MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

Textos Marea Verde

A la vista de la polémica que ha suscitado el examen de Matemáticas II de Valencia ha surgido la idea de hacer dos libros nuevos de Textos Marea Verde, con los exámenes resueltos de 2019 de todas las comunidades autónomas.

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Andalucía

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Ismael Montero Penido

Fernando Merchán Murillo

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

Considera la función f definida por

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2} \text{ para } x\neq -1.$$

a) **[1.5 puntos]** Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.
b) **[1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Problema A.2:

[2.5 puntos] Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t=e^x$).

Problema A.3:

[2.5 puntos] Calcula todas las matrices $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX=XA$, siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema A.4:

Considera la recta $r\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1\equiv x=0$ y $\pi_2\equiv y=0$.

a) **[1.25 puntos]** Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.
b) **[1.25 puntos]** Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

Considera la función $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = (x-a)e^x}$.

a) **[1.25 puntos]** Determina $\boldsymbol{a}$ sabiendo que la función tiene un punto crítico en $\boldsymbol{x=0}$.

b) **[1.25 puntos]** Para $\boldsymbol{a=1}$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de $\boldsymbol{f}$.

Problema B.2:

Considera las funciones $f:(-2,+\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

a) **[1 punto]** Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).

b) **[1.5 puntos]** Determina el área del recinto anterior.

Problema B.3:

[2.5 puntos] Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$, considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^tA = B^t$, donde X^t, B^tdenotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m.

Problema B.4:

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0), B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$.

a) **[1.25 puntos]** Halla el área de dicho triángulo.

b) **[1.25 puntos]** Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

SOLUCIONES OPCIÓN A CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2} \quad \textit{para} \quad x \neq -1.$$

a) *Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.*
b) *Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.*

Solución:

a) Antes de calcular las asíntotas estudiamos el dominio de la función, puesto que donde se anule el denominador tendré una discontinuidad: $2x+2=0 \to x=-1$.

- **Asíntota vertical:** El punto a estudiar es $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Por lo tanto, existe una asíntota vertical en $\boldsymbol{x=-1}$.

- **Asíntota horizontal:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \frac{1+0+0}{0+0} = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Y tenemos que comprobar la existencia de asíntotas oblicuas.

- **Asíntotas oblicuas**: Estas asíntotas son de la forma $y=mx+n$:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+3x+4}{2x+2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+4}{2x^2+2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}} =$$

$$= \frac{1+0+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+3x+4}{2x+2} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+4-x(x+1)}{2x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+4}{2x+2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{2}{x}} = \frac{2+0}{2+0} = 1$$

Existe **asíntota oblicua** y esta es: $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+1}$.

b) Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento tenemos que calcular la derivada de la función y estudiar su signo:

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2}\rightarrow f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+2)-2(x^2+3x+4)}{(2x+2)^2}=$$

$$=\frac{4x^2+4x+6x+6-2x^2-6x-8}{(2x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}=\frac{2(x^2+2x-1)}{2^2(x+1)^2}\rightarrow$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{(x^2-2x-1)}{2(x+1)^2}$$

Para estudiar el signo de la derivada tendremos en cuenta:

- Dominio de la función: $Dom\ f\colon \mathbb{R}-\{-1\}$
- $f'(x)=0\rightarrow\frac{(x^2+2x-1)}{2(x+1)^2}=0\rightarrow x^2+2x-1=0\rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$

$$x_1=-1+\sqrt{2}$$

$$x_2=-1-\sqrt{2}$$

Estudiamos el signo:

	$-\infty$ a $-1-\sqrt{2}$	$-1-\sqrt{2}$ a -1	-1 a $-1+\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}$ a $+\infty$
x^2-2x-1	+	–	–	+

No tenemos en cuenta el signo del denominador, puesto que: $(x+1)^2>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Los intervalos de crecimiento son: $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{2},+\infty\right)$.

Los intervalos de decrecimiento son: $(-1-\sqrt{2},-1)$ ∪ (-1, $-1+\sqrt{2}$).

Problema A.2:

Sea la función $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. *Halla la primitiva de* f *cuya gráfica pasa por el punto* $(1,1)$. *(Sugerencia: cambio de variable* $t = e^x$*).*

Solución:

Sea $F(x)$ la función primitiva que se busca.

En lugar de realizar el cambio que sugieren en el enunciado, vamos a optar por otro: $e^x = 1 - t$:

$$F(x) = \int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx = \begin{bmatrix} e^x = 1-t \\ e^x dx = -dt \\ dx = \dfrac{dt}{t-1} \end{bmatrix} = \int \left(\frac{1+1-t}{1-(1-t)} \cdot \frac{dt}{t-1}\right) = \int \frac{2-t}{t(t-1)}dt$$

$$\frac{2-t}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+Bt}{t(t-1)}$$

Como la primera fracción y la última han de ser iguales y tienen el mismo denominador, igualo sus numeradores:

$$2 - t = A(t-1) + Bt$$

Para $t = 0: A = -2$

Para $t = 1: B = 1$

Por lo tanto, retomando la integral:

$$F(x) = \int \frac{2-t}{t(t-1)}dt = \int \left(\frac{-2}{t} + \frac{1}{t-1}\right)dt = -2ln|t| + ln|t-1| + C =$$

Y deshaciendo el cambio:

$$= -2ln|1-e^x| + ln|e^x| + C$$

Como, según el enunciado, $F(x)$ para por el punto $P(1,1)$:

$$F(1) = 1 \to F(1) = -2ln|1-e^1| + ln|e| + C =^{*} -2\ln(e-1) + 1 + C = 1 \to$$

$$C = 2\ln(e-1)$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{F(x) = -2ln|1-e^x| + ln|e^x| + 2\ln(e-1)}$$

*Nótese que cuando tenemos $ln|1-e^1| \to 1 - e < 0$, por lo tanto, quitamos el valor absoluto y lo colocamos de forma positiva en el siguiente paso: $\ln(e-1)$.

Problema A.3:

Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *tales que* $a + d = 1$, *tienen determinante 1 y cumplen* $AX = XA$, *siendo* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

Sean: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Multiplicamos: $AX = XA \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$

De la multiplicación obtenemos:

$$\begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

Según el enunciado:

$$|X| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 1.$$

Tenemos:

$$\begin{cases} E_1: a + d = 1 \\ E_2: ad - bc = 1 \\ E_3: a = d \\ E_4: b = -c \end{cases} \to \begin{cases} De\ E_1\ y\ E_3: a = d = \dfrac{1}{2} \\ De\ E_2, E_3\ y\ E_4: a^2 + c^2 = 1 \to \end{cases}$$

$$\to \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c^2 = 1 \to c^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \to c = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si $c = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces, como $b = -c$, entonces $b = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$

Hay dos soluciones:

$$\boldsymbol{X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}.$$

Autor: Fernando Merchán Murillo
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.4:

Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ *y los planos* $\pi_1 \equiv x = 0$ *y* $\pi_2 \equiv y = 0$.

a) *Halla los puntos de la recta* r *que equidistan de los planos* π_1 *y* π_2.
b) *Determina la posición relativa de la recta* r *y la recta intersección de los planos* π_1 *y* π_2.

Solución:

a) Dada la recta: $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$. Donde $P = (2-t, 2+3t, 1+t)$ es un punto genérico perteneciente a la recta r.

Y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.

La distancia del punto genérico P (perteneciente a la recta) a los dos planos tiene que ser la misma, por tanto:

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \to \frac{|2-t|}{\sqrt{1^2+0+0}} = \frac{|2+3t|}{\sqrt{0+1^2+0}} \to |2-t| = |2+3t|$$

Por lo tanto tengo dos opciones:

- $2-t = 2+3t \to 4t = 0 \to t = 0 \to P_1 = (2, 2, 1)$
- $2-t = -2-3t \to -2t = 4 \to t = -2 \to P_2 = (4, -4, -1)$

Los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 son:

$\boldsymbol{P_1 = (2, 2, 1)}$ y $\boldsymbol{P_2 = (4, -4, -1)}$.

b) Para estudiar la posición relativa de la recta r con la recta de intersección de los planos π_1 y π_2:

- Tomamos un punto de la recta r: $P_1 = (2, 2, 1)$ y el vector director de dicha recta: $\vec{v} = (-1, 3, 1)$
- La recta s (intersección de los dos planos dados será:

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = \lambda \end{cases}$$

Tomamos un punto cualquiera de dicha recta: $P_3 = (0, 0, 0)$ y su vector director: $\vec{w} = (0, 0, 1)$.

Observamos que: $\vec{v} \neq \vec{w}$, por lo tanto las dos rectas no son paralelas ni coincidentes.

Calculamos el vector $\overrightarrow{P_1P_3} = (2, 2, 1)$

Para ver si las rectas pertenecen al mismo plano:

$$\left[\overrightarrow{P_1P_3}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 - (-2) = 8 \neq 0.$$

La recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2, no son coplanarias, son **rectas que se cruzan**.

Autor: Fernando Merchán Murillo
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN B CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)e^x$.

a) Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$.

b) Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Solución:

a) Sea *la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)e^x$.*

Si sabemos que $x=0$ es un punto crítico, entonces: $f'(0)=0$

Por lo que calculamos la derivada:

$$f'(x)=e^x+(x-a)e^x=e^x(1+x-a)$$

Imponemos que $f'(0)=0$.

$$f'(0)=e^0(1-a)=0\to a=1$$

El valor de $\boldsymbol{a=1}$ para que la función tenga un punto crítico en $x=0$.

b) Para $a=1$, *la función dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)e^x$.*

Para obtener los puntos de inflexión tengo que calcular la derivada segunda e igualarla a cero.

$$f'(x)=xe^x$$

$$f''(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$$

Hacemos $f''(x)=0$: $f''(x)=e^x(1+x)=0$ →Tenemos dos opciones:

- $e^x=0\to$ Para esta ecuación no existe solución.
- $(1+x)=0\to x=-1$.

Para demostrar la validez de la solución comprobamos el dominio de $f(x)$. $Dom\ f=\mathbb{R}$

La ordenada resulta de obtener:

$$f(-1)=(-1-1)e^{-1}=\frac{-2}{e}.$$

Por lo tanto:

Las coordenadas del punto de inflexión son: $\boldsymbol{PI=\left(-1,\ \frac{-2}{e}\right)}$.

Problema B.2:

Considera las funciones $f: (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

a) Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x = 1$ y la recta $x = 3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).

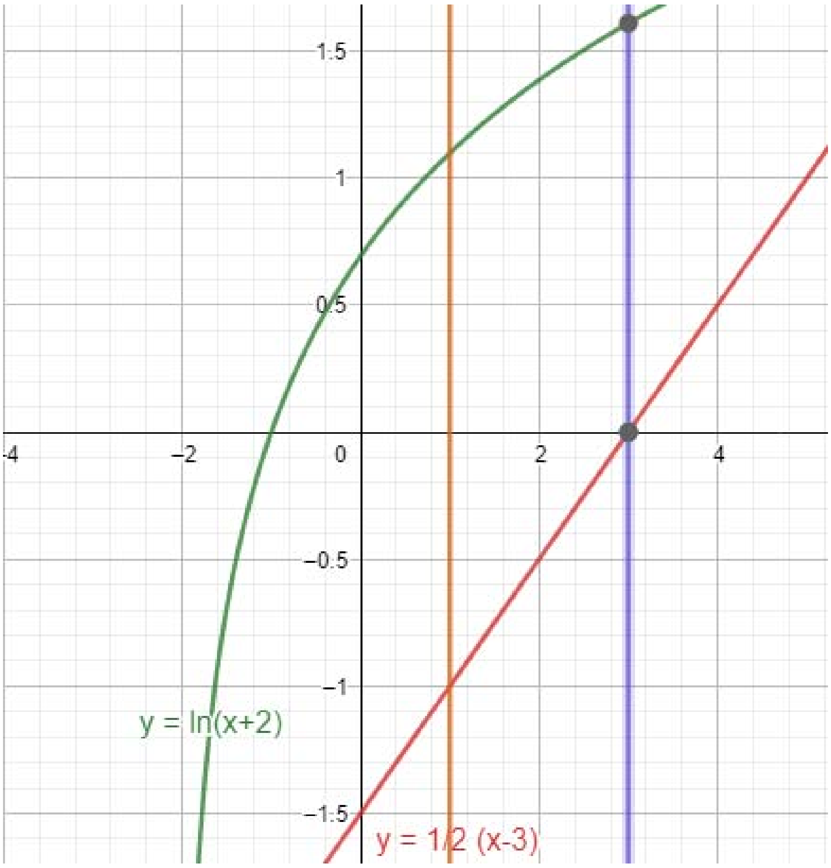
b) Determina el área del recinto anterior.

Solución:

a) Sean las funciones $f: (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x+2)$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

En primer lugar, igualaremos a cero ambas ecuaciones para ver si cortan al eje x entre la recta $x = 1$ y la recta $x = 3$.

- $\ln(x+2) = 0 \to x + 2 = 1 \to x = -1$. $f(x)$ queda fuera del intervalo $(1, 3)$, por lo tanto bastaría con darle un valor para saber el signo de la función y saber si se encuentra por encima o por debajo del eje x: $f(2) > 0$
- $g(x) = \frac{1}{2}(x-3) = 0 \to x = 3$, se trata de una recta, como su pendiente es positiva, es creciente, por lo tanto sabemos que se encuentra por debajo del eje x.



b) Llamaremos A_1 al área que forma la función $f(x) = \ln(x+2)$ por encima del eje X, y A_2 al área que forma la función $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$ por debajo del eje X:

$$A_1 = \int \ln(x+2)\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x+2) \to du = \dfrac{1}{x+2}dx \\ dv = dx \to v = x \end{bmatrix} = xln(x+2) - \int \frac{x}{x+2}dx =$$

$$= xln(x+2) - \int \frac{x+2-2}{x+2}dx = xln(x+2) - \int \frac{x+2-2}{x+2}dx = xln(x+2) - \int \frac{x+2}{x+2}dx -$$

$$- \int \frac{-2}{x+2}dx = xln(x+2) - \int dx + 2\int \frac{1}{x+2}dx = xln(x+2) - x + 2\,ln(x+2) + C =$$

$$= (x+2)\,ln(x+2) - x + C$$

$$A_2 = \int \frac{1}{2}(x-3)dx = \frac{1}{2}\int (x-3)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 3x\right) + C = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + C$$

Por lo tanto el área total será:

$$A_{TOTAL} = A_1 + A_2 = [(x+2)\ln(x+2) - x]_1^3 + \left|\left[\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2}\right]_1^3\right| = [(5\ln 5 - 3) - (3\ln 3 - 1)] +$$

$$+ \left|\left(\tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{2}\right) - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{2}\right)\right| = -1 + \ln\left(\tfrac{5^5}{3^3}\right)u^2.$$

El área total de la superficie que encierran las curvas es:

$$\boldsymbol{A = -1 + \ln\left(\frac{5^5}{3^3}\right)u^2}$$

Problema B.3:

Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}2-m & 1 & 2m-1\\ 1 & m & 1\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2m^2-1\\ m\\ 1\end{pmatrix}$, *considera el sistema de ecuaciones lineales dado por* $X^tA=B^t$, *donde* X^t, B^t*denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de* m.

Solución:

Si $A=\begin{pmatrix}2-m & 1 & 2m-1\\ 1 & m & 1\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}$, llamaremos traspuesta de A a: $M=A^t=\begin{pmatrix}2-m & 1 & m\\ 1 & m & 1\\ 2m-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Operando el sistema de ecuaciones lineales obtenemos:

$$X^tA=B^t \Leftrightarrow (X^tA)^t=(\mathrm{B}^t)^t \Leftrightarrow A^t(X^t)^t=B \Leftrightarrow A^tX=B \Longrightarrow MX=B$$

Resolvemos:

$$|M|=\begin{vmatrix}2-m & 1 & m\\ 1 & m & 1\\ 2m-1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(2-m)m+2m-1+m-[m^2(2m-1)+2-m+1]=$$

$$=-m^2+5m-1-2m^3+m^2+m-3=-2m^3+6m-4$$

Comprobamos los valores de "m" que hacen $|M|=0$:

$-2m^3+6m-4=0 \rightarrow$ Resolvemos por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -2 & 0 & 6 & -4\\ m=1 & & -2 & -2 & 4\\ \hline & -2 & -2 & 4 & 0\end{array}$$

$$-2m^2-2m+4=0 \rightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{-4}=\begin{cases} m_2=1\\ m_3=-2\end{cases}$$

Para: $M=\begin{pmatrix}2-m & 1 & m\\ 1 & m & 1\\ 2m-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; $M'=\begin{pmatrix}2-m & 1 & m & 2m^2-1\\ 1 & m & 1 & m\\ 2m-1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

- Si: $m\neq -2$ y $m\neq 1$:

$$|M|\neq 0 \rightarrow \begin{cases} rg(M)=3\\ rg(M')=3\\ n^{\text{o}}\ incógnitas=3\end{cases}$$

Como $rg(M)=rg(M')=n^{\text{o}}\ incógnitas$, se trata de un Sistema **Compatible Determinado** y, por tanto, hay una única solución

- Si: $m = -2$ y $m \neq 1$:

$$M' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Estudiamos el rango de M:</u>

Como $|M| = 0 \to rg(M) < 3$

$|4| \neq 0$

$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

Por lo tanto $rg(M) = 2$.

<u>Estudiamos el rango de $M´$:</u>

$|M´| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 7 + 10 - (70 - 8 - 1) \neq 0$

Por lo tanto $rg(M´) = 3$

Para $m = -2$, como $rg(M) \neq rg(M´)$, se trata de un Sistema **Incompatible** y, por lo tanto, no existe ninguna solución.

- Si: $m \neq -2$ y $m = 1$:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$|1| \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Resulta fácil demostrar que:

Como $rg(M) = rg(M´) = 1 < nº\ incógnitas$, se trata de un Sistema **Compatible Indeterminado** y, por lo tanto, existen infinitas soluciones, ya que encontramos 2 grados de libertad.

Resumiendo:

Si $m \neq\ -2;\ 1$	$rg(A) = rg(A') = 3$	Compatible Determinado (Única solución)
Si $m = -2$	$rg(A) = 2 \neq rg(A') = 3$	Incompatible (No hay solución)
Si $m = 1$	$rg(A) = rg(A') = 1$	Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

Problema B.4:

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0), B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$.

a) Halla el área de dicho triángulo.
b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

Solución:

a) Si los puntos que forman el triángulo son: $A(1,1,0), B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$, uso cualquiera de ellos para calcular dos vectores cualesquiera, pero con origen común:

$$\overrightarrow{AB} = (0,-1,2)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1,1,1)$$

Y calculo su producto:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i - 2j - (k + 2i) = -3i - 2j - k$$

Por lo tanto, las coordenadas serán:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3,-2,-1)$$

Y el área del triángulo será:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14}u^2$$

Por lo tanto, el área del triángulo es:

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\sqrt{14}\, u^2}$$

b) Llamaremos $\hat{A} = ang(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, puesto que para calcular el ángulo en el vértice A, necesitaremos los vectores que tienen como origen dicho vértice.

Para calcular el ángulo que forman: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot cos\hat{A}$.

Sustituimos:

$$(0,-1,2) \cdot (-1,1,1) = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot cos\hat{A} \rightarrow$$
$$\rightarrow 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot cos\hat{A} \rightarrow$$
$$\rightarrow cos\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{cos\hat{A} = \frac{\sqrt{15}}{15}}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones
con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

[2.5 puntos] Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el rectángulo comprendido entre la gráfica de f y la recta $y = 0$.

Problema A.2:

[2.5 puntos] Determina la función $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de f pasa por el punto $(1, 0)$.

Problema A.3:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ (m+2)x + y - z = m \\ 3x + (m+2)y + z = m \end{cases}$

a) **[1.5 puntos]** Discute el sistema según los valores de m.

b) **[1 punto]** Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 0$.

Problema A.4:

Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (1, -2, -1)$ y $\vec{w} = (2, \alpha, \beta)$, donde α y β son números reales

a) **[0.75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) **[0.75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

c) **[1 punto]** Para $\alpha = 8$, determina el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2018–2019 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones
con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

[2.5 puntos] Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, dada\ por$

$$f(x) = \begin{cases} sen(x) + ax + b & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b

Problema B.2:

Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xe^{-x^2}$

a) **[1.25 puntos]** Calcula los puntos de corte de la gráfica f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).
b) **[1.25 puntos]** Determina $a > 0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0, a]$ y el eje de abscisas.

Problema B.3:

[2.5 puntos] Calcula, en grados, los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Problema B.4:

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{z+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$

a) **[1.5 puntos]** Halla k sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.
b) **[1 punto]** Para $k = 1$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

SOLUCIONES OPCIÓN A CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=6-\frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el rectángulo comprendido entre la gráfica de f y la recta $y=0$.

Solución

Dibujemos primero la función $f(x)$.

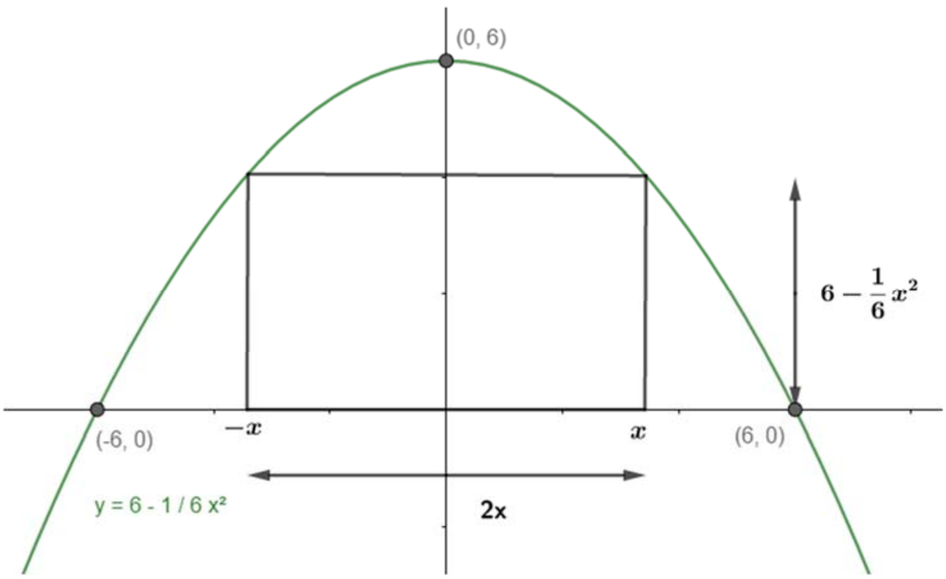
Al tratarse de un polinomio de 2º grado, su representación gráfica será una parábola. Para ello, vamos a analizar dos elementos claves: vértice y puntos de corte con los ejes de coordenadas.

- **Cálculo del vértice**
  El cálculo del vértice podemos hacerlo derivando la función e igualando a 0. Otro modo, que será el que vamos a utilizar, es usar la expresión del vértice $V(x_v, y_v)$ donde $x_v=-\frac{b}{2a}$ e $y_v=f(x_v)$
  $x_v=-\frac{0}{2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)}=0$ y por tanto $y_v=6-\frac{1}{6}\cdot 0=6$.
  Luego el vértice de la parábola es $V(0,6)$.

- **Puntos de corte con OX $(y=0)$**
  Resolvemos la ecuación $6-\frac{1}{6}x^2=0$, obteniendo dos resultados: $x=\pm 6$.
  Luego los puntos de corte con el eje OX son $P_1(6,0)$ y $P_2(-6,0)$.

- **Punto de corte con OY $(x=0)$**
  Este punto lo tenemos calculado de antes, pues coincide con el vértice de la función.

Así que su representación gráfica queda tal como se muestra en la siguiente imagen.



Denotemos la **base** del rectángulo por $2x$ y si observamos la función detenidamente, vemos que la **altura** es, precisamente, la función del problema, $6-\frac{1}{6}x^2$.

Por tanto, el área a maximizar es $A(x)=2x\cdot\left(6-\frac{1}{6}x^2\right)=12x-\frac{1}{3}x^3$

Derivamos la función e igualamos a cero para hallar su punto crítico:

$$A'(x)=12-x^2;$$
$$12-x^2=0;$$
$$x^2=12;$$
$$x=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$$

Descartamos el signo negativo, pues estamos tratando con unidades de medida que son positivas.

Así que nuestro posible máximo es $x=2\sqrt{3}$

Comprobemos que, efectivamente, este punto hace máximo al área del rectángulo, sustituyendo dicho punto en la segunda derivada y comprobando que ésta sea menor que cero.

$A''(x)=-2x$

Sustituimos el valor anterior en la segunda derivada.

$A''(2\sqrt{3})=-2\cdot2\sqrt{3}=-4\sqrt{3}<0$

Por tanto $x=2\sqrt{3}$ es un punto que hace máxima la función.

La base del rectángulo es $2x=2\cdot2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\,u$ y la altura $h=6-\frac{1}{6}\left(2\sqrt{3}\right)^2=6-2=4\,u$.

La base del rectángulo es $\boldsymbol{2x=4\sqrt{3}\,u}$ y la altura $\boldsymbol{h=4\,u}$.

(Donde u denota unidades)

Problema A.2:

Determina la función $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple $f(x)=\frac{ln(x)}{\sqrt{x}}$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,0)$.

Solución

Como sabemos que f es derivable, nos aseguramos de que la función del problema se puede integrar para obtener $f(x)$.

Por otro lado, sabemos que f pasa por $(1,0)$, lo que significa que $f(1)=0$, que aplicaremos una vez hallamos resuelto la integral.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{\ln(\mathrm{x})}{\sqrt{x}}\,dx=\int x^{-1/2}\ln(x)\,dx$$

Observamos que esta integral podemos resolverla utilizando el método de integración por partes.

Vamos a encontrar u y dv tal que $\int u\,dv=uv-\int v\,du$

$$\begin{bmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=x^{-1/2}\,dx & v=\dfrac{x^{1/2}}{1/2}=2\sqrt{x}\end{bmatrix}$$

Así que:

$f(x)=\int\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\cdot\ln(x)-\int\frac{2\sqrt{x}}{x}dx=2\sqrt{x}\cdot\ln(x)-2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=$

$=2\sqrt{x}\cdot\ln(x)-2\cdot 2\sqrt{x}+C=2\sqrt{x}\cdot\ln(x)-4\sqrt{x}+C$, donde $C\in\mathbb{R}$

Vamos a aplicar la condición anteriormente citada; es decir, $f(1)=0$

$$f(1)=2\sqrt{1}\cdot\ln 1-4\sqrt{1}+C=0;$$

$$-4+C=0;$$

$$C=4$$

La función que nos pide en el problema es $\boldsymbol{f(x)=2\sqrt{x}\cdot\ln(x)-4\sqrt{x}+4}$.

Autor: Ismael Montero Penido
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.3:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ (m+2)x + y - z = m \\ 3x + (m+2)y + z = m \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de m.

b) Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 0$.

Solución

a) A continuación, vamos a discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$

Sean A y A' las matrices de los coeficientes y la ampliada, respectivamente, definidas como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m+2 & 1 & -1 & m \\ 3 & m+2 & 1 & m \end{array}\right)$$

Veamos el rango que pueden tomar ambas matrices. Para ello, veamos el determinante de A.

$|A| = 1 + 2(m+2)^2 - 3 - 6 + m + 2 - m - 2 = \cdots = m^2 + 4m.$

Igualamos el resultado a 0 y obtenemos los posibles resultados de la ecuación resultante.

$m^2 + 4m = 0 \ \Rightarrow m = 0 \ y \ m = -4.$

Con lo cual se deduce lo siguiente:

- Si $m \neq \ -4;\ 0 \Rightarrow rg(A) = rg(A') = 3 \Rightarrow$ El sistema es compatible determinado.
- Si $m = -4$

  Reescribimos las matrices A y A' sustituyendo m por -4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Calculamos el menor de orden 2 asociado a la matriz A, formado por la primera y segunda columna y la primera y segunda fila respectivamente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Calculamos ahora el determinante del menor de orden 3 asociado a A' , que está formado por la primera, segunda y tercera columna de la matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 12 - 8 - 8 = -32 \ \neq 0 \Rightarrow rg(A') = 3$$

Por tanto, si $m = -4$ los rangos de ambas matrices son distintos, con lo que el sistema es incompatible.

- Si $m = 0$

  Reescribimos las matrices A y A' sustituyendo m por 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Procediendo como antes, calculamos el menor de orden 2 asociado a la matriz A, formado por la primera y segunda columna y la primera y segunda fila respectivamente.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Observemos ahora que el determinante formado por la primera, segunda y cuarta columna de la matriz ampliada es 0, pues tenemos una columna entera de 0, por tanto $rg(A') = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, si $m = 0$ tenemos que el rango de ambas matrices es 2, con lo que el sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo:

Si $\boldsymbol{m \neq -4;\ 0}$	$\boldsymbol{rg(A) = rg(A') = 3}$	Compatible Determinado (Única solución)
Si $\boldsymbol{m = -4}$	$\boldsymbol{rg(A) = 2 \neq rg(A') = 3}$	Incompatible (No hay solución)
Si $\boldsymbol{m = 0}$	$\boldsymbol{rg(A) = rg(A') = 2}$	Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Vamos a resolver el sistema para $m = 0$.
Por el apartado anterior, sabemos que el sistema es compatible indeterminado, así que vamos a asignar a la variable z con el parámetro λ, con $\lambda \in \mathbb{R}$; quedando el sistema tal como sigue:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow[\lambda \in \mathbb{R}]{z = \lambda} \begin{cases} x + y = -2\lambda \\ 2x + y = \lambda \\ 3x + 2y = -\lambda \end{cases}$$

Eliminamos la tercera ecuación pues es combinación lineal de las dos primeras ($E_3 = E_1 + E_2$), quedándonos con el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = -2\lambda \\ 2x + y = \lambda \end{cases}$$

Vamos a resolver este sistema por reducción, al tratarse de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas solamente. Para ello, restamos la primera ecuación con la segunda.

$$\begin{array}{rcccccc} & x & + & y & = & -2\lambda \\ - & 2x & + & y & = & \lambda \\ \hline & -x & & & = & -3\lambda \end{array}$$

Por tanto, $x = 3\lambda$.
Sustituimos en la 1ª ecuación:

$$3\lambda + y = -2\lambda;$$
$$y = -5\lambda;$$

Por tanto, las soluciones del sistema son $\{(\boldsymbol{3\lambda},\ \boldsymbol{-5\lambda},\ \boldsymbol{\lambda}),\ \forall\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}\}$.

Problema A.4:

Se consideran los vectores $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (1,-2,-1)$ y $\vec{w} = (2,\alpha,\beta)$, donde α y β son números reales

a) *Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.*

b) *Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.*

c) *Para $\alpha = 8$, determina el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.*

Solución

a) Para que $\vec{w}$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, $\vec{w}$ tiene que ser paralelo (o proporcional) a $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k} = (4,4,-4)$$

Como $\vec{w} \parallel \vec{u} \times \vec{v} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{4}{\alpha} = -\frac{4}{\beta}$

Igualando dos a dos obtenemos que:

$\boldsymbol{\alpha = 2}$ y $\boldsymbol{\beta = -2}$ para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Observación: *Podríamos haber hecho el problema obligando a que el producto escalar de $\vec{w}$ con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea 0, pues es la condición para que los vectores sean perpendiculares. Se deja como ejercicio para el alumno. ($\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ y $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$).*

b) $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tendrán la misma dirección si $\vec{w} \parallel \vec{v}$ (o si $\vec{w}$ y $\vec{v}$ son proporcionales)

Por tanto, debe cumplirse que $\frac{2}{1} = -\frac{\alpha}{2} = -\frac{\beta}{1}$

Igualando dos a dos obtenemos que:

$\boldsymbol{\alpha = -4}$ y $\boldsymbol{\beta = -2}$ para los que $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

c) Para que los tres vectores sean combinación lineal debe de cumplirse que el rango de la matriz formada por éstos sea menor que el número de vectores.

$$rg\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix} < 3$$

La matriz definida por los 3 vectores, con $\alpha = 8$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 8 & \beta \end{pmatrix}$

Para que el rango sea menor que 3, es necesario que el determinante de la matriz sea 0.

$$|A| = -2\beta + 24 - 4 + 12 + 8 - 2\beta = 0;$$
$$-4\beta + 40 = 0;$$
$$\beta = 10$$

Así que $\boldsymbol{\beta = 10}$ para que $\vec{w}$ sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

SOLUCIONES OPCIÓN B CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)=\begin{cases} sen(x)+ax+b & si \quad x\leq 0 \\ \dfrac{ln(x+1)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b

Solución:

Sabemos que si f es derivable en $x_0 \Rightarrow f$ es continua en x_0

Así que, vamos a obligar a la función a que primero sea continuidad en $x=0$ (por ser un punto donde hay un cambio de definición) y luego haremos lo mismo para la derivabilidad.

- **Continuidad en $x=0$**

  i) $f(0)=sen\ 0+a\cdot 0+b=b$

  ii) Veamos los límites laterales. Empezaremos con el límite cuando x tiende a 0 por la derecha y terminaremos con 0 por la izquierda.

  $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{0}{0}=IND.$$

  Aplicamos la Regla de L'Hôpital para resolver este límite

  $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=1$$

  Por otro lado

  $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(sen\ x+ax+b)=b$$

  iii) Para que $f(x)$ sea continua se debe verificar que $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$, así que $\boxed{b=1}$

- **Derivabilidad en $x=0$**

  Para que $f(x)$ sea derivable, se tiene que cumplir la siguiente igualdad: $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)$

  Calculamos primero la derivada de la función.

Autor: Ismael Montero Penido
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x + a & si \quad x \leq 0 \\ \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} & si \quad x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \cos x + a & si \quad x \leq 0 \\ \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^3+x^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Veamos los límites laterales de la derivada.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^3+x^2} = \frac{0}{0} = IND.$$

Aplicamos la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^3+x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln(x+1)-\frac{x+1}{x+1}}{3x^2+2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln(x+1)}{3x^2+2x} = \frac{0}{0} = IND.$$

Volvemos a aplicar la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln(x+1)}{3x^2+2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x+1}}{6x+2} = \frac{-1}{2}$$

Por otro lado

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (\cos x + a) = \cos 0 + a = 1 + a$

Imponemos la condición de derivabilidad, obteniéndose la siguiente igualdad

$1 + a = -\frac{1}{2}$;

$a = -\frac{1}{2} - 1$;

$\boxed{a = -\frac{3}{2}}$

Para que $f(x)$ sea derivable se tiene que $\boldsymbol{a = -\frac{3}{2}}$ y $\boldsymbol{b = 1}$

Problema B.2:

Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = xe^{-x^2}$

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica f *con los ejes coordenados y los extremos relativos de* f *(abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).*

b) Determina $a > 0$ *de manera que sea* $\frac{1}{4}$ *el área del recinto determinado por la gráfica de* f *en el intervalo* $[0, a]$ *y el eje de abscisas.*

Solución:

a) Veamos en primer lugar los puntos de corte con los ejes coordenados.

- **Puntos de corte con $\boldsymbol{OX}$ $(\boldsymbol{y = 0})$**

  $xe^{-x^2} = 0;$

  $x = 0$

- **Punto de corte con $\boldsymbol{OY}$ $(\boldsymbol{x = 0})$**

  No hace falta que calculemos este punto de nuevo, pues viene dado en el cálculo anterior, $P(0,0)$

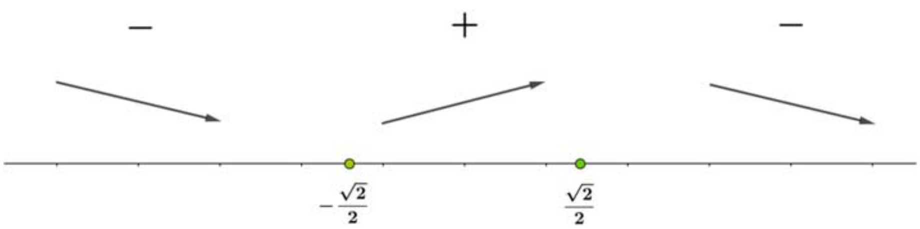
Con lo que el único punto de corte viene dado por $\boldsymbol{P(0,0)}$.

Calculemos los extremos relativos de la función. Para ello, derivamos $f(x)$ e igualamos a 0 para obtener los puntos críticos.

$$f'(x) = e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

$$e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \;\Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \;\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \cong \pm 0{,}7$$

Veamos el signo de la derivada con ayuda de la recta real.



Se observa que la función tiene un cambio de signo en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, con lo que se deduce que:

La función alcanza su mínimo relativo en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e^{1/2}}\right)$ y su máximo relativo en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e^{1/2}}\right)$

b) Para calcular el área, planteamos la siguiente integral:
$A = \int_0^a xe^{-x^2}dx$

Esta integral es inmediata, sólo nos faltaría multiplicar y dividir por -2

$A = \int_0^a xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^a -2xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^a = -\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-a^2} - 1\right)u^2$

Imponemos la condición de que el área debe de ser $\frac{1}{4}\,u^2$

$-\frac{1}{2}\left(e^{-a^2} - 1\right) = \frac{1}{4};$

$e^{-a^2} - 1 = -\frac{1}{2};$

$e^{-a^2} = \frac{1}{2};$

$\ln e^{-a^2} = \ln\frac{1}{2};$

$-a^2 \cdot \ln e = \ln 1 - \ln 2\,;$

$a^2 = \ln 2\,;$

$a = \pm\sqrt{\ln 2}\,;$

Descartamos la solución negativa puesto que el enunciado del problema nos dice que $a > 0$

Así que la solución del problema es:

$$\boldsymbol{a = \sqrt{\ln 2}}$$

Problema B.3:

Calcula, en grados, los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Solución:

Vamos a definir las variables del problema.

$x = ángulo\ menor$

$y = ángulo\ mediano$

$z = ángulo\ mayor$

Como el ángulo menor es la mitad del ángulo mayor, deducimos que $\boxed{x = \frac{z}{2}}$ (1)

La suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo (ángulo mediano), esto es

$\boxed{\frac{z}{2} + z = 2y}$ (2)

Nos faltaría una tercera ecuación para formar nuestro sistema. Como sabemos que los ángulos de un triángulo suman 180° deducimos que $\boxed{\frac{z}{2} + z + y = 180}$ (3)

Sustituyendo (2) en (3) obtenemos:

$2y + y = 180$;

$3y = 180$;

$y = \frac{180}{3} = 60$;

Sustituimos $y = 60$ en (2)

$\frac{z}{2} + z = 120$;

$\frac{3}{2}z = 120$;

$z = 80$;

Por último, sustituimos $z = 80$ en (1)

$z = \frac{80}{2} = 40$

Por tanto, los ángulos que nos piden son:

$\mathbf{80°, 60°\ y\ 40°}$

Problema B.4:

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2}$ *y* $s \equiv \frac{z+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$

a) *Halla* k *sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.*
b) *Para* $k = 1$, *halla la ecuación general del plano que contiene a* r *y es paralelo a* s.

Solución:

a) La información que obtenemos de las rectas es:

$$r: \begin{cases} Punto\ A(2, k, 0) \\ vector\ director\ \overrightarrow{v_r} = (1, 2, 2) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} Punto\ B(-1, 1, 3) \\ vector\ director\ \overrightarrow{v_s} = (-1, 1, 1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-3, 1-k, 3)$$

Para que las rectas se corten debe de ocurrir que $rg\begin{pmatrix} \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{v_s} \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{v_s} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = 2$

Construimos las matrices correspondientes y le estudiamos el rango a cada una, imponiendo que ambas tengan rango 2.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1-k & 3 \end{pmatrix}$$

Observamos el que el menor formado por la primera y segunda columna de M tiene determinante distinto de 0, lo que implica que el rango de M es 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 2$$

Para que M' tenga rango 2, su determinante debe de ser 0. Veámoslo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1-k & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 + 2k - 6 - (-6 + 1 - k - 6) = \cdots = 3k + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{k = -2}$$

$\boldsymbol{k = -2}$ para que r y s se corten.

b) Como nos dice el enunciado que r está contenido en el plano que buscamos, uno de los vectores directores de éste es $\overrightarrow{v_r} = (1, 2, 2)$ y un punto del plano sería el mismo punto de la recta r, $A(2, 1, 0)$.
Por otro lado, como el plano es paralelo a la recta s, podemos tomar $\overrightarrow{v_s} = (-1, 1, 1)$ como el segundo vector director del plano.
Con estos elementos, calculamos la ecuación general del plano, que denominaré π.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;$$

$$\pi \equiv z + 2x - 4 - 2y + 2 - (2x - 4 + y - 1 - 2z) = 0\ ;$$

$$\pi \equiv -3y + 3z + 3 = 0\ ;$$

Por tanto, el plano que buscamos es $\pi \equiv \boldsymbol{-y + z + 1 = 0}$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Aragón

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa Asso

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

a) (*2 puntos*) Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k.

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

b) (*1 punto*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando k=1.

Problema A.2:

a) (*1 punto*) Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados A:(1, 1,2), B: (2, 2, 2) y C:(−1, a, b) y determine la recta que los contiene.

b) (*0,5 puntos*) Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calcule el vector

$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})$$

Donde el símbolo “×” representa el producto vectorial.

Problema A.3:

a) *(1.5 puntos)* Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos (0, 0), (a, 0), (0, b) y (a, b), donde a > 0 y b > 0 y además el punto (a, b), está situado en la curva de ecuación:

$$y = \frac{1}{x^2} + 9$$

De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

b) *(1 punto)* Determine

$$\int \frac{1}{9-x^2}\,dx$$

c) *(1.5 puntos)* Determine el valor de la constante k para que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1} = 2$$

Problema A.4:

Se dispone de dos cajas, la caja A contiene 3 bolas moradas y 2 bolas rojas; mientras que la caja B contiene 4 bolas moradas y 4 rojas.

a) (*0.75 puntos*) Se escoge una bola cualquiera de la caja A y se pasa a la caja B. Posteriormente se saca una bola de la caja B. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la caja B sea morada?

b) (*0.75 puntos*) Ahora volvemos a la situación original de las cajas; la A contiene 3 moradas y 2 rojas y la B contiene 4 moradas y 4 rojas. Seleccionamos una caja al azar y se saca una bola que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea de la caja A?

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

a) (*1.5 puntos*) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

b) (*1.5 puntos*) Sabiendo que $a = -2$, calcule el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

Problema B.2:

a) (*1 punto*) Determine la ecuación del plano determinado por el punto P: (2, 1, 2) y la recta r: (1, 0, 0) + t (−1, 1 ,1).

b) (*0.5 puntos*) Dados los vectores $\vec{u}(1, 2, 0)$, $\vec{v}(2, 1, -3)$determine el área del triángulo que tiene por lados esos dos vectores.

Problema B.3:

Considere la función: $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$

a) (*1.5 puntos*) Determine las asíntotas de la función, si existen.

b) (*1 punto*) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.

c) (*1.5 puntos*) Determine la integral $\int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx$

Problema B.4:

La probabilidad de que una persona escriba un mensaje de Twitter sin faltas de ortografía es 0.75. Se sabe además que una persona escribe a lo largo del día 20 mensajes de Twitter.

A partir de esta información, responde a las siguientes cuestiones. NO es necesario finalizar los cálculos en ninguna de ellas, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen.

a) (*0.5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los mensajes escritos en un día, es decir 10, no tengan faltas de ortografía?

b) (*0.5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún mensaje de los 20 escritos en un día tenga faltas de ortografía?

c) (*0.5 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que 18 o más mensajes de los 20 escritos en un día sí tengan faltas de ortografía?

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

a) Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k.

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

b) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $k = 1$.

Solución

a) Si $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$ $\quad Det\ A = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{vmatrix} = k^3 + 3k^2 + 2k$

$$Det\ A = k(k+1)(k+2) = 0 \Leftrightarrow \quad k = 0\,, k = -1 \ o\ k = -2.$$

- Si $k \neq 0\,, k \neq -1\ y\ k \neq -2$ existe un menor de orden 3 (máximo posible) distinto de 0 que es $Det\ A \Rightarrow$ rango A = 3
- Si $k = 0$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ rango $A \neq 3$. El menor de A $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2.

- Si $k = -1$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ rango $A \neq 3$. El menor de A $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2.

- Si $k = -2$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ rango $A \neq 3$. El menor de A $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2.

Si $\boldsymbol{k \neq 0,\ k \neq -1}$ y $\boldsymbol{k \neq -2}$	$\boldsymbol{rg(A) = 3}$
Si $\boldsymbol{k = 0,\ k = -1}$ y $\boldsymbol{k = -2}$	$\boldsymbol{rg(A) = 2}$

b) Para $k = 1$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ A es regular ya que $Det\ A = 6$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{Det\ A}(Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} \frac{9}{6} & 0 & \frac{-3}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-3}{6} & 0 & \frac{3}{6} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{3}{2}} & \boldsymbol{\frac{1}{6}} & \boldsymbol{\frac{-1}{2}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\frac{1}{3}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\frac{-1}{2}} & \boldsymbol{\frac{-1}{6}} & \boldsymbol{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Problema A.2:

a) Determine el valor de las constantes a y b para que los puntos siguientes estén alineados A: (1, 1, 2), B: (2, 2, 2) y C: (−1, a, b) y determine la recta que los contiene.

b) Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calcule el vector

$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})$$

Donde el símbolo "×" representa el producto vectorial.

Solución

a) La recta r_{AB} que pasa por A y B está determinada por pasar por A (1, 1, 1) y ser paralela al vector $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=\ (1,1,0)$. Sus ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = 2 \end{cases}$$

A, B, C están alineados $\Leftrightarrow\ C\in r_{AB}\ \Leftrightarrow\ \exists_1\alpha\in R\ /\ -1=1+\alpha \quad a=1+\ \alpha \quad b=2$

Luego A, B, C están alineados $\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{a=\ -1}$; $\boldsymbol{b=2}$ para que los tres puntos estén alineados

b) $(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})=\ \vec{0}$

Si $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\ \ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, el vector $\vec{u}-\vec{v}=(u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3)$

$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1-v_1 & u_2-v_2 & u_3-v_3 \\ u_1-v_1 & u_2-v_2 & u_3-v_3 \end{vmatrix}= 0\,\vec{\imath}+0\,\vec{\jmath}+0\vec{k}=\vec{0}.$$

$$\boldsymbol{(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})\ =\ 0\vec{\imath}+0\,\vec{\jmath}+0\vec{k}=\vec{0}}$$

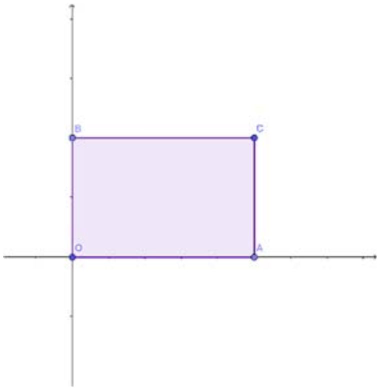
Problema A.3:

a) Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos (0, 0), $(a, 0)$, $(0, b)$ y (a, b), donde $a > 0$ y $b > 0$ y además el punto (a, b), está situado en la curva de ecuación: $y = \frac{1}{x^2} + 9$. De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

b) Determine: $\int \frac{1}{9-x^2}dx$

c) Determine el valor de la constante k para que $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1} = 2$

Solución



a) $(a, b) \in$ curva $y = \frac{1}{x^2} + 9 \Rightarrow b = \frac{1}{a^2} + 9$

Área = $A = a\,b = a\left(\frac{1}{a^2} + 9\right) = \frac{1+9a^2}{a}$ es una función continua y derivable en su dominio R- $\{0\}$, luego podemos encontrar sus extremos relativos a partir de los valores que anulan su derivada

$$A' = \frac{9a^2 - 1}{a^2} \qquad A'' = \frac{2}{a^3}$$

$$A' = 0 \Rightarrow 9a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{3}$$

$A''\left(\frac{1}{3}\right) = 54 > 0 \Rightarrow$ En $a = \frac{1}{3}$; b = (1/9) + 9 = 82/9.

A tiene un mínimo relativo que nos da el área mínima pedida.

El área mínima es $\boldsymbol{A}$ **= 18 u²**, en $\boldsymbol{a} = \frac{1}{3}$; $\boldsymbol{b}$ **= 82/9**.

b) $9 - x^2$ tiene dos raíces reales 3 y -3 por lo que $\frac{1}{9-x^2}$ se descompone en fracciones simples como $\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$

$$I = \int \frac{1}{9-x^2}dx = \int \frac{A}{x-3}dx + \int \frac{B}{x+3}dx = ALn|x-3| + BLn|x+3| + C$$

$$\frac{1}{9-x^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x + 3A - 3B}{x^2-9} = \frac{-1}{x^2-9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 3A - 3B = -1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{6} \quad B = \frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{I} = \int \frac{1}{9-x^2}dx = -\frac{1}{6}Ln|x-3| + \frac{1}{6}Ln|x+3| + C = \boldsymbol{Ln}\sqrt[6]{\left|\frac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{x-3}}\right|} + \boldsymbol{C}$$

c) Debemos encontrar una indeterminación inicial $\frac{0}{0}$ en el cálculo de $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}$ para que el límite pueda ser 2 $\Rightarrow \lim_{x\to 1}(x^3 + x^2 + kx + 3) = 5 + k = 0 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{k = -5}$$

Comprobemos el resultado

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+3)}{(x-1)^2(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+3)}{(x+1)} = \frac{4}{2} = 2$$

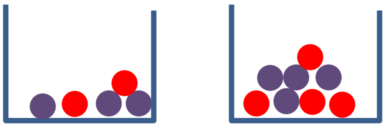
Problema A.4:

Se dispone de dos cajas, la caja A contiene 3 bolas moradas y 2 bolas rojas; mientras que la caja B contiene 4 bolas moradas y 4 rojas.

a) Se escoge una bola cualquiera de la caja A y se pasa a la caja B. Posteriormente se saca una bola de la caja B. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la caja B sea morada?

b) Ahora volvemos a la situación original de las cajas; la A contiene 3 moradas y 2 rojas y la B contiene 4 moradas y 4 rojas. Seleccionamos una caja al azar y se saca una bola que resulta ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea de la caja A?

Solución



A B

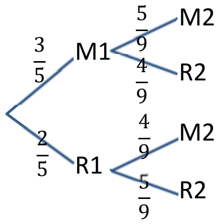
a) Sean los sucesos:

$M1$ = "La primera bola extraída es morada"

$R1$ = "La primera bola extraída es roja"

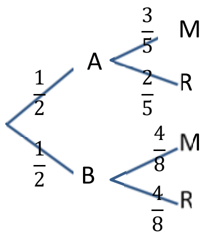
$M2$ = "La segunda bola extraída es morada"

$R2$ = "La segunda bola extraída es roja"



$$P(M2) = P(M2/M1)\cdot P(M1) + P(M2/R1)\cdot P(R1) = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9} + \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{9} = \frac{23}{45}.$$

La probabilidad de que la segunda bola extraída sea morada es $\frac{23}{45}$.



b) Sean los sucesos

A = "La urna elegida es A"

B = "La urna elegida es B"

M = "La bola extraída es morada"

R = "La bola extraída es roja"

$$\boldsymbol{P(A/R) = \frac{P(R/A)\cdot P(A)}{P(R/A)\cdot P(A) + P(R/B)\cdot P(B)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{8}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{4}{9}}$$

La probabilidad de que esa bola sea de la caja A es $\boldsymbol{P(A/R) = \frac{4}{9}}$.

SOLUCIONES OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

a) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

b) Sabiendo que $a = -2$, calcule el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

Solución

a) x = número de deportistas esquí alpino

y = número de deportistas esquí nórdico

z = número de deportistas escalada.

$$S \equiv \begin{cases} x+y+z=60 \\ x=y+z-16 \\ x+z=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=60 \\ x-y-z=-16 \\ x-3y+z=0 \end{cases}$$

$$A{:}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & -1 & -16 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3'=F3-F1]{F2'=F2-F1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -2 & -2 & -76 \\ 0 & -4 & 0 & -60 \end{pmatrix}$$

S es equivalente al sistema triangular

$$S' \equiv \begin{cases} x+y+z=60 \\ -2y-2z=-76 \\ -4y=-60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=60-15-23=22 \\ z=38-15=23 \\ y=15 \end{cases}$$

La solución es: 22 deportistas de esquí alpino, 15 de esquí nórdico y 23 de escalada

$$b)\ \Delta_a = \begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{2^{a}\ columna \\ suma\ de \\ dos\ vectores}} \begin{vmatrix} a & a & a-c \\ 2a & 3a & 4a-2c \\ 3a & 6a & 10a-3c \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ 2a & 2b & 4a-2c \\ 3a & 3b & 10a-3c \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ primera\ y 2^{a}\ columnas \\ son\ proporcionales}} =$$

$$\begin{vmatrix} a & a & a-c \\ 2a & 3a & 4a-2c \\ 3a & 6a & 10a-3c \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{3^{a}\ columna \\ suma\ de \\ dos\ vectores}} \begin{vmatrix} a & a & a \\ 2a & 3a & 4a \\ 3a & 6a & 10a \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & a & -c \\ 2a & 3a & -2c \\ 3a & 6a & -3c \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ primera\ y 3^{a}\ columnas \\ son\ proporcionales}} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 2a & 3a & 4a \\ 3a & 6a & 10a \end{vmatrix} =$$

$$= a.a.a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{F2'=F2-2F1 \\ F3'=F3-3F1}} a^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{F3''=F3'-3F2} a^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^3$$

El valor del determinante para $a = -2$ es $\Delta_{-2} = (-2)^3 = \mathbf{-8}$.

Problema B.2:

a) Determine la ecuación del plano determinado por el punto P:(2, 1, 2) y la recta r:(1, 0, 0) + t (−1, 1, 1).

b) Dados los vectores $\vec{u}(1,2,0)$, $\vec{v}(2,1,-3)$determine el área del triángulo que tiene por lados esos dos vectores.

Solución

a) El plano π pasa por $P(2,1,2)$ contiene a $r \equiv y = (1,0,0) + t(-1,1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} r \subset \pi \Rightarrow A(1,0,0) \in \pi \;\; y \; \vec{v}(-1,1,1) \text{ es una dirección contenida en el plano} \\ P, A \in \pi \Rightarrow \overrightarrow{AP} = (1,1,2) \text{ es una dirección contenida en el plano} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La ecuación del plano es

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \pi \equiv x + 3y - 2z - 1 = 0$$

El plano determinado por el punto P(2, 1, 2) y la recta r: (1, 0, 0) + t (−1, 1, 1) es $\boldsymbol{x + 3y - 2z - 1 = 0.}$

b) El área del triángulo que determinan los vectores $\vec{u}(1,2,0)$, $\vec{v}(2,1,-3)$ es la mitad del módulo de su producto vectorial

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-6,\ 3, -3) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; \acute{A}rea\ \Delta_{\vec{u}\vec{v}} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{54}\ \text{u}^2 = \frac{3}{2}\sqrt{6}\ \text{u}^2.$$

El área del triángulo, que tiene por lados esos dos vectores, es: $\boldsymbol{\acute{A}rea}\ \Delta_{\vec{u}\vec{v}} = \frac{3}{2}\sqrt{6}\ \mathbf{u^2}$.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.3:

Considere la función: $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$

a) Determine las asíntotas de la función, si existen.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.

c) Determine la integral $\int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx$

Solución

a) $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ $\quad Dom\, f = \Re - \{-1\}$

- $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0} = -\infty$ $\quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0} = -\infty \Rightarrow$

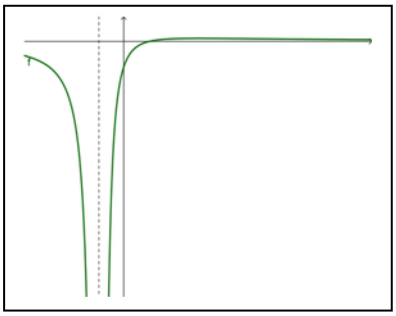
$\Rightarrow$ La recta $x = -1$ es una asíntota vertical

- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{-\infty}{\infty} = 0$ $\quad \lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{\infty}{\infty} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal

- Dado que hay asíntotas horizontales, no hay oblicuas.

Las asíntotas son: $\boldsymbol{x = -1}$, que es una asíntota vertical, e $\boldsymbol{y = 0}$, que es una asíntota horizontal.



b) $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ $\quad \Rightarrow f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1)(x-1)}{(x+1)^4} = \frac{x+1-2(x-1)}{(x+1)^3} = \frac{3-x}{(x+1)^3}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$. En (3, 1/8) f tiene un máximo relativo.

$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, \infty)$	
-	∄	+	0	-	SIGNO f'
Decreciente	∄	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	MONOTONÍA DE f

c) $\frac{x-1}{(x+1)^2}$ se descompone en fracciones simples como $\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$ ya que su denominador tiene una raíz real doble.

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$$

$$\int_1^3 \frac{x-1}{(x+1)^2} dx = \int_1^3 \frac{1}{x+1} dx + \int_1^3 \frac{-2}{(x+1)^2} dx = \left[Ln|x+1| - 2\frac{(x+1)^{-1}}{-1} \right]_1^3 =$$

$$= \left[Ln|x+1| + 2\frac{1}{x+1} \right]_1^3 = \boldsymbol{Ln2} - \frac{1}{2}$$

Problema B.4:

La probabilidad de que una persona escriba un mensaje de Twitter sin faltas de ortografía es 0.75. Se sabe además que una persona escribe a lo largo del día 20 mensajes de Twitter.
A partir de esta información, responde a las siguientes cuestiones. NO es necesario finalizar los cálculos en ninguna de ellas, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los mensajes escritos en un día, es decir 10, no tengan faltas de ortografía?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún mensaje de los 20 escritos en un día tenga faltas de ortografía?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que 18 o más mensajes de los 20 escritos en un día sí tengan faltas de ortografía?

Solución:

El experimento aleatorio "una *persona escribe un mensaje de Twitter y se observa si comete o no faltas de ortografía al escribir un mensaje de Twitter"* es una prueba de Bernoulli.

Sea *"éxito" = "la persona no comete faltas de ortografía al escribir un mensaje de Twitter"* $p = 0.75$

Se repite 20 veces este experimento. Las pruebas son independientes.

Entonces la variable aleatoria X = *"nº de éxitos" = "número de veces que la persona no comete faltas de ortografía al escribir un mensaje al escribir un mensaje de Twitter",* es una variable binomial

$$X = B(20, 0.75) \text{ con función de probabilidad } P(X = k) = \binom{20}{k} \cdot 0.75^k \cdot 0.25^{n-k}$$

a) $P(X = 10) = \binom{20}{10} \cdot 0.75^{10} \cdot 0.25^{10} = \frac{20!}{10!10!} \cdot 0.75^{10} \cdot 0.25^{10} = 184756 \cdot 0.75^{10} \cdot 0.25^{10} \sim 0.0099.$

$$\boldsymbol{P(X = 10) \sim 0.0099}.$$

b) $P(X = 20) = \binom{20}{20} \cdot 0.75^{20} \cdot 0.25^{0} = \frac{20!}{20!0!} \cdot 0.75^{20} \sim 0.0032.$

$$\boldsymbol{P(X = 20) \sim 0.0032}.$$

c) Si 18 o más mensajes de Twitter de los 20, tienen faltas de ortografía, entonces el número de mensajes que no contienen faltas es menor o igual a 2:

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \binom{20}{0} \cdot 0.75^0 \cdot 0.25^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0.75^1 \cdot 0.25^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0.75^2 \cdot 0.25^{18} =$$

$$= \frac{20!}{0!\,20!} \cdot 0.25^{20} + \frac{20!}{1!\,19!} \cdot 0.75^1 \cdot 0.25^{19} + \frac{20!}{2!\,18!} \cdot 0.75^2 \cdot 0.25^{18} \sim$$

$$\sim 9 \cdot 10^{-13} + 5.45 \cdot 10^{-11} + 1.55 \cdot 10^{-9} \sim 1.6 \cdot 10^{-9}$$

$$\boldsymbol{P(X \le 2) = 1.6 \cdot 10^{-9}}.$$

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

c) (*1.5 puntos*) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde *k* es un parámetro real:

$$\begin{cases} 2x - y + kz = 1 \\ -x + y - kz = 0 \\ 2x - ky + 2kz = -1 \end{cases}.$$

Determine los valores del parámetro real *k*, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

d) (*1.5 puntos*) Resuelva el sistema cuando $k = 1$.

Problema A.2:

c) (*0.75 puntos*) Determine el volumen determinado por los siguientes vectores $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (2,1,0)$ y $\vec{w}$, siendo $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, y donde el símbolo "×" representa el producto vectorial.

d) (*0.75 puntos*) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $P: (1,3,2)$ y es perpendicular a la recta

$$r: \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Problema A.3:

d) *(1 punto)* Determine el límite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)} - \frac{1}{x} \right)$$

e) *(1 punto)* Determine el valor de la constante *k* para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ k - x & si\ x = 1 \end{cases}$$ sea continua *en x = 1*

f) *(2 puntos)* La curva $y = x^2 + 1$ divide al rectángulo limitado por los puntos $A: (0,1)$, $B: (2,1)$, $C: (0,5)$ y $D: (2,5)$ en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

Problema A.4:

Una encuesta realizada sobre el mes preferido, entre julio, agosto o septiembre, para salir de vacaciones arrojó los siguientes datos: un 40% prefiere julio, un 30 % agosto y el resto prefiere el mes de septiembre. Entre los que prefieren el mes de julio, un 60% pasa sus vacaciones en un hotel; entre los que prefieren el mes de agosto un 40 % elige hotel para sus vacaciones y entre los encuestados que prefieren septiembre, un 65 % eligen hotel.

c) (*0.5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.

d) (*0.5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.

e) (*0.5 puntos*) Se elige un individuo al azar y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

a) (*1.5 puntos*) Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$$

b) (*1.5 puntos*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m = -1$

Problema B.2:

(*1.5 puntos*) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r: \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4y + 3z = 5 \end{cases}$$

y pasa por el punto $A: (1, 3, -1)$.

Problema B.3:

a) (*1.5 puntos*) Considere la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^2 + 2}$$

Determine el valor de k para que la función $f(x)$ tenga como asíntota oblicua si $x \to +\infty$, la recta $y = 2x - 1$.

b) (*1.5 puntos*) Determine

$$\int x(\ln(x))^2 dx$$

c) (*1.5 puntos*) Determine , si existen los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$$

Problema B.4:

Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.

a) (*0.75 puntos*) Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).

b) (*0.75 puntos*) Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRORDINARIA DE SEPTIEMBRE

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

a) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real:

$$\begin{cases} 2x - y + kz = 1 \\ -x + y - kz = 0 \\ 2x - ky + 2kz = -1 \end{cases}.$$

Determine los valores del parámetro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) Resuelva el sistema cuando $k = 1$.

Solución:

a) $S \equiv \begin{cases} 2x - y + kz = 1 \\ -x + y - kz = 0 \\ 2x - ky + 2kz = -1 \end{cases}$ Las matrices de coeficientes A y ampliada $A : B$ del sistema S son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 1 & -k \\ 2 & -k & 2k \end{pmatrix} \qquad A : B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \\ 2 & -k & 2k & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 1 & -k \\ 2 & -k & 2k \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -k & 2 \end{vmatrix} = k(2-k);\ |A| = 0 \Leftrightarrow k(2-k) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \text{ ó } k = 2$$

- Si $k \neq 0$ y $k \neq 2$ $|A|$es un menor de orden 3 no nulo, tanto de A como de $A{:}B \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Rango A = Rango $A : B$ = 3 = nº incógnitas $\Rightarrow S$ es compatible determinado.
- Si $k = 0$ $|A| = 0 \Rightarrow$ Rango $A \neq 3$ y el menor de orden 2 de A: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Rango A = 2
  $A : B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ El menor de $A : B$: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Rango $A : B$ =3; Rango $A \neq$ Rango $A : B \Rightarrow S$ es incompatible
- Si $k = 2$ $|A| = 0 \Rightarrow$ Rango $A \neq 3$ y el menor de orden 2 de A: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Rango A = 2
  $A : B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ El menor de $A : B$: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow$ Rango $A : B$ = 3; Rango $A \neq$ Rango $A : B \Rightarrow S$ es incompatible.

Si $k \neq 0$, y $k \neq 2$	**Compatible determinado**
Si $k = 0$	**Incompatible**
Si $k = 2$	**Incompatible**

b) Si $k = 1$ el sistema es compatible determinado con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, es entonces un sistema de Cramer

$$A : B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{1} = 1,\quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{1} = -1,\quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\boldsymbol{x = 1, y = -1, z = -2}$$

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.2:

a) Determine el volumen determinado por los siguientes vectores $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (2,1,0)$ y $\vec{w}$, siendo $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, y donde el símbolo "×" representa el producto vectorial.

b) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $P: (1,3,2)$ y es perpendicular a la recta

$$r: \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

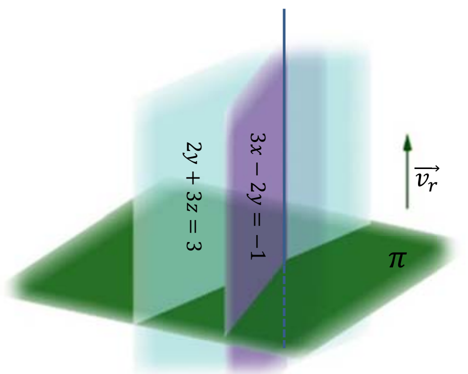
Solución:

a) Si $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (2,1,0)$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,\ 2, -1)$$

El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ es el valor absoluto del producto mixto de estos tres vectores:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$



Volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *es* **6 u³**

b) El vector director de *r*, $\vec{v_r}$,es perpendicular al plano buscado

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-6, -9,\ 6) \quad \text{paralelo a } (2,3,-2)$$

$\pi \equiv 2x + 3y - 2z + D = 0$ y el punto $P(1,3,2) \in \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 2.1 + 3.3 - 2.2 + D = 0 \ \Rightarrow D = -7$

Luego el plano, que pasa por el punto $P: (1,3,2)$ y es perpendicular a la recta, tiene por ecuación:

$$\boldsymbol{\pi \equiv 2x + 3y - 2z - 7 = 0}$$

Problema A.3:

a) Determine el límite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)}-\frac{1}{x}\right)$$

b) Determine el valor de la constante k para que la función

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^4-1}{x-1} & si\ x\neq 1\\ k-x & si\ x=1\end{cases}$$ sea continua *en x = 1*

c) La curva $y=x^2+1$ divide al rectángulo limitado por los puntos $A:(0,1)$, $B:(2,1)$, $C:(0,5)$ y $D:(2,5)$ en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

Solución:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-\ln((1+x)^2)}{x\ln((1+x)^2)}\right)=\frac{0}{0}\underset{L'Hôpital}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-\frac{2(1+x)}{(1+x)^2}}{\ln((1+x)^2)+x\,\frac{2(1+x)}{(1+x)^2}}\right)=$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-\frac{2}{1+x}}{\ln((1+x)^2)+\frac{2x}{1+x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2(1+x)-2}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln((1+x)^2)+2x}{1+x}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(1+x)ln((1+x)^2)+2x}=\frac{0}{0}\underset{L'Hôpital}{=}$

$\underset{L'Hôpital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2}{ln((1+x)^2)+(1+x)\,\frac{2(1+x)}{(1+x)^2}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{ln((1+x)^2)+2+2}=\frac{2}{\ln 1+2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}}.$$

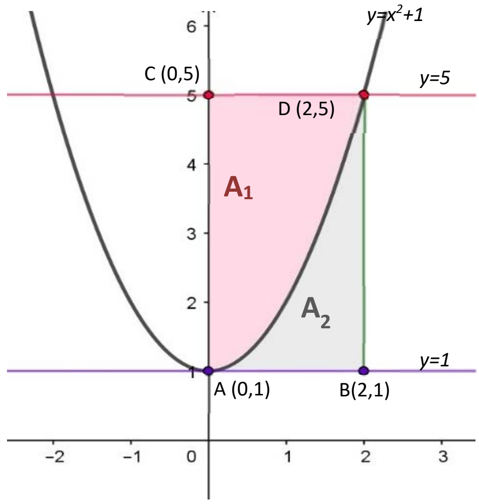
b) $f(x)$ continua en $x=1\Rightarrow\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^4-1}{x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^3+x^2+x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x^3+x^2+x+1)=4=\lim_{x\to 1^+}f(x)$$

$$f(1)=k-1$$

$f(x)$ continua en $x=1\Rightarrow k-1=4\Rightarrow k=5.$

Para que la función sea continua en x = 1, debe ser $\boldsymbol{k}$= 5.



c) Llamemos A_1 al área del recinto ACD, determinado por la recta de ecuación $y=5$ y la parábola de ecuación $y=x^2+1$. Y sea A_2 el área del recinto ADB, determinado por la misma parábola y la recta $y=1$

$$A_1=\int_0^2 5dx-\int_0^2(x^2+1)dx=\left[5x-\frac{x^3}{3}-x\right]_0^2=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=8-\frac{8}{3}=\boldsymbol{\frac{16}{3}\ u^2}.$$

$$A_2=\int_0^2(x^2+1)dx-\int_0^2 1dx=\left[\frac{x^3}{3}+x-x\right]_0^2=\boldsymbol{\frac{8}{3}\ u^2}.$$

Problema A.4:

Una encuesta realizada sobre el mes preferido, entre julio, agosto o septiembre, para salir de vacaciones arrojó los siguientes datos: un 40 % prefiere julio, un 30 % agosto y el resto prefiere el mes de septiembre. Entre los que prefieren el mes de julio, un 60 % pasa sus vacaciones en un hotel; entre los que prefieren el mes de agosto un 40 % elige hotel para sus vacaciones y entre los encuestados que prefieren septiembre, un 65 % eligen hotel.

a) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.

b) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.

c) Se elige un individuo al azar y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

Solución:

Nombramos los sucesos

A_1 = "La persona prefiere el mes de julio para ir de vacaciones" $P(\mathrm{A}_1) = 0.4$

A_2 = "La persona prefiere el mes de agosto para ir de vacaciones" $P(\mathrm{A}_2) = 0.3$

A_2 = "La persona prefiere el mes de septiembre para ir de vacaciones" $P(\mathrm{A}_3) = 0.3$

B = "La persona pasa sus vacaciones en un hotel"

$P(\mathrm{B}/\mathrm{A}_1) = 0.6$ $P(\mathrm{B}/\mathrm{A}_2) = 0.4$ $P(\mathrm{B}/\mathrm{A}_3) = 0.65$

a) Deben suceder a la vez A_2 y B. Por tanto, la probabilidad pedida es:

$P(B \cap A_2) = P(B/A_2) \cdot P(A_2) = 0.4 \cdot\ 0.3 = 0.12$

$$\boldsymbol{P(B \cap A_2) = 0.12.}$$

b) Obtendremos la probabilidad de B utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(B) = P(\mathrm{B}/\mathrm{A}_1) \cdot P(A_1) + P(\mathrm{B}/\mathrm{A}_2) \cdot P(A_2) + P(B/A_3) \cdot P(A_3) =$$

$= 0.6 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.3 + 0.65 \cdot 0.3 = 0.555.$

$$\boldsymbol{P(B) =} 0.555.$$

c) Ha sucedido B^C $P\left({}^{A_2}/{}_{B^c}\right) = \frac{P(A_2 \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{P(A_2) - P(A_2 \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0.3 - 0.12}{1 - 0.555} \sim 0.404$

$$\boldsymbol{P\left({}^{A_2}/{}_{B^c}\right) \sim 0.404}.$$

SOLUCIONES OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

a) Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$$

b) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m = -1$

Solución:

a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$ $\qquad Det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2$

$$Det\ A = m^2 - 3m + 2 = 0 \iff m = 1 \ o\ m = 2$$

- Si $m \neq 1 \ y\ m \neq 2$ existe un menor de orden 3 (máximo posible) distinto de 0 que es $Det\ A \Rightarrow$ rango A = 3
- Si $m = 1$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ rango $A \neq 3$. El menor de A $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2

- Si $m = 2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ rango $A \neq 3$. El menor de A $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2.

Si $m \neq 1 \ y\ m \neq 2$	**$\Rightarrow$ rango A = 3**
Si $m = 1$	**$\Rightarrow$ rango A = 2**
Si $m = 2$	**$\Rightarrow$ rango A = 2.**

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad Det\ A = (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 6$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{Det\ A}(Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{6} & \frac{3}{6} & -\frac{6}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{4}{6} \end{pmatrix}^t = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = A^{-1}}$$

Problema B.2:

Determine la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r: \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4y + 3z = 5 \end{cases}$$

y pasa por el punto $A: (1, 3, -1)$.

Solución:

Si el plano π buscado contiene a la recta $r \Rightarrow$ π pertenece al haz de planos determinado por los planos $\pi_1 \equiv 3x + y + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 4y + 3z - 5 = 0$.

Dado que ninguno de los planos que definen r contiene al punto $A(1, 3, -1) \Rightarrow$

$\exists \alpha \in \Re \,/\quad \pi \equiv 3x + y + 1 + \alpha(4y + 3z - 5) = 0$

$$A \in \pi \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 + 1 + \alpha(4 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) - 5) = 0 \Rightarrow 7 + 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{7}{4}$$

$$\pi \equiv 3x + y + 1 - \frac{7}{4}(4y + 3z - 5) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x + y + 1 - \frac{28}{4}y - \frac{21}{4}z + \frac{35}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 12x - 24y - 21z + 39 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv \mathbf{4x - 8y - 7z + 13 = 0}.$$

Problema B.3:

a) Considere la función: $f(x) = \frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2}$. Determine el valor de k para que la función $f(x)$ tenga como asíntota oblicua si $x \to +\infty$, la recta $y = 2x - 1$.

b) Determine $\int x(\ln(x))^2 dx$

c) Determine, si existen los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$

Solución:

a) $y = 2x - 1$ asíntota oblicua de $f(x)$si $x \to \infty \Rightarrow m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx) = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2} - 2x\right) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+kx^2+x+3-2x^3-4x}{x^2+2}\right) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{kx^2-3x+3}{x^2+2}\right) = k = -1$$

Luego $\boldsymbol{k = -1}$

b) Sea $I = \int x(\ln(x))^2 dx$. Utilizaremos el método de integración por partes

$$\left.\begin{array}{ll} u = (ln(x))^2 & du = \frac{2ln(x)}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} & dv = xdx \end{array}\right\} I = \frac{x^2}{2}(ln(x))^2 - \int \frac{2x^2 ln(x)}{2x}dx = = \frac{x^2}{2}(ln(x))^2 - \underbrace{\int xln(x)dx}_{I_1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} u_1 = ln\,(x) & du_1 = \frac{1}{x}dx \\ v_1 = \frac{x^2}{2} & dv_1 = xdx \end{array}\right\} I = \frac{x^2}{2}(ln(x))^2 - \left(\frac{x^2}{2}ln(x) - \int \frac{x^2}{2x}dx\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2}(ln(x))^2 - \frac{x^2}{2}ln(x) + \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}(ln(x))^2 - \frac{x^2}{2}ln(x) + \frac{x^2}{4} + C.$$

$$I = \int x(\ln(x))^2 dx = \boldsymbol{\frac{x^2}{2}(ln(x))^2 - \frac{x^2}{2}ln(x) + \frac{x^2}{4} + C.}$$

c) $f(x) = \frac{1}{x} + ln(x)$ $\quad f$ es continua y derivable n veces en $(0,\infty)$

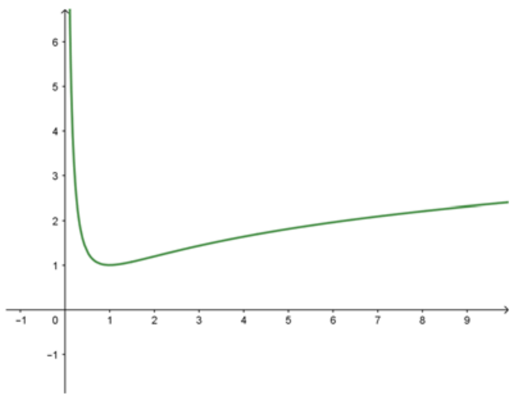
$f´(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$ si $x \in (0,\infty)$ $\quad f´´(x) = \frac{x^2-2x(x-1)}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$ si $x \in (0,\infty)$

$f´(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad f´´(1) = 1 > 0$.

Luego en el punto $(1, f(1)) = (1,1)$ la función tiene un mínimo relativo.

$f´´(x) = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

$(0,2)$	2	$(2,\infty)$	
+	0	-	SIGNO $f´$
Cóncava hacia arriba $\cup$	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo $\cap$	CURVATURA DE f



Luego en el punto $(2, f(2)) = \left(\boldsymbol{2, \frac{1}{2} + ln2}\right)$ la función tiene un punto de inflexión.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.4:

Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.

a) Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).

b) Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

Solución:

El experimento aleatorio "una *persona juega a la ruleta y se observa si gana"* es una prueba de Bernoulli.

Sea "*éxito*" = *"la persona gana"* $p = \frac{12}{25}$

Se repite n veces este experimento. Las pruebas son independientes.

Entonces la variable aleatoria X = *"nº de éxitos"* = *"número de veces que la persona gana"*, es una variable binomial

$$X = B\left(n, \frac{12}{25}\right) \text{ con función de probabilidad } P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{12}{25}\right)^k\left(\frac{13}{25}\right)^{n-k}$$

a) En este caso $X = B\left(100, \frac{12}{25}\right)$ y la probabilidad de que gane exactamente 10 veces:

$$P(X = 10) = \binom{100}{10}\cdot\left(\frac{12}{25}\right)^{10}\cdot\left(\frac{13}{25}\right)^{90} = \frac{100!}{10!.90!}\cdot\frac{12^{10}13^{90}}{25^{100}} \approx 1.7\cdot 10^{13}\cdot 1.8\cdot 10^{-29} \approx 3.10^{-16}$$

$$\boldsymbol{P(X = 10) \approx 3.10^{-16}.}$$

b) $P(90 \le X \le 110) = \sum_{k=90}^{110}\binom{n}{k}\left(\frac{12}{25}\right)^k\left(\frac{13}{25}\right)^{n-k}$ suma de veinte sumandos.

Como $n > 30, np = 96 > 5, nq = 104 > 5$, podemos aplicar el teorema de Moivre - Laplace y obtener esta probabilidad aproximando X a la variable normal $X' = N(np, \sqrt{npq})$, (la aproximación es buena ya que $npq = 200.\frac{12}{25}.\frac{13}{25} = 49.92 > 9$)

$$X' = N(np, \sqrt{npq}) = N\left(200\cdot\frac{12}{25}, \sqrt{49.92}\right) = N(96,\ 7.1)$$

$$P(90 \le X \le 110) = P(89.5 < X' < 110.5) = P\left(\frac{89.5-96}{7.1} < \frac{X'-96}{7.1} < \frac{110.5-96}{7.1}\right) = P(-0.915 < Z < 2.04);$$

$$P(-0.917 < Z < 2.04) = P(Z < 2.04) - P(Z < -0.915) = P(Z < 2.04) - \left(1 - P(Z < 0.915)\right) =$$

$$= 0.9793 - 1 + 0.8186 = 0.7979.$$

$$\boldsymbol{P(90 \le X \le 110) = 0.7979}$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Asturias

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirante

Ver soluciones en la web de la Universidad de Oviedo: www.uniovi.es

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrl} mx & + & y & - & z & =0 \\ 2x & + & my & & & =m \\ x & & & + & mz & =m \end{array}\right\}$ $m \in \mathbb{R}$.

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m. (1.25 puntos)
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $m=1$. (0.75 puntos)
c) Para qué valores de m se tiene la solución $x=0,\ y=1,\ z=1$. (0.5 puntos)

2. Dada la función $f(x)=\dfrac{2}{2+e^x}$.

a) Calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1 punto)
b) Mediante el cambio de variable $t=e^x$, calcula $\displaystyle\int \frac{2}{2+e^x}\,dx$ (1.5 puntos)

3. Sean los planos $\pi_1 : x+y+z=0$ y π_2. Su intersección es la recta $r : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$. Calcula:

a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1,1,1) \in \pi_2$. (1.25 puntos)
b) La ecuación de un plano π_1' paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r. (1.25 puntos)

4. Un monitor de tenis compra un cañón para lanzar bolas. En las especificaciones del cañón se indica que falla el lanzamiento el $10\,\%$ de las veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 bolas lanzadas, se tengan exactamente 5 fallos? (1.25 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho falle 2 veces de los 20 lanzamientos? (1.25 puntos)

Nota: Se pueden dejar indicadas las operaciones en potencias, sin necesidad de realizarlas.

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Razona, sin hacerlos, si son posibles los siguientes productos matriciales y, si es el caso, indica las dimensiones de las matrices resultantes. (1 punto)

$$A \cdot A\,, \quad A \cdot B\,, \quad A \cdot B \cdot C\,, \quad C \cdot D$$

b) Calcula las inversas, si existen, de las matrices cuadradas posibles del apartado anterior. (1.5 puntos)

2. Dada la curva $y = \dfrac{1}{3 + x^2}$.

a) Expresa la función $m(x)$ que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x. (1 punto)
b) Calcula el valor x donde se alcanza la máxima pendiente. (1.5 puntos)

3. Sean los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, -1, -1)$. Calcula:

a) La ecuación del plano π que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él. (1.5 puntos)
b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales. (1 punto)

4. Pedro y Luis son aficionados a los dardos. Pedro acierta en el centro el 10 % de las veces y cada vez que acierta gana 400 €. Luis acierta en el centro el 20 % de las veces y cada vez que acierta gana 100 €. Cuando fallan no ganan ni pierden nada. Tira cada uno dos dardos. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que Luis acierte en el centro las dos veces. (0.75 puntos)
b) Que Pedro acierte en el centro una sola vez. (1 punto)
c) Que entre los dos hayan ganado 600 €. (0.75 puntos)

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

PRUEBA A CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

1. Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrl} mx & + & y & - & z & = 0 \\ 2x & + & my & & & = m \\ x & & & + & mz & = m \end{array}\right\}$ $m \in \mathbb{R}$.

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m.
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $m = 1$.
c) Para qué valores de m se tiene la solución $x = 0,\ y = 1,\ z = 1$.

Solución:

Apartado a

Llamamos $A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 0 \\ 2 & m & 0 & m \\ 1 & 0 & m & m \end{pmatrix}$ a las matrices de coeficientes y ampliada respectivamente.

Calculamos el determinante de la matriz del sistema y lo igualamos a 0.

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = 0$$

Operando resulta $m^3 - m = 0$

Dicha ecuación se resuelve sin dificultad factorizando como $m(m^2 - 1) = 0$ de modo que obtenemos las soluciones: $m = \{0, -1, 1\}$.

Como el sistema es cuadrado, ya tenemos la primera conclusión:

Si $m \notin \{-1, 0, 1\}$ el sistema es compatible y determinado.

Lo más sencillo es hacer cada caso por separado, así trabajamos con números en vez de letras.

Si $m = -1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Haciendo operaciones por filas ($F_2 + 2F_1$y $F_3 + F1$) tenemos que la última fila es igual que la segunda, podemos eliminarla y resulta:

$$rango(B) = rango\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 2 = rango\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = rango(A).$$

Como $rango(A) = rango(B) < 3$ el sistema es compatible indeterminado.

Si $m = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La última columna son ceros por lo que se puede eliminar. $rango(B) = rango\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rango(A) = 2$.

Como $rango(A) = rango(B) < 3$ el sistema es compatible indeterminado.

Si $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Haciendo operaciones por filas ($F_2 - 2F_1$y $F_3 - F1$) tenemos

$rango(B) = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$. Como antes, la última fila es igual que la segunda, podemos eliminarla y resulta:

$rango(B) = rango \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 = rango \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = rango(A)$.

Como $rango(A) = rango(B) < 3$ el sistema es compatible indeterminado.

En resumen:

- Si $\boldsymbol{m} \notin \{-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ el sistema es **compatible y determinado**.
- Si $\boldsymbol{m} \in \{-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ el sistema es **compatible indeterminado**.

Apartado b

En el caso $m = 1$ ya vimos que es compatible indeterminado y por tanto tiene infinitas soluciones. Vimos además que su matriz ampliada es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que el sistema tiene las mismas soluciones que:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -y + 2z = 1 \end{cases}$$

Hay que poner una de las variables como parámetro. Lo más cómodo es z, de modo que hacemos $z = \lambda$

$\begin{cases} x + y - \lambda = 0 \\ -y + 2\lambda = 1 \end{cases}$ De la segunda ecuación obtenemos directamente $y = 2\lambda - 1$ que, llevándola a la primera nos da $x + (2\lambda - 1) - \lambda = 0$ y se obtiene $x = 1 - \lambda$.

La solución general es pues: $(\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda},\ \mathbf{2}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{1},\ \boldsymbol{\lambda})$ con $\lambda \in \Re$ arbitrario.

Apartado c

Sustituimos $x = 0, y = 1, z = 1$ en las ecuaciones del sistema. El sistema es $\begin{cases} 0 = 0 \\ m = m \\ m = m \end{cases}$ de donde deducimos que es solución PARA TODO m.

$\boldsymbol{x = 0, y = 1, z = 1}$ **es solución PARA TODO** $\boldsymbol{m}$.

Problema A.2:

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{2+e^x}$.

a) Calcula su dominio de definición y sus asíntotas.

b) Mediante el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\displaystyle\int \frac{2}{2+e^x}\,dx$

Solución:

Apartado a

La función $f(x) = \frac{2}{2+e^x}$ solo puede no estar definida si se anulara el denominador, puesto que la función exponencial es válida para todos los reales.

Pero $2 + e^x = 0$ solamente si $e^x = -2$ lo que es imposible porque la exponencial es siempre positiva. Por tanto, **su dominio son todos los reales**.

Como es una función continua y su dominio es $\Re$ no tiene asíntotas verticales. Veamos las horizontales.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2+e^x} = \frac{2}{2+\infty} = \frac{2}{+\infty} = 0$ Asíntota horizontal en ∞. Por tanto, no hay asíntota oblicua en ese lado.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{2+e^x} = \frac{2}{2+0} = 1$ Asíntota horizontal en $-\infty$. Así pues, tampoco no hay asíntota oblicua en ese lado.

En resumen, el dominio es todo el campo real, no hay asíntotas verticales ni oblicuas. Las rectas $\boldsymbol{y = 0}$ e $\boldsymbol{y = 1}$ son asíntotas horizontales en $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente.

Apartado b

Nos sugieren el cambio $t = e^x$ y tenemos pues $dt = e^x dx$ es decir $dx = \frac{dt}{t}$. Sustituyendo en la integral $\int \frac{2}{2+e^x}dx = \int \frac{2}{2+t}\frac{dt}{t}$. Descomponemos en fracciones simples:

$2 = A(t+2) + Bt = (A+B)t + 2A$

Como $2A = 2$ tenemos $A = 1$ y al ser $A + B = 0$ concluimos $B = -1$. De este modo

$\frac{2}{t(2+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}$ y $\int \frac{2}{t(2+t)}dt = \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{t+2}dt = \ln|t| - \ln|t+2| + C$ donde $\ln$ es el logaritmo neperiano y C es la constante de integración.

Deshaciendo del cambio es

$\int \frac{2}{t(2+t)}dt = \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{t+2}dt = \ln|t| - \ln|t+2| + C = \ln|e^x| - \ln|e^x + 2| + C.$

Nótese que los valores absolutos son superfluos porque ambas funciones son positivas. Podemos escribir $\ln(e^x) - \ln(e^x + 2) + C$ o bien $\ln(\frac{e^x}{e^x+2}) + C$.

$$\boldsymbol{\int \frac{2}{2+e^x}dx = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+2}\right) + C}$$

Otra posibilidad es usar que $\ln(e^x) = x$ y quedaría $\int \frac{2}{2+e^x}dx = x - \ln(e^x + 2) + C$.

Es fácil comprobar, derivando, que todas son primitivas válidas.

Problema A.3:

3. Sean los planos $\pi_1 : x+y+z=0$ y π_2. Su intersección es la recta $r : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$. Calcula:

a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1,1,1) \in \pi_2$. (1.25 puntos)

b) La ecuación de un plano π_1' paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r. (1.25 puntos)

Solución:

Apartado a

Tres puntos determinan un plano. Tenemos uno, el punto $A(1, 1, 1)$ y una recta contenida. Solo necesitamos dos puntos de la recta y nos valen dos cualesquiera.

Hay muchas maneras. Por ejemplo, dándole valores a una variable y resolviendo para las demás. Si el problema se complica con una variable, podemos probar con otra.

Haciendo $z = 0$ obtenemos $x = y = 0$, el punto $B(0, 0, 0)$.

Haciendo $z = 1$ obtenemos $x = -1, y = 0$, el punto $C(-1, 0, 1)$

Ya solo tenemos que hacer el plano que pasa por tres puntos.

Tenemos pues dos vectores del plano $\overline{\boldsymbol{BA}} = (1, 1, 1)$ y $\overline{\boldsymbol{BC}} = (-1, 0, 1)$.

El plano, en ecuación de determinante, es: $\pi_2 : \left\{ \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \right\}$

Desarrollando, se obtiene sin dificultad la ecuación implícita:

$$\pi_2 : \boldsymbol{x - 2y + z = 0.}$$

Apartado b

Si es paralelo a π_1, será de la forma $\pi'_1 : x + y + z = D$. El problema consiste, pues, a calcular D.

Como una de las ecuaciones de la recta r es la del plano $\pi_1$ambos son paralelos y a su vez paralelos a π'_1.

La distancia de la recta al plano es pues la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. El punto más fácil de la recta es el origen.

$$\sqrt{3} = d(r, \pi'_1) = \left| \frac{0+0+0-D}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \right| = \left| \frac{D}{\sqrt{3}} \right|.$$

Hay dos soluciones, 3 y –3.

Por tanto, son dos los planos $\pi'_{1A} : \boldsymbol{x + y + z = 3}$ y $\pi'_{1B} : \boldsymbol{x + y + z = -3}$.

Lo cual es lógico, habrá uno a cada lado.

Problema A.4:

4. Un monitor de tenis compra un cañón para lanzar bolas. En las especificaciones del cañón se indica que falla el lanzamiento el 10 % de la veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 bolas lanzadas, se tengan exactamente 5 fallos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho falle 2 veces de los 20 lanzamientos?

Nota: Se pueden dejar indicadas las operaciones en potencias, sin necesidad de realizarlas.

Solución:

Apartado a

Llamemos X a la variable aleatoria "número de fallos".

Se trata de una variable binomial de parámetros 20 y $\frac{10}{100}$ que se denota $\beta(20, \frac{10}{100})$

P(5 fallos) = $P(X = 5)$= $\binom{20}{5} \cdot \left(\frac{10}{100}\right)^5 \cdot \left(\frac{90}{100}\right)^{15} = 15504 \cdot (0.1)^5 \cdot (0.9)^{15} \approx 0.0319$

***P*(5 fallos)** = $\binom{20}{5} \cdot \left(\frac{10}{100}\right)^5 \cdot \left(\frac{90}{100}\right)^{15} \approx \mathbf{0.0319}$

El problema no pide calcular el resultado. Es ambiguo si hace falta desarrollar el número combinatorio.

Apartado b

Es la suma

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{20}{0} \cdot \left(\frac{10}{100}\right)^0 \cdot \left(\frac{90}{100}\right)^{20} + \binom{20}{1} \cdot \left(\frac{10}{100}\right)^1 \cdot \left(\frac{90}{100}\right)^{19} + \binom{20}{2} \cdot (\frac{10}{100})^2 \cdot (\frac{90}{100})^{18}$=

= $(0.1)^0 \cdot (0.9)^{20} + 20 \cdot (0.1)^1 \cdot (0.9)^{19} + 190 \cdot (0.1)^2 \cdot (0.9)^{18}$

que aproximadamente es 0.677.

La probabilidad de que como mucho falle 2 veces en 20 lanzamientos es **0.677**

PRUEBA B: CONVOCATORIA ORDINARIA

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema B.1:

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Razona, sin hacerlos, si son posibles los siguientes productos matriciales y, si es el caso, indica las dimensiones de las matrices resultantes.

$$A \cdot A, \quad A \cdot B, \quad A \cdot B \cdot C, \quad C \cdot D$$

b) Calcula las inversas, si existen, de las matrices cuadradas posibles del apartado anterior.

Solución:

a) Dos matrices con los órdenes de AxB y CxD se pueden multiplicar **si y solamente si** el orden de B es igual al de C. En tal caso la matriz resultante tiene el orden de AxD.

Así pues, como A es de orden 3x3 se puede hacer $A{\cdot}A$ y el resultado es de orden 3x3. Como B es de orden 3x2 se puede también hacer $A{\cdot}B$ y el resultado es de orden 3x2. A su vez, C es de orden 3x1 de modo que no se puede hacer $B{\cdot}C$ y por tanto tampoco $A{\cdot}B{\cdot}C$. Sí se puede hacer $C{\cdot}D$ y el resultado es de orden 3x3.

$$A \cdot A \implies (3, \boxed{3}) \times (\boxed{3}, 3) = (3,3)$$

$$A \cdot B \implies (3, \boxed{3}) \times (\boxed{3}, 2) = (3,2)$$

$$A \cdot B \cdot C \implies (3, \boxed{3}) \times (\boxed{3}, 2) = (3,2) \implies (3, \boxed{2}) \times (\boxed{3}, 1) \quad \textbf{No}$$

$$C \cdot D \implies (3, \boxed{1}) \times (\boxed{1}, 3) = (3,3)$$

b) Las únicas matrices cuadradas son $A{\cdot}A$ y $C{\cdot}D$.

La primera es $A{\cdot}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante, por la regla de Sarrus es 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 1$$

Su matriz adjunta es $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y usando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)^T$ la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A su vez, $C{\cdot}D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es obviamente 0 (tiene una columna de ceros) de modo que no tiene matriz inversa.

$$\boldsymbol{(A \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$C{\cdot}D$ no tiene matriz inversa.

Problema B.2:

2. Dada la curva $y = \dfrac{1}{3+x^2}$.

a) Expresa la función $m(x)$ que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x. (1 punto)

b) Calcula el valor x donde se alcanza la máxima pendiente. (1.5 puntos)

Solución:

a) Basta derivar:

$$m(x) = y'(x) = \frac{-2x}{(3+x^2)^2}$$

b) Para calcular el valor de una función, derivamos e igualamos a 0.

$$m'(x) = \frac{-2(3+x^2)^2 + 2x \cdot 2(3+x^2)2x}{(3+x^2)^4} = \frac{(3+x^2)\left[-2(3+x^2)+8x^2\right]}{(3+x^2)^4} = \frac{-6-2x^2+8x^2}{(3+x^2)^3} = \frac{6x^2-6}{(3+x^2)^3} = 0$$

De ahí obtenemos $x = +1$ y $x = -1$. Nótese que el denominador es siempre positivo y que tanto la función m como su derivada son continuas en todos los reales.

Para ver si es máximo o es mínimo, debemos resolver la inecuación $m' > 0$. Damos valores $m'(-2) = 18/343 > 0$. $m'(0) = -6/27 < 0$. $m'(2) = 18/343 > 0$.

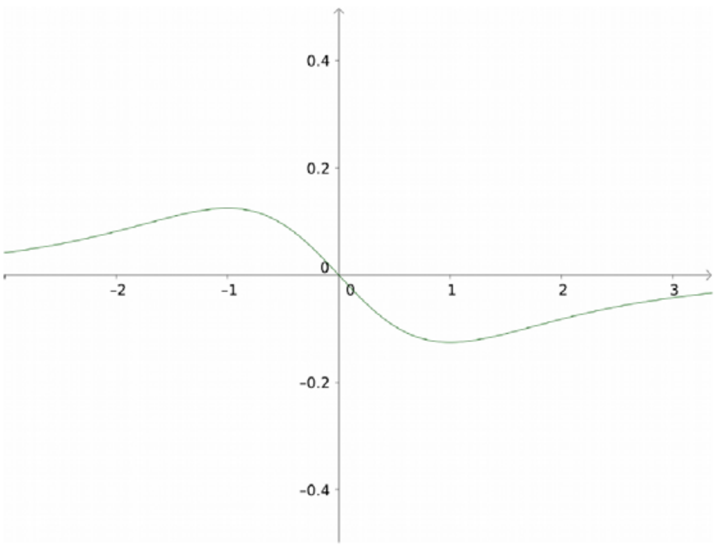
Por tanto, m es creciente en $(-\infty, -1)$, decrece en $(-1, 1)$ y vuelve a crecer en $(1, +\infty)$. De ello deducimos que el máximo se alcanza en $x = -1$, (el otro valor que anula a m' es un mínimo).

Como $m(x)$ tiende a 0 cuando x tiende a infinito y $m(-1) = 1/8$:

$(-1, 1/8)$ es máximo absoluto.

Es más claro dibujando la función, para lo que damos los valores donde se anula la derivada y los extremos del dominio: $m(-\infty) = 0$; $m(-1) = 1/8$; $m(1) = -1/8$; $m(+\infty) = 0$.

Como $m(1) = -1/8$, el punto $(1, -1/8)$ es un mínimo absoluto.



Problema B.3:

3. Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,-1,-1)$. Calcula:
a) La ecuación del plano π que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él. (1.5 puntos)
b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales. (1 punto)

Solución:

a) Calculamos el punto medio de ambos, al que llamaremos M.

$M = (A + B)/2 = [(1, 1, 1) + (1, -1, -1)]/2 = (1, 0, 0)$. El plano π debe pasar por ese punto.

A su vez, el vector perpendicular debe ser el vector $\overline{AB}$, que es $(0, -2, -2)$.

El plano es, por tanto $-2y - 2z = D$ y pasa por M. Sustituimos M con lo que $-2(0) - 2(0) = D = 0$. El plano es $-2y - 2z = 0$, o, multiplicando por $-1/2$:

$$\Pi: y + z = 0$$

b) Ya tenemos el vector $\overline{AB}$. Basta sumarlo.

$$C = A + \frac{1}{3}AB = (1,1,1) + \frac{1}{3}(0,-2,-2) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Y por tanto

$$D = C + \frac{1}{3}AB = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}(0,-2,-2) = \left(1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Si volviéramos a sumar $\overline{AB}$, obtendríamos B, como debe ser.

C = (1, 1/3, 1/3)

D = (1, –1/3, –1/3)

Autor: Andrés García Mirantes
Revisado con las soluciones de la Universidad de Oviedo
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.4:

4. Pedro y Luis son aficionados a los dardos. Pedro acierta en el centro el 10 % de las veces y cada vez que acierta gana 400 €. Luis acierta en el centro el 20 % de las veces y cada vez que acierta gana 100 €. Cuando fallan no ganan ni pierden nada. Tira cada uno dos dardos. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que Luis acierte en el centro las dos veces. (0.75 puntos)
b) Que Pedro acierte en el centro una sola vez. (1 punto)
c) Que entre los dos hayan ganado 600 €. (0.75 puntos)

Solución:

Llamamos P a la variable aleatoria "número de veces que acierta Pedro" y L a la variable aleatoria "número de veces que acierta Luis". Por el enunciado del problema, sabemos que son binomiales, más concretamente $P = \beta(2, \frac{10}{100})$ y $L = \beta(2, \frac{20}{100})$.

a) Nos piden $P(L = 2) = P(\beta(2, 0.2) = 2)$, que por definición es $\binom{2}{2} \cdot \left(\frac{20}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{80}{100}\right)^0 = \frac{1}{25}$, igual a:

$P(L = 2) = 1/25 = 0.04$.

b) Es $P(P = 1) = P(\beta(2, 0.1) = 1)$, que por definición es $\binom{2}{1} \cdot \left(\frac{10}{100}\right)^1 \cdot \left(\frac{90}{100}\right)^1 = \frac{2 \cdot 9}{10 \cdot 10} = \frac{9}{50}$, igual a

$P(P = 1) = 9/50 = 0.18$.

c) Ahora ambos tiran de manera independiente. Nos piden la probabilidad de que Pedro acierte una vez y Luis 2, que, como son sucesos independientes, es el producto de las probabilidades.

P(ganar 600 € entre los dos) = $P(L = 2) \cdot P(P = 1)$

La primera era 1/25 y la segunda 9/50, ambas ya calculadas.

El producto es 9/1250 = 0.0072.

***P*(ganar 600 € entre los dos) = $P(L = 2) \cdot (P = 1) = 9/1250 = 0.0072$.**

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & az & = & a \\ x & + & (a-1)y & + & az & = & 2 \\ -x & & & + & z & = & 2 \end{array}\right.$

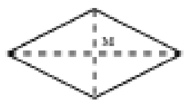
a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de $a \in \mathbb{R}$. (1.5 puntos)
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $a = 2$. (1 punto)

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)
b) Halla, si existen: máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

3. Sean $A(3,1,0)$ y $B(1,3,0)$ los vértices opuestos de un rombo situado en el plano $\pi: z = 0$.

a) Calcula un vector director $\vec{v}_r$ y la ecuación de la recta r a la que pertenecen los otros dos vértices del rombo C y D. (1.5 puntos)
b) Determina dichos vértices C y D sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto medio M. (1 punto)



Características de un rombo: Lados iguales paralelos dos a dos. Diagonales perpendiculares que se cortan en el centro de ambas.

4. Alicia tiene dos cajones. En uno tiene las camisetas y en el otro las faldas. La tabla muestra el número de todas las prendas que guarda en los dos cajones agrupadas en tres tipos: lisas, dibujos o rayas.

	Lisas	Dibujos	Rayas
Camisetas	10	5	10
Faldas	5	15	5

Se elige al azar una prenda de cada cajón. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean de rayas. (0.75 puntos)
b) Las dos sean del mismo tipo. (1 punto)
c) Al menos una de ellas no sea de rayas. (0.75 puntos)

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓN B

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ $x \in \mathbb{R}$

a) Estudia para qué valores de x se cumple $A^3 - I = O$ (I matriz identidad y O matriz nula). (1 punto)

b) Calcula A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior. (0.75 puntos)

c) Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A. (0.75 puntos)

2. Dadas las curvas $y = x^2/2$, $y = 4/x$.

a) Calcula sus puntos de corte. (0.5 puntos)

b) Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

c) Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

3. Dados el plano $\pi : x + y = 1$ y la recta r que pasa por el punto $A(1, 1, 1)$ con vector director $\vec{v}_r = (0, 1, 1)$. Calcula:

a) El punto P intersección del plano π y de la recta r. (1.25 puntos)

b) El punto A' simétrico de A respecto al plano π. (1.25 puntos)

4. Las calificaciones de un examen en una clase siguen una distribución normal de media $\mu = 20$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

a) La probabilidad de que un alumno obtenga una calificación entre 15 y 25. (1.25 puntos)

b) La calificación que sólo superan o igualan el 20 % de los alumnos. (1.25 puntos)

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(x) = P(Z \leq x)$, $F(-0.8416) = 0.2$, $F(0.8416) = 0.8$, $F(0.4) = 0.6554$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6) = 0.7257$

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

PRUEBA A CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

1. Dado el sistema $\begin{cases} x + y + az = a \\ x + (a-1)y + az = 2 \\ -x + z = 2 \end{cases}$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de $a \in \mathbb{R}$.
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $a = 2$.

Solución:

Apartado a)

Llamamos $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 1 & a-1 & a & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a las matrices de coeficientes y ampliada a respectivamente.

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Operando resulta $(a-1+0-a)-(-a^2+a+1)=a^2-a-2$

$a^2 - a - 2 = 0$ da como soluciones $a = -1$y $a = 2$.

Como el sistema es cuadrado, ya tenemos la primera conclusión:

Si $a \notin \{-1, 2\}$ el sistema es compatible y determinado.

Lo más sencillo es hacer cada caso por separado, así trabajamos con números en vez de letras.

Si $a = -1$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Haciendo operaciones por filas ($F_2'=F_2-F_1$ y $F'_3=F_1+F_3$) tenemos $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Finalmente, haciendo ceros en la última fila con $F''_3=F'_2+3F'_3$ queda $rg(B)=rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

La submatriz de los coeficientes tiene rango 2 y la ampliada, rango 3, con lo que el sistema es incompatible.

Otro modo de verlo es que, tras hacer operaciones por filas queda una ecuación como 0 = 12. Esta es obviamente una ecuación imposible y por tanto el sistema no tiene solución.

Si a = 2, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. La segunda fila es igual que la primera y la podemos eliminar. Queda pues $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y tanto la matriz total como la submatriz de las primeras tres columnas tienen rango 2. En consecuencia, el sistema es compatible indeterminado.

En resumen:

- Si $a \notin \{-1, 2\}$ el sistema es **compatible y determinado**.
- Si $a = -1$ el sistema es **incompatible**.
- Si $a = 2$ el sistema es **compatible indeterminado**.

Apartado b)

Ya hemos visto que en el caso 2, la matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y tiene infinitas soluciones.

Operando un poco más, hacemos $F'''_1 = F''_1 + F''_2$ y nos queda $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ que, en forma de sistema queda

$$\begin{cases} y+3z=4 \\ -x+z=2 \end{cases}$$

Llevamos el z al otro lado y despejamos

$$\begin{cases} y=4-3z \\ x=z-2 \end{cases}$$

En forma de tripla, sería (z – 2, 4 – 3z, z) donde z puede tomar cualquier valor real. Es costumbre poner otro parámetro distinto λ de modo que quede (λ – 2, 4 – 3λ, λ).

Las infinitas soluciones del sistema son de la forma **(λ – 2, 4 – 3λ, λ)** con $\lambda \in \Re$.

Problema A.2:

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas.
b) Halla, si existen: máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Haz un esbozo de su gráfica.

Solución:

Apartado a)

El único problema que puede existir en esta función es que se divida por 0. Igualando a 0 el denominador tenemos $x + 1 = 0$ es $x = -1$.

El dominio es $\Re$ – **{–1}**.

Eso ya nos da la única asíntota vertical, la recta $x = -1$.

Los límites laterales a izquierda y derecha de –1 son respectivamente $-\infty$ y $+\infty$.

Para las asíntotas horizontales hacemos los límites en ambos infinitos.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{x+1}=\frac{1}{e^{x}(x+1)}=\frac{1}{\infty\cdot\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$ que es indeterminado

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{1}=-\infty$$

En $+\infty$ hay una asíntota horizontal y por tanto no hay oblicua. En $-\infty$ no la hay, pero podría haber una oblicua. Veamos si es así.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x(x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+x}$$

Aplicamos dos veces la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{2x+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{2}=+\infty$$

Este límite es infinito luego no hay asíntota oblicua.

En resumen:

- Hay una asíntota vertical, la recta $\boldsymbol{x = -1}$.
- Hay una asíntota horizontal en $+\infty$ (pero **no** en $-\infty$), la recta $\boldsymbol{y = 0}$.
- No hay ninguna asíntota oblicua.

Apartado b)

Derivamos la función.

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}(x+1)-e^{-x}}{(x+1)^2}=-e^{-x}\frac{x+2}{(x+1)^2}$$

El único valor donde se anula es $x = -2$. El denominador es siempre positivo, por lo que en este caso no hay que considerarlo. No está de más recordar que, si no fuera así, habría que tener en cuenta los ceros del denominador. El único es el valor $x = -1$.

Dando valores:

$f'(-3)>0 \quad f'(0)<0$

La función crece en $(-\infty, -2)$ y decrece en $(-2, -1) \cup (-1, +\infty)$. En -1 no está definida

Con estos datos, haciendo $f(-2)$ que vale $-e^{-2}$ además sabemos:

El punto **$(-2, -e^{-2})$** es un máximo relativo y no hay mínimos relativos.

Para ver el estudio de máximos y mínimos absolutos esperaremos al estudio de la gráfica, que es el apartado c.

Apartado b)

Normalmente, "esbozo" quiere decir dibujo sin asíntotas, curvatura ni cortes con los ejes. Pero las asíntotas ya las tenemos y el resto no cuesta mucho, así que vamos a hacer el estudio completo.

Cortes con los ejes:

El numerador no se anula nunca, así que no hay cortes con $y = 0$.

Cuando $x = 0$, $y = 1$.

Curvatura:

Derivamos la función otra vez.

$$f''(x)=\frac{e^{-x}(x+2)(x+1)^2-e^{-x}(x+1)^2+2e^{-x}(x+2)(x+1)}{(x+1)^4}$$

que simplificado resulta

$$f''(x)=\frac{e^{-x}(x+1)(x^2+4x+5)}{(x+1)^4}=\frac{e^{-x}(x^2+4x+5)}{(x+1)^3}$$

El denominador ya no es positivo, de hecho, tiene cambios de signo, así que hay que considerar el punto $x = -1$.

Igualando a 0 el numerador es $e^{-x}(x^2+4x+5)=0$ que implica $x^2+4x+5=0$ es decir $x=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}$ con lo que no hay raíces reales.

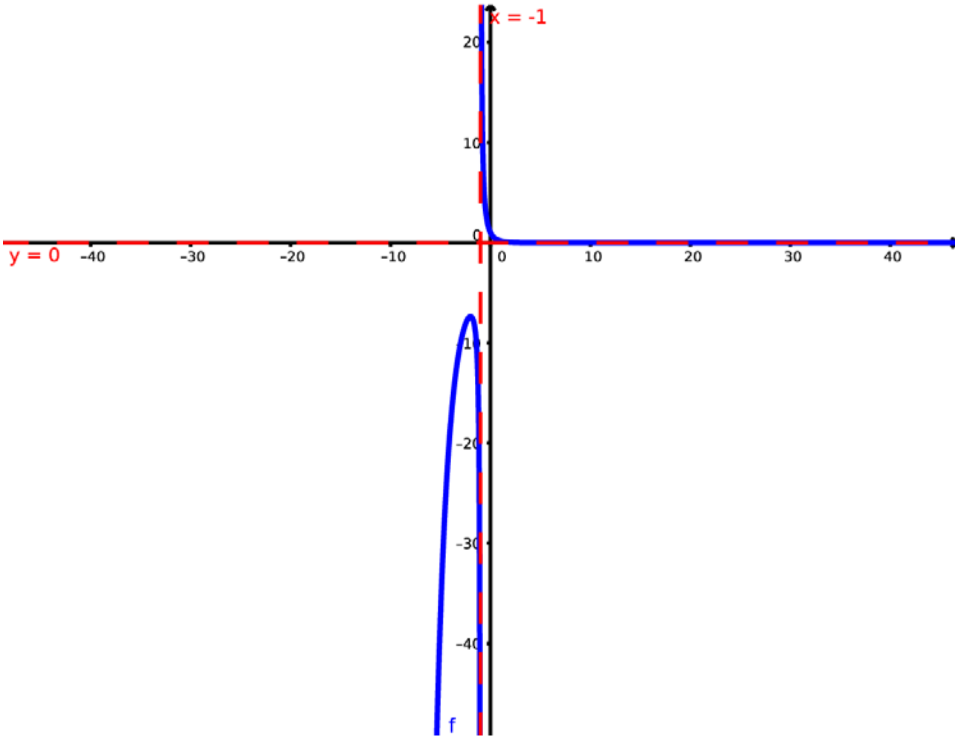
Dando valores, $f''(-2)<0$ y $f''(0)>0$ con lo que hay curvatura negativa (forma de ∩) en (–∝, –1) y curvatura positiva (forma de U) en (–1, +∝).

Falta la tabla de valores

x	$-\infty$	-2	-1^-	-1	-1^+	0	$-\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-e^{-2}$	$-\infty$	No existe	$+\infty$	1	

Los valores -1^- y -1^+ representan los límites laterales en –1 (a izquierda y derecha respectivamente).

La gráfica completa es:



Las asíntotas están marcadas en rojo rayado. Se observa que el punto (–2, $-e^{-2}$) es máximo relativo, pero no absoluto y que no hay mínimos relativos ni absolutos.

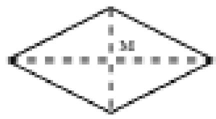
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.3:

3. Sean $A(3,1,0)$ y $B(1,3,0)$ los vértices opuestos de un rombo situado en el plano $\pi:\ z=0$.

a) Calcula un vector director $\vec{v}_r$ y la ecuación de la recta r a la que pertenecen los otros dos vértices del rombo C y D. (1.5 puntos)

b) Determina dichos vértices C y D sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto medio M. (1 punto)



Características de un rombo: Lados iguales paralelos dos a dos. Diagonales perpendiculares que se cortan en el centro de ambas.

Solución:

Apartado a)

La recta que nos piden pasa por el punto medio de A y B y es perpendicular al vector que los une. Además, debe estar contenida en el plano π. Eso significa que es perpendicular al vector AB y al vector perpendicular de π. Con eso ya estamos en condiciones de calcular un vector v_r.

El vector normal al plano $\{z = 0\}$ es (0, 0, 1). Se puede ver porque son los coeficientes de x, y, z en la ecuación o bien, tomando tres puntos del plano [como (0, 0, 0), (1, 0, 0) y (0, 1, 0)] y calculando el producto vectorial de dos vectores que formen:

El vector $\overline{\boldsymbol{AB}}$ se calcula sin dificultad, es (2, –2, 0)

Así pues, cualquier v_r es perpendicular a los dos vectores anteriores. Calculamos un vector perpendicular a ambos con el producto vectorial.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2,2,0)$$

No es la única solución, cualquier vector paralelo vale. Es decir, las soluciones serían $\lambda(2,2,0)$ con $\lambda\in\mathbb{R}, \lambda\neq 0$. De hecho, el vector más sencillo es (1, 1, 0)

La recta pasa por el punto medio de A y B. Este se calcula sin problemas:

$$M=\frac{A+B}{2}=\frac{(3,1,0)+(1,3,0)}{2}=(2,2,0)$$

En forma vectorial sería $r\equiv\{(2,2,0)+\lambda(2,2,0)\}$ También puede expresarse en otras formas como $\begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=0 \end{cases}$ o, despejando λ como $\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$. Pero nótese que el problema no pedía una forma concreta así que cualquiera es perfectamente válida.

Un vector director de la recta es (2, 2, 0) [vale cualquier múltiplo no nulo] y la recta es:

$r\equiv$ **{(2, 2, 0) + λ(2, 2, 0)}** que puede expresarse también como $\begin{cases} \boldsymbol{x=y} \\ \boldsymbol{z=0} \end{cases}$.

Apartado b)

Ya hemos calculado el punto medio y el vector de la recta. Los puntos C y D por tanto son de la forma y $C=M+\mu(2,2,0)\quad D=M-\mu(2,2,0)$ para un valor concreto μ que deberemos calcular [no usamos λ para no confundir con la recta del apartado anterior, pero sería perfectamente válido].

¿Y cuánto vale μ? Pues faltaba un dato, que es el que nos dan en este apartado, es decir, que la distancia de $d(M,C)$ es $\sqrt{2}$

$d(M,C)=\sqrt{2}$ luego $\|MC\|=\|\mu(2,2,0)\|=\sqrt{2}$

$\sqrt{(2\mu)^2+(2\mu)^2+0}=\sqrt{2}$ de donde $8\mu^2=2$ que se obtiene $\mu=\pm 1/2$.

Es decir, hay dos posibilidades

$C=(2,2,0)+\frac{1}{2}(2,2,0)=(3,3,0)$ y $D=(2,2,0)-\frac{1}{2}(2,2,0)=(3,3,0)$ $D=(2,2,0)-\frac{1}{2}(2,2,0)=(1,1,0)$

o bien

$C=(2,2,0)-\frac{1}{2}(2,2,0)=(1,1,0)$ y $D=(2,2,0)-\left(-\frac{1}{2}\right)(2,2,0)=(3,3,0)$

Son los mismos puntos y esto no es sorprendente, pues no se especifica el lado en el que están.

En resumen

Los otros dos puntos del rombo son ***C* = (3, 3, 0) y *D* = (1, 1, 0)** o viceversa: [D = (3, 3, 0) y C = (1, 1, 0)]

Problema A.4:

4. Alicia tiene dos cajones. En uno tiene las camisetas y en el otro las faldas. La tabla muestra el número de todas las prendas que guarda en los dos cajones agrupadas en tres tipos: lisas, dibujos o rayas.

	Lisas	Dibujos	Rayas
Camisetas	10	5	10
Faldas	5	15	5

Se elige al azar una prenda de cada cajón. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean de rayas.
b) Las dos sean del mismo tipo.
c) Al menos una de ellas no sea de rayas.

Solución:

Apartado a)

Llamamos C_L, C_D y C_R a los sucesos "extraer camiseta lisa", "extraer camiseta de dibujos" y "extraer camiseta de rayas". Llamamos F_L, F_D y F_R a los sucesos "extraer falda lisa", "extraer falda de dibujos" y "extraer falda de rayas".

Las extracciones de cada cajón son independientes. Nos piden $P(C_R \cap F_R) = \frac{10}{25} \cdot \frac{5}{25} = \frac{2}{25}$

que es 0.08 o el 8 %.

La probabilidad de que Alicia saque dos prendas de rayas es **2/28 = 0.08** $\rightarrow$ 8 %.

Apartado b)

Sacar liso, de dibujos y de rayas son mutuamente incompatibles. Así pues:

$$P\left[(C_L \cap F_L) \cup (C_D \cap F_D) \cup (C_R \cap F_R)\right] = P(C_L \cap F_L) + P(C_D \cap F_D) + P(C_R \cap F_R)$$

Sustituyendo cada uno por su valor

$$\frac{10}{25} \cdot \frac{5}{25} + \frac{5}{25} \cdot \frac{15}{25} + \frac{10}{25} \cdot \frac{5}{25} = \frac{2+3+2}{25} = \frac{7}{25}$$

que es 0.28 o el 28 %.

La probabilidad de que sacar dos prendas del mismo tipo es **7/25 = 0.28** $\rightarrow$ 28 %.

Apartado c)

Denotamos con raya superior el complementario $\overline{C_R}$.

$$P(\overline{C_R} \cup \overline{F_R}) = P(\overline{C_R}) + P(\overline{F_R}) - P(\overline{C_R} \cap \overline{F_R})$$

Todas se obtienen sin dificultad y resulta:

$$\frac{15}{25} + \frac{20}{25} - \frac{15}{25} \cdot \frac{20}{25} = \frac{35}{25} - \frac{12}{25} = \frac{23}{25}$$

que es 0.92 o el 92 %

La probabilidad de que Alicia no saque dos prendas de rayas es **23/25 = 0.92** $\rightarrow$ 92 %

PRUEBA B CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

a) Estudia para qué valores de x se cumple $A^3 - I = O$ (I matriz identidad y O matriz nula). (1 punto)

b) Calcula A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior. (0.75 puntos)

c) Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A. (0.75 puntos)

Solución:

a) Calculamos las potencias de la matriz:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^3 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix}$$

$A^3 - I = 0 \Leftrightarrow A^3 = I$ de modo que igualamos ambas matrices

$$\begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^3 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vale casi cualquier elemento. Por ejemplo, el (1, 2) nos da $-2x = 0$, es decir $x = 0$. Si sustituimos x por 0 en la primera matriz obtenemos la identidad.

El único valor que hace que se cumpla la ecuación matricial es $\boldsymbol{x = 0}$.

b) Puesto que $A^3 = I$, se tiene $A^{12} = (A^3)^4 = I^4 = I$

Para los valores que cumplen el apartado a), es $A^{12} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Podría hacerse sin problemas por cualquiera de los métodos habituales (el de Gauss o el de adjuntos). Pero vamos a aprovechar los cálculos anteriores.

Sabemos que $A^3 = I$, luego $A \cdot A^2 = I$, por tanto: Y $A^2 = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix}$ que la teníamos calculada de antes. Sustituyendo x por 0 se tiene la inversa:

$$A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En el caso $x = 0$ la inversa es $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Problema B.2:

2. Dadas las curvas $y = x^2/2$, $y = 4/x$.

a) Calcula sus puntos de corte. (0.5 puntos)

b) Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

c) Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

Solución:

Apartado a)

Los puntos de corte son las soluciones del sistema $\begin{cases} y=x^2/2 \\ y=4/x \end{cases}$ que resolvemos por igualación como $x^2/2=4/x$.

Multiplicando por *x* se tiene $x^3=8 \Rightarrow x=2$

Sustituyendo da *y* = 2.

El único punto de corte es $(2, 2)$.

Apartado b):

Llamamos $f(x)=x^2/2$ y $g(x)=4/x$. La primera es una función cuadrática (parábola) con vértice en $\frac{0}{\frac{2\cdot 1}{2}}=0$.

Además $f(0)=0$. Las ramas van hacia arriba pues el coeficiente de x^2 es 1/2, que es positivo.

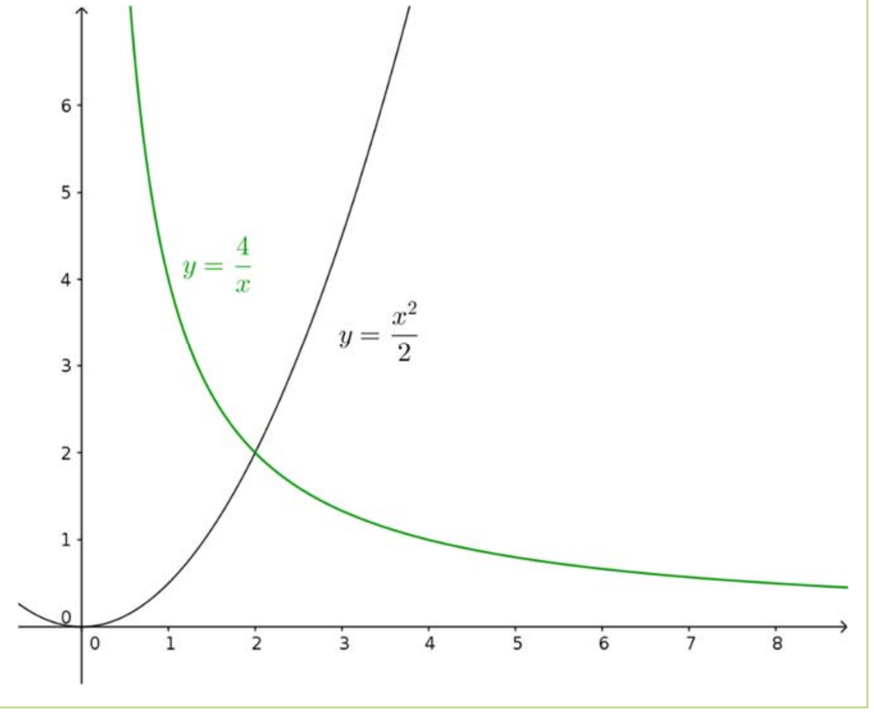
Para los valores, damos los extremos del intervalo y el 2, pues es el punto donde se corta con *g*. Los valores 1, 2 y 3 resultan en $1/2=0.5$, 2 y $9/2=4.5$ respectivamente.

En cuanto a la segunda, tiene una discontinuidad en *x* = 0, lo que no nos afecta pues nos piden en [1, 3]. Allí es continua.

$g'(x)=\frac{-1}{x^2}$ que es siempre negativo en el intervalo de interés por lo que es decreciente. Y su segunda derivada es $g'(x)=\frac{2}{x^3}$ positiva por lo que tiene curvatura positiva (en forma de ∩).

$g(1)=4$, $g(2)=2$ y $g(3)=4/3\approx 1.33$

La gráfica conjunta es pues:



Apartado c):

En el intervalo [1, 2], $4/x$ está por encima de $x^2/2$ y es al revés en el intervalo [2, 3].

Por tanto, el área comprendida entre ambas funciones es:

$$\int_1^3 |x^2/2-4/x|dx=\int_1^2 4/x-x^2/2\,dx+\int_2^3 x^2/2-4/x\,dx$$

Es más fácil hacer la integral indefinida y sustituir. La primera es

$$\int 4/x-x^2/2\,dx=\int 4/x\,dx-\int x^2/2\,dx=4\ln(x)-x^3/6$$

en tanto la segunda es la primera cambiada de signo:

$$\int_1^2 4/x-x^2/2\,dx=\left[4\ln(x)-x^3/6\right]_1^2=\{4\ln(2)-8/6\}-\{4\ln(1)-1/6\}=4\ln(2)-7/6$$

$$\int_2^3 x^2/2-4/x\,dx=\left[x^3/6-4\ln(x)\right]_2^3=\{27/6-4\ln(3)\}-\{8/6-4\ln(2)\}=19/6-4\ln(3)+4\ln(2)$$

Sumando queda:

$$12/6+8\ln(2)-4\ln(3)=2+\ln\left(\frac{2^8}{3^4}\right)\approx 3.15$$

Es costumbre escribirlo como unidades cuadradas, si bien esto presupone que la unidad de cada eje es la misma.

El área es aproximadamente 3.15 u^2.

Problema B.3:

3. Dados el plano $\pi: x+y=1$ y la recta r que pasa por el punto $A(1,1,1)$ con vector director $\vec{v}_r=(0,1,1)$. Calcula:

a) El punto P intersección del plano π y de la recta r. (1.25 puntos)

b) El punto A' simétrico de A respecto al plano π. (1.25 puntos)

Solución:

Apartado a)

Necesitamos la intersección de la recta con el plano. Una posibilidad es pasar la recta a ecuación de intersección de dos planos. Pero es más sencillo tomar un punto genérico y despejar el valor.

La ecuación vectorial es:

$$(x,y,z)=(1,1,1)+\lambda(0,1,1)$$

con lo que tenemos $\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$

Insertándolo en la ecuación del plano tenemos:

$(1)+(1+\lambda)=1$, que da $\lambda=-1$

De modo que

$(x,y,z)=(1,1,1)+(-1)(0,1,1)=(1,0,0)$

El punto de corte de la recta y el plano es **(1, 0, 0)**.

Apartado b)

Calculamos la recta perpendicular al plano que pasa por A. El plano es $x+y=1$ por lo que su vector perpendicular es (1, 1, 0) [los coeficientes de x, y, z]. Otra manera es dar tres puntos, calcular sus vectores y el producto vectorial de estos nos da el vector perpendicular.

En cualquier caso, ya tenemos un punto y un vector, luego la recta perpendicular es:

$$r\equiv\{(x,y,z)=(1,1,1)+\lambda(1,1,0)\}$$

Exactamente igual que antes, calculamos la intersección de r y π.

$(1+\lambda)+(1+\lambda)=1$ que da $2\lambda=-1$ es decir $\lambda=-1/2$

Así pues, el punto de corte es $P\equiv(1,1,1)+\left(-\frac{1}{2}\right)\lambda(1,1,0)$ y el simétrico es sumarle dos veces el vector que une A con P es decir $(1,1,1)+2\left(-\frac{1}{2}\right)(1,1,0)=(0,0,1)$

El punto A' simétrico de A respecto a π es **(0, 0, 1).**

Problema B.4:

4. Las calificaciones de un examen en una clase siguen una distribución normal de media $\mu = 20$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

a) La probabilidad de que un alumno obtenga una calificación entre 15 y 25. (1.25 puntos)

b) La calificación que sólo superan o igualan el 20 % de los alumnos. (1.25 puntos)

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \le x)$, $F(-0.8416) = 0.2$, $F(0.8416) = 0.8$, $F(0.4) = 0.6554$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6) = 0.7257$

Solución

Apartado a)

Si $X \approx N(20,10)$ entonces $X = 20 + 10Z$ con $Z \approx N(0,1)$

$$P(15 < X < 25) = P(15 < 20 + 10Z < 25) = P(-5 < 10Z < 5) = P(0.5 < Z < 0.5)$$

Y eso es, usando la función de distribución:

$$P(-0.5 < Z < 0.5) = F(0.5) - F(-0.5)$$

No tenemos $F(-0.5)$ pero sabemos que $F(-x) = 1 - F(x)$ de modo que:

$$F(-0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

Sustituyendo es:

$$F(0.5) - F(-0.5) = 0.6915 - 0.3085 = 0.383$$

La probabilidad de estar entre 15 y 25 es **0.383** o el 38.3 %.

Apartado b)

Como antes, si $X \approx N(20,10)$ entonces $X = 20 + 10Z$ con $Z \approx N(0,1)$. Nos piden ahora calcular M para que $P(X > M) = 0.2$

Sustituyendo $P(20 + 10Z > M) = 0.2 \Rightarrow P\left(Z > \frac{M-20}{10}\right) = 0.2$

Pasando al suceso complementario:

$$0.2 = P\left(Z > \frac{M-20}{10}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{M-20}{10}\right)$$

de donde, despejando

$$P\left(Z \le \frac{M-20}{10}\right) = 1 - 0.2 = 0.8$$

Es decir, $F\left(\frac{M-20}{10}\right) = 0.8$. Buscando en la tabla es $F(0.8416) = 0.8$ de donde $\frac{M-20}{10} = 0.8416$ que resulta en $M = 10 \cdot 0.8416 + 20 = 28.416$

La calificación de **28.416** solo la supera el **20 %** de los alumnos.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Baleares

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos

https://www.ebaumatematicas.com

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2019

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} (a+2)x & + & (a-1)y & - & z = & 1, \\ ax & - & y & + & z = & -1, \\ 11x & + & ay & - & z = & a. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què $a = 0$. (3 punts)

2. Les funcions $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ i $g(x) = x - cx^2$ passen pel punt $(1, 0)$. Determinau els coeficients a, b i c perquè tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt i calculau-la. (10 punts)

3. Determinau la posició relativa del pla $x + y + z = 1$ amb la recta d'equacions $x - 1 = y - 1 = \frac{z-1}{-2}$. (4 punts) Calculau la projecció ortogonal de la recta sobre el pla. (6 punts)

4. Les alçades X dels estudiants de 18 anys dels instituts de Palma es modelen segons una llei normal de mitjana $\mu = 1.78$ m i desviació típica $\sigma = 0.65$ m. Es demana:

a) Percentatge d'estudiants de 18 anys dels instituts de Palma que fan més d'1.90 m. (4 punts)

b) Agafam una mostra de 100 estudiants de 18 anys dels instituts de Palma i en volem seleccionar els 30 més alts. Quina és l'alçada mínima que ha de fer un estudiant de 18 anys dels instituts de Palma per ser seleccionat? (6 punts)

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2019

Model 1

OPCIÓ B

1. Considerem la matriu i els vectors següents:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix},\quad \mathbf{d}=\begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calculau x i y perquè es verifiqui:

$$\mathbf{b}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}.$$

(10 punts)

2. Considerem la regió delimitada per la funció $f(x)=x^2-x^4$ i l'eix d'abscisses o eix OX. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'àrea de la regió. (4 punts)

3. Considerem la recta $\frac{x-1}{2}=y+1=-z+1$ i el pla $x-y=0$. Calculau l'àrea del triangle format pel punt de tall entre la recta i el pla, el punt $(1,-1,1)$ de la recta i la projecció ortogonal d'aquest punt sobre el pla. (10 punts)

4. En una comunitat de 500 estudiants de segon de batxillerat, 200 estudien l'opció científica tecnològica. N'hi ha 150 que practiquen futbol i 100 que practiquen bàsquet (entenem que no n'hi ha cap que practiqui futbol i bàsquet a la vegada). Dels que practiquen bàsquet, 70 estudien l'opció científica tecnològica, i hi ha 150 estudiants que no practiquen esport ni fan l'opció científica tecnològica. Es demana:

a) Probabilitat que un estudiant estudiï l'opció científica tecnològica i no practiqui esport. (3 punts)

b) Sabent que un estudiant practica futbol, quina és la probabilitat que estudiï l'opció científica tecnològica? (3 punts)

c) Són independents els esdeveniments "practicar futbol" i "estudiar l'opció científica tecnològica". Raonau la resposta. (4 punts)

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2019

Model 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

OPCIÓ A

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

1. a) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr}(a+2)x & + & (a-1)y & - & z = & 1, \\ ax & - & y & + & z = & -1, \\ 11x & + & ay & - & z = & a.\end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què $a = 0$. (3 punts)

Solución:

Escribimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & a-1 & -1 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 \\ 11 & a & -1 & a \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+2 & a-1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 11 & a & -1 \end{vmatrix} = a+2-a^2+11(a-1)-(11+a(a+2)-a(a-1))$$
$$= -a^2+9a-20$$

El determinante de A vale cero si a = 4 o a = 5. En esos casos el rango de A es 2. En caso contrario es 3, luego el sistema es compatible determinado. Si a = 4 o a = 5 el rango de la matriz ampliada es 3, luego el sistema es incompatible.

Si $\boldsymbol{a \neq 4}$ o $\boldsymbol{a \neq 5}$ es sistema es compatible y determinado.

Si a = 0 entonces, ya sabemos que es compatible determinado. Resolvemos por el Método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x-y-z=1 \\ -y+z=-1 \\ 11x-z=0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x-y-z=1 \\ y=z+1 \\ 11x=z \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} 2\dfrac{z}{11}-(z+1)-z=1 \to 2z-11z-11-11z=-20z-11=11 \\ y=z+1 \\ 11x=z \end{cases} \to \begin{cases} z=\dfrac{-11}{10} \\ y=\dfrac{-1}{10} \\ x=\dfrac{-1}{10} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{-1}{10};\ y = \frac{-1}{10};\ z = \frac{-11}{10}}$$

Problema A.2:

2. Les funcions $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ i $g(x) = x - cx^2$ passen pel punt $(1, 0)$. Determinau els coeficients a, b i c perquè tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt i calculau-la. (10 punts)

Solución:

Nos dicen que la funciones pasan por el punto (1, 0):

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx \to f(1) = 0 = 1 + a + b$$
$$g(x) = x - cx^2 \to g(1) = 0 = 1 - c$$

Calculamos la recta tangente de cada una de las funciones en ese punto.

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax \quad + b \to f'(1) = 4 + 2a \ + \ b$$
$$g'(x) = 1 - 2cx \to g'(1) = 1 - 2c$$

Imponemos que sea la misma recta tangente, igualando las pendientes:

$f'(1) = 4 + 2a \ + \ b = g'(1) = 1 - 2c \to 2a + b + 2c = -3.$

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 0 = 1 + a + b \\ 0 = 1 - c \to c = 1 \\ 2a + b + 2c = -3 \end{cases} \to \begin{cases} a + b = -1 \\ 0 = 1 - c \to c = 1 \\ 2a + b + 2(1) = -3 \to 2a + b = -5 \end{cases} \to \begin{cases} a = -4 \\ c = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

La recta tangente pasa por (1, 0) y tiene de pendiente: $1 - 2c = \ -1; \ 4 + 2(-4) + \ 3 = -1.$

Es una recta que pasa por (1, 0) de pendiente horizontal: -1: $y = -(x - 1) = -x + 1$.

Los parámetros valen: $\boldsymbol{a = -4}$; $\boldsymbol{b = 3}$; $\boldsymbol{c = 1}$. Recta tangente: $\boldsymbol{y = -x + 1}$

Problema A.3:

3. Determinau la posició relativa del pla $x + y + z = 1$ amb la recta d'equacions $x - 1 = y - 1 = \frac{z-1}{-2}$. (4 punts) Calculau la projecció ortogonal de la recta sobre el pla. (6 punts)

Solución:

El vector de dirección de la recta dada es: (1, 1, –2), y pasa por el punto (1, 1, 1).

El plano tiene como vector ortogonal (1, 1, 1).

Hacemos el producto escalar de ambos vectores: (1, 1, –2) (1, 1, 1) = 1 + 1 – 2 = 0. Son perpendiculares. Luego la recta es paralela (o está contenida) al plano. Miramos si el punto de la recta está en el plano:

1 + 1 + 1 = 3 $\neq$ 1. No verifica la ecuación del plano, luego la recta es paralela al plano.

La recta es **paralela** al plano.

Al ser la recta paralela al plano, para determinar la proyección ortogonal, podemos determinar la proyección de un punto de la recta (1, 1, 1) que tomamos como punto de la nueva recta, y como vector de dirección el de la recta dada.

El punto, proyección ortogonal de (1, 1, 1), viene dado por la intersección del plano dado con la recta cuyo vector de dirección el normal al plano, y que pasa por el punto:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \rightarrow x + y + z = 1 \rightarrow (1+\alpha) + (1+\alpha) + (1+\alpha) = 1 = 3 + 3\alpha \rightarrow \alpha = \frac{-2}{3} \rightarrow 1 - \alpha = \frac{1}{3}$$

El punto es: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Y la recta proyección ortogonal:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{1}{3} + \alpha} \\ \boldsymbol{y = \frac{1}{3} + \alpha} \\ \boldsymbol{z = \frac{1}{3} - 2\alpha} \end{cases} \boldsymbol{\equiv x - \frac{1}{3} = y - \frac{1}{3} = \frac{z - \frac{1}{3}}{-2}}$$

Problema A.4:

4. Les alçades X dels estudiants de 18 anys dels instituts de Palma es modelen segons una llei normal de mitjana $\mu = 1.78$ m i desviació típica $\sigma = 0.65$ m. Es demana:

a) Percentatge d'estudiants de 18 anys dels instituts de Palma que fan més d'1.90 m. (4 punts)

b) Agafam una mostra de 100 estudiants de 18 anys dels instituts de Palma i en volem seleccionar els 30 més alts. Quina és l'alçada mínima que ha de fer un estudiant de 18 anys dels instituts de Palma per ser seleccionat? (6 punts)

Solución:

Nos dicen que la media es 1.78 y que la desviación típica es 0.65.

a) La variable sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma) = N(1.78, 0.65)$. Tenemos que:

$P(x > 1.90) = P(z > \frac{1.9-1.78}{0.65}) = (P > 0.1846) = 1 - P(x < 0.1846) = 1 - 0.5733 = 0.4266$.

$$\boldsymbol{P(x > 1.90) = 0.4266}$$

b) Queremos seleccionar los 30 más altos de una muestra de 100 estudiantes. Calculamos la altura mínima con la que deba ser seleccionado.

$$P(x > a) = \frac{30}{100} = 0.3 = P(z > \frac{a - 1.78}{0.65}) \to P(z < \frac{a - 1.78}{0.65}) = 1 - 0.3 = 0.7$$

Buscamos en las tablas:

$$\frac{a - 1.78}{0.65} = 0.52 \to a = 1.78 + (0.52) \cdot (0.65) = 2.118$$

Los estudiantes deben ser altísimos, de más de dos metros: $\mathbf{2.118\ m}$

OPCIÓ B

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema B.1:

1. Considerem la matriu i els vectors següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calculau x i y perquè es verifiqui:

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{d}.$$

(10 punts)

Solución:

Nos piden que se verifique que:

$$b - Ac = Ad \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} xy + y^2 \\ 2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - xy - 2y^2 \\ 3/2 - 2y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2xy - 2y \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2 - xy - 2y^2 = 6x - 2xy - 2y \\ 3/2 - 2y^2 = -2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 + xy + 2y - 2y^2 - 6x = 0 \\ 4y^2 - 2y - 3 = 0 \rightarrow y = \frac{-1}{2}, \frac{3}{2} \end{cases}$$

Sustituimos los valores de y en la primera ecuación:

Si $y = \frac{-1}{2}$

$$2 + xy + 2y - 2y^2 - 6x = 0 \rightarrow 2 + x\left(\frac{-1}{2}\right) + 2\left(\frac{-1}{2}\right) - 2\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 6x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{13}$$

Si $y = \frac{3}{2}$

$$2 + xy + 2y - 2y^2 - 6x = 0 \rightarrow 2 + x\left(\frac{3}{2}\right) + 2\left(\frac{3}{2}\right) - 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6x = 2 + x\left(\frac{3}{2}\right) + 3 - \frac{9}{2} - 6x = \frac{1}{2} - \frac{9x}{2}$$
$$= 0 \rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$Si\ \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}\ entonces\ \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}};\ Si\ \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\ entonces\ \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}.$$

Problema B.2:

2. Considerem la regió delimitada per la funció $f(x) = x^2 - x^4$ i l'eix d'abscisses o eix OX. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'àrea de la regió. (4 punts)

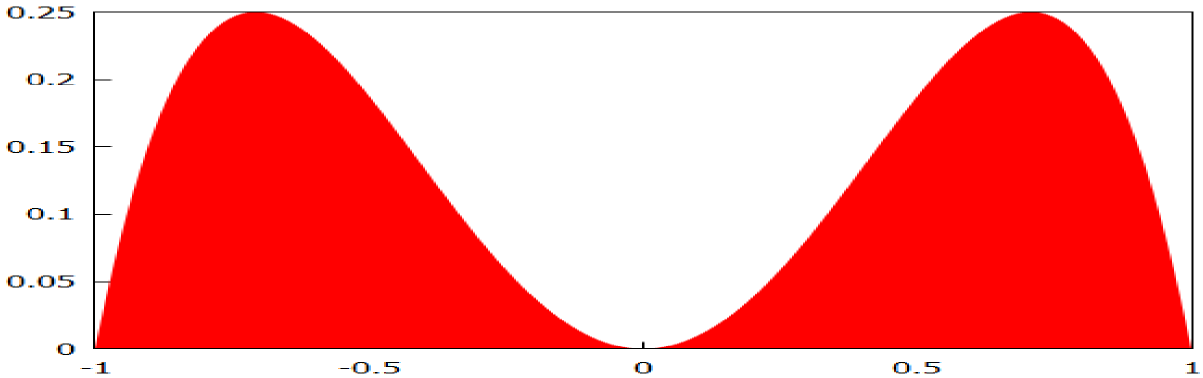
Solución:

La función dada es una función polinómica de cuarto grado, simétrica con eje de simetría el eje de ordenadas.

Corta al eje de abscisas en $x = 0$, raíz doble, y en $x = 1$ y $x = -1$.

Cuando x tiende a infinito la función tiende a menos infinito.

Con esto, ya podemos esbozar la gráfica:



El área pedida será la integral definida entre –1 y 1, los dos puntos de corte con el eje de abscisas. Pero al ser la gráfica simétrica podemos calcular la integral entre 0 y 1 y multiplicar por 2.

$$Área = \int_{-1}^{1}(x^2 - x^4)dx = 2\int_{0}^{1}(x^2 - x^4)dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 = 2((\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) - 0) = \frac{4}{15}u^2$$

$$Área = \boldsymbol{\frac{4}{15}u^2}$$

Textos Marea Verde

Problema B.3:

3. Considerem la recta $\frac{x-1}{2} = y+1 = -z+1$ i el pla $x-y=0$. Calculau l'àrea del triangle format pel punt de tall entre la recta i el pla, el punt $(1,-1,1)$ de la recta i la projecció ortogonal d'aquest punt sobre el pla. (10 punts)

Solución:

La ecuación paramétrica de la recta es:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases}$$

Sustituimos en el plano:

$$x - y = 0 \rightarrow 1 + 2\alpha - (-1 + \alpha) = 0 = 2 + \alpha \rightarrow \alpha = -2 \rightarrow (-3, -3, 3)$$

El punto de intersección es: $(-3, -3, 3)$

Buscamos la proyección ortogonal del punto (1, −1, 1) sobre el plano $x - y = 0$. Para ello buscamos la recta ortogonal al plano que pasa por el punto, por lo que su vector de dirección es: (1, −1, 0), y su ecuación:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - \alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

Y hallamos la intersección entre esta recta y en plano:

$$x - y = 0 \rightarrow 1 + \alpha - (-1 - \alpha) = 0 = 2 + 2\alpha \rightarrow \alpha = -1 \rightarrow (0, 0, 1)$$

Los tres vértices del triángulo son: $P(-3, -3, 3)$; $Q(0, 0, 1)$; R(1, −1, 1).

Calculamos los vectores: $\overline{PQ}(-3, -3, 2)\ y\ \overline{RQ}(1, -1, 0)$.

El área pedida es:

$$Área = \frac{1}{2}|\overline{QP}x\overline{QR}| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}|2i + 2j + 6k| = |i + j + 3k| = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$$

$$Área = \sqrt{\mathbf{11}}\, u^2$$

Problema B.4:

4. En una comunitat de 500 estudiants de segon de batxillerat, 200 estudien l'opció científica tecnològica. N'hi ha 150 que practiquen futbol i 100 que practiquen bàsquet (entenem que no n'hi ha cap que practiqui futbol i bàsquet a la vegada). Dels que practiquen bàsquet, 70 estudien l'opció científica tecnològica, i hi ha 150 estudiants que no practiquen esport ni fan l'opció científica tecnològica. Es demana:

a) Probabilitat que un estudiant estudiï l'opció científica tecnològica i no practiqui esport. (3 punts)

b) Sabent que un estudiant practica futbol, quina és la probabilitat que estudiï l'opció científica tecnològica? (3 punts)

c) Són independents els esdeveniments "practicar futbol" i "estudiar l'opció científica tecnològica". Raonau la resposta. (4 punts)

Solución:

Llamamos C a estudiar la opción científica y tecnológica, F a practicar el futbol, B a practicar baloncesto y $\bar{D}$ a no practicar ningún deporte.

Los datos que nos da el enunciado los llevamos a una tabla de contingencia:

	Científica y tecnológica (C)	$\bar{C}$	Total
Futbol (F)			150
Baloncesto (B)	70		100
No hacen deporte($\bar{D}$)		150	
Total	200		500

Completamos la tabla:

	Científica y tecnológica (C)	$\bar{C}$	Total
Futbol (F)	***30***	***120***	150
Baloncesto (B)	70	***30***	100
No hacen deporte($\bar{D}$)	***100***	150	***250***
Total	200	***300***	500

a) Nos piden:

$$\boldsymbol{P(C \cap \bar{D})} = 100/500 = \mathbf{1/5} \; = \; \mathbf{0.2}.$$

b) $P(C/F) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}$. $\boldsymbol{P(C/F) = \frac{1}{5} = 0.2}$.

c) Para que los sucesos sean independientes se debe verificar que $P(C) \cdot P(F) = P(C \cap F)$

$$P(C) \cdot P(F) = \frac{200}{500} \cdot \frac{150}{500} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 10} = \frac{3}{25}$$

$$P(C \cap F) = \frac{30}{500} = \frac{3}{50} \neq \frac{3}{25}$$

Los sucesos son **dependientes**.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2019

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 3y & + & 2z = & 0, \\ 2x & + & y & - & z = & m, \\ 6x & + & 6y & + & m^2 z = & -9. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

2. Calculau els màxims i mínims relatius de la funció $f(x) = x^3 - 3x - 2$ (3 punts), els intervals de creixement i decreixement (3 punts) i feu un esbós de la seva gràfica per x entre -3 i 3. (4 punts)

3. Determinau un pla que, passant per l'origen de coordenades, sigui paral·lel a la recta d'equacions

$$\left.\begin{array}{rl} x + y = & 1, \\ y + z = & 2, \end{array}\right\}$$

i també paral·lel a la recta que passa pels punts de coordenades $(1, 1, 0)$ i $(0, 1, 1)$. (10 punts)

4. El pes dels adults de 40 anys d'una certa comunitat es modela amb una distribució normal de mitjana $\mu = 85$ kg i desviació típica $\sigma = 15$ kg. Ens demanen:

a) Quin percentatge de la població té sobrepès? Entenem que una persona adulta de 40 anys té sobrepès si pesa més de 100 kg. (4 punts)

b) Consideram el col·lectiu dels individus més prims de la comunitat. Si ens diuen que aquest col·lectiu representa el 40% de tots els individus de la comunitat, quin és el pes màxim d'un individu del col·lectiu? (6 punts)

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2019

Model 2

OPCIÓ B

1. Considerem la matriu i els vectors següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}.$$

Trobau x, y i z perquè se satisfaci:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = \mathbf{d}.$$

(10 punts)

2. Considerem la regió delimitada per la funció $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, l'eix d'abscisses o eix OX i les rectes verticals $x = -1$ i $x = 1$. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'àrea de la regió. (4 punts)

3. Considerem els punts $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$ i $C(0,1,1)$. Calculau l'àrea del triangle que formen els punts A, B i C (5 punts) i determinau l'angle que formen els vectors $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{AC}$. (5 punts)

4. S'ha fet un estudi sobre la por de volar i el nivell d'estrès en una certa comunitat. Ens diuen que el 60% dels individus no tenen por de volar, el 50% té un nivell baix d'estrès, el 25%, un nivell mitjà, i el 5% té un nivell alt d'estrès i por de volar. Sabent, a més a més, que el 5% dels individus té un nivell mitjà d'estrès i no té por de volar, es demana:

a) Probabilitat que un individu de la comunitat tingui un nivell d'estrès mitjà i por de volar. (3 punts)

b) Sabent que un individu té por de volar, quina és la probabilitat que tingui un nivell baix d'estrès? (3 punts)

c) Són independents els esdeveniments "nivell d'estrès baix" i "por de volar"? Raonau la resposta. (4 punts)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2019

Model 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

OPCIÓ A

Problema A.1:

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 3y & + & 2z = & 0, \\ 2x & + & y & - & z = & m, \\ 6x & + & 6y & + & m^2 z = & -9. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què sigui compatible indeterminat. (3 punts)

Solución:

a) Para discutir el sistema calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & m \\ 6 & 6 & m^2 & -9 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz de los coeficientes es siempre mayor o igual a 2, pues hay menores de orden 2 distintos de cero: $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$. Calculamos el determinante y lo igualamos a cero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & m^2 \end{vmatrix} = 4m^2 + 24 - 18 - (12 - 24 + 6m^2) = -2m^2 + 18 = 0 \to m = \pm 3.$$

Si $m \neq \pm 3$ el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada es 3, por lo que el sistema es compatible determinado.

Si $m = -3$, entonces:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 6 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 90 \neq 0$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2, y el rango de la matriz ampliada es 3, por lo que el sistema es incompatible.

Si $m = +3$, entonces:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2, y el rango de la matriz ampliada es también 2, por lo que el sistema es compatible indeterminado.

Si $m \neq \pm 3$, sistema compatible determinado. Si $m = -3$, sistema incompatible. Si $m = +3$, sistema compatible indeterminado.

b) Resolvemos el sistema en este último caso:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & -4 & 6 \end{array}\right)$$

Usamos el método de Gauss. Dividimos por 3 la tercera fila. Restamos a la segunda la tercera. Restamos a la primera la segunda multiplicada por 2. La tercera fila es igual a la segunda, luego:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 0 \\ y + 4z = -6 \end{cases} \to \begin{cases} 4x + 3(-4z-6) + 2z = 4x - 12z - 18 + 2z = 0 \\ y = -4z - 6 \end{cases}$$
$$\to \begin{cases} x = \dfrac{10}{4}z + \dfrac{18}{4} = \dfrac{5}{2}z + \dfrac{9}{2} \\ y = -4z - 6 \\ z = z \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\begin{cases} x = \dfrac{5}{2}z + \dfrac{9}{2} \\ y = -4z - 6 \\ z = z \end{cases}}$$

Tiene infinitas soluciones

Problema A.2:

2. Calculau els màxims i mínims relatius de la funció $f(x) = x^3 - 3x - 2$ (3 punts), els intervals de creixement i decreixement (3 punts) i feu un esbós de la seva gràfica per x entre -3 i 3. (4 punts)

Solución:

Para determinar los extremos relativos utilizamos la primera derivada de la función:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

La derivada se anula en $x = \pm 1$. Para determinar si son máximos o mínimos utilizamos la derivada segunda:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f''(x) = 6x \rightarrow f''(1) = 6(1) = 6 > 0 \rightarrow f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$$

Si la derivada segunda es positiva el punto es un mínimo relativo, y si es negativa un máximo.

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 \rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 2 = 0 \rightarrow f(1) = (1)^3 - 3(1) - 2 = -4$$

La función tiene un **máximo** relativo en el punto $\mathbf{(-1, 0)}$ y un **mínimo** relativo en $\mathbf{(1, -4)}$**.**

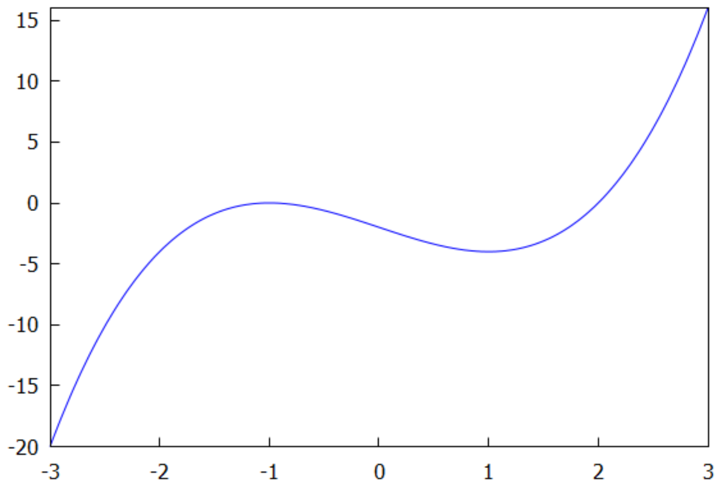
Si la derivada primera es positiva la función es creciente, y si negativa, decreciente: $f'(x) = 3x^2 - 3$. Para $x < -1$, la derivada primera es positiva, luego la función es creciente. Para $-1 < x < 1$, la derivada primera es negativa, luego la función es decreciente. Para $x > 1$ la derivada primera vuelve a ser positiva, luego la función es creciente.

La función es **creciente** en $\mathbf{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}$ y **decreciente** en $\mathbf{(-1, 1)}$**.**

Para hacer el esbozo de la gráfica, buscamos los puntos de intersección con los ejes coordenados: Para $x = 0$, $y = -2$. Para $x = -1$, $y = 0$. Por Ruffini eliminamos esta raíz -1, resolvemos la ecuación de segundo grado y las nuevas raíces son 2 y -1. Por tanto, en $(-1, 0)$ hay una raíz doble. Los otros puntos de corte son: $(2, 0)$ y $(0, -2)$.

Para $x = 3$, $f(x) = x^3 - 3x - 2 \rightarrow f(3) = (3)^3 - 3(3) - 2 = 27 - 9 - 2 = 16 \rightarrow (3, 16)$

Para $x = -3$ $f(x) = x^3 - 3x - 2 \rightarrow f(-3) = (-3)^3 - 3(-3) - 2 = -27 + 9 - 2 = -20 \rightarrow (-3, -20)$



CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.3:

3. Determinau un pla que, passant per l'origen de coordenades, sigui paral·lel a la recta d'equacions

$$\left.\begin{array}{r} x+y= & 1, \\ y+z= & 2, \end{array}\right\}$$

i també paral·lel a la recta que passa pels punts de coordenades $(1,1,0)$ i $(0,1,1)$. (10 punts)

Solución:

Para que el plano sea paralelo a una recta, el vector de dirección de la recta es un vector de orientación del plano.

La recta:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ y=y \\ z=2-y \end{cases}$$

Tiene de vector de dirección: (–1, 1, –1).

La recta que pasa por los puntos (1, 1, 0) y (0, 1, 1) tiene de vector de dirección:

(1, 1, 0) – (0, 1, 1) = (1, 0, –1).

Además, nos dicen que el plano pasa por el origen de coordenadas.

Por tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -x - 2y - z = x + 2y + z = 0$$

Ecuación del plano: $\boldsymbol{x+2y+z=0}$

Problema A.4:

4. El pes dels adults de 40 anys d'una certa comunitat es modela amb una distribució normal de mitjana $\mu = 85$ kg i desviació típica $\sigma = 15$ kg. Ens demanen:

a) Quin percentatge de la població té sobrepès? Entenem que una persona adulta de 40 anys té sobrepès si pesa més de 100 kg. (4 punts)

b) Consideram el col·lectiu dels individus més prims de la comunitat. Si ens diuen que aquest col·lectiu representa el 40% de tots els individus de la comunitat, quin és el pes màxim d'un individu del col·lectiu? (6 punts)

Solución:

Nos dicen que la media es 85 y que la desviación típica es 15.

a) La variable sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma) = N(85, 15)$.

Nos piden calcular el porcentaje de la población que tiene sobrepeso, y nos dicen que lo tienen si pesa más de 100 kg. Tenemos que:

$P(x > 100) = P(z > \frac{100-85}{15}) = (P > 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - 0.8413 = \ 0.1587.$

Aproximadamente el **16** % de la población tiene sobrepeso.

b) Queremos seleccionar el 40 %.

$$P(x < a) = \frac{40}{100} = 0.4 = \ P(z < \frac{a-85}{15})$$

Buscamos en las tablas. Pero el valor 0.4 no aparece, por lo que sabemos que es negativo. Buscamos el valor 0.6, y por la simetría de la curva normal sabemos que:

$$P(z < \frac{a-85}{15}) = \frac{0.25 + 0.26}{2} = 0.255$$

$$-\frac{a-85}{15} = 0.255 \to a = 85 - (0.255)\cdot(15) = 81.175$$

El peso máximo es de **81.175** kg.

Autor: Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

OPCIÓ B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

1. Considerem la matriu i els vectors següents:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{d}=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}.$$

Trobau x, y i z perquè se satisfaci:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}-2\mathbf{c}=\mathbf{d}.$$

(10 punts)

Solución:

Queremos resolver la ecuación:

$$A\cdot b-2c=d\to\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2x+y\\x+2y\\x\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2x+y-2\\x+2y-2\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}$$

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases}2x+y-2=z\\x+2y-2=z\\x=z\end{cases}\to\begin{cases}2x+y-2=x\\x+2y-2=x\\x=z\end{cases}\to\begin{cases}x+y=2\\2y=2\\x=z\end{cases}\to\begin{cases}x+1=2\\y=1\\x=z\end{cases}\to\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$$

$$\boldsymbol{x=1;\ y=1; z=1.}$$

Problema B.2:

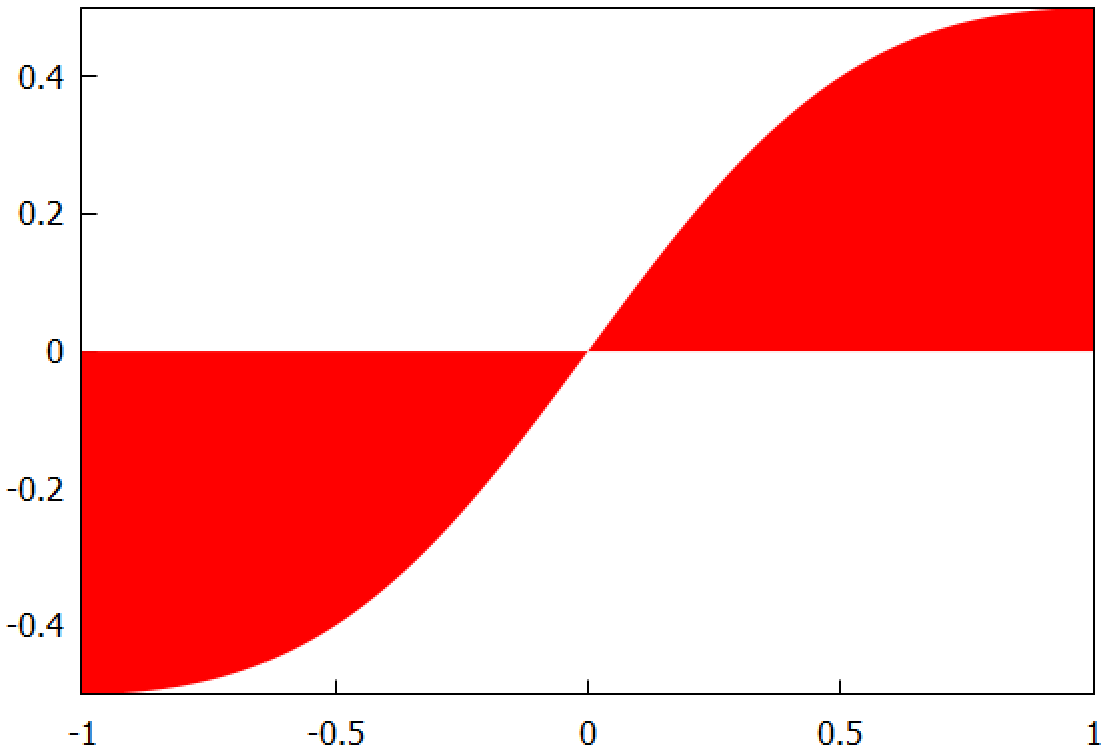
2. Considerem la regió delimitada per la funció $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, l'eix d'abscisses o eix OX i les rectes verticals $x = -1$ i $x = 1$. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'àrea de la regió. (4 punts)

Solución:

Hallamos los puntos de intersección entre la función y las rectas dadas:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \to f(-1) = \frac{-1}{1+(-1)^2} = \frac{-1}{2} \to f(1) = \frac{1}{1+(1)^2} = \frac{1}{2} \to (-1, \frac{-1}{2});\ (1, \frac{1}{2}).$$

Para esbozar la gráfica de la función observamos que corta a los ejes en un único punto, el origen de coordenadas: (0, 0). La función tiene simetría impar. Y en el intervalo (-1, 1) es siempre creciente.



El área pedida será la integral definida entre –1 y 1. Pero al ser la gráfica simétrica podemos calcular la integral entre 0 y 1 y multiplicar por 2.

$$Área = \int_{-1}^{1} \left(\frac{x}{1+x^2}\right) dx = 2\int_{0}^{1} \left(\frac{x}{1+x^2}\right) dx = \int_{0}^{1} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx = [ln(1+x^2)]\Big|_0^1$$

$$= ln(2) - ln(1) = ln(2)u^2 \cong 0.7u^2$$

$$Área = \boldsymbol{ln(2)u^2 \cong 0.7u^2}$$

Problema B.3:

3. Considerem els punts $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$ i $C(0,1,1)$. Calculau l'àrea del triangle que formen els punts A, B i C (5 punts) i determinau l'angle que formen els vectors $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{AC}$. (5 punts)

Solución:

Los tres vértices del triángulo son: $A(0,0,0); B(1,1,0); C(0,1,1)$.

Calculamos los vectores: $\overline{BA}(1,1,0)\ y\ \overline{CA}(0,1,1)$.

El área pedida es:

$$Área = \frac{1}{2}|\overline{BA}xCA| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}|i-j+k| = \frac{1}{2}\sqrt{1+1+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Área = \frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2$$

Calculamos el ángulo que forman los vectores: $\overline{AB}(-1,-1,0)$ y $\overline{AC}(0,-1,-1)$.

Sabemos que el coseno del ángulo que forman es igual al producto escalar dividido por los módulos:

$$cos\alpha = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|} = \frac{(-1,-1,0)\cdot(0,-1,-1)}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(0)^2}\cdot\sqrt{(0)^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{0+1+0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, sabemos que forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ $radianes\ o\ de\ \mathbf{60°}$.

Forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ $radianes\ o\ de\ \mathbf{60°}$.

Problema B.4:

4. S'ha fet un estudi sobre la por de volar i el nivell d'estrès en una certa comunitat. Ens diuen que el 60% dels individus no tenen por de volar, el 50% té un nivell baix d'estrès, el 25%, un nivell mitjà, i el 5% té un nivell alt d'estrès i por de volar. Sabent, a més a més, que el 5% dels individus té un nivell mitjà d'estrès i no té por de volar, es demana:

a) Probabilitat que un individu de la comunitat tingui un nivell d'estrès mitjà i por de volar. (3 punts)
b) Sabent que un individu té por de volar, quina és la probabilitat que tingui un nivell baix d'estrès? (3 punts)
c) Són independents els esdeveniments "nivell d'estrès baix" i "por de volar"? Raonau la resposta. (4 punts)

Solución:

Llevamos los porcentajes del enunciado a una tabla de contingencia:

Miedo a volar	Nivel bajo de estrés (B)	Nivel medio (M)	Nivel alto (A)	Total
Si			5	
No		5		60
Total	50	25		100

Utilizando las propiedades de una tabla, rellenamos lo que falta:

Miedo a volar	Nivel bajo de estrés (B)	Nivel medio (M)	Nivel alto (A)	Total
Si	***15***	***20***	5	***40***
No	***35***	5	***20***	60
Total	50	25	***25***	100

a) La probabilidad de que tenga un nivel medio y miedo a volar vemos en la tabla que es 20/100.

$$P(M \cap Si) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

b) La probabilidad de que tenga un nivel bajo de estrés condicionada a que tenga miedo a volar es:

$$P(B/Si) = \frac{P(B \cap Si)}{P(Si)} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0.375.$$

c) Si dos sucesos son independientes la probabilidad de la intersección es igual al producto de probabilidades.

$$P(B \cap Si) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

$$P(B) \cdot P(Si) = \frac{50}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \neq \frac{3}{20}.$$

a) $\boldsymbol{P(M \cap Si) = 0.2}$. b) $\boldsymbol{P(B/Si) = 0.375}$. c) Los sucesos son **dependientes**.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Canarias

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2018–2019

MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO
Convocatoria:	

Instrucciones:
. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.
. Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

OPCIÓN A

1. Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 metros de una tela metálica. Se ha decidido dejar una abertura de 20 metros sin vallar en uno de los lados de la parcela para colocar una puerta. Calcular las dimensiones de todos los lados de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera. Calcular el valor de dicha área máxima. (2.5 ptos)

2. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y sea I_2 la matriz identidad de orden 2

a) Calcular el valor de x de modo que se verifique la igualdad: $B^2 = A$ (0.5 ptos)

b) Calcular el valor de x para que $A - I_2 = B^{-1}$ (1.5 ptos)

c) Calcular el valor de x para que $A \cdot B = I_2$ (0.5 ptos)

3. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - y + 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + y - z = 0$, calcular:

a) La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto B$(2, 2, 3)$ (1.5 ptos)

b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 (1 pto)

4. En un banco se sabe que el tiempo de devolución de un préstamo de 18000€ sigue una distribución normal de media 60 meses y desviación típica 8 meses. Se elige al azar un préstamo de 18000€ realizado en dicho banco:

a) Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses. (0.75 ptos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años? (0.75 ptos)

c) ¿Qué porcentaje de préstamos de 18000€ del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años? (1 pto)

Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2018–2019

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Convocatoria: CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Instrucciones:

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.

. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

. Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

OPCIÓN B

1. Dada la siguiente expresión de la función *f*, de la que se desconocen algunos valores:

$$f(x)=\begin{cases} a-x & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{b}{x}-\ln x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Calcular los valores de a y b para que f sea derivable en todo su dominio.
Escribir la función resultante. (2.5 ptos)

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales: (2.5 ptos)

$$\left.\begin{aligned} 2X+3Y&=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X-2Y&=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

3. Se consideran los puntos A$(2,-1,1)$ y B$(-2,3,1)$ que determinan la recta r

a) Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto P$(-4,17,0)$ (1.25 ptos)

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos. (1.25 ptos)

4. Una planta ensambladora de circuitos recibe componentes procedentes de tres fabricantes A, B y C. El 50% del total de los componentes se compra al fabricante A, mientras que a los fabricantes B y C se le compra un 25% a cada uno. El porcentaje de componentes defectuosos es de un 5% para el fabricante A, el 10% para el fabricante B y el 12% para el fabricante C.

a) Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas. (0.5 ptos)

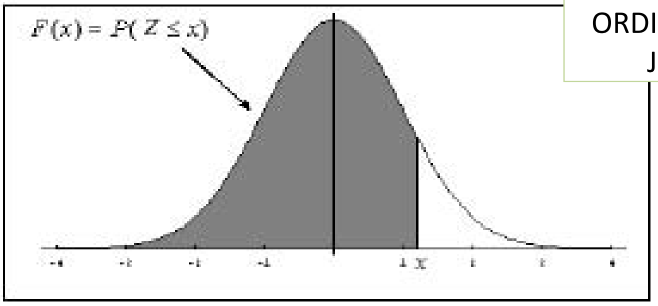
b) El Departamento de Control de la Calidad escoge un circuito al azar en el almacén, hallar la probabilidad de que contenga componentes defectuosos. (1 pto)

c) Escogido al azar un circuito que no tiene componentes defectuosos, ¿qué porcentaje de dichos componentes han sido vendidos por el proveedor B? (1 pto)

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Distrito Universitario de Canarias



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

PRUEBA A

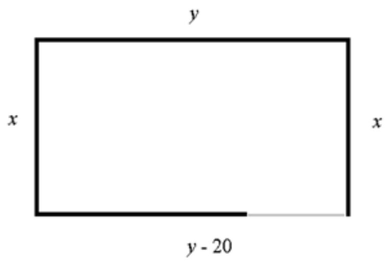
CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

1. Se desea vallar un terreno rectangular usando 100 metros de una tela metálica. Se ha decidido dejar una abertura de 20 metros sin vallar en uno de los lados de la parcela para colocar una puerta. Calcular las dimensiones de todos los lados de la parcela rectangular de área máxima que puede vallarse de esa manera. Calcular el valor de dicha área máxima.

Solución:

Construimos el recinto rectangular



El perímetro de la valla viene dado por $P = x + y + x + y - 20 = 100$m.

Siendo el área del terreno a vallar $A = x \cdot y$.

De donde, $2x + 2y - 20 = 100 \rightarrow 2x + 2y = 120 \rightarrow x + y = 60 \rightarrow y = 60 - x$

Sustituyendo en la función del área se obtiene

$$A = x \cdot y = x \cdot (60 - x) = 60x - x^2$$

Hallamos la primera derivada del área para calcular el punto crítico,

$$A'(x) = 60 - 2x$$

Igualamos a cero $60 - 2x = 0 \rightarrow x = 60/2 \rightarrow x = 30$

Comprobamos si es máximo o mínimo mediante el criterio de la segunda derivada,

$A''(x) = -2 < 0$, podemos afirmar que existe un máximo en $x = 30$ m

Las dimensiones del terreno de área máxima son: $x = 30$ m; $y = 30$ m siendo el *área*: 900 m^2

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.2:

2. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y sea I_2 la matriz identidad de orden 2

a) Calcular el valor de x de modo que se verifique la igualdad: $B^2 = A$

b) Calcular el valor de x para que $A - I_2 = B^{-1}$

c) Calcular el valor de x para que $A \cdot B = I_2$

Solución:

a) Calcular el valor de x de modo que se verifique la igualdad: $B^2 = A$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Entonces si } B^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+1=2 \rightarrow x=1$$

x = 1.

b) Calcular el valor de x para que $A - I_2 = B^{-1}$

Calculemos, si es posible, la matriz inversa de B

Comprobamos que es una matriz regular $|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, B^{-1}$

$$\left.\begin{matrix} B_{11}=1; B_{12}=-1 \\ B_{21}=-1; B_{22}=0 \end{matrix}\right| \quad Adj(B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad [Adj(B)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot (Adj(B))^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado,

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

La igualdad se cumple si,

$$A - I_2 = B^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0$$

c) Calcular el valor de x para que $A \cdot B = I_2$

$$A \cdot B = I_2 \Leftrightarrow A = B^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -1$$

***b)* x = 1. c) x = –1**

Problema A.3:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

3. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - y + 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + y - z = 0$, calcular:

a) La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto $B(2,2,3)$

b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2

Solución:

a) La ecuación de la recta s paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto $B(2, 2, 3)$

Sea la recta t de intersección de los planos π_1 y π_2. Su ecuación se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos planos,

$$t \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}, \text{sea } z = \lambda, \lambda \in R, \text{ entonces haciendo } z = \lambda: \begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + y = \lambda \end{cases},$$

Buscamos la ecuación paramétrica, sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$3x = -3 + \lambda \quad x = -1 + \frac{1}{3}\lambda$, luego despejando $y = 2 + \frac{1}{3}\lambda$, luego la ecuación de t es:

$$t \equiv \begin{cases} x = -1 + \frac{1}{3}\lambda \\ y = 2 + \frac{1}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in R$$

La recta s, por ser paralela a los planos π_1 y π_2, será paralela a la recta t de intersección de ambos planos, luego su vector dirección será $\vec{v}_s = (1, 1, 3)$, y como pasa por el punto $B(2, 2, 3)$, sus ecuaciones paramétricas y continuas son:

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}, \mu \in R \quad s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$$

Otra forma:

Sean $\overrightarrow{A_1} = (1, -1, \ 0) \ y \ \overrightarrow{A_2} = (2, 1, \ -1)$ los vectores normales a los planos π_1 y π_2 respectivamente, entonces el vector dirección de la recta s paralela a ambos planos viene dado por $\overrightarrow{V_s} = \overrightarrow{A_1} x \overrightarrow{A_2}$ = (1, 1, 3)

Con vector y punto damos la ecuación de la recta s

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}, \mu \in R \quad s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$$

b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2

El ángulo α formado por los planos π_1 y π_2 es el mismo que forman los vectores perpendiculares a cada uno de ellos. Si observamos las ecuaciones generales de los planos π_1 y π_2, dos vectores perpendiculares a cada uno de ellos serán: $\overrightarrow{A_1} = (1, -1, \ 0) \ y \ \overrightarrow{A_2} = (2, 1, \ -1)$. Por tanto,

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{A_1} \cdot \overrightarrow{A_2}|}{|\overrightarrow{A_1}| \cdot |\overrightarrow{A_2}|}$$

$$cos\alpha = \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2 - 1 + 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \qquad \alpha = 73.22°$$

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.4:

4. En un banco se sabe que el tiempo de devolución de un préstamo de 18000€ sigue una distribución normal de media 60 meses y desviación típica 8 meses. Se elige al azar un préstamo de 18000€ realizado en dicho banco:

a) Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelto, al menos en 4 años?

c) ¿Qué porcentaje de préstamos de 18000€ del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años?

Solución:

Definimos la variable X: "tiempo de devolución de un préstamo de 18 000 € en meses"

$$X \sim N(60, 8)$$

a) Calcular la probabilidad de que dicho préstamo se devuelva como mucho en 70 meses.

$$P(X < 70) = P(Z < \frac{70 - 60}{8}) = PZ < 1.25) = 0.8944$$

$$\boldsymbol{P(X < 70) = 0.8944}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que fuera devuelt… n 4 años? 4 años = 48 meses

$$P(X > 48) = P(Z > \frac{48 - 60}{8}) = P(Z > -1.5) = P(Z < 1.5) = 0.9332$$

$$\boldsymbol{P(X > 48) = 0.9332}$$

c) ¿Qué porcentaje de préstamos de 18 000 € del mismo banco se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años? (Entre 48 y 72 meses)

$$P(48 < X < 72) = P(\frac{48 - 60}{8} < Z < \frac{72 - 60}{8}) = P(-1.5 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < -1.5) =$$

$$= 0.9332 - (1 - 0.9332) = 0.8644$$

El **86.44 %** de los préstamos se formalizan para ser devueltos entre los 4 y los 6 años

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

PRUEBA B

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema B.1:

1. Dada la siguiente expresión de la función f, de la que se desconocen algunos valores:

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x} - \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcular los valores de a y b para que f sea derivable en todo su dominio. Escribir la función resultante.

Solución:

La función dada está definida por partes, y es continua tanto para valores de $x < 1$ como $x > 1$.

Para que una función sea derivable en un punto, debe ser continua en ese punto.

Analizamos su continuidad en $x = 1$

f es continua si:

$$1)\ \exists f(1)$$

$$2)\ \exists \lim_{x\to 1} f(x)$$

$$3)\ f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$$

Comprobamos $f(1) = a - 1$

Hallamos $\lim_{x\to 1} f(x)$ comprobando para qué valores de a y b los límites laterales existen y son iguales

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (a - x) = a - 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{b}{x} - ln x\right) = b$$

Por tanto, los límites laterales son iguales si $b = a - 1$ y la función es continua si se cumple $b = a - 1$

Comprobamos derivabilidad en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < 1 \\ \dfrac{-b}{x^2} - \dfrac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$$

Hallamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (-1) = -1 \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{-b}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = -b - 1$$

Los límites laterales son iguales si $-b - 1 = -1 \rightarrow b = 0$ y, sustituyendo en $b = a - 1$, se obtiene que $a = 1$

Conclusión: la función es continua y derivable en $x = 1$ para $\boldsymbol{a = 1}$ y $\boldsymbol{b = 0}$.

La función que resulta es

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & si \quad x \leq 1 \\ -ln x & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left.\begin{array}{l} 2X+3Y=\begin{pmatrix}8 & -3 & 4\\ 7 & -1 & 12\end{pmatrix} \\ \\ X-2Y=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ -7 & 3 & -1\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} 2X+3Y=A(I) \\ X-2Y=B(II)\end{array}\right\} \to -2(II) \to \left.\begin{array}{r} 2X+3Y=A \\ -2X+4Y=-2B\end{array}\right\} \to (I)-2(II) \to 7Y=A-2B \to$$

$$Y=\frac{1}{7}(A-2B) \qquad\qquad X=\frac{1}{2}(A-3Y)$$

$$Y=\frac{1}{7}(A-2B)=Y=\frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix}8 & -3 & 4\\ 7 & -1 & 12\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ -7 & 3 & -1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix}8 & -3 & 4\\ 7 & -1 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6 & 4 & 4\\ -14 & 6 & -2\end{pmatrix}\right)$$

$$Y=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}(A-3Y)=X=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}8 & -3 & 4\\ 7 & -1 & 12\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}8 & -3 & 4\\ 7 & -1 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & -3 & 0\\ 9 & -3 & 6\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ -2 & 2 & 6\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3}\end{pmatrix};\ \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$$

Problema B.3:

3. Se consideran los puntos $A(2,-1,1)$ y $B(-2,3,1)$ que determinan la recta r

a) Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto $P(-4,17,0)$

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

Solución:

a) Calcular la recta perpendicular a r que pasa por el punto $P(-4, 17, 0)$

La recta r tiene por vector director $\overrightarrow{AB} = (-4, 4, 0)$

La ecuación paramétrica (usando A) de la recta es: $r \equiv \begin{cases} x=2-4t \\ y=-1+4t, t\in R \\ z=1 \end{cases}$

La ecuación paramétrica (usando B) de la recta es: $r \equiv \begin{cases} x=-2-4t \\ y=3+4t \quad ,t\in R \\ z=1 \end{cases}$

Construimos el vector de un punto cualquiera de la recta r al punto P dado,

$\overrightarrow{PX}$ (6-4t, -18+4t, 1) (usando A); $\overrightarrow{PX}$ (2-4t, -14+4t, 1) (usando B)

El producto escalar tiene que ser cero para que sean perpendiculares:

$\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{AB} = -24+16t - 72 + 16t = 0; -96 + 32t = 0; t = 3$ (usando A)

$\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{AB} = -8+16t - 56 + 16t = 0; -64 + 32t = 0; t = 2$ (usando B)

Por tanto, el vector perpendicular es: $\overrightarrow{PX} = (6,-6,1)$, la ecuación de la recta buscada es:

$s \equiv \begin{cases} x=-4-6\mu \\ y=17-6\mu, \mu\in R \\ z=\mu \end{cases}$ $s \equiv \dfrac{x+4}{-6} = \dfrac{y-17}{-6} = z$

b) El vector $\overrightarrow{AB} = (-4, 4, 0)$ será el vector director de la recta que contiene a los puntos A y B, pero también el vector normal del plano del que son simétricos.

Ecuación general del plano: $-4x + 4y + D = 0$

Buscamos el punto medio M del segmento AB que será el punto que estará en el plano de simetría:

$M = A + ½\overrightarrow{AB} = (2, -1, 1) + (-2, 2, 0) = (0, 1, 1)$

Este punto estará en el plano: $-4\cdot0 + 4\cdot1 + D = 4 + D = 0$; luego $D = -4$

Por tanto el plano de simetría es: $-4x + 4y = 4$; o lo que es lo mismo:

$$\mathbf{-x + y = 1}$$

Problema B.4:

4. Una planta ensambladora de circuitos recibe componentes procedentes de tres fabricantes A, B y C. El 50% del total de los componentes se compra al fabricante A, mientras que a los fabricantes B y C se le compra un 25% a cada uno. El porcentaje de componentes defectuosos es de un 5% para el fabricante A, el 10% para el fabricante B y el 12% para el fabricante C.

a) Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas.

b) El Departamento de Control de la Calidad escoge un circuito al azar en el almacén, hallar la probabilidad de que contenga componentes defectuosos.

c) Escogido al azar un circuito que no tiene componentes defectuosos, ¿qué porcentaje de dichos componentes han sido vendidos por el proveedor B?

Solución:

Se definen los eventos:

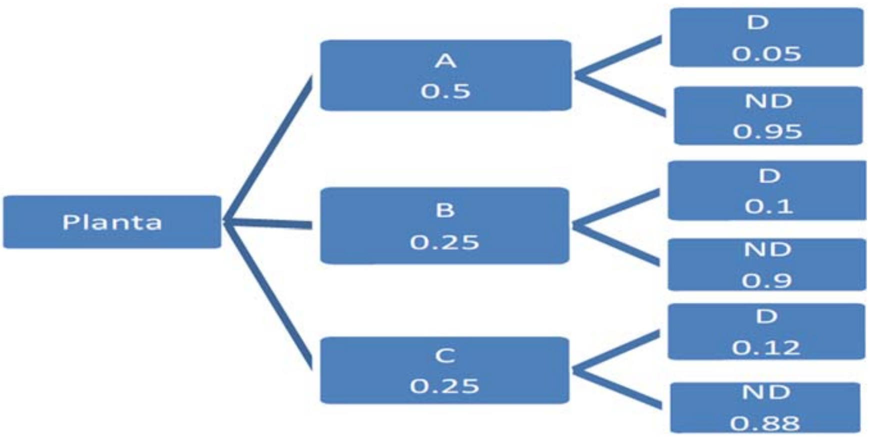
A: componentes fabricados por el fabricante A

B: componentes fabricados por el fabricante B

C: componentes fabricados por el fabricante C

D: circuito con componentes defectuosos

a) Construir el diagrama de árbol con las probabilidades asignadas.



b) Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total,

$P(D) = P(A)\cdot P(D/A) + P(B)\cdot P(D/B) + P(C)\cdot P(D/C)$ = 0.5 · 0.05 + 0.25 · 0.1 + 0.25 · 0.12 = 0.08

Existe un 0.08, (8 %) de probabilidad de que un circuito ensamblado en la planta contenga componentes defectuosos.

c) Por el Teorema de Bayes:

$$P(B/ND) = \frac{P(B)\cdot P(ND/B)}{P(ND)} = \frac{0.25\cdot 0.9}{1-0.08} = 0.2446$$

Existe un 0.2446 (24.6 %) de probabilidad de que un circuito que no tiene componentes defectuosos haya sido vendido por el proveedor B.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2018–2019

MATERIA: MATEMÁTICAS II (3)

Convocatoria: CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Instrucciones:

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.

. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

. Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

OPCIÓN A

1. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$

Calcular los valores de a, b y c sabiendo que se cumplen las condiciones siguientes:

- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abcisa $x = 0$ y $x = -2$
- La función corta el eje OX en el punto $x = 1$

Dar la expresión de la función resultante. (2.5 ptos)

2. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 2 \\ 5x + 2y + 4z = -1 \\ 3x + y + k^2 z = 3k \end{array}\right\}$$

a) Discutirlo para los distintos valores del parámetro k (1.5 ptos)

b) Resolverlo para $k = 2$ (1 pto)

3. Hallar la ecuación de la recta que verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

- es paralela a los planos de ecuaciones: $\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z = 5$
- pasa por el punto $P(2, -1, 5)$ (2.5 ptos)

4. En un supermercado se sabe que el 55% de los clientes traen su propia bolsa. El 30% de los que traen su propia bolsa son hombres y el 40% de los que notraen su propia bolsa son mujeres.

a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado. (0.5 ptos)

b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres? (1 pto)

c) Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa? (1 pto)

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Distrito Universitario Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2018–2019

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(3)
Convocatoria:	CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Instrucciones:

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.

. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

. Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

OPCIÓN B

1. Dada la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta de ecuación $y = x + 2$

a) Hallar los puntos intersección entre las curvas anteriores. (0.5 ptos)

b) Esbozar el gráfico señalando el recinto limitado por ambas curvas. (0.5 ptos)

c) Calcular el área del recinto limitado por ambas curvas. (1.5 ptos)

2. Sea la matriz $C = A \cdot B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar los valores de m para los que existe inversa de la matriz C (1.25 ptos)

b) Calcular la matriz inversa de C en el caso de $m = 2$ (1.25 ptos)

3. Hallar el ángulo que forman el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y el plano que contiene a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = z - 1$$ (2.5 ptos)

4. Una compañía que fabrica ventiladores de CPU sabe que el tiempo de vida (en meses) de sus ventiladores se distribuye según una normal, de media igual a 18 meses y desviación típica 3.6 meses. Elegido un ventilador al azar:

a) Calcular la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses. (0.75 ptos)

b) Calcular la probabilidad de que funcione al menos 1año. (0.75 ptos)

c) Calcular la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años. (1 pto)

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓN A

Problema A.1:

1. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$

Calcular los valores de a, b y c sabiendo que se cumplen las condiciones siguientes:

- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abcisa $x = 0$ y $x = -2$
- La función corta el eje OX en el punto $x = 1$

Dar la expresión de la función resultante.

Solución:

Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -2 \rightarrow f'(0) = 0$ y $f'(-2) = 0$

Hallamos la primera derivada de la función $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

Evaluamos,

$$f'(0) = c = 0$$

$$f'(-2) = -32 + 12a - 4b = 0 \rightarrow 3a - b = 8 \qquad \text{(I)}$$

- La función corta el eje OX en el punto $x = 1 \rightarrow f(1) = 1 + a + b + 7 = 0 \rightarrow a + b = -8$ (II)

Resolvemos el sistema de ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{l} 3a - b = 8 \\ a + b = -8 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow a = 0 \text{ y } b = -8$$

Siendo la función:

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$.

Problema A.2:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

2. Dado el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 2 \\ 5x + 2y + 4z &= -1 \\ 3x + y + k^2 z &= 3k \end{aligned}\right\}$$

a) Discutirlo para los distintos valores del parámetro k

b) Resolverlo para $k = 2$

Solución:

a) La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & k^2 \end{pmatrix}; \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & k & 3k \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de A y los valores de a que lo anulan.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & k^2 \end{vmatrix} = 1 - k^2, \text{ entonces: } |A| = 0 \Rightarrow k = \pm 1$$

$$\text{Por otro lado: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3k \end{vmatrix} = -3k - 3 \text{ que será 0 para } k = -1$$

$$\text{Por otro lado el menor } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Si $\boldsymbol{k \neq \pm 1}$, entonces Rang (A) = 3 = Rang$(A*)$ = número de incógnitas = 3

Entonces, por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es **compatible determinado** y tiene una única solución.

Si $\boldsymbol{k = 1}$, entonces: $\text{Rang}(A) = 2 \neq \text{Rang}(A*) = 3$, entonces por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es **incompatible** y, por tanto, no tiene solución.

Si $\boldsymbol{k = -1}$, Rang $(A) = 2 =$ Rang$(A*) <$ nº de incógnitas,
Entonces, por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es **compatible indeterminado** y tendrá infinitas soluciones.

b) Para $k = 2$ tenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x+y+3z&=25 \\ x+2y+4z&=-13 \\ x+y+4z&=6 \end{aligned}\right\}$$

Como $|A|=1-a2=1-4=-3$, el sistema es compatible determinado

Resolviendo por la Regla de Cramer (o cualquier otro método)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{27}{-3} = -9 \ ; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3$$

Y la solución es $(1, -9, 3)$

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.3:

3. Hallar la ecuación de la recta que verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

- es paralela a los planos de ecuaciones: $\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z = 5$
- pasa por el punto $P(2, -1, 5)$

Solución:

Vector normal al plano π_1 $\quad \vec{n}_{\pi_1} = (1, -3, 1)$

Vector normal al plano π_2 $\quad \vec{n}_{\pi_2} = (2, -1, 3)$

Si $r // \pi_1$ y $r // \pi_2 \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}$

$$\vec{v}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8i - j + 5k \rightarrow \vec{v}_r = (-8, -1, 5)$$

La ecuación de la recta que pasa por $P(2, -1, 5)$ con dirección $\vec{v}_r = (-8, -1, 5)$ es:

$$r \equiv (x, y, z) = (2, -1, 5) + t(-8, -1, 5) or \equiv \frac{x-2}{-8} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

$$\boldsymbol{r \equiv (2, -1, 5) + t(-8 \ -1, 5)}$$

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.4:

4. En un supermercado se sabe que el 55% de los clientes traen su propia bolsa. El 30% de los que traen su propia bolsa son hombres y el 40% de los que notraen su propia bolsa son mujeres.

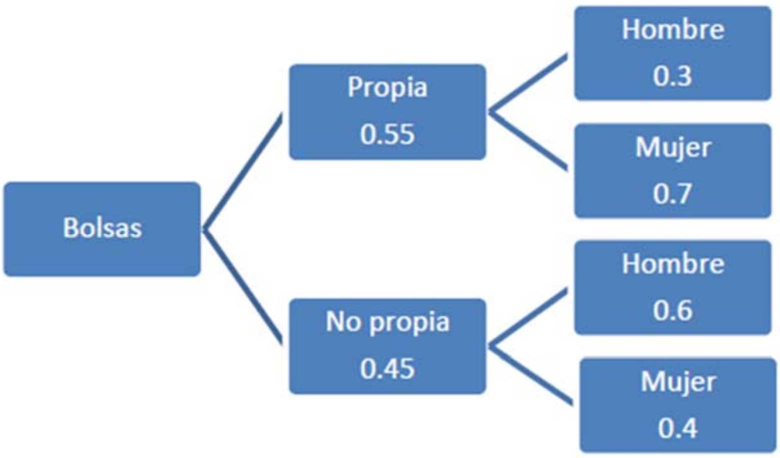
a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.

b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres?

c) Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa?

Solución:

Definimos los eventos:
P: Que la bolsa de los clientes es propia
NP: Que la bolsa de los clientes no es propia
M: Que el cliente es mujer
H: Que el cliente es hombre
a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.



b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres?

Por el Teorema de la probabilidad total

$P(M) = P(P) \cdot P(M/P) + P(NP) \cdot P(M/NP)$

$P(M) = 0.55 \cdot 0.7 + 0.45 \cdot 0.4 = 0.565$

El **56.5 %** de los clientes que entran al supermercado, traigan o no su propia bolsa, son mujeres.

c) Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa?

Aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(P/H) = \frac{P(P) \cdot P(H/P)}{P(H)} = \frac{0.55 \cdot 0.3}{1 - 0.565} = 0.379$$

Existe un **0.379** (38 %) de probabilidades de que un cliente elegido al azar, siendo hombre, haya traído su propia bolsa.

OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

1. Dada la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta de ecuación $y = x + 2$

   a) Hallar los puntos intersección entre las curvas anteriores.

   b) Esbozar el gráfico señalando el recinto limitado por ambas curvas.

   c) Calcular el área del recinto limitado por ambas curvas.

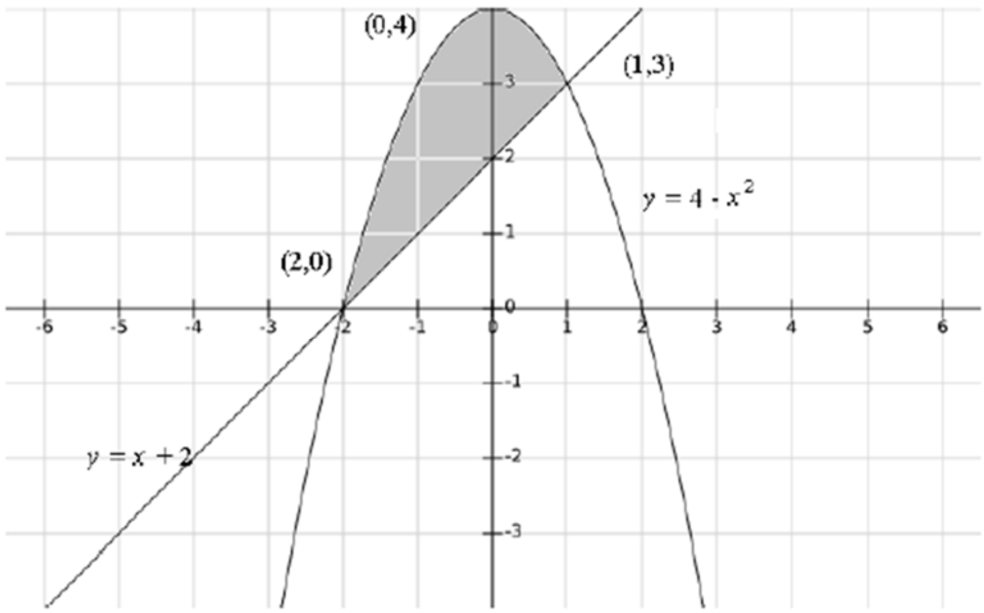
Solución:

a) Hallar los puntos intersección entre las curvas anteriores

$4 - x^2 = x + 2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$ o $x = -2$

Siendo los puntos de intersección (−2, 0) y (1, 3)

b) Esbozar el gráfico de ambas.



c) Calcular el área del recinto limitado por ambas curvas

$$\int_{-2}^{1} [(4 - x^2) - (x + 2)]dx = \int_{-2}^{1} (- x^2 - x + 2)dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}u^2$$

Área $= \frac{9}{2}u^2$

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

2. Sea la matriz $C = A \cdot B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar los valores de m para los que existe inversa de la matriz C

b) Calcular la matriz inversa de C en el caso de $m = 2$

Solución:

a) Encontrar los valores de m para los que C tenga inversa.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m+1 & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

$\exists C \Leftrightarrow |C| \neq 0$ hallamos el determinante de la matriz C

$$|C| = \begin{vmatrix} 2m+1 & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{vmatrix} = 2m^2 - 2$$

$$|C| = 2m^2 - 2 = 0 \text{ si } m \neq \pm 1$$

Por tanto, $\exists C^{-1} \forall\, m \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$

Para ***m*** distinto de **1** y de **-1** existe la **inversa** de C.

b) Calcular la matriz inversa de C para $m = 2$

Para $m = 2$ $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $|C| = 6$

$$C^{-1} = \frac{Adj(C)^t}{|C|} \quad Adj(C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \quad Adj(C)^t = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}}$$

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.3:

3. Hallar el ángulo que forman el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y el plano que contiene a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = z - 1$$

Solución:

Vector normal al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ $\quad \vec{n}_\pi = (2,-1,1)$

Vector dirección de la recta r $\quad \vec{v}_r = (-1,1,1)$

Vector dirección de la recta s $\quad \vec{v}_s = (-2,0,1)$

Ecuaciones de las rectas r y s como intersección de dos planos

$$r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \qquad r \cap s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ y = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rang}(A) = 3$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{col1} = \text{col4} \rightarrow |A^*| = 0 \rightarrow \text{Rang}(A^*) = 3$$

Como $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^*)$ = número de incógnitas, es un sistema compatible determinado, las rectas se cortan.

Sea π' el plano que contiene a las rectas r y s, el vector normal a dicho plano viene dado por,

$$\vec{n}_{\pi'} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i - j + 2k \rightarrow \vec{n}_{\pi'} = (1,-1,2)$$

El ángulo que forman los planos π y π' es

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'}}{\|\vec{n}_\pi\| \|\vec{n}_{\pi'}\|} = \frac{5}{(\sqrt{6})(\sqrt{6})} = \frac{5}{6} \rightarrow \alpha = 33.5^o$$

$\cos \alpha = 33.5$ °.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.4:

4. Una compañía que fabrica ventiladores de CPU sabe que el tiempo de vida (en meses) de sus ventiladores se distribuye según una normal, de media igual a 18 meses y desviación típica 3,6 meses. Elegido un ventilador al azar:

a) Calcular la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses.

b) Calcular la probabilidad de que funcione al menos 1año.

c) Calcular la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años.

Solución:

Se define la variable normal X: "periodo de vida en meses de ventiladores de CPU"

$$X \sim N\,(18, 3.6)$$

a) Calcular la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses.

$P(X < 16) = P(Z < \frac{16-18}{3.6}) = P(Z < -0.56) = 1 - P(Z < 0.56) = 1 - 0.7123 = 0.2877.$

Existe una probabilidad de **0.2877** (un 28.77 %) de que un ventilador funcione como mucho 16 meses.

b) Calcular la probabilidad de que funcione al menos 1 año. (1 año = 12 meses)

$P(X > 12) = P(Z > -1.67) = P(Z < 1.67) = 0.9525.$

Existe una probabilidad de **0.9525** (95.25 %) de que un ventilador funcione al menos un año.

c) Calcular la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años. (entre 12 y 24 meses)

$P(12 < X < 24) = P(-1.66 < Z < 1.66) = 0.9515 - (1 - 0.9515) = 0.903.$

Existe una probabilidad de **0.903** (90 %) de que un ventilador funcione entre 1 y 2 años.

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Cantabria

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: José Gallegos Fernández

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2019

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Considere el sistema $\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro t.

1) [1.5 PUNTOS] Clasifique, en función del valor de t, el tipo de sistema.

2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Ejercicio 2

Considere la función $f(x) = (x + 10)e^{2x}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule una primitiva $F(x)$ tal que $F(0) = 0$. Use la derivada para comprobar su solución.

2) [0.5 PUNTOS] Calcule $\int_0^5 f(x)dx$.

Ejercicio 3

Tomemos el plano $\Pi \equiv 2x + ay + z = 2$ y la recta $r(t) \equiv (0,0,0) + t\overrightarrow{(2,1,1)}$.

1) [0.5 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean ortogonales.

2) [2 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean paralelos. Calcule la distancia entre r y Π en este caso.

Ejercicio 4

Una prueba rápida para detectar una enfermedad da un 2% de falsos positivos (personas sanas en las que la prueba da positivo, clasificándolas como enfermas) y un 1% de falsos negativos (personas enfermas en las que la prueba da negativo, clasificándolas como sanas). En una población hay un 4% de enfermos.

1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que el test dé un resultado negativo.

2) [1 PUNTO] La prueba da un resultado positivo (clasificando a la persona como enferma). Calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Sean $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcule, razonadamente, el rango de M.

2) [2 PUNTOS] Determine todos los vectores v tales que $M^2 \cdot v = M^{-1} \cdot v$.

Ejercicio 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{a - x^2}{2 + x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

1) [1 PUNTOS] Determine, si existe, el valor de a que haga a la función continua en $x = 0$.

2) [1.5 PUNTOS] Calcule el valor de a para que f tenga un extremo relativo en $x = 2$. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?

3) [0.5 PUNTOS] Sea $g(x)$ una función integrable, si $\int_0^3 g(x)dx = 4$ y $\int_2^3 g(x)dx = 6$, ¿Cuánto vale $\int_0^2 g(x)dx$?

Ejercicio 3

Sean las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} y & = & 2 \\ 2x + z & = & 13 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y & = & 4 \\ x - z & = & 3 \end{cases}$ y el punto $A = (0, 0, 3)$.

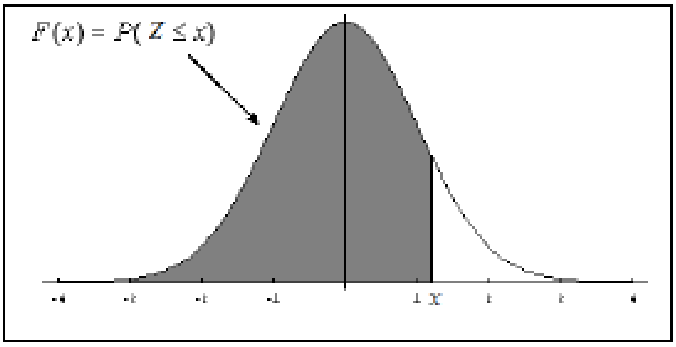
1) [2.5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que pasa por A y es paralelo a r_1 y a r_2.

Ejercicio 4

El peso de una población sigue una distribución normal de media 70kg y desviación típica de 10kg.

1) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa entre 65 y 75 kg.

2) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa al menos 85 kg.



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

OPCIÓN 1

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1.1:

Considere el sistema $\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro t.

1) [1.5 PUNTOS] Clasifique, en función del valor de t, el tipo de sistema.

2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Solución:

1) Escribimos la matriz ampliada del sistema y operamos con las filas y columnas para conseguir un sistema triangular.

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} t & 1 & 1 & 0 \\ t & -1 & 1 & 0 \\ t & 0 & t & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{ccc} y & z & x \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 0 \\ -1 & 1 & t & 0 \\ 0 & t & t & 0 \end{array}\right) \sim_{2^{a}F \to 1^{a}F + 2^{a}F} \begin{array}{ccc} y & z & x \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 0 \\ 0 & 2 & 2t & 0 \\ 0 & t & t & 0 \end{array}\right) \sim_{\substack{2^{a}F \to 1/2\, 2^{a}F \\ 3^{a}F \to t/2\, 2^{a}F - 3^{a}F}} \begin{array}{ccc} y & z & x \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 - t & 0 \end{array}\right)$$

a) Si $t^2 - t \neq 0$ entonces el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada es 3, luego es un sistema compatible y determinado, cuya única solución es la solución trivial, x = 0, y = 0 y z = 0.

Por tanto, si $t^2 - t \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0; z = 0; y = 0 \quad \Rightarrow \quad Sol = \{(0,0,0)\}$

Si $t^2 - t = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$

Si $t = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = 0;\ y = 0;\ x = \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad Sols = \{(\lambda, 0{,}0)/\lambda \in \mathbb{R}\}$ El rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es 2. Luego es un sistema compatible indeterminado.

Si $t = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = -z = \lambda \in \mathbb{R};\ y = 0 \quad \Rightarrow \quad Sols = \{(\lambda, 0, -\lambda)/\lambda \in \mathbb{R}\}$ El rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es 2. Luego es un sistema compatible indeterminado.

Si $t \neq 0$ y $t \neq 1$ entonces	**Sistema Compatible Determinado**
Si t = 0 entonces	**Sistema Compatible Indeterminado**
Si t = 1 entonces	**Sistema Compatible Indeterminado**

2) Como ya aparece en el apartado anterior, si t = 1 hay infinitas soluciones dependientes de un parámetro libre y serían de la forma $\{(\lambda, 0, -\lambda)/\lambda \in \mathbb{R}\}$.

Para t = 1 las infinitas soluciones son: $\{(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{0}, -\boldsymbol{\lambda})/\lambda \in \mathbb{R}\}$.

Problema 1.2:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Considere la función $f(x) = (x+10)e^{2x}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule una primitiva $F(x)$ tal que $F(0) = 0$. Use la derivada para comprobar su solución.

2) [0.5 PUNTOS] Calcule $\int_0^5 f(x)dx$.

Solución:

1) Hagamos la integral de *f(x)* para obtener una primitiva. La descomponemos en dos integrales, la primera se puede hacer por partes y la segunda es inmediata:

$$F(x) = \int (x+10)\cdot e^{2x}dx = \int x\cdot e^{2x}dx + 10\cdot\int e^{2x}dx \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\int e^{2x}dx + 10\cdot \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x} + \frac{19}{2}\cdot\int e^{2x}dx \overset{(**)}{=} \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x} + \frac{19}{4}\cdot e^{2x} + C = \left(x+\frac{19}{2}\right)\cdot\frac{e^{2x}}{2} + C$$

Calculamos por partes la primera integral:

$$(*)\quad \int x\cdot e^{2x}dx = \begin{bmatrix} u = x & \Rightarrow & u' = 1 \\ v' = e^{2x} & \Rightarrow & v = \frac{1}{2}\cdot e^{2x}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\int e^{2x}dx$$

Calculamos la integral inmediata:

$$(**)\quad \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\cdot\int 2\cdot e^{2x}dx = \frac{1}{2}\cdot e^{2x}$$

Imponemos la condición: $0 = F(0) = \left(0+\frac{19}{2}\right)\cdot\frac{e^0}{2} + C = \frac{19}{4} + C \quad\Rightarrow\quad C = \frac{-19}{4}$

Y la primitiva buscada es:

$$\boxed{\boldsymbol{F(x) = \left(x+\frac{19}{2}\right)\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \frac{19}{4}}}$$

Comprobación:

Su derivada debe darnos la función dada:

$$F'(x) = \left[\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x} + \frac{19}{4}\cdot e^{2x} - \frac{19}{4}\right]' = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} + \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x}\cdot 2 + \frac{19}{4}\cdot e^{2x}\cdot 2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^{2x} + x\cdot e^{2x} + \frac{19}{2}\cdot e^{2x} = 10\cdot e^{2x} + x\cdot e^{2x} = (x+10)\cdot e^{2x} = f(x)$$

En efecto, es la primitiva buscada.

2) $\int_0^5 f(x)dx \overset{\text{Regla Barrow}}{=} F(5) - F(0) = \left(5+\frac{19}{2}\right)\cdot\frac{e^{10}}{2}\boxed{-\frac{19}{4}} - \left(0+\frac{19}{2}\right)\cdot\frac{e^0}{2}\boxed{+\frac{19}{4}} = \boxed{\frac{29}{4}\cdot e^{10} - \frac{19}{4}}$

$$\boldsymbol{\int_0^5 f(x)dx = \boxed{\frac{29}{4}\cdot e^{10} - \frac{19}{4}}}$$

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1.3:

Tomemos el plano $\Pi \equiv 2x + ay + z = 2$ y la recta $r(t) \equiv (0,0,0) + t\overrightarrow{(2,1,1)}$.

1) [0.5 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean ortogonales.

2) [2 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean paralelos. Calcule la distancia entre r y Π en este caso.

Solución:

1) Un vector normal al plano Π es $\vec{n}(2,a,1)$. Este deberá ser paralelo al vector director $\vec{u}(2,1,1)$ de la recta para que r y Π sean perpendiculares. Claramente si a = 1 esto se cumple.

Aun así, si hacemos las cuentas para comprobarlo:

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = (2,1,1)\cdot(2,a,1) = 4 + a + 1 = 5 + a = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos\,180º = \sqrt{6}\cdot\sqrt{5+a^2}\cdot(-1) \quad \Rightarrow$$

$$(a+5)^2 = 6\cdot(a^2+5) \quad \Rightarrow \quad a^2 + 10a + 25 = 6a^2 + 30 \quad \Rightarrow \quad 5a^2 - 10a + 5 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 1}$$

Para que r y Π sean ortogonales $\boldsymbol{a}$ debe ser igual a $\mathbf{1}$.

2) En este caso, el vector normal al plano Π $\vec{n}(2,a,1)$ y el vector director $\vec{u}(2,1,1)$ de la recta r deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar será 0:

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = (2,1,1)\cdot(2,a,1) = 4 + a + 1 = 5 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = -5}$$

Para que r y Π sean paralelos $\boldsymbol{a}$ debe ser igual a $\mathbf{-5}$.

La distancia entre la recta r y el plano Π es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano, por ejemplo, el O = (0, 0, 0), al plano $\Pi \equiv \mathbf{2}x - \mathbf{5}y + z - \mathbf{2} = \mathbf{0}$ y viene dada por:

$$d(r,\Pi) = d(O,\Pi) = \frac{|2\cdot 0 - 5\cdot 0 + 0 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{30}} = \boxed{\frac{\sqrt{30}}{15}\ u}$$

La distancia entre la recta r y el plano Π es $\mathbf{\frac{\sqrt{30}}{15}}\ \boldsymbol{u}$

Problema 1.4:

Una prueba rápida para detectar una enfermedad da un 2% de falsos positivos (personas sanas en las que la prueba da positivo, clasificándolas como enfermas) y un 1% de falsos negativos (personas enfermas en las que la prueba da negativo, clasificándolas como sanas). En una población hay un 4% de enfermos.

1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que el test dé un resultado negativo.

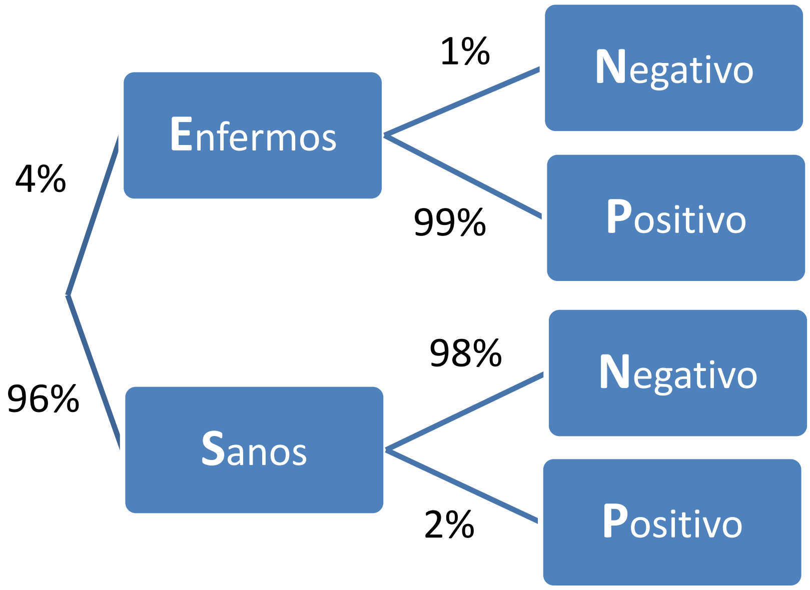
2) [1 PUNTO] La prueba da un resultado positivo (clasificando a la persona como enferma). Calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

Solución:

Consideremos los siguientes sucesos:

E = "estar enfermo", **S** = "estar sano", **-** = "dar negativo en la prueba" y **+** = "dar positivo en la prueba"

Representamos los datos del problema en un diagrama en árbol. Sabemos que si hay un 4 % de enfermos entonces el suceso contrario, "estar sano", es del 96 %. Y lo mismo con los otros sucesos contrarios:



1) Usamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(-) \overset{T^{\text{ma}}\ \text{total Prob.}}{=} P(E)\cdot P(-/E) + P(S)\cdot P(-/S) = \frac{4}{100}\cdot\frac{1}{100} + \frac{96}{100}\cdot\frac{98}{100} = \frac{9412}{1000} = \boxed{94.12\%}$$

$$P(-) \ = \mathbf{0.9412}\ (\boxed{94.12\%})$$

2) Estar sano es el suceso contrario a estar enfermo, luego

$$(*)\quad P(+) = 1 - P(-) = 1 - \frac{94.12}{100} = \frac{5.88}{100}$$

Aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(S/+) \overset{\text{Bayes Teorema}}{=} \frac{P(+/S)\cdot P(S)}{P(+)} \underset{(*)}{=} \frac{\frac{2}{100}\cdot\frac{96}{\boxed{100}}}{\frac{5.88}{\boxed{100}}} = \boxed{32.65\%}$$

$$P(S/+) \ = \mathbf{0.3265}\ (\boxed{32.65\%})$$

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

OPCIÓN 2

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 2.1:

Sean $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcule, razonadamente, el rango de M.

2) [2 PUNTOS] Determine todos los vectores v tales que $M^2 \cdot v = M^{-1} \cdot v$.

Solución:

1) Calculamos el determinante:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4 - 1 + 0) - (0 + 0 - 6) = -5 + 6 = 1 \neq 0$ luego:

rango(M) = 3.

2) Trabajando previamente en la ecuación matricial obtenemos:

$$M \cdot M^2 \cdot v = M \cdot M^{-1} \cdot v \quad \Rightarrow \quad M^3 \cdot v = I_3 \cdot v \quad \Rightarrow \quad M^3 \cdot v - I_3 \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (M^3 - I_3) \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$M^3 - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$(M^3 - I_3) \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overset{\text{ecuaciones simplificando}}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$$

Es un sistema compatible indeterminado, y por tanto:

Todos los vectores de la forma $v = (\lambda, 2\lambda, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$ cumplirían la ecuación matricial.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 2.2:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{a - x^2}{2 + x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

1) [1 PUNTOS] Determine, si existe, el valor de a que haga a la función continua en $x = 0$.

2) [1.5 PUNTOS] Calcule el valor de a para que f tenga un extremo relativo en $x = 2$. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?

3) [0.5 PUNTOS] Sea $g(x)$ una función integrable, si $\int_0^3 g(x)dx = 4$ y $\int_2^3 g(x)dx = 6$, ¿Cuánto vale $\int_0^2 g(x)dx$?

Solución:

1) Para que la función sea continua deben ser iguales los dos límites laterales e iguales al valor de la función:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \left[\frac{a-x^2}{2+x}\right]_{x=0} = \frac{a}{2} = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left[\frac{\sin x}{2x}\right] = \left(\frac{0}{0}\right)_{\text{Indet}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \left[\frac{\cos x}{2}\right] = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \; f \text{ continua } \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$$

Para a = 1 la función es continua en $\boldsymbol{x = 0}$.

2) $f'(x) = \begin{cases} \frac{2x\cdot\cos x - 2\cdot\sin x}{4x^2} & si \quad x < 0 \\ \frac{-x^2-4x-a}{(x+2)^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$;

Anulamos la derivada en 2:

$$0 \overset{\substack{\text{extremo} \\ x=2}}{=} f'(2) = \left[\frac{-x^2-4x-a}{(x+2)^2}\right]_{x=2} = \frac{-4-8-a}{16} = \frac{-12-a}{16} \Leftrightarrow -12 - a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -12}$$

En ese caso, el signo de la derivada sería igual que el signo del numerador de la fracción, ya que el denominador siempre es positivo (está elevado al cuadrado), es decir, igual que el signo del polinomio $-x^2 - 4x + 12 = (-1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 6)$.

Este es negativo antes del *–6* y después del *2*, mientras que es positivo entre *–6* y *2*.

Esto determina unos intervalos de decrecimiento del $(-\infty, -6) \cup (2, \infty)$ y de crecimiento del $(-6, 2)$.

Por tanto, en *x* = *2* la función es continua y derivable (por ser una función racional y pertenecer dicho punto al dominio de definición de la misma) y se produce un cambio de crecer a decrecer, siendo por tanto dicho extremo un **máximo relativo**, que correspondería con el punto $(2, f(2)) = (2, -4)$.

Para $\boxed{\boldsymbol{a = -12}}$ la función tiene un máximo relativo.

3) $\int_0^2 g(x)dx \overset{\substack{\text{linealidad de los} \\ \text{límites de integración}}}{=} \int_0^3 g(x)dx - \int_2^3 g(x)dx = 4 - 6 = \boxed{-2}$

$$\int_0^2 \boldsymbol{g(x)dx} = \boxed{-2}$$

Problema 2.3:

Sean las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} y &= 2 \\ 2x+z &= 13 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x+2y &= 4 \\ x-z &= 3 \end{cases}$ y el punto $A=(0,0,3)$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que pasa por A y es paralelo a r_1 y a r_2.

Solución:

a) Calculemos un vector de dirección de la recta r_1:

Si $z = 1$, entonces $x = 6$ e $y = 2$. Por tanto, $P_1(6, 2, 1)$ es un punto de r_1:

Si $z = 3$, entonces $x = 5$ e $y = 2$. Por tanto, $Q_1(5, 2, 3)$ es un punto de r_1:

El vector $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{OQ_1} - \overrightarrow{OP_1} = (5,2,3)-(6,2,1) = (-1,0,2)$ es director de la recta r_1:

b) Calculemos un vector de dirección de la recta r_2:

Si $z = 1$, entonces $x = 4$ e $y = 0$. Por tanto, $P_2(4, 0, 1)$ es un punto de r_2:

Si $z = 3$, entonces $x = 6$ e $y = -1$. Por tanto, $Q_2(6, -1, 3)$ es un punto de r_2:

El vector $\overrightarrow{P_2Q_2} = \overrightarrow{OQ_2} - \overrightarrow{OP_2} = (4,0,1)-(6,-1,3) = (-2,1,-2)$ es director de la recta r_2:

c) Nuestro plano debe pasar por el punto $A(0, 0, 3)$ y ser paralelo a ambas rectas r_1 y r_2, por lo que debe tener como vectores directores los mismos que las rectas. Así pues, nuestro plano queda determinado por el punto A y los vectores $\overrightarrow{P_1Q_1}$ y $\overrightarrow{P_2Q_2}$. Si (x, y, z) es otro punto cualquiera de nuestro plano, entonces la ecuación general implícita del mismo es:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} -1 & -2 & x-0 \\ 0 & 1 & y-0 \\ 2 & -2 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -z+3-4y-2x-2y=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2x+6y+z-3=0}$$

El plano pedido es: $\boxed{\mathbf{2x+6y+z-3=0}}$

Problema 2.4:

El peso de una población sigue una distribución normal de media 70kg y desviación típica de 10kg.

1) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa entre 65 y 75 kg.

2) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa al menos 85 kg.

Solución:

El peso sería una variable $X \sim N(70, 10)$. Normalizando, $Z = \frac{X-70}{10} \sim N(0, 1)$.

1) $P[65 \leq X \leq 75] = P[-0.5 \leq Z \leq 0.5] = P[Z \leq 0.5] - P[Z \leq -0.5] = P[Z \leq 0.5] - P[Z \geq 0.5] =$

$= P[Z \leq 0.5] - \{1 - P[Z \leq 0.5]\} = 1 - 2 \cdot P[Z \leq 0.5] = 1 - 2 \cdot 0.6915 = 0.383 \simeq \boxed{38.3\%}$

$$\boldsymbol{P[65 \leq X \leq 75] = 0.383} \simeq \boxed{38.3\%}$$

2) $P[X \geq 85] = P[Z \geq 1.5] = 1 - P[Z \leq 1.5] = 1 - 0.9332 = 0.0668 \simeq \boxed{6.68\%}$

$$\boldsymbol{P[X \geq 85] = 0.0668} \simeq \boxed{6.68\%}$$

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2019

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Considere el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} a^2x + ay + z = -1 \\ ax + ay + a^2z = 0 \end{cases}$ dependiente del parámetro a.

1) [1.25 PUNTOS] Clasifique, en función del parámetro a, el sistema anterior (existencia y unicidad de soluciones).

2) [1.25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso $a = 2$.

Ejercicio 2

Considere la función $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 - 7x - 8}$.

1) [2.75 PUNTOS] Estudie el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos de la función f.

2) [0.25 PUNTOS] Si g es una función derivable con un máximo relativo en $x = 2$, ¿Cuánto vale $g'(2)$?

Ejercicio 3

Sea el plano $\Pi \equiv (2,1,0) + t\overrightarrow{(2,1,0)} + s\overrightarrow{(0,1,-1)}$ y el punto $A = (2,1,3)$.

1) [1.5 PUNTOS] Calcule la distancia entre A y Π.

2) [1 PUNTOS] Calcule la recta ortogonal (perpendicular) a Π que contiene al punto A.

Ejercicio 4

Las temperaturas de una ciudad durante el verano han seguido una distribución normal de media 30° y desviación típica de 6°.

1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que un día al azar se mida una temperatura de menos de 42°.

2) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que un día al azar haga entre 25° y 30°.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Consideremos el sistema dependiente del parámetro t:

$$\begin{cases} tx + y - z = 0 \\ 2ty + z = 1 \\ -x + ty + 2z = 1 \end{cases}$$

1) [1.5 PUNTOS] Determine razonadamente si el sistema es incompatible o compatible, determinado o indeterminado en función del valor del parámetro t.

2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Ejercicio 2

Sea $f(x)$ la función definida en $(0, \infty)$ dada por $f(x) = x\ln(x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

1) [1 PUNTO] Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2) [2 PUNTOS] Calcule $\displaystyle\int_2^e f(x)dx$.

Ejercicio 3

Sean los puntos $P = (0,1,0)$, $Q = (-1,1,2)$, $R = (2,0,-1)$ y el plano $\Pi \equiv \begin{cases} x = 2+4t \\ y = -5t+s \\ z = -1+4s \end{cases}$

1) [2.25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por el plano que contiene a P, Q y R y el plano Π.

2) [0.25 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y Q.

Ejercicio 4

Una empresa de teléfonos tiene tres cadenas de producción para un modelo de teléfono. Cada cadena fabrica, respectivamente, un 40%, 35% y 25% de la producción total. La probabilidad de que un teléfono sea defectuoso es del 5%, 3% y 2% respectivamente. Se toma un teléfono al azar.

1) [1 PUNTO] ¿Cual es la probabilidad de que el teléfono sea defectuoso?

2) [1 PUNTO] Si el teléfono es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que se haya fabricado en la segunda cadena?

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

OPCIÓN 1

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Problema 1.1:

Considere el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} a^2x & + & ay & + & z & = & -1 \\ ax & + & ay & + & a^2z & = & 0 \end{cases}$ dependiente del parámetro a.

1) [1.25 PUNTOS] Clasifique, en función del parámetro a, el sistema anterior (existencia y unicidad de soluciones).

2) [1.25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso $a = 2$.

Solución:

1) Consideremos la matriz ampliada del sistema $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a^2 & a & 1 & -1 \\ a & a & a^2 & 0 \end{array}\right)$.

En ella los menores se anulan si: $\begin{cases} a^3 - a = 0 & \Rightarrow & \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \\ a = 1 \end{cases} \\ a^4 - a = 0 & \Rightarrow & \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \\ a^2 = 0 & \Rightarrow & a = 0 \\ a = 0 \end{cases}$.

Es decir:

a) Si $\boldsymbol{a = 0}$: rango$\left(A|b\right)$ = 1 = rango(A) < 3 (nº incógnitas) $\Rightarrow$ Sistema **Compatible Indeterminado** con dos parámetros libres: $Solución = \{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{-1}) / \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}\}$

b) Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$: rango$\left(A|b\right)$ = 2 ≠ 1 = rango(A) $\Rightarrow$ Sistema incompatible

c) Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{-1}$: rango$\left(A|b\right)$ = 2 = rango(A) < 3 (nº incógnitas) $\Rightarrow$ Sistema **Compatible Indeterminado** con un parámetro libre: $Solución = \left\{\left(\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1+2\lambda}}{\mathbf{2}}, \boldsymbol{\lambda}\right) / \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}\right\}$

d) En **cualquier otro caso**: rango$\left(A|b\right)$ = 2 = rango(A) < 3 (nº incógnitas) $\Rightarrow$ Sistema **Compatible Indeterminado** con un parámetro libre

2) Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{2ªF \to 1ªF - 2\cdot 2ªF}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -7 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + z = -1 \\ 2y + 7z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = \lambda \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{1 - 7\lambda}{2} \\ x = \dfrac{-1 - \lambda - 1 + 7\lambda}{4} = \dfrac{3\lambda - 1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$\boxed{\boldsymbol{Solución} = \left\{\left(\frac{\mathbf{-1+3\lambda}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1-7\lambda}}{\mathbf{2}}, \boldsymbol{\lambda}\right) / \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}\right\}}$ **Sistema Compatible Indeterminado**

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema 1.2:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Considere la función $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-7x-8}$.

1) [2.75 PUNTOS] Estudie el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos de la función f.

2) [0.25 PUNTOS] Si g es una función derivable con un máximo relativo en $x=2$, ¿Cuánto vale $g'(2)$?

Solución:

1) $Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 7x - 8 \neq 0\} \quad \Rightarrow$

$$x^2 - 7x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 8 \end{cases} \boxed{Dom\ f = \mathbb{R} - \{-\mathbf{1}; \mathbf{8}\}}$$

Estudiamos las posibles asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+4}{x^2-7x-8} = \left(\frac{3}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x+4}{x^2-7x-8} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x+4}{x^2-7x-8} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = -1}} \text{ Asíntota Vertical}$$

$$\lim_{x \to 8} \frac{x+4}{x^2-7x-8} = \left(\frac{12}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 8^-} \dfrac{x+4}{x^2-7x-8} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 8^+} \dfrac{x+4}{x^2-7x-8} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 8}} \text{ Asíntota Vertical}$$

Y la posible asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+4}{x^2-7x-8} = \left(\underset{\text{Indet}}{\frac{\infty}{\infty}}\right) = 0 \quad \text{porque el grado}(numerador)\text{<grado}(denominador)$$

$$\Rightarrow \quad Luego\ en\ \boxed{\boldsymbol{y = 0}} \text{ hay una asíntota horizontal}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+4}{x^2-7x-8} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x+4}{x^2+7x-8} = \left(\underset{\text{Indet}}{\frac{\infty}{\infty}}\right) = 0 \quad \text{pq grado}\left(n^{\text{dor}}\right)\text{<grado}\left(d^{\text{dor}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 0} \text{ A.H.}$$

Para conocer máximos, mínimos, crecimiento… estudiamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-7x-8) - (x+4) \cdot (2x-7)}{(x+1)^2 \cdot (x-8)^2} = \frac{-x^2-8x+20}{(x+1)^2 \cdot (x-8)^2} = \frac{(-1) \cdot (x+10) \cdot (x-2)}{(x+1)^2 \cdot (x-8)^2}$$ luego el signo de la derivada es:

$$\boxed{\begin{cases} + \ (\textbf{\textit{creciente}}) \ (\mathbf{-10, 2}) \\ - \ (\textbf{\textit{decreciente}}) \ (\mathbf{-\infty, -10}) \cup (\mathbf{2, \infty}) \end{cases}}$$ con cambios en la monotonía en los puntos de abscisa $x = -10$ y $x = 2$, ambos en el dominio de definición de la función, con la función continua y derivable. Por tanto, son extremos:

$$\boxed{\begin{cases} \left(-10, \frac{-1}{27}\right) \textit{ mínimo relativo} \text{ (cambia de decrecer a crecer)} \\ \left(2, \frac{-1}{3}\right) \textit{ máximo relativo} \text{ (cambia de crecer a decrecer)} \end{cases}}$$

2) $\boldsymbol{g'(2) = 0}$ porque la derivada se anula en los extremos, al producirse un cambio en la monotonía (la pendiente de la recta tangente en ese punto es 0). Si una función es derivable en un punto y alcanza en él un máximo o un mínimo relativo entonces la derivada en ese punto vale cero.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 1.3:

Sea el plano $\Pi \equiv (2,1,0) + t\overrightarrow{(2,1,0)} + s\overrightarrow{(0,1,-1)}$ y el punto $A = (2,1,3)$.

1) [1.5 PUNTOS] Calcule la distancia entre A y Π.

2) [1 PUNTOS] Calcule la recta ortogonal (perpendicular) a Π que contiene al punto A.

Solución:

Escribimos la ecuación implícita del plano:

1) $\Pi \equiv \begin{vmatrix} 2 & 0 & x-2 \\ 1 & 1 & y-1 \\ 0 & -1 & z-0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2z - x\boxed{+2} + 2y\boxed{-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi \equiv x - 2y - 2z = 0$

Calculamos la distancia, aplicando la fórmula:

$$d(A,\Pi) = \frac{|2-2\cdot 1-2\cdot 3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \frac{6}{3} = \boxed{2\ u}$$

$$d(A,\Pi) = \frac{6}{3} = \boxed{2\ \ u}$$

2) El vector $\vec{n}(1,-2,-2)$ es perpendicular al plano. Por tanto, sirve como vector director de la recta perpendicular a dicho plano. Como dicha recta tiene que pasar por el punto $A(2, 1, 3)$:

-Ecuación vectorial: $r \equiv (2,1,3) + \lambda \cdot (1,-2,-2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

-Ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

-Ecuaciones continuas: $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-2}$

-Ecuaciones implícitas: $\boxed{r \equiv \begin{cases} \mathbf{2x + y - 5 = 0} \\ \mathbf{2x + z - 7 = 0} \end{cases}}$

Problema 1.4:

Las temperaturas de una ciudad durante el verano han seguido una distribución normal de media 30° y desviación típica de 6°.

1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que un día al azar se mida una temperatura de menos de 42°.

2) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que un día al azar haga entre 25° y 30°.

Solución:

Las temperaturas de la ciudad durante el verano determinan una variable $X \sim N(30, 6)$. Normalizando, $Z = \frac{X-30}{6} \sim N(0,1)$.

1) $P[X \le 42] = P[Z \le 2] = 0{,}9772 \simeq \boxed{97.72\%}$

$$\boldsymbol{P[X \le 42] = 0.9772}$$

2) $P[25 \le X \le 30] = P\left[\frac{-5}{6} \le Z \le 0\right] = P[Z \le 0] - P\left[Z \le \frac{-5}{6}\right] = P[Z \le 0] - P\left[Z \ge \frac{5}{6}\right] =$
$= P[Z \le 0] - \{1 - P[Z \le 0.83]\} = 0.5 - 1 + 0.7967 = 0.2967 \simeq \boxed{29.67\%}$

$$\boldsymbol{P[25 \le X \le 30] = 0.2967}$$

OPCIÓN 2

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Problema 2.1:

Consideremos el sistema dependiente del parámetro t:

$$\begin{cases} tx + y - z = 0 \\ 2ty + z = 1 \\ -x + ty + 2z = 1 \end{cases}$$

1) [1.5 PUNTOS] Determine razonadamente si el sistema es incompatible o compatible, determinado o indeterminado en función del valor del parámetro t.

2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Solución:

1) El determinante de la matriz del sistema es:

$$\begin{vmatrix} t & 1 & -1 \\ 0 & 2t & 1 \\ -1 & t & 2 \end{vmatrix} = 4t^2 - 1 - 2t - t^2 = 3t^2 - 2t - 1 = 3 \cdot \left(t + \frac{1}{3}\right) \cdot (t-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = \dfrac{-1}{3} \\ t = 1 \end{cases}$$

Por tanto:

-Si ***t* = *1***: rango($A|b$) = 2 = rango(A) < 3 (nº incógnitas) $\Rightarrow$ **Sistema Compatible Indeterminado** con un parámetro libre:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{3^aF \to 1^aF + 3^aF}{\overset{2^aF \to 2^aF}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Solución = \left\{ \left(\frac{\mathbf{3\lambda - 1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{-\lambda + 1}}{\mathbf{2}}, \boldsymbol{\lambda} \right) / \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R} \right\}$$

-Si ***t* = –1/3**: rango($A|b$) = 2 $\neq$ 1 = rango(A) $\Rightarrow$ **Sistema Incompatible**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & 6 & 3 \end{array}\right) \underset{3^aF \to 3 \cdot 1^aF + 3^aF}{\overset{2^aF \to 2^aF}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -10 & 15 & 3 \end{array}\right) \underset{3^aF \to 5 \cdot 2^aF + 3^aF}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad Solución = \emptyset$

-En cualquier otro caso rango($A|b$) = 3 = rango(A) = número incógnitas $\Rightarrow$ **Sistema Compatible Determinado**

Resumiendo:

Si $t \neq -1/3;\ 1$	$\boldsymbol{rg(A) = rg(A/b) = 3}$	**Sistema Compatible Determinado**
Si $t = -1/3$	$\boldsymbol{rg(A) = 1 \neq rg(A/b) = 2}$	**Sistema Incompatible (No hay solución)**
Si $t = 1$	$\boldsymbol{rg(A) = rg(A/b) = 2}$	**Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)**

2) Como ya hemos visto en el apartado anterior, en el caso t = 1 el conjunto de las soluciones es:

$$\boxed{\boldsymbol{Sols} = \left\{ \left(\frac{\mathbf{3\lambda - 1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{-\lambda + 1}}{\mathbf{2}}, \boldsymbol{\lambda} \right) / \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R} \right\}}$$

Problema 2.2:

Sea $f(x)$ la función definida en $(0,\infty)$ dada por $f(x) = x\ln(x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

1) [1 PUNTO] Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2) [2 PUNTOS] Calcule $\int_2^e f(x)dx$.

Solución:

1) En principio es un límite indeterminado del tipo $\underset{\text{Indet}}{0\cdot\infty}$ que dividiendo por x transformamos en un límite indeterminado del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que calculamos aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x) = \left[\underset{\text{Indet}}{0\cdot\infty}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) = \left[\underset{\text{Indet}}{\frac{\infty}{\infty}}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{-1}{x}\right)^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}(-x) = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x) = \boxed{0}$$

2) Calculamos la integral por partes:

$$\int x\cdot \ln x\;\; dx = \begin{bmatrix} u = x & \Rightarrow & u' = 1 \\ v' = \ln x & \Rightarrow & v \overset{(*)}{=} -x + x\cdot \ln x \end{bmatrix}$$

$$= -x^2 + x^2\cdot \ln x + \int x dx - \int x\cdot \ln x\;\; dx \quad \Rightarrow \quad 2\cdot\int x\cdot \ln x\;\; dx = -x^2 + x^2\cdot \ln x + \frac{x^2}{2}$$

Y la integral intermedia también por partes:

$$(*)\quad \int \ln x\;\; dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & \Rightarrow & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & \Rightarrow & v = x \end{bmatrix} = x\cdot \ln x - \int 1 dx = x\cdot \ln x - x = (-1+\ln x)\cdot x$$

Luego $\int x\cdot \ln x\;\; dx = \frac{-1}{4}\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot \ln x = \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\left(\frac{-1}{2}+\ln x\right)$.

Para calcular la integral definida aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_2^e x\cdot \ln x\;\; dx \overset{\substack{\text{Barrow}\\ \text{Regla}}}{=} \left[\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\left(\frac{-1}{2}+\ln x\right)\right]_{x=2}^{x=e} = \frac{1}{2}\cdot e^2\cdot\left(\frac{-1}{2}+\ln e\right) - \frac{1}{\boxed{2}}\cdot 2^{\boxed{2}}\cdot\left(\frac{-1}{2}+\ln 2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\left(\frac{-1}{2}+\ln 2\right) = \boxed{\frac{e^2}{4} + 1 - 2\cdot \ln 2}$$

$$\int_2^e \boldsymbol{x\cdot \ln x\;\; dx} = \boxed{\boldsymbol{\frac{e^2}{4} + 1 - 2\cdot \ln 2}}$$

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 2.3:

Sean los puntos $P = (0,1,0)$, $Q = (-1,1,2)$, $R = (2,0,-1)$ y el plano $\Pi \equiv \begin{cases} x &= 2+4t \\ y &= -5t+s \\ z &= -1+4s \end{cases}$

1) [2.25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por el plano que contiene a P, Q y R y el plano Π.

2) [0.25 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y Q.

Solución:

1) Calculamos los vectores directores de del plano P, Q y R:

Los vectores $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-1,1,2) - (0,1,0) = (-1,0,2)$

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (2,0,-1) - (0,1,0) = (2,-1,-1)$ son directores del plano Π' que contiene a los puntos P, Q y R. Por tanto, su ecuación implícita será:

$$\Pi' \equiv \begin{vmatrix} -1 & 2 & x-0 \\ 0 & -1 & y-1 \\ 2 & -1 & z-0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad z + 4y - 4 + 2x - y + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Pi' \equiv 2x + 3y + z - 3 = 0$$

En las ecuaciones paramétricas del plano Π, observamos que pasa por (2, 0, –1) y tiene vectores directores (4, –5, 0) y (0, 1, 4). Por tanto, la ecuación implícita del mismo es:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} 4 & 0 & x-2 \\ -5 & 1 & y-0 \\ 0 & 4 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad z + 4 - 20x + 40 - 16y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Pi \equiv 20x + 16y - z - 44 = 0$$

El ángulo que forman ambos planos es el mismo que el que forman los vectores normales a ambos:

$$cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{n}'}\right) = \frac{|(2,3,1)\cdot(20,16,-1)|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{20^2+16^2+(-1)^2}} = \frac{|40+48-1|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{657}} = \frac{87}{\sqrt{9189}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(\widehat{\boldsymbol{\vec{n},\vec{n}'}}\right) = \mathbf{24.89°}}$$

2) $d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |(-1,0,2)| = \sqrt{(-1)^2+0^2+2^2} = \boxed{\sqrt{5}\ \ u}$

$$\boldsymbol{d(P,Q)} = \boxed{\sqrt{5}\ \ \mathbf{u}}$$

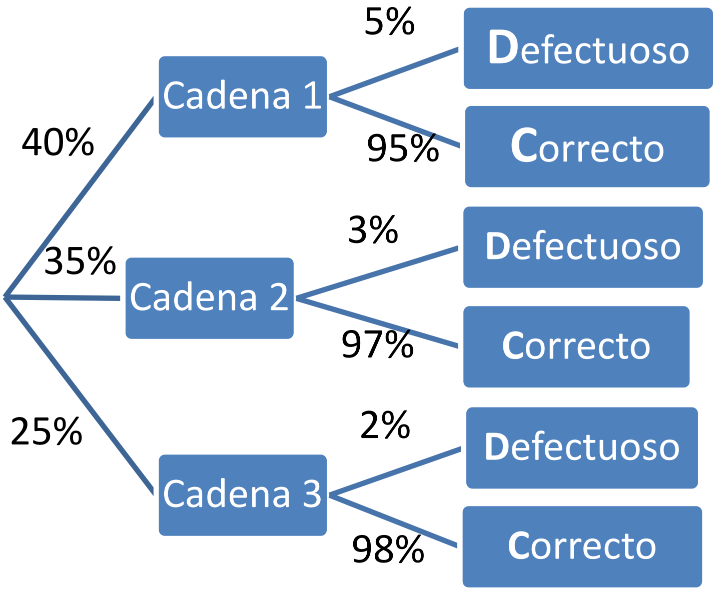
Problema 2.4:

Una empresa de teléfonos tiene tres cadenas de producción para un modelo de teléfono. Cada cadena fabrica, respectivamente, un 40%, 35% y 25% de la producción total. La probabilidad de que un teléfono sea defectuoso es del 5%, 3% y 2% respectivamente. Se toma un teléfono al azar.

1) [1 PUNTO] ¿Cual es la probabilidad de que el teléfono sea defectuoso?

2) [1 PUNTO] Si el teléfono es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que se haya fabricado en la segunda cadena?

Solución:



Llevamos los datos del enunciado a un diagrama de árbol, que completamos usando la probabilidad del suceso contrario.

1) Para calcular la probabilidad de que un teléfono sea defectuoso usamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D) \overset{T^{\text{ma}}\,\text{Prob.}\ \text{total}}{=} P(D/1)\cdot P(1) + P(D/2)\cdot P(2) + P(D/3)\cdot P(3) =$$

$$= \frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100} + \frac{345}{100}\cdot\frac{3}{100} + \frac{25}{100}\cdot\frac{2}{100} = \frac{355}{10000} = \boxed{3.55\ \%}$$

$$\boldsymbol{P(D) \quad = \boxed{0.0355}}$$

2) Usamos el Teorema de Bayes:

$$P(2/D) \overset{\text{Teorema Bayes}}{=} \frac{P(D/2)\cdot P(2)}{P(D)} = \frac{\frac{35}{100}\cdot\frac{3}{\boxed{100}}}{\frac{3.55}{\boxed{100}}} \simeq \boxed{30\%}$$

$$\boldsymbol{P(2/D) = \boxed{0.30}}$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Castilla La Mancha

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José María López Belinchón y

Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ a\sqrt{x} - \dfrac{b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$ **(1,5 puntos)**

b) Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$. **(1 punto)**

2A. a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, la recta $x = -2$ y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. **(1 punto)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 2y & & & = & a^2 \\ -x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & - & ay & - & z & = & -(4+a) \end{array}\right\}$$ **(1,5 puntos)**

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 1$. **(1 punto)**

4A. Dados los puntos $A(1, 2, 0), B(0, -1, 2), C(2, -1, 3)$ y $D(1, 0, 1)$:
a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. **(1,25 puntos)**
b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D.
(1,25 puntos)

5A. a) Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:
a1) No salga defectuoso. **(0,75 puntos)**
a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C. **(0,5 puntos)**

b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:
b1) Tres chicas. **(0,75 puntos)**
b2) Al menos tres chicos. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$ **(1,25 puntos por límite)**

2B. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$ con $x\in\mathbb{R}$.

a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

3B. Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&1&0\\2&-1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A\cdot X-2B=C$. **(1,5 puntos)**

4B. Sean la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, el punto $P(3,1,-1)$ y el plano $\pi\equiv 2x+y-z=0$.

a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. **(1,25 puntos)**

b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P. **(1,25 puntos)**

5B. a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:

a1) Se active al menos uno de los dos sensores. **(0,75 puntos)**

a2) Se active solo uno de los sensores. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10,2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:

b1) Entre 6,5 y 13 horas. **(0,75 puntos)**

b2) En menos de siete horas. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

SOLUCIONES PROPUESTA A

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1A.

1A. a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ a\sqrt{x} - \dfrac{b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$. **(1 punto)**

Solución:

a) Primero, nótese que el ejercicio pide el cálculo de dos parámetros para que una función sea derivable en todo $\mathbb{R}$, para ello comencemos estudiando la **continuidad** de la función $\boldsymbol{f(x)}$ en todo $\mathbb{R}$.

- Para $x < 1$, la función $f(x)$ es continua ya que tenemos una función polinómica, cuyo dominio de las funciones polinómicas es todo $\mathbb{R}$.
- Para $x > 1$, la función $f(x)$ es continua ya que tenemos resta de dos funciones continuas en el dominio de definición (por una parte tenemos $\sqrt{x}$ cuyo dominio es $[0, +\infty)$ y la función $\frac{1}{x^2}$ cuyo dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$).
- Para $x = 1$, utilizamos la definición de continuidad en un punto.

  Primero calculamos el $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y para ello tenemos que tomar límites laterales, ya que por la izquierda del 1 tenemos una función y por la derecha del 1 tenemos otra función.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (ax^2 + bx + 2) = a + b + 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2}\right) = a - b$$

  Para que el $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ exista, los límites laterales deben coincidir, por tanto:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \iff a + b + 2 = a - b \iff b = -1$$

  Luego para el $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ exista, $b = -1$.

  Y además, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = a + 1 = f(1)$, donde concluimos que para $b = -1$, la función $f(x)$ **es continua en *todo* $\mathbb{R}$.**

Segundo, estudiemos la **derivabilidad** de la función $f(x)$ *en todo* $\mathbb{R}$.

- Para $x < 1$, la función $f(x)$ es derivable ya que tenemos una función polinómica y toda función polinómica es siempre derivable.
- Para $x > 1$, la función $f(x)$ es derivable ya que tenemos resta de dos funciones derivables en el dominio de definición.

- Para $x = 1$, calculamos la derivada de la función:

$$\boldsymbol{f'(x) = \begin{cases} 2ax - 1 & si\ x < 1 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^3} & si\ x > 1 \end{cases}}$$

Para que la función sea derivable en $x = 1$, las derivadas laterales en dicho punto deben coincidir.

$$f'_-(1) = f'_+(1) \iff 2a - 1 = \frac{a}{2} - 2 \iff 4a - 2 = a - 4 \iff a = \frac{-2}{3}$$

Conclusión del ejercicio:

Para que la función $f(x)$sea derivable en todo $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{a = \frac{-2}{3}}$ **y** $\boldsymbol{b = -1}$.

b) Recordemos cual es el enunciado del teorema de Rolle:

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y que se verifica que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe un $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

El teorema de Rolle tiene 3 hipótesis:

1) ¿Es $f(x) = x^2 - 4$ continua en $[-3, 3]$? **Si.** El dominio de la función $f(x)$ es todo $\mathbb{R}$.

2) ¿Es $f(x) = x^2 - 4$ derivable en $(-3, 3)$? **Si.** El dominio de la función $f'(x) = 2x$ es todo $\mathbb{R}$.

3) ¿Es $f(-3) = f(3)$? **Si.**

$$f(-3) = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$
$$f(3) = (3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

Conclusión del ejercicio:

La función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las **hipótesis del teorema de Rolle** en el intervalo $[\boldsymbol{-3, 3}]$.

Problema 2A.

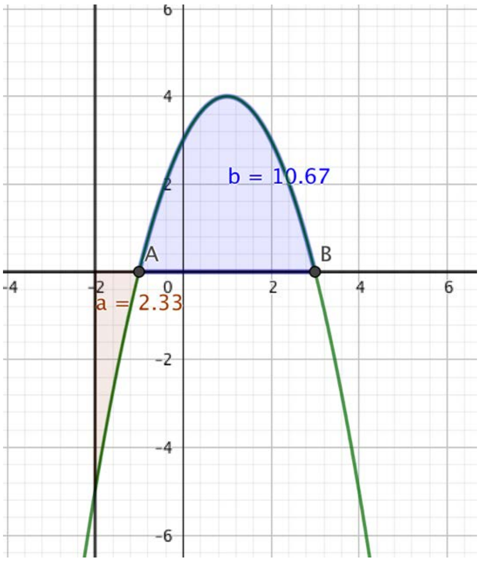
2A. a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, la recta $x = -2$ y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. **(1 punto)**

Solución:

a) Para calcular el área que nos piden, primero debemos representar la parábola $g(x)$ y las rectas que nos da el enunciado. Para ello, se comenzaría calculando los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas. Son los puntos $A(-1,0)$ y $B(3,0)$ como se ve en la gráfica.

El área que nos piden calcular es la que está sombreada en el dibujo.

Los extremos serían $x = -2$, $x = -1$ y $x = 3$



Por lo tanto

$$Área = \int_{-2}^{-1} [0 - g(x)]dx + \int_{-1}^{3} [g(x) - 0]dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3)\, dx + \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3}$$

$$= \left[\frac{5}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right] + \left[9 - \left(\frac{-5}{3}\right)\right] = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = 13\, u^2.$$

$$\boldsymbol{Área = 13\, u^2}$$

b) Recordemos cual es la fórmula para poder calcular la ecuación de la recta normal a una función:

$$n \equiv y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Por tanto,

$$g(4) = -4^2 + 2 \cdot 4 + 3 = -16 + 8 + 3 = -5$$

$$g'(x) = -2x + 2\, ;\, g'(4) = -8 + 2 = -6$$

Luego, la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$ es:

$$n \equiv \boldsymbol{y + 5 = \frac{1}{6} \cdot (x - 4)}$$

Problema 3A.

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 2y & & & = & a^2 \\ -x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & - & ay & - & z & = & -(4+a) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 1$. **(1 punto)**

Solución:

a) Comenzamos escribiendo la matriz ampliada del sistema de ecuaciones y calculamos el determinante de la matriz de coeficientes (formada por las 3 primeras columnas):

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 0 & a^2 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -a & -1 & -(4+a) \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{vmatrix} = a^2 - a = a \cdot (a-1)$$

Distinguimos casos:

1) Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, el rango de la matriz de coeficientes es 3 y el rango de la matriz ampliada es 3 y como el número de incógnitas es igual a 3, por el teorema de Rouche-Fröbenius, el sistema es compatible determinado.

2) Si $a = 0$, sabemos que el rango de la matriz de coeficientes es menor que 3, luego hay que mirar cual es el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada.

Para ello, vamos a calcular la matriz escalonada reducida de la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 + F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 = 2F_2 - F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Luego, el rango de la matriz de coeficientes es 2 (se mira el número de filas distintas de cero una vez calculado la matriz reducida), mientras que el rango de la matriz ampliada es 3, por lo tanto, por el teorema de Rouche-Fröbenius para $a = 0$ es sistema es incompatible.

3) Si $a = 1$, sabemos que el rango de la matriz de coeficientes es menor que 3, luego hay que mirar cual es el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada. Para ello, y para conocer otra forma de calcular el rango, lo haremos con determinantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, el rango de la matriz de coeficientes es 2. Calculemos ahora el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0,\ por\ tanto, el\ rango\ de\ la\ matriz\ ampliada\ es\ 2.$$

El rango de la matriz de coeficientes es 2, y el rango de la matriz ampliada también es 2, pero no coincide con el número de incógnitas, por tanto, por el teorema de Rouche-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo:

Si $\boldsymbol{a \neq 0}$ y $\boldsymbol{a \neq 1}$,	$\boldsymbol{rg(A) = rg(A') = 3}$	**Compatible Determinado (Única solución)**
Si $\boldsymbol{a = 0}$,	$\boldsymbol{rg(A) = 2 \neq rg(A') = 3}$	**Incompatible (No hay solución)**
Si $\boldsymbol{a = 1}$,	$\boldsymbol{rg(A) = rg(A') = 2}$	**Compatible Indeterminado** (Infinitas soluciones)

b) Para $a = 1$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ \quad 3y + z = 6 \end{cases}$$

Como el determinante formado por los coeficientes de x y z es distinto de 0, podemos dejar como incógnita libre y. Por tanto, la solución del sistema para $a = 1$ será:

$$\boldsymbol{x = 1 - 2\lambda}$$
$$\boldsymbol{y = \lambda}$$
$$\boldsymbol{z = 6 - 3\lambda}$$

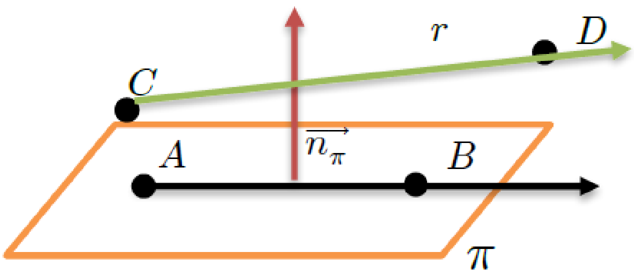
Autor: José María López Belinchón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 4A.

4A. Dados los puntos $A(1,2,0), B(0,-1,2), C(2,-1,3)$ y $D(1,0,1)$:
a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. **(1,25 puntos)**
b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D.
(1,25 puntos)

Solución:

a)



Como podemos ver en el dibujo, el vector normal de plano es un vector que es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$ y al vector $\overrightarrow{CD}$, por tanto,

$$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (4,-4,-4)$$

Como se trata de un vector, se puede trabajar con $(4,-4,-4)$, o para simplificar las cuentas con el vector, $(1,-1,-1)$.

Sabemos que si el vector normal de un plano $\overrightarrow{n_\pi} = (A,B,C)$, entonces la ecuación del plano será:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

Por lo tanto, la ecuación del plano que nos piden calcular es:

$\pi \equiv x - y - z + D = 0$, donde D lo calcularemos con el punto A ó B.

Como $A \in \pi \Rightarrow 1 - 2 - 0 + D = 0 \Leftrightarrow D = 1$

Solución:

El plano es $\pi \equiv \boldsymbol{x - y - z + 1 = 0}$.

b) Para resolver este apartado, debemos recordar cual es la fórmula que nos permite calcular el volumen de un tetraedro:

$$V = \left|\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|\right| = \left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{6}\cdot -4\right| = \frac{2}{3}\, u^3$$

$$\boldsymbol{V = \frac{2}{3}\, u^3}$$

Problema 5A.

5A. a) Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salga defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C. **(0,5 puntos)**

b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

b1) Tres chicas. **(0,75 puntos)**

b2) Al menos tres chicos. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Solución:

a) Para resolver los dos apartados, vamos a realizar un diagrama de árbol, pero antes de realizar el diagrama de árbol, tenemos que escribir una leyenda:

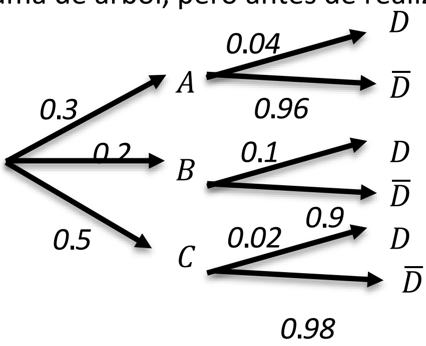
$A =$ "Ser fabricado por la fábrica A"

$B =$ "Ser fabricado por la fábrica B"

$C =$ "Ser fabricado por la fábrica C"

$D =$ "Ser defectuoso"

$\bar{D} =$ "No ser defectuoso"



Una vez realizado el diagrama de árbol, procedemos a resolver los 2 apartados del ejercicio:

a1) Aquí, aplicamos el teorema de la probabilidad total

$$P(\bar{D}) = P(\bar{D}|A)\cdot P(A) + P(\bar{D}|B)\cdot P(B) + P(\bar{D}|C)\cdot P(C)$$
$$= 0.96\cdot 0.3 + 0.9\cdot 0.2 + 0.98\cdot 0.5 = 0.958 = 0.96$$

$$\boldsymbol{P(\bar{D}) = 0.96}$$

a2) Aquí, aplicamos el teorema de Bayes y una propiedad de la probabilidad

$$P(\bar{C}|D) = 1 - P(C|D) = 1 - \frac{P(D|C)\cdot P(C)}{P(D)} = 1 - \frac{0.02\cdot 0.5}{1-0.958} = \frac{16}{21} \approx 0.76$$

$$\boldsymbol{P(\bar{C}|D) = \frac{16}{21} \approx 0.76}$$

b) Sea

$$X = \text{"Cantidad de chicos que salen a la pizarra en los cinco días laborales"} \sim \text{Bin}\left(5, \frac{4}{20}\right) = \text{Bin}(5, 0.2)$$

Nota: Observad que en la tabla que nos proporcionan en selectividad, solo aparecen las probabilidades hasta 0.5, es decir, podíamos haber trabajado en lugar de cantidad de chicos, con cantidad de chicas y entonces la probabilidad de éxito es 0.8, que no aparece en esa tabla, por eso es recomendable trabajar con la de chico.

b1) Está claro, la probabilidad de que salgan tres chicas es exactamente la misma que salgan 2 chicos.

$$P(X = 2) = [Buscamos\ en\ la\ tabla] = 0.2048$$

$$\boldsymbol{P(X = 2) = 0.2048}$$

b2) $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = [Buscamos\ en\ la\ tabla] = 0.0512 + 0.0064 + 0.0003 = 0.0579$

$$\boldsymbol{P(X \geq 3) = 0.0579}$$

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$ **(1,25 puntos por límite)**

2B. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$ con $x\in\mathbb{R}$.
a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

3B. Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A\cdot X-2B=C$. **(1,5 puntos)**

4B. Sean la recta $r\equiv \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, el punto $P(3,1,-1)$ y el plano $\pi\equiv 2x+y-z=0$.
a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. **(1,25 puntos)**
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P. **(1,25 puntos)**

5B. a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:
a1) Se active al menos uno de los dos sensores. **(0,75 puntos)**
a2) Se active solo uno de los sensores. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10,2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:
b1) Entre 6,5 y 13 horas. **(0,75 puntos)**
b2) En menos de siete horas. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

SOLUCIONES PROPUESTA B

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1B.

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$ **(1,25 puntos por límite)**

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} = 1^{\pm\infty}\ [Indeterminación\ del\ número\ e]$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}-1\right)\cdot\frac{x}{x-1}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}-1\right)\cdot\frac{x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}x-x^2-x}{x^2-1}\right) = \frac{0}{0}\ [L'Hôpital]$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}x+2e^{x-1}-2x-1}{2x}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} = \sqrt{e}}$$

b)

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}\right) = \frac{0}{0}\ [L'Hôpital]$$

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}\right) = \lim_{x\to -1}\left(\frac{-(2x)\cdot e^{x^2-1}-1}{2x+4}\right) = \frac{2\cdot 1-1}{-2+4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to -1}\left(\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}\right) = \frac{1}{2}}$$

Problema 2B.

2B. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ con $x \in \mathbb{R}$.

a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) Observamos que el dominio de ambas funciones es $\mathbb{R}$.

Recordemos que una condición necesaria para que una función alcance un extremo relativo es que la primera derivada de la función en dicho punto tiene que ser 0. Entonces, para encontrar el extremo relativo, calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \;\;;\;\; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ahora, para saber si es un extremo relativo, realizamos la tabla de signos de la primera derivada

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$-2x$	$+$	0	$-$
$\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	Creciente	MÁXIMO RELATIVO	Decreciente

Luego, $f(x)$ alcanza un máximo relativo en $x = 0$.

Ahora, calculemos los extremos relativos de $g(x)$.

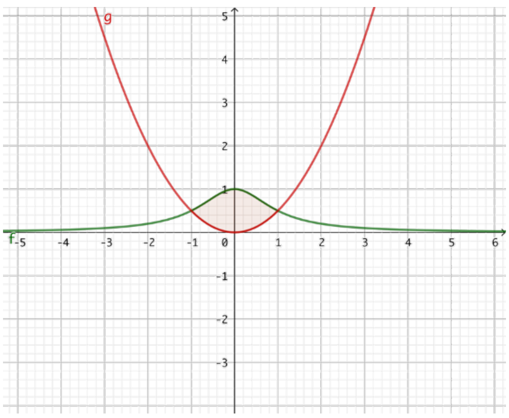
Es obvio que $g(x)$ alcanza un mínimo relativo en $x = 0$, ya que es una parábola con vértice en $(0, 0)$.

$f(x)$ alcanza un **máximo relativo** en $\big(0, f(0)\big) = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

$g(x)$ alcanza un **mínimo relativo** en $\big(0, g(0)\big) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

b) Para calcular el área, primero debemos representar (o esbozar) las dos funciones.

Como podemos ver en las gráficas, los puntos de corte entre ambas funciones es $x = -1$ y $x = 1$ (se pueden calcular, igualando ambas expresiones de las funciones y resolviendo una ecuación bicuadrada).



Por tanto, el área que nos piden:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[arctg(x) - \frac{x^3}{6} \right]_{-1}^{1}$$

$$= arctg(1) - \frac{1}{6} - \left(arctg(-1) + \frac{1}{6} \right)$$

$$= arctg(1) - arctg(-1) - \frac{2}{6}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\; u^2$$

$$\boldsymbol{A = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\; u^2}$$

Autor: José María López Belinchón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 3B.

3B. Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A\cdot X-2B=C$. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) Para calcular la inversa de una matriz cuadrada, utilizamos la siguiente fórmula:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(Adj(A)\right)^t=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 2 & -3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & -3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & -3 & -2\end{pmatrix}}$$

b) Primero, despejamos de la ecuación matricial, la matriz X, teniendo siempre en cuenta que el producto de matrices no suele cumplir la propiedad de conmutatividad:

$$A\cdot X-2B=C\ \Leftrightarrow A\cdot X=C+2B\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot(C+2B)$$

$$X=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & -3 & -2\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3 & 2 & 8\\ 4 & 5 & 10\\ -9 & -12 & -23\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}3 & 2 & 8\\ 4 & 5 & 10\\ -9 & -12 & -23\end{pmatrix}}$$

Problema 4B.

4B. Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$, el punto $P(3,1,-1)$ y el plano $\pi \equiv 2x+y-z=0$.
a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. **(1,25 puntos)**
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P. **(1,25 puntos)**

Solución:

a) Para resolver este apartado, vamos a utilizar la siguiente fórmula, que nos da la distancia de un punto a una recta:

$d = \frac{||\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{V_r}||}{||\overrightarrow{V_r}||}$; siendo A un punto de la recta r: $A(1,0,-1) \Longrightarrow \overrightarrow{AP} = (2,1,0)$

$$d = \frac{||\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{V_r}||}{||\overrightarrow{V_r}||} = \frac{||(2,1,0)\times(3,1,2)||}{||(3,1,2)||} = \frac{||(2,-4,-1)||}{||(3,1,2)||} = \frac{\sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2}}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{6}}{2}u$$

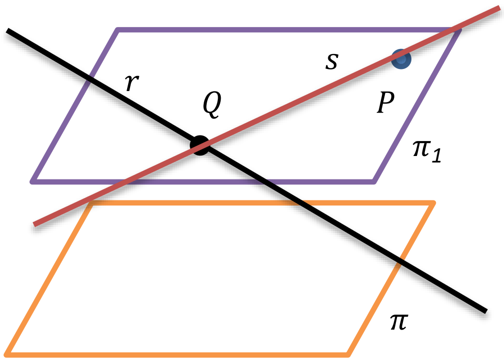
$$\boldsymbol{d = \frac{\sqrt{6}}{2} u}$$

b) Para resolver este ejercicio, seguimos los siguientes pasos:

Primero: Calculamos el plano paralelo a π que contiene a P, que lo llamaremos π_1 .

Segundo: Calculamos el punto de corte de π_1 con la recta r que, según la notación del problema, lo llamaremos Q.

Último paso: Calculamos la recta que pasa por P y Q, que la llamaremos s



Primer paso: El plano π_1 será:

$\pi_1 \equiv 2x+y-z+D=0$; para calcular D, utilizamos P

Como $P \in \pi \Longrightarrow 2\cdot 3+1-(-1)+D=0 \Longrightarrow D=-8$: $\pi_1 \equiv 2x+y-z-8=0$

Segundo paso: Para simplificar mucho las cuentas, escribimos la ecuación de la recta en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$r \cap \pi_1 \Longrightarrow 2\cdot(1+3\lambda)+\lambda-(-1+2\lambda)-8=0 \Longrightarrow 5\lambda = 5 \Longrightarrow \lambda = 1$. Por lo tanto, $Q=(4,1,1)$.

Tercer paso: Escribimos la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que pasa por los puntos P y Q:

$$\overrightarrow{PQ} = (1,0,2) \Longrightarrow \boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x = 3+\mu \\ y = 1 \\ z = -1+2\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}}$$

Autor: José María López Belinchón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema 5B.

5B. a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:

a1) Se active al menos uno de los dos sensores. **(0,75 puntos)**

a2) Se active solo uno de los sensores. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10, 2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:

b1) Entre 6,5 y 13 horas. **(0,75 puntos)**

b2) En menos de siete horas. **(0,5 puntos)**

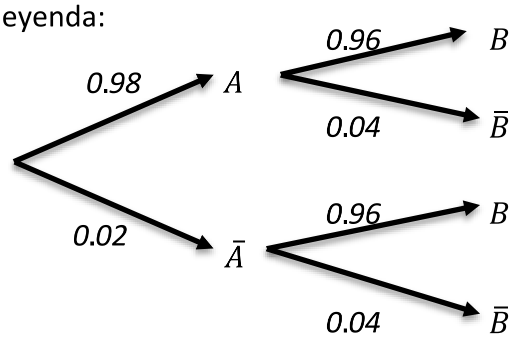
a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Solución:

a) Para resolver los dos apartados, vamos a realizar un diagrama de árbol, pero antes de realizar el diagrama de árbol, tenemos que escribir una leyenda:

$A =$ "Activar el primer sensor"

$B =$ "Activar el segundo sensor"



a1) $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = [Independencia] = 1 - 0.02 \cdot 0.04 = \mathbf{0.9992.}$

a2) $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = 0.98 \cdot 0.04 + 0.02 \cdot 0.96 = \mathbf{0.0584.}$

b) Sea $X =$ "Tiempo, en horas, en realizar una intervención quirúrgica" $\sim N(10,2)$

b1) $P(6.5 < X < 13) =_{\text{Tipificamos}} P\left(\frac{6.5-10}{2} < Z < \frac{13-10}{2}\right) = P(-1.75 < Z < 1.5)$

$= P(Z < 1.5) - P(Z < -1.75) = P(Z < 1.5) - \big(1 - P(Z < 1.75)\big) =_{\text{Tabla}}$

$= 0.9332 - (1 - 0.9599) = 0.8931 = \mathbf{89.31\%.}$

b2) $P(X < 7) =_{\text{Tipificamos}}= P\left(Z < \frac{7-10}{2}\right) = P(Z < -1.5) = 1 - P(Z < 1.5)$

$=_{\text{Tabla}} 1 - 0.9332 = 0.0668 = \mathbf{6.68\%}$

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen. **(1,5 puntos)**
b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $g(x)=x\,e^{-x}$. **(1 punto)**

2A. a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=16-x^2$ y $g(x)=(x+2)^2-4$. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=16-x^2$ en el punto de abscisa $x=1$. **(1 punto)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & (a-2)y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & -4 \\ x & - & 3y & + & az & = & -a^2 \end{array}\right\}$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a=3$. **(1 punto)**

4A. Dada la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$ y el plano $\pi\equiv\begin{cases} x=1+\lambda+\mu \\ y=\lambda-\mu \\ z=-1+2\lambda \end{cases}$ $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

a) Determina razonadamente la posición relativa de r y π. **(1,25 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r. **(1,25 puntos)**

5A. a) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son P(A)=0,75 y P(B)=0,35. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A\cup B$ y $A\cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a1) Si A y B fuesen independientes. **(0,75 puntos)**
a2) Si $P(A\mid B)=0,6$. **(0,5 puntos)**
Nota: $P(A\mid B)$ denota la probabilidad condicionada.

b) El 1 % de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

b1) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima. **(0,75 puntos)**

b2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos? **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2019
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. a) Demuestra que la ecuación $\operatorname{sen} x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$. **(1 punto)**

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**
b) Para $a = 1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$. **(1,5 puntos)**

4B. a) Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0, -2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, c)$, halla razonadamente el valor de a, b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1,5 puntos)**
b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$. Comprueba si los puntos $Q(1, 5, 5)$ y $R(0, 4, 2)$ pertenecen o no a la recta. **(1 punto)**

5B. a) En la sala de pediatría de un hospital el 70 % de los pacientes son niñas. De los niños el 40 % son menores de 36 meses y de las niñas el 30 % tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:
a1) Que no tenga menos de 36 meses. **(0,75 puntos)**
a2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña. **(0,5 puntos)**

b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:
b1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos. **(0,75 puntos)**
b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

SOLUCIONES PROPUESTA A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1A.

1A. a) Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen. **(1,5 puntos)**
b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $g(x) = x\,e^{-x}$. **(1 punto)**

Solución:

a) La función es cociente de dos funciones polinómicas, continuas en toda la recta real, por lo que será continua, salvo en los puntos en los que se anule el denominador, es decir, cuando $x^2 - 1 = 0$. La función no es continua en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = -1$.

Estudiamos el tipo de discontinuidad, en cada caso:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x(x-1)(x+1/2)}{(x+1)(x-1)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x(x+1/2)}{(x+1)}\right) = \frac{3}{2}.$$

En $x = 1$ la discontinuidad es evitable. La función no está definida para ese valor, pero bastaría definirla como 3/2 en ese punto para que fuese continua.

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to -1}\left(\frac{2x(x-1)(x+1/2)}{(x+1)(x-1)}\right) = \pm\infty$$

En $x = -1$ el límite vale $-\infty$ a la izquierda y $+\infty$ a la derecha, luego es un "salto infinito"

La función tiene una **discontinuidad evitable en x = 1** y un **salto infinito en x = –1**.

b) Estudiamos la derivada primera y la derivada segunda de la función:

$$g(x) = xe^{-x}$$

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$$

Igualamos a cero:

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = 0 = (1-x)e^{-x}$$

La función exponencial no se anula en ningún valor real. La derivada se anula en $x = 1$.

$$g''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}.$$

Y en $x = 1$, $g''(1) = (1-2)e^{-1} = -e^{-1} < 0.$

Luego la función tiene un máximo en $x = 1$, en el punto $(1, 1/e)$.

En $-\infty$ la función tiende a $-\infty$, y en $+\infty$ tiende a 0. Es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$.

El único extremo relativo es el punto **(1, 1/e)** que es un **máximo (relativo y absoluto)**.

Problema 2A.

2A. a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 16 - x^2$ y $g(x) = (x+2)^2 - 4$. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 16 - x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$. **(1 punto)**

Solución:

a) Las funciones dadas son dos parábolas, de vértices, (0, 16) con las ramas hacia abajo, y (–2, –4) con las ramas hacia arriba. Se cortan en los puntos (2, 12) y (–4, 0). Por tanto, el área limitada es:

$$\int_{-4}^{2}((16-x^2)-((x+2)^2-4))dx = \int_{-4}^{2}(-2\,x^2-4x+16)dx = \left[-2\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+16x\right]_{-4}^{2} =$$

$$= (-\frac{16}{3}-8+32)-(\frac{128}{3}-32-64) = \frac{-144}{3}+120 = 120 - 48 = 72$$

El área del recinto limitado es de **72 u²**.

b) La recta tangente pasa por el punto (1, 15). Calculamos su pendiente:

$f'(x) = -2x$ luego $f'(1) = -2$.

La recta tangente es:

$y = 15 - 2(x-1) = 15 - 2x + 2 = 17 - 2x$.

La ecuación de la recta tangente pedida es: $\boldsymbol{y = 17 - 2x}$.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 3A.

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & (a-2)y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & -4 \\ x & - & 3y & + & az & = & -a^2 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 3$. **(1 punto)**

Solución:

a) Escribimos la matriz de coeficientes:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -a+2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix}$, y calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a+2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = -2a + 3 - a + 2 - (2 - 3 + a(-a+2)) = a^2 - 5a + 6$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ o $a = 3$.

Escribimos la matriz ampliada:

Para $a = 2$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, luego $Rg(A') = 3$

Para $a = 3$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 3 & -9 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -9 \end{vmatrix} = 0$, luego $Rg(A') = 2$

Por tanto:

Para $a = 2$ el sistema es incompatible, pues el rango de la matriz de los coeficientes es 2, distinto del rango de la matriz ampliada, que es 3.

Para $a = 3$ el sistema es compatible indeterminado, pues el rango de la matriz de los coeficientes es 2, igual al rango de la matriz ampliada y menor que el número de incógnitas, que es 3

Para el resto de los valores de a, ambos rangos son iguales a 3, e iguales al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible determinado.

Si $\boldsymbol{a \neq 2}$ **y** $\boldsymbol{a \neq 3}$**,** $Rg(A) = Rg(A') = 3$ = número de incógnitas el **Sistema Compatible Determinado**.

Para $\boldsymbol{a}$ **= 2** el sistema es **incompatible**.

Para $\boldsymbol{a}$ **= 3** el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Si a = 3 el sistema queda $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ 3x - 3y + 3z = -9 \end{cases}$, haciendo $F'_2 = -F_1 + F_2$ y $F'_3 = -3F_1 + F_3$,

obtenemos $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ -y + 2z = -5 \\ +6z = -12 \end{cases}$, que ya es triangular. Resolvemos:

$$z = -2,\ y = 1,\ x = 0.$$

Comprobamos que, en efecto, es solución del sistema.

Si $\boldsymbol{a}$ = 3, *Sistema Compatible Determinado*, $\boldsymbol{x = 0, y = 1, z = -2}$.

Problema 4A.

4A. Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

a) Determina razonadamente la posición relativa de r y π. **(1,25 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r. **(1,25 puntos)**

Solución:

a) Buscamos un punto de r, A = (1, 0, 0) y su vector director: $\vec{v}$ = (–1, 1, 2). Del plano conocemos un punto: B = (1, 0, –1), y dos vectores de orientación: $\vec{u} = (1, 1, 2)$ y $\vec{w}$ = (1, –1, 0).

Calculamos el valor del determinante formado por los tres vectores,

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 2 + 2) - (2 + 2 + 0) = -4 \neq 0$$, por tanto:

La recta y el plano se cortan.

b) El plano pedido debe contener a la recta, por lo que ya conocemos un punto y uno de los vectores de orientación: A = (1, 0, 0) y $\vec{v}$ = (–1, 1, 2).

Para ser perpendicular debe tener como el otro vector de orientación, el vector perpendicular al plano dado:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2i + 2j - 2k = (2, 2, -2) \to (1, 1, -1)$$

Obtenemos la ecuación del plano π’ determinado por el punto A = (1, 0, 0) y los vectores (–1, 1, 2), (1, 1, –1).

Plano π’: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 = -3(x-1) + y - 2z \to 3x - y + 2z - 3 = 0.$

$3x - y + 2z = 3.$

Problema 5A.

5A. a) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son P(A)=0,75 y P(B)=0,35. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a1) Si A y B fuesen independientes. **(0,75 puntos)**

a2) Si $P(A \mid B) = 0,6$. **(0,5 puntos)**

Nota: $P(A \mid B)$ denota la probabilidad condicionada.

b) El 1 % de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

b1) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima. **(0,75 puntos)**

b2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos? **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Solución:

a) Nos dicen que: $P(A) = 0.75$ y $P(B) = 0.35$.

Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Calculamos la probabilidad de la intersección en los dos supuestos dados:

a1) Si los sucesos son independientes entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.75 \cdot 0.35 = 0.2625$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.75 + 0.35 - 0.2625 = 0.8395$.

a2) Si $P(A/B) = 0.6$, entonces $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = 0.35 \cdot 0.6 = 0.21$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.75 + 0.35 - 0.21 = 0.89$.

a1) Si los sucesos son independientes entonces $P(A \cap B) = \mathbf{0.2625}$ y $P(A \cup B) = \mathbf{0.8395}$.

a2) Si $P(A/B) = 0.6$, entonces $P(A \cap B) = \mathbf{0.21}$ y $P(A \cup B) = \mathbf{0.89}$.

b) Es un problema de distribución binomial dónde se supone éxito, un cheque sin fondos, y $p = 0.01$.

b1) Ahora $n = 5$. Nos piden:

$P(\text{algún éxito}) = 1 - P(k = 0) = 1 - \binom{5}{0}(0.01^0)(0.99^5) = 1 - 0.99^5 = 1 - 0.9509905 = 1 - 0.95 = 0.05$.

b2) $P(\text{al menos } 3) = P(k = 3) + P(k = 4) + P(k = 5) = \binom{5}{3}(0.01^3)(0.99^2) + \binom{5}{4}(0.01^4)(0.99^1) + \binom{5}{5}(0.01^5)(0.99^0) = 10\,(0.000001)\,(0.9801) + 5\,(0.00000001)\,(0.99) + 1\,(0.0000000001)\,(1) = 0.000009801 + 0.0000000495 + 0.0000000001 = 0.000009985 = 0.00$.

La probabilidad de algún cheque sin fondos es, redondeando a centésimas, **0.05**. La probabilidad de que al menos 3 sucursales reciban un cheque sin fondos es, redondeando a centésimas, **0.00**.

SOLUCIONES PROPUESTA B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1B.

1B. a) Demuestra que la ecuación $\operatorname{sen} x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$. **(1 punto)**

Solución:

a) Para demostrarlo se usa el Teorema de Bolzano que dice que, si la función es continua en un intervalo cerrado, y tiene distinto signo en los extremos del intervalo, entonces necesariamente se anula en un punto del interior del intervalo:

La función $f(x) = sen\ x - 2x + 1$, es una función continua en toda la recta real ya que es suma de la función seno y de una función polinómica, ambas continua en toda la recta real.

$f(0) = sen\ 0 - 0 + 1 = 1 > 0$

$f(\pi) = sen\ \pi - 2\pi + 1 = 0 - 2\pi + 1 < 0.$

Por lo que se verifican las dos condiciones del Teorema de Bolzano, luego existe un punto en el intervalo $(0, \pi)$ en el que se anula la función.

Existe algún punto dónde se anula la función

b) De nuevo estudiamos el signo en los extremos del intervalo, siendo positivo en –200, y negativo en 200, luego al menos existe un punto dónde se anula la función. Estudiamos ahora el signo de la derivada, que es siempre negativa luego la función es siempre decreciente, por lo que sólo se anula en un punto.

$f'(x) = cos\ x - 2 < 0$ en toda la recta real, ya que el módulo de la función coseno es siempre menor o igual a 1.

La ecuación $sen\ x - 2x + 1 = 0$ se anula en $[-200, 200]$ en un único punto.

No nos piden determinar ese punto. Dibujando la gráfica podemos estimar que es aproximadamente para $x = \pi/3$.

Problema 2B.

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$.

Solución:

a) Integramos por partes:

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx =$$

$$\begin{cases} u = x+1 & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{cases}$$

Aplicando la fórmula:

$$\int (x+1)e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} - e^{-x}$$

Aplicamos los límites de integración:

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx = (-(1+1)e^{-1} - e^{-1}) - (-(0+1)e^{-0} - e^{-0}) = -3/e + 2$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx = -3/e + 2}$$

b) $\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx}$

Hacemos el cambio de variables $\boldsymbol{t = \sqrt{x}}$:

$$\begin{cases} t = \sqrt{x} & \rightarrow \quad x = t^2 \ \rightarrow dx = 2t\,dt \\ 1 + x = 1 + t^2 \end{cases}$$

Sustituyendo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int \frac{2t}{t(1+t^2)}dt = \int \frac{2}{1+t^2}dt = 2(arctg\ t) + k = 2(arctg\sqrt{x}) + k.$$

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2(arctg\sqrt{x}) + k}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 3B.

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**
b) Para $a = 1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) Calculamos el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{vmatrix} = a(a+2) + 0 + 0 - (0+0+0) = a(a+2) \ = \ 0, \Leftrightarrow a = 0 \text{ y } a = -2$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 0$ entonces	**Rango (A) = 3**
Si $a = -2$ o $a = 0$ entonces	**Rango (A) = 2.**

b) Para $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$X{\cdot}A = B - X \Rightarrow X{\cdot}A + X = B \Rightarrow X(A + \mathrm{I}) = B \Rightarrow X = B\,(A + \mathrm{I})^{-1}$.

Calculamos la matriz inversa de $A + \mathrm{I}$:

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A + I| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = B(A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} \end{pmatrix}}$$

Problema 4B.

4B. a) Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0, -2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, c)$, halla razonadamente el valor de a, b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1,5 puntos)**
b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$. Comprueba si los puntos $Q(1, 5, 5)$ y $R(0, 4, 2)$ pertenecen o no a la recta. **(1 punto)**

Solución:

a) Para que los vectores $\vec{\boldsymbol{u}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{2})$ y $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{1})$ sean ortogonales debe ser cero su producto escalar: $-a - 2 = 0$, por lo que $a = -2$.

El producto vectorial de $\vec{u} = (-1, 0, -2)$ y $\vec{v} = (a, b, 1)$ vale: $\vec{u}x\vec{v} = (2b, -2a + 1, -b)$, imponemos que sea igual a $\vec{w} = (2, 5, c)$, y se obtiene que, $2b = 2$; $-2a + 1 = 5$; $-b = c$, por lo que: $b = 1$; $a = -2$; $c = -b = -1$.

b = 1; a =–2; c = –1.

b) El vector normal al plano, $\vec{\boldsymbol{n}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$ debe ser el vector director de la recta pedida, que pasa por el punto $P = (-1, 3, 1)$, por lo que su ecuación es:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t \\ z = \ \ 1 + 2t \end{cases} \rightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2}$$

Veamos si el punto $Q = (1, 5, 5)$ pertenece a la recta: $\frac{\mathbf{1+1}}{\mathbf{1}} = \mathbf{2} = \frac{\mathbf{5-3}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} = \mathbf{2} = \frac{\mathbf{5-1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2}$, por lo que si pertenece.

Veamos si el punto $R = (0, 4, 2)$ pertenece a la recta: $\frac{\mathbf{0+1}}{\mathbf{1}} = \mathbf{1} = \frac{\mathbf{4-3}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} = \mathbf{1} \neq \frac{\mathbf{2-1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, por lo que este punto NO pertenece a la recta.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + t} \\ \boldsymbol{y = 3 + t} \\ \boldsymbol{z = \ \ 1 + 2t} \end{cases} \rightarrow \frac{\boldsymbol{x+1}}{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{y-3}}{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{z-1}}{\mathbf{2}}; \quad \boldsymbol{Q} \textbf{ pertenece } \boldsymbol{r}; \quad \boldsymbol{R} \textbf{ no pertenece a } \boldsymbol{r};$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 5B.

5B. a) En la sala de pediatría de un hospital el 70 % de los pacientes son niñas. De los niños el 40 % son menores de 36 meses y de las niñas el 30 % tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que no tenga menos de 36 meses. **(0,75 puntos)**

a2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña. **(0,5 puntos)**

b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos. **(0,75 puntos)**

b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Solución:

a1) Llamamos a a que sea niña, o a que sea niño, y P(<36) a la probabilidad de que tenga menos de 36 meses. Se cumple que:

$$P(<36) = P(a \cap < 36) + P(o \cap < 36) = 0.7 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.21 + 0.12 = 0.33$$

La probabilidad de que no tenga menos de 36 meses es el suceso contrario a que si tenga menos de 36 meses, luego la probabilidad pedida es igual a:

$$1 - P(\{tenga\ menos\ de\ 36\ meses\}) = 1 - 0.33 = 0.67$$

a2) Es una probabilidad condicionada:

$$P(a/<36) = \frac{P(a \cap < 36)}{P(<36)} = \frac{0.7 \cdot 0.3}{0.33} = 0.636363 \ldots \cong 0.64$$

a1) La probabilidad de que no tenga menos de 36 meses es igual a 0.67.

a2) Si el paciente es menor de 36 meses, la probabilidad de que sea niña es aproximadamente igual a 0.64

b1) La variable sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma) = N(60, 10)$. Tenemos que:

$P(x \geq 75) = P(z \geq \frac{75-60}{10}) = P(z \geq 1.5) = 1 - P(x < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668.$

b2) Multiplicamos la $P(x < 1.5)$ por el número de opositores, 450, con lo que se obtiene:

$$P(x < 1.5) * 450 = 419.94 \cong 420$$

b1) La probabilidad de obtener 75 puntos o más es de 0.0668, es decir de aproximadamente un 7 %.

b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 es aproximadamente 420.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Castilla y León

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz Yáñez y
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada uno de los ejercicios se puntuará sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Estudie la existencia y unicidad de soluciones según los valores del parámetro m. **(1 punto)**

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior para el caso $m = 2$. **(1 punto)**

E2.- a) Calcular la ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ y pasa por el punto $A = (1, \ 2, \ 1)$. **(1 punto)**

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $B = (2, \ 1, \ 2)$ y es perpendicular a las rectas $s_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ y $s_2 \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. **(1 punto)**

E3.- Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, para $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Calcule el máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-2,2]$. **(1 punto)**

E4.- a) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x\,\mathrm{sen}(x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular el área encerrada por las gráficas de $f(x) = 4x$ y de $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0,2]$, probando anteriormente que en dicho intervalo $f \geq g$. **(1 punto)**

E5.- Las notas de Matemáticas II de 500 alumnos presentados al examen de EBAU tienen una distribución normal con media 6,5 y desviación típica 2.

a) Calcule la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de 8 puntos. **(1 punto)**

b) ¿Cuántos alumnos obtuvieron notas menores de 5 puntos? **(1 punto)**

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓN B

E1.- a) Encontrar los valores de k para que la matriz $A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea invertible. **(1 punto)**

b) Encontrar la inversa de A para $k = 2$. **(1 punto)**

E2.- Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi \equiv x + y + kz = 0$.

Encontrar m y k para que:
a) La recta r sea perpendicular al plano π. **(1 punto)**
b) La recta r esté contenida en el plano π. **(1 punto)**

E3.- Sea el polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ del cual sabemos que $f(0) = 1, f(1) = 0$ y que tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 1$. Calcular a, b, c y d. **(2 puntos)**

E4.- a) Sea $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. **(1 punto)**

b) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{x\,\text{sen}(x)}{3\cos(x) - 3}$. **(1punto)**

E5.-En una competición de tiro olímpico hay 10 rifles, 4 con visor telescópico y 6 sin él. La probabilidad de que un tirador haga blanco con un rifle con visor telescópico es 0,95 y sin él es de 0,65.

a) Halla la probabilidad de hacer blanco escogiendo un rifle al azar. **(1 punto)**
b) Si el tirador hace blanco. ¿Es más probable que haya disparado con un rifle con visor telescópico o sin él? **(1 punto)**

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓN A

Problema A.1:

E1.- Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Estudie la existencia y unicidad de soluciones según los valores del parámetro m. **(1 punto)**

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior para el caso $m = 2$. **(1 punto)**

Solución:

a) Empezamos por calcular el determinante de A e igualarlo a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 2 = 0.$$

De donde se deduce que el determinante será cero cuando $m = 1$.

El rango de la matriz ampliada es siempre 3, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ es distinto de cero.

Se presentan dos casos:

1. $m = 1 \rightarrow$ El sistema es indeterminado porque el rango de la matriz de los coeficientes es menor de tres, menor que el número de incógnitas.
2. $m \neq 1 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado porque el rango de la matriz de los coeficientes es tres, igual al rango de la matriz ampliada, e igual al número de incógnitas.

Si $m \neq 1$	**$\Rightarrow$ rango A = 3 = rango matiz ampliada $\Rightarrow$**	**Compatible determinado**
Si $m = 1$	**$\Rightarrow$ rango A = 2 < rango matriz ampliada $\Rightarrow$**	**Compatible indeterminado**

b) Resolviendo la ecuación matricial $A \cdot X = v$, resulta: $X = inv(A) \cdot v$

Sustituyendo $m = 2$, y gracias al resultado anterior ($|A| = 2$ distinto de cero), se calcula la inversa de A como:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}; inv(A) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y multiplicando:

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, **x = 1, y = 1, z = 1.**

Problema A.2:

E2.- a) Calcular la ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ y pasa por el punto $A = (1, \ 2, \ 1)$. **(1 punto)**

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $\boldsymbol{B} = (2, \ 1, \ 2)$ y es perpendicular a las rectas $s_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ y $s_2 \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. **(1 punto)**

Solución:

a) El plano π viene determinado por los puntos A = (1, 2, 1), que nos dan, B = (1, 1, 1) de la recta r, y por el vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ = (2, 3, 2) también de la recta r. El vector $\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}$ = (0, 1, 0) es de orientación del plano, y el punto A.

Luego la ecuación de π es: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 = 2z - 2x \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{x - z = 0}$$

b) Si la recta r es perpendicular a las dos rectas dadas, su vector director será el vector ortogonal a los vectores de dirección de dichas rectas:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 6j + 8k$$

Es decir, r: $\begin{cases} punto \ \ B = (2, 1, 2) \\ vector \ director \ \vec{v} = (-2, -6, 8) \ \rightarrow \ (1, 3, -4) \end{cases}$

$$\boldsymbol{r}\text{:} \begin{cases} \boldsymbol{x = 2 + \lambda} \\ \boldsymbol{y = 1 + 3\lambda} \\ \boldsymbol{z = 2 + -4\lambda} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-4}}$$

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.3:

E3.- Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, para $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Calcule el máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-2,2]$. **(1 punto)**

Solución:

a) Lo primero es calcular la derivada de la función e igualar a cero:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0.$$

Resolviendo la ecuación se obtienen dos valores, $x = 1, x = -2$, que corresponden a las abscisas de los posibles máximos o mínimos.

Derivando por segunda vez, se obtiene $f''(x) = 12x + 6$, y sustituyendo dichas abscisas resulta:

- $f''(1) = 18$. Positivo → Hay un mínimo en $x = 1$, de ordenada $f(1) = -7$.
- $f''(-2) = -18$. Negativo → Hay un máximo en -2, de ordenada $f(-2) = 20$.

Como hay un máximo en $x = -2$, la función es creciente si $x < -2$ y decreciente si $x \in (-2, 1)$.

Como hay un mínimo en $x = 1$, la función es decreciente si $x \in (-2, 1)$ y creciente si $x > 1$.

Por ser de tercer orden, hay tres intervalos con la misma tendencia y dos cambios en la tendencia, que coinciden con el máximo y mínimo relativos. Las tendencias son, por orden de abscisas:

Creciente si $x < -2$ → $f(-2) = 20$, $(-2, 20)$ **máximo relativo** → decreciente si $x \in (-2, 1)$

Decreciente si $x \in (-2, 1)$ → $f(1) = -7$, $(1, -7)$ **mínimo relativo** → creciente si $x > 1$.

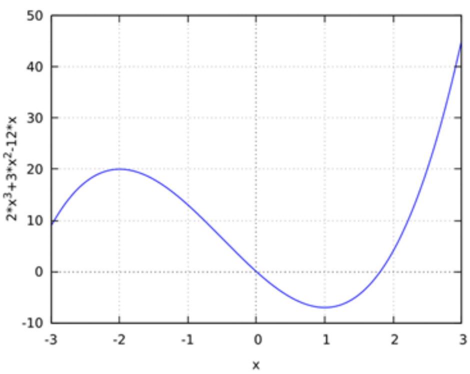
b) Los valores de $f(x)$ en los extremos del intervalo $[-2, 2]$ son $f(-2) = 20$, $f(2) = 4$. Dentro del intervalo hay un único mínimo en $f(1) = -7$, por tanto el menor de los tres valores tiene que ser el mínimo absoluto.

Mínimo absoluto en $[-2, 2]$: $(1, -7)$.

Al ser un mínimo único en el intervalo, el mayor de los valores restantes será el máximo absoluto.

Máximo absoluto en $[-2, 2]$: $(-2, 20)$.

La siguiente figura muestra las soluciones de forma gráfica:



Problema A.4:

E4.- a) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x\,\mathrm{sen}(x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular el área encerrada por las gráficas de $f(x) = 4x$ y de $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0,2]$, probando anteriormente que en dicho intervalo $f \geq g$. **(1 punto)**

Solución:

a) Primero hallamos el límite en cero, como en cero se anula tanto el numerador como el denominador, tenemos una indeterminación del tipo: 0/0.

Usando L'Hôpital resulta $L = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x\, sen(x)} = \lim_{x \to 0} -\frac{\sin(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}$, y al sustituir por cero continúan anulándose numerador y denominador, luego se mantiene la indeterminación: 0/0.

Usando de nuevo L'Hôpital resulta:

$$L = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{\sin(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}\right) = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{\cos(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)}\right) = -\frac{\cos(0)}{2\cos(0)-0 \cdot \sin(0)} = -\frac{1}{2},$$

De forma que el límite cuando x tiende a cero es $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x\, sen(x)} = -\frac{1}{2}$.

b) Calculando los valores de las funciones en los extremos del intervalo resulta:

- $f(0) = g(0) = 0$,
- $f(2) = g(2) = 8$.

Como son iguales, los valores intermedios son los que determinan que función es mayor.

Los valores en mitad del intervalo son:

- $f(1) = 4$, $g(1) = 1$,

así que $f(x)$ es mayor durante el intervalo [0, 2].

Ahora, calculando la integral indefinida para ambas funciones resulta:

- $F(x) = 2x^2$
- $G(x) = \frac{x^4}{4}$

El área resultante de cada función es:

$AF = 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 0^2 = 8$,

$AG = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$.

Y el área encerrada por las gráficas es la diferencia entre la mayor y la menor: $A = 8 - 4 = 4$ u^2.

$$A = 4 \text{ u}^2.$$

Problema A.5:

E5.- Las notas de Matemáticas II de 500 alumnos presentados al examen de EBAU tienen una distribución normal con media 6,5 y desviación típica 2.

a) Calcule la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de 8 puntos. **(1 punto)**

b) ¿Cuántos alumnos obtuvieron notas menores de 5 puntos? **(1 punto)**

Solución:

a) Tipificando para la variable en $x = 8$ de media 6.5 y desviación típica 2, resulta $Z_8 = \frac{8-6.5}{2} = 0.75$.

Por otro lado, $P(x > 8) = P(Z > 0.75) = 1 - P(Z < 0.75)$

Buscado en la tabla, se obtiene $P(Z < 0.75) = 0.7734$, de manera que la probabilidad de obtener mas de 8 es de $P(x > 8) = P(Z > 0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266$.

$$P(x > 8) = \mathbf{0.2266}.$$

a) Tipificando para la variable $x = 5$ resulta $Z_5 = \frac{5-6.5}{2} = -0.75$.

Como, $P(Z < -0.75) = 1 - P(Z < 0.75)$ y se conoce el valor $P(Z < 0.75) = 0.7734$ por el apartado anterior, la probabilidad de obtener menos de 5 es de:

$$P(x < 5) = P(Z < -0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266.$$

Siendo 500 alumnos, el 22.66 % son 113.3:

Así que, aproximadamente $\mathbf{113}$ estudiantes obtuvieron notas menores de 5.

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

PRUEBA B

Problema B.1:

E1.- a) Encontrar los valores de k para que la matriz $A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea invertible. **(1 punto)**

b) Encontrar la inversa de A para $k = 2$. **(1 punto)**

Solución:

a) La condición para que sea invertible es que el determinante de la matriz sea distinto de cero: $|A| \neq 0$, calculando el determinante e igualando a cero se obtiene:

$$\begin{vmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (k-2)\cdot(k-1) - 2(2-k) + 2 = k^2 - k = 0.$$

Resolviendo para k, se obtiene $k = 0$ y $k = 1$, de manera que es invertible para $k \neq 0$ y $k \neq 1$.

A es invertible para $\boldsymbol{k \neq 0}$ y $\boldsymbol{k \neq 1}$.

b) Cuando $k = 2$, la matriz resultante es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Su determinante es 2, y su inversa, es:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{3/2} & \mathbf{-1/2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2:

E2.- Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi \equiv x + y + kz = 0$.

Encontrar m y k para que:

a) La recta r sea perpendicular al plano π. **(1 punto)**

b) La recta r esté contenida en el plano π. **(1 punto)**

Solución:

a) El vector de dirección de la recta r es $(m, 2, 4)$ y el vector ortogonal del plano π es: $(1, 1, k)$. Para que la recta sea ortogonal al plano ambos vectores deben ser linealmente dependientes (tener la misma dirección):

$$\frac{m}{1} = \frac{2}{1} = \frac{4}{k}, \text{ luego } m = 2 \text{ y } k = 2.$$

m = 2 y k = 2

b) Para que la recta esté contenida en el plano, a) el punto de la recta, (1, 1, 1) debe verificar la ecuación del plano, y b) el vector de dirección de la recta $(m, 2, 4)$, debe ser ortogonal al vector ortogonal al plano: $(1, 1, k)$, por lo que su producto escalar debe ser cero.

a) Ecuación del plano: $x + y + kz = 0$, luego 1 + 1`+ k = 0, por lo que $k = -2$.

b) Producto escalar: $(m, 2, 4)\,(1, 1, k) = m + 2 + 4k = 0 = m + 2 + 4(-2)$ luego $m = 6$.

m = 6 y k = –2

Problema B.3:

E3.- Sea el polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ del cual sabemos que $f(0) = 1, f(1) = 0$ y que tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 1$. Calcular a, b, c y d.

Solución:

Como se sabe el valor de la función en las abscisas cero y uno, se pueden obtener dos ecuaciones simplemente sustituyendo $x = 0$ y $x = 1$.

1. $f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 1 \rightarrow d = 1$
2. $f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0 \rightarrow d + c + b + a = 0$

Ahora, también se sabe que en las mismas abscisas tiene extremos relativos, y por lo tanto su derivada debe ser cero. La derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Una vez más, sustituyendo e igualando al valor de ordenadas de la función $f'(x)$, que es cero en ambos casos por ser extremos, resulta:

3. $f'(0) = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$
4. $f'(1) = 3a \cdot 1^3 + 2b \cdot 1^2 + c = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0$

Ahora, como hay un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, se puede resolver.

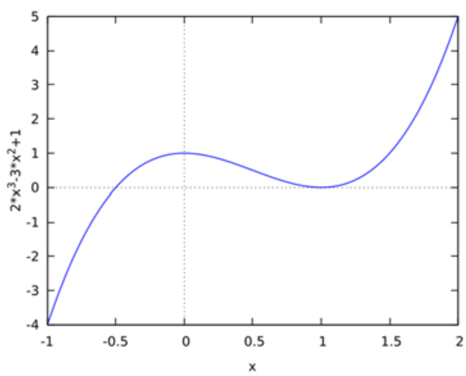
Ya se conocen dos, $(d = 1, c = 0)$ así que se puede reducir el sistema a dos ecuaciones y dos incógnitas sustituyendo:

- $b + a = -1,$ (1)
- $2b + 3a = 0,$ (2)

Haciendo por ejemplo (2) - 2*(1), resulta $a = 2$, y por lo tanto $b = -3$, resultando la solución del sistema:

$\boldsymbol{a = 2, b = -3, c = 0, d = 1}$, y la función: $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1}$

El gráfico siguiente muestra la función entre -1 y 2:



Problema B.4:

E4.- a) Sea $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. **(1 punto)**

b) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{3\cos(x) - 3}$. **(1punto)**

Solución:

a) Estudiamos la función:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1};\ f(0) = 3;\ f(2) = \frac{7}{11};\ f(-3/2) = 0$$

El único punto de corte con el eje de abscisas está fuera del intervalo [0, 2], luego toda la gráfica tiene el mismo signo, positivo:

$$Área = \int_0^2 \left(\frac{2x+3}{x^2+3x+1}\right)dx = [ln(x^2+3x+1)]^2{}_0 =$$

$$ln(4+6+1) - ln(1) = ln(11) = 2.39789 \cong 2.4$$

Área = $\boldsymbol{ln(11) \cong 2.4}$.

b) La función, cociente de dos funciones polinómicas, se anula para $x = 0$ tanto el numerador como el denominador, por lo que aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{xsenx}{3cosx - 3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{senx + xcosx)}{-3senx}\right)$$

De nuevo se anula numerador para $x = 0$, luego volvemos a aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{cosx + cosx - xsenx}{-3cosx}\right) = \frac{2}{-3}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left(\frac{xsenx}{3cosx - 3}\right) = \frac{2}{-3}}$$

Problema B.5:

E5.-En una competición de tiro olímpico hay 10 rifles, 4 con visor telescópico y 6 sin él. La probabilidad de que un tirador haga blanco con un rifle con visor telescópico es 0,95 y sin él es de 0,65.

a) Halla la probabilidad de hacer blanco escogiendo un rifle al azar. **(1 punto)**

b) Si el tirador hace blanco. ¿Es más probable que haya disparado con un rifle con visor telescópico o sin él? **(1 punto)**

Solución:

a) Llamamos T a hacer blanco disparando con un rifle de visor telescópico, y noT a disparar con un rifle sin él. Llamamos B a hacer blanco, y $no\ B$ a no hacerlo.

Hacemos una tabla de contingencia, y completamos los datos del enunciado: $P(T) = 0.4$; $P(noT) = 0.6$.

	B	noB	
T			4/10 = 0.4
noT			6/10 = 0.6
			1

$P(B/T) = 0.95$; $P(B/noT) = 0.65$. Luego por probabilidad del suceso contrario: $P(noB/T) = 0.05$; $P(noB/noT) = 0.35$.

a) Calculamos:

$P(B \cap T) = P(T) \cdot P(B/T) = 0.4 \cdot 0.95 = 0.38$.

$P(B \cap noT) = P(noT) \cdot P(B/noT) = 0.6 \cdot 0.65 = 0.39$.

Por lo que $P(B) = 0.38 + 0.39 = 0.77$.

Completamos la tabla de contingencia:

	B	noB	
T	**0.38**	***0.02***	4/10 = 0.4
noT	**0.39**	***0.21***	6/10 = 0.6
	0.77	***0.23***	1

La probabilidad de hacer blanco escogiendo un rifle al azar es de 0.77.

b) Debemos calcular $P(T/B)$ y comparar con $P(noT/B)$.

$P(T/B) = P(B \cap T)/P(B) = 0.38/0.77 = 0.4935...$

$P(noT/B) = P(B \cap noT)/P(B) = 0.39/0.77 = 0.5064...$

Son probabilidades muy parecidas, pero es **más probable** que haya disparado con rifle **sin visor telescópico**.

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- a) Discutir según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+mz=4 \end{cases}$$ **(1 punto)**

b) Resolverlo para $m=1$. **(1 punto)**

E2.- a) Consideremos los vectores $\vec{u}=(1,1,a)$ y $\vec{v}=(1,-1,a)$. Calcular a para que sean perpendiculares. **(0,5 puntos)**

b) Calcular un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{p}=(1,2,3)$ y $\vec{q}=(1,-2,-3)$. **(1,5 puntos)**

E3.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x, & \text{si } x<0 \\ x^2-4x, & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$.

a) Probar que posee un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 2. **(1,4 puntos)**

b) Probar que no posee extremo relativo en 0. **(0,6 puntos)**

E4.- a) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x-\cos x}$ **(1 punto)**

b) Calcular a, siendo $a>1$, para que el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=x$, $g(x)=ax$ y $x=1$ sea 1. **(1 punto)**

E5- La temperatura del cuerpo humano sigue una distribución normal de media 37ºC y desviación típica 0,5ºC.

a) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36ºC y 38ºC **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor que 36,5ºC. **(1 punto)**

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de x e y, para que el producto AM sea igual a la inversa de la matriz N. **(2 puntos)**

E2.- Hallar a y b para que los vectores $(a, -1, 2)$ y $(1, b, -2)$ sean perpendiculares y las dos primeras coordenadas de su producto vectorial sean iguales. **(2 puntos)**

E3.- a) Enunciar el teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Indicar un punto en el que la función $f(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ tome el valor 0, y demostrar (o bien usando el teorema del apartado previo o bien con algún otro razonamiento) que esta función sólo se anula en ese punto. **(1 punto)**

E4.- Determínense los valores de a y de b para los cuales la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + \cos x, & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 2bx + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

es continua y verifica que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$. **(2 puntos)**

E5.- En una empresa de alquiler de vehículos con conductor:

- Trabajan 50 conductores de menos de 45 años, de los cuales 15 hablan inglés.
- Trabajan 30 conductores de entre 45 y 55 años, de los cuales 6 hablan inglés.
- Trabajan 20 conductores de más de 55 años, de los cuales 3 hablan inglés.

Considerando los sucesos: $A =$ "tener menos de 45 años", $B =$ "tener entre 45 y 55 años", $C =$ "tener más de 55 años" e $I =$ "hablar inglés":

a) Calcular $P(I/A)$, $P(I/B)$ y $P(I/C)$. **(0,9 puntos)**

b) Si se elige al azar un conductor, y éste habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 45 años? **(1,1 puntos)**

OPCIÓN A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

E1.- a) Discutir según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+mz=4 \end{cases}$$ **(1 punto)**

b) Resolverlo para $m=1$. **(1 punto)**

Solución:

a) Empezamos por analizar los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada:

$$rango\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} = 2 = rango\ B\ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & m & 4 \end{pmatrix} < n^{\underline{o}}\ incógnitas;$$

De donde se deduce que el sistema es **compatible indeterminado para todo valor de *m***.

Para todo valor de ***m*** el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Su solución es: $\begin{cases} x = 3-(m+1)\lambda \\ y = -2+(m+2)\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Para $m = 1$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 3 - 2\lambda} \\ \boldsymbol{y = -2 + 3\lambda} \\ \boldsymbol{z = \lambda} \end{cases}$$

Problema A.2:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

E2.- a) Consideremos los vectores $\vec{u} = (1,1,a)$ y $\vec{v} = (1,-1,a)$. Calcular a para que sean perpendiculares. **(0,5 puntos)**

b) Calcular un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{p} = (1,2,3)$ y $\vec{q} = (1,-2,-3)$. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) Para que los vectores dados sean ortogonales su producto escalar debe ser cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 = (1,1,a) \cdot (1,-1,a) = 1 - 1 + a^2 = a^2 \to a = 0$$

***a* = 0**

b) Para obtener un vector ortogonal a los dos vectores dados calculamos su producto vectorial:

$$\vec{p}\, x\, \vec{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0i - 6j + 4k$$

Por tanto, el vector (0, −6, 4) es ortogonal a los dados, pero no es unitario. Calculamos su módulo, y dividimos por él:

Si la recta *r* es perpendicular al plano π, su vector director será el vector normal del plano.

Módulo: $\sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

Vector unitario: $0i - \frac{6}{\sqrt{52}}j + \frac{4}{\sqrt{52}}k = 0i - \frac{3}{\sqrt{13}}j + \frac{2}{\sqrt{13}}k \to (0, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$

$$\mathbf{(0, -\frac{6}{\sqrt{52}}, \frac{4}{\sqrt{52}}) = (0, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})}$$

Problema A.3:

E3.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 4x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Probar que posee un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 2.

b) Probar que no posee extremo relativo en 0.

Solución:

a) Lo primero es calcular la derivada de la función e igualar a cero:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x < 0 \\ 2x - 4, & x > 0 \end{cases}$$

La primera ecuación se anula en $x = -1 < 0$ y la segunda en $x = 2 > 0$, luego ambos puntos que corresponden a abscisas de posibles máximos o mínimos.

Derivando por segunda vez, se obtiene $f''(x) = \begin{cases} -2 < 0, & x < 0 \\ 2 > 0, & x > 0 \end{cases}$, por lo que $x = -1$ se tiene un máximo relativo y en $x = 2$ un mínimo relativo. Sustituyendo dichas abscisas resulta: $(-1, 1)$, $(2, -4)$.

$(-1, 1)$ **máximo relativo** → creciente si $x \in (-\infty, -1)$; decreciente si $x \in (-1, 2)$.

$(2, -4)$ **mínimo relativo** → creciente si $x > 2$.

b) Estudiamos la derivada en $x = 0$.

$$f'(0) = \begin{cases} -2x - 2 = -2 < 0, & x < 0 \\ 2x - 4 = -4 < 0, & x > 0 \end{cases},$$

por lo que la derivada antes y después de $x = 0$ es negativa, no hay cambio de signo y no se anula. La función al pasar por $x = 0$ es siempre decreciente. No posee un extremo relativo en $(0, 0)$.

La función está formada por dos parábolas, que en $x = 0$ ambas son decrecientes, y en dicho punto se unen, por lo que la función es continua en toda la recta real.

En $(0, 0)$ la función es decreciente. No tiene un extremo relativo.

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.4:

E4.- a) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - \cos x}$ **(1 punto)**

b) Calcular a, siendo $a > 1$, para que el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = ax$ y $x = 1$ sea 1. **(1 punto)**

Solución:

a) La función, cociente de dos funciones polinómicas, se anula para $x = 0$ tanto el numerador como el denominador, por lo que aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{\mathrm{e^x} - \mathrm{cosx}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{cosx)}{\mathrm{e^x} + senx}\right) = 1$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{\mathrm{e^x} - \mathrm{cosx}}\right) = 1}$$

b) Las funciones dadas son rectas. Hallamos su punto de corte:

$$x = ax, x(1 - a) = 0 \to x = 0$$

Si $a = 1$, ambas rectas son la misma. Si $a > 1$, la recta $y = ax$ va por encima de la recta $y = x$.

$$\int_0^1 |x(1 - a)|dx = \left|\left[\frac{x^2}{2}(1-a)\right]_0^1\right| = \left|\left(\frac{1-a}{2}\right) - 0\right| = 1 \to a - 1 = 2 \to a = 3.$$

$$\boldsymbol{a = 3.}$$

Problema A.5:$\mu\sigma$

E5- La temperatura del cuerpo humano sigue una distribución normal de media 37ºC y desviación típica 0,5ºC.

a) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36ºC y 38ºC **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor que 36,5ºC.

Solución:

a) Nos piden calcular $P(36 < X < 38) = P(X < 38) - P(X < 36)$

Sabemos que: $\mu = 37$ y que $\sigma = 0.5$. Tipificamos: 38 – 37/ 0.5 = 2; 36 – 37/ 0.5 = –2.

$$P(36 < X < 38) = P(z < 2) - P(z < -2) = P(z < 2) - (1 - P(z < 2)) = 2(P(z < 2)) - 1 = 2(0.9772) - 1 = 0.9544.$$

La probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36 y 38 grados es de 0.9544.

b) $P(X < 36.5)$.

Tipificamos: 36.5 – 37/ 0.5 = –1;

$$P(X < 36.5) = P(z < -1) = 1 - P(z < -1) = 1 - 0.843 = 0.157.$$

La probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor a 36.5 grados es menor que 0.157.

OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

E1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de x e y, para que el producto AM sea igual a la inversa de la matriz N. **(2 puntos)**

Solución:

a) Empezamos por calcular el producto AM:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y & 1 \\ -x+y & 1 \end{pmatrix}.$$

Y la matriz inversa de N, que existe pues su determinante es distinto de cero, vale 1.

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Igualamos:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}.$$

Al sumar las dos ecuaciones, se obtiene $x = 3$, y al sustituir en la segunda, $y = 4$.

Por lo tanto, $AM = N^{-1}$ si $\boldsymbol{x = 3, y = 4}$**.**

Problema B.2:

E2.- Hallar a y b para que los vectores $(a, -1,2)$ y $(1, b, -2)$ sean perpendiculares y las dos primeras coordenadas de su producto vectorial sean iguales. **(2 puntos)**

Solución:

a) Para que los vectores dados sean ortogonales su producto escalar debe ser cero:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 = (a, -1, 2)\cdot(1, b, -2) = a - b - 4$$

Calculamos su producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & -1 & 2 \\ 1 & b & -2 \end{vmatrix} = (2-2b)i\ + (2a+2)j\ + (ab+1)k$$

Igualamos las dos primeras coordenadas de su producto vectorial:

$$2 - 2b = 2a + 2 \to -b = a$$

Sustituimos en la ecuación del producto escalar:

$$0 = a - b - 4 = a\ +\ a\ - 4 \to a\ =\ 2 \to b = -2.$$

$$\boldsymbol{a\ =\ 2; b = -2}$$

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.3:

E3.- a) Enunciar el teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Indicar un punto en el que la función $f(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ tome el valor 0, y demostrar (o bien usando el teorema del apartado previo o bien con algún otro razonamiento) que esta función sólo se anula en ese punto. **(1 punto)**

Solución:

a) Teorema de Rolle:

Si s una función **continua** definida en un intervalo **cerrado** **derivable** sobre el intervalo **abierto** y , entonces: Existe al menos un punto perteneciente al intervalo abierto tal que .

b) Nos piden probar que la función: $f(x) = 2x - sen(x)$ únicamente se anula en un punto.

Es claro que se anula en $x = 0$, ya que $f(0) = 2(0) - sen(0) = 0$.

Para probar que ese es el único punto en el que se anula, vamos a usar el teorema de Rolle por contradicción, es decir, si no se cumple la conclusión, es que algo de la hipótesis no debe ser cierto.

La función es continua y derivable en toda la recta real.

Su derivada es: $f'(x) = 2 - cos(x)$, que se anularía sólo si el coseno valiera 2, lo que nunca ocurre ya que es siempre menor que 1.

Al no verificarse la conclusión de que exista un punto dónde se anula la derivada, debe fallar alguna de las hipótesis.

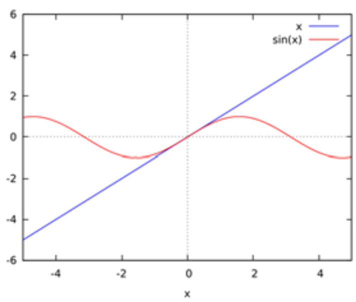
Son tres:

La función es continua y derivable en toda la recta real. Esta se cumple siempre.

Luego, lo que contradice el que la función pudiera anularse en otro punto al darse entonces las condiciones del teorema de Rolle.

La función únicamente se anula en $x = 0$.

La siguiente figura muestra el resultado anterior de forma gráfica:



Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.4:

E4.- Determínense los valores de a y de b para los cuales la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + \cos x, & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 2bx + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

es continua y verifica que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$.

Solución:

La función está definida a trozos por dos funciones continuas en toda la recta real, por lo que, únicamente puede tener un punto de discontinuidad en donde se unen los trozos, es decir, en x = 0.

Estudiamos el valor de la función a ambos lados, e imponemos que sean iguales:

$$f(x) = \begin{cases} a + cosx, x \le 0 \\ x^2 - 2bx + 1, x > 0 \end{cases} \to a + cos(0) = a + 1 = 1 \to a = 0.$$

Imponemos ahora lo del área. Entre 0 y 1 la función es la parábola:

$$\int_0^1 (x^2 - 2bx + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2b\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - b + 1 = \frac{1}{3} \to b = 1.$$

$$\boldsymbol{a = 0 \text{ y } b = 1}.$$

Problema B.5:

E5.- En una empresa de alquiler de vehículos con conductor:
- Trabajan 50 conductores de menos de 45 años, de los cuales 15 hablan inglés.
- Trabajan 30 conductores de entre 45 y 55 años, de los cuales 6 hablan inglés.
- Trabajan 20 conductores de más de 55 años, de los cuales 3 hablan inglés.

Considerando los sucesos: $A =$ "tener menos de 45 años", $B =$ "tener entre 45 y 55 años", $C =$ "tener más de 55 años" e $I =$ "hablar inglés":

a) Calcular $P(I/A)$, $P(I/B)$ y $P(I/C)$. **(0,9 puntos)**

b) Si se elige al azar un conductor, y éste habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 45 años? **(1,1 puntos)**

Solución:

a) Llamamos A al suceso, tener menos de 45 años, B a tener entre 45 y 55 años, y C a tener más de 55 años. Llamamos I al suceso hablar inglés, y noI a no hablarlo. Nos dan los siguientes datos:

$P(A) = 50/100 = 0.5$; $P(B) = 30/100 = 0.3$; $P(C) = 20/100 = 0.2$.

$P(A \cap I) = 15/100 = 0.15$; $P(B \cap I) = 6/100 = 0.06$; $P(C \cap I) = 3/100 = 0.03$.

Nos piden calcular $P(I/A) = P(I \cap A) / P(A) = 0.15/0.5 = 0.3$.

$P(I/B) = P(I \cap B) / P(B) = 0.06/0.3 = 6/30 = 0.2$.

$P(I/C) = P(I \cap C) / P(C) = 0.03/0.2 = 3/20 = 0.15$.

$$P(I/A) = 0.3;\ P(I/B) = 0.2;\ P(I/C) = 0.15.$$

b) Ahora debemos calcular y una nueva probabilidad condicionada: $P(A/I) = P(A \cap I) / P(I)$.

Calculamos $P(I)$. Podemos hacerlo completando una table de contingencia, o bien, sabemos que solo hablan inglés: $15 + 6 + 3 = 24$. Luego $P(I) = 24/100 = 0.24$.

$P(A/I) = P(A \cap I) / P(I) = 0.15/0.24 = 0.625$.

$$P(A/I) = 0.625.$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de Cataluña

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

Colaborador: Jesús Caballero Vallés

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat 2019

Matemàtiques

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Les pàgines d'un llibre han de tenir cada una 600 cm² de superfície, amb uns marges al voltant del text de 2 cm a la part inferior, 3 cm a la part superior i 2 cm a cada costat. Calculeu les dimensions de la pàgina que permeten la superfície impresa més gran possible.
[2 punts]

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ x+k^2y+3z=2k \\ 3x+7y+7z=k-3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k=-1$.
[1 punt]

3. Un dron es troba en el punt $P=(2,-3,1)$ i volem dirigir-lo en línia recta fins al punt més proper del pla d'equació $\pi: 3x+4z+15=0$.

a) Calculeu l'equació de la recta, en forma paramètrica, que ha de seguir el dron. Quina distància ha de recórrer fins a arribar al pla?
[1 punt]

b) Trobeu les coordenades del punt del pla on arribarà el dron.
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax+By+Cz+D=0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

4. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{2x^3-5x+4}{1-x}$.

a) Calculeu-ne el domini i estudieu-ne la continuïtat. Té cap asímptota vertical?
[1 punt]

b) Observeu que $f(-2)=-\dfrac{2}{3}$, $f(0)=4$ i $f(2)=-10$. Raoneu si, a partir d'aquesta informació, podem deduir que l'interval $(-2, 0)$ conté un zero de la funció. Podem deduir-ho per a l'interval $(0, 2)$? Trobeu un interval determinat per dos enters consecutius que contingui, com a mínim, un zero d'aquesta funció.
[1 punt]

5. Sigui la matriu $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a se satisfà la igualtat $\boldsymbol{M}^2-\boldsymbol{M}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat i $\boldsymbol{0}$ és la matriu nul·la, totes dues d'ordre 2.
[1 punt]

b) Fent servir la igualtat de l'apartat anterior, trobeu una expressió general per a calcular la matriu inversa de la matriu $\boldsymbol{M}$ i, a continuació, calculeu la inversa de $\boldsymbol{M}$ per al cas $a=\sqrt{2}$.
[1 punt]

6. Considereu les funcions $f(x)=x^2$ i $g(x)=\dfrac{1}{x}$, i la recta $x=e$.

a) Feu un esbós de la regió delimitada per les seves gràfiques i l'eix de les abscisses. Calculeu les coordenades del punt de tall de $y=f(x)$ amb $y=g(x)$.
[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió descrita en l'apartat anterior.
[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat 2019

Matemàtiques

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Volem construir un marc rectangular de fusta que delimiti una àrea de $2\ \text{m}^2$. Sabem que el preu de la fusta és de 7,5 €/m per als costats horitzontals i de 12,5 €/m per als costats verticals. Determineu les dimensions que ha de tenir el rectangle perquè el cost total del marc sigui el mínim possible. Quin és aquest cost mínim?
[2 punts]

2. Siguin la recta $r:\begin{cases} x=2 \\ y-z=1 \end{cases}$ i el pla $\pi: x-z=3$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que és perpendicular al pla π i que el talla en el mateix punt en què el talla la recta r.
[1 punt]

b) Trobeu els punts de r que estan a una distància de $\sqrt{8}$ unitats del pla π.
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància que hi ha d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax+By+Cz+D=0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a:

$$\begin{cases} ax+7y+5z=0 \\ x+ay+z=3 \\ y+z=-2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $a=2$.
[1 punt]

4. Considereu la funció $f(x)$, que depèn dels paràmetres reals n i m i és definida per

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{4}+n & \text{si } 0 < x \le 2 \\ \dfrac{3x}{2}+m & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

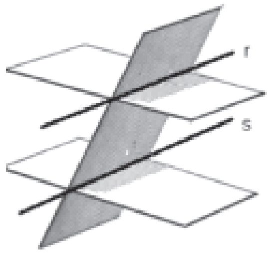
a) Calculeu els valors de n i m perquè la funció sigui contínua a tot el conjunt dels nombres reals.
[1 punt]

b) Per al cas $n = -4$ i $m = -6$, calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.
[1 punt]

5. Considereu els plans $\pi_1: 2x + ay + z = 5$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 2x + (a + 1)y + (a + 1)z = 0$, en què a és un paràmetre real.

a) Estudieu per a quins valors del paràmetre a els tres plans es tallen en un punt.
[1 punt]

b) Comproveu que per al cas $a = 1$ la interpretació geomètrica del sistema format per les equacions dels tres plans és la que es mostra en la imatge següent:
[1 punt]



6. Sabem que una funció $f(x)$ és contínua i derivable a tots els nombres reals, que té com a segona derivada $f''(x) = 6x$ i que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és horitzontal.

a) Determineu l'abscissa dels punts d'inflexió de la funció f i els intervals de concavitat i convexitat. Justifiqueu que la funció f té un mínim relatiu en $x = 1$.
[1 punt]

b) Sabent, a més, que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $y = 5$, calculeu l'expressió de la funció f.
[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Textos Marea Verde

SÈRIE 1

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

1. Les pàgines d'un llibre han de tenir cada una 600 cm^2 de superfície, amb uns marges al voltant del text de 2 cm a la part inferior, 3 cm a la part superior i 2 cm a cada costat. Calculeu les dimensions de la pàgina que permeten la superfície impresa més gran possible.

Las páginas de un libro deben tener, cada una, 600 cm^2 de superficie, con márgenes de 2 cm en la parte superior, 3 cm en la inferior y 2 cm a cada lado. Calcula las dimensiones de la página que hagan la superficie impresa lo más grande posible.

Solución

Sean x e y las dimensiones horizontal y vertical de la página total (en cm). Por tanto, la parte impresa tiene $(y-2-3)(x-2-2)$ y eso es lo que hay que maximizar:

$$\begin{cases} Max(x-4)(y-5) \\ xy = 600 \end{cases}$$

Despejando y tenemos $y = 600/x$ de donde la función a maximizar es $f(x) = (x-4)(600/x - 5)$

Operando un poco es:

$$f(x) = 600 - 5x - \frac{2400}{x} + 20 = 620 - \frac{2400}{x} - 5x$$

Derivamos e igualamos a 0

$$0 = f'(x) = -5 + \frac{2400}{x^2}$$

o, lo que es lo mismo $x^2 = 2400/5 = 480$

$$x = \pm\sqrt{480} \approx \pm 21.91$$

Obviamente solo vale la solución positiva.

Dando valores a los lados: $f'(20) = 1 > 0$ y $f'(30) = -5 + 24/9 < 0$ por lo que crece en (0, 21.91) y decrece en $(21.91, +\infty)$. Así pues, el valor encontrado es un máximo en el intervalo $(0, +\infty)$ que es la única parte donde tiene sentido el problema.

Despejando $y = 600/21.91 = 27.39$

La parte impresa debe tener **21.91 cm de ancho** y **27.39 cm de largo**.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.2:

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ x+k^2y+3z=2k \\ 3x+7y+7z=k-3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k=-1$.
[1 punt]

Considera el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real k.

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ x+k^2y+3z=2k \\ 3x+7y+7z=k-3 \end{cases}$$

a) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro k.
b) Resuelve el sistema para $k=-1$

Solución:

Apartado a)

Llamamos $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \\ 3 & 7 & 7 & k-3 \end{pmatrix}$ a las matrices de coeficientes y ampliada respectivamente.

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes y lo igualamos a 0.

$$0=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix}=(7k^2+14+27)-(6k^2+21+21)=k^2-1$$

Es claro que las soluciones son 1 y -1.

Como el sistema es cuadrado, ya tenemos la primera conclusión:

Si $k\notin\{-1,1\}$ el sistema es compatible y determinado.

Lo más sencillo es hacer cada caso por separado, así trabajamos con números en vez de letras.

$$\text{Si } k=1\rightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Lo resolvemos por el método de Gauss: Haciendo operaciones por filas:

($F'_2=F_2-F_1$ y $F'_3=F_3-3F_1$) tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, haciendo ceros en la última fila con $F''_3=F'_3-F'_2$ queda:

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La submatriz de los coeficientes tiene rango 2 y la ampliada de rango 3, con lo que el sistema es incompatible. O dicho de otra forma tenemos la ecuación 0z = -2, incompatible.

Otro modo de verlo es que, tras hacer operaciones por filas queda una ecuación como 0$z = 0$ = -2. Esta es obviamente una ecuación imposible y por tanto el sistema no tiene solución.

$$\text{Si } k = -1 \to B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

Haciendo operaciones por filas ($F'_2 = F_2 - F_1$ y $F'_3 = F_3 - 3F_1$) tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, haciendo ceros en la última fila con $F''_3 = F'_3 - F'_2$ queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que la matriz de coeficientes tiene rango 2 igual que la ampliada pero menor que el número de incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Si $k \notin \{-1, 1\}$ el sistema es compatible y determinado.
- Si $k = 1$ el sistema es incompatible.
- Si $k = -1$ el sistema es compatible indeterminado.

Apartado b)

Podemos aprovechar mucho del apartado a). Ya hemos visto que el sistema es compatible e indeterminado y que es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En forma de sistema es $\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ -2y + z = -1 \end{cases}$ pues la última ecuación es superflua.

Pasamos la z al otro lado y resolvemos:

$$y = \frac{-1-z}{-2} = \frac{z+1}{2}; x = -1 - 2z - 3\frac{z+1}{2} = \frac{-5-7z}{2}$$

La solución es $\left(\frac{-5-7z}{2}, \frac{z+1}{2}, z\right)$ o bien, haciendo $z = \lambda$: $\left(\frac{-5-7z}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \lambda\right)$.

La solución del sistema en el caso $k = -1$ es $\left(-\frac{\mathbf{5+7\lambda}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{\lambda+1}}{\mathbf{2}}, \boldsymbol{\lambda}\right) : \lambda \in \mathbb{R}$

Problema A.3:

3. Un dron es troba en el punt $P=(2,-3,1)$ i volem dirigir-lo en línia recta fins al punt més proper del pla d'equació $\pi: 3x+4z+15=0$.

a) Calculeu l'equació de la recta, en forma paramètrica, que ha de seguir el dron. Quina distància ha de recórrer fins a arribar al pla?
[1 punt]

b) Trobeu les coordenades del punt del pla on arribarà el dron.
[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax+By+Cz+D=0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Un dron se encuentra en el punto P = (2, –3, 1) y queremos dirigirlo en línea recta al punto más próximo del plano de ecuación $\pi: 3x+4z+15=0$.

a) Calcula la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que ha de seguir el dron. ¿Qué distancia ha recorrido cuando llega al plano?

b) Calcula las coordenadas del punto del plano donde llega el dron

Solución:

Apartado a)

La recta que sigue el dron es perpendicular al plano y pasa por el punto P = (2, –3, 1), el vector normal al plano es (3, 0, 4) de modo que la recta en forma vectorial es $(2,-3,1)+\lambda(3,0,4)$

En forma paramétrica es simplemente ponerla en forma de sistema:

La recta que sigue el dron es $\begin{cases} \boldsymbol{x=2+3\lambda} \\ \boldsymbol{y=-3} \\ \boldsymbol{z=1+4\lambda} \end{cases}$

Podríamos calcular la distancia con la fórmula de la distancia de un punto a un plano. Pero no merece la pena, puesto que en el apartado b) nos piden el punto.

Apartado b)

El punto de corte es la solución de:

$$\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-3 \\ z=1+4\lambda \\ 3x+4z+15=0 \end{cases}$$

Sustituyendo en la última ecuación tenemos

$$3(2+3\lambda)+4(1+4\lambda)+15=0$$

o, lo que es lo mismo

$$25+25\lambda=1 \text{ que da } \lambda=-1, x=-1, y=-3 \text{ y } z=-3$$

Esa es la solución del apartado b).

El punto del plano donde llega el dron es $(-1,-3,-3)$.

Apartado a) de nuevo:

La distancia entre ese punto y P es la que recorre el dron:

$$\sqrt{[2-(-1)]^2+[-3-(-3)]^2+[1-(-3)]^2}=\sqrt{9+0+16}=5$$

El dron recorre 5 unidades

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.4:

4. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{2x^3-5x+4}{1-x}$.

a) Calculeu-ne el domini i estudieu-ne la continuïtat. Té cap asímptota vertical?
[1 punt]

b) Observeu que $f(-2)=-\dfrac{2}{3}, f(0)=4$ i $f(2)=-10$. Raoneu si, a partir d'aquesta informació, podem deduir que l'interval $(-2,0)$ conté un zero de la funció. Podem deduir-ho per a l'interval $(0,2)$? Trobeu un interval determinat per dos enters consecutius que contingui, com a mínim, un zero d'aquesta funció.
[1 punt]

Considera la función $f(x)=\frac{2x^3-5x+4}{1-x}$

a) Calcula el dominio y estudie la continuidad. ¿Tiene asíntota vertical?

b) Observa que $f(-2)=-\frac{2}{3}, f(0)=4$ y $f(-2)=-10$. Razone si, a partir de esta información, podemos deducir que el intervalo (–2, 0) contiene un cero de la función. ¿Podemos deducir lo mismo para el intervalo (0, 2)? Encuentra un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de la función.

Solución: Apartado a)

Es un cociente de polinomios, que son funciones continuas. El único punto donde puede fallar el dominio es el que anula el denominador. Dicho punto es evidentemente $x=1$. Calculemos pues los límites laterales:

$$f(1^+) = 1/0^- = -\infty, f(1^-) = 1/0^+ = +\infty$$

Puesto que ambos salen infinito (de distinto signo, aunque no es necesario) hay una discontinuidad de salto infinito, también llamada asíntota vertical.

La función es continua en todos los reales excepto en $x=1$ donde tiene una discontinuidad de salto infinito. Tiene una asíntota vertical, la recta $\boldsymbol{x=1}$

Apartado b)

El **Teorema de Bolzano** asegura que, si una función **continua** cambia de signo en los extremos de un intervalo, entonces contiene un cero en el interior de dicho intervalo.

Como la función es continua en (–2, 0) sí podemos asegurar que contiene un cero en este intervalo.

Sin embargo, eso requiere que la función sea continua en todo el intervalo. Y no lo es en $x=1$

Como la función no es continua en (0, 2) no podemos asegurar que contenga un cero en este intervalo.

Si calculamos $f(-1)=\frac{2(-1)^3-5(-1)+4}{1-(-1)}=7/2>0$. Por tanto, en el intervalo (–2, –1) hay cambio de signo, de modo que:

Podemos asegurar que la función contiene un cero en (–2, –1).

Textos Marea Verde

Problema A.5:

5. Sigui la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a se satisfà la igualtat $M^2 - M - 2I = 0$, en què I és la matriu identitat i 0 és la matriu nul·la, totes dues d'ordre 2.
[1 punt]

b) Fent servir la igualtat de l'apartat anterior, trobeu una expressió general per a calcular la inversa de la matriu M i, a continuació, calculeu la inversa de M per al cas $a = \sqrt{2}$.
[1 punt]

Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcula para qué valores del parámetro a se satisface la igualdad $M^2 - M - 2I = 0$ donde Ies la matriz identidad y 0 la matriz nula, todas ellas de orden 2.

b) Utilizando la igualdad anterior, encuentra una expresión general para calcular la inversa de la matriz M y calcula con ella la inversa de Mcuando $a = \sqrt{2}$

Solución

Apartado a)

Hacemos la cuenta en función de a

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - 2I = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a^2+1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-2 & 0 \\ 0 & a^2-2 \end{pmatrix}$$

Si igualamos a 0, queda una única ecuación $a^2 - 2 = 0$.

La igualdad se cumple sí y solo sí $\boldsymbol{a = \sqrt{2}}$ o $\mathbf{a = -\sqrt{2}}$

Apartado b)

Si es $M^2 - M - 2I = 0$ y queremos calcular la inversa, debemos poner esta ecuación como $M \cdot B = I$ para alguna matriz B que será la inversa.

Operando

$$M^2 - M - 2I = 0 \rightarrow M^2 - M = 2I \rightarrow M\left(\frac{M-I}{2}\right) = I$$

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

La fórmula de la inversa es $\frac{M-I}{2}$

El problema no deja claro si hay que sustituirla en todos los casos o solo en el $a=\sqrt{2}$. De modo que sustituiremos en general y luego particularizaremos:

$$\frac{M-I}{2}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0 & a/2\\ a/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

La fórmula de la inversa es $\frac{M-I}{2}=\begin{pmatrix}0 & a/2\\ a/2 & -1/2\end{pmatrix}$.

En el caso $a=\sqrt{2}$ sería:

La matriz inversa para $a=\sqrt{2}$ es $\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{\sqrt{2}/2}\\ \mathbf{\sqrt{2}/2} & \mathbf{-1/2}\end{pmatrix}$.

Problema A.6:

6. Considereu les funcions $f(x)=x^2$ i $g(x)=\dfrac{1}{x}$, i la recta $x=e$.

a) Feu un esbós de la regió delimitada per les seves gràfiques i l'eix de les abscisses. Calculeu les coordenades del punt de tall de $y=f(x)$ amb $y=g(x)$.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió descrita en l'apartat anterior.

[1 punt]

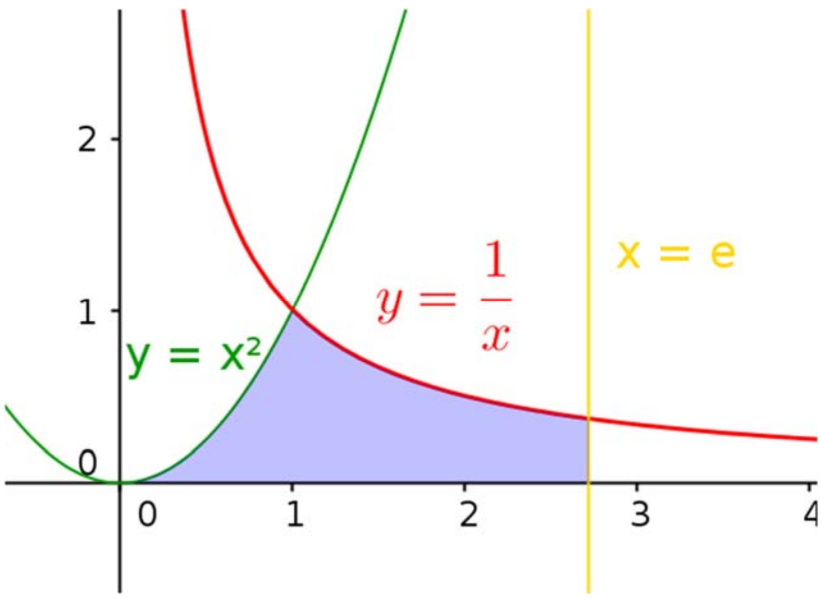
Considera las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, así como la recta $x = e$.

a) Haz un esbozo de la región delimitada por las gráficas y el eje de abscisas. Calcula las coordenadas del punto de corte de $y = f(x)$ con $y = g(x)$
b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución

Apartado a)

La función $y = f(x)$ es una parábola. El vértice de la parábola está en el punto (0, 0) y las ramas son hacia arriba. La función $\frac{1}{x}$ es conocida, la función de proporcionalidad inversa y la recta $x = e$ es vertical. Podemos dibujar directamente:



Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

El punto de corte de las dos funciones es la solución del sistema $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$

Se obtiene por igualación:

$$x^2 = \frac{1}{x} \to x^3 = 1 \to x = 1$$

Sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones:

El único punto de corte de $y = f(x)$ con $y = g(x)$ es el punto $(1, 1)$

Apartado b)

Como se ve en la gráfica, si x está entre 0 y 1 el límite superior es $y = x^2$, en tanto que entre 1 y e es $y = 1/x$.

De ahí que el área sea

$\int_0^1 x^2\,dx + \int_1^e \frac{dx}{x} = [\frac{x^3}{3}]_0^1 + [ln(x)]_1^e = (\frac{1}{3} - 0) + (1 - 0) = \frac{4}{3}$.

Es costumbre poner unidades cuadradas, pero eso supone que las unidades y escalas de los ejes son idénticas.

El área entre las curvas y la recta es $\frac{4}{3}$ u²

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

SÈRIE 4

Problema B.1:

. Volem construir un marc rectangular de fusta que delimiti una àrea de 2 m^2. Sabem que el preu de la fusta és de 7,5 €/m per als costats horitzontals i de 12,5 €/m per als costats verticals. Determineu les dimensions que ha de tenir el rectangle perquè el cost total del marc sigui el mínim possible. Quin és aquest cost mínim?
[2 punts]

Queremos construir un marco rectangular de madera que delimite un área de 2 m². Sabemos que el precio de la madera es de 7.5 € para los lados horizontales y de 12.5 € para los verticales. Determine las dimensiones que ha de tener el rectángulo para que el coste total del marco sea el mínimo posible. ¿Cuánto es dicho coste mínimo?

Solución

Sean x e y las dimensiones horizontal y vertical del marco (en cm). Por tanto, el coste del marco es:

$$2\cdot 7.5\mathrm{x}+2\cdot 12.5\mathrm{y}=15\mathrm{x}+25y$$

(hay dos lados de cada). Eso es lo que hay que maximizar.

$$\begin{cases} Max(15x+25y) \\ xy=2 \end{cases}$$

Despejando y tenemos $y=\frac{2}{x}$ de donde la función a maximizar es $15x+\frac{25\cdot 2}{x}$

Derivamos e igualamos a 0

$f'(x)=15-\frac{50}{x^2}=0$ o, lo que es lo mismo $x^2=\frac{50}{15}\approx 3.33$ de donde:

$$x=\pm\sqrt{3.3}=\pm\sqrt{\frac{10}{3}}=\pm\frac{\sqrt{30}}{3}\approx\pm 1.83$$

Obviamente solo vale la solución positiva.

Dando valores a los lados $f'(1)=-35<0$ y $f'(2)=2.5>0$ por lo que decrece en (0, 1.83) y crece en $(1.83,+\infty)$. Así pues, $x=1.83=\frac{\sqrt{30}}{3}$ es un mínimo en $(0,+\infty)$ que es la única región donde tiene sentido el problema.

Despejando $y=2/1.83=\frac{\sqrt{30}}{5}\approx 1.09$

Las dimensiones del marco deben ser $\frac{\sqrt{30}}{3}$ ≈**1.83** m en horizontal y $\frac{\sqrt{30}}{5}$ ≈**1.09** en vertical

Para calcular el coste basta sustituir. $15\cdot 1.83+25\cdot 1.09=54.7$ €

El marco más barato cuesta **54.7 €**

Nota: los cálculos se han hecho redondeando Con más decimales los resultados son respectivamente 1.83, 1.10 y 54.77.

Problema B.2:

2. Siguin la recta r: $\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ i el pla $\pi: x - z = 3$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que és perpendicular al pla π i que el talla en el mateix punt en què el talla la recta r.
[1 punt]

b) Trobeu els punts de r que estan a una distància de $\sqrt{8}$ unitats del pla π.
[1 punt]

Nota: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació $Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Sean la recta $\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: x - \mathrm{z} = 3$.

a) Calcula la ecuación paramétrica de la recta perpendicular al plano π y que lo corta en el mismo punto en el que lo corta la recta *r*.

b) Calcula los puntos de *r* que están a una distancia de $\sqrt{8}$ unidades del plano π.

Nota: se puede calcular la distancia de un punto de coordenadas $(x_{0,}\, y_{0,}\, z_0)$ a un plano de ecuación $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ con la fórmula $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-D|}{\sqrt{A^2+B^2C^2}}$.

Solución:

Apartado a)

Necesitamos en primer lugar calcular el punto de corte de la recta y el plano. Para ello, lo más sencillo es resolver el sistema que forman.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \\ x - z = 3 \end{cases}$$

Sustituyendo en la última, 2 – z = 3 da z = –1 en tanto y – (–1) = 1 da y = 0.

La recta es perpendicular al plano y pasa por el punto (2, 0, –1). El vector normal al plano es (1, 0, –1) de modo que la recta en forma vectorial es $(2, 0, -1) + \lambda(1, 0, -1)$

En forma paramétrica es simplemente ponerla en forma de sistema:

$$\text{La recta es } \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Apartado b)

El plano es $\pi: x - z - 3 = 0$, de modo que hay que sustituir $\frac{|x_0 - z_0 - 3|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \frac{|x_0 - z_0 - 3|}{\sqrt{2}}$. Eso nos da otro sistema con las ecuaciones de la recta:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \\ \dfrac{|x - z - 3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{8} \end{cases}$$

Sustituyendo x en la tercera:

$\begin{cases} y - z = 1 \\ |2 - z - 3| = 4 \end{cases}$ es decir $\begin{cases} y - z = 1 \\ |-z - 1| = 4 \end{cases}$

La x es siempre 2.

Hay dos posibilidades para z, con + y con -

1. $-z - 1 = 4$ que da $z = -5$. Sustituyendo en la segunda es y – (–5) = 1, y = –4.
2. $-(-z - 1) = 4$ que da z = 3. Sustituyendo en la segunda es y = 4.

Los dos puntos a distancia $\sqrt{8}$ son $(2, -4, -5)$ y $(2, 4, 3)$.

Problema B.3:

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a:

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

c) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1 punt]

d) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.
[1 punt]

Considera el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real a

$$\begin{cases} ax + 7y + 5z = 0 \\ x + ay + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

a) Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

b) Resuelve el sistema para el caso $a = 2$.

Solución:

Apartado a)

Llamamos $A = \begin{pmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & 7 & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ a las matrices de coeficientes y ampliada, respectivamente.

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes y lo igualamos a 0.

$$0 = \begin{vmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a^2 + 5) - (a + 7) = a^2 - a - 2$$

$a = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$. Las soluciones son 2 y -1.

Como el sistema es cuadrado, ya tenemos la primera conclusión:

Si $a \notin \{-1, 2\}$el sistema es compatible y determinado.

Lo más sencillo es hacer cada caso por separado, así trabajamos con números en vez de letras.

Si $a = -1$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Utilizamos el método de Gauss: Haciendo operaciones por filas ($\mathrm{F'}_2 = \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_1$) tenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, haciendo ceros en la última fila con $\mathrm{F''}_3 = \mathrm{F'}_3 - 6\mathrm{F'}_2$ queda

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

La submatriz de los coeficientes tiene rango 2 y la ampliada, rango 3, con lo que el sistema es incompatible.

Otro modo de verlo es que, tras hacer operaciones por filas queda una ecuación como 0 = –20. Esta es obviamente una ecuación imposible y por tanto el sistema no tiene solución.

Si $a = -1$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Haciendo operaciones por filas ($\mathrm{F'}_2 = 2\mathrm{F}_2 - F_1$) tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, haciendo ceros en la última fila con $\mathrm{F''}_3 = 3\mathrm{F'}_3 + \mathrm{F'}_2$ queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que la matriz de coeficientes tiene rango 2 igual que la ampliada pero menor que el número de incógnitas. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Si $a \notin \{-1, 2\}$el sistema es compatible y determinado.
- Si $a = -1$el sistema es incompatible.
- Si $a = 2$el sistema es compatible indeterminado.

Apartado b)

Podemos aprovechar mucho del apartado a). Ya hemos visto que el sistema es compatible e indeterminado y que es equivalente a $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que dividiendo la segunda por –3 es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En forma de sistema es:

$$\begin{cases} 2x + 7y + 5z = 0 \\ \quad y + z = -2 \end{cases}$$

pues la última ecuación es superflua.

Pasamos la z al otro lado y resolvemos: $y = -2 - z$

$2x + 7(-2 - z) + 5z = 0 \to 2x = 2z + 14 \to x = z + 7$

La solución es $(z + 7, -2 - z, z)$ o bien, haciendo $z = \lambda$, $(\lambda + 7, -2 - \lambda, \lambda)$

La solución del sistema en el caso $a = 2$ es $(\boldsymbol{\lambda + 7, -2 - \lambda, \lambda})$ $con\ \lambda \in \mathbb{R}$

Problema B.4:

4. Considereu la funció $f(x)$, que depèn dels paràmetres reals n i m i és definida per

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si\ x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{4}+n & si\ 0<x\le 2 \\ \dfrac{3x}{2}+m & x>2 \end{cases}$$

a) Calculeu els valors de n i m perquè la funció sigui contínua a tot el conjunt dels nombres reals.
[1 punt]

b) Per al cas n = -4 i m = -6, calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x=0$ i $x=4$.
[1 punt]

Considera la función $f(x)$que depende de dos parámetros reales n y m. Se define como:

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{4}+n, & si\ 0<x\le 2 \\ \dfrac{3x}{2}+m, & x>2 \end{cases}$$

a) Calcula los valores n y m para que la función sea continua en todo el conjunto de los números reales.

b) Para el caso $n=-4$ y $m=-6$, calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 4.

Solución:

Apartado a)

Se trata de una función definida a trozos, pero los trozos son funciones continuas, ya que o son funciones polinómicas o función exponencial. Lo único que hay que estudiar son los puntos donde cambia la definición. Si es continua allí, es continua en todos los reales.

Calculamos los límites laterales:

En primer lugar, en el 0.

$f(0^-) = e^0 = 1$, $f(0) = e^0 = 1$ y $f(0^+) = \frac{0^2}{4}+n=n$.

Coinciden si y solamente sí n = 1. Esa es la condición sobre n.

Veamos ahora el 2. Sustituimos ya n por 1.

$f(2^-) = \frac{2^2}{4}+1=2$, $f(2) = \frac{2^2}{4}+1=2$, $f(2^+) = \frac{3(2)}{2}+m=m+3$

Coinciden si y solamente sí m + 3 = 2 o, lo que es lo mismo, $m=-1$

La función es continua en todos los reales si y solamente si $n=1$ y $m=-1$

Apartado b)

Tenemos que dibujar la región. La parte negativa no nos interesa.

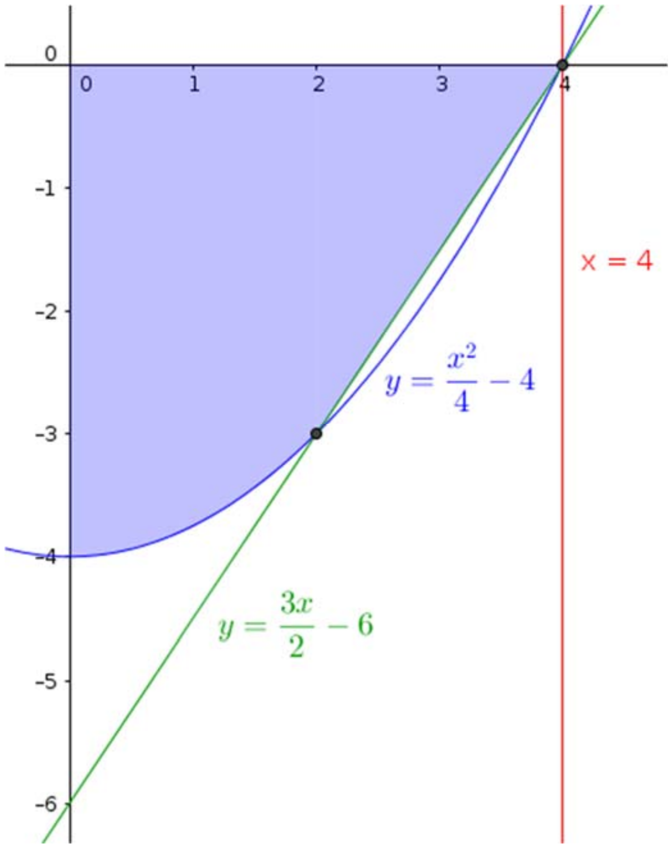
El tramo entre $x = 0$ y $x = 2$ es $y = \frac{x^2}{4} - 4$, una parábola con ramas hacia arriba. El vértice está en $x = 0$. Basta dar el vértice y otro punto, por ejemplo, el 2. $f(0^+) = -4$, $f(2) = -3$.

El tramo entre $x = 2$ y $x = 4$ es una recta, $y = \frac{3x}{2} - 6$. Bastan dos valores, por ejemplo. el 2 y el 4.

$$f(2^+) = -3,\ f(4) = 0.$$

Obsérvese que esa función es continua en 2. No hay contradicción con el apartado anterior, no es continua en 0.

Tenemos pues el siguiente dibujo:



El área es la integral $\int_0^4 |f(x)|\, dx = \int_0^2 |\frac{x^2}{4} - 4|\, dx + \int_2^4 |\frac{3x}{2} - 6|\, dx$

Las dos funciones dentro del valor absoluto son negativas de modo que es

$$\int_0^2 4 - \frac{x^2}{4} dx + \int_2^4 6 - \frac{3x}{2} dx = [4x - \frac{x^3}{12}]_0^2 + [6x - \frac{3x^2}{4}]_2^4$$
$$= (8 - \frac{8}{12}) - (0 - 0) + (24 - 12) - (12 - 3) \ = 11 - \frac{2}{3} = \frac{31}{3}$$

Es costumbre poner unidades cuadradas, si bien eso presupone que las unidades y la escala de ambos ejes coinciden.

El área es $31/3$ u².

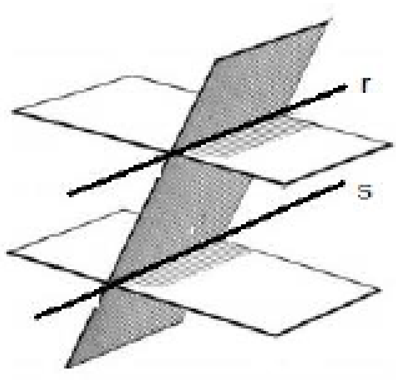
Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.5:

5. Considereu els plans $\pi_1: 2x + ay + z = 5$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 2x + (a+1)y + (a+1)z = 0$, en què a és un paràmetre real.

a) Estudieu per a quins valors del paràmetre a els tres plans es tallen en un punt. [1 punt]

b) Comproveu que per al cas $a = 1$ la interpretació geomètrica del sistema format per les equacions dels tres plans és la que es mostra en la imatge següent:

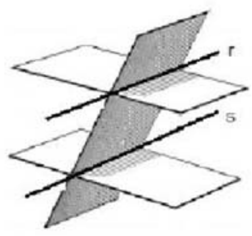


[1 punt]

Considera los planos $\pi_1: 2x + ay + z = 5, \pi_2: x + ay + z = 1$ y $\pi_3 = 2x + (a+1)y + (a+1)z = 0$ donde a es un parámetro real.

a) Estudia para qué valores del parámetro los tres planos se cortan en un punto.

b) Comprueba que para el caso $a = 1$ la interpretación geométrica del sistema formado por las ecuaciones de los tres planos es la que se muestra en la imagen siguiente.



Solución:

Apartado a)

Aunque expresado en términos geométricos, el problema consiste esencialmente en discutir un sistema.

Poniendo juntas las tres ecuaciones de los planos tenemos:

$$\begin{cases} 2x + ay + z = 5 \\ x + ay + z = 1 \\ 2x + (a+1)y + (a+1)z = 0 \end{cases}$$

Llamamos $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ a la matriz de coeficientes.

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes y lo igualamos a 0. Restamos a la primera fila la segunda en el proceso.

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = a(a+1) - (a+1) = (a-1)(a+1)$$

Es claro que las soluciones son 1 y –1.

Como el sistema es cuadrado, ya tenemos la primera conclusión. Y resulta que no nos piden seguir.

Si $a \notin \{-1, 1\}$el sistema es compatible y determinado. Pero ser compatible determinado significa tener una única solución, es decir cortarse en un único punto.

Así pues:

Si $a \notin \{-1, 1\}$ los planos se cortan en un único punto.

Apartado b)

La imagen representa los planos cortándose dos a dos en dos rectas paralelas. Volvamos al sistema sustituyendo a por uno.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Se ve más claro dividiendo la segunda ecuación por 2:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Los dos últimos planos son paralelos. Pero ninguno es paralelo al primero. Así pues, tomando cada una de las dos últimas ecuaciones con la primera tenemos dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \text{ que son paralelas.}$$

Podemos comprobar que efectivamente lo son calculando sus vectores directores. Para ello damos puntos:

- Dos puntos de *r* son (4, 1, –4) y (4, 0, –3) que dan un vector (0, –1, 1)
- Dos puntos de *s* son (5, –1, –4) y (5, 0, –5) que dan un vector (0, 1, –1)

El segundo es múltiplo del otro luego los vectores son paralelos y por tanto las rectas también.

Así pues:

Los planos se cortan en $r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ que son paralelas.

Textos Marea Verde

Problema B.6:

6. Sabem que una funció $f(x)$ és contínua i derivable a tots els nombres reals, que té com a derivada segona $f''(x) = 6x$ i que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és horitzontal.

   a) Determineu l'abscissa dels punts d'inflexió de la funció f i els intervals de concavitat i convexitat. Justifiqueu que la funció f té un mínim relatiu en $x = 1$.
   [1 punt]

   b) Sabent, a més, que la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 1$ és $y = 5$, calculeu l'expressió de la funció f.
   [1 punt]

Sabemos que una función $f(x)$ es continua y derivable en todos los números reales, que tiene derivada segunda $f''(x) = 6x$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es horizontal.

a) Determine la abscisa de los puntos de inflexión de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad. Justifique que la función f tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

b) Sabiendo además que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 5$, calcule la expresión de la función f.

Solución

Apartado a)

Si $f''(x) = 6x$, igualando a 0 obtenemos $x = 0$. Ese es un posible punto de inflexión. Falta ver que cambia de signo.

$f''(x) > 0$si $x > 0$ y $f''(x) < 0$ si $x < 0$ por lo que cambia de signo. Eso significa que efectivamente $x = 0$ es un punto de inflexión.

La función tiene su único **punto de inflexión** en el punto de abscisa $\boldsymbol{x = 0}$.

Como hemos visto el signo de la segunda derivada, sabemos que:

La función tiene curvatura positiva (forma de U, llamada también convexidad vista desde abajo o concavidad vista desde arriba) en $(0, +\infty)$ y curvatura negativa (forma de .∩, llamada también convexidad vista desde arriba o concavidad vista desde abajo) en $(-\infty, 0)$.

Si $f''(x) = 6x$, $f'(x) = \int f''(x)dx = 3x^2 + M$ con M la constante de integración. Si la tangente es horizontal en 1 es que $f'(1) = 0$ de donde $3 + M = 0$, que da $M = -3$

De ahí deducimos que $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Como $f'(1) = 0$ y $f''(1) = 6 > 0$ la función tiene un **mínimo** relativo en $\boldsymbol{x = 1}$.

Apartado b)

Tenemos ya la expresión de la derivada, es $f'(x) = 3x^2 - 3$. Por otra parte, si integramos obtenemos:

$f(x) = \int f'(x) = \int 3x^2 - 3dx = x^3 - 3x + N$ siendo N constante de integración.

Ahora bien, la fórmula de la recta tangente en el punto de abscisa a viene dada por:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Cuando a es 1, tenemos $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$. Sabemos por el apartado anterior que $f'(1) = 0$ y ahora nos dicen que la tangente es $y = 5$. Por tanto $f(1) = 5$.

Llevándolo a la expresión de la función tenemos:

5 = $(1)^3 - 3(1) + N$ que da $N = 7$. Solo falta sustituir:

La expresión completa de la función es $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x + 7}$

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat **2019**

Matemàtiques

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Considereu les rectes $y = x$ i $y = 2x$, i la paràbola $y = x^2$.

a) Calculeu els punts d'intersecció entre les gràfiques de les diferents funcions i feu un esbós de la regió delimitada per les gràfiques.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió de l'apartat anterior.

[1 punt]

2. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Trobeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu és invertible.

[1 punt]

b) Discutiu la posició relativa dels plans $\pi_1: x + (a-1)z = 0$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 4x + 3ay + z = 3$ en funció dels valors del paràmetre a.

[1 punt]

3. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

[1 punt]

b) Justifiqueu que si el producte de dues matrius quadrades no nul·les té per resultat la matriu nul·la, aleshores el determinant de totes dues matrius ha de ser zero.

[1 punt]

4. Considereu la funció $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquells punts en què la recta tangent és horitzontal.
[1 punt]

b) Calculeu les coordenades del punt de la gràfica de la funció $f(x)$ en què el pendent de la recta tangent és màxim.
[1 punt]

5. Siguin P, Q i R els punts d'intersecció del pla d'equació $x + 4y + 2z = 4$ amb els tres eixos de coordenades OX, OY i OZ, respectivament.

a) Calculeu els punts P, Q i R, i el perímetre del triangle de vèrtexs P, Q i R.
[1 punt]

b) Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs P, Q i R.
[1 punt]

NOTA: Per a calcular l'àrea del triangle definit pels vectors $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ podeu fer servir l'expressió $S=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\|$, en què $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ és el producte vectorial dels vectors $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$.

6. Considereu la funció $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$.

a) Calculeu el domini de la funció f, els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades, i els intervals de creixement i decreixement de f.
[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió del pla determinada per la gràfica de la funció f, les rectes $x = 1$ i $x = \mathrm{e}$, i l'eix de les abscisses.
[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

SÈRIE 5

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

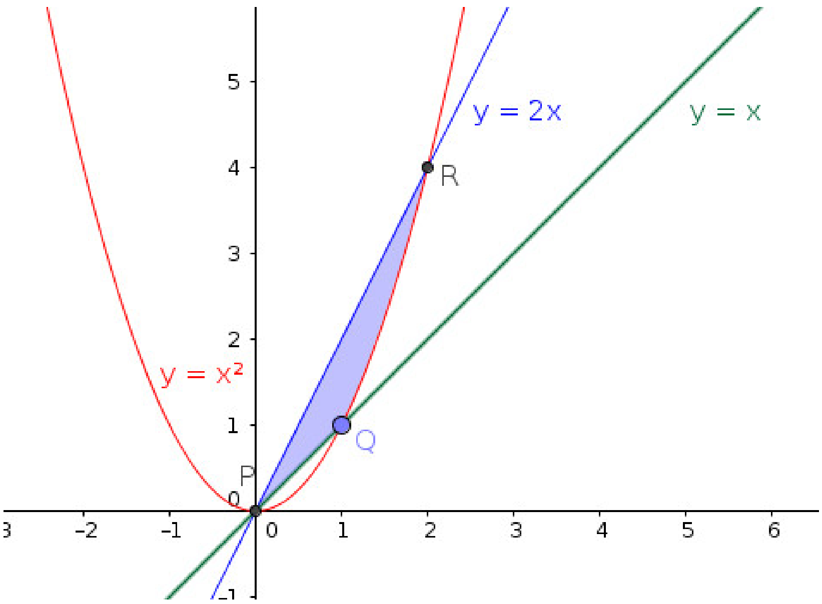
1. Considereu les rectes $y = x$ i $y = 2x$, i la paràbola $y = x^2$.
   a) Calculeu els punts d'intersecció entre les gràfiques de les diferents funcions i feu un esbós de la regió limitada per le gràfiques.
   [1 punt]
   b) Calculeu l'àrea de la regió de l'apartat anterior.
   [1 punt]

Solución:

a) Nos piden calcular los puntos de intersección. Las dos rectas únicamente se cortan en (0, 0).

La parábola y la recta: $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \to x = x^2 \to x^2 - x = 0 = x(x-1)$ se cortan en (0, 0) y en (1, 1).

La parábola y la recta: $\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases} \to 2x = x^2 \to x^2 - 2x = 0 = x(x-2)$ se cortan en (0, 0) y en (2, 4).



b) El área pedida será la limitada entre la curva y la parábola: $\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases}$, restándole la limitada entre la curva y la parábola: $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$.

$$Área = \int_0^2 (2x - x^2)dx - \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 - \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = (4 - \frac{8}{3}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$$
$$= \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}u^2$$

$$Área = \frac{7}{6}\boldsymbol{u^2}$$

Problema A.2:

2. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Trobeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu és invertible.
[1 punt]

b) Discutiu la posició relativa dels plans $\pi_1: x + (a-1)z = 0$, $\pi_2: x + ay + z = 1$ i $\pi_3: 4x + 3a\,y + z = 3$ en funció dels valors del paràmetre a.
[1 punt]

Solución:

a) Para que la matriz sea invertible debe ser su determinante distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{vmatrix} = a + 3a(a-1) - (4a(a-1) + 3a) = -2a - a(a-1) = a(-2-a+1)$$
$$= a(-a-1) = 0$$

El determinante es distinto de cero si a es distinto de 0 o es distinto de -1.

La matriz es invertible si $\boldsymbol{a \neq 0}$ o si $\boldsymbol{a \neq -1.}$

b) Discutir la posición relativa de los planos es discutir el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\begin{cases} x + (a-1)z = 0 \\ x + ay + z = 1 \\ 4x + 3ay + z = 3 \end{cases}$$

El sistema tiene como matriz de los coeficientes, la matriz anterior, luego ya sabemos que su determinante es distinto de cero si a es distinto de 0 o es distinto de -1, por lo que entonces su rango es 3, el mismo que el rango de la matriz ampliada, por lo que el sistema es compatible determinado ¡, y los tres planos se cortan en un único punto.

Si a = 0, entonces:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2, y el rango de matriz ampliada, 3, luego el sistema es incompatible, y los tres planos no tienen ningún punto de intersección común. Pero no son paralelos pues sus vectores ortogonales no son linealmente dependientes, luego los planos se cortan dos a dos.

Si $a = -1$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2, y el rango de matriz ampliada también es 2 luego el sistema es compatible indeterminado, y los tres planos se cortan en una recta.

Problema A.3:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

3. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Calculeu $A{\cdot}B$ i $B{\cdot}A$.
   [1 punt]

   b) Justifiqueu que si el producte de dues matrius quadrades no nul·les té per resultat la matriu nul·la, aleshores el determinant de totes dues matrius ha de ser zero.
   [1 punt]

Solución:

a) Calculamos los productos pedidos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 2-2 \\ -6+6 & -6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6 & -1+3 \\ 4-12 & -2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Nos piden justificar que si el producto de dos matrices cuadradas no nulas, da la matriz nula, entonces el determinante de todas las matrices debe ser cero.

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo.

Sea el producto la matriz nula: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Suponemos que el determinante de una de las matrices, por ejemplo, la matriz A, fuera distinto de cero, entonces existiría la matriz inversa de A. Multiplicamos por ella:

$$A^{-1}(A \cdot B) = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B$$

Entonces la otra matriz sería la matriz nula. Lo que contradice la hipótesis de que las matrices son no nulas.

Por tanto, debe ser cero el determinante de ambas matrices.

Problema A.4:

4. Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquells punts en què la recta tangent és horitzontal.
   [1 punt]
   b) Calculeu les coordenades del punt de la gràfica de la funció $f(x)$ en què el pendent de la recta tangent és màxim.
   [1 punt]

Solución:

a) Para determinar la ecuación de una recta debemos conocer un punto y la pendiente. Como nos dicen que la recta es horizontal, ya sabemos su pendiente, 0.

Buscamos el punto de la función con tangente horizontal, calculando la derivada primera e igualando a cero:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \to f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \to x = 0, f(0) = 1$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(0) + 0(x-0) = 1$$

$$y = 1$$

b) La pendiente coincide con la derivada, luego debemos buscar los máximos de: $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

Calculamos la derivada de la función derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \to f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) \quad - (-2x)4x}{(1+x^2)^3}$$
$$= \frac{-2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \to 6x^2 - 2 \to x^2 = \frac{1}{3} \to x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Queremos conocer ahora cuál o cuáles de esos valores corresponden a valores máximos de $f'(x)$

Volvemos a derivar:

$$f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \to f'''(x) = \frac{12x(1+x^2)^3 - (6x^2-2)3(1+x^2)^2 2x}{(1+x^2)^6}$$

Y calculamos su signo en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. El denominador es siempre positivo. $(1+x^2)^3$ es siempre positivo. $(6x^2-2)$ en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ vale cero.

Luego $f'''(\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$ nos daría un mínimo de la pendiente, y $f'''(\frac{-1}{\sqrt{3}}) < 0$ un máximo.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \to f(\frac{-1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

La pendiente es máxima en: $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$

Problema A.5:

5. Siguin P, Q i R els punts d'intersecció del pla d'equació $x + 4y + 2z = 4$ amb els tres eixos de coordenades OX, OY i OZ, respectivament.
   a) Calculeu els punts P, Q i R, i el perímetre del triangle de vèrtexs P, Q i R.
   [1 punt]
   b) Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs P, Q i R.
   [1 punt]

   Nota: Per a calcular l'àrea del triangle definit pels vectors v i w podeu fer servir l'expressió $S = \frac{1}{2}\|v \times w\|$, en què $v \times w$ és el producte vectorial del vectors v i w.

Solución:

a) Hallamos los puntos de intersección con los ejes coordenados:

$$P = (4,0,0);\ 4y = 4;\ Q = (0,1,0);\ 2z = 4;\ R = (0,0,2)$$

Hallamos los vectores de vértices dichos puntos:

$$\overline{PQ} = (0,1,0) - (4,0,0) = (-4,1,0);\ \overline{PR} = R - P = (-4,0,2);\ \overline{QR} = R - Q = (0,-1,2)$$

Hallamos los módulos de dichos vectores:

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17};\ |\overline{PR}| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20};\ |\overline{QR}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

El perímetro del triángulo es la suma de los módulos:

$$Perímetro\ = |\overline{PQ}| + |\overline{PR}| + |\overline{QR}| = \sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{5} \cong 4.123 + 4.472 + 2.235 = 8.831$$

$$Perímetro = \sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{5} \cong \mathbf{8.83}\ u$$

b) Como ya conocemos los vectores podemos calcular el área con la expresión:

$$Área = \frac{1}{2}|\overline{PQ}x\overline{PR}| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|2i + 8j + 4k| = |i + 4j + 2k| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21} \cong 4.58$$

$$Área = \sqrt{\mathbf{21}} \cong \mathbf{4.58}\ \boldsymbol{u^2}$$

Problema A.6:

6. Considereu la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
   a) Calculeu el domini de la funció f, els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades, i els intervals de creixement i decreixement de f.
   [1 punt]
   b) Calculeu l'àrea de la regió del pla determinada per la gràfica de la funció f, les rectes $x = 1$ i $x = e$, i l'eix de les abscisses.
   [1 punt]

Solución:

a) Nos dan la función: $f(x) = \frac{ln(x)}{x}$

La función logaritmo está definida en $(0, +\infty)$, el denominador sólo no está definido en 0, luego el dominio de la función es $(0, +\infty)$.

Puntos de intersección con los ejes coordenados: Para $x = 0$ no está definida la función.

$$y = 0 = \frac{ln(x)}{x} \to ln(x) = 0 \to x = 1;\ (1, 0)$$

Crecimiento y decrecimiento: Calculamos el signo de la derivada:

$$f(x) = \frac{ln(x)}{x} \to f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - ln(x)}{x^2} = \frac{1 - ln(x)}{x^2}$$

El denominador es siempre positivo. $1 - ln(x) = 0 \to ln(x) = 1 \to x = e.$

Para $0 < x < e \to\ 1 - ln(x) > 0$, y la función es creciente.

Para $x > e \to\ 1 - ln(x) < 0$, y la función es decreciente.

$Domf\ = (\mathbf{0}, +\infty)$; El único punto de corte con los ejes es $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$;

La función es creciente en $0 < x < e$ y decreciente en $x > e$.

b) El área pedida será la limitada por la función dada entre 1 y e.

$$Área = \int_1^e (\frac{ln(x)}{x})dx = \left[\frac{ln(x)^2}{2}\right]\Bigg|_1^e = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}u^2$$

$$Área = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}u^2$$

MATEMÁTICAS II

EBAU 2019

Comunidad autónoma de

Extremadura

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

Instrucciones: La prueba consta de dos opciones A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1. Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 3x & + & 2y & + & az & = 1 \\ ax & + & y & - & z & = 2 \\ 5x & + & 3y & + & z & = 2a \end{array}\right\}$$

2. Sean los puntos $A = (0,0,2)$, $B = (2,0,1)$, $C = (0,2,1)$ y $D = (-2,2,-1)$.

a) Halle la ecuación del plano Π determinado por los puntos A, B y C. **(0,75 puntos)**

b) Demuestre que los cuatro puntos no son coplanarios. **(0,5 puntos)**

c) Calcule el área del triángulo formado por los puntos B, C y D. **(0,75 puntos)**

3. Demuestre que la ecuación

$$\operatorname{sen}(x^2) = x - 1$$

tiene una solución positiva. Razone la respuesta, exponiendo el teorema (o resultado) que justifique la solución. **(2 puntos)**

4. Sean las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2$.

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(0,5 puntos)**

b) Calcule el área de la región anterior. **(1,5 puntos)**

5. En una clase hay 12 chicas y 8 chicos. 8 de las 12 chicas y 6 de los 8 chicos utilizan Facebook. Se escoge un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) Sea chica y utilice Facebook. **(1 punto)**

b) Sea chico, sabiendo que utilica Facebook. **(1 punto)**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

CONVOCATORIA ORDINARIA

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

OPCIÓN B

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A tenga inversa. **(1 punto)**

b) Halle, si existe, la inversa de la matriz para $\lambda = 1$. **(1 punto)**

2. Dados los puntos $A = (1, 0, 2)$ y $B = (3, -2, -2)$. Calcule la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio. **(2 puntos)**

3. Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de la función $f(x) = x^2 e^x$. **(2 puntos)**

4. Resuelve la integral **(2 puntos)**

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx.$$

5. Supongamos que en una población de Extremadura tienen una estatura que se distribuye según una normal de media 170 cm y desviación típica 10 cm.

a) ¿Qué porcentaje de habitantes miden entre 170 y 185 cm? **(1 punto)**

b) ¿A partir de qué altura están e 33 % de los habitantes más altos? **(1 punto)**

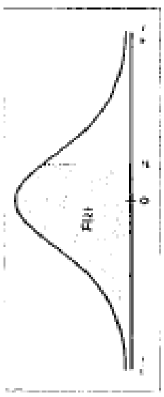


Tabla de distribución normal $N(0,1)$

$F(z) = P(Z \le z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

OPCIÓN A

CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

Discute en función del parámetro $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y+az=1 \\ ax+\ y-\ z=2 \\ 5x+3y+\ z=2a \end{array}\right\}$$

Solución:

Denotamos por $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & a \\ a & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ a & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2a \end{array}\right)$

Como es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, vamos a calcular el determinante de la matriz de coeficientes en función de $\boldsymbol{a}$ para hacer el estudio.

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ a & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}=3a^2-7a+2$$

Vamos a calcular para qué valores de $\boldsymbol{a}$ el determinante anterior es igual a 0:

$$3a^2-7a+2=0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a=2 \\ \\ a=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Por tanto, deducimos que:

- Si $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{2}$ $\boldsymbol{o}$ $\boldsymbol{a} \neq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ $\Rightarrow$ Rg(A) = Rg(A*) = 3 = nº de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado.
- Si $\boldsymbol{a}=\mathbf{2}$, la matriz A*, asociada al sistema quedaría:

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz de coeficientes es 2, pues $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1 \neq 0$, y $|A|=0$.

Veamos cual es el rango de la matriz ampliada. Como ya sabemos, solo es necesario comprobar aquel menor de orden tres que contenga al menor de orden dos que nos garantiza el rango dos. El único menor que hay que comprobar es el formado por las columnas primera, segunda y cuarta. Dicho menor es:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-1 \neq 0.$$

Luego Rg(A) $=\mathbf{2} \neq \mathbf{3}=$ Rg(A*) ⇒ Sistema incompatible.

- Si $\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$, la matriz A*, asociada al sistema quedaría: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & \frac{1}{3} & 1\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & -1 & 2\frac{1}{3} \\ 5 & 3 & 1\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$

El rango de la matriz de coeficientes es 2, pues $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{7}{3} \neq 0$ y $|A| = 0$.

Veamos cuánto vale el rango de la matriz ampliada. Como ya sabemos, solo es necesario comprobar aquel menor de orden tres que contenga al menor de orden dos que nos garantiza el rango dos. El único menor que hay que comprobar es el formado por las columnas primera, segunda y cuarta. Dicho menor es:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ 5 & 3 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{4}{9} \neq 0.$$

Luego Rg(A) $= \mathbf{2} \neq \mathbf{3} =$ Rg(A*) $\Rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $a \neq 2, a \neq 1/3$	$\boldsymbol{rg(A) = rg(A*) = 3}$	**Sistema compatible determinado**
Si $a = 2, a = 1/3$	$\boldsymbol{rg(A) = 2}$ **y** $\boldsymbol{rg(A^*) = 3}$	**Sistema incompatible**

Problema A.2:

Sean los puntos A = (0, 0, 2), B = (2, 0, 1), C = (0, 2, 1) y D = (–2, 2, –1).

a) Halle la ecuación del plano Π determinado por los puntos A, B y C.

b) Demuestre que los cuatro puntos no son coplanarios.

c) Calcule el área del triángulo formado por los puntos B, C y D.

Solución:

a) Tomamos el punto A(0, 0, 2) y los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ = (2, 0, –1) y $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ = (0, 2, –1).

$$\begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0\,;\ \ 4z-8+2y+2y=0$$

$$\Pi = 2y+2y+4z-8=0 \Rightarrow x+y+2z-4=0.$$

El plano Π determinado por los puntos A, B y C tiene la ecuación: $\boldsymbol{x+y+2z-4=0}$.

b) Sustituimos D en Π:

$$-2+2-2-4=-6\neq 0 \text{ luego } \mathrm{D}\notin \Pi.$$

También se puede calcular el determinante formado por los tres vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$ y comprobar que su valor es distinto de 0.

Los cuatro puntos **no** son coplanarios.

c) Escribimos, por ejemplo, los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{BD}}$.

$$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)\,;\ \overrightarrow{BD}=(-4,2,-2)$$

Y el área del triángulo es: $\quad área=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4i-4k+8k-4j=-4i-4j+4k$$

Por tanto, $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=(-4,-4,4)$.

Y, por último, tenemos que el área del triángulo es:

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+4^2} = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,u^2$$

Área = $\boldsymbol{2\sqrt{3}\,u^2}$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema A.3:

Demuestre que la ecuación:

$$\boldsymbol{sen(x^2) = x - 1}$$

tiene una solución positiva. Razone la respuesta, exponiendo el teorema (o resultado) que justifique la solución.

Solución:

Hacemos $sen(x^2) - x + 1 = 0$.

Queremos demostrar que esta ecuación tiene solución, o lo que es lo mismo, que:

$$f(x) = sen(x^2) - x + 1$$

toma el valor 0 para algún número real x.

Según el **Teorema de Bolzano**, si una función $f(x)$ está definida y es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos a y b, entonces existe al menos un punto c del intervalo abierto (a, b) en el que se anula la función.

Buscamos valores de x que hagan $f(x)$ positiva y negativa:

- $x = 0$, $\quad f(0) = sen(0) - 0 + 1 = 1$
- $x = \sqrt{\pi}$, $\quad f(\sqrt{\pi}) = sen\left(\left(\sqrt{\pi}\right)^2\right) - \sqrt{\pi} + 1 = 0 - \sqrt{\pi} + 1 = 1 - \sqrt{\pi} < 0$

Consideramos f definida en el intervalo $[0, \sqrt{\pi}]$, f es continua en $[0, \sqrt{\pi}]$, pues es resta de una función trigonométrica y una función polinómica, que son funciones continuas, y $f(0)\cdot f(\sqrt{\pi}) < 0$, por el Teorema de Bolzano $\exists\, c \in (0, \sqrt{\pi})$ tal que $f(c) = 0$, es decir, $sen(c^2) - c + 1 = 0$. Por tanto, $sen(c^2) = c - 1$.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema A.4:

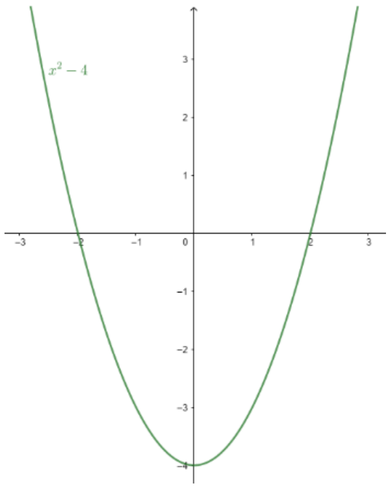
Sean las funciones $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4}$ y $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2}$.

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{g(x)}$.

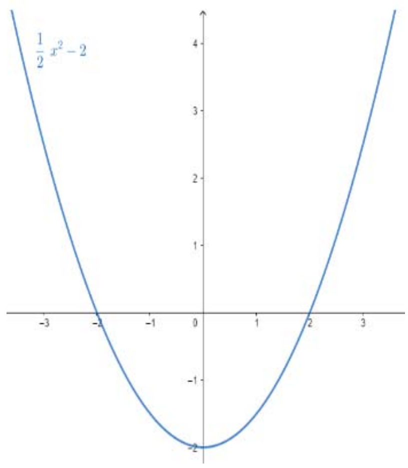
b) Calcule el área de la región anterior.

Solución:

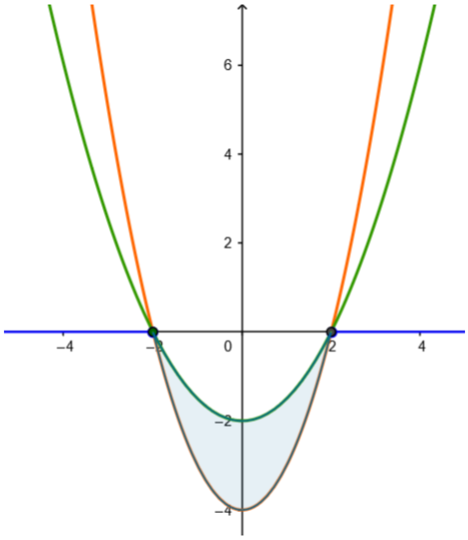
a) $\mathrm{f(x) = x^2 - 4}$ es una parábola. Como el coeficiente de x^2 es positivo, es cóncava. Las coordenadas del vértice son $x = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$, y $f(0) = -4$, es decir $V = (0, -4)$.
(También podemos calcularlas a partir de la derivada de la función $f'(x) = 2x = 0$, luego $x = 0$ es un mínimo.)
Los cortes con el eje X son: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -2$.



$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ es semejante a la anterior. Su vértice tiene coordenadas $(0, -2)$ y los cortes con el eje X se calculan resolviendo la ecuación: $\frac{1}{2}\mathrm{x}^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -2$, luego los cortes con los ejes son $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.



Las representamos en los mismos ejes:



b) Área: $\int_{-2}^{2}\left[\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)-(x^2-4)\right]dx=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)dx=-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+2x\Big|_{-2}^{2}=\frac{16}{3}u^2.$

Área = $\frac{16}{3}u^2$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema A.5:

En una clase hay 12 chicas y 8 chicos, 8 de las 12 chicas y 6 de los 8 chicos utilizan Facebook. Se escoge un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) Sea chica y utilice Facebook.

b) Sea chico, sabiendo que utiliza Facebook.

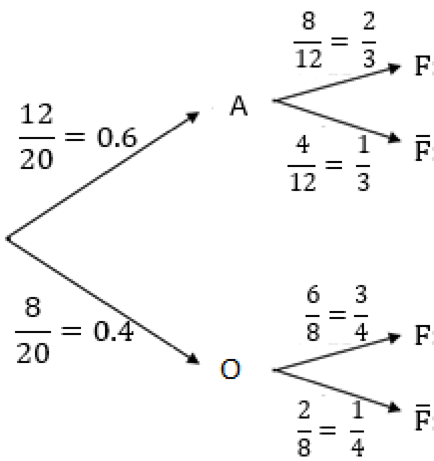
Solución:

Sean los sucesos:

A: Ser chica F: Utiliza Facebook

O: Ser chico $\overline{\mathrm{F}}$: No utiliza Facebook

Construimos un diagrama en árbol y, a continuación, responderemos las cuestiones:



a) $P(A \cap F) = P(A) \cdot P(F/A) = 0.6 \cdot \frac{2}{3} = 0.4.$

b)

La probabilidad de escoger una chica que utiliza Facebook es de 0.4.

c) Aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(O/F) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)} = \frac{P(O) \cdot P(F/O)}{P(F)} = \frac{0.4 \cdot 0.75}{0.7} \cong 0.428$$

Calculamos la $P(F)$ mediante el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(F) = P(A \cap F) + P(O \cap F) = P(A) \cdot P(F/A) + P(O) \cdot P(F/O) = 0.6 \cdot \frac{2}{3} + 0.4 \cdot \frac{3}{4} = 0.7.$$

La probabilidad de que al escoger a una persona que utiliza Facebook, esta sea un chico, es de 0.428.

CONVOCATORIA ORDINARIA

OPCIÓN B

Problema B.1:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A tenga inversa.

b) Halle, si existe, la inversa de la matriz para $\boldsymbol{\lambda = 1}$.

Solución:

a) Calculamos el determinante de la matriz A, a continuación, lo igualamos a 0 para obtener los valores de λ para los que dicha matriz no tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{vmatrix} = 3 - \lambda^2 + 3\lambda^2 - \lambda = 2\lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}, \text{ y } \lambda = -1$$

Por tanto, para todo valor de $\boldsymbol{\lambda \neq \frac{3}{2}}$ **y** $\boldsymbol{\lambda \neq -1}$ **la matriz A tiene inversa.**

b) Sustituimos en la matriz A el parámetro λ por 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz inversa de A, calculamos su determinante a partir de la expresión obtenida en el apartado anterior; obtenemos también la matriz traspuesta de A y su adjunta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1^2 - 1 - 3 = -2$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|} Adj(\mathrm{A}^{\mathrm{t}}) = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Por tanto, la inversa de la matriz A es:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema B.2:

Dados los puntos A = (1, 0, 2) y B = (3, –2, –2). Calcule la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ que pasa por su punto medio.

Solución:

El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene coordenadas: $\overrightarrow{AB} = (2, -2, -4)$.

Sea M el punto medio del vector $\overrightarrow{AB}$. Obtenemos M:

$$M = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{-2+0}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) \Rightarrow M = (2, -1, 0).$$

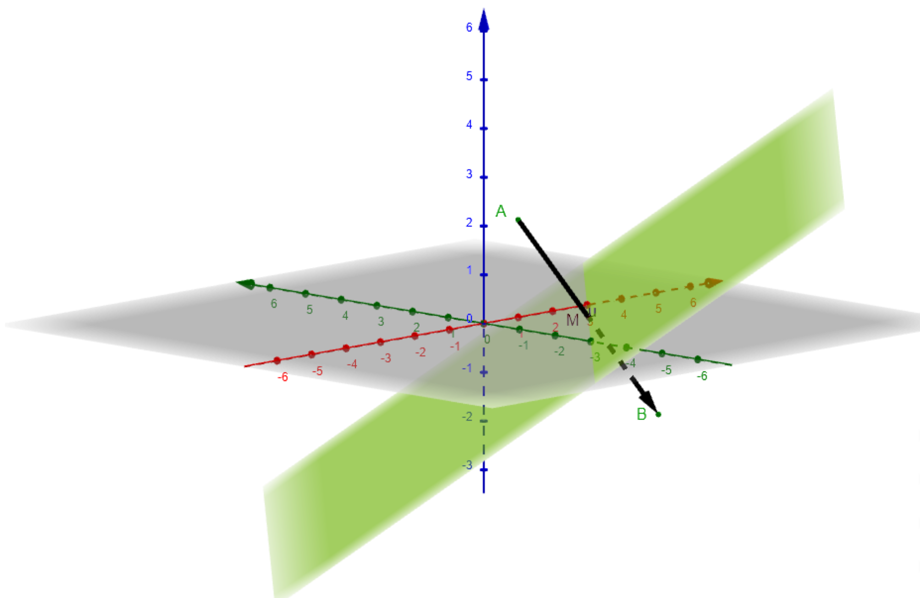
Designamos por Π al plano pedido, con vector normal $\overrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto medio M.

$$2(x-2) - 2(y+1) - 4(z-0) = 0 \Rightarrow 2x - 4 - 2y - 2 - 4z = 0 \Rightarrow 2x - 2y - 4z - 6 = 0.$$

Simplificando, la ecuación del plano Π es:

$$\Pi \equiv \boldsymbol{x - y - 2z - 3 = 0}$$

En la siguiente figura se representa en verde el plano solución:



Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema B.3:

Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de la función $\boldsymbol{f(x) = x^2e^x}$.

Solución:

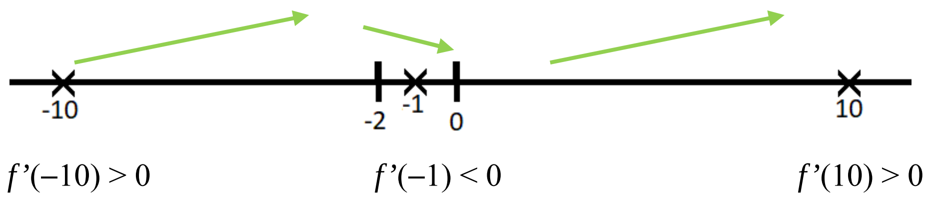
Para estudiar la monotonía de la función $f(x) = x^2e^x$, calculamos su primera derivada:

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x)$$

Igualamos esta derivada a 0 para obtener los valores críticos:

$$f'(x) = e^x \cdot (x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -2$$

Representamos esos valores en la recta real, y estudiamos el signo de la derivada en cada intervalo:



Por tanto,

f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ y decreciente en $(-2, 0)$.

Textos Marea Verde

Problema B.4:

Resuelve la integral:

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}dx$$

Solución:

Descomponemos la fracción en fracciones simples.

$$\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}-3=0 \Leftrightarrow x=1, \qquad x=-3$$

$$\frac{5x+3}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

Igualamos numeradores y tenemos que:

$$5x+3=A(x+3)+B(x-1)$$

Damos valores a x (las raíces del denominador)

- $x = 1$; $8=4A \Rightarrow A=2$
- $x = -3$; $-12=-4B \Rightarrow B=3$

Sustituyendo:

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}dx=\int \frac{2}{x-1}dx+\int \frac{3}{x+3}dx=2ln|x-1|+3ln|x+3|+k$$
$$=ln|x-1|^2+ln|x+3|^3+k=ln(|x-1|^2\cdot|x+3|^3)+k$$

$$\boldsymbol{\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}dx=2ln|x-1|+3ln|x+3|+k}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.5:

Supongamos que en una población de Extremadura tienen una estatura que se distribuye según una normal de media 170 cm y desviación típica de 10 cm.

a) ¿Qué porcentaje de habitantes miden entre 170 y 185 cm?

b) ¿A partir de qué altura están el 33 % de los habitantes más altos?

Solución:

Sea X la variable "Estatura de la población". Tenemos que $X \sim N(170, 10)$

a) $P(170 \leq x \leq 185) = \text{tipificando}$

$$= P\left(\frac{170-170}{10} \leq Z \leq \frac{185-170}{10}\right) = P(0 \leq Z \leq 1.5) = P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq 0)$$

$$= 0.9332 - 0.5 = 0.4332$$

Por tanto, el **43.32 %** de la población mide entre 170 cm y 185 cm.

b) Buscamos el valor k tal que $P(x \geq k) = 0.33$. (Buscamos la altura a partir de la cual el 33 % de la población son los habitantes más altos).

Como $P(x \geq k) = 0.33$ tenemos que $P(x \leq k) = 0.67$

Tipificando:

$P(x \leq k) = 0.67 \Rightarrow \ P\left(Z \leq \frac{k-170}{10}\right) = 0.67$. Buscamos el valor 0.67 dentro de la tabla y obtenemos que corresponde al valor 0.44.

Por tanto:

$$\frac{k-170}{10} = 0.44 \Rightarrow k = 174.4$$

El **33 %** de la población mide 174.4 cm o más.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

Instrucciones: La prueba consta de dos **opciones A y B** de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1. Dadas las siguientes matrices A e I, pruebe que la inversa de A es $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ **(2 puntos)**

2. Sean las rectas $r : \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 1 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

(a) Estudie si las trayectorias de las rectas se cortan, se cruzan o coinciden. **(1 punto)**

(b) Halle dos vectores directores de r y s. Calcule el área del triángulo que forman. **(1 punto)**

3. Sea la función $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0\,, \\ e^{x} & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$

(a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$. **(1,5 puntos)**

(b) Estudie si existe un extremo relativo de $f(x)$ en $x = 0$. **(0,5 puntos)**

4. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = x$.

(a) Represente la región plana encerrada por $f(x)$ y $g(x)$. **(0,5 puntos)**

(b) Calcule el área de la región anterior. **(1,5 puntos)**

5. Un persona utiliza Whatsapp un 70 % y Telegram un 30 %. El 80 % de los Whatsapp son de amigos y el 20 % de trabajo, mientras que de Telegram, el 80 % son de trabajo y 20 % de amigos.

(a) Calcule la probabilidad de recibir un mensaje de trabajo. **(1 punto)**

(b) Si el usuario recibe un mensaje de trabajo, calcule la probabilidad de que sea a través del Whatsapp. **(1 punto)**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas II

Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

Instrucciones: La prueba consta de dos **opciones A y B**, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN B

1. Discuta, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema lineal de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & az & = & 2 \\ x & + & y & & & = & a+1 \\ (a+1)x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

2. Sean r la recta que pasa por los puntos $A = (0,0,-1)$ y $B = (0,-2,-1)$, y s la recta que pasa por los puntos $C = (-1,2,0)$ y $D = (1,0,-1)$.

(a) Calcule el plano Π que contiene a s y es paralelo a r. **(1 punto)**

(b) Calcule la distancia entre las rectas r y s. **(1 punto)**

3. Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}.$$

(a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x)$. **(1,5 puntos)**

(b) Represente la gráfica de $f(x)$ utilizando el apartado anterior. **(0,5 puntos)**

4. Calcule una primitiva $F(x)$ de la función **(2 puntos)**

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}.$$

5. Se estima que el 40 % de los alumnos que comienzan un grado de ingeniería acaban obteniendo el grado. Si se elige al azar a 5 alumnos que comenzaron una ingeniería, calcule:

(a) la probabilidad de que los 5 alumnos obtengan el grado de ingeniero. **(0,75 puntos)**

(b) la probabilidad de que como máximo 2 obtengan el grado de ingeniero. **(0,75 puntos)**

(c) la media y la destivación típica de la distribución. **(0,5 puntos)**

CONVOCATORIA
EXTRAORDINARIA

OPCIÓN A

Problema A.1:

Dadas las matrices A e I, pruebe que la inversa de A es $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Vamos a calcular la matriz inversa de la matriz A. Comenzamos obteniendo el valor de su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Obtenemos también la matriz traspuesta de A y su adjunta:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(\mathrm{A}^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora $A^2 - 3A + 3I$:

$$A^2 - 3A + 3\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que efectivamente es el mismo resultado que A^{-1}.

$$\boldsymbol{A^{-1} = A^2 - 3A + 3\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Problema A.2:

Sean las rectas $r : \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 1 \end{cases}$ **y** $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

a) Estudie si las trayectorias de las rectas se cortan, se cruzan o coinciden.

b) Halle dos vectores de r y s. Calcule el área del triángulo que formen.

Solución:

a) r: Hacemos $y = \lambda$, $r : \begin{cases} \mathrm{x} = 1 + \lambda \\ \mathrm{y} = \lambda \\ \mathrm{z} = 1 \end{cases}$, de donde:

$\overrightarrow{V_r}$ = (1, 1, 0) y $\overrightarrow{V_s}$ = (1, 0, 1) son los vectores directores de las rectas r y s,

P_r (1, 0, 1) y P_s = (1, 0, 0) son puntos de las rectas r y s.

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (0, 0, -1), \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

Por tanto, los tres vectores son independientes lo que implica que las rectas se cruzan.

b) Para calcular el área del triángulo utilizamos la fórmula: $\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{V_r} \times \overrightarrow{V_s}\right|$

$$\overrightarrow{V_r} \times \overrightarrow{V_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i - k - j$$

$$\overrightarrow{V_r} \times \overrightarrow{V_s} = (1, -1, -1)$$

Por tanto, el área del triángulo es: $\frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2$.

Área = $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2}$

Problema A.3:

Sea la función $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{e^{-x}} & \boldsymbol{si\ x < 0} \\ \boldsymbol{e^{x}} & \boldsymbol{si\ x \geq 0} \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $\boldsymbol{f(x)}$.

b) Estudie si existe un extremo relativo de $\boldsymbol{f(x)}$ en $\boldsymbol{x = 0}$.

Solución:

a) Para valores de $x < 0$ y $x > 0$, f es continua por ser funciones exponenciales, que son continuas.
Estudiamos la continuidad en $x = 0$:
1. $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-x} = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x} = e^0 = 1 \end{cases}$.
Como los límites laterales existen y son iguales a 1, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$
3. Como $f(0) = 1 = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, f es continua en $x = 0$.

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$:

$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

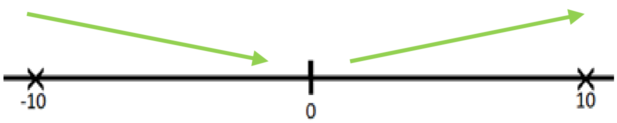
$f'_-(0) = -e^{-0} = -1$

$f'_+(0) = e^0 = 1$

Como las derivadas por la izquierda y por la derecha de la función en "0" son distintas, f no es derivable en $x = 0$.

La función es continua y no es derivable en x = 0.

b) Veamos si existe un extremo relativo, para lo que estudiamos el signo de la derivada:



$f'(-10) = -e^{-10} < 0$ $\qquad f'(10) = e^{10} > 0$

Aunque f no es derivable en $x = 0$, f tiene un mínimo relativo en (0, 1), ya que antes de 0 es decreciente, y después es creciente.

(0, 1) es un mínimo relativo.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.4:

Dadas las funciones $\boldsymbol{f(x)=x^2-2}$ y $\boldsymbol{g(x)=x}$.

a) Represente la región plana encerrada por $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{g(x)}$.

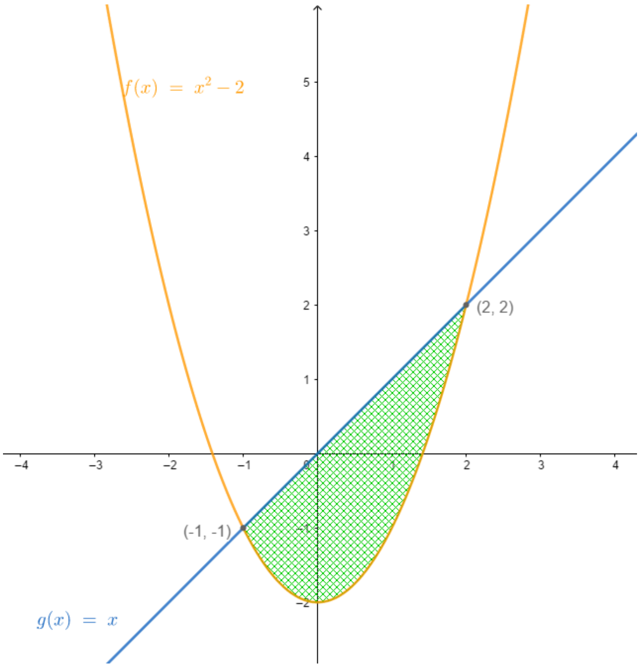
b) Calcule el área de la región anterior.

Solución:

a) $f(x)=x^2-2$ es una parábola cóncava (U) con mínimo en el punto (0, –2).
$g(x)=x$ es una recta. Es la bisectriz del 1er y 3er cuadrante.

Hallamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2-2=x \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow (2,2) \\ x=-1 \rightarrow (-1,-1) \end{cases}$$



b) Área: $\int_{-1}^{2}[x-(x^2-2)]dx=\int_{-1}^{2}(x-x^2+2)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\Big|_{-1}^{2}=4.5u^2.$

Área = $4.5u^2$

Problema A.5:

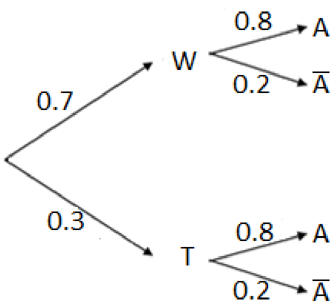
Una persona utiliza WhatsApp un 70 % y Telegram un 30 %. El 80 % de los WhatsApp son de amigos y el 20 % de trabajo, mientras que de Telegram, el 80 % son de trabajo y 20 % son de amigos.

a) Calcule la probabilidad de recibir un mensaje de trabajo.

b) Si el usuario recibe un mensaje de trabajo, calcule la probabilidad de que sea a través de WhatsApp.

Solución:

Comenzamos construyendo un diagrama en árbol con los datos del enunciado y, a continuación, responderemos las cuestiones:



W: Utilización de WhatsApp

T: Utilización de Telegram

A: Mensaje de amigos

$\bar{A}$: Mensaje de trabajo

a) Aplicamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$P(\bar{A}) = P(W \cap \bar{A}) + P(T \cap \bar{A}) = P(W) \cdot P(\bar{A}/W) + P(T) \cdot P(\bar{A}/T) =$

$= 0.7 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.2 = 0.14 + 0.06 = 0.2 \rightarrow$ 20 %

Por tanto, la probabilidad de recibir un mensaje de trabajo es del **0.20**.

b) Aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(W/\bar{A}) = \frac{P(W\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(W)\cdot P(\bar{A}/W)}{P(\bar{A})} = \frac{0.8\cdot 0.2}{0.2} = 0.8 \rightarrow 80\ \%$$

Por tanto, la probabilidad de que al recibir un mensaje de trabajo este haya sido enviado por WhatsApp es del **0.80**.

OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Discuta, en función del parámetro $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-az=2 \\ x+y \quad\quad = a+1 \\ (a+1)x+y- \quad z=2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Denotamos la matriz de los coeficientes por $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada por

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & 1 & 0 & a+1 \\ a+1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Como es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, vamos a calcular el determinante de la matriz de coeficientes en función de $\boldsymbol{a}$ para hacer el estudio.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-a+a^2+a+1 = a^2-1$$

Vamos a calcular para qué valores de $\boldsymbol{a}$ el determinante anterior es igual a 0: $a^2-1=0 \Rightarrow \left| \begin{array}{c} a=1 \\ a \\ a=-1 \end{array}\right.$

Por tanto, deducimos que:

- Si $\boldsymbol{a \neq 1}$ ***o*** $\boldsymbol{a \neq -1} \Rightarrow$ *Rg(A)* = *Rg(A*)* = 3 = nº de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado.
- Si $\boldsymbol{a=1}$, la matriz A^*, asociada al sistema quedaría: $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

  El rango de la matriz de coeficientes es 2, pues $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$, y $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{0}$.

  Sea $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas con los elementos iguales, (o dos columnas proporcionales). Luego *Rg(A)*= $\mathbf{2}$ = *Rg(A*)* ⇒ Sistema compatible indeterminado.
- Si $\boldsymbol{a=-1}$, la matriz A^*, asociada al sistema quedaría: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

  Ya sabemos que el rango de la matriz de coeficientes es 2, calculamos el de la ampliada

  $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4+2-2 = 4 \neq 0.$$

  Luego *Rg(A)*= $\mathbf{2} \neq \mathbf{3}$ = *Rg(A*)* ⇒ Sistema incompatible.

Si $a \neq 1, a \neq -1$	$\boldsymbol{rg(A) = rg(A^*) = 3}$	**Sistema compatible determinado**
Si $a = 1$,	$\boldsymbol{rg(A) = 2}$ **y** $\boldsymbol{rg(A^*) = 2}$	**Sistema compatible indeterminado**
Si $a \neq -1$	$\boldsymbol{rg(A) = 2}$ **y** $\boldsymbol{rg(A^*) = 3}$	**Sistema incompatible**

Problema B.2:

Sean $\boldsymbol{r}$ la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{A} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, -\mathbf{1})$ y $\boldsymbol{B} = (\mathbf{0}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1})$ y $\boldsymbol{s}$ la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{C} = (-\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$ y $\boldsymbol{D} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1})$.

a) Calcule el plano Π que contiene a s y es paralelo a r.

b) Calcule la distancia entre las rectas r y s.

Solución:

$$r: \begin{cases} A = (0, 0, -1) \\ B = (0, -2, -1) \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} C = (-1, 2, 0) \\ D = (1, 0, -1) \end{cases}$$

Tomamos como vectores directores del plano los determinados por los puntos de las rectas ($\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$) y tomamos un punto de s para que el plano contenga a dicha recta.

$$\overrightarrow{AB} = (0, -2, 0)\ ;\ \overrightarrow{CD} = (2, -2, -1)$$

Punto $\boldsymbol{D} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1})$ (también podría utilizarse el punto C)

$$\Pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

De donde: $2x - 2 + 4z + 4 = 0 \Rightarrow 2x + 4z + 2 = 0$.

Simplificando: $\Pi \equiv x + 2z + 1 = 0$.

El plano Π que contiene a s y es paralelo a r es $\Pi \equiv \mathbf{x + 2z + 1 = 0}$.

a) La fórmula de la distancia entre dos rectas que se cruzan viene dada por la siguiente expresión:

$$d(r, s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_r P_s}, \overrightarrow{V_r}, \overrightarrow{V_s}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{V_r} \times \overrightarrow{V_s}\right|}$$

Donde $\overrightarrow{\boldsymbol{V_r}}$ es el vector director de $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{P_r}$ es un punto de $\boldsymbol{r}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{V_s}}$ es el vector director de $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{P_s}$ es un punto de s

$$\overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{AB} = (0, -2, 0)\ , P_r = D = (1, 0, -1)\ ;\ \overrightarrow{V_s} = \overrightarrow{CD} = (2, -2, -1)\ , P_s = A = (0, 0, -1)$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (-1, 0, 0)$$

$$\left[\overrightarrow{P_r P_s}, \overrightarrow{V_r}, \overrightarrow{V_s}\right] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2;\ \left|\left[\overrightarrow{P_r P_s}, \overrightarrow{V_r}, \overrightarrow{V_s}\right]\right| = |-2| = 2$$

$$\overrightarrow{V_r} \times \overrightarrow{V_s} = (2, 0, 4)$$

$$\left|\overrightarrow{V_r} \times \overrightarrow{V_s}\right| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\boldsymbol{d(r, s) = \frac{\sqrt{5}}{5} u}$$

Problema B.3:

Sea la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}}$$

a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de $\boldsymbol{f(x)}$.

b) Represente la gráfica de $\boldsymbol{f(x)}$ utilizando el apartado anterior.

Solución:

a) Asíntotas:

- Asíntotas verticales: buscamos los valores de $\boldsymbol{x}$ para los que el denominador es igual a 0.

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=1 \ , \ \ x=-1$$

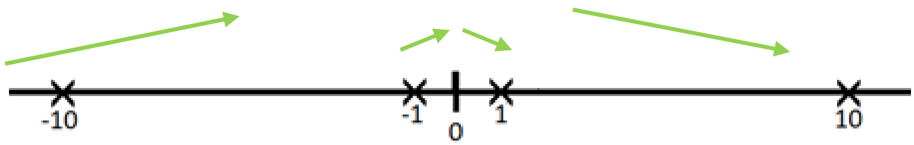
- Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1, y=1$

Monotonía:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$\frac{-2x}{(x^2-1)^2}=0 \Leftrightarrow \ -2x=0 \Leftrightarrow x=0$

Como el denominador de la función derivada es un cuadrado, el signo lo da el numerador. Por tanto:



- Creciente: $(-\infty,\boldsymbol{-1})\cup(\boldsymbol{-1},\boldsymbol{0})$
- Decreciente: $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{1})\cup(\boldsymbol{1},\infty)$

Por tanto, hay un máximo relativo en $\boldsymbol{x=0}$, $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$

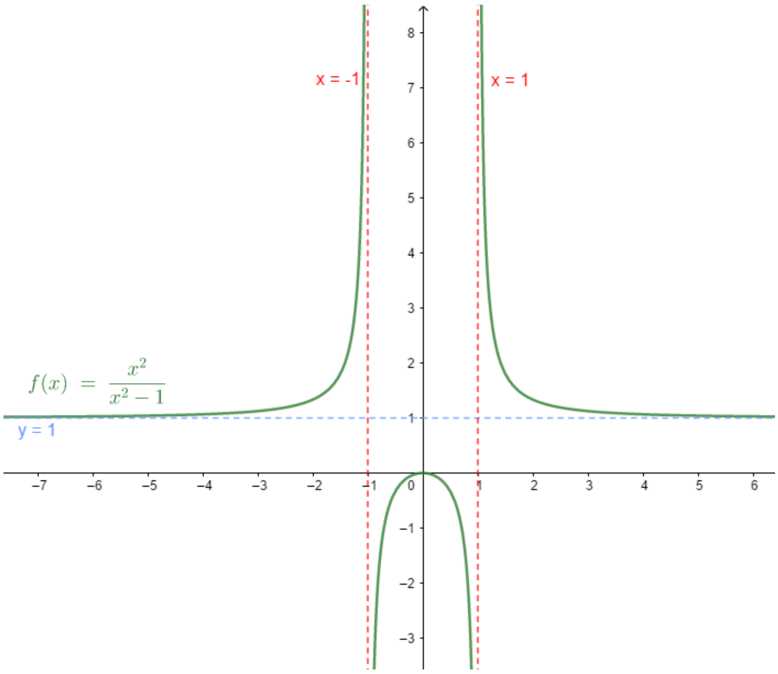
b) Estudiamos la posición de la gráfica respecto de las asíntotas:

- $x=-1\,,\ \begin{matrix} \lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x^2}{x^2-1}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2}{x^2-1}=-\infty\end{matrix} \quad ; \quad x=1\,,\ \begin{matrix} \lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2}{x^2-1}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2}{x^2-1}=+\infty\end{matrix}$
- $y=1 \quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^2+1}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=0^+$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}-1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x^2+1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota horizontal.

La gráfica de la función es:



Problema B.4:

Calcule una primitiva $\boldsymbol{F(x)}$ de la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x-3}{x^2-1}}$$

Solución:

Descomponemos en fracciones simples:

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow \; x=1, \qquad x=-1$$

$$\frac{x-3}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Igualamos numeradores y tenemos que:

$$x-3=A(x+1)+B(x-1)$$

Damos valores a x (las raíces del denominador)

- $x=1$; $-2=2A \Rightarrow A=-1$
- $x=-1$; $-4=-2B \Rightarrow B=2$

Sustituyendo:

$$\int\frac{x-3}{x^2-1}dx=\int\frac{-1}{x-1}dx+\int\frac{2}{x+1}dx=-ln|x-1|+2ln|x+1|+k$$

$$=-ln|x-1|+ln|x+1|^2+k=ln\frac{|x+1|^2}{|x-1|}+k$$

$$\boldsymbol{\int\frac{x-3}{x^2-1}dx=-ln|x-1|+2ln|x+1|+k}$$

Problema B.5:

Se estima que el 40 % de los alumnos que empiezan un grado de ingeniería acaban obteniendo el grado. Si se elige al azar a 5 alumnos que comenzaron una ingeniería, calcule:

a) La probabilidad de que los 5 alumnos obtengan el grado de ingeniero.

b) La probabilidad de que como máximo 2 obtengan el grado de ingeniero.

c) La media y la desviación típica de la distribución.

Solución:

Designemos por Xa la variable "Obtener el grado de ingeniería".

Se sabe que $P(X) = 0.4$.

Se eligen al azar a 5 alumnos.

Tenemos una distribución Binomial de parámetros *n* = 5, *p* = 0.4, *q* = 1 – *p* = 0.6.

Es decir, $X \sim B(5, 0.4); P(x = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$

a) Nos piden $P(x = 5) = \binom{5}{5} 0.4^5 \cdot 0.6^0 = 0.01024 \rightarrow$ 1.024 %

Luego la probabilidad de que al escoger 5 alumnos/as al azar todos/as obtengan el grado es del **0.01024**.

b) Se nos pide $P(x \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) =$

$$\binom{5}{0} 0.4^0 \cdot 0.6^5 + \binom{5}{1} 0.4^1 \cdot 0.6^4 + \binom{5}{2} 0.4^2 \cdot 0.6^3 = 0.07776 + 0.2592 + 0.3456 =$$

$$= 0.68256 \rightarrow 68.256\ \%.$$

Por tanto, la probabilidad de que al elegir 5 alumnas/os al azar consigan el grado como máximo 2 es del **0.68256.**

c) Media: $\mu = n \cdot p; \mu = 5 \cdot 0.4 = 2$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = \sqrt{1.2} \cong 1.095$

La media de la distribución es **2** y la desviación típica es **1.095**.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Galicia

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Paula Orta y Mª Dolores Vázquez Torrón
Revisor Luis Carlos Vidal Del Campo

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1: (2 puntos)

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que $A + I$ es invertible, despeja X en la ecuación $A - X = AX$. **b)** Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula X tal que $A - X = AX$.

Problema A.2: (3 puntos)

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Mediante integración por partes, demuestra que $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma igualdad, mediante derivación.

b) Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ ax + b & si \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$, di qué relación tiene que existir entre los parámetros a y b para que f sea continua y cuáles tienen que ser sus valores para que f sea derivable. **c)** Calcula el área de la región encerrada por el eje X, la recta $x = 4$ y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ \frac{x}{e} & si \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$

Problema A.3: (3 puntos)

Se pide: **a)** Calcular el ángulo del intervalo [0°, 90°] que forman los vectores $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ y $\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right)$. **b)** Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1, -3, 0)$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ **c)** Calcular la distancia del punto $Q(1, 1, 1)$ al plano $\pi : -x + y + z + 4 = 0$ y el punto simétrico de Q respecto a π .

Problema A.4: (2 puntos)

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

b) Si en un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 hayan nacido en el mes de enero?

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA USC	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1: (2 puntos)

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ my+(3-m)z=-6 \\ 2x-y+mz=6 \end{cases}$ **b)** Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 4$.

Problema B.2: (3 puntos)

Considérese la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Se pide: **a)** Calcular los límites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

c) Calcular $\int f(x)dx$.

Problema B.3: (3 puntos)

Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_2 : 2x+3y=0$ y $\pi_1 : mx-y+2=0$ en función del parámetro m.

b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,0)$.

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(1,2,3)$ con respecto al plano $\pi : -x+z=0$.

Problema B.4: (2 puntos)

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcula $P(A)$ si $P(B)=0.8$, $P(A\cap B)=0.2$ y $P(A\cup B)$ es el triple de $P(A)$.

b) En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25ºC y desviación típica 4ºC. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día está comprendida entre 21ºC y 27.2ºC. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

Autor: Paula Orta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que $A + I$ es invertible, despeja X en la ecuación $A – X = AX$.

b) Si $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula X tal que $A – X = AX$.

Solución:

a) $A – X = AX;\ A = AX + X;\ A = (A+ I)\ X$

$(A + I)^{-1}A = (A + I)^{-1}\ (A + I)\ X \qquad \Rightarrow\ X = (A + I)^{-1}\ A$

$$\boldsymbol{X = (A + I)^{-1}A}$$

b) $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A+I=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (A+I)^{-1}=\dfrac{[Ad(A+I)]^t}{|A+I|}$

Hacemos las cuentas:

$$|A+I|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=4+1=5 \qquad Ad(A+I)=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad [Ad(A+I)]^t=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es:

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Problema A.2:

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Mediante integración por partes, demuestra que $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma igualdad, mediante derivación.

b) Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ ax + b & si \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$, di qué relación tiene que existir entre los parámetros *a* y *b* para que *f* sea continua y cuáles tienen que ser sus valores para que *f* sea derivable.

c) Calcula el área de la región encerrada por el eje X, la recta *x* = 4 y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ \frac{x}{e} & si \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$

Solución:

a) Integrando por partes:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \qquad dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C \Rightarrow \int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$$

Derivando:

$$\left[x(\ln x - 1) + C \right]' = \ln x - 1 + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x$$

Demostrado

b)

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad x \in (0, e] \\ ax + b & si \quad x \in (e, \infty) \end{cases} \qquad f \quad continua \quad en \quad x = e \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to e} f(x) = f(e)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(e) = \ln e = 1 \\ \lim_{x \to e^-} \ln x = \ln e = 1 \\ \lim_{x \to e^+} ax + b = a \cdot e + b \end{array} \right\} \Rightarrow f \quad es \quad continua \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot e + b = 1$$

$$f'(e^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h+e) - f(e)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\ln(h+e) - 1}{h} \underset{\frac{0}{0} IND(L'hôpital)}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{h+e}}{1} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h+e} = \frac{1}{e}$$

$$f \quad es \quad derivable \quad \Leftrightarrow \quad f'(e^-) = f'(e^+)$$

$$f'(e^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h+e) - f(e)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{a(h+e) + b - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{ah + ae + b - 1}{h} \underset{a \cdot e + b = 1}{=} \lim_{h \to 0^+} \frac{ah}{h} = a$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{e} \quad y \quad b = 0$$

Para que *f* sea continua debe verificarse que $a \cdot e + b = 1$, y para que sea derivable, $a = 1/e$ y $b = 0$.

c)

$$A = \left| \int_1^e \ln x dx \right| + \left| \int_e^4 \frac{x}{e} dx \right| = \left| [x(\ln x - 1)]_1^e \right| + \left| \frac{1}{e} \cdot \frac{x^2}{2} \right|_e^4 = \left| e(\ln e - 1) - 1(\ln 1 - 1) \right| + \left| \frac{8}{e} - \frac{e}{2} \right| = 1 + \frac{16 - e^2}{2e} = \frac{2e + 16 - e^2}{2e} \approx 2.5839 u^2$$

Área es aproximadamente igual a 2.58 u^2.

Problema A.3:

Se pide: **a)** Calcular el ángulo del intervalo [0°, 90°] que forman los vectores $\vec{u}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ y $\vec{v}=\left(-\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

b) Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1, -3, 0)$ y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ y-z=0 \end{cases}$

c) Calcular la distancia del punto $Q(1, 1, 1)$ al plano $\pi: -x+y+z+4=0$ y el punto simétrico de Q respecto a π .

Solución:

a) Sea α el ángulo pedido.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}+0=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3-2\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{1}=1$$

Por tanto, $\cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\arccos\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^o$

El ángulo mide **60°**

b) $r:\begin{cases} x-y+2z=1\rightarrow\vec{u}=(1,-1,2) \\ y-z=0\rightarrow\vec{v}=(0,1,-1) \end{cases}$

Por ser el plano perpendicular a la recta, el vector director de r es un vector normal del plano.

$$\vec{n}=\vec{d_r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 2 \\ 1 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 2 \\ 0 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & -1 \\ 0 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k} \qquad \vec{n}=(-1,1,1)$$

$$\pi:(-1,1,1)\cdot(x-1,y+3,z)=0$$

$-x+1+y+3+z=0\Rightarrow\pi:-x+y+z+4=0$ Plano pedido.

El plano es: $-x+y+z+4=0$

Autor: Paula Orta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

c) **Distancia** del punto Q al plano: $$d(Q,\pi)=\frac{|-1+1+1+4|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}\approx 2.8866u$$

Simétrico de Q respecto del plano: Para calcular el simétrico Q', primero calculo la proyección de Q sobre el plano. Para ello calculo la ecuación de una recta s que pase por Q y sea perpendicular al plano dado.

$$por \quad ser \quad s\perp\pi \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{d_s}=\vec{n}=(-1,1,1)$$

$$s:\begin{cases}x=1-t\\ y=1+t\\ z=1+t\end{cases} \qquad \Pr oy=s\cap\pi$$ - (1 – t) + 1 + t + 1 + t + 4 = 0; –1 + t + 1 + t + 1 + t + 4 = 0; 3t + 5 = 0

$$\Rightarrow t=-\frac{5}{3} \qquad \Rightarrow \Pr oy=\left(\frac{8}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

El simétrico de Q respecto del plano es el simétrico de Q respecto de la proyección.

$$\frac{x+1}{2}=\frac{8}{3};x+1=\frac{16}{3};x=\frac{13}{3}$$
$$\frac{y+1}{2}=-\frac{2}{3};y+1=-\frac{4}{3};y=-\frac{7}{3}$$
$$\frac{z+1}{2}=-\frac{2}{3};z+1=-\frac{4}{3};z=-\frac{7}{3}$$

Simétrico de Q respecto de π. $\Rightarrow Q'=\left(\frac{13}{3},-\frac{7}{3},-\frac{7}{3}\right)$

Autor: Paula Orta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.4:

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** El 40 % de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35 % tienen rosas y el 21 % tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcula las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tanga rosas o solamente tenga camelias.

b) En un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 hayan nacido en el mes de enero?

Solución:

a) Sean los sucesos C = "tener camelias" y R = "tener rosas"

$P(C)=0.4 \qquad P(R)=0.35 \qquad P(C\cap R)=0.21$

Probabilidad de que tenga camelias o rosas:

$$P(C\cup R)=P(C)+P(R)-P(C\cap R)\Rightarrow P(C\cup R)=0.4+0.35-0.21\Rightarrow P(C\cup R)=0.54$$

Probabilidad de que no tenga ni camelias ni rosas:

$$P(\overline{C}\cap\overline{R})\underbrace{=}_{Morgan}P(\overline{C\cup R})=1-P(C\cup R)=1-0.54=0.46$$

Probabilidad de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas: $P(C/R)=\dfrac{P(C\cap R)}{P(R)}=\dfrac{0.21}{0.35}=0.6$

Probabilidad de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias: $P(R/C)=\dfrac{P(C\cap R)}{P(C)}=\dfrac{0.21}{0.4}=0.525$

Probabilidad de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias:

$$P[(R\cap\overline{C})\cup P(C\cap\overline{R})]=P(R\cap\overline{C})+P(C\cap\overline{R})=P(R)-P(R\cap C)+P(C)-P(R\cap C)=$$

$$=P(R)+P(C)-2P(R\cap C)=0.35+0.4-2\cdot 0.21=0.33$$

b) "Éxito" = nacer en enero. $P(Enero)=\dfrac{1}{12}$ La variable sigue una distribución Binomial $B\left(50,\dfrac{1}{12}\right)$

$$P(por\quad lo\quad menos\quad 2)=P(x\geq 2)=1-[P(x=0)+P(x=1)]=1-\left[\binom{50}{0}\left(\frac{1}{12}\right)^0\left(\frac{11}{12}\right)^{50}+\binom{50}{1}\right($$

$$=1-(0.0129+0.0586)=0.9285$$

Es una probabilidad muy alta, del **0.9285.**

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ \quad my+(3-m)z=-6 \\ 2x-y+mz=6 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos m = 0 y m = 4.

Solución:

a) Sean $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix}$ y $\overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 2 & -1 & m & 6 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 2m^2-2(3-m)-6m+2(3-m)=2m^2-6+2m-6m+6-2m=2m^2-6m$$

$$2m^2-6m=0 \Leftrightarrow 2m(m-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=3 \end{cases} \qquad Si \quad m\neq 0 \quad y \quad m\neq 3 \quad \Rightarrow \quad r(A)=3=r(\overline{A})$$

- Si m = 0

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3\neq 0 \Rightarrow r(A)=2 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -18+18=0 \Rightarrow r(\overline{A})=2$$

- Si m = 3

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9\neq 0 \Rightarrow r(A)=2 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 18-18-54=-54\neq 0 \Rightarrow r(\overline{A})=3$$

DISCUSIÓN:

- $Si \quad m\neq 0 \quad y \quad m\neq 3 \quad \Rightarrow \quad r(A)=r(\overline{A})=3=n^{o}\, incógnitas \quad \Rightarrow \quad Sistema \quad Compatible \quad Determinado\left(\exists!\, Solución\right)$
- $Si \quad m=0 \quad \Rightarrow \quad r(A)=r(\overline{A})=2<n^{o}\, incógnitas \quad \Rightarrow \quad Sistema \quad Compatible \quad Indeterminado \quad (\infty soluciones)$
- $Si \quad m=3 \quad \Rightarrow \quad r(A)\neq r(\overline{A}) \quad \Rightarrow \quad Sistema \quad Incompatible \quad (No \quad tiene \quad solución)$

b)

- m **= 0** Por el apartado anterior, sabemos que es un sistema compatible indeterminado. Busco las infinitas soluciones con el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z = 0 \\ 3z = -6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} z = -2 \\ 2x - 6 = y \end{aligned}$$

Soluciones: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 6 \\ z = -2 \end{cases} \quad con \quad \lambda \in \mathbb{R}$

- m **= 4** Por el apartado anterior, sabemos que es un sistema compatible determinado. Busco la solución por Cramer.

$|A| = 2 \cdot 16 - 24 = 8$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{8} = \frac{6 + 18 - 72 - 24}{8} = \frac{-72}{8} = -9$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-48 + 36 + 12}{8} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{8} = \frac{48 + 12 - 12}{8} = \frac{48}{8} = 6$$

Solución: (x, y, z) = (–9, 0, 6)

Autor: Paula Orta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2:

Considérese la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Se pide: **a)** Calcular los límites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

c) Calcular $\int f(x)dx$

Solución:

a) $$\lim_{x\to+\infty}(x^2e^{-x}) \underbrace{=}_{\infty\cdot 0 IND} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty}IND(L'Hopital)} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty}IND(L'Hopital)} \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2e^{-x})=+\infty$$

b)
$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}\left(2x-x^2\right)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}\left(2x-x^2\right)=0 \Leftrightarrow 2x-x^2=0 \Leftrightarrow x(2-x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la primera derivada:

$$\begin{matrix} f'<0 \forall x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty) \\ f'>0 \forall x\in(0,2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} f \quad crece \quad en \quad (0,2) \\ f \quad decrece \quad en \quad (-\infty,0)\cup(2,+\infty) \end{cases} \qquad \begin{matrix} f \quad tiene \quad un \quad mínimo \quad en \quad (0,0) \\ f \quad tiene \quad un \quad máximo \quad en \quad \left(2,\frac{4}{e^2}\right) \end{matrix}$$

$$f''(x)=-e^{-x}\left(2x-x^2\right)+e^{-x}\left(2-2x\right)=e^{-x}\left(2-2x-2x+x^2\right)=e^{-x}\left(x^2-4x+2\right)$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}\left(x^2-4x+2\right)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+2=0 \qquad x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2}$$

$$f'''(x)=-e^{-x}(x^2-4x+2)+e^{-x}(2x-4)=e^{-x}(-x^2+4x-2+2x-4)=e^{-x}(-x^2+6x-6)$$

$$\begin{cases} f'''(2-\sqrt{2})\neq 0 \\ f'''(2+\sqrt{2})\neq 0 \end{cases}$$ Por lo que f tiene puntos de inflexión en:

$$\left(2-\sqrt{2}, f(2-\sqrt{2})\right)=\left(2-\sqrt{2},\frac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}\right)$$ y $$\left(2+\sqrt{2}, f(2+\sqrt{2})\right)=\left(2+\sqrt{2},\frac{6+4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}\right)$$

c) $\int x^2e^{-x}dx$ La resuelvo por partes:

$$u=x^2 \Rightarrow du=2xdx$$
$$dv=e^{-x}dx \Rightarrow v=\int e^{-x}dx=-\int -e^{-x}dx=-e^{-x}$$

$$\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}+\int 2xe^{-x}dx=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx \qquad \begin{matrix} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=e^{-x}dx \Rightarrow v=-e^{-x} \end{matrix}$$

$$\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}+2\left[-xe^{-x}+\int e^{-x}dx\right]=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C=(-x^2-2x-2)e^{-x}+C$$

Autor: Paula Orta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.3:

Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$ en función del parámetro m.

$\pi : -x + z = 0$

b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A(0, 0, 0), B(1, 0, 1) y C(0, 1, 0).

c) Calcula el punto simétrico del punto P(1, 2, 3) con respecto al plano .

Solución:

a) $\begin{cases} \pi_1 : mx - y + 2 = 0 \\ \pi_2 : 2x + 3y = 0 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overline{A} = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3m + 2 \qquad 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}$

$Si \quad m \neq -\frac{2}{3} \Rightarrow r(A) = 2 = r(\overline{A}) \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. Por tanto, los planos se cortan en una recta.

$Si \quad m = -\frac{2}{3} \Rightarrow r(A) = 1$

$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow r(\overline{A}) = 2 \Rightarrow$Sistema Incompatible. Por tanto, los planos son paralelos.

b) A(0,0,0), B(1,0,1), C(0,1,0) $\qquad \overrightarrow{AB} = (1,0,1) \qquad \overrightarrow{AC} = (0,1,0)$

$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{k} \Rightarrow \vec{n} = (-1,0,1)$ vector normal del plano.

El plano buscado. $\qquad (-1,0,1)\cdot(x,y,z) = 0 \Rightarrow \pi : -x + z = 0$

c) Primero calculo la proyección de P sobre el plano, para ello calculo la ecuación de la recta r que pasa por P y es perpendicular al plano π .

$\overrightarrow{d_r} = \vec{n} = (-1,0,1)$

$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$ $\qquad$ - (1 – t) + 3 + t = 0; -1 + t + 3 + t = 0; 2t + 2 = 0; t = -1

$\Pr oy = H = r \cap \pi = (2,2,2)$

Entonces, el simétrico buscado será el simétrico de P respecto a H.

$$\begin{cases} \frac{1+x}{2} = 2 \Rightarrow x = 3 \\ \frac{2+y}{2} = 2 \Rightarrow y = 2 \\ \frac{3+z}{2} = 2 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

***P'*(3, 2, 1)** es el simétrico buscado.

Problema B.4:

Da respuesta a los apartados siguientes: **a)** Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcula $P(A)$ si $P(B)=0.8$, $P(A\cap B)=0.2$ y $P(A\cup B)$ es el triple de $P(A)$.

b) En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25ºC y desviación típica 4ºC. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día está comprendida entre 21ºC y 27.2ºC. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

Solución:

a) $P(B)=0.8$ $\quad P(A\cap B)=0.2$ $\quad P(A\cup B)=3P(A)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$3P(A) = P(A) + 0.8 - 0.2$; $2P(A) = 0.6$;

$P(A)$ = **0.3**

b) $N(25^0C, 4^0C)$

$$P(21\le x\le 27.2)=P\left(\frac{21-25}{4}\le z\le \frac{27.2-25}{4}\right)=P(-1\le z\le 0.55)=$$

$$=P(z\le 0.55)-P(z\le -1)=P(z\le 0.55)-\left[1-P(z\le 1)\right]=0.7088-1+0.8413=0.5501$$

La probabilidad pedida es **0.5501**

n = 31; p = 0.5501; np = 17.0531;

Por tanto, se espera que la temperatura permanezca dentro de ese rango **17 días**.

XUNTA DE GALICIA CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JULIO EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1: (2 puntos)

a) Despeja X de la ecuación $XA + B = C$, sabiendo que A es una matriz invertible

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema A.2: (3 puntos)

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x) = x^2 \cdot lnx$$

b) Considérese un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen $O(0, 0)$ y el punto $P(1, 3)$, uno de sus lados está sobre el eje X y otro sobre la tangente en $P(1, 3)$ a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, por separado, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$.

Problema A.3: (3 puntos)

a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ y $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m.

b) Calcular el valor que debe tomar k y m para que los puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ y $C(8, 1, m)$ estén alineados.

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(-1, 2, 1)$ y $Q(8, 1, 1)$ y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto $R(1, 1, 1)$.

Problema A.4: (2 puntos)

a) La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de 2/3. Si se riega, el rosal sobrevive con probabilidad 0.7; si no, lo hace con probabilidad 0.2. Al finalizar la semana el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?

b) Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm y desviación típica 0.01 cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7.98 y 8.021 cm.

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

XUNTA DE GALICIA CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JULIO EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1: (2 puntos)

a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - y + 3z = m \\ my - 2z = -2 \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 2$.

Problema B.2: (3 puntos)

a) De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.

b) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.

Problema B.3: (3puntos)

a) Para el plano $\pi: 3x + 2y - z = 0$ y la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$ calcular el punto de corte de r con π y obtener la ecuación implícita del plano π' que es perpendicular a π y contiene a r

b) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x - 5y - 4z - 9 = 0$ y. $\pi_2: x = 0$ y calcular el ángulo $\alpha \in [0^0, 90^0]$ que forman

Problema B.4: (2puntos)

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$ y $P(A \cup B) = 0.5$. Calcula $P(\bar{A}), P(\bar{B}), P(A \cap B), yP(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.

b) La probabilidad de que un determinado jugador de fútbol marque un gol desde el punto de penalti es $p = 0.7$. Si lanza 5 penaltis, calcula las siguientes tres probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos 2 goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2 100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1 450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes.

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

a) Despeja X de la ecuación $XA + B = C$, sabiendo que A es una matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $XA + B = C \Rightarrow XA = C - B. \Rightarrow XAA^{-1} = (C-B)A^{-1} \Rightarrow X \cdot I = (C - B)A^{-1} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{X = (C - B)A^{-1}}$$

b) $C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5 \neq 0 \quad \Rightarrow \exists\, A^{-1}$$

$$AdjA = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(AdjA)^t}{|A|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = (C - B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -7/5 & 3/5 \\ 7/5 & -3/5 \\ 7/5 & -3/5 \end{pmatrix}}$$

Problema A.2:

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x) = x^2 \cdot lnx$$

b) Considérese un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen $O(0, 0)$ y el punto $P(1, 3)$, uno de sus lados está sobre el eje X y otro sobre la tangente en $P(1, 3)$ a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibujar el triángulo y calcular, por separado, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$.

Solución:

a) $Dom\ f(x)=\{x \in R \ / \ x > 0\} = (0, \infty)$

$$f(x) = x^2 \cdot lnx$$

$$f'(x) = 2xlnx + x$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x\ lnx + x = 0 \Rightarrow x(2\ lnx + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin domf(x) \\ 2lnx + 1 = 0 \Rightarrow lnx = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$

decreciente $\left(0, \ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

creciente $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \ \infty\right)$

$f''(x) = 2\ lnx + 3$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) > 0 \Longrightarrow$$

La función tiene un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{e}}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2e}}\right)$

b) Calculamos los puntos necesarios para la representación de la parábola: $y = 4 - x^2$
Puntos de corte con eje OX ($y = 0$): serán $(-2, 0)$ y $(2, 0)$
Puntos de corte con eje OY ($x = 0$): $(0, 4)$
Vértice: $x_v = 0 \Rightarrow y_v = 4 \Rightarrow$ vértice $(0, 4)$.

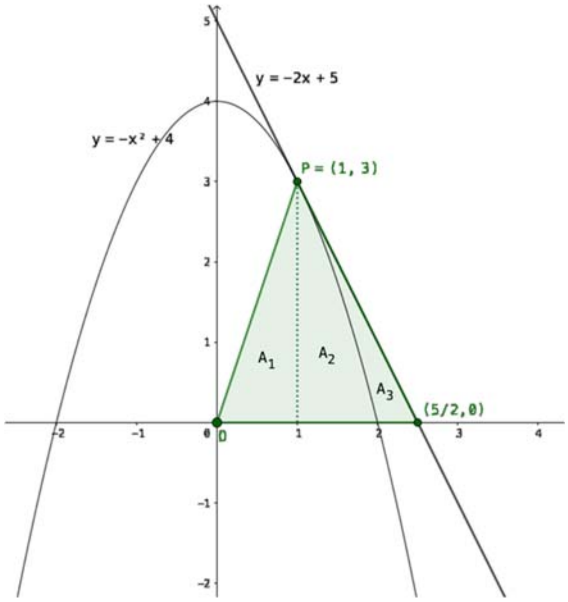
Calculamos la recta tangente a la parábola en el punto $P(1, 3)$, para ello calculamos su pendiente:

$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(1) = -2$ pendiente de la tangente en $P(1, 3)$.

La recta tangente a la parábola en ese punto será $y - 3 = -2(x - 1) \Rightarrow \ y = -2x + 5$.

El tercer vértice será el punto de intersección de la recta tangente $y = -2x + 5$ con el eje OX: $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Hacemos la representación gráfica de la situación



Dividimos la primera región en 2 zonas $A_1 y A_2$ para calcular su área

$A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2} u^2$

$$A_2 = \int_1^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{16}{3} - \frac{11}{3} = \frac{5}{3} u^2$$

Área de la 1ª región: $A1 + A2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} = \mathbf{\frac{19}{6} u^2}$

El área de la 2º región puede calcularse como el área de triángulo menos el área de la 1ª región

Área de la 2ª región: $A_3 = \frac{\frac{5}{2} \cdot 3}{2} - \frac{19}{6} = \mathbf{\frac{7}{12} u^2}$

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.3:

a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: x+my+z+2=0$ y $\pi_2: mx+y+z+m=0$ en función de m.

b) Calcular el valor que debe tomar k y m para que los puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ y $C(8, 1, m)$ estén alineados.

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(-1, 2, 1)$ y $Q(8, 1, 1)$ y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto $R(1, 1, 1)$.

Solución:

a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: x+my+z+2=0$ y $\pi_2: mx+y+z+m=0$ en función de m.

Consideramos la matriz de coeficientes M y la matriz ampliada M^* y estudiamos los rangos

$$M=\begin{pmatrix}1 & m & 1\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}\quad M^*\begin{pmatrix}1 & m & 1 & 2\\ m & 1 & 1 & m\end{pmatrix}$$

Rango de M es mayor o igual a 1

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ m & 1\end{vmatrix}=1-m^2=0\Rightarrow m=\pm 1$$

Para $m = 1$, $rang\ M = 1$, $Rang\ M^* = 2$ $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$ planos paralelos

Para $m = -1$, $rang\ M = 1$, $rang\ M^* = 2$ $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}\neq 0$ planos paralelos

Para $M\neq\pm 1$. $rang\ M = rang\ M^* = 2$ planos secantes

b) Calcular el valor que debe tomar k y m para que los puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ y $C(8, 1, m)$ estén alineados.

Método 1. Tres puntos están alineados si el rango de los vectores determinados por ellos es uno.

$\overrightarrow{AB}=(-1,2-k,0)$ $\overrightarrow{AC}=(8,1-k,m-1)$

$$V=\begin{pmatrix}-1 & 2-k & 0\\ 8 & 1-k & m-1\end{pmatrix}$$

Todos los menores de orden 2 tienen que ser 0 para que $rang\ V = 1$.

$$\begin{vmatrix}-1 & 2-k\\ 8 & 1-k\end{vmatrix}=-1(1-k)-8(2-k)=0\Rightarrow k=\frac{17}{9}$$

$$\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 8 & m-1\end{vmatrix}=-1(m-1)=0\Rightarrow m=1$$

Si $m = 1$ y $k = 17/9$, $\begin{vmatrix}2-k & 0\\ 1-k & m-1\end{vmatrix}=0$

Para $\boldsymbol{m}$ **= 1** y $\boldsymbol{k}$ **= 17/9** los tres puntos están alineados

Método 2. Calculamos la ecuación de la recta que contiene a dos de ellos y el tercero tiene que pertenecer a dicha recta dicha para que estén alineados.

$A(0,k,1)$, $B(-1,2,1)$ y $C(8,1,m)$

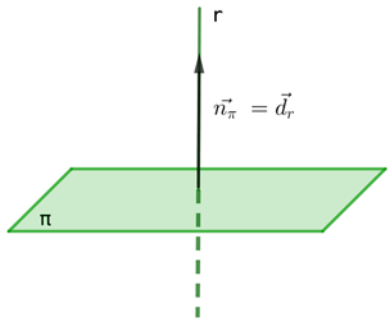
Recta que contienen a A y B. $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2-k} = \frac{z-1}{0}$

Para que estén alineados C Tiene que ser un punto de r $\frac{8+1}{-1} = \frac{1-2}{2-k} = \frac{m-1}{0} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 9(2-k) = 1 \Longrightarrow k = 17/9 \\ 0 = -1(m-1) \Longrightarrow m = 1 \end{cases}$$

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos P (-1,2,1) y Q(8,1,1) y la ecuación implícita del plano perpendicular a r que pasa por el punto R(1,1,1).

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 9\lambda} \\ \boldsymbol{y = 2 - \lambda} \\ \boldsymbol{z = 1} \end{cases}$$



Por ser perpendiculares el plano y la recta, el vector director de esta coincide con el vector normal al plano

$\overrightarrow{d_r} = (9,-1,0)$ $\vec{n}_\pi = (9,-1,0)$ $\Longrightarrow \pi: 9x - y + 0z + D = 0$

$R(1,1,1) \in \pi \Rightarrow 9 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 8$

El plano pedido es $\boldsymbol{\pi: 9x - y + 0z + 8 = 0}$

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.4:

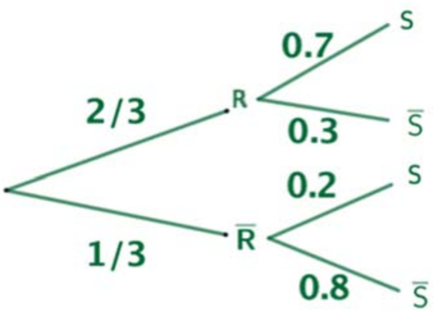
a) La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de 2/3. Si se riega, el rosal sobrevive con probabilidad 0.7; si no, lo hace con probabilidad 0.2. Al finalizar la semana el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilidad de que el chico no lo haya regado?

b) Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm y desviación típica 0.01 cm. Calcula la probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7.98 y 8.021 cm.

Solución:

a) Sean los sucesos R: regar el rosal, $P(R) = 2/3$. $P(S/R) = 0.7$. $P(S/\bar{R}) = 0.2$, S: sobrevive el rosal.

$$P(S)=P(S/R)\cdot P(R) + P(S/\bar{R})\cdot P(\bar{R}) = 0.7\cdot 2/3 + 0.2\cdot 1/3 = 8/15 = 0.53.$$



$$P(\bar{R}/S) = \frac{P(\bar{R}\ \cap S)}{P(S)} = \frac{0.2\cdot 1/3}{8/15} = \frac{1}{6} = 0.125$$

La probabilidad de que el chico no haya regado el rosal teniendo en cuenta que al final de la semana el rosal haya sobrevivido es $\mathbf{0.125}$

b) X grosor se las piezas

$X \equiv N(8, 0.01)$. $\Rightarrow Z = \frac{X-8}{0.01} \equiv N(0,1)$

$$P(7.98 \le X \le 8.021) = P\left(\frac{7.98-8}{0.01} \le Z \le \frac{8.021-8}{0.01}\right) = P(-2 \le Z \le 2.1) = P(z \le 2.1) - P(Z \le -2) =$$

$$= P(z \le 2.1) - (1 - P(Z \le 2)) = 0.9821 - 1 + 0.9772 = 0.9593$$

La probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7.98 y 8.021 cm es de **0.9593.**

OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

a) Discute según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} x - y + 3z = m \\ my - 2z = -2 \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 2$

Solución:

a) Sean A matriz de coeficientes, A^* matriz ampliada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies rang\ A \geq 2$$

$$|A| = m(m+3) + 2 - 3m + 2(m-1) = m^2 + 2m = 0 \implies m = 0\,, m = -2$$

$m \neq 0\ \ m \neq -2\ rang\ A = 3$

$m = 0$: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies rangA^* = 2.$ EL resto de los menores de orden 3 valen 0. (∃ menores de orden 2 ≠ 0)

$m = -2$: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies rangA^* = 3$

$m \neq 0\ \ m \neq 2\ rang\ A = rangA^* = 3 = nº\ incógnitas \implies sistema\ compatible\ determinado$

$m = 0\quad rang\ A = rangA^* = 2 < nº\ de\ incógnitas \implies sistema\ compatible\ indeterminado$

$m = -2\quad rang\ A = 2,\ rangA^* = 3 \implies sistema\ incompatible$

b) Resolver para $m = 0$ (Compatible indeterminado)

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -2z = -2 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} -2z = -2 \Rightarrow z = 1 \\ y = y \\ x = -3z + y \end{matrix} \implies \begin{matrix} z = 1 \\ y = y \\ x = -3 + y \end{matrix} \quad \text{Solución:} \quad \begin{matrix} z = 1 \\ y = \lambda \\ x = -3 + \lambda \end{matrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Resolver para $m = 2$ (Compatible determinado) Observando el tipo de ecuaciones es más fácil resolverlo por Gauss que por Cramer

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2y - 2z = -2 \\ x + y + 5z = 2 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad z = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,,\quad 2y - 2z = -2 \implies y = -\frac{1}{2},\ x = 2 + y - 3z \implies x = 0$$

Solución: $\boldsymbol{x = 0, y = -\frac{1}{2}\,, z = \frac{1}{2}}$

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

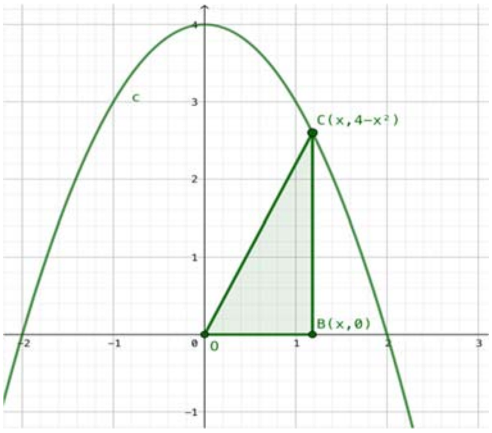
Problema B.2:

a) De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.

b) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.

Solución:

a) Representamos la situación:



Calculamos los puntos necesarios para la representación de la parábola: $y = 4 - x^2$

Puntos de corte con eje OX (y = 0): serán (–2, 0) y (2, 0)

Puntos de corte con eje OY (x = 0): (0, 4)

Vértice: $x_v = 0 \Rightarrow y_v = 4 \Rightarrow$ vértice (0, 4)

$A(x) = \frac{x(4-x^2)}{2} = \frac{4x-x^3}{2}$ función a maximizar

$A'(x) = \frac{4-3x^2}{2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

La solución negativa no es válida por tratarse de una longitud.

$$A''(x) = -3x \Rightarrow A''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) < 0 \Rightarrow$$

$x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ $y = 4 - \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = 8/3$ valores que maximizan el área

Catetos: $\overline{OB} = \sqrt{4/3}\ u.$ $\overline{BC} = \frac{8}{3}u.$

Hipotenusa (Pitágoras): $\overline{OC} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{19}}{3}\ u.$

b) Teorema de Bolzano

Sea una función f continua en el intervalo cerrado. $[a, b]$ que toma valores de signo contrario en los extremos ($f(a)\cdot f(b) < 0$) entonces existe al menos un $c \in (a,b) / f(c) = 0$

Teorema de Rolle

Sea f una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces:

Existe al menos un $c \in (a,b)\ /\ f'(c) = 0$

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.3:

a) Para el plano $\pi: 3x+2y-z=0$ y la recta $r: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{3}$ calcular el punto de corte de r con π y obtener la ecuación implícita del plano π' que es perpendicular a π y contiene a r

b) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x-5y-4z-9=0$ y $\pi_2: x=0$ y calcular el ángulo $\alpha \in [0^0, 90^0]$ que forman

Solución:

a) Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta r que tiene vector director $\vec{d}=(1,-2,3)$ y pasa por el punto $A(2, -1, 0)$

$r: \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=3\lambda \end{cases}$ sustituimos en la ecuación del plano $\pi: 3x+2y-z=0$

$$3(2+\lambda)+2(-1-2\lambda)-3\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=1$$

Sustituimos este valor en la recta r $\begin{cases} x=3 \\ y=-3 \\ z=3 \end{cases}$

El punto de corte de la recta y el plano es $\boldsymbol{P}$**(3, –3, 3)**

Para calcular la ecuación del plano necesitamos un punto y dos vectores

Punto: $A(2, -1, 0)$ (por estar la recta en el plano)

$\vec{v}=(1,-2,3)$ (vector director de la recta)

$\vec{w}=(3,2,-1)$ (vector perpendicular al plano π)

$$\pi': \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4x+10y+8z+18=0$$

$\boldsymbol{\pi': -4x+10y+8z+18=0}$ plano perpendicular a π que contiene a r

b) Posición relativa de dos planos. Tenemos que estudiar el rango de la matriz de coeficientes M y el de la matriz ampliada M^*

$\pi_1: 2x-5y-4z-9=0$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & -4 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

rang M = *rang M** = 2 $\Rightarrow$ planos secantes

Los vectores normales de los planos son: $\overrightarrow{n_{\pi_1}}=(2,-5,4)$ $\overrightarrow{n_{\pi_2}}=(1,0,0)$

$$\cos(\hat{\pi}_1,\hat{\pi}_2)=\frac{|\vec{n}_{\pi_1}\cdot\vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}|\cdot|\vec{n}_{\pi_2}|}=\frac{|(2,-5,4)\cdot(1,0,0)|}{\sqrt{2^2+(-5)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+0+0}}=\frac{2}{\sqrt{45}}=\frac{2\sqrt{5}}{15}$$

$$\widehat{\pi_1\pi_2}=\arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right) = \mathbf{72.65^0}$$

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.4:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que $P(A)$=0.2, $P(B)$ = 0.4 y $(A \cup B)$ = 0.5. Calcula $P(\bar{A}), P(\bar{B}), P(A \cap B), y P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.

b) La probabilidad de que un determinado jugador de fútbol marque un gol desde el punto de penalti es p = 0.7. Si lanza 5 penaltis, calcula las siguientes tres probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos 2 goles; y de que marque 5 goles. Si lanza 2 100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1 450 goles. Se está asumiendo que los lanzamientos son sucesos independientes

Solución:

a) $P(A)$ = 0.2 $\quad \mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}) = 0.8$

$P(B)$ = 0.4 $\quad \mathrm{P}(\bar{\mathrm{B}}) = 0.6$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ = 0.5 ⇒ $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0.2 + 0.4 - 0.5 = 0.1$

Aplicando las leyes de Morgan $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}} \cup \bar{\mathrm{B}}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 1 - 0.1 = 0.9$

Para estudiar la independencia de sucesos:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25 \neq \mathrm{P}(\mathrm{A}) \Rightarrow \text{el suceso A y el suceso B son dependientes}$$

b) X marcar un gol de penalti, p = 0.7

$X \equiv B(n, p) = B(5, 0.7)$ $\quad P(X = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$ (para n = 5 no sería necesario utilizar la distribución binomial)

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = \binom{5}{0} 0.7^0 \cdot 0.3^5 = 0.00243 \text{ probabilidad de que no marque ningún gol.}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big) = 1 - 0.00243 - 0.02835 = 0.96922$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 2) = \mathbf{0.96922} \rightarrow \text{probabilidad de acertar por lo menos 2}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 5) = \binom{5}{5} 0.7^5 0.3^0 = \mathbf{0.16807} \rightarrow \text{probabilidad de acertar cinco}$$

n = 2100, p = 0.7, $q = 1 - p$ = 0.3, np = 1470 > 5, nq = 630 > 5, aproximamos la binomial por una normal

$$X \equiv B(n,p) = B(2100, 0.7) \rightarrow X' \equiv B(np, \sqrt{npq}) = B(1470.21) \longrightarrow Z = \frac{X' - 1470}{21} \equiv N(0,1)$$

$$P(X \geq 1450) \underset{\uparrow}{=} P(X' \geq 1449.5) = P\left(Z \geq \frac{1449.5 - 1470}{21}\right) = P(Z \geq -0.9762) = P(Z \leq 0.98) = 0.8365$$

La probabilidad de que marque por lo menos 1 450 penaltis, lanzando 2 100 veces, es de:

0.8365 → 83.65%

Autores: María Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

La Rioja

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018/2019
Convocatoria: Junio
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA A:

1.–(2 puntos) Dados la recta r y el plano π de ecuaciones:

$$r:\begin{cases} 2x+2y+2z=2, \\ -x-2y+z=0. \end{cases} \qquad \pi \equiv ax+y+z-b=0.$$

(I) Determina a y b para que el plano π contenga a la recta r.

(II) Determina a y b para que r sea paralela al plano π.

2.– (2 puntos) La distribución del número de rapes capturados por los barcos pesqueros que salen a faenar en una cierta zona se ajusta a una normal de media 220. Se sabe que, tomando un barco al azar la probabilidad de que capture más de 250 es 0,1587.

(I) Calcula la desviación típica de la distribución.

(II) Calcula el número de rapes que un barco debe capturar para estar en el percentil 95.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

3.– (3 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \le 0 \\ -x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$$

con a y b números reales.

(I) Halla a y b para que f sea contínua y derivable en $x = 0$.

(II) Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x = 0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 1]$.

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

Sea el sistema de ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.

(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2018/2019

Convocatoria: Junio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programa[bles] ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo c[aso] se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA B:

1.– (2 puntos) Sean el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x = 3 - \lambda, \\ y = 2 + \lambda, \\ z = 1 - 3\lambda. \end{cases}$

(I) Determina la ecuación de la recta s que contiene al punto $P = (1, 2, -1)$, es perpendicular a la recta r y paralela al plano π.

(II) Halla la distancia de la recta s al plano π.

2.– (2 puntos) Se tienen tres urnas: A, B y C. La urna A contiene dos bolas blancas y tres negras, la B tres bolas blancas y dos negras, la C cuatro bolas blancas y una negra. Se lanza un dado y se toman dos bolas de una urna: de la urna A si sale un 1, 2 ó 3, de la urna B si sale un 4 ó 5 y de la urna C si sale un 6.

(I) Calcula la probabilidad de obtener dos bolas blancas.

(II) Suponiendo que las dos bolas extraídas son blancas, calcula la probabilidad de que se hayan extraído de la primera urna.

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

3.– (3 puntos) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ -x^2+ax+b, & x>0\end{cases}$$

con a y b números reales.

(I) Halla a y b para que f sea contínua y derivable en $x=0$.

(II) Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x=0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $[-\frac{\pi}{2},1]$.

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la invesa de la matriz A.

Sea el sistema de ecuaciones

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

(I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.

(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2018/2019

Convocatoria: Junio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE CORRECCIÓN

(1) Se sugiere un tipo de corrección positivo, es decir, partiendo de cero y sumando puntos por los aciertos que el alumno vaya obteniendo.

(2) Como excepción al apartado anterior, los errores muy graves, del tipo

$$\sqrt{a^2+b^2}=a+b\,,\qquad \frac{\ln x}{x}=\ln\,,\qquad \int\frac{x}{x^2+3}=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{3}\right),$$

se penalizarán especialmente, y pueden suponer un 0 en el apartado en el que se hayan cometido.

(3) Se deberá valorar la exposición lógica y la coherencia de las respuestas, tanto en cuestiones teóricas como prácticas. Algunos ejemplos:

(a) Si al resolver un sistema de ecuaciones, el alumno comete un error **numérico**, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se prestará especial atención siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial.

(b) En la representación gráfica de funciones, se valorará la coherencia del dibujo con los datos obtenidos previamente por el alumno. (Vale aquí la misma excepción que en el párrafo anterior.)

(4) La puntuación máxima que se puede obtener en cada ejercicio viene señalada en la copia del examen que se entrega al alumno. Si alguno de los apartados tiene a su vez subapartados, se deberá distribuir razonablemente el número de puntos entre los mismos (no necesariamente debe darse el mismo peso a cada subapartado).

(5) Si un alumno da una respuesta acertada a un problema escribiendo sólo los resultados, sin el desarrollo lógico de cómo los ha obtenido, la puntuación en este apartado no podrá ser superior al 40 % de la nota máxima prevista.

(6) La calificación será la suma de las puntuaciones obtenidas en cada ejercicio de una sola propuesta.

SOLUCIONES PROPUESTA A

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

1.–(2 puntos) Dados la recta r y el plano π de ecuaciones:

$$r:\begin{cases} 2x+2y+2z=2,\\ -x-2y+z=0. \end{cases} \qquad \pi \equiv ax+y+z-b=0.$$

(I) Determina a y b para que el plano π contenga a la recta r.

(II) Determina a y b para que r sea paralela al plano π.

Solución:

i. Para que el plano contenga a la recta debe verificarse que, el vector ortogonal al plano sea perpendicular al vector de dirección de la recta, y que un punto de la recta esté contenido en el plano.

El vector ortogonal al plano es: $(a, 1, 1)$.

Para hallar el vector de dirección de la recta, como esta está dada como intersección de dos planos, se puede hallar el producto vectorial de los vectores ortogonales a dichos planos. Pero también podemos encontrar la ecuación paramétrica de la recta.

$$\begin{cases} 2x+2y+2z=2\\ -x-2y+z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x+y+z=1\\ -x-2y+z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x+y+z=1\\ -y+2z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x+2z+z=1\\ y=2z \end{cases} \to \begin{cases} x=1-3z\\ y=2z\\ z=z \end{cases}$$

Hemos dividido por 2 la primera ecuación. Sumado ambas ecuaciones. Despejado la y en la segunda ecuación. Sustituido en la primera y despejado la x.

La recta pasa por el punto (1, 0, 0) y tiene como vector de dirección (-3, 2, 1).

Imponemos que el vector de dirección de la recta sea ortogonal al vector perpendicular al plano:

$(a, 1, 1)\cdot(-3, 2, 1) = -3a + 2 + 1 = 0$ de donde $a = 1$.

Imponemos que el punto de la recta verifique la ecuación del plano:

$ax + y + z = b$, luego $a = b$, por lo que $b = 1$.

Para que la recta esté contenida en el plano: $a = \mathbf{1}$, $b = \mathbf{1}$.

ii. Para que la recta sea paralela al plano, pero NO esté contenida en él, ya abemos que a debe valer 1, pero el punto no debe verificar la ecuación del plano. Por tanto, debe ser b ≠ 1.

Para que la recta sea paralela al plano: $a = \mathbf{1}$, $b \neq \mathbf{1}$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.2:

2.– (2 puntos) La distribución del número de rapes capturados por los barcos pesqueros que salen a faenar en una cierta zona se ajusta a una normal de media 220. Se sabe que, tomando un barco al azar la probabilidad de que capture más de 250 es 0,1587.

(I) Calcula la desviación típica de la distribución.

(II) Calcula el número de rapes que un barco debe capturar para estar en el percentil 95.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Solución:

i. En el enunciado nos dicen que la distribución del número de rapes capturados se ajusta a una distribución normal de media 220. Y que

$$P(X > 250) = 0.1587.$$

Sabemos que:

$$P(X > 250) = 1 - P(X < 250) = 0.1587 \to P(X < 250) = 1 - 0.1587 = 0.8413$$

Tipificamos:

$$P\left(Z < \frac{250-220}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{300}{\sigma}\right) = 0.8413$$

Miramos en la tabla:

$$\frac{300}{\sigma} = 1 \to \sigma = 30$$

La desviación típica vale $\boldsymbol{\sigma = 30}$

ii. Para que el número de rapes esté en el percentil 95 se debe verificar que:

$$P(X < r) = 0.95$$

Tipificamos:

$$P\left(Z < \frac{r-220}{30}\right) = 0.95$$

Buscamos en la tabla: $P(Z < 1.64) = 0.9495$ y $P(Z < 1.65) = 0.9505$.

Por tanto, podemos tomar $\frac{r-220}{30} = 1.645 \to r = 220 + 30(1.645) = 269.35$

Deben capturar al menos $\mathbf{270}$ rapes para estar en el percentil 95.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.3:

3.– (3 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b, & x > 0 \end{cases}$$

con a y b números reales.

(I) Halla a y b para que f sea contínua y derivable en $x = 0$.

(II) Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x = 0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 1]$.

Solución:

i. Nos dan una función definida a trozos, formada por la función coseno, que es continua y derivable en toda la recta real, y una función polinómica, también continua y derivable en toda la recta real. Por lo que el único punto dudoso es el de unión de ambos trozos.

Para $x = 0$, el coseno vale 1. Al acercarse a 0 la función polinómica vale b, luego para que la función sea continua debe valer $b = 1$.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} -sen\,x & x < 0 \\ -2x + a & x > 0 \end{cases}$$

De nuevo el único caso dudoso es si $x = 0$. Imponemos que coincida la derivada a ambos lados del 0.

$$-sen\ 0 = 0 = -2(0) + a \to a = 0$$

La función es continua y derivable si $b = 1$, y $a = 0$.

ii. Para estudiar si hay un extremo relativo analizamos el crecimiento o decrecimiento de la función cerca de $x = 0$.

Si tomamos $x = -0.01$ la función vale $cos\ x$, y su derivada $-sen\ x$, luego $f'(-0.01) = -\text{sen}\ (-0.01) > 0$. La función crece antes de 0.

Si tomamos $x = 0.01$ la función vale $-x^2 + 1$ y su derivada $-2x$, luego $f'(0.01) = -0.02 < 0$. La función decrece después de 0. Luego en (0, 1) la función alcanza un máximo relativo.

En $(0, 1)$ la función alcanza un máximo relativo.

iii. Para calcular el área analizamos la función, antes de 0 es la función coseno, y después la parábola:

$$Área\ = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} cosxdx\right| + \left|\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx\right| = |-senx|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left|\frac{-x^3}{3} + x\right|_0^1 =$$

$$|0-(+1)| + \left|\frac{-1}{3} + 1 - (0)\right| = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Área = $\frac{5}{3}$ u^2.

Problema A.4:

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

Sea el sistema de ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.

(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

Solución:

i. Para que la matriz tenga inversa debe ser su determinante distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a - (a^3 + 1 + 1) = -a^3 + 3a - 2$$

Calculamos las raíces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = -(a-1)^2(a+2),$$ por lo que:

La matriz tiene inversa si $\boldsymbol{a \neq 1}$ o $\boldsymbol{a \neq -2}$.

ii. Para a = 1, la matriz A queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, una matriz de rango 1, igual al rango de la matriz ampliada, luego el sistema es compatible indeterminado de solución:

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

Para a = –2, la matriz A queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, una matriz de rango 2, mientras que la matriz ampliada es de rango 3, por lo que el sistema es incompatible.

Si $a \neq 1$ o $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado, si a = 1 el sistema es compatible indeterminado, y si a = –2, el sistema es incompatible.

iii. Para a = 1 ya lo hemos resuelto, $\begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$.

Para $a \neq 1$ o $a \neq -2$ lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(a + a + 1) - (a^2 + 1 + 1)}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^2 + 2a - 1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(1 + a + a) - (a^2 + 1 + 1)}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^2 + 2a - 1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(a + 1 + a) - (a^2 + 1 + 1)}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^2 + 2a - 1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

Para $a \neq 1$ o $a \neq -2$ la solución es: $\boldsymbol{x = \frac{1}{a+2}, y = \frac{1}{a+2}, z = \frac{1}{a+2}}$.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES PROPUESTA B

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema B.1:

1.– (2 puntos) Sean el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x = 3 - \lambda, \\ y = 2 + \lambda, \\ z = 1 - 3\lambda. \end{cases}$

(I) Determina la ecuación de la recta s que contiene al punto $P = (1, 2, -1)$, es perpendicular a la recta r y paralela al plano π.

(II) Halla la distancia de la recta s al plano π.

Solución:

i. Buscamos una recta s de la que conocemos un punto: P = (1, 2, –1). Sabemos que es perpendicular a la recta r, luego su vector de dirección debe ser ortogonal al vector: (–1, 1, –3). Ya paralela al plano π, luego su vector de dirección debe ser ortogonal al vector perpendicular al plano: (2, 1, –1).

Llamamos (a, b, c) al vector de dirección de s. Imponemos que sea perpendicular a r:

$$(a, b, c)\cdot(-1, 1, -3) = 0 = -a + b - 3c.$$

Imponemos que sea paralela al plano π:

$$(a, b, c)\cdot(2, 1, -1) = 0 = 2a + b - c.$$

Para resolver el sistema restamos a la segunda ecuación la primera: $3a + 2c = 0$, luego $a = -2c/3$. Despejamos b: $b = a + 3c = -2c/3 + 3c = 7c/3$. Como es un vector de dirección podemos multiplicar por 3. El vector es: (–2, 7, 3). Y ya conocemos un unto y el vector de dirección, luego la ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 - 2\alpha} \\ \boldsymbol{y = 2 + 7\alpha} \\ \boldsymbol{z = -1 + 3\alpha} \end{cases}$$

ii. Al ser la recta paralela al plano, todos los puntos de la recta distan lo mismo al plano, por lo que hallamos la distancia del punto P al plano π:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|2(1) + (2) - (-1) - 3|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\boldsymbol{d(r, \pi) = \frac{2}{\sqrt{6}} u}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.2:

2.– (2 puntos) Se tienen tres urnas: A, B y C. La urna A contiene dos bolas blancas y tres negras, la B tres bolas blancas y dos negras, la C cuatro bolas blancas y una negra. Se lanza un dado y se toman dos bolas de una urna: de la urna A si sale un 1, 2 ó 3, de la urna B si sale un 4 ó 5 y de la urna C si sale un 6.

(I) Calcula la probabilidad de obtener dos bolas blancas.

(II) Suponiendo que las dos bolas extraídas son blancas, calcula la probabilidad de que se hayan extraído de la primera urna.

Solución:

Llamamos A al suceso sacar una bola de la urna A, B a sacarla de B y C a sacarla de C. Llamamos N a sacar una bola negra, Bl a sacar una bola blanca y $2Bl$ a sacar dos bolas blancas.

Los datos que nos da el enunciado son: $P(A)$ = 3/6 = 1/2; $P(B)$ = 2/6 = 1/3; $P(C)$ = 1/6.

$P(Bl/A)$ = 2/5; $P(2Bl/A)$ = (2/5)(1(4) = 2/20 = 1/10; $P(Bl/B)$ = 3/5; $P(2Bl/B)$ = (3/5)(2/4) = 6/20 = 3/10; $P(Bl/C)$ = 4/5; $P(2Bl/C)$ = (4/5)(3/4) = 12/20 = 3/5.

i. Nos piden la probabilidad de sacar dos bolas blancas. Utilizamos el teorema de la probabilidad total:

$P(2Bl) = P(2Bl/A) \cdot P(A) + P(2Bl/B) \cdot P(B) + P(2Bl/C) \cdot P(C)$ = (1/10) · (1/2) + (3/10) · (1/3) + (3/5) · (1/6) = 1/20 + 1/10 + 1/10 = 5/20 = 1/4.

La probabilidad de sacar dos bolas blancas es $1/4 = 0.25$.

ii. Nos piden ahora $P(A/2Bl)$, es decir, la probabilidad condicionada a que habiendo salido dos bolas blancas sean de la urna A.

$$P(A/2Bl) = \frac{P(A \cap 2Bl)}{P(2Bl)} = \frac{P(A) \cdot P(2Bl/A)}{P(2Bl)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}.$$

La probabilidad de que, habiendo salido dos bolas blancas, haya sido de la urna A es de $1/5 = 0.20$.

Problema B.3:

3.– (3 puntos) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida como:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ -x^2+ax+b, & x>0\end{cases}$$

con a y b números reales.

(I) Halla a y b para que f sea continua y derivable en $x=0$.

(II) Para los valores anteriores de a y b analiza si f tiene un extremo relativo en $x=0$.

(III) Halla el área encerrada por la función y el eje OX en el intervalo $[-\frac{\pi}{2},1]$.

Solución:

i. Nos dan una función definida a trozos, formada por la función coseno, que es continua y derivable en toda la recta real, y una función polinómica, también continua y derivable en toda la recta real. Por lo que el único punto dudoso es el de unión de ambos trozos.

Para $x = 0$, el coseno vale 1. Al acercarse a 0 la función polinómica vale b, luego para que la función sea continua debe valer $b = 1$. Calculamos la derivada:

$$f'(x)=\begin{cases}-sen\ x & x<0\\ -2x+a & x>0\end{cases}$$

De nuevo el único caso dudoso es si $x = 0$. Imponemos que coincida la derivada a ambos lados del 0.

$$-sen\ 0 = 0 = -2(0)+a \to a = 0$$

La función es continua y derivable si $b = \mathbf{1}$, y $a = \mathbf{0}$.

ii. Para estudiar si hay un extremo relativo analizamos el crecimiento o decrecimiento de la función cerca de $x = 0$.

Si tomamos $x = -0.01$ la función vale $cos\ x$, y su derivada $-sen\ x$, luego $f'(-0.01) = -\text{sen}\ (-0.01) > 0$. La función crece antes de 0. Si tomamos $x = 0.01$ la función vale $-x^2 +1$ y su derivada $-2x$, luego $f'(0.01) = -0.02 < 0$. La función decrece después de 0. Luego en (0, 1) la función alcanza un máximo relativo.

En $(0, 1)$ la función alcanza un máximo relativo.

iii. Para calcular el área analizamos la función, antes de 0 es la función coseno, y después la parábola:

$$Área\ = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} cosxdx\right| + \left|\int_0^1 (-x^2+1)dx\right| = |-senx|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left|\frac{-x^3}{3}+x\right|_0^1 =$$

$$|0-(+1)| + \left|\frac{-1}{3}+1-(0)\right| = 1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

Área = $\mathbf{\frac{5}{3}}$ u^2.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.4:

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la invesa de la matriz A.

Sea el sistema de ecuaciones

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) Discute el sistema de ecuaciones para los distintos valores del parámetro a.

(II) Resuelve el sistema de ecuaciones cuando sea compatible.

Solución:

i. Para que la matriz tenga inversa debe ser su determinante distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a - (a^3 + 1 + 1) = -a^3 + 3a - 2$$

Calculamos las raíces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathrm{a} \\ 1 & \mathrm{a} & 1 \\ \mathrm{a} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = -(\mathrm{a}-1)^2(\mathrm{a}+2), \text{ por lo que:}$$

La matriz tiene inversa si $\boldsymbol{a \neq 1}$ **o** $\boldsymbol{a \neq -2}$.

ii. Para a = 1, la matriz A queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, una matriz de rango 1, igual al rango de la matriz ampliada, luego el sistema es compatible indeterminado de solución:

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

Para a = –2, la matriz A queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, una matriz de rango 2, mientras que la matriz ampliada es de rango 3, por lo que el sistema es incompatible.

Si $a \neq 1$ o $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado, si a = 1 el sistema es compatible indeterminado, y si a = –2, el sistema es incompatible.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

iii. Para a = 1 ya lo hemos resuelto, $\begin{cases} x = 1 - \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$.

Para $a \neq 1$ o $a \neq -2$ lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(a+a+1)-(a^2+1+1)}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^2+2a-1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(1+a+a)-(a^2+1+1)}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^2+2a-1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(a+1+a)-(a^2+1+1)}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-a^2+2a-1}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

Para $a \neq 1$ o $a \neq -2$ la solución es: $\boldsymbol{x = \frac{1}{a+2}, y = \frac{1}{a+2}, z = \frac{1}{a+2}}$.

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2018/2019

Convocatoria: Julio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA A:

1.–(2 puntos) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, de modo que los vectores son unitarios y forman entre sí ángulos de 45°. Dados los vectores $u = e_1 + e_2$ y $v = e_1 - e_2 + e_3$

(I) Calcula el módulo de los vectores u y v.

(II) Calcula el coseno del ángulo formado por los vectores u y v.

2.– (2 puntos) El peso medio según la OMS de un niño de 5 años sigue una distribución normal de media 18,5 kg. y desviación típica 2,25 kg. Si se elige un niño al azar. Halla el porcentaje de niños

(I) cuyo peso es superior a 23 kg.

(II) cuyo peso está entre 15 y 23 kg.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

3.– (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}.$$

(I) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f.

(II) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$. En caso afirmativo, calcula el valor $c \in (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ a que se refiere el teorema de Rolle.

(III) Halla el área encerrada por f y el eje de abcisas en el intervalo $[\frac{3}{2}, 4]$.

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix},$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

(II) Halla la inversa de la matriz A, cuando exista.

(III) Para $a = 1$ y las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resuelve el sistema

$$\begin{cases} BXA & = Y, \\ \frac{1}{3}Y + C & = D. \end{cases}$$

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2018/2019

Convocatoria: Julio

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA B:

1.– (2 puntos) En un colegio se han ofertado para los niños de infantil tres actividades extraescolares Inglés (ING), Multideporte (MUL) y Robótica (ROB), con dos rangos de edad de 3 a 4 años (MP) y de 5 a 6 años(MG). Se sabe que se han apuntado a alguna actividad un total de 300 niños. De ellos, hay 100 que tienen entre 3 y 4 años, de los cuales 82 hacen Inglés y 10 han elegido Multideporte. Se sabe que al grupo de Robótica se han apuntado 83 niños, y hay 105 niños de entre 5 y 6 años que se han apuntado a Inglés.

(I) Toma un niño al azar, halla las siguientes probabilidades: $P(MG)$, $P(MUL)$, $P(MP \cap ROB)$, $P(ROB|MP)$ y $P(MG|ING)$.

(II) Comprueba que el suceso MUL es independiente de la edad del niño.

2.– (2 puntos) Dos vértices consecutivos de un rectángulo son $P = (2, 2, 1)$ y $Q = (0, 0, -1)$ y los otros dos pertenecen a una recta r que pasa por el punto $A = (5, 4, 3)$.

(I) Determina la ecuación de la recta r.

(II) Determina la ecuación del plano que contiene al rectángulo.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

3.– (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}.$$

(I) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f.

(II) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$. En caso afirmativo, calcula el valor $c \in (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ a que se refiere el teorema de Rolle.

(III) Halla el área encerrada por f y el eje de abcisas en el intervalo $[\frac{3}{2}, 4]$.

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix},$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

(II) Halla la inversa de la matriz A, cuando exista.

(III) Para $a = 1$ y las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resuelve el sistema

$$\begin{cases} BXA & = Y, \\ \frac{1}{3}Y + C & = D. \end{cases}$$

SOLUCIONES PROPUESTA A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

1.–(2 puntos) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, de modo que los vectores son unitarios y forman entre sí ángulos de 45°. Dados los vectores $u = e_1 + e_2$ y $v = e_1 - e_2 + e_3$

(I) Calcula el módulo de los vectores u y v.

(II) Calcula el coseno del ángulo formado por los vectores u y v.

Solución:

i. El enunciado nos da dos vectores en una base que es unitaria pero no ortogonal. Nos pide calcular el módulo de dichos vectores:

$$|\bar{u}| = \sqrt{|\bar{u}\cdot\bar{u}|} = \sqrt{(e_1+e_2)\cdot(e_1+e_2)} = \sqrt{e_1\cdot e_1 + e_1\cdot e_2 + e_2\cdot e_1 + e_2\cdot e_2} =$$
$$\sqrt{|e_1|\cdot|e_1|\cdot cos\,0 + |e_1|\cdot|e_2|\cdot cos\,45 + |e_2|\cdot|e_1|\cdot cos\,45 + |e_2|\cdot|e_2|\cdot cos\,0} =$$
$$\sqrt{1 + 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\cdot 1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,.$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{|\bar{v}\cdot\bar{v}|} = \sqrt{(e_1-e_2+e_3)\cdot(e_1-e_2+e_3)} =$$
$$= \sqrt{e_1\cdot e_1 - e_1\cdot e_2 + e_1\cdot e_3 - e_2\cdot e_1 + e_2\cdot e_2 - e_2\cdot e_3 + e_3\cdot e_1 - e_3\cdot e_2 + e_3\cdot e_3} =$$
$$= \sqrt{1 - |e_1|\cdot|e_2|\cdot cos\,45 + |e_1|\cdot|e_3|\cdot cos\,45 - |e_2|\cdot|e_1|\cdot cos\,45 + 1 - |e_2|\cdot|e_3|\cdot cos\,45 + |e_3|\cdot|e_1|\cdot cos\,45 - |e_3|\cdot|e_2|\cdot cos\,45 + 1}$$
$$= \sqrt{3-\sqrt{2}}$$

Los módulos valen: $|\bar{\boldsymbol{u}}| = \sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}}}$ y $|\bar{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{2}}}$

ii. Sabemos que el producto escalar de dos vectores es igual al producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = (e_1+e_2)\cdot(e_1-e_2+e_3) = e_1\cdot e_1 - e_1\cdot e_2 + e_1\cdot e_3 + e_2\cdot e_1 - e_2\cdot e_2 + e_2\cdot e_3$$
$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Y por otra parte:

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot cos\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{2}}\cdot cos\alpha = \sqrt{6-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2}\cdot cos\alpha = \sqrt{4+\sqrt{2}}\cdot cos\alpha$$

Igualando:

$$\sqrt{2} = \sqrt{4+\sqrt{2}}\cdot cos\alpha \to cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{2}}} = 0.607$$

Los vectores forman un ángulo cuyo coseno vale $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+\sqrt{2}}} = \mathbf{0.607}$

Problema A.2:

2.– (2 puntos) El peso medio según la OMS de un niño de 5 años sigue una distribución normal de media 18,5 kg. y desviación típica 2,25 kg. Si se elige un niño al azar. Halla el porcentaje de niños

(I) cuyo peso es superior a 23 kg.

(II) cuyo peso está entre 15 y 23 kg.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Solución:

Nos dice el enunciado que el peso de un niño de 5 años sigue una distribución normal de media 18.5 kg y una desviación típica de 2.25 kg: $N(18.5, 2.25)$.

i. Queremos conocer el porcentaje de niños cuyo peso es superior a 23 kg: $P(X > 23)$

Tipificamos, y miramos en la tabla:

$$P(X > 23) = 1 - P(X < 23) = 1 - P\left(Z < \frac{23-18.5}{2.25}\right) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

El porcentaje de niños de peso superior a 23 kg es del **2.28 %**.

ii. Queremos conocer el porcentaje de niños cuyo peso está comprendido entre 15 y 23 kg: $P(15 < X < 23)$.

$$P(15 < X < 23) = P(X < 23) - P(X < 15) =$$

Tipificamos y miramos en la tabla:

$$P\left(Z < \frac{23-18.5}{2.25}\right) - P\left(Z < \frac{15-18.5}{2.25}\right) = P(Z < 2) - P(Z < -1.555)$$
$$= P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1.555)) = 0.9772 - 1 + 0.9394 = 0.9166.$$

El porcentaje de niños cuyo peso está entre 15 y 23 kg es de **91.66 %**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.3:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

3.– (3 puntos) Sea la función

$$f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}.$$

(I) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f.

(II) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]$. En caso afirmativo, calcula el valor $c\in\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$ a que se refiere el teorema de Rolle.

(III) Halla el área encerrada por f y el eje de abcisas en el intervalo $[\frac{3}{2},4]$.

Solución:

i. La función es cociente de dos funciones. El numerador, de la función valor absoluto, que es continua en toda la recta real, pero no es derivable en $x = 0$. El denominador es una función polinómica, continua y derivable en toda la recta real, que se anula en $x = 1$ y en $x = -1$.

Podemos definirla como: $f(x)=\begin{cases}\frac{-x}{x^2-1} & x<0\\ \frac{x}{x^2-1} & x\geq 0\end{cases}$

La función no es continua ni derivable en $x = 1$ y en $x = -1$. Tampoco es derivable en $x = 0$.

ii. El teorema de Rolle dice que si una función es continua en $[a, b]$, y derivable en (a, b), y $f(a) = f(b)$, existe un punto c en el intervalo (a, b) en el que se anula la derivada.

Nuestra función es continua en [–1/2, 1/2], pero no es derivable en $x = 0$, luego no es derivable en (–1/2, 1/2), por lo que NO se puede aplicar el teorema de Rolle.

No se puede aplicar el teorema de Rolle en [–1/2, 1/2].

iii. La función en el intervalo [3/2, 4] es siempre positiva. Se puede completar la derivada del denominador en el numerador, luego es una integral inmediata de tipo logaritmo:

$$Área\ =\int_{\frac{3}{2}}^{4}\frac{x}{x^2-1}dx=\left|\frac{1}{2}ln(x^2-1)\right|_{\frac{3}{2}}^{4}=$$

$$\frac{1}{2}(\ln 15-\ln(2.25-1))=\frac{1}{2}(\ln 15-\ln(1.25))=\frac{1}{2}(\ln\frac{15}{1.25})=\frac{1}{2}(\ln 12)=1.2424$$

Área = $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{ln 12})=1.2424$ u².

Problema A.4:

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix},$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

(II) Halla la inversa de la matriz A, cuando exista.

(III) Para $a = 1$ y las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resuelve el sistema

$$\begin{cases} BXA & = Y, \\ \frac{1}{3}Y + C & = D. \end{cases}$$

Solución:

i. Para que una matriz tenga inversa debe ser una matriz cuadrada cuyo determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{vmatrix} = a(2a-1)$$

Para que exista inversa a no puede valer ni 0, ni 1/2.

Si $a \neq 0$ o $a \neq 1/2$ entonces A tiene matriz inversa.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot AdjA^t$; $\quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix}$; $\quad AdjA^t = \begin{pmatrix} a(2a-1) & 0 & 0 \\ 0 & 2a-1 & 0 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}$, por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{a(2a-1)} \cdot \begin{pmatrix} a(2a-1) & 0 & 0 \\ 0 & 2a-1 & 0 \\ 0 & a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a-1} & \frac{1}{2a-1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a-1} & \frac{1}{2a-1} \end{pmatrix}}$$

ii. Si a = 1, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Para resolver $BXA = Y$, multiplicamos por las inversas: $X = B^{-1}YA^{-1}$. Despejamos Y de la segunda ecuación: $(1/3)Y + C = D$, luego $Y = 3(D - C)$.

Calculamos Y:

$$Y = 3\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\right) = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de B:

$$|B| = 1;\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = B^{-1}YA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 \\ -21 & -3 & 42 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 9 & -15 & -15 \\ -21 & 39 & 42 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 9 & -15 & -15 \\ -21 & 39 & 42 \end{pmatrix}}\ \textbf{e}\ \boldsymbol{Y = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.1:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1.- (2 puntos) En un colegio se han ofertado para los niños de infantil tres actividades extraescolares Inglés (ING), Multideporte (MUL) y Robótica (ROB), con dos rangos de edad de 3 a 4 años (MP) y de 5 a 6 años (MG). Se sabe que se han apuntado a alguna actividad un total de 300 niños. De ellos, hay 100 que tienen entre 3 y 4 años, de los cuales 82 hacen Inglés y 10 han elegido Multideporte. Se sabe que al grupo de Robótica se han apuntado 83 niños, y hay 105 niños de entre 5 y 6 años que se han apuntado a Inglés.

(I) Toma un niño al azar, halla las siguientes probabilidades:

$P(MG)$, $P(MUL)$, $P(MP \cap ROB)$, $P(ROB/MP)$ y $P(MG/ING)$.

(II) Comprueba que el suceso MUL es independiente de la edad del niño.

Solución:

i. Por el enunciado sabemos que: $P(MP)$ = 100/300 = 1/3; $P(ING \cap MP)$ = 82/300; $P(MUL \cap MP)$ = 10/300; $P(ROB)$ = 83/300; $P(ING \cap MG)$ = 105/300.

Llevamos estos datos a una tabla de contingencia:

	Inglés (*ING*)	Multideporte (*MUL*)	Robótica (*ROB*)	
De 3 a 4 años (*MP*)	82/300	10/300		100/300
De 5 a 6 años (*MG*)	105/300			
			83/300	1

Podemos completar en esta tabla muchos datos:

	Inglés (*ING*)	Multideporte (*MUL*)	Robótica (*ROB*)	
De 3 a 4 años (*MP*)	82/300	10/300	***8/300***	100/300
De 5 a 6 años (*MG*)	105/300	***20/300***	***75/300***	***200/300***
	187/300	***30/300***	83/300	1

Algunas operaciones: 100 – 82 – 10 = 8; 82 + 105 = 187; 300 – 187 – 83 = 30; 83 – 8 = 75; 40 – 10 = 30.

Podemos responder directamente:

$P(MG)$ = 200/300 = 2/3 = 0.66; $P(MUL)$ = 30/300 = 1/10 = 0.1; $P(MP \cap ROB)$ = 8/300 = 0.026;

Sabemos que:

$$P(ROB/MP) = \frac{P(ROB \cap MP)}{P(MP)} = \frac{\frac{8}{300}}{\frac{100}{300}} = \frac{8}{100} = 0.08; \quad P(MG/ING) = \frac{P(MG \cap ING)}{P(ING)} = \frac{\frac{105}{300}}{\frac{187}{300}} = \frac{105}{187} = 0.561$$

ii. Dos sucesos son independientes si la probabilidad de la intersección es igual al producto de las probabilidades. Para saber si el hacer multideporte es un suceso independiente de la edad del niño sabemos que:

$P(MUL \cap MP)$ = 10/300 = 1/30; $P(MUL)$ = 30/300; $P(MP)$ = 100/300;

$P(MUL) \cdot P(MP)$ = (30/300) · (100/300) = (1/10) · (1/3) = 1/30 = $P(MUL \cap MP)$.

Los sucesos *MUL* y *MP* son independientes.

Problema B.2:

2.- (2 puntos) Dos vértices consecutivos de un rectángulo son P = (2,2,1) y Q = (0,0,–1) y los otros dos pertenecen a una recta r que pasa por el punto A = (5,4,3).

(I) Determina la ecuación de la recta r.

(II) Determina la ecuación del plano que contiene al rectángulo.

Solución:

i. De la recta r conocemos un punto A = (5, 4, 3). Como los puntos P y Q están en un rectángulo del que la recta r es uno de los lados, el vector $\overline{PQ}$ es un vector de dirección de r.

Por tanto, $\overline{PQ} = Q - P = (0,0,-1) - (2,2,1) = (-2,-2,-2)$.

Podemos tomar como vector el (1, 1, 1) que tiene la misma dirección.

La ecuación de la recta es: $\begin{cases} x = 5 + \alpha \\ y = 4 + \alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 5 + \alpha} \\ \boldsymbol{y = 4 + \alpha} \\ \boldsymbol{z = 3 + \alpha} \end{cases}$$

ii. Para determinar la ecuación de un plano necesitamos conocer un punto y dos vectores de orientación del plano. Conocemos el punto A = (5, 4, 3), y el vector $\overline{PQ}$, nos falta otro vector.

El vector $\overline{AP}$ también es de orientación del plano: $\overline{AP} = P - A = (2,2,1) - (5,4,3) = (-3,-2,-2)$. Podemos tomar el vector: (3, 2, 2).

La ecuación paramétrica del plano es: $\begin{cases} x = 5 + \alpha + 3\beta \\ y = 4 + \alpha + 2\beta \\ z = 3 + \alpha + 2\beta \end{cases}$, y eliminando los parámetros:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-4 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 = 0(x-5) + (y-4) - (z-3) = y - z - 1$$

La ecuación del plano es: $\boldsymbol{y - z = 1}$.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.3:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

3.- (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2-1}$$

(I) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f.

(II) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. En caso afirmativo, calcula el valor $c \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a que se refiere el teorema de Rolle.

(III) Halla el área encerrada por f y el eje de abscisas en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$

Solución:

i. La función es cociente de dos funciones. El numerador, de la función valor absoluto, que es continua en toda la recta real, pero no es derivable en $x = 0$. El denominador es una función polinómica, continua y derivable en toda la recta real, que se anula en $x = 1$ y en $x = -1$.

Podemos definirla como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x^2-1} & x < 0 \\ \frac{x}{x^2-1} & x \geq 0 \end{cases}$$

La función no es continua ni derivable en $x = 1$ y en $x = -1$. Tampoco es derivable en $x = 0$.

ii. El teorema de Rolle dice que si una función es continua en $[a, b]$, y derivable en (a, b), y $f(a) = f(b)$, existe un punto c en el intervalo (a, b) en el que se anula la derivada.

Nuestra función es continua en $[-1/2, 1/2]$, pero no es derivable en $x = 0$, luego no es derivable en $(-1/2, 1/2)$, por lo que NO se puede aplicar el teorema de Rolle.

No se puede aplicar el teorema de Rolle en $[-1/2, 1/2]$.

iii. La función en el intervalo $[3/2, 4]$ es siempre positiva. Se puede completar la derivada del denominador en el numerador, luego es una integral inmediata de tipo logaritmo:

$$Área = \int_{\frac{3}{2}}^{4} \frac{x}{x^2-1}dx = \left|\frac{1}{2}ln(x^2-1)\right|_{\frac{3}{2}}^{4} =$$

$$\frac{1}{2}(\ln 15 - \ln(2.25-1)) = \frac{1}{2}(\ln 15 - \ln(1.25)) = \frac{1}{2}(\ln\frac{15}{1.25}) = \frac{1}{2}(\ln 12) = 1.2424$$

Área = $\frac{1}{2}(ln12) = 1.2424$ **u²**.

Problema B.4:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

4.- **(3 puntos)** Sea a un parámetro real cualquiera. Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}.$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.
(II) Halla la inversa de la matriz A, cuando exista.
(III) Para $a = 1$ y las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resuelve el sistema

$$\begin{cases} BXA = Y \\ \frac{1}{3}Y + C = D \end{cases}$$

Solución:

i. Para que una matriz tenga inversa debe ser una matriz cuadrada cuyo determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{vmatrix} = a(2a-1)$$

Para que exista inversa a no puede valer ni 0, ni 1/2.

Si $\boldsymbol{a \neq 0}$ **o** $\boldsymbol{a \neq 1/2}$ entonces A tiene matriz inversa.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot AdjA^t$; $\quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix}$; $\quad AdjA^t = \begin{pmatrix} a(2a-1) & 0 & 0 \\ 0 & 2a-1 & 0 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}$, por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{a(2a-1)} \cdot \begin{pmatrix} a(2a-1) & 0 & 0 \\ 0 & 2a-1 & 0 \\ 0 & a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a-1} & \frac{1}{2a-1} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a-1} & \frac{1}{2a-1} \end{pmatrix}}$$

ii. Si a = 1, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Para resolver $BXA = Y$, multiplicamos por las inversas: $X = B^{-1}YA^{-1}$. Despejamos Y de la segunda ecuación: (1/3)$Y + C = D$, luego $Y = 3(D - C)$.

Calculamos Y:

$$Y = 3\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\right) = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de B:

$$|B| = 1;\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos X:

$$X = B^{-1}YA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 \\ -21 & -3 & 42 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 9 & -15 & -15 \\ -21 & 39 & 42 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 9 & -15 & -15 \\ -21 & 39 & 42 \end{pmatrix}} \textbf{ e } \boldsymbol{Y = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}}$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de:

MADRID

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.
b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.
b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.
c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2, -5, 1)$ y tiene dirección $(-1, 0, -1)$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.
b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.
c) (0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10%. Se pide:

a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.
b) (1.5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar su dominio.
b) (1.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
c) (0.5 puntos) Calcular los límites laterales $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $A(2, 1, 0)$ y el plano $\pi \equiv\ 2x + 3y + 4z = 36$, se pide:

a) (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.
b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.
c) (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.
b) (1.5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & a & 2 & 2-a\\ -1 & 2 & a & a-2\end{pmatrix}$ ***y*** $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$***, se pide:***

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.

b) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A M para el caso a = 0.

Solución

a) Se cumple que $\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix} = 2+3=5\neq 0$, por lo que $rg(A)\geq 2$,

$\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & a & 2\\ -1 & 2 & a\end{vmatrix} = a^2-6+8+4\,a-4-3\,a = a^2+a-2=0 \Leftrightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=1,-2.$

Entonces si $\boldsymbol{a\neq 1 \text{ o de } -2, rg(A)=3}$.

Si $\boldsymbol{a=1}$, $\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix} = -1-3+2+1-2+3=0$, luego $\boldsymbol{rg(A)=2.}$

Si $\boldsymbol{a=-2}$, $\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ -1 & 2 & -4\end{vmatrix} = 0$, ya que $F_3=-F_2$, luego: $\boldsymbol{rg(A)=2.}$

b) Si $a=0$, $A\,M=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$, con:

$|A\,M| = \begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{vmatrix} = -6+2-4+6=-2\neq 0$. Se cumple que $A_{11}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-4$,

$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{vmatrix}=0$, $A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2$, $A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=8$, $A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-1$,

$A23=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-5$, $A_{31}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=6$, $A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1$, $A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-3$,

por lo que:

$$\boldsymbol{(A\,M)^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-4 & 8 & 6\\ 0 & -1 & -1\\ 2 & -5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4 & -3\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}}$$

Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.2:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.

b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Solución

a) Para encontrar una asíntota horizontal se debe calcular el límite de la función en el infinito.

Se cumple que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{lnx}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$, por lo que $y = 0$ es asíntota horizontal de f

(En la segunda igualdad hemos aplicado la regla de L'Hôpital ya que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito).

Asíntota horizontal $y = 0$.

b) Para encontrar un punto de tangente horizontal se debe calcular la derivada e igualarla a cero.

Se cumple que $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - lnx}{x^2} = \frac{1-lnx}{x^2} = 0 \Leftrightarrow lnx = 1 \Leftrightarrow x = e$, luego en $x = e$ la recta tangente a la curva es horizontal.

Para determinar si es un extremo relativo se calcula la segunda derivada en dicho punto.

Tenemos que $f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1-lnx)\,2\,x}{x^4} = \frac{-1-(1-lnx)\,2}{x^3} \Rightarrow f''(e) = \frac{-1-(1-lne)\,2}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0$.

Al ser la derivada segunda en ese punto, $x = e$, negativa sabemos que f tiene un máximo relativo.

En el punto $(e, 1/e)$ la curva tiene la tangente horizontal y es un máximo relativo.

c) Punto de corte de f con el eje X: $\frac{lnx}{x} = 0 \Leftrightarrow lnx = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Como $lnx > 0 \Leftrightarrow x > 1$, tenemos que $f(x) \geq 0$ en $[1, e]$, por lo que $A = \int_1^e \frac{lnx}{x}\,dx = \left[\frac{ln^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{ln^2 e}{2} - \frac{ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}$.

El área es igual a 1/2 u^2.

Problema A.3:

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2,-5,1)$ y tiene dirección $(-1,0,-1)$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.

c) (0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Solución

a) Para estudiar la posición relativa buscamos los vectores directores de ambas rectas.

La segunda recta es $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-1}{-1}$.

La primera pasa por $(1,3,0)$ y tiene como vector director $(2,-2,1)$.

Los vectores directores no son proporcionales luego las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

Hallamos el vector que une un punto de r con otro de s: $(2,-5,1)-(1,3,0)=(1,-8,1)$.

Como $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 2+8-16-2 = -8 \neq 0$, las rectas r y s se cruzan.

Las rectas r y s se cruzan

b) Como contiene a s, pasa por $(2,-5,1)$ y tiene como vector de orientación $(-1,0,-1)$.

Como es paralelo a r, tiene como el otro vector de orientación $(2,-2,1)$, luego el plano es:

$(x,y,z) = (2,-5,1) + \lambda\,(-1,0,-1) + \mu\,(2,-2,1)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 = 2(x-2)+3(y+5)+2(z-1)$$

El plano es $2\,x + 3\,y + 2z + 9 = 0$

c) Como es perpendicular a r, tendrá como vector perpendicular al plano el vector de dirección de la recta: $2\,x - 2\,y + z = C$.

Como pasa por el origen es $C = 0$, luego el plano es $2\,x - 2\,y + z = 0$.

El plano es $2\,x - 2\,y + z = 0$

Problema A.4:

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10%. Se pide:

a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) (1.5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

Solución:

a) Es una distribución binomial con $n = 10$ y $p = 0.1$. Se cumple que:

$$P(\{al\ menos\ 2\ de\ 10\ sigan\ vivos\ en\ 5\ años\}) = P(\{2\ sigan\ vivos\ en\ 5\ años\}) + \cdots +$$
$$P(\{los\ 10\ sigan\ vivos\ en\ 5\ años\}) = \binom{10}{2}\ (0.1)^2\ (0.9)^8 + \cdots + \binom{10}{10}\ (0.9)^{10} \approx 0.26$$

También podemos calcularlo usando el suceso contrario. La probabilidad pedida se igual a:

$$1 - (P(\{ningún\ pez\ siga\ vivos\ en\ 5\ años\}) + P(\{1\ pez\ siga\ vivos\ en\ 5\ años\})).$$

La probabilidad es aproximadamente igual a 0.26.

b) La variable X sigue una distribución binomial $B(200, 0.1)$. Si la aproximamos por una variable W que sigue una $N(200 \cdot 0.1, \sqrt{200 \cdot 0.1 \cdot 0.9}) = N(20, \sqrt{18})$, tenemos que:

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - P(W \leq 9.5) = 1 - P\left(\frac{W-20}{\sqrt{18}} \leq \frac{9.5-20}{\sqrt{18}}\right) =$$
$$1 - P\left(\frac{W-20}{\sqrt{18}} \leq \frac{9.5-20}{\sqrt{18}} \approx -2.47\right) = 1 - P\left(\frac{W-20}{\sqrt{18}} \geq 2.47\right) =$$
$$P\left(\frac{W-20}{\sqrt{18}} \leq 2.47\right) = 0.9932$$

La probabilidad de que hayan sobrevivido al cabo de 5 años al menos 10 de ellos es de 0.9932.

SOLUCIONES OPCIÓN B

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema B.1:

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Solución

Debemos plantear un sistema de ecuaciones. Si llamamos x al precio del bocadillo, y al precio del refresco y z al precio de la bolsa, lo que le cobraron es $4\,x + 2\,y + 3\,z = 19$.

Lo que le tenían que haber cobrado es $3\,x + 2\,y + 2\,z = 15$.

El precio con descuento del bocadillo y el refresco es $x + y - \frac{40}{100}\,(x + y) = 3$.

Por tanto, el sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} 4\,x + 2\,y + 3\,z = 19 \\ 3\,x + 2\,y + 2\,z = 15 \\ x + y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 5 - x,\ \left.\begin{array}{r} 4\,x + 10 - 2\,x + 3\,z = 19 \\ 3\,x + 10 - 2\,x + 2\,z = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\,x + 3\,z = 9 \\ x + 2\,z = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x = 5 - 2\,z, \qquad 10 - 4\,z + 3\,z = 9 \Rightarrow$$

$$z = 1, x = 3, y = 2$$

Un bocadillo cuesta 3 euros, un refresco 2 euros una bolsa de patatas, 1 euro.

Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.2:

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar su dominio.

b) (1.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0.5 puntos) Calcular los límites laterales $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$.

Solución

a) Una función raíz de índice par no está definida cuando el radicando es negativo.

Se cumple que $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: 4\,x^2-x^4=x^2(4-x^2)\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}: x^2\leq 4\}=[-2,2]$

Ya que x^2 es siempre positivo, y $4-x^2$ es positivo cuando $x^2\leq 4$.

$$\boldsymbol{D(f)=[-2,2]}$$

b) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento debemos estudiar la primera derivada, si es positiva será creciente y si negativa, decreciente.

Se cumple que $f'(x)=\frac{8\,x-4\,x^3}{2\sqrt{4\,x^2-x^4}}=\frac{4\,x-2\,x^3}{\sqrt{4\,x^2-x^4}}=\frac{2\,x\,(2-x^2)}{\sqrt{4\,x^2-x^4}}=0\Leftrightarrow x=0, x=\pm\sqrt{2}$.

Si $x<-\sqrt{2}$, tenemos que $2\,x<0$, $2-x^2<0$, por lo que $f'(x)=\frac{2\,x\,(2-x^2)}{\sqrt{4\,x^2-x^4}}>0$ y f es estrictamente creciente.

Si $-\sqrt{2}<x<0$, tenemos que $2\,x<0$, $2-x^2>0$, por lo que $f'(x)=\frac{2\,x\,(2-x^2)}{\sqrt{4\,x^2-x^4}}<0$ y f es estrictamente decreciente.

Si $0<x<\sqrt{2}$, tenemos que $2\,x>0$, $2-x^2>0$, por lo que: $f'(x)=\frac{2\,x\,(2-x^2)}{\sqrt{4\,x^2-x^4}}>0$ y f es estrictamente creciente.

Si $\sqrt{2}<x<2$, tenemos que: $2\,x>0$, $2-x^2<0$, por lo que $f'(x)=\frac{2\,x\,(2-x^2)}{\sqrt{4\,x^2-x^4}}<0$ y f es estrictamente decreciente.

$\boldsymbol{0<x<-\sqrt{2},}$	***f*** **es estrictamente creciente.**
$\boldsymbol{-\sqrt{2}<x<0,}$	***f*** **es estrictamente decreciente.**
$\boldsymbol{0<x<\sqrt{2},}$	***f*** **es estrictamente creciente.**
$\boldsymbol{\sqrt{2}<x<2,}$	***f*** **es estrictamente decreciente.**

c) Se cumple que $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x\sqrt{4 - x^2}}{x} = -\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{4 - x^2} = -\sqrt{4 - 0^2} = -2,$

que se obtienen simplemente simplificando y sustituyendo. Pero hay que observar que la función f(x) es distinta en cada caso

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 0^2} = 2.$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = -2,}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 2}$$

Problema B.3:

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv\ 2x+3y+4z=36$, se pide:

a) (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.

c) (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

Solución

a) Utilizamos la expresión de la distancia de un punto a un plano:

Se cumple que $\boldsymbol{d(A,\pi)} = \frac{|2(2)+3(1)+4(0)-36|}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$.

La distancia del punto al plano es de: $\boldsymbol{d(A,\pi)=\sqrt{29}}$.

b) Para encontrar dicho punto buscamos la recta perpendicular al plano que pase por el punto.

Recta perpendicular a π que pasa por A: $(x,y,z)=(2,1,0)+\lambda\,(2,3,4)=(2+2\,\lambda, 1+3\,\lambda, 4\,\lambda)$.

Hallamos la intersección de esa recta con el plano

Intersección con π: $2\,x+3\,y+4\,z=4+4\,\lambda+3+9\,\lambda+16\,\lambda=7+29\,\lambda=36 \Rightarrow \lambda=1$, luego el punto pedido es $(2+2, 1+3, 4)=(4,4,4)$.

$\boldsymbol{P(4,4,4)}$

c) Como ya conocemos el punto $P\ (4,4,4)$ basta imponer que ese punto sea el punto medio entre el punto $A\ (2,1,0)$y el buscado (x,y,z).

Se cumple que $\frac{1}{2}\left((2,1,0)+(x,y,z)\right)=\left(\frac{x+2}{2},\frac{y+1}{2},\frac{z}{2}\right)=(4,4,4) \Rightarrow \frac{x+2}{2}=4, \frac{y+1}{2}=4,\ \frac{z}{2}=4 \Rightarrow$

$x=6, y=7, z=8$, por lo que:

El punto simétrico es $\boldsymbol{(6,7,8)}$

Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.4:

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) (1.5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Solución

a) Sabemos que $\boldsymbol{P}(\{\boldsymbol{tome\ medicamento}\}) = 0.5$ pues dice el enunciado que la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento.

$P(\{mejore\}/\{tome\ medicamento\}) = 0.8$ ya que el medicamento alivia la dermatitis en un 80 %.

$P(\{mejore\}/\{tome\ placebo\})$ = 0.1 ya que dice el enunciado que si un enfermo es tratado con un placebo la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %.

Se cumple que:

$$P(\{mejore\}) = P(\{mejore\} \cap \{tome\ medicamento\}) + P(\{mejore\} \cap \{tome\ placebo\}) =$$
$$P(\{mejore\}/\{tome\ medicamento\})\ P(\{tome\ medicamento\}) + P(\{mejore\}/\{tome\ placebo\})\ P(\{tome\ placebo\}) =$$
$$0.8 \times 0.5 + 0.1 \times 0.5 = 0.45.$$

La probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado es de 0.45, es decir 45 %.

b) Utilizamos la definición de probabilidad condicionada. Se cumple que:

$$P(\{tratado\ con\ medicamento\}/\{ha\ mejorado\}) = \frac{P(\{ha\ mejorado\} \cap \{tratado\ con\ medicamento\})}{P(\{ha\ mejorado\})} = \frac{0.8 \times 0.5}{0.45} = \frac{0.4}{0.45} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}.$$

Si un paciente elegido al azar ha mejorado, la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento es de 8/9 aproximadamente igual a 0.88888889 ≅ 0.89, es decir el 89 %.

uc3m Universidad Carlos III de Madrid

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} kx & + & (k+1)y & + & z & = & 0, \\ -x & + & ky & - & z & = & 0, \\ (k-1)x & - & y & & & = & -(k+1), \end{array}\right.$ se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $k=-1$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (1.25 puntos) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1)=1,\ f'(1)=2,\ g(1)=3,\ g'(1)=4.$$

Dada $h(x)=f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

b) (1.25 puntos) Calcule la integral $\int (\operatorname{sen} x)^4(\cos x)^3 dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t=\operatorname{sen} x$.)

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (0.5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.

c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) (1.25 puntos) Se sabe que el 40 % del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) (1.25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media 5.6 y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \le 8.2$ es 0.67, calcule σ.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.

b) (0.75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.

c) (0.75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10-t)$.

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) (0.5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el plano, $\pi \equiv 2x + 3y - z = 4$, y las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ y $s \equiv (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,0,1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto de π.

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1.6 %, mientras que para los de alta gama es del 0.9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

b) (1.5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} kx & + & (k+1)y & + & z & = & 0, \\ -x & + & ky & - & z & = & 0, \\ (k-1)x & - & y & & & = & -(k+1), \end{array}\right.$ se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $k=-1$.

Solución

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k+1 & 1 \\ k-1 & 2\,k+1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(k-1)-(k-1)\,(2\,k+1) =$$

$$-(k-1)\,(2\,k+2) = 0 \Leftrightarrow k-1=0 \text{ ó } 2\,k+2=0 \Leftrightarrow k=\pm 1$$

Entonces si $k \neq 1, -1$, el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al número de incógnitas, igual al rango de la matriz ampliada, luego el sistema es compatible determinado.

Si $k=1$, el rango de la matriz de los coeficientes es 2, y calculamos el rango de la matriz ampliada: Tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, = -8 \neq 0$, luego el rango de la matriz ampliada es 3, por lo que el sistema es incompatible ($rg(A) = 2 < rg(A^*) = 3$)

Si $k=-1$, tenemos que el sistema es homogéneo con $rg(A) < 3 = número\ incógnitas$, luego es compatible indeterminado.

Si $k \neq 1$ y $k \neq -1$	**$\Rightarrow$ rango A = 3 = rango A^***	**sistema compatible determinado**
Si $k = 1$	**$\Rightarrow$ rango A = 2, rango A^* = 3**	**sistema es incompatible**
Si $k = -1$	**$\Rightarrow$ rango A = 2 < número incógnitas**	**Sistema homogéneo compatible indeterminado**

b) El sistema queda: $\left.\begin{array}{r} -x+z=0 \\ -x-y-z=0 \\ -2\,x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$z=x, y=-2\,x$, luego las soluciones son $(x, -2\,x, x)$.

$$\boldsymbol{(x, -2\,x, x)}$$

Problema A.2:

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

a) (1.25 puntos) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1) = 1,\ f'(1) = 2,\ g(1) = 3,\ g'(1) = 4.$$

Dada $h(x) = f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

b) (1.25 puntos) Calcule la integral $\int (\operatorname{sen} x)^4 (\cos x)^3 dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = \operatorname{sen} x$.)

Solución

a) Por la regla de la cadena, se cumple que:

$h'(x) = f'((x+1)^2)\ 2\ (x+1) \Rightarrow\ h'(0) = f'(1)\ 2 = 4$, sustituyendo.

$k'(x) = \frac{f'(x)\ g(x) - f(x)\ g'(x)}{g^2(x)} \Rightarrow\ k'(1) = \frac{f'(1)\ g(1) - f(1)\ g'(1)}{g^2(1)} = \frac{2\cdot 3 - 1\cdot 4}{3^2} = \frac{2}{9}$.

$$\boldsymbol{h'(0) = 4\ ,\ k'(1) = \frac{2}{9}}$$

b) Haciendo el cambio $senx = t \Rightarrow cosx\ dx = dt$, tenemos que:

$sen^4x\ cos^3x\ dx = sen^4x\ (1 - sen^2x)\ cosx\ dx = t^4\ (1 - t^2)\ dt =$

$\int (t^4 - t^6)\ dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \mathrm{C} = \frac{sen^5x}{5} - \frac{sen^7x}{7} + C$.

$$\boldsymbol{sen^4x\ cos^3x\ dx = \frac{sen^5x}{5} - \frac{sen^7x}{7} + C}$$

Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.3:

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (0.5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.

c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

Solución

a) Para determinar un plano se necesita conocer un punto y dos vectores de orientación del plano.

Los vectores de orientación son $(1,3,-3)-(1,1,1)=(0,2,-4)$, $(-3,-1,1)-(1,1,1)=(-4,-2,0)$, luego el plano es: $(x,y\ z)=(1,1,1)+\lambda\,(0,2,-4)+\mu\,(-4,-2,0)$.

$$\boldsymbol{(x,y\ z)=(1,1,1)+\lambda\,(0,2,-4)+\mu\,(-4,-2,0)}$$

b) Tiene que ser otro punto del plano, luego dando $\lambda=\mu=1$, obtenemos:

$D=(1,1,1)+(0,2,-4)+(-4,-2,0)=(-3,1,-3)$.

Y, en efecto, los vectores $(0,2,-4), (-4,-2,0), (-4,0,-4)$ son linealmente dependientes.

$$\boldsymbol{D=(-3,1,-3).}$$

c) Será $P=(a,0,0)$, e imponemos que el volumen sea igual a 1:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & -3\\ 1 & -3 & -1 & 1\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -3\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{6}|11+9-3-1-\mathrm{a}\,(-1-3-3-1)|=\frac{1}{6}|16-8\,a|=1\Leftrightarrow|16-8\,a|=6.$$

Si $16-8a>0$, será $16-8a=6\Leftrightarrow a=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$, que cumple la condición: $16-8\,\frac{5}{4}=6>0$, luego es un posible valor de a que da $P=\left(\frac{5}{4},0,0\right)$.

$$\boldsymbol{P=\left(\frac{5}{4},0,0\right).}$$

Problema A.4:

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) (1.25 puntos) Se sabe que el 40 % del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) (1.25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media 5.6 y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8.2$ es 0.67, calcule σ.

Solución

a) Es una distribución Binomial de probabilidad 0.4 = 2/5, y n = 8. Se cumple que:

$$P(\{al\ menos\ 2\ sean\ seleccionados\}) = P(\{2\ sean\ seleccionados\}) + \cdots +$$
$$P(\{8\ sean\ seleccionados\}) = \binom{8}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^6 + \binom{8}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^5 + \cdots + \binom{8}{8}\left(\frac{2}{5}\right)^8 = 0.89362432$$

(Ya que $P(\{ser\ seleccionado\}) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \Rightarrow P(\{no\ ser\ seleccionado\}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$).

La probabilidad de que al menos dos de los amigos hayan sido seleccionados es aproximadamente del 0.89.

b) Nos dicen que la distribución es normal $X \sim N(5.6, \sigma)$, *por lo que*

$$P(X \leq 8.2) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{8.2-5.6}{\sigma} = \frac{2..6}{\sigma}\right) = 0.67, \text{ donde: } \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1),$$

por lo que mirando en las tablas tenemos que:

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2..6}{\sigma}\right) = 0.67 \Leftrightarrow \frac{2..6}{\sigma} = 0.44 \Leftrightarrow \sigma = \frac{2..6}{0.44} = \frac{260}{44} = \frac{45}{11} = 5.91.$$

La desviación típica es de: $\boldsymbol{\sigma}$ = 5.91

SOLUCIONES OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.

b) (0.75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.

c) (0.75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución

a) Se cumple que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\,\alpha+\alpha^2+1 & 2 \\ 2 & 1+1+2\,\alpha+\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\,\alpha+\alpha^2 & 2 \\ 2 & 2+2\,\alpha+\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 2-2\,\alpha+\alpha^2 & 2 \\ 2 & 2+2\,\alpha+\alpha^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\,\alpha+\alpha^2 & 2 \\ 2 & 1+2\,\alpha+\alpha^2 \end{pmatrix} = 2\,A = \begin{pmatrix} 2-2\,\alpha & 2 \\ 2 & 2+2\,\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow 1-2\,\alpha+\alpha^2 = 2-2\,\alpha, 1+2\,\alpha+\alpha^2 = 2+2\,\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1.$$

$$\boldsymbol{\alpha = \pm 1}$$

b) Se cumple que $|A| = \begin{vmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1 & 1+\alpha \end{vmatrix} = 1-\alpha^2-1 = -\alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$, por lo que A admite inversa $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

En ese caso, $A^{-1} = \frac{1}{-\alpha^2}\begin{pmatrix} 1+\alpha & -1 \\ -1 & 1-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha^2} \\ \frac{1}{\alpha^2} & -\frac{1-\alpha}{\alpha^2} \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{\alpha \neq 0.\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha^2} \\ \frac{1}{\alpha^2} & -\frac{1-\alpha}{\alpha^2} \end{pmatrix}}$$

c) Se cumple que $|(A\,A^t)^2| = |A\,A^t|^2 = |A|^2|A^t|^2 = |A|^4 = (-\alpha^2)^4 = \alpha^8$.

$$\boldsymbol{|(A\,A^t)^2| = \alpha^8}$$

Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.2:

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10-t)$.

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) (0.5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Solución

a) Se cumple que $F(t) = \int t^2\,(10-t) = \int (10\,t^2 - t^3)\,dt = \frac{10\,t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C$, con:

$F(0) = \frac{10\;0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + C = C = 6 \Rightarrow F(t) = \frac{10\,t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6.$

$$\boldsymbol{F(t) = \frac{10\,t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6}$$

b) Se cumple que $F'(t) = t^2\,(10-t) = 0 \Leftrightarrow t = 10$ (ya que $t > 0$), con $F'(t) = t^2\,(10-t) > 0 \Leftrightarrow 0 < t < 10$, $F'(t) = t^2\,(10-t) < 0 \Leftrightarrow t > 10$, por lo que F es estrictamente creciente si $0 < t < 10$, F es estrictamente decreciente si $t > 10$ y F tiene el máximo absoluto en $t = 10$ días, siendo ese máximo (número máximo de enfermos) $F(10) = \frac{10\;10^3}{3} - \frac{10^4}{4} + 6 = \frac{10^4}{12} + 6 = \frac{2500}{3} + 6$ = 839.3333.

El número máximo de enfermos se alcanza a los 10 días, siendo aproximadamente de 839.

c) Se cumple que

$F(13) = \frac{10\;13^3}{3} - \frac{13^4}{4} + 6 = 13^3\,\frac{1}{12} + 6 > 0,$

$F(14) = \frac{10\;14^3}{3} - \frac{14^4}{4} + 6 = -14^3\,\frac{1}{6} + 6 = -\frac{98}{6} + 6 < 0,$

por lo que existe un $t_0 \in (13, 14)$ tal que $F(t_0) = 0$

(Bolzano: F es continua al ser un polinomio):

El brote se acaba en t_0, es decir, en el día 14.

Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.3:

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el plano, $\pi \equiv 2x + 3y - z = 4$, y las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ y $s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de π.

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

Solución

a) Se cumple que el vector característico de π es $(2, 3, -1)$, luego la recta que pasa por P perpendicular a π es $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\,(2, 3, -1) = (1 + 2\,\lambda, 2 + 3\,\lambda, 3 - \lambda)$.

Intersección con π:

$$2\,x + 3\,y - z = 2 + 4\,\lambda + 6 + 9\,\lambda - 3 + \lambda = 5 + 14\,\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{14}$$

Por tanto el simétrico es $(1, 2, 3) + 2\,\lambda\,(2, 3, -1) = (1, 2, 3) - \frac{1}{7}\,(2, 3, -1) = \left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right)$.

Punto simétrico: $\left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right)$

b) Se cumple que s es $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda\,(1, 0, 1) = (1 + \lambda, 2, 3 + \lambda)$, luego su intersección con r es:

$$x + y + z = 1 + \lambda + 2 + 3 + \lambda = 6 + 2\,\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow (x, y, z) = (1 - 2, 2, 3 - 2) = (-1, 2, 1).$$

Entonces la recta pedida es:

$$(x, y, z) = (-1, 2, 1) + \lambda\,(2, 3, -1) = (-1 + 2\,\lambda, 2 + 3\,\lambda, 1 - \lambda)$$

Ecuación de la recta: $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + \lambda\,(2, 3, -1) = (-1 + 2\,\lambda, 2 + 3\,\lambda, 1 - \lambda)$

c) Es el que forman sus vectores directores, es decir:

$$(1, 1, -1) \times (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\,\bar{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\,\bar{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\,\bar{k} = 2\,\bar{\imath} - 2\,\bar{\jmath} = (2, -2, 0) \text{ y } (1, 0, 1),$$

por lo que el ángulo pedido es:

$$\alpha = arccos\left(\frac{(2, -2, 0)°(1, 0, 1)}{\|(2, -2, 0)\|\;\|(1, 0, 1)\|}\right) = arccos\left(\frac{2}{\sqrt{8}\,\sqrt{2}}\right) = arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3}}$ = 60º

Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.4:

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1.6 %, mientras que para los de alta gama es del 0.9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

b) (1.5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

Solución

a) Se cumple que:

$$P(\{defectuoso\}) = P(\{defectuoso\} \cap \{alta\ gama\}) + P(\{defectuoso\} \cap \{baja\ gama\}) = P(\{defectuoso\}/\{alta\ gama\})\ P(\{alta\ gama\}) + P(\{defectuoso\}/\{baja\ gama\})\ P(\{baja\ gama\}) = \frac{0.9}{100}\frac{1}{3} + \frac{1.6}{100}\frac{2}{3} = \frac{1}{300}(0.9+3.2) = \frac{4.1}{300} = \frac{41}{3000} = 0.0136...$$

La probabilidad de que el vehículo elegido sea defectuoso es aproximadamente de 0.014.

b) Se cumple que:

$$P(\{baja\ gama\}/\{defectuoso\}) = \frac{P(\{baja\ gama\} \cap \{defectuoso\})}{P(\{defectuoso\})} = \frac{P(\{defectuoso\}/\{baja\ gama\})\ P(\{baja\ gama\})}{\frac{41}{3000}} = \frac{\frac{3.2}{300}}{\frac{41}{3000}} = \frac{32}{41} \approx 0.78.$$

Si el vehículo elegido es defectuoso, la probabilidad de que sea de gama baja es aproximadamente de 0.78.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Murcia

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO
206 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2019

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a+3 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

A.2: a) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int x^2 \cos x\, dx$.

b) **[1 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cos x$.

A.3: Los puntos $A = (3,0,0)$, $B = (0,3,0)$ y $C = (0,0,3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto $P = (1,1,1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A, B y C.

a) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

b) **[0,5 p.]** Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P = (1,1,1)$ y es perpendicular al plano π.

c) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

A.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se sabe que el $69,50\,\%$ de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el $16,60\,\%$ de de las bombillas duran más de 5116,4 horas.

a) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?

b) **[1,5 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

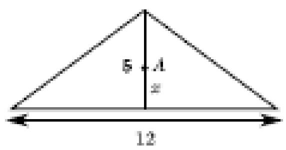
B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) **[0,5 p.]** Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

c) **[1 p.]** Determine si existe la inversa de A. En caso afirmativo, calcúlela.

B.2: Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



a) **[0,5 p.]** Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$.

b) **[1,5 p.]** Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

c) **[0,5 p.]** Calcule dicha cantidad mínima.

B.3: Considere las siguientes rectas:

$$r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+1}{1} \qquad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,5 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

B.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\frac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\frac{2}{5}$.

a) **[1 p.]** Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.

b) **[1,5 p.]** Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que jugara en casa?

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO

206 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2019

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

OBSERVACIONES GENERALES:

El corrector deberá ajustarse a los criterios de evaluación establecidos en este documento y en la reunión correspondiente. En ningún caso se podrá puntuar por encima de la valoración indicada en cada apartado. Se procurará que, en lo posible, los errores en un apartado no afecten a otros apartados.

Los errores simples de cálculo restarán 0,25 puntos. Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar puntuación 0 en ese apartado. Si un error simple ha llevado a un problema más sencillo se disminuirá la puntuación.

Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución serán valoradas con 0 puntos.

Se valorará el correcto uso del vocabulario y de la notación. El alumno puede elegir el método que considere más oportuno para la resolución de una cuestión pero, si esto demuestra la falta de comprensión de conocimientos básicos, la puntuación final puede ser menor que la indicada para dicha cuestión.

OBSERVACIONES PARTICULARES:

OPCIÓN A

CUESTIÓN A.1: [2,5 puntos]

Apartado a) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene solución única (SCD) para todo valor de a distinto de 1 y de -2 **[0,5 puntos]**. Cálculo correcto de esa solución única cuando $a = 0$ **[0,5 puntos]**.

Apartado b) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene infinitas soluciones (SCI) cuando $a = -2$ **[0,5 puntos]**. Cálculo correcto de dicha solución dependiente de un parámetro **[0,5 puntos]**.

Apartado c) Justificación correcta y razonada de que el sistema no tiene solución (SI) cuando $a = 1$ **[0,5 puntos]**.

CUESTIÓN A.2: [2,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida **[1,5 puntos]**.

Apartado b) Cálculo correcto del área, estudiando el signo de la función $f(x)$ y aplicando la regla de Barrow **[1 punto]**.

CUESTIÓN A.3: [2,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto y razonado de la ecuación del plano **[0,5 puntos]**.

Apartado b) Cálculo correcto y razonado de la ecuación de la recta **[0,5 puntos]**.

Apartado c) Cálculo correcto y razonado del punto D **[1,5 puntos]**.

CUESTIÓN A.4: [2,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[1 punto]**.

Apartado b) Cálculo correcto y justificado de la media **[0,75 puntos]** y de la desviación típica **[0,75 puntos]**.

OPCIÓN B

CUESTIÓN B.1: [2,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto de A^2 **[0,5 puntos]**. Cálculo correcto de A^3 **[0,25 puntos]**. Cálculo correcto de A^4 **[0,25 puntos]**.

Apartado b) Identificación de la expresión general de A^n para un valor genérico de n **[0,5 puntos]**.

Apartado c) Justificación de que la matriz A es invertible **[0,25 puntos]**. Cálculo correcto de la matriz inversa **[0,75 puntos]**.

CUESTIÓN B.2: [2,5 puntos]

Apartado a) Justificación correcta y razonada de la expresión de $f(x)$ **[0,5 puntos]**.

Apartado b) Cálculo correcto de la derivada de la función **[0,5 puntos]**. Cálculo correcto del punto crítico de la función a minimizar (y candidato a ser mínimo) **[0,5 puntos]**. Justificación de que se trata de un punto de mínimo **[0,5 puntos]**.

Apartado c) Cálculo del valor mínimo **[0,5 puntos]**.

CUESTIÓN B.3: [2,5 puntos]

Apartado a) Justificación correcta y razonada de que las rectas se cruzan **[1 punto]**.

Apartado b) Cálculo correcto y razonado de la perpendicular común a ambas rectas **[1,5 puntos]**.

CUESTIÓN B.4: [2,5 puntos]

Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[1 punto]**.

Apartado b) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[1,5 puntos]**.

OPCIÓN A

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro $\boldsymbol{a}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+az=1} \\ \boldsymbol{x+ay+z=a} \\ \boldsymbol{ax+y+z=a+3} \end{cases}$$

a) Determine para que valores de $\boldsymbol{a}$ el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $\boldsymbol{a}$ = 0.

b) Determine para que valor de $\boldsymbol{a}$ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para que valor de $\boldsymbol{a}$ el sistema no tiene solución.

Solución:

a) Escribimos la matriz de coeficientes: $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathrm{a} \\ 1 & \mathrm{a} & 1 \\ \mathrm{a} & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|C|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=-a^3+3a-2,\ |C|=0 \Leftrightarrow -a^3+3a-2=0 \Leftrightarrow a$ = 1 (doble) y a = –2

Si $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$ y $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{-2}$ $Rg(C)$ = 3, por tanto, $Rg(C)$ = 3 = nº incógnitas, luego es un **Sistema Compatible Determinado.**

Para $\boldsymbol{a}$ = 0, el sistema queda $\begin{cases} \boldsymbol{x+y} \quad \boldsymbol{=1} \\ \boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{+z=0} \\ \quad \boldsymbol{y+z=3} \end{cases}$ haciendo $F'_2 = -F_1 + F_2$

Obtenemos $\begin{cases} x+y \quad =1 \\ \quad -y \ +z=-1 \\ \quad y+z=3 \end{cases}$ haciendo $F''_3 = F'_2 + F'_3$ $\begin{cases} x+y \quad =1 \\ \quad -y \ +z=-1 \\ \quad 2z=2 \end{cases}$

Resolviendo,

Para a **= *0*,** $\boldsymbol{x}$ = –1, $\boldsymbol{y}$ = 2, $\boldsymbol{z}$ = 1

b) Si a = –2 el sistema queda $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ -2x+y+z=1 \end{cases}$, haciendo $F'_2 = -F_1 + F_2$ y $F'_3 = 2F_1 + F_3$,

obtenemos $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ -3y+3z=-3 \\ 3y-3z=3 \end{cases}$, las filas segunda y tercera son proporcionales, luego podemos eliminar una y simplificando la que nos queda, tenemos $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ -y+z=-1 \end{cases}$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Si a = –2, nos quedan dos ecuaciones, que no son proporcionales, con tres incógnitas, por lo que es un Sistema Compatible Indeterminado, tiene infinitas soluciones, llamando $z = \alpha$ nos queda, $\begin{cases} x+y=1+2\alpha \\ -y=-1-\alpha \end{cases}$ de donde y = 1+ α, x = α, por tanto la solución es:

Si $\boldsymbol{a}$ = –2, *Sistema Compatible Indeterminado*, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{y}$ = 1 + $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\alpha}$.

c) *Si a = 1 el sistema queda,* $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

Vemos que para a = 1, la segunda y la tercera ecuación no se pueden cumplir a la vez, por tanto, tenemos un **Sistema Incompatible**

Para $\boldsymbol{a}$ = 1 tenemos un ***Sistema Incompatible.***

Problema A.2:

a. Calcule la integral indefinida $\int \boldsymbol{x^2 cosxdx}$.

b. Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $\boldsymbol{f(x) = x^2 cosx}$.

Solución:

a) Integramos por partes:

$$\int x^2 cosxdx = \begin{cases} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = cosxdx & v = \int cosxdx = senx \end{cases}$$

aplicando la fórmula:

$$\int x^2 cosxdx = x^2 \cdot senx - \int senx2xdx$$

de nuevo por partes

$$\begin{cases} u = 2x & du = 2dx \\ dv = senxdx & v = \int senxdx = -cosx \end{cases}$$

sustituyendo

$$\int x^2 cosxdx = x^2 \cdot senx - \left[-2xcosx - \int (-cosx)2dx\right] = x^2 \cdot senx + 2xcosx - \int 2cosxdx$$

$$\boldsymbol{\int x^2 cosxdx = x^2 \cdot senx + 2xcosx - 2senx + K}$$

b) Hallamos los cortes de la función con el eje OX

$$\mathbf{x^2 cosx = 0}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x^2 = 0}, & \mathbf{x = 0} \\ \mathbf{cosx = 0}, & \mathbf{x = \frac{\pi}{2} \quad y \quad x = \frac{3\pi}{2}} \end{cases},$$

por tanto en el intervalo $[0, \pi]$ corta una vez y debemos calcular dos integrales definidas

$$\text{Área} = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 cosxdx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 cosxdx\right| =$$

$$= x^2 \cdot senx + 2xcosx - 2senx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + x^2 \cdot senx + 2xcosx - 2senx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

sustituyendo obtenemos

$$\textit{Área} = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4}\ u^2$$

Problema A.3:

Los puntos A = (3, 0, 0), B = (0, 3, 0) y C = (0, 0, 3) son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto P = (1, 1, 1) y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A, B y C.

a) Calcule la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto P = (1, 1, 1) y es perpendicular al plano π.

c) Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

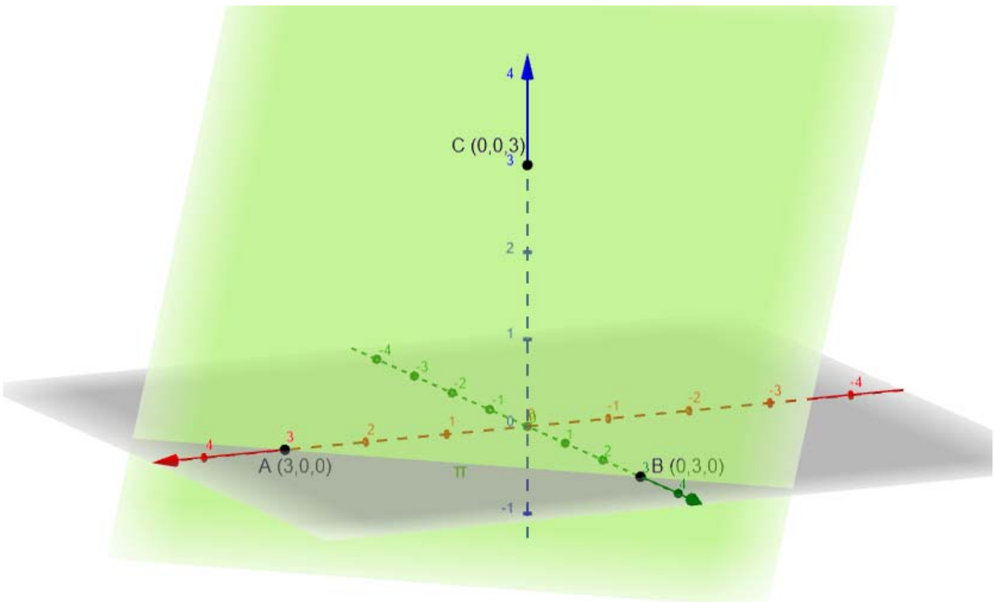
Solución:

a) El plano π viene determinado, por ejemplo, por los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y el punto A.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 3, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 3, 0); \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (0, 0, 3) - (3, 0, 0) = (-3, 0, 3)$$

Luego la ecuación de π es: $\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9x - 27 + 9z + 9y = 0 \Rightarrow$

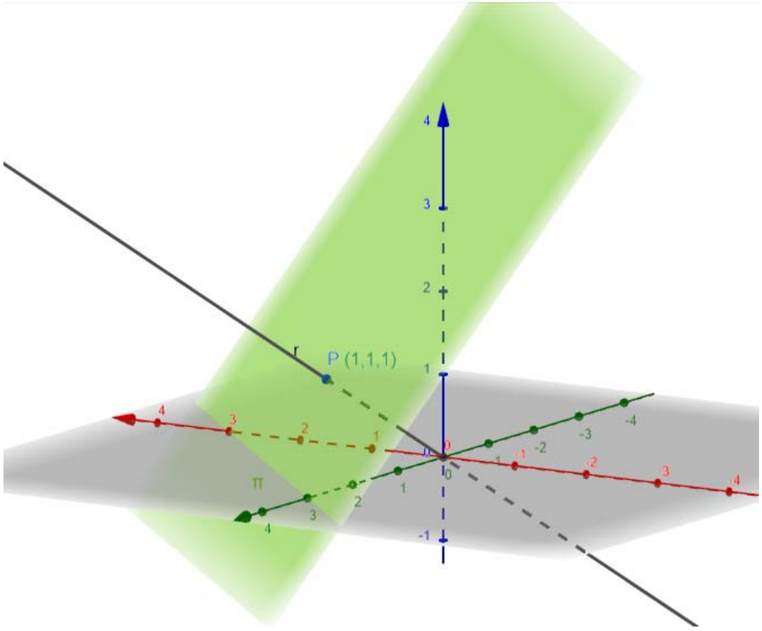
$$\boldsymbol{\pi: x + y + z - 3 = 0}$$



b) Si la recta r es perpendicular al plano π, su vector director será el vector normal del plano.

Es decir, $r: \begin{cases} punto\ \ P = (1,1,1) \\ vector\ director\ \vec{v} = (1,1,1) \end{cases}$

$$\boldsymbol{r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}}$$

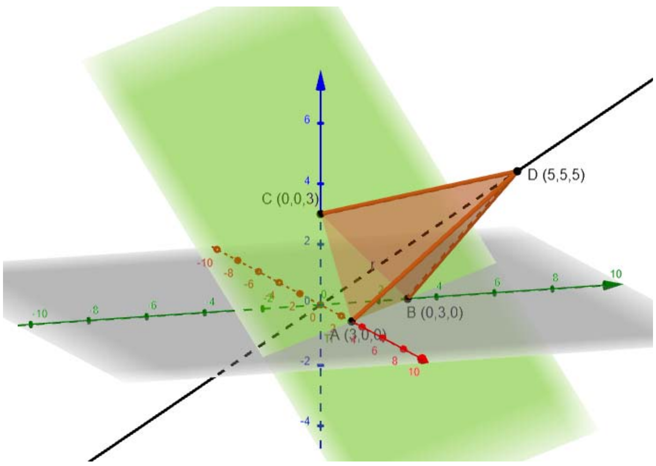


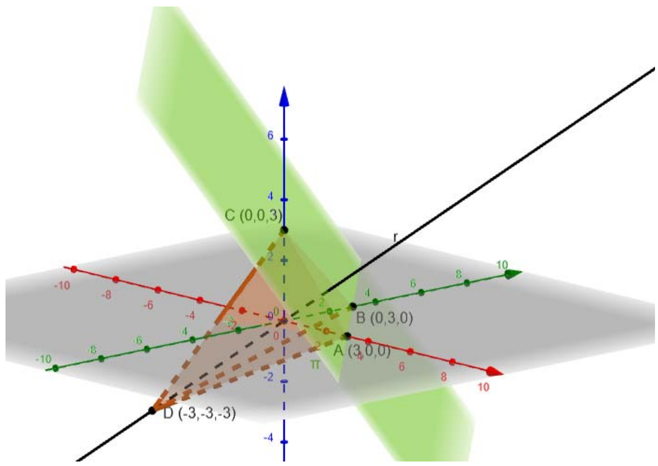
c) El volumen de un tetraedro determinado por los puntos A, B, C y D, donde las coordenadas del punto D son $(\mathbf{1}+\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{1}+\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{1}+\boldsymbol{\alpha})$ puesto que pertenece a la recta r, siendo $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$= $D - A$ = $(1+\alpha, 1+\alpha, 1+\alpha)$ – (3, 0, 0) = $(-2+\alpha, 1+\alpha, 1+\alpha)$ viene dado por la expresión:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -2+\alpha & 1+\alpha & 1+\alpha \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|27\alpha| = \left|\frac{9\alpha}{2}\right| = 18\ u^3$$

$$\frac{9\alpha}{2} = 18 \text{ o } \frac{9\alpha}{2} = -18, \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} \alpha = 4, & D = (5,5,5) \\ \alpha = -4, & D = (-3,-3,-3) \end{cases}$$





$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = (\mathbf{5},\mathbf{5},\mathbf{5}) \\ \boldsymbol{D} = (-\mathbf{3},-\mathbf{3},-\mathbf{3}) \end{cases}$$

Problema A.4:

(En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal)

El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se sabe que el 69.50% de las bombillas duran menos de 5061.5 horas, y que el 16.60% de las bombillas duran más de 5116.4 horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061.2 y 5116.4 horas?

b) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

Solución:

a) Nos piden calcular $P(5061.2 < X < 5116.4)$

Sabemos que $P(X < 5061.2) = 0.6950$ y que $P(X > 5116.4) = 0.1660$, de donde, $P(X < 5116.4) = 0.8340$

Luego $P(5061.2 < X < 5116.4) = P(X < 5116.4) - P(X < 5061.2) = 0.8340 - 0.6950 =$ **0.1390**

La probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061.2 y 5116.4 horas es de **0.1390.**

b) Sea X = tiempo de duración de una bombilla, $X = N(\mu, \sigma)$.

Como $P(X < 5061.2) = 0.6950$, $P(Z < \frac{5061.2-\mu}{\sigma}) = 0.6950$,

buscamos en el interior de la $N(0, 1)$, 0.6950, obtenemos 0.51, luego

$$\frac{5061.2-\mu}{\sigma} = \mathbf{0.51},$$

de la misma manera,

$P(X < 5116.4) = 0.8340$, $P(Z < \frac{5116.4-\mu}{\sigma}) = 0.8340$, obtenemos,

$$\frac{5116.4-\mu}{\sigma} = 0.97$$

Consideramos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{5061.2-\mu}{\sigma} = 0.51 \\ \frac{5116.4-\mu}{\sigma} = 0.97 \end{array}\right\}$$

resolviendo, obtenemos:

μ = 5000 horas, σ = 120 horas

OPCIÓN B

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema B.1:

Considere la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$.

a) Calcule las potencias sucesivas $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}^3$ y $\boldsymbol{A}^4$.

b) Calcule la expresión general de $\boldsymbol{A}^n$ para cualquier valor de $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$.

c) Determine si existe la inversa de $\boldsymbol{A}$. En caso afirmativo, calcúlela.

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\boldsymbol{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

c) La matriz inversa existe si el valor de su determinante es distinto de 0

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, por tanto existe la inversa de A.

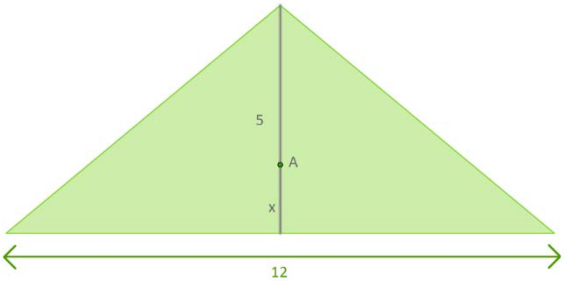
$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot AdjA^t$; $\quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad AdjA^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.2:

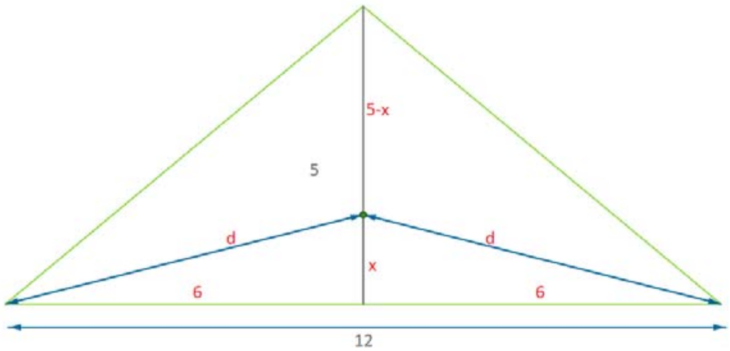
Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



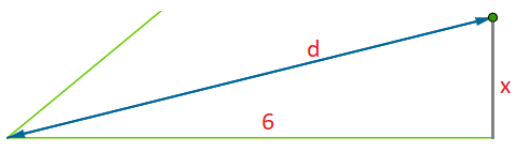
a) Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión $\boldsymbol{f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}}$.
b) Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.
c) Calcule dicha cantidad mínima.

Solución:

a) Como la distancia del punto A al lado desigual es x, y la altura es 5, la distancia del punto A al vértice opuesto al lado desigual es $5 - x$.
Sea d la distancia del punto A a los otros vértices, nos queda el triángulo:



La suma de las distancias será $f(x) = 5 - x + d + d = 5 - x + 2d$
Hallamos la expresión de d en función de x.
Consideramos el triángulo rectángulo:



donde $x^2 + 6^2 = d^2$, de donde, $d = \sqrt{x^2 + 36}$, sustituyendo, tenemos:

$$\boldsymbol{f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}}$$

b) Para calcular los mínimos de *f(x)* debemos derivar, igualar a 0 y resolver,

$$f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2+36}.$$

$$f'(x) = -1 + 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}},$$

de donde: $-1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+36}} = 0$

Pasando 1 al otro miembro y elevando al cuadrado: $\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}\right)^2 = 1^2$

$$\frac{4x^2}{x^2+36} = 1,$$

$$4x^2 = x^2 + 36,$$

resolviendo, $x = \sqrt{12}$ y $x = -\sqrt{12}$,

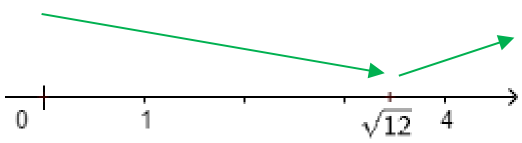
descartamos $x = -\sqrt{12}$, pues x es una distancia, igualmente los valores de x comienzan en 0.

Nos queda $x = \sqrt{12}$, consideramos los intervalos $(0, \sqrt{12})$ y $(\sqrt{12}, +\infty)$

Tomamos valores dentro de estos intervalos y sustituimos en $f'(x) = -1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}$

$f'(1) = -1 + \frac{2\cdot 1}{\sqrt{1^2+36}} < 0$ luego f es decreciente en el intervalo $(0, \sqrt{12})$

$f'(4) = -1 + \frac{2\cdot 4}{\sqrt{4^2+36}} > 0$ luego f es creciente en el intervalo $(\sqrt{12}, \infty)$



Por tanto, en $\boldsymbol{x = \sqrt{12}}$ f presenta un **mínimo.**

c) Para $x = \sqrt{12}$, $f(\sqrt{12}) = 5 - \sqrt{12} + 2\sqrt{\sqrt{12}^2 + 36} = \mathbf{5 + 6\sqrt{3}}$.

La suma de distancias mínima es de $\mathbf{5 + 6\sqrt{3}}$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.3:

Considere las siguientes rectas: $r: \frac{x-5}{1}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+1}{1}$ s: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$

a) Estudie la posición relativa de ambas rectas

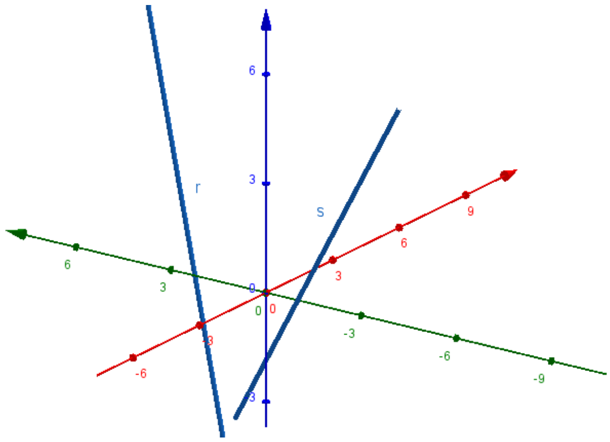
b) En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución:

a) Consideramos un punto de r, A = (5, 6, –1) y otro punto de s, B = (1, 0, –1), calculamos el vector $\overrightarrow{AB}=(-4,-6,0)$ y junto a los vectores directores de las rectas, $\vec{u}=(1,1,1)$ de r y $\vec{v}=(1,1,-1)$ de s, calculamos el valor del determinante formado por los tres vectores,

$$\begin{vmatrix}-4 & -6 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-4\neq 0 \text{, por tanto:}$$

las rectas se cruzan.



b) Se supone que nos piden la recta perpendicular común a las dos rectas dadas y que pase por las dos.

Hallamos el producto vectorial de los dos vectores directores de las rectas, que nos da un vector perpendicular a ambos

$$\vec{w}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-2i+2j=(-2, 2, 0)$$

Calculamos la ecuación del plano π determinado por la recta r y el vector $\vec{w}$, obtenemos un plano que es perpendicular a la recta s; análogamente calculamos la ecuación del plano π' determinado por la recta s y el vector $\vec{w}$, plano que será perpendicular a la recta r. La recta pedida vendrá dada por la intersección de los dos planos, es decir, las dos ecuaciones de los planos son las ecuaciones implícitas de la recta.

Plano π: $\begin{vmatrix}x-5 & y-6 & z+1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}=-2y+12+2z+2+2z+2-2x+10=$

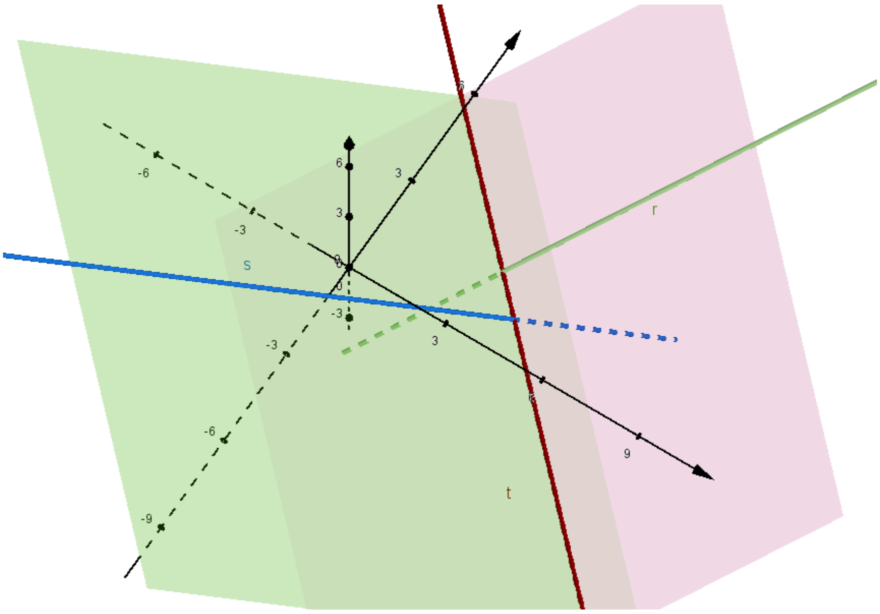
$=-2x-2y+4z+26=0,$ simplificando, $x+y-2z-13=0.$

Plano π’: $\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2y + 2z + 2 + 2z + 2 + 2x - 2 = 2x + 2y + 4z + 2 = 0,$
simplificando,

$$x + y + 2z + 1 = 0$$

De donde:

$$\boldsymbol{t \equiv \begin{cases} x + y - 2z - 13 = 0 \\ x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}}$$



Problema B.4:

(En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal)

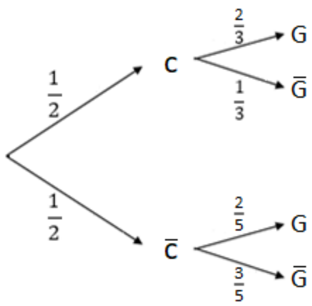
La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es 2/3, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es 2/5.

a) Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.

b) Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que jugara en casa?

Solución:

Realizamos el diagrama de árbol:



a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(G) = P(C)\cdot P(G/C) + P(\bar{C})\cdot P(G/\bar{C}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{8}{15} \text{ luego:}$$

La probabilidad de que gane el próximo partido es: $\mathbf{\frac{8}{15} = 0.5333}$

b) Por el teorema de Bayes

$$P(C/G) = \frac{P(C\cap G)}{P(G)} = \frac{P(C)\cdot P(G/C)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{8}. \text{ Por tanto:}$$

La probabilidad de haber jugado en casa sabiendo que ha ganado el partido es: $\mathbf{\frac{5}{8} = 0.625}$

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO
206 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2019

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & - & az & = & -1 \\ x & + & y & + & z & = & a \end{array}\right.$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 2$.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

A.2: a) **[1,5 p.]** Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{e^x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$. Determine también los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

A.3: Considere la recta $r: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1}$ y el plano $\pi: x - 2y - z = -1$.

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) **[1,5 p.]** En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

A.4: (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

La probabilidad de que una flecha dé en la diana es 0,40. Si se lanzan 9 flechas, determine:

a) **[1 p.]** Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de flechas que dan en la diana.

b) **[0,5 p.]** Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **[1 p.]** Cuál es la probabilidad de que al menos 5 flechas den en la diana.

OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

- CUESTIÓN B.1:

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.

b) Para $a = 1$, calcule la inversa de A.

c) Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $XA + 2I = 2A$, donde I es la matriz identidad 3×3.

- CUESTIÓN B.2:

a) Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

b) Determine la primitiva de $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto $(1, 2)$.

c) Calcule el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}$

- CUESTIÓN B.3:

Los puntos $A = (0, -1, 1)$ y $B = (1, 1, 1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice C está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi : 2x - y + z = 1$.

a) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano π.

b) Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

- CUESTIÓN B.4:

(En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

El 60 % de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25 % en Madrid, y el resto en Lisboa. El 1 % de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa estos porcentajes son del 0'5 % y del 2 %, respectivamente.

a) Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

b) Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓN A

Problema A.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax+y-2z=0} \\ \boldsymbol{x+y-az=-1} \\ \boldsymbol{x+y+z=a} \end{cases}$$

a) Determine para qué valores a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 2$.

b) Determine para qué valor de *a* el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor de *a* el sistema no tiene solución.

Solución:

a) Escribimos la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix},$$

por comodidad para los cálculos escribimos la tercera fila como primera fila

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -a & -1 \end{pmatrix},$$

operamos, $-aF_1 + F_2$ y $-F_1 + F_3$ obtenemos,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & -2-a & -a^2 \\ 0 & 0 & -1-a & -1-a \end{pmatrix},$$

los elementos de la diagonal principal se hacen 0 para los valores de $a = 1$ y $a = -1$, por tanto:

Para $\boldsymbol{a \neq 1}$ y $\boldsymbol{a \neq -1}$, el rango de la matriz de coeficientes es 3, igual al rango de la ampliada y al número de incógnitas, luego el sistema es **Compatible Determinado**, es decir, tiene solución única.

Para $\boldsymbol{a = 2}$, la matriz queda,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

resolviendo obtenemos la solución:

$$x = \mathbf{1},\ y = \mathbf{0},\ z = \mathbf{1}$$

El sistema tiene solución única si $\boldsymbol{a \neq 1}$ y $\boldsymbol{a \neq -1}$. Para $\boldsymbol{a = 2}$, $\boldsymbol{x = 1,\ y = 0,\ z = 1.}$

b) Estudiamos los casos restantes, a = 1 y a = –1.

Para a = –1, la matriz queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el rango de la matriz de coeficientes es 2, igual al rango de la matriz ampliada y menor que el número de incógnitas, por tanto,

Para a **= –1**, el sistema es **Compatible Indeterminado**, es decir, tiene infinitas soluciones, para resolver el sistema, lo escribimos, $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2y-z=-1 \end{cases}$, haciendo $z = \lambda$ y pasando al otro miembro,

$$\begin{cases} x+y=-1-\lambda \\ 2y=-1+\lambda \end{cases},$$

resolviendo, $\boldsymbol{z = \lambda,\ y = \frac{\lambda-1}{2},\ x = \frac{-3\lambda-1}{2}}$

Para $\boldsymbol{a} = -1$, el sistema es **Compatible Indeterminado**, de solución: $\boldsymbol{x = \frac{-3\lambda-1}{2}}$, $\boldsymbol{y = \frac{\lambda-1}{2}}$, $z = \lambda$

c) Para a = 1, la matriz queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

calculamos el valor del determinante, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 6-2=4 \neq 0$ por tanto,

Para a **= 1**, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada es 3, luego el sistema es Incompatible, es decir, **no tiene solución**.

El sistema no tiene solución para $\boldsymbol{a}$ **= 1.**

Problema A.2:

a) Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $\boldsymbol{f(x)} = \frac{x^2+2x}{e^x}$, definida para todo valor de x, $x \in \mathbb{R}$. Determine también los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$

Solución:

a) Calculamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento y de ahí podemos obtener los extremos.

$$f'(x) = \frac{(2x+2)e^x - e^x\cdot(x^2+2x)}{(e^x)^2} = \frac{-x^2+2}{e^x}$$

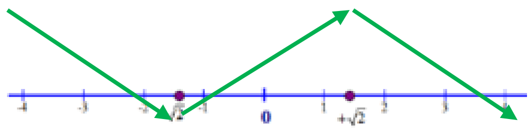
$$-x^2+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{2},\ x=-\sqrt{2},$$

tomamos valores de los intervalos formados y sustituimos en la función derivada,

$$f'(-10) = \frac{-(-10)^2+2}{e^{-10}} < 0 \Rightarrow \text{Decreciente}$$

$$f'(0) = \frac{-(0)^2+2}{e^0} > 0 \Rightarrow \text{Creciente}$$

$$f'(10) = \frac{-(10)^2+2}{e^{10}} < 0 \Rightarrow \text{Decreciente}$$



Es decir, f es:

Decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ y creciente en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Por tanto,

Hay un **mínimo relativo en** $x=-\sqrt{2}$ y un **máximo relativo en** $x=\sqrt{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{e^0-1}\right) = \infty - \infty$, indeterminación, operamos,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x\cdot(e^x-1)}\right) = \frac{0}{0} \text{ indeterminación;}$$

por L'Hôpital, derivamos numerador y denominador,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x\cdot(e^x-1)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{1\cdot(e^x-1)+x\cdot e^x}\right) = \frac{0}{0}$$

indeterminación; por L'Hôpital, derivamos numerador y denominador,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{(e^x-1)+x\cdot e^x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{e^x+1\cdot e^x+x\cdot e^x}\right) = \frac{e^0}{e^0+e^0+0\cdot e^0} = \frac{1}{1+1+0} = \frac{1}{2} \text{ por tanto,}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \frac{1}{2}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.3:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Considere la recta $\boldsymbol{r}: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ y el plano $\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{x - 2y - z = -1}$

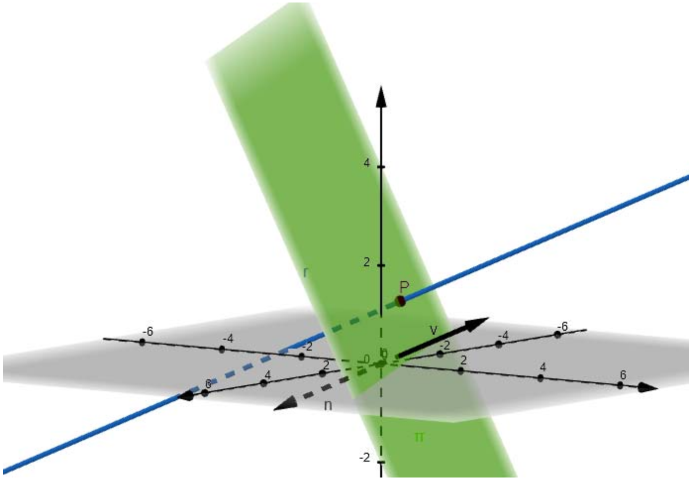
a) **E**studie la posición relativa de la recta $\boldsymbol{r}$ y el plano $\boldsymbol{\pi}$.

b) En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

Solución:

a) Consideramos el vector director de la recta, $\vec{v} = (-1, 2, 1)$

y el vector normal al plano, $\vec{n} = (1, -2, -1)$, vemos que son proporcionales, luego la recta y el plano son **perpendiculares** y por tanto la recta $\boldsymbol{r}$ y el plano $\boldsymbol{\pi}$ se cortan en un punto.



La recta $\boldsymbol{r}$ y el plano $\boldsymbol{\pi}$ **se cortan en un punto**.

b) Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta y sustituimos en la ecuación del plano:

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow (-1 - t) - 2(-3 + 2t) - t = -1 \Rightarrow -6t = -6 \Rightarrow t = 1,$$

sustituyendo en las ecuaciones paramétricas de la recta, tenemos,

$$x = -2, y = -1, z = 1.$$

La recta y el plano se cortan en el punto $\boldsymbol{P}$**(–2, –1, 1)**

Al ser perpendiculares,

El ángulo formado por la recta y el plano es de 90º.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.4:

(En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

La probabilidad de que una flecha dé en la diana es 0.40. Si se lanzan 9 flechas, determine:

a) Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de flechas que dan en la diana.

b) Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución.

c) Cuál es la probabilidad de que al menos 5 flechas den en la diana.

Solución:

Llamamos $X \equiv$ Acertar la flecha en la diana, $P(X) = 0.40$.

a) Si $p = P(X) = 0.40$, $q = 1 - p = 1 - 0.40 = 0.60$, $n = 9$.

Se trata de una variable aleatoria que sigue una distribución binomial,

$$\mathrm{X} \equiv \mathrm{B}(9, 0.40)$$

b) Media = μ = $n \cdot p$ = 9·0.40 = 3.6,

Desviación típica = $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{9 \cdot 0.40 \cdot 0.60} = \sqrt{2.16} = 1.4697.$

Media = μ = 3.6, Desviación típica = $\boldsymbol{\sigma = 1.4697.}$

c) $\boldsymbol{P(X \geq 5)} = P(X{=}5) + P(X{=}6) + P(X{=}7) + P(X{=}8) + P(X{=}9) =$

buscando cada valor en la tabla o aplicando la fórmula

$$P(x{=}k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ siendo } X \equiv B(n, p)$$

= 0.1672 + 0.0743 + 0.0212 + 0.0035 + 0.0003 = **0.2665.**

$\boldsymbol{P(X \geq 5) = 0.2665.}$

OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.
b) Para $a = 1$, calcule la inversa de A.
c) Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + 2 \cdot I = 2 \cdot A$, donde I es la matriz identidad 3x3.

Solución:

a) La matriz inversa existe si es una matriz cuadrada y el valor de su determinante es distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + a^2 - a = a^2 - a - 1\,,$$

igualamos a 0 y resolvemos,

$a^2 - a - 1 = 0$, obtenemos, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, por tanto,

si $\boldsymbol{a} \neq \frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$ y $\boldsymbol{a} \neq \frac{\mathbf{1-\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$, el valor del determinante de $\boldsymbol{A}$ es distinto de 0 y $\boldsymbol{A}$ tiene inversa.

b) Para $a = 1$, la matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante vale: $1^2 - 1 - 1 = -1$ distinto de 0.

$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, de donde,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

c) $X \cdot A + 2 \cdot I = 2 \cdot A \Rightarrow X \cdot A = 2 \cdot A - 2 \cdot I \Rightarrow X = (2 \cdot A - 2 \cdot I) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = 2 \cdot A \cdot A^{-1} - 2 \cdot I \cdot A^{-1} \Rightarrow$

$X = 2 \cdot I - 2 \cdot A^{-1}$, de donde,

$$\boldsymbol{X} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.2:

a) Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

b) Determine la primitiva de $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto (1, 2)

c) Calcule el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}$

Solución:

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$,

por cambio de variable, hacemos $x = t^2$ derivando, $dx = 2tdt$, sustituimos,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \int \frac{\sqrt{t^2}}{1+t^2} 2tdt = \int \frac{t}{1+t^2} 2tdt = 2\int \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

haciendo la división, $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 + \frac{-1}{1+t^2}$, sustituyendo,

$$2\int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 2\int \left(1 + \frac{-1}{1+t^2}\right) dt = 2\int dt - 2\int \frac{1}{1+t^2} dt = 2t - 2arctgt + C$$

Deshaciendo el cambio, $\Rightarrow t = \sqrt{x}$, de donde,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \boldsymbol{2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + C}$$

b) Buscamos C de manera que $F(1) = 2$, siendo $F(x) = 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + C$.

$F(1) = 2\sqrt{1} - 2arctg\sqrt{1} + C = 2 - 2arctg1 + C = 2 \Rightarrow 2 - 2\frac{\pi}{4} + C = 2$, $C = \frac{\pi}{2}$,

La primitiva es $\boldsymbol{F(x) = 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + \frac{\pi}{2}}$.

c) $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = 0}$, pues el exponente de la x del numerador es menor que el del denominador,

También lo podemos resolver de la siguiente forma, $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = \frac{\infty}{\infty}$, indeterminación, por L'Hôpital, derivamos el numerador y el denominador $lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = 0$.

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} = 0}$$

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.3:

Los puntos A = (0, –1, 1) y B = (1, 1, 1) son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice C está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano π: $2x - y + z = 1$.

a) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano π.

b) Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Solución:

a) Como la recta pedida es perpendicular al plano tomamos como vector director de la misma el vector normal del plano: $\vec{n} = (2, -1, 1)$, con el punto B = (1, 1, 1), podemos escribir las ecuaciones paramétricas de la recta r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ y la ecuación continua $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

Ecuaciones de la recta r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ y $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

b) El área de un triángulo de vértices A, B y C es: $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC}\right\|$

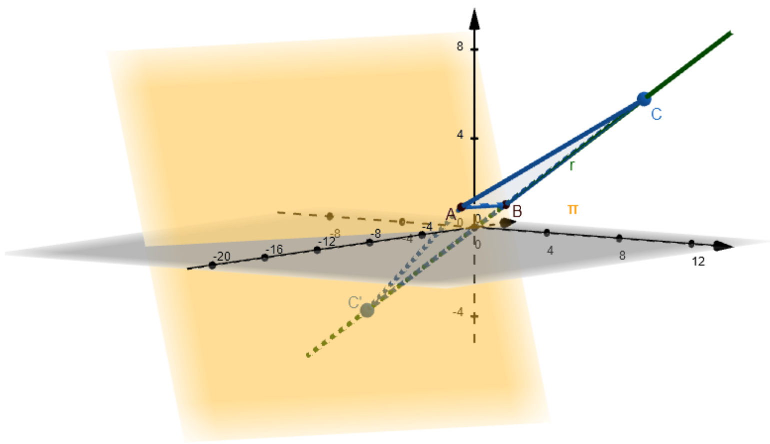
$\overrightarrow{AB} = (1, 2, 0)$, como C = (1 + 2t, 1 – t, 1 + t), $\overrightarrow{AC}$ = (1 + 2t, 2 – t, t)

$$\overrightarrow{AB} \text{x} \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 + 2t & 2 - t & t \end{vmatrix} = 2ti - tj - 5tk \quad \Rightarrow \overrightarrow{AB} \text{x} \overrightarrow{AC} = (2t, -t, -5t)$$

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \text{x} \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{(2t)^2 + (-t)^2 + (-5t)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{30t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{30} \cdot |t|,$$

como el área es $3\sqrt{30}$, igualamos, $\frac{1}{2}\sqrt{30} \cdot |t| = 3\sqrt{30}$, de donde, t = 6 o t = –6 por tanto

C = (13, –5, 7) o C = (–11, 7, –5)



Problema B.4:

(En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal)

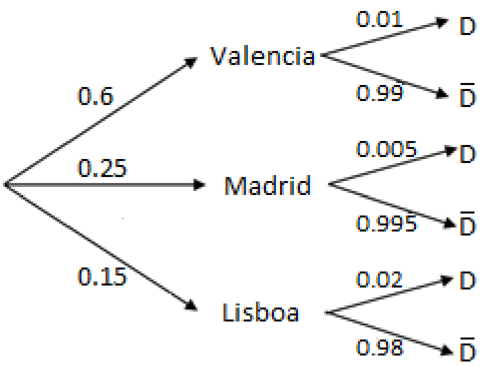
El 60% de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25% en Madrid y el resto en Lisboa. El 1% de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa estos porcentajes son del 0.5% y del 2% respectivamente.

a) Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

b) Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?

Solución:

Realizamos el diagrama de árbol:



a) Por el teorema de la probabilidad total:

$P(\overline{D}) = P(V \cap \overline{D}) + P(M \cap \overline{D}) + P(L \cap \overline{D}) =$

$P(V) \cdot P(\overline{D}/V) + P(M) \cdot P(\overline{D}/M) + P(L) \cdot P(\overline{D}/L) =$

0.6 · 0.99 + 0.25 · 0.995 + 0.15 · 098 = 0.9897, es decir,

$$P(\overline{D}) = 0.9897$$

b) Por el teorema de Bayes:

$P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{P(M) \cdot P(D/M)}{P(D)}$,

como $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0.9897 = 0.0103$,

$\frac{P(M) \cdot P(D/M)}{P(D)} = \frac{0.25 \cdot 0.005}{0.0103} = 0.1220$, es decir,

$$P(M/D) = 0.1220.$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Navarra

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2018-2019

ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS II**

Realiza una de las dos opciones, A o B.

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ (-a-2)x + 2y + (a^2-a)z = 3a-1 \\ (a+2)x - 2y + (2-2a)z = -2a \end{cases}$$

(3 puntos)

A2) Dadas las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$$

calcula la ecuación de un plano π paralelo a la recta r y que diste de s 3 unidades.

(2 puntos)

A3) Calcula la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado:

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}} \qquad \text{(1 punto)}$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} \qquad \text{(1 punto)}$$

A4) Demuestra que existe $\alpha \in (-1,3)$ tal que $f'(\alpha) = -\frac{1}{4}$, siendo

$$f(x) = \left[x^2 + \log\left(x^2 - 2x + 7\right)\right]^{\sqrt[3]{\frac{2-x}{4}}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(3 puntos)

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2018-2019

ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS II**

Realiza una de las dos opciones, A o B.

OPCIÓN B

B1) Resuleve la ecuación matricial $X \cdot A^{35} = A^{25}$ teniendo en cuenta que A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) $P \equiv (1,-1,1)$, $Q \equiv (5,-3,5)$ y $R \equiv (7,-7,1)$ son tres vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo.

(3 puntos)

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f(\alpha) = 0$, siendo

$$f(x) = \frac{\ln\left[x - 1 + \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]}{4x - x^2}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = \dfrac{2}{x-2}$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(3 puntos)

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

upna

Evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad
Batxilergoaren ebaluazioa unibertsitatean sartzeko

CURSO / IKASTURTEA: 2018 - 2019

ASIGNATURA / *IRAKASGAIA*: **Matemáticas II /Matematika II**

Criterios de calificación y corrección / *Zalifikatzeko eta uzentzeko irizpideak*

Criterios generales

La duración de la prueba es de 90 minutos. Se calificará de 0 a 10 puntos, redondeando a cuartos de punto.

- Se debe responder exclusivamente a las preguntas de una de las dos opciones (A o B). Si alguien responde a cuestiones de las dos opciones, la nota final será **la peor** de las dos puntuaciones obtenidas.

- Se tendrá en cuenta el planteamiento seguido para la resolución del problema y la claridad en la exposición. Si es pertinente, se valorará la referencia a los resultados teóricos usados.

- Para la penalización de los errores en los cálculos, se tendrá en cuenta:
  - si son consecuencia de no haber seguido el procedimiento más adecuado.
  - si reflejan fallos de concepto.
  - si producen simplificaciones relevantes.
  - si ocurren con reiteración.

Criterios específicos

A1) Se valorará con 2 puntos la discusión completa, 0,5 puntos la solución del caso compatible determinado y 0,5 puntos la del caso compatible indeterminado.

A4) Se valorará sobre 1 punto la mención justificada del teorema utilizado, haciendo referencia al cumplimiento de las hipótesis requeridas, y sobre 2 puntos los cálculos y la argumentación usados para su aplicación en la demostración de la existencia del punto pedido.

B2) Se puede obtener la máxima puntuación aunque se halle sólo uno de los dos centros posibles.

B3) Se valorará sobre 1 punto la mención justificada del teorema utilizado, haciendo referencia al cumplimiento de las hipótesis requeridas, y sobre 1 punto los cálculos y la argumentación usados para su aplicación en la demostración de la existencia del punto pedido.

B4) Se valorará con 0.5 puntos la obtención de los puntos de corte, con 0,5 puntos el dibujo de la gráfica (aunque no sea muy detallado) y con 2 puntos el cálculo del área. Si la resolución es correcta, se puede obtener la puntuación máxima aunque no se incluya el dibujo.

PRUEBA A

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ (-a-2)x + 2y + (a^2-a)z = 3a-1 \\ (a+2)x - 2y + (2-2a)z = -2a \end{cases}$$

(3 puntos)

Solución:

Escribimos la matriz de los coeficientes: $C = \begin{pmatrix} a+2 & -1 & -a \\ -a-2 & 2 & a^2-a \\ a+2 & -2 & 2-2a \end{pmatrix}$

$|C| = \begin{vmatrix} a+2 & -1 & -a \\ -a-2 & 2 & a^2-a \\ a+2 & -2 & 2-2a \end{vmatrix}$, $|C| = 0 \Leftrightarrow -a^3+3a-2 = 0 \Leftrightarrow a = 2,\ a = 1,\ a = -2$

Si $a \neq 1$, $a \neq 2$ y $a \neq -2$, $Rg(C)$ = 3, por tanto, $Rg(C)$ = 3 = nº incógnitas, luego es un **Sistema Compatible Determinado.**

Lo resolvemos por Gauss:

$$\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ y + a(a-2)z = 2a-1 \\ (a-1)(a-2)z = a-1 \end{cases}$$

Obtenemos $\begin{cases} z = \frac{a-1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2} \\ y = 2a-1-a(a-2)\frac{1}{a-2} = a-1 \\ (a+2)x = -1+a-1-\frac{a}{a-2} \rightarrow x = \frac{2}{a^2-4} \end{cases}$ Por tanto,

$\boldsymbol{x} = \frac{2}{a^2-4}$, $\boldsymbol{y} = a-1$, $\boldsymbol{z} = \frac{1}{a-2}$

Si ***a* = –2** el sistema queda $\begin{cases} -y+2z = 2 \\ y+8z = -5 \\ 12z = -3 \end{cases}$, sumando las dos primeras filas obtenemos

$\begin{cases} -y+2z = 2 \\ 10z = -3 \\ 12z = -3 \end{cases}$, el sistema es **Incompatible**.

Si ***a* = 1** el sistema queda $\begin{cases} 3x-y-z = -1 \\ y-z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$, es **compatible indeterminado**, obtenemos $\begin{cases} x = 2/3(z) \\ y = 1+z \\ z = z \end{cases}$

Si ***a* = 2** el sistema queda $\begin{cases} 4x-y-2z = -2 \\ y = 3 \\ 0 = 1 \end{cases}$, es **Incompatible.**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.2:

A2) Dadas las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad y \quad s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$$

calcula la ecuación de un plano π paralelo a la recta r y que diste de s 3 unidades.

(2 puntos)

Solución:

El plano π al ser paralelo a $\boldsymbol{r}$, tendrá como vector de orientación del plano el vector director de $\boldsymbol{r}$ $\vec{\boldsymbol{u}}$. Para que diste de la recta $\boldsymbol{s}$ 3 unidades también debe ser paralelo a $\boldsymbol{s}$, ya que ni lo corta ni es coincidente, y tener como vector de orientación el vector director de s $\vec{\boldsymbol{v}}$.

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k} \quad ; \quad \vec{v} = (1, 2, 2)$$

El vector ortogonal al plano π es, por tanto: $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 8\vec{k}$

Luego la ecuación del plano es: π: $2x + y - 2z + D = 0$

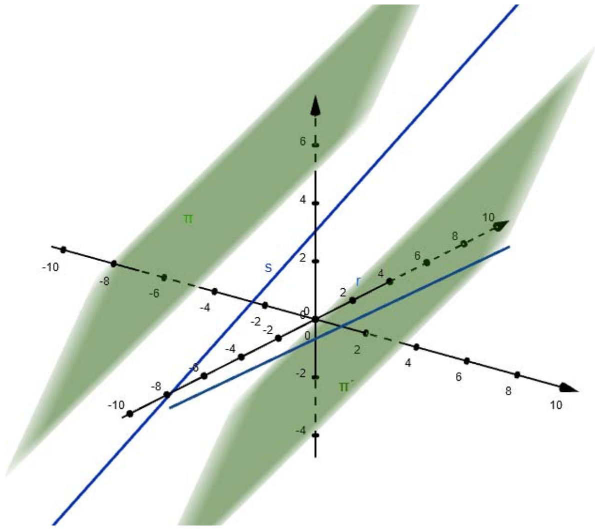
Imponemos que diste de la recta s 3 unidades, para lo que buscamos un punto de s: $P(-2, 1, 1)$.

$$d(\pi, s) = d(P, \pi) = 3 = \frac{|2(-2) + 1 - 2(1) + D|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|-5 + D|}{3} \rightarrow 9 = |-5 + D| \rightarrow 5 - D = \pm 9 \rightarrow$$

$$D = -4, \; D = 14.$$

La solución del ejercicio nos da dos planos:

$$\boldsymbol{\pi: 2x + y - 2z - 4 = 0, \quad \pi': 2x + y - 2z + 14 = 0.}$$



CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.3:

A3) Calcula la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado:

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}} \qquad \text{(1 punto)}$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} \qquad \text{(1 punto)}$$

Solución:

Trabajamos con la función $\boldsymbol{f(x)}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}ln\frac{1-cos2x}{sen\ 2x} = \frac{1}{2}(ln(1-cos2x) - \ ln(sen\ 2x))$$

Derivamos:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2sen\ 2x}{1-cos\ 2x} - \frac{2cos\ 2x}{sen\ 2x}\right) = \frac{sen\ 2x}{1-cos\ 2x} - \frac{cos\ 2x}{sen\ 2x} = \frac{sen^2 2x - cos\ 2x + cos^2 2x}{(1-cos\ 2x)\ sen\ 2x} = \frac{1-cos\ 2x}{(1-cos\ 2x)\ sen\ 2x} = \frac{1}{sen\ 2x} = \ cosec\ 2x.$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{sen\ 2x} = \ cosec\ 2x.}$$

Trabajamos con la función $\boldsymbol{g(x)}$:

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x}$$

Utilizamos derivación logarítmica:

$$ln(g(x)) = ln\left(\frac{1}{x}\right)^{-x} = -x(ln\frac{1}{x}) = -x(ln\ 1 - \ ln\ x) = -x(-\ ln\ x) = \ xlnx$$

Derivamos:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = 1 \cdot ln\ x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\ x + \ 1$$

Por lo que:

$$\boldsymbol{g'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x}(ln\ x + \ 1) = x^x(ln\ x\ + \ 1)}$$

Problema A.4:

A4) Demuestra que existe $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = -\frac{1}{4}$, siendo

$$f(x) = \left[x^2 + \log\left(x^2 - 2x + 7\right)\right]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(3 puntos)

Solución:

El teorema de **Lagrange** o del **valor medio** dice: Si una función es:

Continua en $[a, b]$ y

Derivable en (a, b)

Entonces existe un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que

$$f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

La función es composición de funciones continuas y derivables en toda la recta real: polinómicas, logarítmica (que no se anula en ningún punto), raíz cúbica, exponencial… La parábola $y = x^2 - 2x + 7$ tiene su vértice en el punto (1, 6).

La función f es continua y derivable en todo R, ya que $x^2 - 2x + 7 > 1$.

Por lo que se verifica el teorema del valor medio o de Lagrange en el intervalo (–1, 3):

Existe un valor α en dicho intervalo, tal que:

$$f'(\alpha) = \frac{f(3) - f(-1)}{3-(-1)} = \frac{(9+log(9-6+7))^{\sqrt[3]{\frac{3-3}{4}}} - (1+log(1+2+7))^{\sqrt[3]{\frac{3-(-1)}{4}}})}{4} = \frac{(9+log(10))^0 - (1+log(10))^1)}{4} =$$

$$\frac{(10)^0 - (2)^1)}{4} = \frac{1-2}{4} = \frac{-1}{4}.$$

$$f'(\alpha) = \frac{-1}{4}.$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

PRUEBA B

Problema B.1:

B1) Resuleve la ecuación matricial $X \cdot A^{35} = A^{25}$ teniendo en cuenta que A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Solución:

Despejamos:

$$X \cdot A^{35} = A^{25} \rightarrow X = A^{25} \cdot A^{-35} = A^{-10}$$

Calculamos A^2 y A^3 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ y}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ por tanto}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I, \ luego \ A^2 = A^{-1} \text{ de donde } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos las potencias de A^{-1}: $A^{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{A};$

$$A^{-3} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I;$$

Por lo que:

$$X = A^{-10} = A^{-(3\cdot 3)-1} = I \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2:

P (1, –1, 1), Q (5, –3, 5) y R (7, –7, 1) son tres vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo. (3 puntos)

Solución:

Analizamos la posición de los puntos dados

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (5, -3, 5) - (1, -1, 1) = (4, -2, 4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\overrightarrow{QR} = R - Q = (7, -7, 1) - (5, -3, 5) = (2, -4, -4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (7, -7, 1) - (1, -1, 1) = (6, -6, 0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$$

Por lo que sabemos que P y R son vértices opuestos en la cara del plano π que contiene a los tres puntos.

Buscamos la ecuación de π: $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x-1) + 2(y+1) - (z-1) = 0 \Rightarrow$

$$\pi: 2x + 2y - z + 1 = 0.$$

Buscamos un vector $\overrightarrow{RS}$ perpendicular al plano, $(2\lambda, 2\lambda, -\lambda)$

y de módulo 6, $\sqrt{(2\lambda)^2 + (-2\lambda)^2 + (-\lambda)^2} = 6$, obtenemos $\lambda = 2$ y $\lambda = -2$, hay dos soluciones,

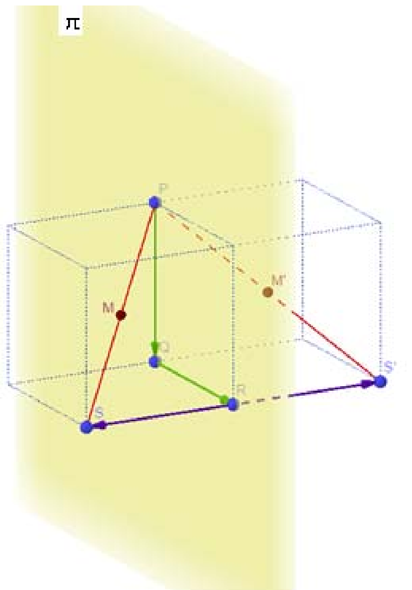
luego $\overrightarrow{RS} = (4, 4, -2) = S - R = (x, y, z) - (7, -7, 1)$, por lo que $S = (11, -3, -1)$.

El centro del cubo será el punto medio, M, entre P y S: $M = \left(\frac{1+11}{2}, \frac{-1-3}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = (6, -2, 0)$

También $\overrightarrow{RS'} = (-4, -4, 2) = S' - R = (x, y, z) - (7, -7, 1)$, por lo que $S' = (3, -11, 3)$

El centro del cubo será el punto medio, M', entre P y S': $M' = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1-11}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (2, -6, 2)$

M = (6, –2, 0) y M' = (2, –6, 2)



Problema B.3:

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f(\alpha) = 0$, siendo

$$f(x) = \frac{\ln\left[x - 1 + \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]}{4x - x^2}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

Solución: $\in$

Para probarlo vamos a utilizar el **teorema de Bolzano**.

El teorema de Bolzano dice:

Si una función f:

Es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y

Toma valores de signo contrario en los extremos, entonces

Existe al menos un punto del interior del intervalo, $\alpha \in (a, b)$, tal que $f(\alpha) = 0$.

En nuestro caso, $[a, b] = [1, 3]$.

La función tiene distinto signo en los extremos del intervalo:

$$f(1) = \frac{ln(1-1+sen^2\left(\frac{\pi\cdot 1}{4}\right))}{4\cdot 1-(1)^2} = \frac{ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{3} = \frac{ln1-ln2}{3} = \frac{-ln2}{3} < 0.$$

$$f(3) = \frac{ln(3-1+sen^2\left(\frac{\pi\cdot 3}{4}\right))}{4\cdot 3-(3)^2} = \frac{ln(2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2)}{3} > 0$$

La función es composición de funciones continuas en el intervalo [1, 3]:

El denominador es una función polinómica que se anula en $x = 0$ y en $x = 4$, que no pertenecen al intervalo.

La función seno es siempre continua y derivable.

La función logaritmo no está definida para el cero ni para valores negativos, pero:

$h(x) = x - 1 + sen^2\left(\frac{\pi\cdot x}{4}\right)$ es siempre positiva para $x > 1$.

Por tanto, la función $f(x)$ es continua en [1, 3] y tiene distinto signo en los extremos del intervalo, por lo que existe un valor $\alpha \in (1, 3)$, en el interior del intervalo, en el que se anula:

$$f(\alpha) = \frac{ln(\alpha-1+sen^2\left(\frac{\pi\cdot\alpha 3}{4}\right))}{4\cdot\alpha-(\alpha)^2} = 0$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.4:

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = \dfrac{2}{x-2}$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(3 puntos)

Solución:

Buscamos los puntos de intersección:

$$5 - x = \frac{2}{x-2} \rightarrow (5-x)\cdot(x-2) = 2 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow x = 3;\ x = 4.$$

La función $\boldsymbol{f}$ es una recta decreciente que corta al eje de ordenadas en $\boldsymbol{y} = 5$, y al eje de abscisas en $\boldsymbol{x} = 5$; $\boldsymbol{f}(3) = 2$; $\boldsymbol{f}(4) = 1$.

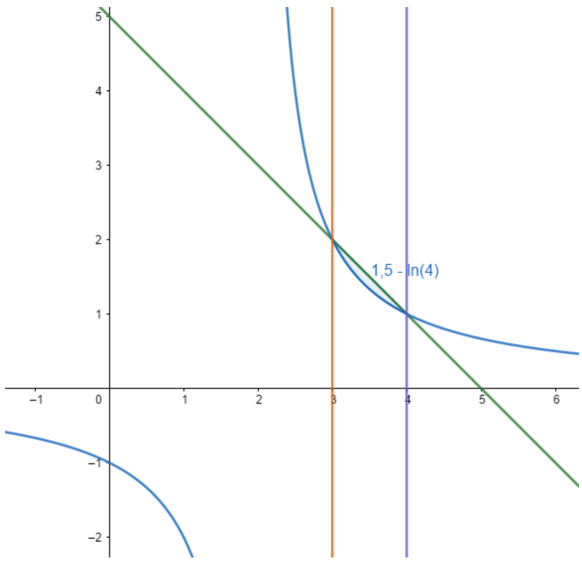
La función g es una hipérbola, $\boldsymbol{g}(0) = -1$.

Calculamos un valor del intervalo (3, 4); $\boldsymbol{x} = 7/2$, $\boldsymbol{f}(7/2) = 1.5 = 3/2$, $\boldsymbol{g}(7/2) = 4/3$. Por lo que la función $\boldsymbol{f}$ va por encima de la función $\boldsymbol{g}$.

El área pedida es, por tanto:

$$\int_3^4 (f-g)dx = \int_3^4 [(5-x) - \frac{2}{x-2}]dx = \int_3^4 (5 - x - \frac{2}{x-2})dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 2\,ln(x-2)\right]_3^4$$
$$= (20 - 8 - 2\,ln(2)) - (15 - (9/2) - ln(1)) = (3/2) - ln\,(4)$$

Área = $\boldsymbol{((3/2) - ln\,(4))\ u^2}$



CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

upna

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2018-2019

ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS II**

Realiza una de las dos opciones, A o B.

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x - y + (1-a)z = a+1 \\ (-a-1)x + (a+1)y + (a^2+a-2)z = -1 \\ (a+1)x - (a+1)y + (1-a^2)z = 0 \end{cases}$$

(3 puntos)

A2) Los puntos $A \equiv (2,-3,2)$ y $B \equiv (0,1,-2)$ determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta de ecuación $r \equiv \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$. Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo vale $18\,u^2$.

(2 puntos)

A3) Demuestra que existe $\alpha \in (1,e)$ tal que $f'(\alpha) = e+1$, siendo

$$f(x) = (x + e\,x - e)^{\frac{e}{x}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

A4) Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + \cos x$ y $g(x) = \dfrac{-2x^2}{\pi^2} + 2$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(3 puntos)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2018-2019

ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS II**

Realiza una de las dos opciones, A o B.

OPCIÓN B

B1) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B| = |A + B|$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que pasa por el punto $P = (1, -2, -1)$ y que corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x + y - z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

(3 puntos)

B3) Calcula el valor del parámetro real a para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(x^2 + 9\right) & x \le 1 \\ \dfrac{\cos \frac{\pi x}{2}}{a \cdot (1 - x)} & x > 1 \end{cases}$$

(2 puntos)

B4) Demuestra que la siguiente función tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1, 0)$:

$$f(x) = \cos(\pi x) \cdot \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

upna Evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad

CURSO: 2018 - 2019

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS II**

Criterios de calificación y corrección

Criterios generales

La duración de la prueba es de 90 minutos. Se calificará de 0 a 10 puntos, redondeando a cuartos de punto.

- Se debe responder exclusivamente a las preguntas de una de las dos opciones (A o B). Si alguien responde a cuestiones de las dos opciones, la nota final será **la peor** de las dos puntuaciones obtenidas.

- Se tendrá en cuenta el planteamiento seguido para la resolución del problema y la claridad en la exposición. Si es pertinente, se valorará la referencia a los resultados teóricos usados.

- Para la penalización de los errores en los cálculos, se tendrá en cuenta:
  - si son consecuencia de no haber seguido el procedimiento más adecuado.
  - si reflejan fallos de concepto.
  - si producen simplificaciones relevantes.
  - si ocurren con reiteración.

Criterios específicos

A1) Se valorará con 2 puntos la discusión completa, 0,5 puntos la solución del caso compatible determinado y 0,5 puntos la del caso compatible indeterminado.

A3) Se valorará sobre 1 punto la mención justificada del teorema utilizado, haciendo referencia al cumplimiento de las hipótesis requeridas, y sobre 1 punto los cálculos y la argumentación usados para su aplicación en la demostración de la existencia del punto pedido.

A4) Se valorará con 0.5 puntos la obtención de los puntos de corte, con 0,5 puntos el dibujo de la gráfica (aunque no sea muy detallado) y con 2 puntos el cálculo del área. Si la resolución es correcta, se puede obtener la puntuación máxima aunque no se incluya el dibujo.

B3) Se valorará sobre 1,25 puntos el estudio de la continuidad en x=1 y sobre 0,75 puntos en el resto de los valores de x.

B4) Se valorará sobre 1 punto la mención justificada del teorema utilizado, haciendo referencia al cumplimiento de las hipótesis requeridas, y sobre 2 puntos los cálculos y la argumentación usados para su aplicación en la demostración de la existencia del punto pedido.

OPCIÓN A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x - y + (1-a)z = a+1 \\ (-a-1)x + (a+1)y + (a^2+a-2)z = -1 \\ (a+1)x - (a+1)y + (1-a^2)z = 0 \end{cases}$$

(3 puntos)

Solución:

Escribimos la matriz de los coeficientes: $C = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -a-1 & a+1 & a^2+a-2 \\ a+1 & -(a+1) & 1-a^2 \end{pmatrix}$

$|C| = \begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -a-1 & a+1 & a^2+a-2 \\ a+1 & -(a+1) & 1-a^2 \end{vmatrix}$, $|C| = 0 \Leftrightarrow a = 0, a = 1, a = -1$

Si $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$, $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{-1}$, $Rg(C) = 3$, por tanto, $Rg(C) = 3 =$ nº incógnitas, luego es un **Sistema Compatible Determinado.**

Lo resolvemos por Gauss:

$$\begin{cases} (a+1)x - y + 1 - az \qquad = a+1 \\ ay + (a^2-1)z = a \\ (a-1)z = -1 \end{cases}$$

Obtenemos $\begin{cases} z = \frac{-1}{(a-1)} \\ ay = a - (a^2-1)\frac{-1}{a-1} = a + a + 1 \quad \rightarrow y = \frac{2a+1}{a} \\ (a+1)x = a + 1 + \frac{2a+1}{a} - 1 + a\frac{-1}{(a-1)} = \frac{(a+1)^2}{a} \rightarrow x = \frac{a+1}{a} \end{cases}$ Por tanto,

$$\boldsymbol{x = \frac{a+1}{a},\ y = \frac{2a+1}{a},\ z = \frac{-1}{(a-1)}}$$

Si $\boldsymbol{a = -1}$ el sistema queda $\begin{cases} -y + 2z = 0 \\ -y = -1 \\ -2z = -1 \end{cases}$, el sistema es **compatible indeterminado**, $\begin{cases} \boldsymbol{x = \lambda} \\ \boldsymbol{y = 1} \\ \boldsymbol{z = 1/2} \end{cases}$,

Si $\boldsymbol{a = 1}$ el sistema queda $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ y = 1 \\ 0 = -1 \end{cases}$, es **Incompatible**.

Si $\boldsymbol{a = 0}$ el sistema queda $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -z = 0 \\ -z = -1 \end{cases}$, es **Incompatible.**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.2:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

A2) Los puntos $A \equiv (2,-3,2)$ y $B \equiv (0,1,-2)$ determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta de ecuación $r \equiv \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$. Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo vale $18\,u^2$.

Solución:

Llamamos C al vértice buscado. Como debe estar en la recta r sus coordenadas son:

$$C = (3 + 2\lambda,\ 4 - \lambda,\ 4 - 2\lambda)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 1, -2) - (2, -3, 2) = (-2, 4, -4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

Por lo que la base del triángulo mide 6 u. Como el área mide 18 u^2, la altura debe medir 6 u. por lo que la distancia de C al punto medio, $M(1, -1, 0)$, entre A y B debe ser 6.

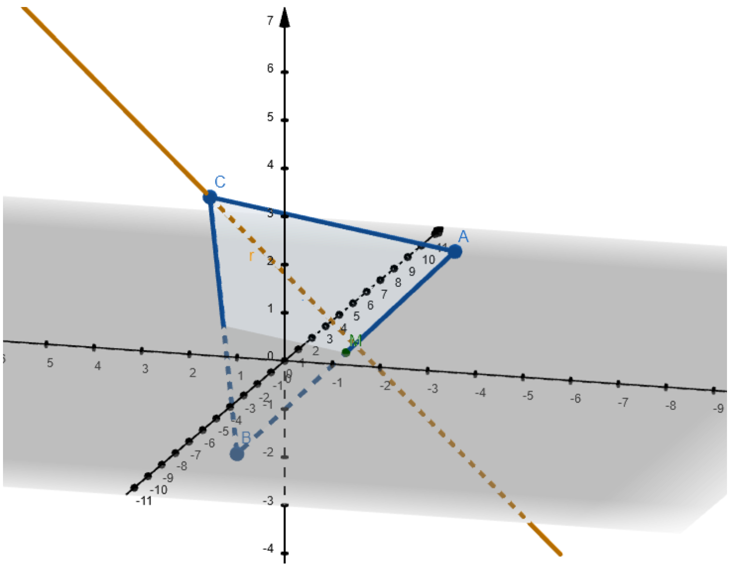
$$\mathrm{d}(C,M) = \left|\overrightarrow{CM}\right| = \sqrt{(3+2\lambda-1)^2 + (4-\lambda+1)^2 + (4-2\lambda)^2} = 6 \Rightarrow$$

$36 = 4 + 4\lambda^2 + 8\lambda + 25 + \lambda^2 - 10\lambda + 16 + 4\lambda^2 - 16\lambda = 45 - 18\lambda + 9\lambda^2 \Rightarrow 9\lambda^2 - 18\lambda + 9 = 0 \Rightarrow$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$, por lo que $\lambda = 1$ y $C = (5, 3, 2)$.

$C = (5, 3, 2)$

Ahora bien, estamos en el espacio, conviene cerciorarse que ese punto equidista de A y de B. Si hubiéramos calculado el plano que equidista de A y B, hubiéramos visto que contiene a la recta r, por lo que todos los puntos de r equidistan de A y B.



Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.3:

A3) Demuestra que existe $\alpha \in (1, e)$ tal que $f'(\alpha) = e + 1$, siendo

$$f(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

Solución:

El teorema de **Lagrange** o del **valor medio** dice: Si una función f es:

Continua en $[a, b]$

Derivable en (a, b)

Entonces existe un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que

$$f'(\alpha) = \frac{\boldsymbol{f(b)-f(a)}}{\boldsymbol{b-a}}.$$

La función es composición de funciones continuas y derivables en toda la recta real, excepto en x = 0, en que se anula el denominador del exponente: Es una función exponencial de base una función polinómica, y de exponente un cociente de polinomios que, como hemos dicho, se anula en x = 0.

Por tanto, la función es continua en [1, e]. Es derivable en (1, e).

Por lo que existe un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que

$$f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(e+e\cdot e-e)^1-(1+e-e)^e}{e-1} = \frac{e^2-1}{e-1} = e + 1.$$

$$\mathbf{f'(\alpha) = \boldsymbol{e} + 1.}$$

Problema A.4:

A4) Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + \cos x$ y $g(x) = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(3 puntos)

Solución:

Buscamos los puntos de intersección:

$$1 + \cos x = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2 \rightarrow \cos x = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 1 \rightarrow \boldsymbol{x = 0};\ \boldsymbol{x = \pi};\ \boldsymbol{x = -\pi}.$$

Las gráficas se cortan en $\boldsymbol{x = 0};\ \boldsymbol{x = \pi};\ \boldsymbol{x = -\pi}$.

Las raíces las hemos obtenido sin necesidad de cálculos.

Observamos la posición relativa de las dos funciones en $(-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{0})$, y $(0, \boldsymbol{\pi})$:

		f	g
$(-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{0})$	$-\boldsymbol{\pi}/\boldsymbol{2}$	1	3/2
$(0, \boldsymbol{\pi})$	$\boldsymbol{\pi}/\boldsymbol{2}$	1	3/2

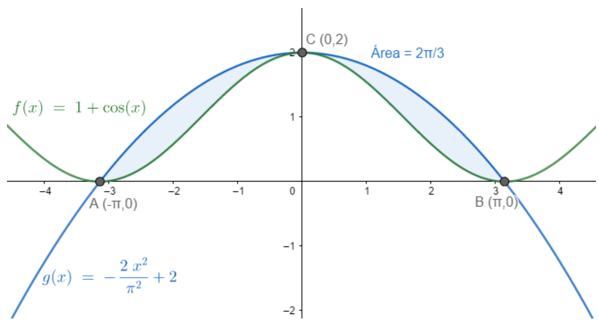
Ambas funciones son funciones pares.

El área pedida es, por tanto:

$$Área = 2\int_0^{\pi}(g - f)dx = 2\int_0^{\pi}\left[\frac{-2x^2}{\pi^2} + 2 - (1 + \cos x)\right]dx = 2\left[\frac{-2}{\pi^2}\frac{x^3}{3} + x - sen\, x\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\left[\left(\frac{-2}{\pi^2}\frac{\pi^3}{3} + \pi - sen\,\pi\right) - (0)\right] = 2\left[\frac{-2\pi}{3} + \pi\right] = \frac{2\pi}{3}$$

Área = $\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}\, u^2}$



OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

B1) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B| = |A + B|$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Solución:

$$|A \cdot B| = |A + B| \ \rightarrow |A| \cdot |B| = |A + B|$$

Calculamos:

$$|A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{vmatrix} = |A + B| = \begin{vmatrix} t & 0 & t-1 \\ t+a & 0 & 2t+1 \\ t+2 & 0 & t+2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(t \cdot (t+1) \cdot (t-1)) \cdot (t \cdot \begin{vmatrix} t & t+1 \\ t-1 & t+1 \end{vmatrix}) = t^2 \cdot (t+1)^2 \cdot (t-1) = 0,$$

por tanto, verifican la igualdad si $t = 0$, o si $t = 1$ o si $t = -1$.

$$\boldsymbol{t = 0, \qquad t = 1, \qquad t = -1}$$

Problema B.2:

B2) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que pasa por el punto $P = (1, -2, -1)$ y que corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x + y - z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

(3 puntos)

Solución:

De la recta t conocemos un punto P. Buscamos el plano π que contiene a r y a t, del que conocemos que pertenece al haz de plano que pasa por r.

$$\pi = \lambda(-x + y - z - 1) + \alpha(3y - 2z + 3) = 0$$

Imponemos que contenga al punto P:

$$\lambda(-1 - 2 + 1 - 1) + \alpha(-6 + 2 + 3) = 0 = \lambda(-3) + \alpha(-1) = 0$$

$$\lambda = 1,\ \alpha = -3 \Rightarrow \pi = 1(-x + y - z - 1) - 3(3y - 2z + 3) = -x - 8y + 5z - 10 = 0$$

Buscamos ahora un punto Q que sea la intersección del plano π con la recta s:

Por estar en s: $x = 3$, $1 - y = z + 1 \Rightarrow z = -y$. Imponemos que esté en π:

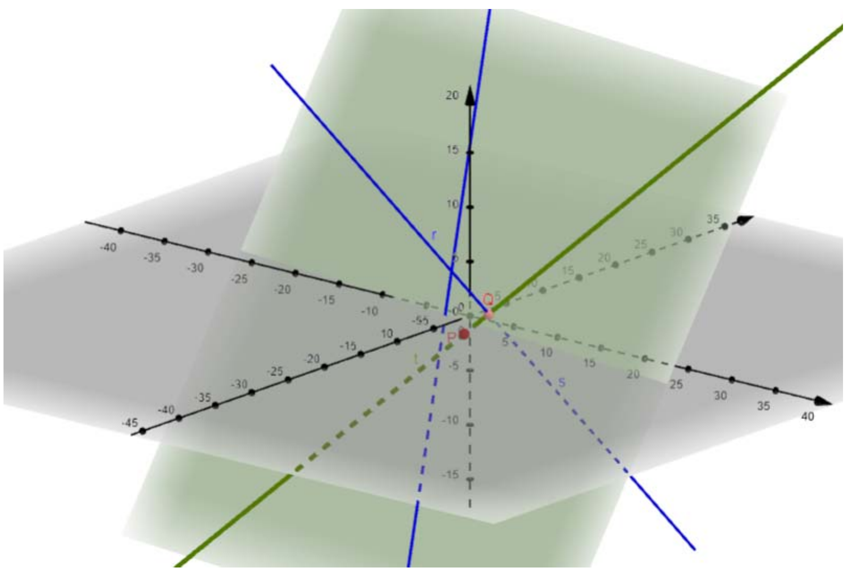
$-3 - 8y + 5(-y) - 10 = 0 = -13 - 13y \Rightarrow y = -1$, $z = 1$.

$$Q = (3, -1, 1)$$

La recta t pedida pasa por Q, pasa por P, luego tiene como vector de dirección:

$\overrightarrow{PQ}$ = Q – P = (3, –1, 1) – (1, –2, –1) = (2, 1, 2), luego la ecuación de t es: t = (3 + 2λ, –1 + λ, 1 + 2λ)

$$t = (3 + 2\lambda, -1 + \lambda, 1 + 2\lambda)$$



Problema B.3:

B3) Calcula el valor del parámetro real α para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2+9) & x \le 1 \\ \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\alpha\cdot(1-x)} & x > 1 \end{cases}$$

(2 puntos)

Solución:

La función $f(x)$ está definida en dos trozos.

En $(-\infty, 1)$, la función logaritmo es siempre continua pues $x^2 + 9$ es siempre mayor que cero.

En $(1, +\infty)$, la otra rama es cociente de dos funciones. El numerador es siempre una función continua. El denominador no lo es en $x = 1$.

Para que la función sea continua en $x = 1$, calculamos el valor de la función y los límites laterales:

$f(1) = log(1 + 9) = log\,10 = 1.$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} log(1 + 9) = log\,10 = 1.$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{cos\frac{\pi x}{2}}{\alpha(1-x)} = \frac{0}{0}$$

Tenemos una indeterminación. Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{cos\frac{\pi x}{2}}{\alpha(1-x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-\frac{\pi}{2}sen\frac{\pi x}{2}}{-\alpha} = \frac{-\pi}{2(-\alpha)} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

Imponemos que los dos límites laterales sean iguales, e iguales al valor de la función:

$$f(1) = 1 = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Por lo que α debe valer: $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{2}}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.4:

B4) Demuestra que la siguiente función tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1,0)$:

$$f(x) = \cos(\pi x) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

Solución:

Una función puede alcanzar un máximo (o un mínimo) relativo en los extremos del intervalo de definición o en los puntos en que se anule la derivada.

Analizamos la función dada. Es producto de dos funciones, la función coseno que es continua en toda la recta real, y la función logaritmo que sólo está definida para valores positivos: $x^2 - 3x + 2$ vale cero para $x = 2$ y $x = 1$. $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, y es negativa en (1, 2). En resumen, la función dada es continua en $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$, por lo tanto, es continua en el intervalo dado: (–1, 0).

Derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = (-\pi\ sen\ \pi x) \cdot ln(x^2 - 3x + 2) + cos\ \pi x \cdot \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} = 0$$

En el intervalo (–1, 0), $f'(x)$ verifica las condiciones del teorema de Bolzano:

a) Es continua, pues es composición y producto de funciones continuas. La función $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$ es continua es ese intervalo, (–1, 0), pues ya vimos que se anulaba fuera del intervalo, en 1 y en 2.

b) Tiene distinto signo en los extremos del intervalo:

$$f'(-1) = (-\pi\ sen\ (-\pi)) \cdot ln(1 + 3 + 2)\ +\ cos\ (-\pi) \cdot \frac{-2 - 3}{1 + 3 + 2} = 0 + \frac{(-1)(-5)}{6} = \frac{5}{6} > 0$$

$$f'(0) = (-\pi\ sen\ (0) \cdot ln(2)\ +\ cos(0) \cdot \frac{-3}{2} = 0 + \frac{-3}{2} = \frac{-3}{2} < 0$$

Luego existe al menos un valor $\alpha \in (-1, 0)$ donde se anula la derivada, por lo que es un posible máximo o mínimo.

Y es un máximo relativo ya que la derivada pasa en –1 de ser positiva a ser negativa en 0.

Utilizamos el teorema de Bolzano para probar que al menos existe un valor $\alpha \in (-1, 0)$ donde se anula la derivada, y por el signo en los extremos ese valor es un máximo relativo.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma del

País Vasco

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Alex Aginagalde

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	*EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
2019ko EKAINA	*JUNIO 2019*
MATEMATIKA II	***MATEMÁTICAS II***

OPCIÓN A

Problema A.1:

Discutir, en función de m, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m+3)x & +mx & +mz & = & m-1 \\ 3x & & +mz & = & m-2 \\ & -y & z & = & m-3 \end{cases}$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

Problema A.2:

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} 4x-3y+4z=1 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x-y+Az=0$

a) ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a r?
b) Encontrar el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0,0,0)$.

Problema A.3:

c) Dada la función $f(x)=x^2+64$ y el punto exterior a su grafica *P(6, 0)*, encontrar la recta o rectas tangente a *f* que pasen por P.

Problema A.4:

Calcula $\int xe^{-4x}dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

Problema A.5:

Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?
b) Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de pertenecer a la primera caja?

Autor: Alex Aginagalde
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2019ko EKAINA | *JUNIO 2019*

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***

OPCIÓN B

Problema B.1:

Dada la matriz $A(a)$

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular, razonadamente, el valor de a para que el determinante de $A(a)^2$ valga 4.

Problema B.2:

Se consideran los tres puntos $A(0,0,1)$, $B(1,1,1)$ y $C(-1,-1,2)$. ¿Están alineados? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo calcular el plano que los contiene.

Problema B.3:

Sea f la función $f(x) = x^2 e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivada de f. Hallar los máximos y mínimos de f.

Problema B.4:

Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y = x + 2$ y por la parábola $y = x^2$. Calcular su área.

Problema B.5:

Lanzamos un dado de seis caras 6 000 veces. Calcular la probabilidad de que el número de veces que salga el 5

- **a) sea superior a 1 500.**
- **b) esté comprendido entre 1 000 y 1 100.**

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares de cada uno de los problemas

OPCIÓN A

A.1.

- Cálculo del determinante de la matriz y discusión para los casos que no anulan el determinante $(0,75$ puntos$)$.
- Discusión en los casos de $m = 0$ y $m = 3$ $(0,75$ puntos$)$.
- Resolución para el caso $m = 3$ $(0,5$ puntos$)$.

A.2.

- Planteamiento del problema: obtención del vector director de la recta, vector normal al plano y el valor de A $(1$ punto$)$.
- Obtención del plano perpendicular a r y que pase por $(0,0,0)$ $(1$ punto$)$.

A.3.

- Obtención de la ecuación de las rectas que pasa por el punto $(6,0)$ y son tangentes a la parábola dada. $(1$ punto$)$.
- Obtención de las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola para $a = 16$ $(0,5$ puntos$)$ y $a = -4$ $(0,5$ puntos$)$.

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

Discutir, en función de m, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (m+3)x & +mx & +mz & = & m-1 \\ 3x & & +mz & = & m-2 \\ & -y & z & = & m-3 \end{cases}$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

Solución:

Escribimos el sistema en modo de ecuación matricial para obtener de esta forma obtener la matriz de coeficientes, que será la matriz con la que obtendremos los valores de m que nos servirán para la discusión del sistema.

$$\begin{bmatrix} m+3 & m & m \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m-1 \\ m-2 \\ m-3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} A = \begin{bmatrix} m+3 & m & m \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ A' = \begin{bmatrix} m+3 & m & m & m-1 \\ 3 & 0 & m & m-2 \\ 0 & -1 & 1 & m-3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes e igualamos a 0:

$$det(A) = \begin{vmatrix} m+3 & m & m \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(m+3)\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot m + 0\cdot m\cdot m] - [m\cdot 0\cdot 0 + (m+3)\cdot(-1)\cdot m + m\cdot 3\cdot 1] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [-3m] - [-(m+3)m + 3m] = 0 \Leftrightarrow -3m + m^2 + 3m - 3m = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3m + m^2 = 0 \Leftrightarrow m(m-3) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$$

Por tanto, cuando m =0 y $m = 3$ el determinante de la matriz de coeficientes es 0; lo cual hace que el rango de dicha matriz no sea 3. De manera que estudiaremos los tres casos posibles y utilizaremos el Teorema de Rouché-Frobenious para decidir qué tipo de sistema es cada uno:

- $0 \neq m \neq 3$

$$\left.\begin{matrix} \text{rango(A)} = 3 \text{ por ser } \det(\text{A}) \neq 0 \\ rango(A') = 3 \text{ por ser } rango(A) = 3 \\ n = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$(existe\ una\ unica\ solucion\ para\ cada\ m \neq \{0,3\}$$

- $m = 3$

o $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $rango(A) \geq 2$, pues L_3 y L_2 son linealmente independientes. Veamos por si L_1 se puede escribir como combinación líneal de L_3 y L_2

$$\left.\begin{matrix} 6 = 3\alpha \\ 3 = -\beta \\ 3 = 3\alpha + \beta \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \alpha = 2\ y\ \beta = -3$$ cual hace que el se cumpla la tercera ecuación. Por tanto, $rango(A) = 2$

- $A' = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ como $rango(A) = 2$, $rango(A') \geq 2$. Veamos que valor coge, para ello estudiaremos como en el caso de A, cual es la combinación lineal posible de L_1 con respecto a L_3 y L_2

$$\left.\begin{matrix} 6 = 3\alpha \\ 3 = -\beta \\ 3 = 3\alpha + \beta \\ 2 = \alpha \end{matrix}\right\} \Longrightarrow de\ las\ dos\ primeras\ ecuaciones\ \alpha = 2\ y\ \beta = -1$$ comprobando en la tercera y cuarta se ve que se cumple, por tanto, $rango(A') = 2$

Luego:

$$\left.\begin{matrix} \text{rango(A)} = 2 \\ rango(A') = 2 \\ n = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado (existen infinitas soluciones)}$$

- Resolución:

$$\begin{cases} 6x & +3x & +3z & = & 2 \\ 3x & & +3z & = & 1 \\ & -y & z & = & 0 \end{cases}$$

La segunda y tercera ecuaciones tienen en ambas la incógnita z, por tanto despejaremos en las dos las otras dos incógnitas, y llamaremos a $z = \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{matrix} \boldsymbol{x = \dfrac{1 - 3\lambda}{3}} \\ \boldsymbol{y = \lambda} \\ \boldsymbol{z = \lambda} \end{matrix} \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}}$$

- $m = 0$
  - $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $rango(A) = 2$ pues la primera y la segunda fila son idénticas pero la tercera es independiente a ellas.
  - $A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ $rango(A') = 3$ pues L_1 y L_2 son independientes y no hay manera de conseguir L_3 mediante combinación lineal de L_1 y L_2. $\left.\begin{matrix} 0 = 3\alpha + 3\beta \\ -1 = 0 \\ 1 = 0 \\ -3 = -\alpha - 2\beta \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ tenemos dos ecuaciones absurdas

Por tanto:

$$\left.\begin{matrix} \text{rango(A)} = 2 \\ rango(A') = 3 \\ n = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible (no existe solución posible)}$$

Problema A.2:

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - y + Az = 0$

d) ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a r?

e) Encontrar el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

Solución:

a) Primeramente obtendremos la información que nos aporta la recta r y el plano π:

- $\pi \Longrightarrow \begin{cases} \vec{n} = (1, -1, A) \\ P(0,0,0) \;\; no\ lo\ utilizaremos \end{cases}$
- $r \Longrightarrow \begin{Bmatrix} \vec{d}_1 = (4, -3, 4) \\ \vec{d}_2 = (3, -2, 1) \end{Bmatrix} \Longrightarrow \vec{d}_r = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-3i - 8k + 12j) - (-9k + 4j - 8i) =$

$$= (-3\hat{\imath} - 8\hat{k} + 12\hat{\jmath}) - (-9\hat{k} + 4\hat{\jmath} - 8\hat{\imath}) = 5\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} + \hat{k} \Longrightarrow \vec{d}_r = (5, 8, 1)$$

Para que el plano π sea paralelo a r, $\pi \parallel r$, se tiene que cumplir que $\vec{d}_r \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{d}_r \cdot \vec{n} = 0$.

$(5, 8, 1) \cdot (1, -1, A) = 0 \Leftrightarrow 5 - 8 + A = 0 \Leftrightarrow A = 3$

Por tanto, cuando $A = 3$ el plano π es paralelo a la recta r.

b) Para crear un plano necesitamos un punto y el vector normal al mismo.

- Como el plano que buscamos tiene que ser perpendicular a la recta r, el vector director de la recta r será el vector normal del plano: $\vec{d}_r = (5, 8, 1)$.

- Por otro lado, el punto por donde pasa el plano ya lo tenemos el punto $(0, 0, 0)$

$$5(x - 0) + 8(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 5x + 8y + z = 0$$

Por tanto, el plano buscado es: $5x + 8y + z = 0$

Problema A.3:

Dada la función $f(x) = x^2 + 64$ y el punto exterior a su grafica *P(6, 0)*, encontrar la recta o rectas tangente a *f* que pasen por P.

Solución:

La ecuación de una recta cualquiera viene dada por esta formula: $y = mx + n$ donde $m = f'(a)$ para un valor $x = a$, luego, $f'(a) = 2a$.

Para un valor $x = a$ tenemos que su imagen es el punto $(a, a^2 + 64)$.

Sustituyendo todo esto en la ecuación general de la recta tenemos que:

$$a^2 + 64 = 2a \cdot a + n$$

Además, sabemos que la(s) recta(s) que buscamos pasan por el punto $P(6, 0)$, por tanto, $0 = 2a \cdot 6 + n$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a^2 + 64 = 2a^2 + n \\ 0 = 12a + n \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 + 64 = 2a^2 - 12a \Leftrightarrow a^2 - 12a - 64 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64)}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64)}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{12 \pm 20}{2} = \begin{cases} a_1 = 16 \\ a_2 = -4 \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en la recta tangente general $y = 2ax - 12a$

Tenemos que, cuando:

$a = 16$, la recta tangente es $y = 32x - 192$

$a = -4$, la recta tangente es $y = -8x + 48$

Autor: Alex Aginagalde
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.4:

Calcula $\int xe^{-4x}dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

Solución:

Integraremos por partes, para ello llamaremos a $u = x$ pues de esta manera conseguiremos bajar un grado su potencia:

$$\int xe^{-4x}dx = \begin{Bmatrix} u = x & \to & du = 1dx \\ dv = e^{-4x}dx & \to & v = \dfrac{e^{-4x}}{-4} \end{Bmatrix} = x\frac{e^{-4x}}{-4} - \int \frac{e^{-4x}}{-4}1dx = -\frac{xe^{-4x}}{4} - \frac{1}{16}e^{-4x} + C =$$

$$\boxed{= -\frac{(4x+1)e^{-4x}}{16} + C}$$

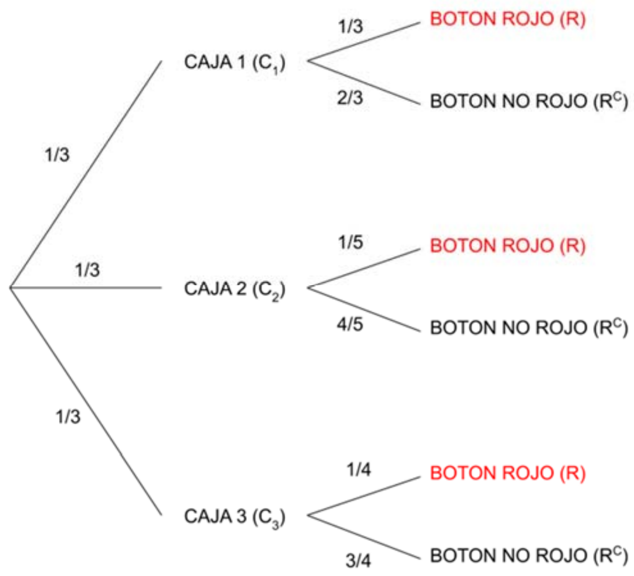
Problema A.5:

Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?
b) Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de pertenecer a la primera caja?

Solución:

Realizaros un diagrama de árbol para interpretar el problema y así poder responder adecuadamente las preguntas:



a) $P(R) = P(C_1)P(R|C_1) + P(C_2)P(R|C_2) + P(C_3)P(R|C_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{47}{180}$

Por tanto, la probabilidad de que el botón elegido sea rojo es de $47/180 \approx 0.26\hat{1} \Leftrightarrow 26.11\%$

b) Para calcular la probabilidad de que el botón sacado sea de la caja 1 sabiendo que es rojo se calcula utilizando el Teorema de Bayes:

$$P(C_1|R) = \frac{P(C_1)P(R|C_1)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{47}{180}} = \frac{20}{47}$$

Por tanto, la probabilidad de que el botón rojo sacado sea de la caja 1 es elegido sea rojo es de $20/47 \approx 0.4255 \Leftrightarrow 42.55\ \%$

SOLUCIONES OPCIÓN B

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema B.1:

Dada la matriz $\boldsymbol{A(a)}$

$$\boldsymbol{A(a)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Calcular, razonadamente, el valor de $\boldsymbol{a}$ para que el determinante de $\boldsymbol{A(a)^2}$ valga 4.

Solución:

Tenemos que calcular $A(a)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+a & a^2 & 0 \\ 3 & 1+a & 1 \end{pmatrix}$

Una vez tenemos el valor de la matriz calcularemos su determinante y lo igualamos a 4:

$$det(A(a)^2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+a & a^2 & 0 \\ 3 & 1+a & 1 \end{vmatrix} = a^2 = 4 \Longrightarrow a = \pm 2$$

Luego, a tiene que valer 2 y -2

Problema B.2:

Se consideran los tres puntos $A(0,0,1)$, $B(1,1,1)$ y $C(-1,-1,2)$. ¿Están alineados? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo calcular el plano que los contiene.

Solución:

Para ver si tres puntos están alineados hay que ver si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos.

Calculemos entonces dichos vectores:

- $\overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (0,0,1) = (1,1,0)$
- $\overrightarrow{AC} = (-1,-1,2) - (0,0,1) = (-1,-1,1)$

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos si son proporcionales, y se ve claramente que no lo son.

Por tanto, los tres puntos no están alineados.

Calculemos ahora el plano que contiene a dichos puntos.

Para definir un plano hay diferentes modos:

- Un vector normal y un punto
- Dos vectores no paralelos del plano y un punto

La segunda opción es la más fácil en este caso, pues ya tenemos los vectores ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$) y el punto (cualquiera de los puntos que se nos da, en nuestro caso elegiremos el punto A).

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 0 + 1\lambda + (-1)\mu \\ y = 0 + 1\lambda + (-1)\mu \\ z = 1 + 0\lambda + 1\mu \end{cases} \Leftrightarrow \pi \equiv \begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Por tanto, el plano que contiene a los tres puntos es: $\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Problema B.3:

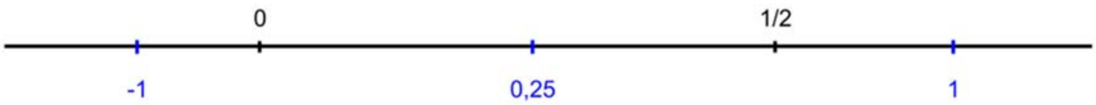
Sea f la función $f(x) = x^2e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivada de f. Hallar los máximos y mínimos de f.

Solución:

- $\boxed{f'(x)} = 2xe^{-4x} + x^2(-4e^{-4x}) = \boxed{e^{-4x}(2x - 4x^2)}$

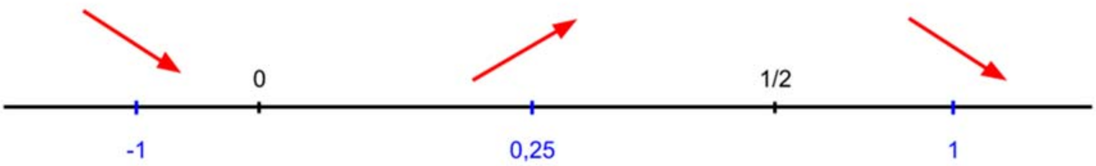
- $\boxed{f''(x)} = -4e^{-4x}(2x - 4x^2) + e^{-4x}(2 - 8x) = e^{-4x}(-8x + 16x^2 + 2 - 8x) =$
  $= \boxed{e^{-4x}(16x^2 - 16x + 2)}$

- Para calcular los máximos y mínimos hay que igualar a 0 la primera derivada
  $$e^{-4x}(2x - 4x^2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(1 - 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1/2 \end{cases}$$
  Representamos los valores en la recta real y estudiamos que ocurre en los intervalos que aparecen.



Calculamos los valores de la derivada en los puntos –1, 0.25 y 1

- $f'(-1) = e^4(-2 - 4) < 0$, por tanto, es decreciente
- $f'(0.25) = e^4(0.5 - 0.25) > 0$, por tanto, es creciente
- $f'(1) = e^{-4}(2 - 4) < 0$, por tanto, es decreciente.

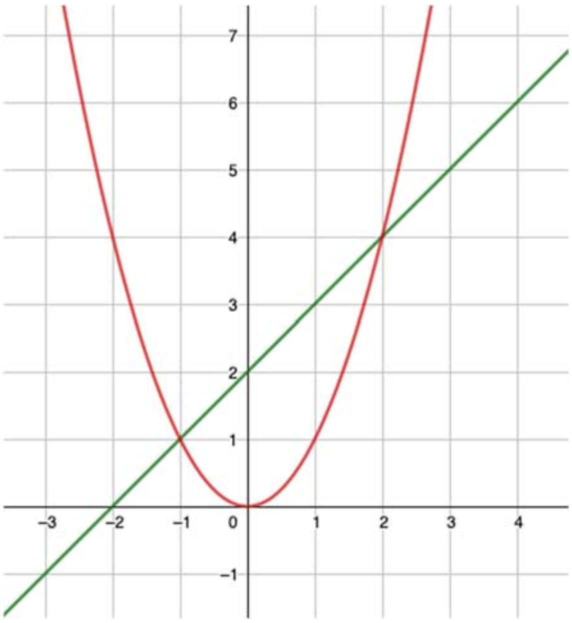


Luego hay un mínimo en $\mathbf{(0, 0)}$ y un máximo en $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4e^2}}\right)$

Problema B.4:

Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y = x + 2$ y por la parábola $y = x^2$. Calcular su área.

Solución:



Calcularemos los puntos de intersección de la recta con la parábola, resolviendo el siguiente sistema: $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases} \Longrightarrow x + 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$. Por tanto, los puntos son $(-1, 1)$ y $(2, 4)$

En el intervalo $[-1, 2]$, la recta esta por encima de la parábola, luego para calcular el área que encierran las dos funciones tenemos que calcular lo siguiente:

$$Área = \int_{-1}^{2} [(x+2) - x^2]dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{2} = \left[\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3}\right] - \left[\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right] =$$

$$= 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{9}{2}\ u^2}$$

$$Área = \boxed{\frac{9}{2}\ u^2}$$

Problema B.5:

Lanzamos un dado de seis caras 6 000 veces. Calcular la probabilidad de que el número de veces que salga el 5

c) sea superior a 1 500.
d) esté comprendido entre 1 000 y 1 100.

Solución:

Se trata de un ejercicio de distribución binomial, donde $\begin{cases} n = 6000 \\ p = 1/6 \\ q = 5/6 \end{cases}$

La distribución binomial se aproxima a la normal de la siguiente manera: $B(n, p) \approx N(np, \sqrt{npq})$.

Por tanto, en nuestro caso: $B(6000, 0.167) \approx N(1000, 28.86)$

a) $\boxed{P(x > 1500)} = P(x > 1500,5) = P\left(z > \frac{1500.5-1000}{28.86}\right) = P(z > 17.3) = \boxed{0}$

$$\boxed{P(x > 1500)} = \boxed{0}$$

b) $\boxed{P(1000 < x < 1100)} = P(1000.5 < x < 1099.5) = P\left(\frac{1000.5-1.000}{28.86} < z < \frac{1099.5-1000}{28.86}\right) =$
$= P(0.02 < z < 3.45) = \boxed{0.4917}$

$$\boxed{P(1000 < x < 1100)} = \boxed{0.4917}$$

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	*EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
2019ko UZTAILA	*JULIO 2019*
MATEMATIKA II	***MATEMÁTICAS II***

OPCIÓN A

Problema A.1:

Discutir, en función de los valores de m, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 6 \\ x & +y & -z & = & 1 \\ 2x & -2y & +mz & = & m \end{cases}$$

Problema A.2:

Hallar la ecuación de una recta paralela al plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$ y que contenga al punto $P(1, 0, 0)$. ¿Es única dicha recta? Razonar la respuesta.

Problema A.3:

Sea f la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

a) **Obtener los valores *A*, *B* y *C* para que su grafica contenga al punto $P(0, 1)$ y para que f tenga un mínimo local en $Q(2, 0)$**
b) **¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos locales?**

Problema A.4:

c) **Sea *R* el recinto del plano limitado por las curvas $y = x(3 - x)$ y por $y = x^2$. Dibujar *R* y calcular su área.**

Problema A.5:

Una caja tiene 3 monedas *R*, *L* y *M*. La moneda *R* es normal, la *L* tiene cara por los dos lados y la *M* esta trucada, de forma que la probabilidad de salir cara es 1/5. Se tira una moneda al azar.

a) **Calcula la probabilidad que se obtenga cara**
b) **Si ha sido cruz, ¿cuál es la probabilidad que sea la moneda *R*?**

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2019ko UZTAILA | JULIO 2019

MATEMATIKA II | MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

Problema B.1:

Dada una matriz de tamaño 3x3 cuyo determinante es igual 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:

a) Se cambian entre sí la primera y la segunda fila,
b) Se multiplica la tercera columna por -2,
c) Se multiplica a toda la matriz por 2 y
d) Se transpone la matriz

Calcular de forma razonada el valor del determinante de la matriz obtenida.

Problema B.2:

Se considera la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ y el punto $P(1,2,5)$ exterior a la misma. Hallar la ecuación del plano que contiene a r y a P.

Problema B.3:

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Representar f.

Problema B.4:

Calcular $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx$ explicando el método seguido para dicho calculo.

Problema B.5:

Los resultados obtenidos en una prueba realizada a 500 estudiantes se distribuyen normalmente con media 40 puntos y desviación típica 10 puntos.

a) ¿Qué porcentaje del alumnado tiene una puntuación entre 30 y 60 puntos?
b) ¿Cuántos estudiantes tienen una puntuación superior a 60 puntos?

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Discutir, en función de los valores de m, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 6 \\ x & +y & -z & = & 1 \\ 2x & -2y & +mz & = & m \end{cases}$$

Solución:

Escribimos el sistema en modo de ecuación matricial para de esta forma obtener la matriz de coeficientes, que será la matriz con la que obtendremos los valores de m que nos servirán para la discusión del sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ m \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & m \end{bmatrix} \\ A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & m & m \end{bmatrix} \end{cases}$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes y lo igualamos a 0:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [1 \cdot 1 \cdot m + 1 \cdot (-2) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 2] - [3 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot m + 1 \cdot (-2) \cdot (-1)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m - 6 - 4) - (6 + 2m + 2) = 0 \Leftrightarrow m - 6 - 4 - 6 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = -18$$

Por tanto, cuando $m = -18$ el determinante de la matriz de coeficientes es 0; lo cual hace que el rango de dicha matriz no sea 3. De manera que estudiaremos los casos posibles y utilizaremos el Teorema de Rouché-Frobenius para decidir que tipo de sistema es cada uno:

$$m \neq -18$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{rango(A)} = 3 \ \text{ por ser } \ \det(\text{A}) \neq 0 \\ rango(A') = 3 \ \text{ por ser } \ rango(A) = 3 \\ n = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$(existe\ una\ unica\ solucion\ para\ cada\ m \neq -18$$

- m = 18
  - $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -18 \end{bmatrix}$ L_1 y L_2 son independientes pues no son proporcionales, veamos si L_3 es combinación lineal de L_1 y L_2. $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha + \beta = -2 \\ 3\alpha - \beta = -18 \end{cases}$, despejamos α en la primera ecuación y la sustituimos en las otras dos:

$$\begin{cases} 2(2-\beta) + \beta = -2 \Leftrightarrow 4 - 2\beta + \beta = -2 \Leftrightarrow -\beta = -6 \Leftrightarrow \beta = 6 \\ 3(2-\beta) - \beta = -18 \Leftrightarrow 6 - 3\beta - \beta = -18 \Leftrightarrow -4\beta = -24 \Leftrightarrow \beta = 6 \end{cases}$$

    Como no hemos llegado a ninguna contradicción podemos asegurar que L_3 es combinación lineal de L_1 y L_2 ($L_3 = -4L_1 + 6L_2$), lo cual nos indica que $rango(A) = 2$.

  - $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -18 & -18 \end{bmatrix}$ como $rango(A) = 2$, $rango(A') \geq 2$. Se ve claramente que C_4 es igual a la suma de las demás columnas. Por tanto, $rango(A') = rango(A) = 2$
  - $n = 3$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{r} \text{rango}(A) = 2 \\ rango(A') = 2 \\ n = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Si m = 18, Sistema Compatible Indeterminado (hay infinitas soluciones)

Problema A.2:

Hallar la ecuación de una recta paralela al plano $\boldsymbol{\pi \equiv x + 2y + 3z = 6}$ y que contenga al punto $\boldsymbol{P(1, 0, 0)}$. ¿Es única dicha recta? Razonar la respuesta.

Solución:

Para definir la recta r que buscamos necesitamos un punto de la misma (en nuestro caso P) y un vector director ($\vec{d}_r$) de la recta. Dicho vector director será perpendicular a la normal del plano ($\vec{n} = (1, 2, 3)$).

De hecho, hay $\boxed{\textbf{infinitas posibles soluciones}}$ al problema, pues toda recta contenida en el plano paralelo a nuestro plano π y que pase por el punto P cumple las condiciones.

Busquemos un vector director $\vec{d}_r$ que sea perpendicular a $\vec{n}$. Por ejemplo, $\vec{d}_r = (-2, 10)$ nos vale, pues $\vec{d}_r \cdot \vec{n} = 0$. Luego la representación paramétrica de la recta que buscamos es la siguiente:

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}}$$

Autor: Alex Aginagalde
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.3:

Sea f la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

a) **Obtener los valores A, B y C para que su grafica contenga al punto $P(0,1)$ y para que f tenga un mínimo local en $Q(2,0)$**

b) **¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos locales?**

Solución:

Derivaremos la función pues la utilizaremos en ambos apartados: $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$

a) Traduciremos al lenguaje matemático las condiciones que nos imponen (necesitamos tres condiciones pues son tres las incógnitas que buscamos):

$$P(0,1) \in f \Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow 1 = C$$

$$Q(2,0) \text{ minimo local } \begin{cases} Q(2,0) \in f \Leftrightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow 0 = 8 + 4A + 2B + C \\ f'(2) = 0 \Leftrightarrow 0 = 3 \cdot 4 + 2A2 + B \end{cases}$$

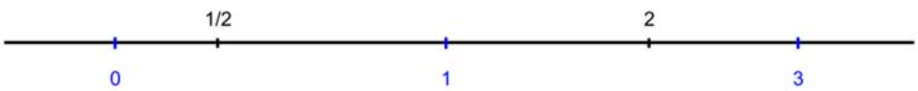
Por tanto, tenemos un sistema de tres incógnitas y tres ecuaciones: $\begin{cases} 1 = C \\ 0 = 8 + 4A + 2B + C \\ 0 = 12 + 4A + B \end{cases}$

Resolviendo el sistema llegamos a que: $\boxed{A = -15/4 \ ; \ B = 3 \ ; \ C = 1}$

b) Para calcular los máximos y mínimos de f, hay que igualar la derivada a 0.

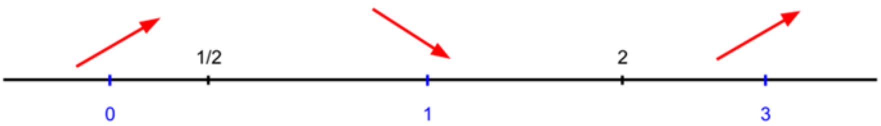
$$3x^2 - \frac{15}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15/2 \pm \sqrt{(-15/2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{\frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}}{6} = \frac{\frac{15}{2} \pm \frac{9}{2}}{6} = \frac{15 \pm 9}{12} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_1 = 1/2 \end{cases}$$

Representamos los valores en la recta real y estudiamos que ocurre en los intervalos que se aparecen.



Calculamos los valores de la derivada en los puntos 0, 1 y 3

- $f'(0) = 3 \cdot 0 - \frac{15}{2}0 + 3 = 3 > 0$, por tanto es creciente
- $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - \frac{15}{2}1 + 3 = -\frac{3}{2} < 0$, por tanto es decreciente
- $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - \frac{15}{2}3 + 3 = \frac{15}{2} > 0$, por tanto es creciente

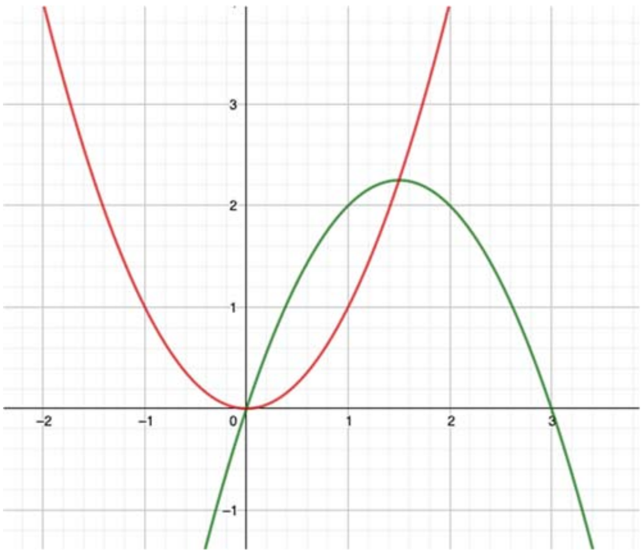


Luego hay un mínimo en $(2, 0)$ y un máximo en $(\frac{1}{2}, \frac{57}{16})$

Problema A.4:

Sea *R* el recinto del plano limitado por las curvas $y = x(3-x)$ y por $y = x^2$. Dibujar *R* y calcular su área.

Solución:



Calcularemos los puntos de intersección de una parábola con la otra parábola, resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = 3x - x^2 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow 3x - x^2 = x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 = x(2x-3) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3/2 \end{cases}.$$

Por tanto, los puntos son $(0,0)$ y $(3/2, 9/4)$.

En el intervalo $[0\,, 3/2]$, la parábola $y = x^2$ está por encima de la parábola $y = 3x - x^2$, luego para calcular el área que encierran las dos funciones tenemos que calcular lo siguiente:

$$\int_0^{3/2} [x^2 - (3x - x^2)]dx = \int_0^{3/2} (x^2 - 3x + x^2)dx = \int_0^{3/2} (2x^2 - 3x)dx =$$

$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C\Bigg]_0^{3/2} = \left(\frac{2(3/2)^3}{3} - \frac{3(3/2)^2}{2} + C\right) - \left(\frac{0}{3} - \frac{0}{2} + C\right) =$$

$$= \left[\frac{2(3/2)^3}{3} - \frac{3(3/2)^2}{2} + C\right] - \left[\frac{0}{3} - \frac{0}{2} + C\right] = \frac{2\cdot 27}{3\cdot 8} - \frac{3\cdot 9}{2\cdot 4} = \boxed{\frac{9}{8}u^2}$$

$$\text{Área} = \boxed{\frac{9}{8}u^2}$$

Autor: Alex Aginagalde
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

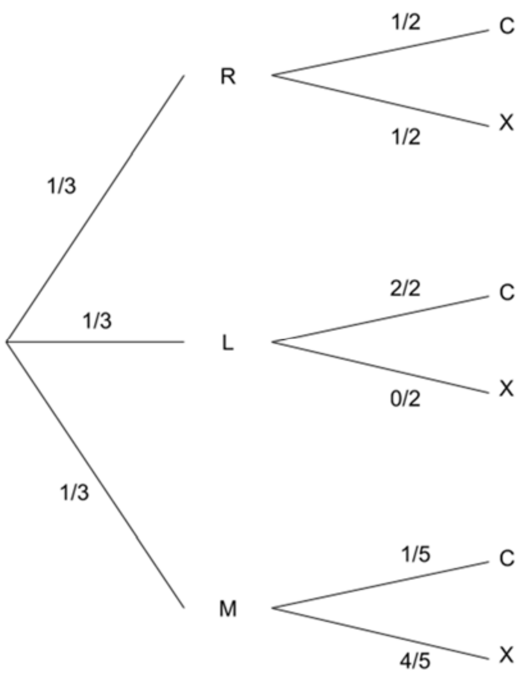
Problema A.5:

Una caja tiene 3 monedas *R*, *L* y *M*. La moneda *R* es normal, la *L* tiene cara por los dos lados y la *M* esta trucada, de forma que la probabilidad de salir cara es 1/5. Se tira una moneda al azar.

a) Calcula la probabilidad que se obtenga cara
b) Si ha sido cruz, ¿cuál es la probabilidad que sea la moneda *R*?

Solución:

Dibujemos un diagrama de árbol para posteriormente calcular las probabilidades que se nos piden:



a) $P(C) = P(R) \cdot P(C|R) + P(L) \cdot P(C|L) + P(M) \cdot P(C|M) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{17}{30}$

Por tanto, la probabilidad de que se obtenga cara es de $17/30 \approx 0.56\hat{6} \Leftrightarrow 56.67\ \%$

b) Para calcular la probabilidad de que la moneda sacada sea del tipo *R*, sabiendo que es cruz la se calcula utilizando el Teorema de Bayes:

$$P(R|X) = \frac{P(R) \cdot P(X|R)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{13}{30}} = \frac{5}{13}$$

Por tanto, la probabilidad de que la moneda sea del tipo *R* sabiendo que ha salido cruz es de $5/13 \approx 0.3846 \Leftrightarrow 38.46\ \%$

SOLUCIONES OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Dada una matriz de tamaño 3x3 cuyo determinante es igual 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:

a) Se cambian entre sí la primera y la segunda fila,
b) Se multiplica la tercera columna por -2,
c) Se multiplica a toda la matriz por 2 y
d) Se transpone la matriz

Calcular de forma razonada el valor del determinante de la matriz obtenida.

Solución:

Traduzcamos cada paso usando las propiedades de las matrices:

a) Se cambian entre sí la primera y la segunda fila $\Leftrightarrow$ cambia el signo del determinante

b) Se multiplica la tercera columna por -2 $\Leftrightarrow$ se multiplica el determinante por ese numero

c) Se multiplica a toda la matriz por 2 $\Leftrightarrow$ al multiplicar toda la matriz de 3x3 estamos multiplicando por 2 cada fila o columna, de manera que multiplicamos por $2^3 = 8$ el determinante.

d) Se transpone la matriz $\Leftrightarrow$ el determinante no varia.

Por tanto, si $det(A) = 5$,

$$\boxed{det(A') = 5(-1)(-2) \cdot 8 = 80}$$

Autor: Alex Aginagalde
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2:

Se considera la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ y el punto $P(1,2,5)$ exterior a la misma. Hallar la ecuación del plano que contiene a r y a P.

Solución:

De la información del enunciado sabemos esto sobre la recta r: $\boldsymbol{r} \equiv \begin{cases} \vec{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{r}} = (\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}) \\ \boldsymbol{A}(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}) \end{cases}$

Para definir el plano que contiene a r y a P necesitamos dos vectores directrices (en nuestro caso $\vec{d}_r$ y el vector $\overrightarrow{AP}$) y un punto del plano (en nuestro caso P). Calculemos lo que nos falta:

$$\overrightarrow{AP} = (1,2,5) - (1,2,3) = (0,0,2)$$

Por tanto, el plano que buscamos viene dado por esta ecuación paramétrica:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 1\lambda + 0\mu \\ y = 2 + 2\lambda + 0\mu \\ z = 5 + 3\lambda + 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 5 + 3\lambda + 2\mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 5 + 3\lambda + 2\mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Problema B.3:

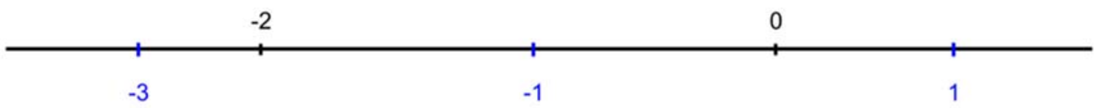
Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 3x^2 - 2}$. Representar $\boldsymbol{f}$.

Solución:

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función hay que igualar a 0 la derivada de la misma:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Representamos los valores en la recta real y estudiamos que ocurre en los intervalos que se aparecen.

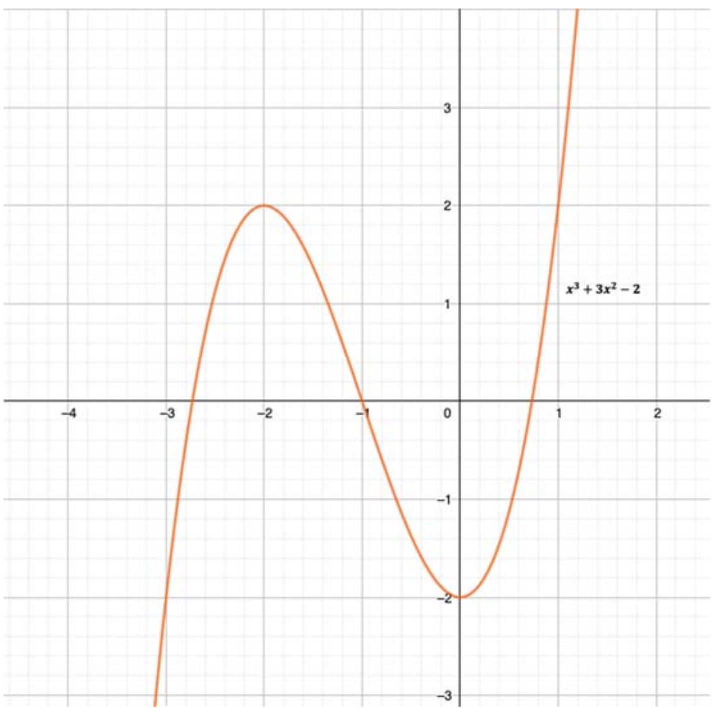


Calculamos los valores de la derivada en los puntos -3, -1 y 1:

- $f'(-3) = 3 \cdot 9 + 6 \cdot (-3) = 9 > 0$, por tanto es creciente
- $f'(-1) = 3 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) = -3 < 0$, por tanto es decreciente
- $f'(1) = 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 9 > 0$, por tanto es creciente

Por tanto la función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en $(-2, 0)$.

De manera que tiene un máximo en el punto $(-2, 2)$ y en el punto $(0, -2)$, un mínimo.



Con esta información se puede dibujar más o menos la gráfica. Si igualamos la función a 0, podremos encontrar los puntos de corte con el eje OX:

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0 = (x+1)(x^2 + 2x - 2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{3} \approx -2.73 \\ x = -1 + \sqrt{3} \approx 0.73 \end{cases}$$

Problema B.4:

Calcular $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx$ explicando el método seguido para dicho calculo.

Solución:

Tenemos que descomponer la función en fracciones simples: $\frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$

Lo cual queda: $8x + 7 = A(x+3) + B(x+1)$

A continuación sustituimos la x por un par de valores para hallar A y B; los más adecuados son –3 y –1 pues en ambos casos un sumando del término de la derecha desaparece:

- $x = -3 \Longrightarrow -24 + 7 = B(-2) \Longrightarrow B = \frac{17}{2}$
- $x = -1 \Longrightarrow -8 + 7 = 2A \Longrightarrow A = -\frac{1}{2}$

Luego *la integral queda así:*

$$\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx = \int \left(\frac{-1/2}{x+1} + \frac{17/2}{x+3}\right) dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{17}{2}\int \frac{1}{x+3} dx =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2} ln|x+1| + \frac{17}{2} ln|x+3| + C}$$

$$\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx = \boxed{-\frac{1}{2} ln|x+1| + \frac{17}{2} ln|x+3| + C}$$

Problema B.5:

Los resultados obtenidos en una prueba realizada a 500 estudiantes se distribuyen normalmente con media 40 puntos y desviación típica 10 puntos.

a) ¿Qué porcentaje del alumnado tiene una puntuación entre 30 y 60 puntos?
b) ¿Cuántos estudiantes tienen una puntuación superior a 60 puntos?

Solución:

$X: N(40, 10) \approx Z: N(0, 1)$ la variable X tras tipificarla se transforma en $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

a) $P(30 < x < 60) = P\left(\frac{30-40}{10} < \frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{60-40}{10}\right) = P(-1 < z < 2) =$

$= P(z < 2) - [1 - P(z < 1)] = 0.9772 - (1 - 0.943) =$

$= \boxed{0.8185 \iff 81.85\ \%}$

Un 81.85 % del alumnado tiene una puntuación entre 30 y 60 puntos.

b) $P(x > 60) = P(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{60-40}{10}) = P(z > 2) = 1 - P(z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

Por tanto, al haber 500 estudiantes en el estudio, $0.0228 \cdot 500 = 11.4$ estudiantes habrán obtenido una puntuación mayor que 60 puntos. Como la puntuación no puede ser decimal hay que decantarse por 11 o 12 estudiantes. Con 11 estudiantes no llegaremos a tener el 22.8 % que buscamos, tendremos menos, por tanto, son 12.

Son 12 los estudiantes que han sacado más de 60 puntos.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Valencia

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Ignasi Clausell Martin

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2019	CONVOCATORIA: JUNIO 2019
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Es donen la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depèn del paràmetre real a, i una matriu quadrada B d'ordre 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$, sent I la matriu identitat d'ordre 3.

Obtingueu <u>raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>:

a) El rang de la matriu A en funció del paràmetre real a i el determinant de la matriu $2A^{-1}$ quan $a = 1$. (2 + 2 *punts*)

b) Totes les solucions del sistema d'equacions $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ quan $a = -1$. (3 *punts*)

c) La comprovació que B és invertible, trobant m i n tals que $B^{-1} = mB + nI$. (3 *punts*)

Problema A.2. Considerem en l'espai les rectes $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ i $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$.

Obtingueu <u>raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>:

a) L'equació del pla que conté les rectes r i s. (3 *punts*)

b) La recta que passa per $P = (0, -1, 2)$ i talla perpendicularment la recta r. (4 *punts*)

c) El valor que han de tenir els paràmetres reals a i b perquè la recta s estiga continguda en el pla $\pi: x - 2y + az = b$. (3 *punts*)

Problema A.3. Es considera la funció $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtingueu <u>raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>:

a) Les asímptotes, els intervals de creixement i de decreixement, així com els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)$. (3 *punts*)

b) La representació gràfica de la corba $y = f(x)$. (2 *punts*)

c) El valor del paràmetre real a perquè es puga aplicar el teorema de Rolle en l'interval $[0,1]$ a la funció $g(x) = f(x) + ax$. (1 *punt*)

d) El valor de les integrals indefinides $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$. (4 *punts*)

1

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓ B

Problema B.1. Es dona el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, on α és un paràmetre real.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Els valors de α per als quals el sistema és compatible i els valors de α per als quals el sistema és incompatible. (4 *punts*)

b) Totes les solucions del sistema quan siga compatible. (4 *punts*)

c) La discussió de la compatibilitat i determinació del nou sistema deduït de l'anterior en canviar el coeficient 11 per qualsevol altre número diferent. (2 *punts*)

Problema B.2. Siga π el pla d'equació $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Les equacions dels dos plans paral·lels a π que disten 4 unitats de π. (4 *punts*)

b) Els punts A, B i C, intersecció del pla π amb els eixos OX, OY i OZ i l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. (4 *punts*)

c) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són l'origen O de coordenades i els punts A, B i C. (2 *punts*)

Problema B.3. Les coordenades inicials dels mòbils A i B són (0, 0) i (250, 0), respectivament, i 1 km és la distància des de l'origen de coordenades fins a cadascun dels punts (1, 0) i (0, 1).

El mòbil A es desplaça sobre l'eix OY des de la posició inicial fins al punt $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ amb una velocitat de 30 km/h i, simultàniament, el mòbil B es desplaça sobre l'eix OX des de la seua posició inicial fins a l'origen de coordenades amb una velocitat de 40 km/h.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) La distancia $f(t)$ entre els mòbils A i B durant el desplaçament, en funció del temps t en hores des que van començar a desplaçar-se. (2 *punts*)

b) El temps T que tarden els mòbils en desplaçar-se des de la seua posició inicial a la seua posició final, i els intervals de creixement i de decreixement de la funció f al llarg del trajecte. (4 *punts*)

c) Els valors de t per als quals la distància dels mòbils és màxima i mínima durant el desplaçament, i aquestes distàncies màxima i mínima. (4 *punts*)

OPCIÓN A

Problema A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3} I - 2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$. (2+2 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$. (3 *puntos*)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$. (3 *puntos*)

Problema A.2. Consideramos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s. (3 *puntos*)

b) La recta que pasa por $P = (0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. (4 *puntos*)

c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$. (3 *puntos*)

Problema A.3. Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. (3 *puntos*)

b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$. (2 *puntos*)

c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$. (1 *punto*)

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$. (4 *puntos*)

3

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible. (*4 puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. (*4 puntos*)

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (*2 puntos*)

Problema B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π. (*4 puntos*)

b) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (*4 puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C. (*2 puntos*)

Problema B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0, 0) y (250, 0), respectivamente, siendo 1km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1).

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse. (*2 puntos*)

b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto. (*4 puntos*)

c) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima. (*4 puntos*)

4

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓ A. OPCIÓN A

Problema A.1:

Problema A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$.

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$.

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$.

Problema A.1. Es donen la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depèn del paràmetre real a, i una matriu quadrada B d'ordre 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$, sent I la matriu identitat d'ordre 3.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) El rang de la matriu A en funció del paràmetre real a i el determinant de la matriu $2A^{-1}$ quan $a = 1$.

b) Totes les solucions del sistema d'equacions $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ quan $a = -1$.

c) La comprovació que B és invertible, trobant m i n tals que $B^{-1} = mB + nI$.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{-2} & \boldsymbol{a+1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \boldsymbol{a-1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ det (A) = $\mathbf{2a^2 + 4a + 2}$ = 0 si a = –1 solución doble por tanto si $a \neq \mathbf{-1}$ el det(A) $\neq \mathbf{0}$ por tanto el rg(A) = 3. Por otro lado, si a = –1 el det(A) = 0 por tanto el rg(A) < 3. Buscamos en la matriz A un determinante orden 2 que no sea nulo y encontramos el det $\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ = 4 ≠ 0

Por tanto, tenemos rg(A) = 2.

Si a = 1 tenemos det(A) = $2a^2 + 4a + 2 = 8$ y el det($2\boldsymbol{A}^{-1}$) = $\mathbf{2^3}$det($\boldsymbol{A}^{-1}$) = $8\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det(A)}}$ = 1.

det($2\boldsymbol{A}^{-1}$) = 1

b) $A\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ si a = –1, det(A) = 0 y el det$\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ = 4 $\neq \mathbf{0}$ por tanto rg(A) = 2 si definimos la matriz ampliada A/B = $\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{array}\right)$ todos los determinantes tomando la columna ampliada junto con dos columnas de la matriz A son 0 por tanto como el rango de A/B no puede ser más pequeño que el de A y en este caso tampoco podrá ser mayor tendrá que ser igual, por tanto el rango de A y de A/B serán iguales y aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado.

Tendremos por tanto el sistema $\left.\begin{array}{r} \mathbf{-2x + 2z = 2} \\ \mathbf{-3x - 2y - z = 0} \end{array}\right\}$ $-x + z = 1$ e $y = \frac{\mathbf{-3x - z}}{\mathbf{2}}$ llamando a x = μ tenemos:

x = μ que z = 1 + μ e y = —1/2 —2μ para todo μ número real.

c) Una matriz B es invertible si existe una matriz a la que llamaremos inversa de B, B^{-1}; que verifique que $BB^{-1} = I$. $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B \rightarrow B^2 + 2B = \frac{1}{3}I$ sacando factor común $B(B+2I) = \frac{1}{3}I$ despejando la I tendremos que $B(3B+6I) = I$, llamando B^{-1} a $3B + 6I$ tendremos que:

***m* = 3 y *n* = 6.**

Autor: Ignasi Clausell Martin
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.2:

Problema A.2. Consideramos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$ y $s: x = y+1 = \frac{z-2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

b) La recta que pasa por $P=(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta r.

c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x-2y+az=b$.

Problema A.2. Considerem en l'espai les rectes $r: \begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$ i $s: x = y+1 = \frac{z-2}{2}$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) L'equació del pla que conté les rectes r i s.

b) La recta que passa per $P=(0,-1,2)$ i talla perpendicularment la recta r.

c) El valor que han de tenir els paràmetres reals a i b perquè la recta s estiga continguda en el pla $\pi: x-2y+az=b$.

Solución:

(a) Escribiendo la recta r en paramétricas, llamando a $x = t$, tendremos que $y = 3 + t$ y $z = 3 + 2t$ por tanto el punto de la recta será $A = (0, 3, 3)$ y el vector director $v = (1, 1, 2)$ desde la recta s sacaremos el punto y el vector $B = (0, –1, 2)$ y $w = (1, –1, –2)$.

Para estudiar la posición relativa de las dos rectas, primero calcularemos el vector $AB = (0, –4, –1)$ Construimos las matrices con los vectores $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ todos los determinantes de orden 2 son cero por tanto el $rg(M)$ será 1. Construimos la matriz con los vectores directores y el vector calculado con los dos puntos $M´ = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{array}\right)$ donde encontramos un determinante orden 2, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$, distinto de cero por tanto el $rg(M`)$ será 2 a modo de conclusión r y s son paralelas.

Por tanto el plano que contiene a las dos rectas lo calcularemos multiplicando vectorialmente los vectores AB y el vector director v, $\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (–7, –1, 4)$ que nos dará el vector característico del plano, como el plano tiene que contener las dos rectas contendrá los dos puntos de las rectas por tanto tomando el punto A tendremos $\pi = –7x – y + 4z + D = 0$ por tanto tendremos que: $–3 + 12 + D = 0$ por tanto $D = –9$ dejando el plano con la ecuación $–7x – y + 4z – 9 = 0$.

Ecuación del plano: $–7x – y + 4z – 9 = 0$

(b) Calculamos el plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r, para ello tomamos el vector de la recta r como el vector característico del plano ya que este vector será perpendicular al plano y el punto P por tanto tendremos el plano de ecuación $x + y + 2z + D = 0$ que sustituyendo el punto P tendremos $–1 + 4 + D = 0$ por tanto $D = –3$ y la ecuación quedará $x + y + z – 3 = 0$. Resolviendo el sistema entre la ecuación de la recta r y la ecuación del plano obtendremos el punto $Q = (–1, 2, 1)$

La recta pedida es la que pasa por los puntos P y Q por tanto con los dos puntos calculamos el vector $(–1, 2, 1) – (0, –1, 2) = (–1, 3, –1)$ que será el vector director de la recta y tomando como punto de la recta el punto P la ecuación de la recta quedará $x = –t;\ y = –1 + 3t;\ z = 2 – t$, ecuación paramétrica.

(c) Expresamos la recta s en forma de ecuación implícita de forma que quedará $x = y + 1$, e

$2y + 2 = z - 2$ quedando $x - y = 1$ e $2y - z = -4$.

Con estas dos ecuaciones y la ecuación del plano construimos las matrices $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & a & b \end{array}\right)$ la recta s estará contenida en el plano si la matriz y la ampliada tienen el mismo rango y este es igual a 2.

Para ello calculamos el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = 2a - 1 = 0$, por tanto, $a = 1/2$, como con este valor encontramos el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$ distinto de cero por tanto el rango de la matriz será 2

Para que el rango de la ampliada sea 2 también, tendremos que ver que es nulo el determinante de la ampliada $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & b \end{vmatrix} = 2b - 6 = 0$ por tanto $b = 3$.

Con lo que podemos concluir que si $a = 1/2$ y $b = 3$ los rangos serán 2 y por tanto la recta estará contenida en el plano.

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.3:

Problema A.3. Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$.

c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$.

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$.

Problema A.3. Es considera la funció $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtingueu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Les asímptotes, els intervals de creixement i de decreixement, aixi com els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)$.

b) La representació gràfica de la corba $y = f(x)$.

c) El valor del paràmetre real a perquè es puga aplicar el teorema de Rolle en l'interval $[0,1]$ a la funció $g(x) = f(x) + ax$.

d) El valor de les integrals indefinides $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$.

Solución:

La función $f(x) = xe^{-x^2} = \frac{x}{e^{x^2}}$ como el denominador no se anula al ser una función exponencial por tanto el dominio será el conjunto de los números R.

Puntos de corte con los ejes, igualando a cero la función obtenemos que $x = 0$, y sustituyendo en la función tenemos el punto (0, 0).

Asíntotas verticales, no tiene porque la función está definida en todo R.

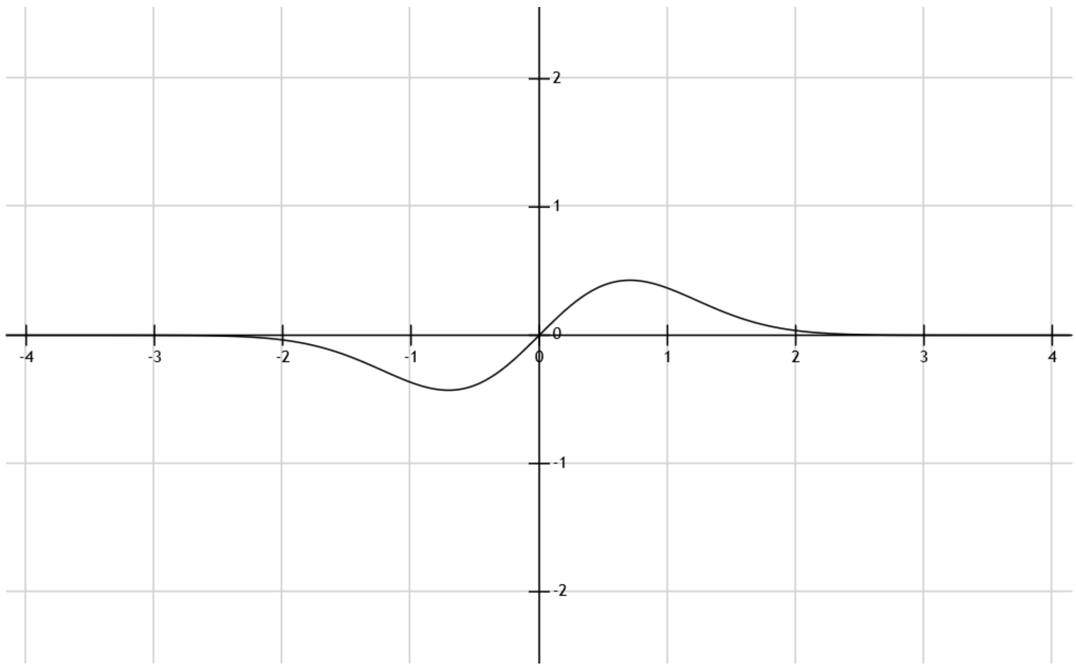
Asíntotas horizontales, calculamos los limites infinitos de la función.$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} = 0$ por orden de magnitud del infinito; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = \frac{-\infty}{\infty} = 0$ por orden de magnitud del infinito. Por tanto, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal y como consecuencia de ello no existen asíntotas oblicuas.

Para calcular los máximos y mínimos de la función tenemos que calcular la primera derivada e igualar a cero $f'(x) = 1e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = 0$. Resolviendo la ecuación obtenemos los puntos $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sustituyendo en la derivada un número menor que $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ nos da negativa y por tanto la función es decreciente, sustituyendo en la derivada un número que encontramos entre $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}$ nos da positivo por tanto la función es creciente y sustituyendo un número mayor que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en la derivada nos da negativo y por tanto la función es decreciente.

Si la función decrece para luego crecer tenemos un mínimo, por tanto, el punto $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ es un mínimo y si la función crece para luego decrecer tendremos un máximo, por tanto, el punto $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ es un máximo.

Asíntotas verticales, no tiene, y asíntota horizontal: y = 0. Mínimo: $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}})$; máximo: $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}})$

(b)



(c) La función $g(x) = f(x) + ax$ es la función $g(x)$ = $\boldsymbol{xe^{-x^2} + ax}$; $g(x)$ es continua y derivable en R y por tanto también lo será en el intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. Para poder aplicar el teroma de Rolle solo nos queda verificar que $g(0) = g(1)$, que al sustituir el 0 y el 1 en la función e igualar obtenemos que 0 = $\boldsymbol{e^{-1}}$ + a; con lo que obtenemos que $a = \frac{-1}{e}$

Si $\boldsymbol{a} = \frac{-1}{e}$ se verifican las condiciones del teorema de Rolle.

(d) $\int f(x)dx = \int xe^{-x^2}\,dx$ = -1/2$\int -2xe^{-x^2}dx$ = -1/2 e^{-x^2} + C

$\int xe^{-x}\,dx$ la resolveremos por partes $\begin{Bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{Bmatrix}$

$\int xe^{-x}\,dx$ = -x$e^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$

$$\boldsymbol{\int f(x)dx = -1/2\, e^{-x^2} + C\,;\ \int xe^{-x}\,dx = = -xe^{-x} - e^{-x} + C}$$

Autor: Ignasi Clausell Martin
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

PRUEBA B

Problema B.1:

Problema B.1. Se da el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible.

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

Problema B.1. Es dona el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, on α és un paràmetre real.

Obtingueu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Els valors de α per als quals el sistema és compatible i els valors de α per als quals el sistema és incompatible.

b) Totes les solucions del sistema quan siga compatible.

c) La discussió de la compatibilitat i determinació del nou sistema deduït de l'anterior en canviar el coeficient 11 per qualsevol altre número diferent.

Solución:

a) Escribiendo la matriz ampliada del sistema *A/B* = $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & a \end{array}\right)$. Calculamos el rango de A viendo el valor de su determinante, *det(A)* = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix}$ = 0. Buscamos un determinante orden 2, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ por tanto el rango de la matriz A es 2.

Calculamos el rango de *A/B* tomando $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & a \end{vmatrix} = a - 14 = 0$ $\quad a = 14$

Concluimos que, por el teorema de Rouché, si $a \neq 14$ el *rg(A/B)* = 3 y el *rg(A)* = 2, luego el sistema es incompatible. Si $a = 14$, *rg(A/B)* = 2 y el *rg(A)* = 2, número incógnitas = 3, el sistema es compatible indeterminado.

b) Multiplicando la primera ecuación por –3 obtenemos $-3x - 3y - 3z = -12$ que al sumarla con la segunda ecuación obtenemos $y + 3z = -7$, dando a $z = t$ parámetro, obtenemos que $y = -7 - 3t$ y sustituyendo en la primera ecuación obtenemos $x = 11 + t$, para todo t perteneciente a los números R.

c) Si cambiamos 11 por un número cualquiera k la matriz *A/B* quedará $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & k & a \end{array}\right)$

Calculando el determinante de, A *det(A)*= $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & k \end{vmatrix} = k - 11$

El *det (A)* = 0 si $k - 11 = 0$, por tanto, si $k = 11$.

Por tanto, tenemos que si $k \neq 11$ el *det (A)* $\neq 0$ y por tanto el *rg(A)* = 3 y como el *rg(A/B)* no puede ser menos que el *rg(A)* entonces también será 3 para todo valor de a por tanto, por el teorema de Rouché, el sistema es compatible determinado.

Problema B.2:

Problema B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π.
b) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C.

Problema B.2. Siga π el pla d'equació $9x + 12y + 20z = 180$.
Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Les equacions dels dos plans paral·lels a π que disten 4 unitats de π.
b) Els punts A, B i C, intersecció del pla π amb els eixos OX, OY i OZ i l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.
c) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són l'origen O de coordenades i els punts A, B i C.

Solución:

(a) El plano de ecuación $9x + 12y + 20z - 180 = 0$ tiene por vector característico $n = (9, 12, 20)$; los planos que buscamos al ser paralelos tienen el mismo vector característico por tanto tendrán por ecuación $9x + 12y + 20z + D = 0$ y $9x + 12y + 20z + E = 0$. La distancia entre estos dos planos vendrá dada por la ecuación, $d = \frac{|D-(-180)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, igualando a 4 tendremos: $4 = \frac{|D-(-180)|}{\sqrt{9^2+12^2+20^2}}$, por tanto $4 = \frac{|D+180|}{25}$, $D + 180 = \mp 100$, por lo que tendremos $D = -280$ y $D = -80$, por tanto:

Los planos paralelos buscados son: $9x + 12y + 20z = 80$ y $9x + 12y + 20z = 280$.

(b) La intersección del plano $9x + 12y + 20z = 180$ con el eje X la sacaremos resolviendo el sistema entre la ecuación del plano y la ecuación del eje x, $z = y = 0$ obteniendo el punto de corte $A = (20, 0, 0)$. De la misma forma la intersección con el eje Y la calcularemos resolviendo el sistema de la ecuación del plano con la recta que forma el eje y, $x = z = 0$ y obtenemos el punto de corte $B = (0, 15, 0)$. Análogamente resolviendo el sistema entre el plano y la ecuación de la recta del eje z, $x = y = 0$, calcularemos el tercer punto de corte $C = (0, 0, 9)$. Los vectores AB y AC los calcularemos restando los puntos extremo menos origen: $AB = (0, 15, 0) - (20, 0, 0) = (-20, 15, 0)$.
De la misma forma el $AC = (-20, 0, 9)$.
El ángulo entre vectores lo calcularemos utilizando el producto escalar: $cos\ a = \frac{AB \cdot AC}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{400}{25\sqrt{481}}$.

Por tanto, $a = arccos\left(\frac{16}{\sqrt{481}}\right) = 43.15°$

(c) El volumen del tetraedro lo calcularemos según la fórmula $V = \frac{1}{6}|[OA, OB, OC]|$, siendo:

$OA = (20, 0, 0) - (0, 0, 0) = (20, 0, 0)$. De la misma forma $OB = (0, 15, 0)$ y $OC = (0, 0, 9)$.

$$[OA, OB, OC] = \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Resolviendo el determinante resulta 2700, por tanto:

El volumen $V = 1/6 \cdot 2700 = 450\ u^3$

Autor: Ignasi Clausell Martin
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.3:

Problema B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0, 0) y (250, 0), respectivamente, siendo 1km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1).

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia *f(t)* entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo *t* en horas desde que comenzaron a desplazarse.

b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f* a lo largo del trayecto.

c) Los valores de *t* para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima.

Problema B.3. Les coordenades inicials dels mòbils A i B són (0, 0) i (250, 0), respectivament, i 1 km és la distància des de l'origen de coordenades fins a cadascun dels punts (1, 0) i (0, 1).

El mòbil A es desplaça sobre l'eix OY des de la posició inicial fins al punt $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ amb una velocitat de 30 km/h i, simultàniament, el mòbil B es desplaça sobre l'eix OX des de la seua posició inicial fins a l'origen de coordenades amb una velocitat de 40 km/h.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) La distancia *f(t)* entre els mòbils A i B durant el desplaçament, en funció del temps *t* en hores des que van començar a desplaçar-se.

b) El temps T que tarden els mòbils en desplaçar-se des de la seua posició inicial a la seua posició final, i els intervals de creixement i de decreixement de la funció *f* al llarg del trajecte.

c) Els valors de *t* per als quals la distància dels mòbils és màxima i mínima durant el desplaçament, i aquestes distàncies màxima i mínima.

Solución:

(a) Las coordenadas de los puntos A y B las calcularemos en función del tiempo utilizando que el espacio es igual a la velocidad por el tiempo; por tanto, A = (0, 0 + 30*t*) y B = (250 – 40*t*, 0) por tanto el vector $\overrightarrow{AB}$ será (250 – 40*t*, –30*t*) y la función de la distancia quedaría:

$$f(t) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(250-40t)^2+(30t)^2} = \sqrt{2500t^2-2000t+62500} \text{ Km, } t \text{ en horas.}$$

(b) El tiempo *t* pedido es el tiempo que tardará en desplazarse $e = v \cdot t$ por tanto *t* = 250/40 = 6.25 horas por tanto la función quedará $f(t) = \sqrt{2500t^2-2000t+62500}$ $0 \leq t \leq 6.25$. Derivando la función tendremos $f'(t) = \frac{5000t-20000}{2\sqrt{2500t^2-2000t+62500}} = 0$, tendremos 2500*t* – 10000 = 0, por tanto, *t* = 4 horas. Sustituyendo en la derivada un número menor que 4 mayor que cero nos dará que la derivada es negativa que significará que la función f crece en el intervalo $[0, 4)$ y sustituyendo en la derivada un número mayor que 4 menor que 6.25 nos dará que la derivada de la función es positiva por tanto la función crece en el intervalo $(4, 6.25]$

(c) La distancia es mínima en *t* = 4 horas siendo dicha distancia:

$$f(4) = \sqrt{2500 \cdot 4^2 - 2000 \cdot 4 + 62500} = 150 \text{ Km}$$

El máximo de la función se alcanzará en los puntos 0 o 6.25, calculando el valor de estos puntos en la función tendremos que *f*(0) = 250 y que *f*(6.25) = 187.5, por tanto la máxima distancia entre los móviles será de 250 Km en el instante inicial *t* = 0 horas.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

GENERALITAT VALENCIANA

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2019	CONVOCATORIA: JULIO 2019
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Es dona el sistema d'equacions $\begin{cases} 2x & & +3z = & \alpha \\ x & -2y & +2z = & 5 \\ 3x & -y & +5z = & \alpha+1 \end{cases}$, en què α és un paràmetre real.

Obtingueu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Els valors de α per als quals el sistema és compatible i determinat. *(4 punts)*

b) La solució del sistema quan $\alpha = -1$. *(3 punts)*

c) El valor de α per tal que el sistema tinga una solució (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. *(3 punts)*

Problema A.2. Es dona el pla π : $2x + y + 2z = 8$ i el punt $P = (10,\ 0,\ 10)$.

Obtingueu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La distància del punt P al pla π. *(3 punts)*

b) L'àrea del triangle els vèrtexs del qual són els punts A, B i C, obtinguts en trobar la intersecció del pla π amb els eixos de coordenades. *(4 punts)*

c) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són P, A, B i C. *(3 punts)*

Problema A.3. Es dona la funció real h definida per $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.

Obtingueu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El domini de la funció h. Els límits $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ i $\lim_{x\to 0} h(x)$. *(1 + 2 punts)*

b) L'asimptota de la corba $y = h(x)$. *(2 punts)*

c) La primitiva de la funció h (és a dir, $\int h(x)dx$) i l'àrea de la superfície tancada entre les rectes $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ i la corba $y = h(x)$. *(3 + 2 punts)*

1

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓ B

Problema B.1. Es donen les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ i $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtingueu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els valors de α per als quals l'equació matricial $AX = \alpha X$ sols admet una solució. (4 *punts*)

b) Totes les solucions de l'equació matricial $AX = 5X$. (3 *punts*)

c) La comprovació que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ és una solució de l'equació matricial $AX = 2X$ i, sense calcular la matriu A^{100}, el valor de β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 *punts*)

Problema B.2. Es donen en l'espai la recta $r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ i el pla $\pi: x + 2y + 3z = 6$.

Obtingueu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La posició relativa de la recta r i el pla π en funció dels paràmetres reals α i β. (5 *punts*)

b) La distància entre la recta r i el pla π quan $\alpha = 6$ i $\beta = 3$. (3 *punts*)

c) L'equació del pla que passa per $(0, 0, 0)$ i que no talla al pla π. (2 *punts*)

Problema B.3. Un projectil està unit al punt $(0, 2)$ per una corda elàstica i tensa. El projectil recorre la corba $y = 4 - x^2$ d'extrems $(-2,0)$ i $(2,0)$.

Obtingueu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) La funció de la variable x que expressa la distància entre un punt qualsevol $(x, 4 - x^2)$ de la corba $y = 4 - x^2$ i el punt $(0, 2)$. (2 *punts*)

b) Els punts de la corba $y = 4 - x^2$ a major distància absoluta del punt $(0,2)$ per a $-2 \le x \le 2$. (2 *punts*)

c) Els punts de la corba $y = 4 - x^2$ a menor distància absoluta del punt $(0,2)$ per a $-2 \le x \le 2$. (2 *punts*)

d) L'àrea de la superfície per la que s'ha mogut la corda elàstica, és a dir, l'àrea compresa entre les corbes $y = 4 - x^2$ i $y = 2 - |x|$ quan $-2 \le x \le 2$. (4 *punts*)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓN A

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x & & +3z & = & \alpha \\ x & -2y & +2z & = & 5 \\ 3x & -y & +5z & = & \alpha+1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener <u>razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 *puntos*)

b) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 *puntos*)

c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 *puntos*)

Problema A.2. Se da el plano $\pi : 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10, 0, 10)$.

Obtener <u>razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) La distancia del punto P al plano π. (3 *puntos*)

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. (4 *puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C. (3 *puntos*)

Problema A.3. Se da la función real h definida por $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.

Obtener <u>razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) El dominio de la función h. Los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$. (1 + 2 *puntos*)

b) La asíntota de la curva $y = h(x)$. (2 *puntos*)

c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x)dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$. (3 + 2 *puntos*)

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX = \alpha X$ solo admite una solución. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$. (3 *puntos*)

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 *puntos*)

Problema B.2. Se dan en el espacio la recta $r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi: x + 2y + 3z = 6$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β. (5 *puntos*)

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$. (3 *puntos*)

c) La ecuación del plano que pasa por $(0,0,0)$ y que no corta al plano π. (2 *puntos*)

Problema B.3. Un proyectil está unido al punto $(0, 2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2,0)$ y $(2,0)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0, 2)$. (2 *puntos*)

b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \le x \le 2$. (2 *puntos*)

c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \le x \le 2$. (2 *puntos*)

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \le x \le 2$. (4 *puntos*)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓ A - OPCIÓN A

Problema A.1:

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x & & +3z & = & \alpha \\ x & -2y & +2z & = & 5 \\ 3x & -y & +5z & = & \alpha+1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener <u>razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 *puntos*)

b) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 *puntos*)

c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 *puntos*)

Problema A.1. Es dona el sistema d'equacions $\begin{cases} 2x & & +3z & = & \alpha \\ x & -2y & +2z & = & 5 \\ 3x & -y & +5z & = & \alpha+1 \end{cases}$, en què α és un paràmetre real.

Obtingueu <u>raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>:

a) Els valors de α per als quals el sistema és compatible i determinat. (4 *punts*)

b) La solució del sistema quan $\alpha = -1$. (3 *punts*)

c) El valor de α per tal que el sistema tinga una solució (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 *punts*)

Solución:

(a) Escribimos la matriz del sistema *A/B* = $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & a \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & a+1 \end{array}\right)$

El *det (A)* = $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -1$ y como es diferente de cero el *rg(A)* = 3, como es lo máximo que puede ser el *rg(A/B)* también será 3 para todo valor de *a* número real.

Por el teorema de Rouché el sistema es compatible determinado para todo valor de *a* número real.

La solución única la calcularemos utilizando la regla de Cramer

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ a+1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{-2a-9}{-1} = 2a+9$ $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & a & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & a+1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{4}{-1} = -4$ $\quad z = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & a+1 \end{vmatrix}}{-1} = \dfrac{a+6}{-1} = -a-6$

(b) Como acabamos de calcular la solución en función del parámetro *a*, bastará con sustituir por *a* = −1

Así:

$(x, y, z) = (2a + 9, -4, -a - 6)$, sustituyendo tendremos $(x, y, z) = (7, -4, -5)$.

$(x, y, z) = (7, -4, -5)$.

(c) Si $x + y + z = 0$ se tendrá: $2a + 9 + (-4) + (-a - 6) = 0$, $a - 1 = 0$, por tanto, $a = 1$.

$a = 1$.

Problema A.2:

Problema A.2. Se da el plano $\pi : 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10, 0, 10)$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia del punto P al plano π. (3 *puntos*)

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. (4 *puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C. (3 *puntos*)

Problema A.2. Es dona el pla $\pi : 2x + y + 2z = 8$ i el punt $P = (10, 0, 10)$.
Obtingueu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La distància del punt P al pla π. (3 *punts*)

b) L'àrea del triangle els vèrtexs del qual són els punts A, B i C, obtinguts en trobar la intersecció del pla π amb els eixos de coordenades. (4 *punts*)

c) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són P, A, B i C. (3 *punts*)

Solución:

(a) $d(P,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ siendo $P = (x_0, y_0, z_0)$ y el plano $\pi = Ax + By + Cz + D = 0$.

En nuestro caso P = (10, 0, 10) y π = $2x + y + 2z = 8$ y por tanto la solución es inmediata:

$d(P,\pi) = \frac{|2\cdot10+1\cdot0+2\cdot10-8|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}$ = 32/3 u

$d(P,\pi)$ = 32/3 u

(b) Para calcular el punto A resolveremos el sistema entre el plano $2x + y + 2z = 8$ y la ecuación del eje X: $y = z = 0$ obteniendo $x = 4$ y por tanto el punto A = (4, 0, 0).
Para calcular el punto B resolveremos el sistema entre el plano $2x + y + 2z = 8$ y la ecuación del eje Y: $x = z = 0$ obteniendo $y = 8$ y por tanto el punto B = (0, 8, 0).
Para calcular el punto C resolveremos el sistema entre el plano $2x + y + 2z = 8$ y la ecuación del eje Z: $x = y = 0$ obteniendo $z = 4$ y por tanto el punto C = (0, 0, 4).
Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}$ = (0, 8, 0) – (4, 0, 0) = (–4, 8, 0),
y el vector $\overrightarrow{AC}$ = (0, 0, 4) – (4, 0, 0) = (–4, 0, 4).

$\overrightarrow{AB}\text{x}\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ = (32, 16, 32).

$\left|\overrightarrow{AB}\text{x}\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{32^2+16^2+32^2}$ = 48.

$Area = \frac{1}{2}|ABxAC|$ = 1/2 · 48 = 24 u^2.

$Area$= 24 u^2.

(c) El Volumen V = 1/6 $\left|\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$

$\overrightarrow{AP}$ = (10, 0, 10) – (4, 0, 0) = (6, 0, 10).

$$\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 10 \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 512$$

V = 1/6 · (512) = 256/3 u^3.

Autor: Ignasi Clausell Martin
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.3:

Problema A.3. Se da la función real h definida por $h(x)=\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio de la función h. Los límites $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ y $\lim_{x\to 0} h(x)$. (1 + 2 *puntos*)

b) La asíntota de la curva $y = h(x)$. (2 *puntos*)

c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x)dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$. (3 + 2 *puntos*)

Problema A.3. Es dona la funció real h definida per $h(x)=\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.

Obtingueu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El domini de la funció h. Els límits $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ i $\lim_{x\to 0} h(x)$. (1 + 2 *punts*)

b) L'asímptota de la corba $y = h(x)$. (2 *punts*)

c) La primitiva de la funció h (és a dir, $\int h(x)dx$) i l'àrea de la superfície tancada entre les rectes $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ i la corba $y = h(x)$. (3 + 2 *punts*)

Solución:

$h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$

(a) $x^2 + 2x + 5 = 0$ $\quad x = \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}$ no pertenece a los números reales por tanto *Dom(f)* = *R*.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \frac{-3}{5}.$$

(b) Asíntotas verticales:

No presenta asíntotas verticales por estar definida en todo R

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+x^2-5x-3}{x^2-2x+5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} -x = -\infty$$

Por tanto, no hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^3+2x^2+5x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} - x = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3-x^3-2x^2-5x}{x^2+2x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2-3}{x^2+2x+5}$$

$$= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1$$

La recta $y = x - 1$ es asíntota oblicua.

(c) $\int\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}dx$: haciendo la división de polinomios obtenemos el cociente $x - 1$ y el resto $2x + 2$, por tanto la integral queda:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x)dx + \frac{R(x)}{Q(x)} dx =$$

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} dx = \int (x-1)dx + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2 + 2x + 5| + C$$

Para calcular el área, primero hay que ver si la función *f*(*x*) corta al eje X en algún punto c entre 1 y 5.

Por tanto

$A = \left| \int_1^5 \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} dx \right| = \left| \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2 + 2x + 5| \right]_1^5 \right| = 8 + \ln(5)$

$$A = 8 + \ln(5)$$

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓN B - OPCIÓN B

Problema B.1:

Problema B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtener <u>razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX = \alpha X$ solo admite una solución. (*4 puntos*)

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$. (*3 puntos*)

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (*3 puntos*)

Problema B.1. Es donen les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ i $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtingueu <u>raonadament</u>, <u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>:

a) Els valors de α per als quals l'equació matricial $AX = \alpha X$ sols admet una solució. (*4 punts*)

b) Totes les solucions de l'equació matricial $AX = 5X$. (*3 punts*)

c) La comprovació que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ és una solució de l'equació matricial $AX = 2X$ i, sense calcular la matriu A^{100}, el valor de β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (*3 punts*)

Solución:

(a) $AX = aX$ $\quad AX - aX = O \quad (A - aI)X = O$, donde O representa la matriz nula e I la matriz identidad

Para que esta ecuación matricial solo tenga una solución, debe existir la matriz inversa de $A - aI$, y por tanto ser $det(A - aI)$ distinto de cero.

$A - aI = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & 4 \\ -1 & 6-a \end{pmatrix}$

$Det(A - aI) = \begin{vmatrix} 1-a & 4 \\ -1 & 6-a \end{vmatrix} = (1-a)(6-a) + 4 = a^2 - 7a + 10$

$Det(A - aI) = 0$ si $a^2 - 7a + 10 = 0$ por tanto $a = 2$ y $a = 5$.

La ecuación matricial solo admite una solución cuando a sea distinto de 2 y de 5.

Además, aunque no lo pida el ejercicio, dicha solución es:

$(A - aI)X = O$, $(A - aI)^{-1}(A - aI)X = (A - aI)^{-1}O$ por tanto $X = (A - aI)^{-1}O$

Por tanto, $X = O_{2x2}$.

(b) $AX = 5X$ $\quad AX - 5X = O \quad (A - 5I)X = O$ $\qquad A - 5I = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{matrix}$, por tanto $-x + y = 0$ $\qquad x = \mu$, $y = \mu$, para todo $\mu \in R$

(c) $AX = 2X$ con $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Efectivamente se comprueba que $AX = 2X$ cuando $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ con lo que podemos asegurar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$.

Es decir que $A \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sabiendo esto, se puede deducir b en la ecuación $A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mediante el procedimiento de inducción

$$A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{99} A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{99} 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A^{99} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A^{98} A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A^{98} 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^2 A^{98} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

y así sucesivamente

$$= 2^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el valor pedido de $b = 2^{100}$.

Problema B.2:

Problema B.2. Se dan en el espacio la recta r: $\frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

Obtener <u>razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β. *(5 puntos)*

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$. *(3 puntos)*

c) La ecuación del plano que pasa por $(0,0,0)$ y que no corta al plano π. *(2 puntos)*

Problema B.2. Es donen en l'espai la recta r: $\frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ i el pla $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

Obtingueu <u>raonadament</u>, <u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>:

a) La posició relativa de la recta r i el pla π en funció dels paràmetres reals α i β. *(5 punts)*

b) La distància entre la recta r i el pla π quan $\alpha = 6$ i $\beta = 3$. *(3 punts)*

c) L'equació del pla que passa per $(0, 0, 0)$ i que no talla al pla π. *(2 punts)*

Solución:

r= $\frac{x-a}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{b}$ $\pi = x + 2y + 3z = 6$, de la recta r extraemos las ecuaciones $\frac{x-a}{-1} = \frac{y}{-4} \rightarrow$ $-4x + 4a = -y \rightarrow 4x - y - 4a = 0$ y $\frac{y}{-4} = \frac{z}{b} \rightarrow by = -4z \rightarrow by + 4z = 0$

Estudiaremos la posición relativa de r y π en función de los rangos de las matrices A y A/B dadas por

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 0 & 4a \\ 0 & b & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

El rango de A lo calculamos por medio del determinante: $det(A)$ = $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & b & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12b - 36 = 0 \rightarrow b = 3$

Si $b \neq 3$ entonces del $det(A) \neq 0$ por tanto el rango de A es 3 y el de A/B será 3 por que no puede ser más pequeño que el de A, por tanto la recta r y el plano π son secantes.

Si b = 3 entonces el $det(A)$ = 0 por tanto el rango de A será menor que 3, A/B = $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 0 & 4a \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$ para calcular el rango de A nos fijamos en el determinante de tamaño 2 de la matriz $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ por tanto el rango de A será 2; para calcular el rango de la matriz A/B nos fijamos en el determinante de la matriz $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 4a \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 3(24 - 4a) = 0$, entonces a = 6.

Si a es distinto de 6 el rango de A/B es 3.

Si a es igual a 6 el rango de A/B es 2.

En resumen:

Si b es distinto de 3 recta y plano son secantes.

Si b es igual a 3 y a igual a 6 la recta está contenida en el plano.

Si b es igual a 3 y a distinto de 6 la recta es paralela al plano.

Autor: Ignasi Clausell Martin
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

(b) Como acabamos de ver si a es 6 y b es 3, la recta está contenida en el plano.

Por tanto, la distancia que se nos pide será nula.

c) Si los dos planos no se cortan, es porque son paralelos por tanto tendrán el mismo vector característico, como el plano π tiene por vector característico (1, 2, 3) el plano pedido lo calcularemos utilizando el mismo vector característico por lo que la ecuación del nuevo plano será:

$x + 2y + 3z + D = 0$, como el punto (0, 0, 0) queremos que esté en el plano, cumplirá la ecuación del plano, por tanto· $0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + D = 0$

Con lo cual D = 0 y el plano pedido tendrá por ecuación $x + 2y + 3z = 0$.

$x + 2y + 3z = 0$.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.3:

Problema B.3. Un proyectil está unido al punto $(0,2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2,0)$ y $(2,0)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4-x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0,2)$. (*2 puntos*)

b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \le x \le 2$. (*2 puntos*)

c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \le x \le 2$. (*2 puntos*)

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \le x \le 2$. (*4 puntos*)

Problema B.3. Un projectil està unit al punt $(0,2)$ per una corda elàstica i tensa. El projectil recorre la corba $y = 4 - x^2$ d'extrems $(-2,0)$ i $(2,0)$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) La funció de la variable x que expressa la distància entre un punt qualsevol $(x, 4-x^2)$ de la corba $y = 4 - x^2$ i el punt $(0,2)$. (*2 punts*)

b) Els punts de la corba $y = 4 - x^2$ a major distància absoluta del punt $(0,2)$ per a $-2 \le x \le 2$. (*2 punts*)

c) Els punts de la corba $y = 4 - x^2$ a menor distància absoluta del punt $(0,2)$ per a $-2 \le x \le 2$. (*2 punts*)

d) L'àrea de la superfície per la que s'ha mogut la corda elàstica, és a dir, l'àrea compresa entre les corbes $y = 4 - x^2$ i $y = 2 - |x|$ quan $-2 \le x \le 2$. (*4 punts*)

Solución:

(a) La distancia entre los dos puntos dados será:

$$d(x) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-0)^2 + (4-x^2-2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \quad \text{con } -2 \le x \le 2.$$

(b) y (c) Se trata de encontrar los máximos y los mínimos absolutos de la función distancia en el intervalo $[-2, 2]$. Así calculamos la derivada.

$d`(x) = \frac{4x^3-6x}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}} = \frac{2x^3-3x}{\sqrt{x^4-3x^2+4}}$ haciendo $d`(x) = 0$ tenemos $2x^3 - 3x = 0$ resolviendo tendremos $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$, y $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

Ahora calculamos los valores de la función en los puntos obtenidos anteriormente, llamados puntos críticos y en los extremos del intervalo.

$$\left.\begin{array}{c} d(-2) = \sqrt{(-2)^4 - 3(-2)^2 + 4} = \sqrt{8} \\ d\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{(-\sqrt{\frac{3}{2}})^4 - 3(-\sqrt{\frac{3}{2}})^2 + 4} = \sqrt{7}/2 \\ d(0) = \sqrt{4} = 2 \\ d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = d\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\frac{7}{2}} \\ d(2) = d(-2) = \sqrt{8} \end{array}\right\}$$

La distancia máxima $d = \sqrt{8}$ se alcanza en los puntos (–2, 0) y (2, 0); la distancia mínima $d = \sqrt{\frac{7}{2}}$ se alcanza en los puntos $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 5/2\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 5/2\right)$

(d) $y = 2 - |x| = \begin{cases} 2+x & si\ -2 \le x < 0 \\ 2-x & si\ \ 0 \le x < 2 \end{cases}$

El área pedida es:

$A = \int_{-2}^{0} 4 - x^2 - (2+x)\ dx + \int_{0}^{2} 4 - x^2 - (2-x)dx = \int_{-2}^{0} -x^2 - x + 2\ dx + \int_{0}^{2} -x^2 + x + 2\ dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{2} = \frac{20}{3}$ u².

$A = \frac{20}{3}$ u².

Autor: Ignasi Clausell Martin
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Otras webs con problemas de Selectividad resueltos

En la web puedes encontrar muchos problemas resueltos de los propuestos en selectividad.

https://www.ebaumatematicas.com/

El objetivo de esta página web es ser una herramienta para dar fácil y rápido acceso a los exámenes EBAU de matemáticas II y matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II de todas las comunidades autónomas de España realizados los últimos años: 2017, 2018, 2019.

Aparecen los exámenes oficiales de la comisión organizadora de cada comunidad y dichos exámenes resueltos, a veces, de distintas maneras.

La resolución de los exámenes ha sido labor de Juan Antonio Martínez García, Juan Carlos Alonso Gianonatti, Germán Jesús Rubio Luna, Segundo Pérez, Julio García Galavis, Enrique Castaños García, Antonio Cascales Vicente, Jesús y José María Amorena Erdozáin..

Agradezco la generosa e importante aportación de cada uno de ellos.

Cuando la comisión organizadora de las pruebas EBAU ofrece la resolución o soluciones de las pruebas también se adjuntan esos archivos oficiales.

Tienen la intención de ser una web dinámica e ir creciendo poco a poco, y se agradecen aportaciones para corregir o añadir algún examen que falte en nuestra abundante oferta.

Solo aparecen los exámenes a partir del 2017, año en que se implantó la LOMCE y cambiaron los contenidos de las pruebas.

De distinta autores y de diferentes institutos, con enunciado y problemas resueltos de varios años.

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Con exámenes resueltos de Navarra

http://multiblog.educacion.navarra.es/jamorena/files/2019/09/Examen-ordinario-de-2019.pdf

Con exámenes resueltos de Andalucía

http://matestube.blogspot.com/2019/06/2-bachillerato-examen-matematicas-ii.html

Con exámenes resueltos de Andalucía

https://www.emestrada.org/2019-septiembre-examen-selectividad-matematicas-andalucia/

Con exámenes resueltos de Cataluña
http://universitats.gencat.cat/ca/pau/model_examens/

Autor: Isaac Musat. Problemas de la Comunidad de Madrid. Sólo enunciados, pero de muchos años. Organizados por materias.
http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
Del mismo autor. Problemas resueltos de Madrid y Valencia. Los del año 2019 a partir de la página 503.
http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

Centro aragonés de Tecnologías para la educación
http://catedu.es/matematicas_mundo/PAU/PAU.htm

Exámenes de Selectividad de Extremadura resueltos. De autor: Vicente González Valle. Organizados por materias: Análisis, Álgebra, Geometría y Probabilidad y Estadística
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf

Autor: Pedro Reina. Exámenes de selectividad resueltos de la Comunidad de Madrid hasta el año 2015
http://pedroreina.net/pau/

Página de Orientación Andújar con exámenes resueltos hasta el año 2011.
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/

Selectividad de la Comunidad de Madrid hasta el 2015
http://www.ejerciciosmatematicas.net/selectividad/

Autor: Segundo Pérez. Selectividad en la comunidad valenciana hasta el 2019
http://www.segundoperez.es/

Selectividad del País Vasco hasta el 2019.
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

Varias comunidades, varios exámenes resueltos
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-
tic/18008841a/helvia/aula/archivos/repositorio/0/117/html/selectividadmatematicas/index.html

Vídeos con las soluciones de exámenes
https://www.youtube.com/watch?v=DJFSsrvY1BM

Las universidades en ocasiones editan las soluciones de los problemas que se han propuesto.

SELECTIVIDAD

MATEMÁTICAS II

ÍNDICE