \ 4x^2 - 6x + 1 = 0;$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{8} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4},\ x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 4.$$

$$f''\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{4}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{4}\right)^2} + 4 = -\frac{16}{9 - 6\sqrt{5} + 5} + 4 = -\frac{16}{14 - 6\sqrt{5}} + 4 = \frac{56 - 24\sqrt{5} - 16}{14 - 6\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{40 - 24\sqrt{5}}{14 - 6\sqrt{5}} \cong \frac{-13,67}{0,58} < 0 \Rightarrow Máximo\ local\ para\ x = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \cong 0,19.$$

$$f(0,19) \cong 4 + L0,19 - 6 \cdot 0,19 + 2 \cdot 0,19^2 = 4 - 1,66 - 1,15 + 0,07 =$$

$= 1,26.$

$$\underline{Máximo: P(0,19; 1,26)}.$$

$$f''\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)^2} + 4 = -\frac{16}{9+6\sqrt{5}+5} + 4 = -\frac{16}{14+6\sqrt{5}} + 4 = \frac{56+24\sqrt{5}-16}{14+6\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{40+24\sqrt{5}}{14+6\sqrt{5}} > 0 \Rightarrow Mínimo\ local\ para\ x = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \cong 1,31.$$

$$f(1,31) \cong 4 + L1,31 - 6 \cdot 1,31 + 2 \cdot 1,31^2 = 4 + 0,27 - 7,86 + 3,43 =$$

$$= 7,70 - 7,86 = -0,16.$$

$$\underline{Mínimo: Q(1,31; -0,16)}.$$

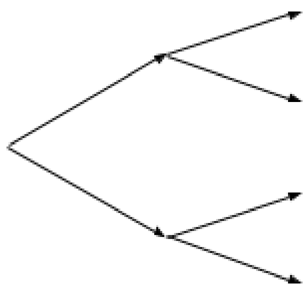
****

3º) Un equipo de fútbol pasa una encuesta a sus socios para estimar la asistencia a los partidos. Un socio contesta que si el partido se juega en fin de semana (sábado o domingo) acude un 90 % de las veces y, si es en alguno de los otros días, su asistencia baja al 70 %. Suponiendo que la elección del día de la semana es aleatoria, calcula:

a) Si este fin de semana hay partido, ¿qué probabilidad hay de que no asista?

b) Si la próxima semana hay partido, ¿cuál es la probabilidad de que asista?

c) Si la semana pasada asistió a un partido, ¿cuál es la probabilidad de que se celebrara en fin de semana?



a)

$$P = P(Fin \cap \overline{Va}) = P(Fin) \cdot P(\overline{Va}/Fin) = \frac{2}{7} \cdot 0,1 = \underline{0,0286}.$$

b)

$$P(Va) = P(Fin \cap Va) + P(\overline{Fin} \cap Va) =$$

$$= P(Fin) \cdot P(Va/Fin) + P(\overline{Fin}) \cdot P(Va/\overline{Fin}) = \frac{2}{7} \cdot 0,9 + \frac{5}{7} \cdot 0,7 =$$

$$= 0,2571 + 0,5000 = \underline{0,7571}.$$

c)

$$P = P(Fin/Va) = \frac{P(Fin \cap Va)}{P(Va)} = \frac{P(Fin) \cdot P(Va/Fin)}{P(Fin) \cdot P(Va/Fin) + P(\overline{Fin}) \cdot P(Va/\overline{Fin})} = \frac{\frac{2}{7} \cdot 0,9}{\frac{2}{7} \cdot 0,9 + \frac{5}{7} \cdot 0,7} =$$

$$= \frac{0,2571}{0,2571 + 0,5000} = \frac{0,2571}{0,7571} = \underline{0,3396}.$$

****

4º) En una piscifactoría se quiere estimar la proporción de hembras entra la población de peces, para lo cual, se toma una muestra aleatoria de 500 peces. Después del recuento, resulta que 175 son hembras. Se pide calcular:

a) El intervalo de confianza para la proporción de hembras en esa población de peces, correspondiente a un nivel de confianza del 94 %.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debería tener la muestra para que el error máximo de la estimación de la proporción de hembras sea $\leq 0,02$, con un nivel de confianza del 94 %?

----

a)

Para un nivel de confianza del 94 % es:

$1 - \alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 1 - 0,94 = 0,06 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,03} = 1,88.$

$1 - 0,03 = 0,9700 \rightarrow z = 1,88).$

$Datos$: $p = \frac{175}{500} = 0,35;\ \ q = 0,65;\ \ n = 500;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,88.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p,\ q\ y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$\left(0,35 - 1,88 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{500}};\ 0,35 + 1,88 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{500}}\right);$

$(0,35 - 1,88 \cdot 0,0213;\ 0,35 + 1,88 \cdot 0,0213);\ \ (0,35 - 0,0401;\ 0,35 + 0,0401)$.

$$\underline{I.\ C._{94\ \%} = (0,3099;\ 0,3901).}$$

b)

Datos: $\sigma = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{500}} = 0,0213;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,88;\ \ E = 0,02.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E}\right)^2 \cdot p \cdot q = \left(\frac{1,88}{0,02}\right)^2 \cdot 0,35 \cdot 0,65 =$

$= 8.836 \cdot 0,2275 = 2.010,19.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 2.011\ peces.}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Calcular los parámetros $a,\ b,\ c,\ d$ para que se cumpla la igualdad $F\cdot G\ =\ H\cdot K$, con las siguientes matrices:

$F\ = (1\ +\ a-\ b\ \ -\ 1\ 2\ +\ b\ 1\ ),\ G = (-\ 2\ 1\ 4\ 3\ -\ d\ ),\ H\ = (2a\ +\ 2\ \ -\ 2\ c\ \ -\ 2\ )\ y\ K$
.

b) Determinar el exponente n de la matriz $A\ = (0\ \ -\ 2\ 1\ 0\ )$ para que se cumpla que $A^{n} = (-\ 2048\ 0\ 0\ \ -\ 2048\ )$.

----

a)

$F\cdot G\ = (1\ +\ a-\ b\ \ -\ 1\ 2\ +\ b\ 1\ )\cdot(-\ 2\ 1\ 4\ 3\ -\ d\ ) =$

$= (-\ 2\ -\ 2a\ +\ 2b\ -\ 4\ 1\ +\ a\ -\ b\ -\ 3\ +\ d\ \ -\ 4\ -\ 2b\ +\ 4\ 2\ +\ b\ +\ 3\ -\ d\ ) = (-$
.

$H\cdot K\ = (2a\ +\ 2\ \ -\ 2\ c\ \ -\ 2\ )\cdot(-\ 1\ 2\ b\ 3\ ) = (-\ 2a\ -\ 2\ -\ 2b\ 4a\ +\ 4\ -\ 6\ \ -\ c\ -\ 2b$
.

$F\cdot G\ =\ H\cdot K\Rightarrow$

$\Rightarrow (-\ 2a\ +\ 2b\ -\ 6\ a\ -\ b\ +\ d\ -\ 2\ \ -\ 2b\ b\ -\ d\ +\ 5\ ) = (-\ 2a\ -\ 2\ -\ 2b\ 4a\ -\ 2\ \ -$

$\Rightarrow -\ 2a\ +\ 2b\ -\ 6\ =-\ 2a\ -\ 2\ -\ 2b \qquad -\ 2b\ =-\ c\ -\ 2b \qquad a\ -\ b$

$\Rightarrow$
$3a\ +\ 1\ -\ d\ =\ 0\ 1\ -\ 0\ -\ d\ =-\ 11\ \}\Rightarrow d\ =\ 12;\ \ 3a\ +\ 1\ -\ 12\ =\ 0;\ \ 3a\ =\ 11\Rightarrow a\ =$
.

$\underline{Solución\text{: } a\ =\ \frac{11}{3},\ b\ =\ 1, c\ =\ 0,\ d\ =\ 12.}$

b)

$A^{n} = (-\ 2048\ 0\ 0\ \ -\ 2048\ ) = \left(-\ 2^{11}\ 0\ 0\ \ -\ 2^{11}\right) = \left[(-\ 2)^{11}\ 0\ 0\ (-\ 2)^{11}\right] =$

$= (-\ 2)^{11}\cdot I\ =\ A^{n}.$ (1)

$A^{2}\ =\ A\cdot A = (0\ \ -\ 2\ 1\ 0\ )\cdot(0\ \ -\ 2\ 1\ 0\ ) = (-\ 2\ 0\ 0\ \ -\ 2\ ) =-\ 2I.$

$\left(A^{2}\right)^{\frac{n}{2}}\ = (-\ 2I)^{\frac{n}{2}};\ \ A^{n} = (-\ 2)^{\frac{n}{2}}\cdot(I)^{\frac{n}{2}}\ = (-\ 2)^{\frac{n}{2}}\cdot I\ =\ A^{n}.$ (2)

De las igualdades (1) y (2):

$(-\ 2)^{11} \cdot I = (-\ 2)^{\frac{n}{2}} \cdot I \Rightarrow \frac{n}{2} = 11 \Rightarrow \underline{n = 22}.$

****

2º) La función $f(x) = 100 - \frac{98}{x} - 2x$ mide los beneficios de una compañía de telecomunicaciones con respecto al número $x \geq 1$ de antenas instaladas:

a) Calcular el número de antenas x que maximiza los beneficios.

b) ¿En qué intervalo debe encontrarse x para que el beneficio sea positivo?

----

a)

Para que una función tenga un máximo relativo son condiciones necesarias que se anule su primera derivada y que sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(x) = \frac{98}{x^2} - 2.$ $\qquad f''(x) = 98 \cdot \frac{-2x}{x^4} = - \frac{196}{x^3}.$

$f'(0) = 0 \Rightarrow \frac{98}{x^2} - 2 = 0;\ 2t^2 = 98;\ x^2 = 49 \Rightarrow x_1 = -7,\ x_2 = 7.$

Como tiene que ser $x \geq 1$, la solución es $x = 7$.

$f''(7) = - \frac{196}{7^3} < 0 \Rightarrow$ Justificación de que se trata de un máximo relativo.

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ alcanza\ instalando\ 7\ antenas}.$

b)

$f(x) = 0 \Rightarrow 100 - \frac{98}{x} - 2x = 0;\ 100x - 98 - 2x^2 = 0;\ x^2 - 50x + 49 = 0;$

$x = \frac{50 \pm \sqrt{2.500 - 196}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{2.304}}{2} = \frac{50 \pm 48}{2} = 25 \pm 24 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 49.$

Por ser la función $f(x) = 100 - \frac{98}{x} - 2x$ continua en su dominio y presentar un máximo local para $x = 7$:

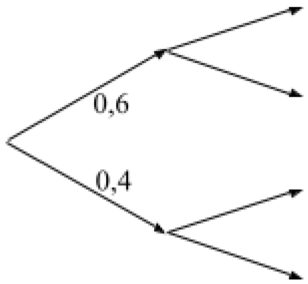
$\underline{El\ beneficio\ es\ positivo\ para\ 1 < x < 49}.$

****

3º) De un grupo de personas sabemos que el 60 % están casadas. Entre las personas casadas, el 80 % tiene trabajo y, por el otro lado, el 10 % de las personas solteras está en paro.

a) Si una persona elegida al azar tiene trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que esté casada?

b) Entre las personas que están en paro, ¿cuál es el porcentaje de las personas que están casadas?



a)

$$P = P(C/T) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = \frac{P(C) \cdot P(T/C)}{P(C) \cdot P(T/C) + P(S) \cdot P(T/S)} = \frac{0,6 \cdot 0,8}{0,6 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,9} = \frac{0,48}{0,48 + 0,36} =$$

$$= \frac{0,48}{0,84} = \underline{0,5714}.$$

b)

$$P = P(C/\overline{T}) = \frac{P(C \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P(C) \cdot P(\overline{T}/C)}{1 - P(T)} = \frac{0,6 \cdot 0,2}{1 - 0,84} = \frac{0,12}{0,16} = \underline{0,75}.$$

****

4º) Según los datos de una encuesta, se conoce que, en una determinada zona rural, el tiempo en minutos que dedican a ver televisión los fines de semana, es una variable aleatoria que sigue una distribución $N(\mu,\ 75)$. Elegida una muestra de televidentes, se ha obtenido el intervalo de confianza $(188,18;\ 208,82)$ para la media μ de esa distribución, con un nivel de confianza del 99 %. Calcular:

$a)$ La media muestral y el tamaño mínimo de la muestra.

$b)$ El error máximo cometido en la estimación de la media μ, si se hubiese utilizado una muestra de tamaño $n = 500$ y el nivel de confianza es del 96 % .

$a)$

$$\overline{x} = \frac{208{,}82+188{,}18}{2} = \frac{397}{2} = \underline{198,5}.$$

Para un nivel de confianza del 98 % es:

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,015} = 2,575.$$

$$1 - 0,015 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$$

$$E = \frac{208{,}82-188{,}18}{2} = \frac{28{,}64}{2} = 14,32.$$

Datos: $\sigma = 75;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575;\ \ E = 14,32.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2,575 \cdot \frac{75}{14{,}32}\right)^2 =$

$$= (2,575 \cdot 5,2374)^2 = 13,49^2 = 181,88.$$

$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de } 182 \textit{ televidentes}.}$

$b)$

Para un nivel de confianza del 96 % es:

$$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 1 - 0,96 = 0,04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,02} = 2,055.$$

$$1 - 0,02 = 0,9800 \rightarrow z = 2,055).$$

Datos: $n = 500;\ \ \sigma = 75;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,055.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,055 \cdot \frac{75}{\sqrt{500}} = 2,055 \cdot 3,3541 = 6,893.$$

$\underline{El\ error\ máximo\ cometido\ es\ de\ 6,89\ segundos}.$

****

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no sean programables.

OPCIÓN A

1º) Considérense las siguientes desigualdades en el plano XY cuando $x \geq 0$ e $y \geq 0$: $x + 2y \leq 7;\ x + y \geq 3;\ 2y - x \geq -4$.

a) Dibujar el recinto restringido por las desigualdades anteriores en el plano XY.

b) Encuentra el máximo de la función $f(x, y) = 2x + 3y$ en el recinto del apartado anterior.

c) Encuentra el máximo de la función $f(x, y)$ cuando x e y sean números enteros en el espacio de soluciones del apartado a).

----

a)

x	7	3
y	0	2

①$\Rightarrow x + 2y \leq 7 \Rightarrow y \leq \frac{7-x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

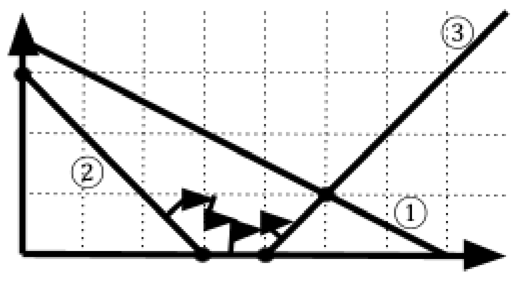
x	0	3
y	3	0

②$\Rightarrow x + y \geq 3 \Rightarrow y \geq 3 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

x	4	8
y	0	4

③$\Rightarrow 2y - x \geq -4 \Rightarrow y \geq \frac{x-4}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 3).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2y = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0; 3,5).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y = 7 \\ 2y - x = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4y = 4;\ \ y = 1;\ \ x + 2 = 7;\ \ x = 5 \Rightarrow C(5,\ 1)$
.

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 2y - x = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow D(4,\ 0).$
$E \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow E(3,\ 0).$

$b)$
La función de objetivos es $f(x,\ y) = 2x + 3y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 3) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 0 + 9 = 9.$

$B \Rightarrow f(0;\ 3,5) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3,5 = 0 + 10,5 = 10,5.$

$C \Rightarrow f(5,\ 1) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 10 + 3 = 13.$

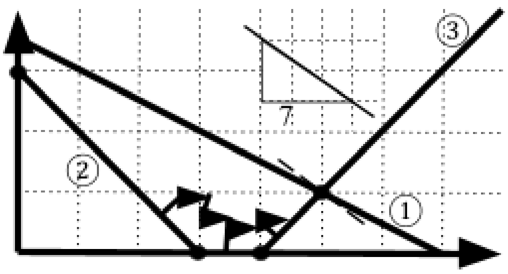
$D \Rightarrow f(4,\ 0) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 8 + 0 = 8.$

$E \Rightarrow f(3,\ 0) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 6 + 0 = 6.$

$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ C(5,\ 1)}.$

$c)$
Para determinar el punto de la zona factible cuyas coordenadas sean números enteros se recurre a la pendiente de la función de objetivos.

$f(x,\ y) = 2x + 3y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{2}{3}.$



Como se aprecia en la figura:

$\underline{El\ punto\ de\ coordenadas\ enteras\ que\ hace\ máxima\ la\ función\ es\ C(5,\ 1)}.$

****

2º) Un inversor conoce el valor que tendrán las acciones de una empresa a lo largo del año. La función $f(t) = \frac{t^3}{3} - 5t^2 + 16t + 30$ expresa dicho valor en euros, donde el tiempo t está medido en meses, $0 \le t \le 12$. Si inicialmente dispone de 3.000 euros y durante el año puede realizar como máximo 2 operaciones de compra y 2 de venta:

a) Utilizando el análisis de los máximos y mínimos de $f(t)$, deducir en qué instantes debe realizar el inversor cada compra y cada venta para que, a final de año ($t = 12$), disponga del máximo dinero.

b) ¿Cuál será el máximo beneficio que podrá obtener realizando las 4 operaciones óptimas indicadas en el apartado anterior?
Nota: Téngase en cuenta que el inversor, en cada operación, utilizará todo su dinero o todas sus acciones.

----

a)

Por lógica, le interesa comprar en los momentos de mínimo valor de las acciones y vender en los momentos de máximo valor.

$$f(0) = 30.$$

$$f(12) = \frac{12^3}{3} - 5 \cdot 12^2 + 16 \cdot 12 + 30 = 576 - 720 + 192 + 30 = 78.$$

Los máximos y mínimos relativos de la función son los siguientes:

$$f'(t) = t^2 - 10t + 16. \qquad f''(t) = 2t - 10.$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0;\ \ t = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} =$$

$$= 5 \pm 3 \Rightarrow t_1 = 2,\ t_2 = 8.$$

$$f''(2) = 2 \cdot 2 - 10 = 4 - 10 = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 2.$$

$$f''(8) = 2 \cdot 8 - 10 = 16 - 10 = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ t = 8.$$

$$\underline{Se\ debe\ comprar\ al\ comienzo\ y\ a\ los\ 8\ meses}.$$

$$\underline{Se\ debe\ vender\ a\ los\ 2\ meses\ y\ al\ final}.$$

b)

Al comienzo compra: $\frac{3.000}{30} = 100$ acciones.

$f(2) = \frac{2^3}{3} - 5\cdot 2^2 + 16\cdot 2 + 30 = \frac{8}{3} - 20 + 32 + 30 = \frac{8}{3} + 42 = \frac{134}{3} =$

$= 44,67$ euros (precio de la acción a los dos meses).

Obtiene en la primera venta: 44,67$\cdot 100 = 4.466,67$ euros.

$f(8) = \frac{8^3}{3} - 5\cdot 8^2 + 16\cdot 8 + 30 = \frac{512}{3} - 320 + 128 + 30 = \frac{512}{3} - 162 =$

$= \frac{512-486}{3} = \frac{26}{3} = 8,67$ euros (precio de la acción a los 8 meses).

$\frac{4.466,7}{8,67} \cong 515$ acciones compra a los 8 meses. (le sobran 3,33 euros)

$515\cdot 78 = 40.170$ euros obtiene al final al vender las 515 acciones.

$40.170 - 3.000 = 37.170.$ $\quad$ $37.170 + 3,33 = 37.173,33$

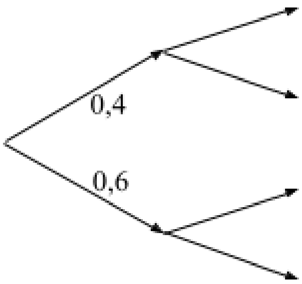
$\underline{El\ beneficio\ después\ de\ las\ 4\ operaciones\ es\ de\ 37.173,33\ euros.}$

****

3º) Un banco diseña diversos tipos de préstamos para empresas y particulares. A estos últimos les fueron concedidos el 60 % del total. Pasado un tiempo, el banco no recuperó el 6 % de los créditos a empresas y el 20 % de los particulares.

a) Si se selecciona un crédito al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea moroso?

b) Entre los créditos que son morosos, ¿qué probabilidad corresponden a empresas?



a)

$$P = P(Mo) = P(E \cap Mo) + P(Pa \cap Mo) =$$

$$= P(E) \cdot P(Mo/E) + P(Pa) \cdot P(Mo/Pa) = 0,4 \cdot 0,06 + 0,6 \cdot 0,20 =$$

$$= 0,024 + 0,120 = \underline{0,144}.$$

b)

$$P = P(E/Mo) = \frac{P(E \cap Mo)}{P(Mo)} = \frac{P(E) \cdot P(Mo/E)}{P(E) \cdot P(Mo/E) + P(Pa) \cdot P(Mo/Pa)} = \frac{0,4 \cdot 0,06}{0,4 \cdot 0,06 + 0,6 \cdot 0,20} =$$

$$= \frac{0,024}{0,024 + 0,120} = \frac{0,024}{0,144} = \underline{0,1667}.$$

****

4º) En un gabinete médico se realiza una prueba de reacción a señales luminosas para medir los reflejos de los pacientes. Los resultados en milisegundos (ms) se ajustan a una distribución normal $N(\mu,\ \sigma)$, donde $\sigma = 300$ ms. A partir de una muestra aleatoria simple, se obtiene un intervalo de confianza del $(740,\ \ 820)$ para esa media μ, con un nivel de confianza del 95 %. Se pide:

$a)$ La media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

$b)$ El error cometido en el cálculo de μ, si ahora tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 64 y el nivel de confianza es del 86 %.

$a)$

$$\overline{x} = \frac{820+740}{2} = \frac{1.560}{2} = \underline{780}.$$

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

$$E = \frac{820-740}{2} = \frac{80}{2} = 40.$$

Datos: $\sigma = 300;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96;\ \ E = 40.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,96 \cdot \frac{300}{40}\right)^2 =$

$= (1,96 \cdot 7,5)^2 = 14,7^2 = 216,09.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 217\ pacientes.}$

$b)$

Para un nivel de confianza del 86 % es:

$1 - \alpha = 0,86 \rightarrow \alpha = 1 - 0,86 = 0,14 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,07} = 1,475.$

$1 - 0,07 = 0,9300 \rightarrow z = 1,475).$

Datos: $n = 64;\ \ \sigma = 300;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,475.$

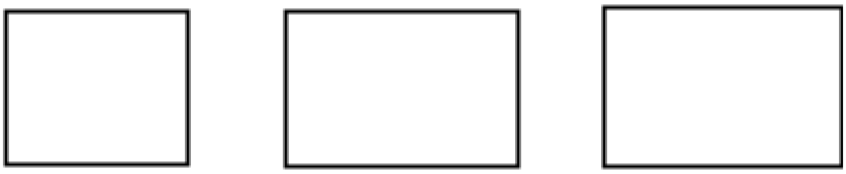
$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,475 \cdot \frac{300}{\sqrt{64}} = 1,475 \cdot 37,5 = \underline{55,3125}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Dadas las matrices $R = (x\,3 \;\; -1 + x\,3y)$ y $S = (1 \;\; -15\,0\,36)$, determinar el valor de las componentes $x > 0$ e y para que se verifique $R^2 = S$, donde $R^2 = R\cdot R$.

b) Se conoce la longitud, $a = 2$, $b = 3$ y $c = 5$, de uno de cada rectángulo de la figura X, Y, Z (no dibujados a escala) y la otra no, x, y, z. Determinar x, y, z para que se cumpla: (i) la suma del área de los tres rectángulos vale 64, (ii) la suma de los perímetros de los rectángulos X e Y vale 34 y (iii) la suma del perímetro de X más dos veces el área de Y vale 48.



----

a)

$$R^2 = R\cdot R = (x\,3 \;\; -1 + x\,3y)\cdot(x\,3 \;\; -1 + x\,3y) =$$

$$= \left(x^2 - 3 + 3x\;3x + 9y \;\; -x + x^2 - 3y + 3xy \;\; -3 + 3x + 9y^2\right).$$

$$R^2 = S \Rightarrow \left(x^2 - 3 + 3x\;3x + 9y \;\; -x + x^2 - 3y + 3xy \;\; -3 + 3x + 9y^2\right) = (1 \;\; -1$$

$\Rightarrow$

$$x^2 + 3x - 3 = 1 \quad -x + x^2 - 3y + 3xy = 0 \qquad 3x + 9y = -15$$

$$x = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-3\pm5}{2} \Rightarrow x_1 = -4,\; x_2 = 1.$$

Como tiene que ser $x > 0$, la solución es $\underline{x = 1}$.

$3x + 9y = -15;\;\; 3 + 9y = -15;\;\; 9y = -18 \Rightarrow \underline{y = -2}$.

b)

(i) $\left(S_X\right)^2 + \left(S_Y\right)^2 + \left(S_Z\right)^2 = 64;\;\; 2x + 3y + 5z = 64.$ (1)

(ii) $P_X + P_Y = 34;\;\; 2(x+2) + 2(y+3) = 34;$

$x + 2 + y + 3 = 17;\;\; x + y = 12.$ (2)

(iii) $P_X + 2\cdot\left(S_B\right)^2 = 48$; $2(x + 2) + 2\cdot 3y = 48$; $x + 2 + 3y = 24$;

$x + 3y = 22.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$2x + 3y + 5z = 64 \qquad x + y = 12 \qquad x + 3y = 22\,\}$. De las dos últimas ecuaciones:

$x + y = 12\ x + 3y = 22\,\} \quad -x - y = -12 \quad x + 3y = 22\,\} \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow \underline{y =}$

$2x + 3y + 5z = 64$; $14 + 15 + 5z = 64$; $5z = 64 - 29 = 35 \Rightarrow \underline{z = 7}$.

****

2º) La función $f(x)$ está definida a trozos. Cuando $x \leq 3$, $f(x) = ax + b$ y cuando $x \geq 3$, $f(x) = cx^2 + dx + e$, donde a, b, c, d y e son parámetros desconocidos. Si la función $f(x)$ tiene un máximo en $x = 4$ y la función y su derivada en $x = 3$ valen respectivamente $f(3) = 3$ y $f'(3) = 2$.

a) Halla los valores de los parámetros a, b, c, d y e que determinan la función $f(x)$.

b) Obtener las coordenadas de los puntos de corte P y Q de la función $f(x)$ con el eje de abscisas OX y calcular la integral de $f(x)$ en el intervalo $[P, Q]$.

----

a)

Por la forma de dar la función se deduce que es continua para $x = 3$.

$f(x) = cx^2 + dx + e$. $\qquad f'(x) = 2cx + d$.

$f(3) = 3 \Rightarrow a \cdot 3 + b = 3;\ 3a + b = 3.$ (*)

$f'(3) = 2 \Rightarrow \underline{a = 2}$.

Sustituyendo en (*): $3 \cdot 2 + b = 3;\ 6 + b = 3 \Rightarrow \underline{b = -3}$.

$f(3) = 3 \Rightarrow c \cdot 3^2 + d \cdot 3 + e = 3;\ 9c + 3d + e = 3.$ (1)

$f'(3) = 2 \Rightarrow 2c \cdot 3 + d = 2;\ 6c + d = 2.$ (2)

Por tener un máximo para $x = 4$ es $f'(4) = 0$:

$f'(4) = 0 \Rightarrow 2c \cdot 4 + d = 0;\ 8c + d = 0.$ (3)

De las ecuaciones (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{l} 6c + d = 2 \\ 8c + d = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -6c - d = -2 \\ 8c + d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow \underline{c = -1}.$$

$-6 + d = 2 \Rightarrow \underline{d = 8}$.

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión (1):

$9c + 3d + e = 3;\ -9 + 24 + e = 3;\ e = 3 - 15 \Rightarrow \underline{e = -12}$.

b)

La función resulta: $f(x) = \{ \quad 2x - 3 \quad si\, x \leq 3 \quad - x^2 + 8x - 12 \;\; si \;\; x \geq 3$.

Si $x \leq 3 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0;\;\; x = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{P\left(\frac{3}{2}, 0\right)}$.

Si $x \geq 3 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow - x^2 + 8x - 12 = 0;\;\; x^2 - 8x + 12 = 0;$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 2 \nless 4,\; x_2 = 6 \Rightarrow \underline{Q(6,\; 0)}.$$

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{6} f(x) \cdot dx = \int_{\frac{3}{2}}^{3} (2x - 3) \cdot dx + \int_{3}^{6} \left(- x^2 + 8x - 12\right) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{2x^2}{2} - 3x\right]_{\frac{3}{2}}^{3} + \left[- \frac{x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 12x\right]_{3}^{6} = \left[x^2 - 3x\right]_{\frac{3}{2}}^{3} + \left[- \frac{x^3}{3} + 4x^2 - 12x\right]_{3}^{6} =$$

$$= \left(3^2 - 3 \cdot 3\right) - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2}\right] + \left(- \frac{6^3}{3} + 4 \cdot 6^2 - 12 \cdot 6\right) - \left(- \frac{3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 36\right) =$$

$$= 9 - 9 - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 72 + 144 - 72 + 9 - 36 + 36 = 9 - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{36-9+18}{4} =$$

$$= \frac{36+9}{4} = \frac{45}{4}.$$

$$\underline{I = \frac{45}{4} = 11,25.}$$

****

3º) En una urna hay 15 bolas blancas y 5 bolas negras. Calcular:

a) Si se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?

b) Extrayendo dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

c) Si se extrae primero una bola, y luego otra, siendo la primera negra, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea también negra?

d) Si se extrae una bola y luego otra, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

----

a)

$$P = \frac{15}{20} = \underline{\frac{3}{4} = 0,75.}$$

b)

$$P = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} = \frac{3}{4} \cdot \frac{14}{19} = \underline{\frac{21}{38} = 0,5526.}$$

c)

$$P = \underline{\frac{4}{19} = 0,2105.}$$

d)

$$P = P(BN) + P(NB) = \left(\frac{15}{20} \cdot \frac{5}{19}\right) + \left(\frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19}\right) = 2 \cdot \frac{15}{4 \cdot 19} = \underline{\frac{15}{38} = 0,3947.}$$

****

4º) Un estudio, sobre el número de fumadores de una zona a partir de una muestra de tamaño 361, señala que la proporción muestral de fumadores es del 35 %. Con estos datos se pide calcular:

a) ¿Cuál es el intervalo de confianza al 95 %?

b) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza al 99 % sea de 0,12?

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$

$Datos$: $p = 0,35;\ \ q = 0,65;\ \ n = 361;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p,\ q\ y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

$\left(0,35 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{361}};\ 0,35 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{361}}\right);$

$(0,35 - 1,96 \cdot 0,0251;\ 0,35 + 1,96 \cdot 0,0251);\ \ (0,35 - 0,0492;\ 0,35 + 0,0496)$
.

$$\underline{I.\ C._{95\ \%} = (0,3008;\ 0,3996).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$

$1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$

Datos: $\sigma = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{361}} = 0,0251;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575;\ \ E = \frac{0,12}{2} = 0,06$

.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E}\right)^2 \cdot p \cdot q = \left(\frac{2,575}{0,06}\right)^2 \cdot 0,35 \cdot 0,65 =$

$= 1.841,84 \cdot 0,2275 = 419,02.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 420\ fumadores.}$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solo UNA de las OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Dadas las matrices $A = (1\ -2\ 1\ 2\ 0\ -3\ 0\ 1\ -1)$, $B = (1\ -2\ 0\ -1\ 2\ 2\ 2\ -1\ 3)$ y el vector $\vec{c} = (-2\ -1\ 3)$, se pide:

a) Calcula el determinante de la matriz A y calcula A^{-1}.

b) Determina el vector $\vec{x}$ que verifica que $A \cdot \vec{x} = B^t \cdot \vec{c}$, donde B^t representa la matriz traspuesta de B.

----

a)

$$|A| = |1\ -2\ 1\ 2\ 0\ -3\ 0\ 1\ -1| = 2 + 3 - 4 = \underline{1}.$$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(I) = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_1\} \Rightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ -2\ 1\ 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 + 2F_2\ F_3 \to F_3 - 4F_2\} \Rightarrow (1\ 0\ 2\ 0\ 0\ 1\ -2\ 1\ -4) \Rightarrow \{F_3 \to -F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1\ 0\ 2\ 0\ 0\ 1\ 2\ -1\ 4) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_3\ F_2 \to F_2 + F_3\} \Rightarrow (3\ -1\ 6\ 2\ -1\ 5\ 2\ -1\ 4$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = (3\ \ -1\,6\,2\ \ -1\,5\,2\ \ -1\,4)}.$$

b)

Sea el vector pedido $\vec{x} = (x\ y\ z\ )$.

$A \cdot \vec{x} = B^t \cdot \vec{c} \Rightarrow (1\ \ -2\,1\,2\,0\ \ -3\,0\,1\ \ -1\ ) \cdot (x\ y\ z\ ) = (1\ \ -1\,2\ \ -2\,2\ \ -1\,0\,2\,3\ $

$(x - 2y + z\ 2x - 3z\ y - z\ ) = (-\ 2 + 1 + 6\ 4 - 2 - 3\ \ -2 + 9\ ) \Rightarrow x - 2y + z$
.

Resolviendo por el método de Gauss:

$(1\ \ -2\,1\,2\,0\ \ -3\,0\,1\ \ -1\ \ \ 5\ \ -1\,7\ ) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow (1\ \ -2\,1\,0\,1\ \ -1\,2\,0\ \ -3\ \ \ 5$

$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_1\} \Rightarrow (1\ \ -2\,1\,0\,1\ \ -1\,0\,4\ \ -5\ \ \ 5\,7\ \ -11\ ) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 4F_2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (1\ \ -2\,1\,0\,1\ \ -1\,0\,0\ \ -1\ \ \ 5\,7\ \ -39\ ) \Rightarrow z = 39;\ \ y - z = 7;\ \ y - 39 = 7;\ \ y =$

$x - 2y + z = 5;\ \ x - 92 + 39 = 5;\ \ x = 5 + 92 - 39 = 58.$

$$\underline{\vec{x} = (58\ 46\ 39\ )}.$$

****

2º) Los ingresos y costes anuales, en miles de euros, de una fábrica de mochilas vienen dados, respectivamente, por las funciones $I(x) = 4x - 9$, $C(x) = 0,01x^2 + 3x$, donde la variable x expresa en euros el precio de venta de una mochila. Se pide:

a) Calcula la función de beneficios.

b) ¿Cuál ha de ser el precio de venta x para que el beneficio sea máximo?

c) Para la función de beneficios, determina los puntos de corte con los ejes y las zonas de crecimiento y decrecimiento. Representa gráficamente dicha función.

d) Razona para qué precios de venta (valores de x) la empresa tendría pérdidas.

----

a)

$$B(x) = I(x) - C(x) = (4x - 9) - \left(0,01x^2 + 3x\right) = 4x - 9 - 0,01x^2 - 3x.$$

$$\underline{B(x) = -0,01x^2 + x - 9}.$$

b)

Las condiciones necesarias para que una función tenga un máximo relativo es que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$B'(x) = -0,02x + 1. \qquad B''(x) = -0,02 < 0 \Rightarrow Máximo.$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -0,02x + 1 = 0;\ 2x = 100 \Rightarrow x = 50.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ cuando\ el\ precio\ de\ una\ mochila\ es\ de\ 50\ euros}.$$

c)

$$Corte\ eje\ X: y = B(x) = 0 \Rightarrow -0,01x^2 + x - 9 = 0;\ x^2 - 100x + 900 = 0;$$

$$x = \frac{100\pm\sqrt{10.000-3.600}}{2} = \frac{100\pm\sqrt{6.400}}{2} = \frac{100\pm80}{2} \Rightarrow \{x_1 = 10 \rightarrow \underline{A(10,\ 0)}\ x_2 = 90 \rightarrow \underline{B(90,\ 0)}$$

.

$$Corte\ eje\ Y: x = 0 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow \underline{C(0,\ -9)}.$$

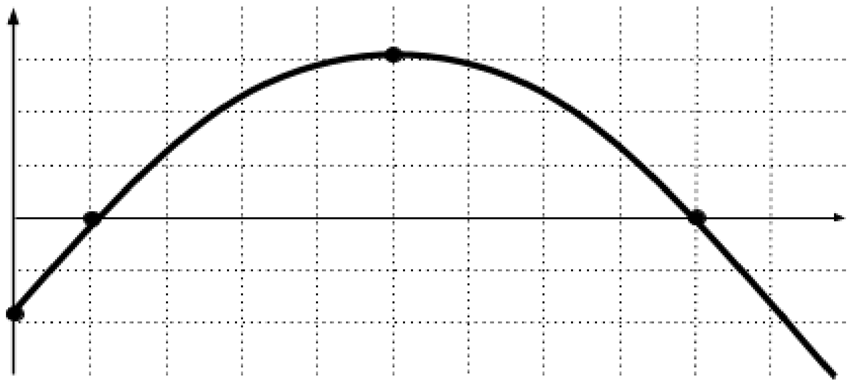
$$B(50) = -0,01\cdot50^2 + 50 - 9 = -25 + 41 = 16.$$

Teniendo en cuenta que la función beneficios es una parábola cóncava ($\cap$) cuyo máximo es el punto $V(50,\ 16)$ y que $x \geq 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: B'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (0, 50).}$$

$$\underline{Decrecimiento: B'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (50, +\infty)}.$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



d)

De la observación de la gráfica de la función beneficios se deduce que:

$$\underline{Hay\ pérdidas\ cuando\ el\ precio\ de\ las\ mochilas\ es\ 10 < x < 90\ euros}.$$

****

3º) Un dado normal tiene sus caras numeradas del 1 al 6. Otro dado está trucado y tiene cuatro caras numeradas con el 5 y las otras dos caras numeradas con el 6. Se elige un dado al azar y se realizan dos tiradas con el dado elegido. Se pide:

a) Calcula la probabilidad de sacar un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda.

b) Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos entre las dos tiradas sea 11.

c) Si al realizar las dos tiradas con el dado elegido al azar se obtiene un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado?

Dado normal N; dado trucado T.

a)

$$P = \frac{1}{2}\cdot[P(N) + P(T)] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{36} + \frac{8}{36}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{36} = \underline{\frac{1}{8} = 0,125}$$

.

b)

$$P = \frac{1}{2}\cdot[P(N) + P(T)] = \frac{1}{2}\cdot\left[\overbrace{P(56) + P(65)}^{Normal} + \overbrace{P(56) + P(65)}^{Trucado}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\overbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}^{Normal} + \overbrace{\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}}^{Trucado}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{8}{36}\cdot\frac{8}{36}\right) = \frac{1}{2}\cdot($$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{4} = 0,25}.$$

c)

$$P = \frac{P(T\to 65)}{P(N\to 65) + P(T\to 65)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}\right)} = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 1 + 2\cdot 4} = \frac{8}{1+8} = \underline{\frac{8}{9} = 0,8889}.$$

****

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Un inversor decidió invertir un total de 42.000 euros entre tres productos:

1-- Una cuenta de ahorros por la que recibe unos intereses anuales del 5 %.

2-- Un depósito a plazo fijo por el que le pagan unos intereses anuales del 7 %.

3-- Unos bonos con unos intereses anuales del 9 %.

Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 2.600 euros. Si los intereses que ha recibido de la cuenta de ahorros son 200 euros menos que la suma de los intereses que ha percibido por las otras dos inversiones, ¿qué cantidad invirtió en cada producto?

Sean $x,\ y,\ z$ las inversiones que se realiza el inversor en la cuenta de ahorros, el depósito a plazo fijo y en los bonos, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$x + y + z = 42.000\ 0,05x + 0,07y + 0,09z = 2.600 \quad 0,05x + 200 =$$

$$x + y + z = 42.000\ 5x + 7y + 9z = 260.000\ 5x - 7y - 9z = -20.000 \}$$

. Sumando miembro a miembro las dos últimas ecuaciones:

$$10x = 260.000 - 20.000 = 240.000 \Rightarrow x = 24.000.$$

$$24.000 + y + z = 42.000\ 5 \cdot 24.000 + 7y + 9z = 260.000 \} \qquad y + z = 4$$

$$y + z = 18.000\ 7y + 9z = 140.000 \} \quad -7y - 7z = -126.000\ 7y + 9z = 140$$

.

$x + y + z = 42.000;\ \ 24.000 + y + 7.000 = 42.000;\ \ y = 42.000 - 31.000 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 11.000.$

$\underline{Invirtió\ 24.000,\ 11.000\ y\ 7.000\ euros\ en\ los\ tres\ productos,\ respectivamente}$

.

****

2º) Una explotación minera extrae $f(t) = 30 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{800}t^3$ toneladas de carbón por año, donde la variable t indica el tiempo transcurrido, en años, desde el inicio de la explotación. Se pide:

a) Calcula en qué año se alcanza el máximo de extracción y cuál es dicho valor.

b) Si se necesita extraer como mínimo 10 toneladas por año para que la explotación sea rentable, estudia si el año $t = 40$ es rentable.

c) ¿Existe algún periodo de tiempo, a partir de los 40 años, en el que la explotación es rentable? Razona tu respuesta.

----

a)

Para que una función tenga un máximo relativo son condiciones necesarias que se anule su primera derivada y que sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(t) = \frac{3}{2} - 3\cdot\frac{1}{800}t^2.$ $\qquad$ $f''(t) = -6\cdot\frac{1}{800}t = -\frac{3t}{400}.$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - 3\cdot\frac{1}{800}t^2 = 0;\ \ \frac{3}{2} = 3\cdot\frac{1}{800}t^2;\ \ t^2 = 400 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -20 \\ t_2 = 20 \end{cases}.$$

Como el tiempo no puede ser negativo, la solución es $t = 20$.

$f''(20) = -\frac{3\cdot 20}{400} < 0 \Rightarrow$ Justificación de que se trata de un máximo relativo.

$\underline{A\ los\ 20\ años\ se\ alcanza\ la\ máxima\ extracción\ de\ carbón}.$

$$f(20) = 30 + \frac{3}{2}\cdot 20 - \frac{1}{800}\cdot 20^3 = 30 + 30 - 10 = 50.$$

$\underline{La\ máxima\ extracción\ es\ de\ 50\ toneladas\ de\ carbón}.$

b)

$$f(40) = 30 + \frac{3}{2}\cdot 40 - \frac{1}{800}\cdot 40^3 = 30 + 60 - 80 = 10.$$

$\underline{A\ los\ 40\ años\ la\ mina\ es\ mínimamente\ rentable}.$

c)

Del apartado a) se deduce que a partir de los 20 años la producción decrece monótonamente, por tratarse de una función polinómica que tiene un mínimo para el valor negativo de $t = -20$; del apartado b) concluimos que a partir de los 40 años la producción no es rentable, por todo lo cual:

$$\underline{No\ existe\ ning\text{ú}n\ periodo\ rentable\ a\ partir\ de\ los\ 40\ a\text{ñ}os.}$$

****

3º) El espacio muestral asociado a un experimento aleatorio $\Omega = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$. Se sabe que $P(a) = P(c) = \frac{1}{8}$, $P(d) = \frac{1}{4}$, $P(e) = \frac{1}{3}$. Dados los sucesos $A = \{a,\ b,\ c\}$ y $B = \{b,\ d,\ e\}$ y siendo $\overline{A}$ el suceso contrario o complementario de A y $\overline{B}$ el suceso contrario o complementario de B, calcula:

$a)$ $P(A \cap B)$.$b)$ $P(A \cup \overline{B})$.$c)$ $P(\overline{A} \cap \overline{b})$. $d)$ $P(A/\overline{B})$. $e)$ $P(B/A)$.

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) = 1;\ \ \frac{1}{8} + P(b) + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 1;$$

$$P(b) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 1;\ \ 12 \cdot P(b) + 3 + 3 + 4 = 12;\ \ P(b) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

$a)$

$$A \cap B = \{a,\ b,\ c\} \cap \{b,\ d,\ e\} = \{b\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(b) = \underline{\frac{1}{6}}.$$

$b)$

$$A \cup \overline{B} = \{a,\ b,\ c\} \cup \{a,\ c\} = \{a,\ b,\ c\} \Rightarrow P(A \cup \overline{B}) = P(a) + P(b) + P(c) =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{4+6}{24} = \frac{10}{24} = \underline{\frac{5}{12}}.$$

$c)$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{d,\ e\} \cap \{a,\ c\} = \emptyset \Rightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \underline{0}.$$

$d)$

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \Rightarrow [A \cap \overline{B} = \{a,\ b,\ c\} \cap \{a,\ c\} = \{a,\ c\}\ \overline{B} = \{a,\ c\}\ ] \Rightarrow \frac{P(a)+P(c)}{P(a)+P(c)} = \underline{1}$$

.

$e)$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow [A \cap B = \{a,\ b,\ c\} \cap \{b,\ d,\ e\} = \{b\}\ A = \{a,\ b,\ c\}\ ] \Rightarrow \frac{P(b)}{P(a)+P(b)+P(c)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4+6}{24}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{10}{24}} = \frac{1}{\frac{10}{4}} = \frac{4}{10} = \underline{\frac{2}{5}}.$$

****

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solo UNA de las OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Una pastelería vende dos clases de cajas de bombones. En las cajas denominadas extra incluye 15 bombones de tipo A y 30 de tipo B, mientras que en las cajas denominadas deluxe contienen 30 bombones de tipo A y 15 de tipo B. Con cada bombón de tipo A obtiene un beneficio de 50 céntimos, y con cada uno de tipo B un beneficio de 40 céntimos. Denominando x al número de cajas extra, e y al número de cajas deluxe que vende, se pide:

a) Calcula la función de beneficios de la pastelería.

b) Si dispone de 450 bombones de cada tipo, calcula el número de cajas x e y que deberá vender de cada clase para obtener un beneficio máximo. Calcula dicho beneficio máximo.

----

a)

$$f(x,\ y) = 0,5\cdot(15x + 30y) + 0,4\cdot(30x + 15y) = 7,5x + 15y + 12x + 6y$$

.

$$\underline{f(x,\ y) = 19,5x + 21y}.$$

b)

Las restricciones son las siguientes:

$$15x + 30y \leq 480\ 30x + 15y \leq 480 \quad x \geq 0;\ y \geq 10\ \} \quad x + 2y \leq 30 \quad 2x + y \leq 30\ x \geq 0;\ y$$

.

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

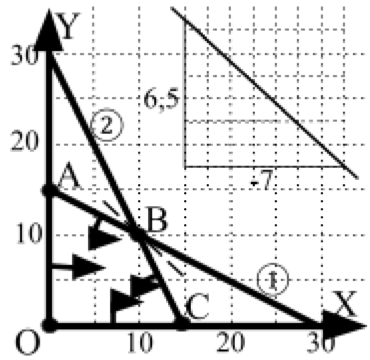
x	0	30
y	15	0

①$\Rightarrow x + 2y \le 30 \Rightarrow y \le \frac{30-x}{2} \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

x	0	15
y	30	0

②$\Rightarrow 2x + y \le 30 \Rightarrow y \le 30 - 2x \Rightarrow O(0,\ 0) \rightarrow Si.$

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2y = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,\ 15).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y = 30 \\ 2x + y = 30 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -x - 2y = -30 \\ 4x + 2y = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 3$

$x = 10;\ \ y = 10 \Rightarrow B(10,\ 10).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 2x + y = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 15 \Rightarrow C(15,\ 0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,\ 15) = 19,5 \cdot 0 + 21 \cdot 15 = 0 + 315 = 315.$

$B \Rightarrow f(10,\ 10) = 19,5 \cdot 10 + 21 \cdot 10 = 195 + 210 = 405.$

$C \Rightarrow f(15,\ 0) = 19,5 \cdot 15 + 21 \cdot 0 = 292,5 + 0 = 292,5.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,\ y) = 19,5x + 21y = 0 \Rightarrow y = -\frac{19,5}{21}x = -\frac{195}{210}x = -\frac{6,5}{7}x \Rightarrow m = -\frac{6,5}{7}.$

$\underline{El\ máximo\ benefico\ se\ produce\ vendiendo\ 10\ cajas\ de\ cada\ tipo.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 405\ euros.}$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función.

----

a)

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$(x-2)^2 = 0;\ x-2 = 0 \Rightarrow x = 2.$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{2\}}.$$

Corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{A\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)}$.

Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{(x-2)^2} = 0;\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \underline{B(1,\ 0)}$.

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$y = k = f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2} = 0$.

$$\underline{El\ eje\ de\ abscisas\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{La\ recta\ x = 2\ es\ asíntota\ vertical}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

c)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x-2)^2-(x-1)\cdot[2\cdot(x-2)\cdot 1]}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)-2\cdot(x-1)}{(x-2)^3} = \frac{x-2-2x+2}{(x-2)^3} = \frac{-x}{(x-2)^3}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(0, 2)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}.$$

$d)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x}{(x-2)^3} = 0; \quad -x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

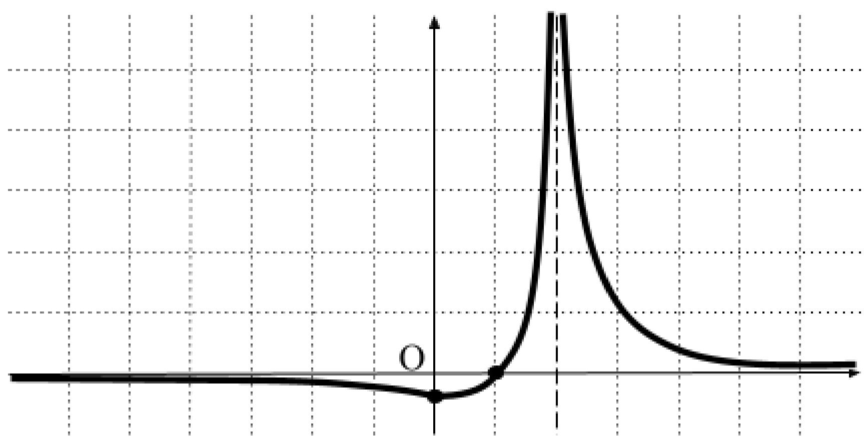
$$f''(x) = \frac{-1\cdot(x-2)^3+x\cdot\left[3\cdot(x-2)^2\cdot 1\right]}{(x-2)^6} = \frac{-1\cdot(x-2)+3x}{(x-2)^4} = \frac{-x+2+3x}{(x-2)^4} = \frac{2x+2}{(x-2)^4}.$$

$$f''(0) = \frac{2}{16} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{Mínimo: A\left(0, -\frac{1}{4}\right)}.$$

$e)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

3º) En un estudio realizado en un comercio se ha determinado que el 68 % de las compras se pagan con tarjeta de crédito. El 15 % de las compras superan los 500 euros y ambas circunstancias (una compra supera los 500 euros y se paga con tarjeta de crédito) se da el 5 % de las veces. Calcula la probabilidad de que:

a) Una compra no supere los 500 euros y se pague con tarjeta.

b) Una compra no pase de 500 euros si no se ha pagado con tarjeta de crédito.

c) Una compra se pague con tarjeta de crédito si no ha superado los 500 euros.

$Datos$:

$Probabilidad\ de\ paar\ con\ tarjeta$: $P(T) = 0,68$.

$Probabilidad\ desuperar\ 500\ euros$: $P(Q) = 0,15$.

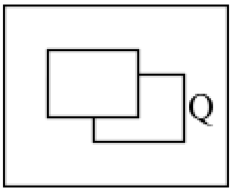
$Probabilidad\ de\ paar\ con\ tarjeta\ y\ más\ de\ 500\ euros$: $P(T \cap Q) = 0,05$.

a)

$P = P(\overline{T} \cap \overline{Q}) = 1 - P(T \cup Q)$. (*)

$P(T \cup Q) = P(T) + P(Q) - P(T \cap Q) =$

$= 0,68 + 0,15 - 0,05 = 0,83 - 0,05 = 0,78$.



Sustituyendo en (*) el valor obtenido:

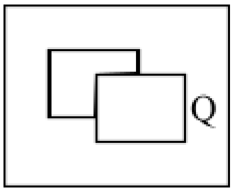
$P = P(\overline{T} \cap \overline{Q}) = 1 - P(T \cup Q) = 1 - 0,78 = \underline{0,22}$.

b)

$P(\overline{Q}/\overline{T}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{Q})}{P(\overline{T})} = \frac{0,22}{1-0,68} = \frac{0,22}{0,32} = \frac{22}{32} = \underline{\frac{11}{16} = 0,6875}$.

c)

$P(T/\overline{Q}) = \frac{P(T \cap \overline{Q})}{P(\overline{Q})}$. (**)



$P(T \cap \overline{Q}) = P(T) - P(T \cap Q) = 0,68 - 0,05 = 0,63$.

Sustituyendo el valor hallado en la expresión (**):

$P(T/\overline{Q}) = \frac{P(T \cap \overline{Q})}{P(\overline{Q})} = \frac{P(T) - P(T \cap Q)}{1 - P(Q)} = \frac{0,63}{1-0,15} = \frac{0,63}{0,85} = \underline{\frac{63}{85} = 0,7412}$.

****

<u>OPCIÓN B</u>

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Dadas las matrices $A = (2\ -\ 1\ 5\ 3\ 1\ -\ 2\ 5\ 1\ 3\ )\ y\ C = (7\ 4\ 1\ 1\ -\ 1\ 4\ 8\ 4\ 6\ )$, se pide:

a) Calcular A^{-1}.

b) Calcula una matriz X, de orden 3×3, que cumpla $A \cdot X = C$.

----

a)

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$|A| = |2\ -\ 1\ 5\ 3\ 1\ -\ 2\ 5\ 1\ 3\ | = 6 + 15 + 10 - 25 + 4 + 9 = 19.$

$A^t = (2\ 3\ 5\ -\ 1\ 1\ 1\ 5\ -\ 2\ 3\ ).$

$Adj.\ de\ A^t = (|1\ 1\ -\ 2\ 3\ |\ -|-\ 1\ 1\ 5\ 3\ |\ |-\ 1\ 1\ 5\ -\ 2\ |\ -|3\ 5\ -\ 2\ 3\ |\ |2\ 5\ 5\ 3\ |\ -|$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{19}(5\ 8\ -\ 3\ -\ 19\ -\ 19\ 19\ -\ 2\ -\ 7\ 5\ )\cdot}$$

b)

$A \cdot X = C;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C;\ \ I \cdot X = A^{-1} \cdot C \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot C}.$

$X = A^{-1} \cdot C = \frac{1}{19} \cdot (5\ 8\ -\ 3\ -\ 19\ -\ 19\ 19\ -\ 2\ -\ 7\ 5\ ) \cdot (7\ 4\ 1\ 1\ -\ 1\ 4\ 8\ 4\ 6\ ) =$

$= \frac{1}{19} \cdot (19\ 0\ 19\ 0\ 19\ 19\ 19\ 19\ 0\ ) \Rightarrow \underline{X = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ )}.$

****

2º) La caída de un meteorito en la Antártida provocó el deshielo de una superficie con una extensión en km^2 que viene dada por la función $f(t) = \frac{10t+21}{t+3}$, siendo t el número de días transcurridos desde el impacto.

a) ¿Cuál fue la superficie deshelada después de 6 días del impacto? ¿Y después de 87 días?

b) Estudia si la superficie deshelada crece o decrece a lo largo del tiempo.

c) Otro científico afirmó que la superficie deshelada venía dada por la siguiente función: $g(t) = 10 - \frac{9}{t+3}$. Comprueba si hay o no diferencias entre las dos funciones $f(t)$ y $g(t)$.

d) ¿Tiene algún límite la extensión del deshielo?

----

a)

$$f(6) = \frac{10 \cdot 6+21}{6+3} = \frac{60+21}{9} = \frac{81}{9} = 9.$$

$$f(87) = \frac{10 \cdot 87+21}{87+3} = \frac{870+21}{90} = \frac{891}{90} = \frac{99}{10} = 9,9.$$

$$\underline{La\ superficie\ deshelada\ a\ los\ 6\ días\ es\ de\ 9\ km^2\ y\ a\ los\ 87\ dias\ de\ 9,9\ km^2.}$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(t) = \frac{10 \cdot (t+3)-(10t+21) \cdot 1}{(t+3)^2} = \frac{10t+30-10t-21}{(t+3)^2} = \frac{9}{(t+3)^2} \Rightarrow f'(t) > 0,\ \forall t \in R.$$

$$\underline{La\ función\ de\ deshelado\ es\ monótona\ creciente.}$$

c)

$$f(t) = \frac{10t+21}{t+3} = \frac{10t+30-9}{t+3} = \frac{10t+30}{t+3} - \frac{9}{t+3} = 10 - \frac{9}{t+3} = g(t).$$

$$\underline{Las\ funciones\ f(t)\ y\ g(t)\ son\ equivalentes.}$$

d)

$$f(t) = \frac{10t+21}{t+3} = 10.$$

$$\underline{Con\ el\ tiempo\ el\ deshielo\ tiende\ a\ ser\ constantemente\ de\ 10\ km^2.}$$

****

3º) En una clase hay tres llaveros. El primer llavero (azul) tiene 5 llaves. El segundo (rojo) tiene 4 llaves y el tercero (verde) tiene 3 llaves. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar uno de los llaveros. Se pide:

a) Calcula la probabilidad de abrir el trastero con la primera llave que se prueba del llavero escogido.

b) Si se abre el trastero con la primera llave que se prueba, ¿cuál es la probabilidad de que se haya escogido el llavero verde?

$c)$ ¿Cuál es la probabilidad de que la primera llave que se prueba del llavero escogido al azar no abra y sí lo haga una segunda (distinta de la anterior) que se prueba del mismo llavero?

Sea $P(A)$ la probabilidad de abrir y $P(\overline{A})$ la probabilidad de no abrir.

$a)$

$$P = P(A) = \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}^{Azul} + \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}^{Rojo} + \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}^{Verde} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{12+15+20}{60} =$$

.

$b)$

$$P = P(Ve/A) = \frac{P(Ve\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{47}{180}} = \underline{\frac{20}{47} = 0,4255}.$$

$c)$

$$P = P(Az\cap\overline{A}\cap A) + P(Ro\cap\overline{A}\cap A) + P(Ve\cap\overline{A}\cap A) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} = \frac{12+15+20}{180} = \underline{\frac{47}{180} = 0,2611}$$

.

****