Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

A la vista de la polémica que ha suscitado el examen de Matemáticas II de Valencia ha surgido la idea de hacer dos libros nuevos de Textos Marea Verde, con los exámenes resueltos de 2019 de todas las comunidades autónomas.

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

Textos Marea Verde

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Andalucía

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Óscar Rey Clemente

Francisco Javier Ros Castellón

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

(2,5 puntos) Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camisera lisa necesita $70\ g$ de algodón y $20\ g$ de poliéster y para cada camiseta estampada $60\ g$ de algodón y $10\ g$ de poliéster. La empresa dispone para ello de $4200\ g$ de algodón y $800\ g$ de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Problema A.2:

Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$.

a) **(1 punto)** Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica que sean paralelas a la recta $y = 3x - 3$.

b) **(1 punto)** Estudie la monotonía y la curvatura de la función f.

c) **(0.5 puntos)** Calcule $\int f(x)dx$.

Problema A.3:

El $65\ \%$ de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el $75\ \%$ de los turistas que se hospedan en la capital y el $15\ \%$ de los que se hospedan en zonas rurales, lo hacen en hoteles, mientras que el resto lo hace es apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) **(1 punto)** Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

Problema A.4:

Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partirlo político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al $97\ \%$ para la proporción de individuos que piensen votar a ese partido en dicha ciudad.

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al $2\ \%$.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) **(0.5 puntos)** Razone si la matriz A es simétrica.
b) **(1 punto)** Calcule A^{-1}.
c) **(1 punto)** Resuelva la ecuación matricial $2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = O$.

Problema B.2:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & si \quad x < 0 \\ x^2 + a & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) **(1 punto)** Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, estudie la derivabilidad de f.
b) **(1.5 puntos)** Para $a = -2$, estudie la monotonía y curvatura de la función f. ¿Tiene algún punto de inflexión?

Problema B.3:

El 69 % de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35 % películas y el 18 % no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que vea series o películas.
b) **(1 punto)** Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.
c) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

Problema B.4:

Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:

$$10 \qquad 17 \qquad 8 \qquad 27 \qquad 6 \qquad 9 \qquad 32 \qquad 5 \qquad 21$$

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional.
b) **(1 punto)** Con una confianza del 95,5 %, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1,5 minutos?

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
Revisor: Luis Carlos Vidal

SOLUCIONES OPCIÓN A CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camisera lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4 200 g de algodón y 800 g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Solución:

Se trata de un problema de *Programación Lineal*. Tenemos que obtener, por tanto, la *función objetivo* a optimizar (en este caso maximizar) y las *restricciones* a las que está sujeta.

Los puntos del plano que cumplan todas las restricciones estarán en una región del plano llamada *región factible*. La *solución óptima* será aquella que optimiza la función objetivo. Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

Dispongamos los datos del problema en una tabla:

Camisetas	Número de camisetas	Algodón	Poliéster	Beneficio
Lisas	x	$70x$	$20x$	$5x$
Estampadas	y	$60y$	$10y$	$4y$
Total		$70x+60y$	$20x+10y$	$5x+4y$

Las **restricciones** del problema son[1]:

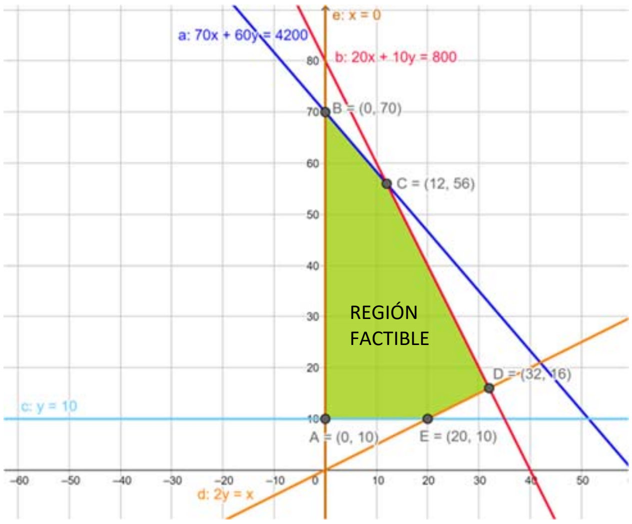
$$\left.\begin{array}{r}70x+60y\le 4\,200\\ 20x+10y\le 800\\ y\ge 10\\ 2y\ge x\\ x\ge 0\end{array}\right\}$$

Y la **función objetivo** que tenemos que maximizar es:

$$F(x,y)=5x+4y$$

La representación de la región factible es:

[1] Como cada camiseta lisa necesita 70 g de algodón, una estampada 60 g y disponemos de 4200 g de algodón, nuestra primera restricción será $70x+60y\le 4200$. De la misma manera se obtendrían las siguientes restricciones.



Los vértices de la región factible son los puntos:

$$A(0,10)$$
$$B(0,70)$$
$$C(12,56)$$
$$D(32,16)$$
$$E(20,10)$$

Estos puntos se obtienen como intersección de las rectas correspondientes. Así, el punto $A(0,10)$ se obtiene como intersección de las rectas $x=0$, $y=10$, etc.

Vértice A	Vértice B	Vértice C	Vértice D	Vértice E
$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=10 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} x=0 \\ 70x+60y=4200 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} 70x+60y=4200 \\ 20x+10y=800 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} 20x+10y=800 \\ 2y=x \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} y=10 \\ 2y=x \end{matrix}\right\}$
$x=0, y=10$	$x=0, y=70$	$x=12, y=56$	$x=32, y=16$	$x=20, y=10$

Sabemos que el máximo se encuentra en algún vértice de la región factible, por lo que evaluamos la función objetivo $F(x,y)=5x+4y$ en cada uno de ellos.

Para $A(0,10)$ obtenemos que $F(0,10)=5\cdot 0+4\cdot 10=40$

Para $B(0,70)$, obtenemos que $F(0,70)=5\cdot 0+4\cdot 70=280$

Para $C(12,56)$, tenemos que $F(12,56)=5\cdot 12+4\cdot 56=284$

Para $D(32,16)$, tenemos que $F(32,16)=5\cdot 32+4\cdot 16=224$

Para $E(20,10)$, tenemos que $F(20,10)=5\cdot 20+4\cdot 10=140$

Por tanto, el máximo se alcanza en el punto $C(12,56)$ y es 284.

Es decir, se deben fabricar $\mathbf{12}$ camisetas lisas y $\mathbf{56}$ camisetas estampadas para obtener un beneficio máximo de $\mathbf{284}$ €.

Problema A.2:

Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$.

a) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica que sean paralelas a la recta $y = 3x - 3$.

b) Estudie la monotonía y la curvatura de la función f.

c) Calcule $\int f(x)dx$

Solución:

a) Como la recta tangente pedida tiene que ser paralela a la recta $y = 3x - 3$, la pendiente ha de ser 3, luego $f'(x) = 3$. Por tanto,

$$f'(x) = 3 \Rightarrow 3x^2 - 9 = 3 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm 2$$

Así pues, los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de la función f es paralela a la recta $y = 3x - 3$ son $x = 2$ y $x = -2$.

Obtendremos por ello dos rectas tangentes a la gráfica de la función que serán paralelas a la recta dada.

Ecuación de la recta tangente en $x = 2$

Sabemos que la ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en un punto $x = a$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Por tanto, la ecuación de la tangente en $x = 2$ vendrá dada por:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

Como

$$f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2 + 2 = -8$$

y

$$f'(2) = 3$$

sustituyendo obtenemos que:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y + 8 = 3(x - 2)$$

de donde $y = 3x - 14$ es la ecuación de la recta tangente en $x = 2$.

Ecuación de la recta tangente en $x = -2$

De igual forma, calcularemos la ecuación de la tangente en $x = -2$.

Como

$$f(-2) = (-2)^3 - 9 \cdot (-2) + 2 = 12$$

y

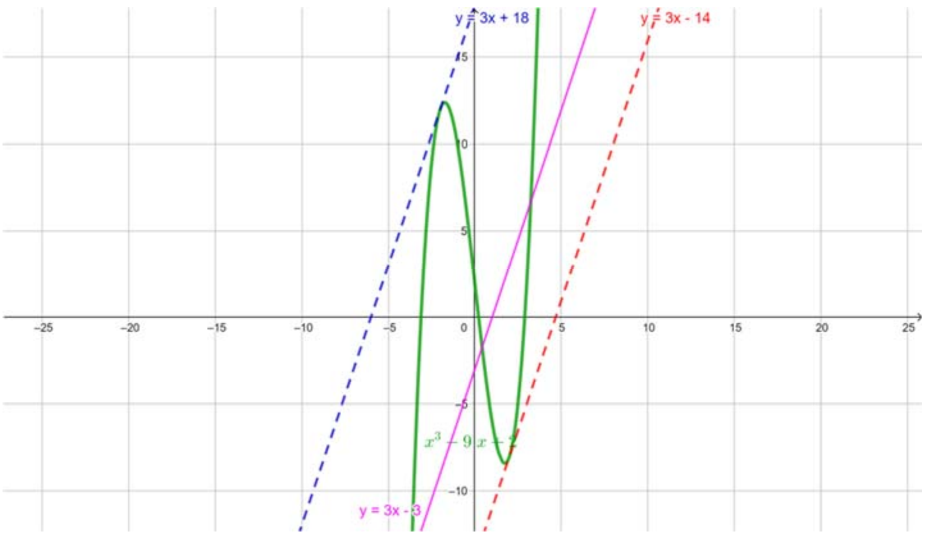
$$f'(-2) = 3$$

entonces

$$y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \Rightarrow y - 12 = 3(x+2) \Rightarrow y = 3x + 18$$

De donde $y = 3x + 18$ es la ecuación de la recta tangente en $x = -2$.

Concluimos por tanto que las rectas tangentes a la gráfica de la función f que son paralelas a la recta dada son: $\boldsymbol{y = 3x - 14}$ y $\boldsymbol{y = 3x + 18}$.



b) Monotonía

Para el estudio de la monotonía calcularemos la derivada primera y la igualaremos a cero:

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Obtenemos así los puntos de posible cambio de signo de la derivada. En aquellos intervalos o semirrectas en los que el signo de la derivada primera sea positiva la función será creciente y en los que tenga signo negativo será decreciente.

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

La función es, por tanto, **creciente en** $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ **y decreciente en** $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Tiene un máximo relativo en $(-\sqrt{3},\ 6\sqrt{3} + 2)$ y un mínimo relativo en $(\sqrt{3},\ -6\sqrt{3} + 2)$.

Curvatura

Para el estudio de la curvatura procederemos de forma análoga a la monotonía pero estudiando el signo de la derivada segunda. Calculamos pues la derivada segunda y la igualamos a cero:

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ +\infty)$
Signo de $f''(x)$	$-$	$+$
	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

La función es **convexa en** $(-\infty, \mathbf{0})$ **y cóncava en** $(\mathbf{0}, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $(0, 2)$.

c) La integral pedida es:

$$\int f(x)dx = \int (x^3 - 9x + 2)dx = \int x^3 dx - 9\int x dx + 2\int dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 2x + C$$

$$\boldsymbol{\int f(x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 2x + C}$$

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
Revisor: Luis Carlos Vidal

Problema A.3:

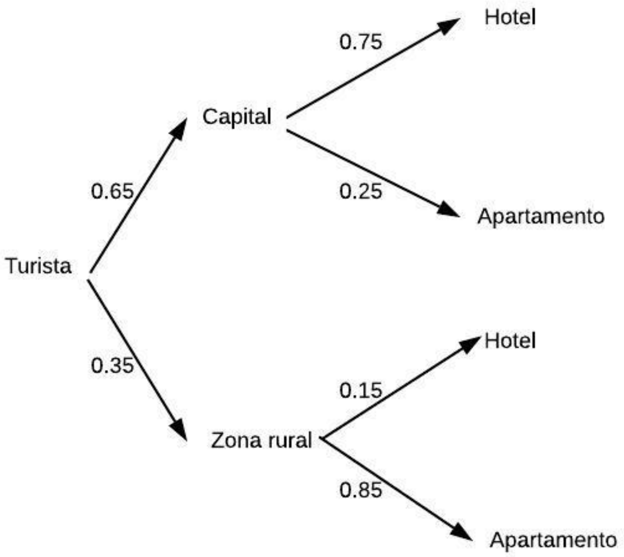
El 65 % de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75 % de los turistas que se hospedan en la capital y el 15 % de los que se hospedan en zonas rurales, lo hacen en hoteles, mientras que el resto lo hace es apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

Solución:

a) Si disponemos los datos del problema en un diagrama en árbol quedaría de la siguiente forma:



Entonces:

$P(Hotel) = 0.65 \cdot 0.75 + 0.35 \cdot 0.15 = 0.54$

La probabilidad de que se haya hospedado en un hotel es: $\boldsymbol{P(Hotel) = 0.54}$

b) Como $P(Hotel) = 0.54$, entonces $P(Apartamento) = 1 - P(Hotel) = 1 - 0.54 = 0.46$

Por tanto,

$$P(Zona\ rural/Apartamento) = \frac{P(Zona\ rural\ y\ Apartamento)}{P(Apartamento)} = \frac{0.35 \cdot 0.85}{0.46} = 0.6467$$

$$\boldsymbol{P(Zona\ rural/Apartamento) = 0.6467}$$

Problema A.4:

Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partirlo político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.

a) Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de individuos que piensen votar a ese partido en dicha ciudad.

b) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al 2 %.

Solución:

a) El intervalo de confianza para la proporción, con un nivel de confianza $1-\alpha$ viene dado por:

$$I.C.(p) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0,1)$ que verifica $P\left(\mathcal{Z} \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha/2$.

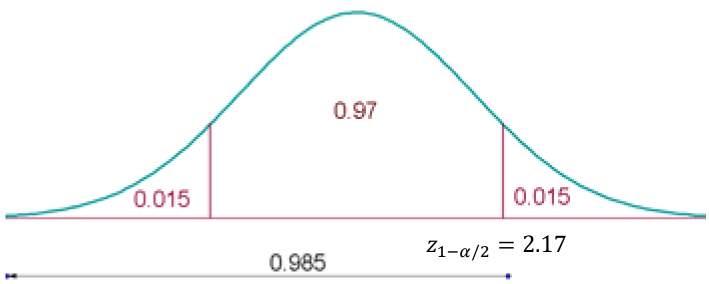
Con los datos del problema, la proporción de individuos que piensan votar al partido político en cuestión es:

$$\hat{p} = \frac{135}{300} = 0.45$$

Como tenemos un nivel de confianza del 97 %, entonces:

$$1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985$$

De $P\left(\mathcal{Z} \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.015 = 0.985$ mirando en las tablas de la Normal tipificada $\mathcal{N}(0,1)$ obtenemos que $z_{1-\alpha/2} = 2.17$



Luego, sustituyendo en la expresión del intervalo de confianza para la proporción, tenemos:

$$I.C.(p) = \left(0.45 - 2.17\sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{300}}, \quad 0.45 + 2.17\sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{300}}\right) = (0.3877, 0.5123)$$

$$\boldsymbol{I.C.(p) = (0.3877, 0.5123)}$$

b) El error máximo admisible (cota de error) para la estimación de la proporción p viene dado por la expresión:

$$\mathcal{E} = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}$$

Sustituyendo nuestros datos en dicha expresión obtenemos que:

$$0.02 = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{n}} \Rightarrow n = 2913.63 \simeq 2914$$

Luego, el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al 2 % es de **2 914** individuos.

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
Revisor: Luis Carlos Vidal
LibrosMareaVerde.tk

SOLUCIONES OPCIÓN B CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

a) *Razone si la matriz A es simétrica.*
b) *Calcule A^{-1}.*
c) *Resuelva la ecuación matricial $2X\cdot A-A^2-3I_3=O$.*

Solución:

a) Una matriz cuadrada es simétrica si coincide con su traspuesta, es decir, A simétrica si $A=A^t$.

Como

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\neq A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

La matriz A **no** es simétrica.

b) Sabemos que una matriz cuadrada tiene inversa si $|A|\neq 0$, y podemos obtenerla mediante la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A^t)$$

En nuestro caso,

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

luego existe A^{-1} y vale:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A^t)=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-2 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -2\\ -2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -2\\ -2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}}$$

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
Revisor: Luis Carlos Vidal
LibrosMareaVerde.tk

c) Resolvamos la ecuación matricial:

$$2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = O$$

$$2X \cdot A = A^2 + 3I_3$$

$$2X = (A^2 + 3I_3) \cdot A^{-1} = A + 3A^{-1}$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot (A + 3A^{-1})$$

Por tanto,

$$X = \frac{1}{2}(A + 3A^{-1}) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -8 & -6 \\ -8 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 3 & 2 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Así pues, la solución a nuestra ecuación matricial es:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{-4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-1/2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7/2} \end{pmatrix}$$

Problema B.2:

Sea la función $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & si \quad x<0\\ x^2+a & si \quad x\geq 0\end{cases}$

a) Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, estudie la derivabilidad de f.
b) Para $a=-2$, estudie la monotonía y curvatura de la función f. ¿Tiene algún punto de inflexión?

Solución:

a) La rama $\frac{1}{x-1}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$, por tanto, también será continua y derivable en $x<0$.

Además, la función polinómica x^2+a es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por lo que lo será en $x>0$.

Por tanto, sólo tenemos que estudiar la continuidad en $x=0$.

Sabemos que una función $y=f(x)$ es continua en un punto $x=a$ si, y sólo si

$$f(a)=\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)$$

Veamos, pues, si se cumple que $f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$

1) $f(0)=0^2+a=a$
2) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0-1}=-1$
3) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+a)=0^2+a=a$

Por tanto, igualando los límites obtenemos que $a=-1$.

Luego para $\boldsymbol{a=-1}$ la función es continua en $x=0$ y, por tanto, en $\mathbb{R}$.

Estudiemos a continuación la derivabilidad de f para ese valor de a.

Si $a=-1$ tenemos que:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x<0\\[2ex] x^2-1 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

y su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x<0\\[2ex] 2x & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

La función f será derivable en $x=0$ si $f'(0^-)=f'(0^+)$.

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(0-1)^2} = -1$$

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 2\cdot 0 = 0$. Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$:

La función no es derivable en $x = 0$ para $a = -1$, luego sólo es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Para $a = -2$ la función f es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Para el estudio de la monotonía necesitamos conocer el signo de la derivada primera $f'(x)$. En los puntos en los que $f'(x) > 0$ la función será creciente y si $f'(x) < 0$ la función será decreciente.

Calculamos, por tanto, $f'(x)$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Y resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$.

Para $x < 0$ tenemos $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ que no se anula para ningún valor de x. De hecho, siempre es negativa ya que es cociente de un número negativo y un cuadrado. Por tanto, la función f es decreciente para $x < 0$.

Para $x > 0$ tenemos que $f'(x) = 2x > 0$ ya que al ser $x > 0$ el producto $2x$ será positivo. Por tanto, la función f es creciente para $x > 0$.

En resumen, la función f es decreciente (↘) en $(-\infty, 0)$ y creciente (↗) en $(0, +\infty)$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$-$	$+$
	Decreciente ↘	Creciente ↗

Pasemos a continuación al estudio de la curvatura. Para ello debemos estudiar el signo de la derivada segunda $f''(x)$.

Como

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^3} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Para $x < 0$ tenemos que $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} < 0$ ya que es numerador es positivo y el denominador negativo. Por tanto, f es convexa (∩) en $(-\infty, 0)$.

Para $x > 0$ tenemos que $f''(x) = 2 > 0$ luego f es cóncava (∪) en $(0, +\infty)$.

En resumen

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo de $f''(x)$	$-$	$+$
	Convexa (∩)	Cóncava (∪)

La función es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$. Pero la función no tiene punto de inflexión en $x = 0$ ya que no es continua en dicho punto.

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
Revisor: Luis Carlos Vidal

Problema B.3:

El $69\ \%$ *de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el* $35\ \%$ *películas y el* $18\ \%$ *no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.*

a) Calcule la probabilidad de que vea series o películas.
b) Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

Solución:

Sean los sucesos S: "Ver series" y P: "Ver películas". Entonces, según los datos del enunciado:

$$P(S) = 0.69$$
$$P(P) = 0.35$$
$$P(\bar{S} \cap \bar{P}) = 0.18$$

a) Como por las leyes de Morgan $\bar{S} \cap \bar{P} = \overline{S \cup P}$, tenemos que:

$P(\bar{S} \cap \bar{P}) = P(\overline{S \cup P}) = 1 - P(S \cup P) = 0.18 \Rightarrow P(S \cup P) = 1 - 0.18 = 0.82.$

$$\boldsymbol{P(S \cup P) = 0.82.}$$

b) La probabilidad de ver películas sabiendo que ve series vendrá dada por la expresión:

$$P(P/S) = \frac{P(P \cap S)}{P(S)}$$

Debemos, por tanto, calcular previamente $P(P \cap S)$.

Como

$$P(P \cup S) = P(P) + P(S) - P(P \cap S)$$

Sustituyendo las probabilidades conocidas tenemos que:

$$0.82 = 0.35 + 0.69 - P(P \cap S)$$

de donde

$$P(P \cap S) = 0.22$$

Ya estamos en condiciones de obtener la probabilidad pedida:

$$P(P/S) = \frac{P(P \cap S)}{P(S)} = \frac{0.22}{0.69} = 0.3188$$

$$\boldsymbol{P(P/S) = 0.3188}$$

c) La probabilidad de que vea series y no vea películas se obtiene de la siguiente manera:

$$P(S \cap \bar{P}) = P(S) - P(S \cap P) = 0.69 - 0.22 = 0.47$$

$$\boldsymbol{P(S \cap \bar{P}) = 0.47}$$

Problema B.4:

Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 *minutos. Se elige al azar una muestra de* 9 *empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:*

$$10 \quad 17 \quad 8 \quad 27 \quad 6 \quad 9 \quad 32 \quad 5 \quad 21$$

a) Determine un intervalo de confianza al $92\ \%$ *para la media poblacional.*
b) Con una confianza del $95.5\ \%$*, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a* $1{,}5$ *minutos?*

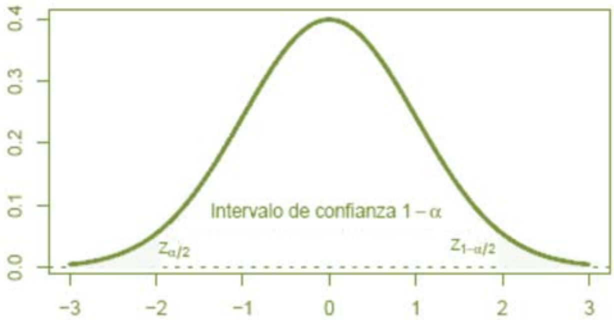
Solución:

Sabemos que la media muestral $\bar{x}$ es el estimador de la media poblacional μ y que sigue una distribución $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Es decir, $\bar{x} \backsim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

También es sabido que el intervalo de confianza para estimar la media viene dado por la expresión:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ son los puntos críticos de la variable aleatoria Normal tipificada $\mathcal{Z} \backsim \mathcal{N}(0,1)$ que verifican que $P\left(\mathcal{Z} \le z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha/2$.



Además, el error máximo de la estimación es:

$$\mathcal{E} = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

para el intervalo de la media poblacional, de donde el tamaño mínimo de la muestra necesario para estimar la media poblacional con un error menor de $\mathcal{E}$ es:

$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{\mathcal{E}}\right)^2$$

a) La media muestral viene dada por:

$$\bar{x} = \frac{10 + 17 + 8 + 27 + 6 + 9 + 32 + 5 + 21}{9} = \frac{135}{9} = 15$$

Como la desviación típica es $\sigma = 8$, el tamaño muestral es $n = 9$ y el nivel de confianza

$$1 - \alpha = 92\ \% = 0.92$$

Entonces $\alpha = 0.08$, con lo que $1 - \alpha/2 = 0.96$.

Por tanto,

$$P(\mathcal{Z} \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.96$$

En la tabla de la Normal tipificada $\mathcal{N}(0,1)$ debemos encontrar el punto que acumula una probabilidad de 0.96. El más próximo es el que acumula una probabilidad de 0.9599 que corresponde al punto 1.75, luego $z_{1-\alpha/2} = 1.75$.

Si interpoláramos entre 0.9599 y 0.9608 tendríamos que $z_{1-\alpha/2} = 1.751$.

Por tanto, como el intervalo de confianza para la media poblacional viene dado por:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

tendremos que

$$I.C.(\mu) = \left(15 - 1.75 \cdot \frac{8}{\sqrt{9}}, 15 + 1.75 \cdot \frac{8}{\sqrt{9}}\right) \simeq (10.3333, 19.6667)$$

$$\boldsymbol{I.C.(\mu) \simeq (10.3333, 19.6667)}$$

b) Tenemos que:

Desviación típica	$\sigma = 8$
Error	$\mathcal{E} < 1.5$
Nivel de confianza	$1 - \alpha = 95.5\% = 0.955$ de donde $\alpha = 0.045$
	Es decir,

$$\alpha/2 = \frac{0.045}{2} = 0.0225$$

Como

$$P\left(\mathcal{Z} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0.0225 = 0.9775$$

mirando en las tablas de la $\mathcal{N}(0,1)$ vemos que las más próximas son 0.9772 y 0.978, que corresponden a los puntos 2.00 y 2.01, por lo que el punto crítico $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ será la media de ambos, es decir,

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{2.00 + 2.01}{2} = 2.005$$

Como el error $\mathcal{E} < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos que

$$n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\mathcal{E}}\right)^2 = \left(\frac{2.005 \cdot 8}{1.5}\right)^2 \simeq 114.3474$$

Por tanto, el tamaño mínimo de la muestra para el tiempo medio con un error inferior a 1.5 minutos es $\boldsymbol{n = 115}$ empleados.

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS

CURSO 2018–2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

(SEPTIEMBRE)

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste a los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

a) **(1 punto)** Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:
   1) $A \cdot A^t$ es una matriz simétrica.
   2) $A \cdot A^t + B$ posee inversa.

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $B \cdot X + A = C$.

EJERCICIO 2

El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x) = 2(2x - 1)^2 + 1$, con $0 \le x \le 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a) **(1 punto)** Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función C(x).
b) **(0.75 puntos)** Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?
c) **(0.75 puntos)** Realice un esbozo de la gráfica de la función C(x).

EJERCICIO 3

Una marca de patinetes eléctricos fabrica tres modelos distintos A, B y C. El modelo A supone el 25% de su producción, el B el 40% y el resto de la producción corresponde al modelo C. Transcurridos tres meses desde su venta, se comprobó que el 15% de patinetes del modelo A, el 10% del B y el 12% del C había presentado alguna avería. Se elige al azar un patinete de esta marca.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.
b) **(0.5 puntos)** Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?
c) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C.

EJERCICIO 4

Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo, con un 92% de confianza, para la puntuación media de los participantes en dicho concurso.
b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98%.

Autor: Oscar Rey Clemente
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS

CURSO 2018–2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

(SEPTIEMBRE)

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste a los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar 1 kg de concentrado A se necesitan 4.5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7.5 kg de grano de Colombia y 1.5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67.5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) **(1.75 puntos)** Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.
b) **(0.25 puntos)** Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.
c) **(0.5 puntos)** Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo de tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos kilogramos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

EJERCICIO 2

De una cierta función f, sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

a) **(1 punto)** Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.
b) **(0.75 puntos)** Determine la curvatura de f y halle la abscisa de su punto de inflexión.
c) **(0.75 puntos)** Calcule la función f, sabiendo que su gráfica pasa por el punto (-1, 3).

EJERCICIO 3

De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

$$P(A \cap B) = 0.2 \qquad P(A \cup B) = 0.4 \qquad P(A / B) = 0.8$$

a) **(1.2 puntos)** Calcule $P(B)$ y $P(A)$.
b) **(0.5 puntos)** ¿Son los sucesos A y B independientes? Razone la respuesta.
c) **(0.8 puntos)** Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

EJERCICIO 4

Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22% de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.

a) **(1.5 puntos)** Para un nivel de confianza del 92%, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.
b) **(1 punto)** Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizados por causas debidas al tabaco sea inferior al 3%.

SOLUCIONES OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}7&-12&16\\-1&7&12\end{pmatrix}$$

a) Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) $A\cdot A^t$ es una matriz simétrica.

2) $A\cdot At+B$ posee inversa.

b) Resuelva la ecuación matricial $B\cdot X+A=C$.

Solución:

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}7&-12&16\\-1&7&12\end{pmatrix}$$

a1) Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) $A\cdot At$ es una matriz simétrica.

Calculamos la matriz $E=A\cdot At$ = $\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

Vemos que D es simétrica, ya que $D=Dt$. Por lo tanto, la afirmación es cierta.

a2) $A\cdot At+B$ posee inversa.

Calculamos la matriz $E=A\cdot At\ +B$ = $\begin{pmatrix}5&-1\\-1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-3\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-4\\-3&2\end{pmatrix}$

$|E|$=6 · 2 – (-3) · (-4) = 0

Vemos que E no tiene inversa, ya que $|E|$ = 0. Por lo tanto, la afirmación es falsa.

$A\cdot At$ es una matriz simétrica es cierta y $A\cdot At+B$ posee inversa es falsa

b) Resuelva la ecuación matricial $B\cdot X+A=C$.

Resolvemos la ecuación matricial:

$B{\cdot}X+A=C\Rightarrow B{\cdot}X=C-A\Rightarrow B\text{-}1{\cdot}B{\cdot}X=B\text{-}1{\cdot}(C-A)\Rightarrow X=B\text{-}1{\cdot}(C-A)$

$|B|$=1 · 0 – (-2) · (-3) = 0

Calculamos $B^{-1}=\frac{(B^d)^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}'}{-6}=\frac{\begin{pmatrix}0&3\\2&1\end{pmatrix}}{-6}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}0&3\\2&1\end{pmatrix}$

$X=B^{-1}\cdot(C-A)=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}0&3\\2&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}7&-12&16\\-1&7&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&1&0\end{pmatrix}\right]=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}0&3\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&-12&18\\0&6&12\end{pmatrix}=$

$=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}0&18&36\\12&-18&48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3&-6\\-2&3&-8\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{X=B^{-1}\cdot(C-A)=\begin{pmatrix}0&-3&-6\\-2&3&-8\end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x) = 2(2x - 1)^2 + 1$, con $0 \le x \le 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$.
b) Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?
c) Realice un esbozo de la gráfica de la función $C(x)$.

Solución:

El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x) = 2(2x - 1)^2 + 1$, con $0 \le x \le 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a) Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$.

Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$C'(x) = 2\cdot 2\cdot(2x - 1)\cdot 2 = 16x - 8 = 0 \Rightarrow x = ½$

	(0, 1/2)	(1/2, 2)
Signo $C'(x)$	–	+
Función	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en (0, 1/2) y creciente en (1/2, 2).

Tiene un mínimo relativo en (1/2, 1).

b) Determinamos la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?

Nos piden el mínimo absoluto, que puede estar en los extremos del intervalo, es decir, en $x = 0$ o en $x = 2$, o en el mínimo relativo. Calculamos el valor que toma la función en esos puntos para ver cuál es el mínimo absoluto.

$C(0) = 3$

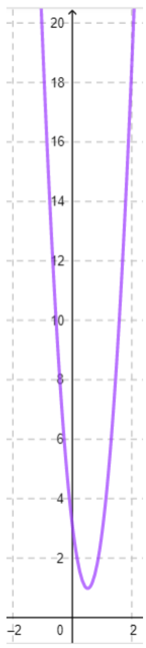
$C(1/2) = 1$

$C(2) = 19$

Luego, el coste mínimo se da con una producción de **0.5** millones de kilogramos y vale **1**.

c) Realizamos un esbozo de la gráfica de la función $C(x)$.

Como conocemos los valores de $C(x)$ en los extremos del intervalo y en el mínimo absoluto, conocemos los tramos de crecimiento y de decrecimiento y que, por ser cuadrática, tiene forma parabólica, podemos dibujar la gráfica de la función:



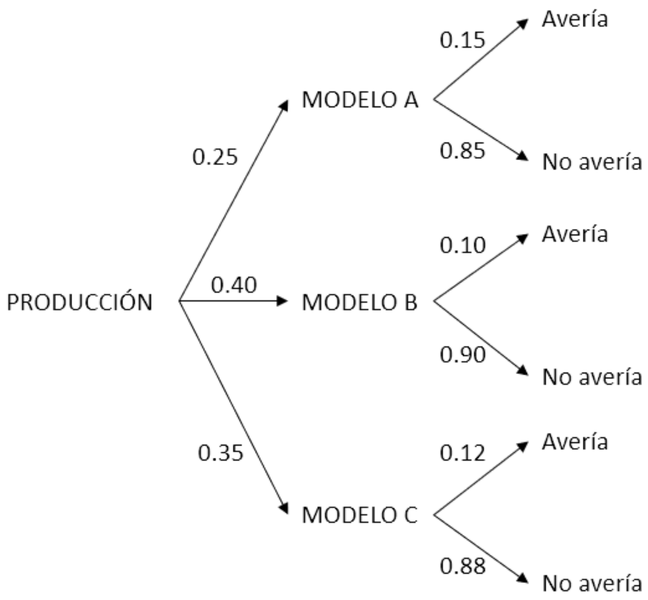
EJERCICIO 3

Una marca de patinetes eléctricos fabrica tres modelos distintos A, B y C. El modelo A supone el 25 % de su producción, el B el 40 % y el resto de la producción corresponde al modelo C. Transcurridos tres meses desde su venta, se comprobó que el 15 % de patinetes del modelo A, el 10 % del B y el 12 % del C había presentado alguna avería. Se elige al azar un patinete de esta marca.

- *a) Calcule la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.*
- *b) Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?*
- *c) Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C.*

Solución:

En primer lugar, hacemos un diagrama de árbol:



a) Calculamos la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.

$\mathrm{P(avería)} = 0.25{\cdot}0.15 + 0.40{\cdot}0.10 + 0.35{\cdot}0.12 = 0.1195$

$$P(\text{avería}) = \mathbf{0.1195}$$

b) Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?

$$\mathrm{P(No\ avería\ |A)} = \frac{\mathrm{P(No\ avería\ \cap A)}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{0.25 \cdot 0.85}{0.25} = 0.85$$

$$\mathrm{P(No\ avería\ |A)} = \mathbf{0.85}$$

c) Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C.

$$\mathrm{P(Avería\ \cup C)} = \mathrm{P(Avería)} + \mathrm{P(C)} - \mathrm{P(Avería\ \cap C)} = 0.1195 + 0.35 - 0.35 \cdot 0.12 = 0.4275$$

$$\mathrm{P(Avería\ \cup C)} = \mathbf{0.4275}$$

EJERCICIO 4

Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98 %. Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

a) Obtenga un intervalo, con un 92 % de confianza, para la puntuación media de los participantes en dicho concurso.

b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98%.

Solución:

Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

a) Obtenga un intervalo, con un 92 % de confianza, para la puntuación media de los participantes en dicho concurso.

$$\frac{1+0.92}{2} = 0.96 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.744$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$\text{I. C.} = (35 \pm 1.755 \cdot \frac{6}{\sqrt{64}} = (33.6837\,; 36.3162)$$

$$\text{I. C.} = (\mathbf{33.6837\,; 36.3162})$$

b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98 %.

$$\frac{1+0.98}{2} = 0.99 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.33$$

$$\text{E} = 2 = 2.33 \cdot \frac{6}{\sqrt{\text{n}}} \rightarrow \text{n} = 48.86 \cong 49$$

$$\text{Tamaño mínimo} = n = 48.86 \cong \mathbf{49}$$

SOLUCIONES OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar 1 kg de concentrado A se necesitan 4.5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7.5 kg de grano de Colombia y 1.5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67.5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

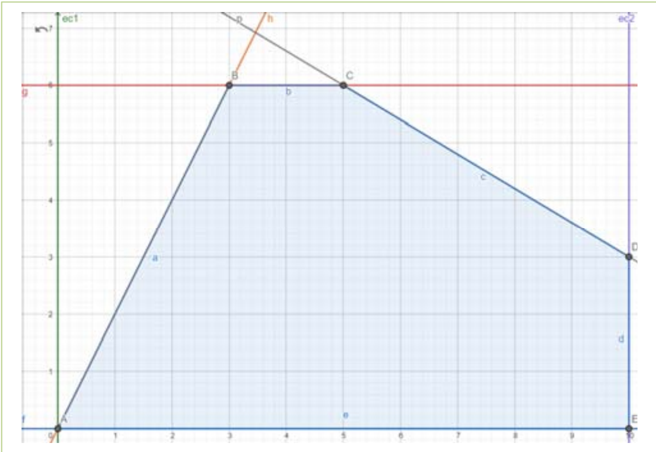
- *a) Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.*
- *b) Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.*
- *c) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo de tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos kilogramos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?*

Solución:

a) Representamos la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.

En primer lugar, hacemos una tabla con los datos del problema.

(Por cada kg de concentrado)	**Colombia**	**Etiopía**	**Costa Rica**
Concentrado A (x)	4.5 kg	3 kg	
Concentrado B (y)	7.5 kg		1.5 kg
Total disponible	67.5 kg	30 kg	9 kg



Las inecuaciones del problema son:

$$\begin{cases} 4.5x + 7.5y \leq 67.5 \\ 3x \leq 30 \\ 1.5y \leq 9 \\ x \geq y/2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Vamos a representar las inecuaciones y los límites que pueden tomar las distintas variables:

- De la 1º inecuación se obtiene un límite de la región: $y \leq \left(\frac{-4.5}{7.5}\right)x + \left(\frac{67.5}{7.5}\right)$ (p)
- De la 2ª inecuación se obtiene el límite máximo del concentrado A (x), puesto que: $x \leq 10$ (ec2)
- De la 3ª inecuación se obtiene el límite máximo del concentrado B (y), puesto que: $y \leq 6$ (g)
- De la 4ª inecuación se obtiene otro límite de la región: $y \leq 2x$ (h)
- De la 5ª inecuación se obtiene el límite mínimo del concentrado A (x), puesto que: $x \geq 0$ (ec1)
- De la 6ª inecuación se obtiene el límite mínimo del concentrado B (y), puesto que: $y \geq 0$ (*f*)

Los vértices son las intersecciones entre las rectas:

A = (0, 0) B = (3, 6) C = (5, 6) D = (10, 3) E = (10, 0)

b) Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

Autor: Oscar Rey Clemente
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Se puede comprobar que el punto (7, 5) no está dentro de la región representada en el apartado anterior y, por lo tanto:

No es posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

También podemos comprobar si se cumplen las inecuaciones propuestas:

$$\begin{cases} 4.5x + 7.5y \leq 67.5 \rightarrow 69 \leq 67.5 \rightarrow FALSO \\ 3x \leq 30 \rightarrow 21 \leq 30 \rightarrow CIERTO \\ 1.5y \leq 9 \rightarrow 7.5 \leq 9 \rightarrow CIERTO \\ x \geq y/2 \rightarrow 7 \geq 2.5 \rightarrow CIERTO \\ x \geq 0 \rightarrow 7 \geq 0 \rightarrow CIERTO \\ y \geq 0 \rightarrow 5 \geq 0 \rightarrow CIERTO \end{cases}$$

c) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo de tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos kilogramos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

(Por cada kg de concentrado)	**Colombia**	**Etiopía**	**Costa Rica**	**Beneficio**
Concentrado A (x)	4.5 kg	3 kg		2€/kg
Concentrado B (y)	7.5 kg		1.5 kg	4€/kg
Total disponible	67.5 kg	30 kg	9 kg	

Si calculamos el beneficio para los valores máximos de *(x,y)* de la región representada en el primer apartado: $F(x, y) = 2x + 4y$

- $F(A) = F(0, 0) = 0$
- $F(B) = F(3, 6) = 30$
- $F(C) = F(5, 6) = 34$
- $F(D) = F(10, 3) = 32$
- $F(E) = F(10, 0) = 20$

Luego, se deben fabricar 5 kg del concentrado del tipo A y 6 kg del concentrado del tipo B para obtener el máximo beneficio, siendo éste de 34 €.

EJERCICIO 2

De una cierta función f, sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

a) *Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.*
b) *Determine la curvatura de f y halle la abscisa de su punto de inflexión.*
c) *Calcule la función f, sabiendo que su gráfica pasa por el punto (-1, 3).*

Solución:

De una cierta función *f*, sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

a) Estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, y calculamos la abscisa de sus extremos relativos.

En primer lugar, igualamos la derivada a cero, obtenemos los posibles puntos de inflexión y estudiamos crecimiento o decrecimiento en cada intervalo.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1;\ x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo f'	+	–	+
Función f	C	D	C

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ y en el $(1, +\infty)$, y es decreciente en el intervalo $(-1, 1)$. Tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

b) Determinamos la curvatura de *f* y hallamos la abscisa de su punto de inflexión.

Calculamos la segunda derivada e igualamos a cero: $f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
Signo f''	–	+
Función f	Cóncava	Convexa

La función es cóncava en el intervalo $(-\infty, 0)$ y convexa en el intervalo $(0, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

c) Calcule la función *f*, sabiendo que su gráfica pasa por el punto (–1, 3).

En primer lugar, calculamos la integral de f':

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (3x^2 - 3) \cdot dx = 3\frac{x^3}{3} - 3x + C = x^3 - 3x + C$$

Como sabemos que la función pasa por el punto (–1, 3), entonces:

$$f(-1) = 3 \rightarrow (-1)^3 - 3(-1) + C = 3 \rightarrow C = 1$$

Por lo tanto, la función es: $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x + 1}$

EJERCICIO 3

De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

$$P(A \cap B) = 0.2 \qquad P(A \cup B) = 0.4 \qquad P(A / B) = 0.8$$

a) Calcule $P(B)$ y $P(A)$.

b) ¿Son los sucesos A y B independientes? Razone la respuesta.

c) Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

Solución:

De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

$$P(A \cap B) = 0.2 \qquad P(A \cup B) = 0.4 \qquad P(A / B) = 0.8$$

a) Calcule $P(B)$ y $P(A)$.

Sabemos que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \to 0.8 = \frac{0.2}{P(B)} \to P(B) = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \to 0.4 = P(A) + 0.25 - 0.2 \to P(A) = 0.35$$

$$\boldsymbol{P(B) = 0.25, P(A) = 0.35}$$

b) ¿Son los sucesos A y B independientes? Razone la respuesta.

Los sucesos son independientes si se cumple que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\left.\begin{array}{c} P(A \cap B) = 0.2 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.35 \cdot 0.25 = 0.0875 \end{array}\right\} \to P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Luego son dependientes.

c) Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

$$P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$\boldsymbol{P(A^c \cup B^c) = 0.8}$$

Autor: Oscar Rey Clemente
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

EJERCICIO 4

Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22 % de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.

a) Para un nivel de confianza del 92 %, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.

b) Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizados por causas debidas al tabaco sea inferior al 3 %.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 92 %, calculamos un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$P = \frac{22}{100} = 0.22$$

$$\frac{1+0.92}{2} = 0.96 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.755$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(0.22 - 1.755 \cdot \sqrt{\frac{0.22\cdot 0.78}{50}}, 0.22 - 1.755 \cdot \sqrt{\frac{0.22\cdot 0.78}{50}}\right) = (0.1175{,}0.3225)$$

$$\boldsymbol{I.C. = (0.1175, 0.3225)}$$

b) Determinamos cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizados por causas debidas al tabaco sea inferior al 3 %.

$$E = 0.03 = 1.755 \cdot \sqrt{\frac{0.22\cdot 0.78}{n}} \to n = 587.25 \cong 588\ expedientes$$

$$\text{Número de expedientes} = n = 587.25 \cong \mathbf{588}\ expedientes$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Aragón

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa Asso

Revisión: Soluciones publicadas por la Universidad de Zaragoza

http://matematicasentumundo.es/PAU/PAU.htm

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSSII	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

(*3,25 puntos*) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

a) (*2 puntos*) ¿Para qué valores de x e y se tiene $AB = C$?

b) (*1,25 puntos*) Calcular, si existe, la matriz inversa de C.

Problema A.2:

(*3,25 puntos*) El precio (en euros) de una acción de una compañía entre las nueve y las diez de la mañana ha venido dado por la siguiente expresión

$$P(x) = 12 - \frac{2x-8}{x^2+4x+4}$$

Donde $x \in [0\,, 60]$ es el tiempo en minutos desde las nueve de la mañana. Calcular:

a) (*0,25 puntos*) El precio de la acción a las nueve y media.

b) (*1 punto*) Entre las nueve y las diez de la mañana, ¿durante cuánto tiempo la acción ha tenido un precio mayor que 12 euros?

c) (*2 puntos*) El máximo y mínimo precio que ha alcanzado la acción entre las nueve y las diez de la mañana.

Problema A.3:

(*3,5 puntos*) Se va a realizar un estudio de mercado para estimar la proporción de consumidores que conoce una determinada marca de yogures. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple de consumidores, se va a preguntar a cada uno si conoce la marca y a partir de los resultados se construirá el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 91 %.

a) (*2 puntos*) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,08 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?

b) (*1,5 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño de 175 consumidores; les preguntamos y un total de 126 responden que conocen la marca. Calcular el intervalo de confianza al 91% para la proporción de consumidores que conocen la marca.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

Textos Marea Verde

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSSII	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

(3,25 puntos) Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el valor del beneficio en ese caso?

Problema B.2:

(3,25 puntos)

(2 puntos) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$, con $x \in \Re$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un máximo relativo en $x = -2$ con valor $f(-2) = -6$

(1,25 puntos) Calcular

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx$$

Problema B.3:

(3,5 puntos) Según los datos del Instituto Nacional de Estadística, el 49.3 % de la población aragonesa son hombres y el 50.7 % son mujeres. Del total de hombres, un 80.9 % tienen menos de 65 años; del total de mujeres, un 75.9 % tienen menos de 65 años.

(0,75 puntos) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de menos de 65 años?

(1 punto) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 65 años?

(1 punto) Elegimos una persona de Aragón de entre las que tienen menos de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

(0,75 puntos) Si se eligen al azar (con reemplazamiento) tres personas de Aragón, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las tres sea mujer?

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

a) *¿Para qué valores de x e y se tiene $AB = C$?*

b) *Calcular, si existe, la matriz inversa de C.*

Solución:

a) $A\,B = C \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} -2x-2y-1 & x-4y \\ -9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y-1 = 2 \\ x-4y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+4y = -6 \\ x-4y = -3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 5x = 9 \Rightarrow x = \frac{5}{9} \\ y = \frac{-3-2x}{2} = \frac{3}{10} \end{cases}$

Si $\boldsymbol{x = \frac{5}{9}}$ e $\boldsymbol{y = \frac{3}{10}}$ entonces $AB = C$

b) $Det\ C = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} = -19 \neq 0 \Rightarrow \exists\, C^{-1}$

$Adj\ C = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$C^{-1} = \frac{1}{DetC}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{19} & -\frac{3}{19} \\ -\frac{9}{19} & -\frac{2}{19} \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{19} & -\frac{3}{19} \\ -\frac{9}{19} & -\frac{2}{19} \end{pmatrix}}$$

Problema A.2:

El precio (en euros) de una acción de una compañía entre las nueve y las diez de la mañana ha venido dado por la siguiente expresión

$$P(x) = 12 - \frac{2x-8}{x^2+4x+4}$$

Donde $x \in [0\ ,\ 60]$ *es el tiempo en minutos desde las nueve de la mañana. Calcular:*

a) *El precio de la acción a las nueve y media.*

b) *Entre las nueve y las diez de la mañana, ¿durante cuánto tiempo la acción ha tenido un precio mayor que 12 euros?*

c) *El máximo y mínimo precio que ha alcanzado la acción entre las nueve y las diez de la mañana.*

Solución:

a) $$P(30) = 12 - \frac{60-8}{30^2+120+4} = 12 - \frac{52}{1024} = 11.95\ €$$

$$\mathbf{P(9:30) = P(30) = 11.95\ €.}$$

b) $$\left.\begin{array}{c} P(x) = 12 - \frac{2x-8}{x^2+4x+4} > 12 \\ x \in [0,60] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 12 - \frac{2x-8}{x^2+4x+4} > 12 \\ x \in [0,60] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \frac{12x^2+46x+56}{x^2+4x+4} > 12 \\ x \in [0,60] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} \frac{-2x+8}{x^2+4x+4} > 0 \\ x \in [0,60] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -2x+8 > 0 \\ x \in [0,60] \end{array}\right\} \Rightarrow x < 4$$

Luego la acción tuvo un valor mayor que 12 € durante **4** minutos, entre las 9 y las 9:04.

c) $$P(x) = 12 - \frac{2x-8}{(x+2)^2} = \frac{12x^2+46x+56}{(x+2)^2} \Rightarrow P'(x) = \frac{(24x+46)(x+2)^2 - 2(x+2)(12x^2+46x+56)}{(x+2)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P'(x) = \frac{(24x+46)(x+2) \quad -2(12x^2+46x+56)}{(x+2)^3} = \frac{2x-20}{(x+2)^3}$$

$$P'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 10$$

0	$(0,10)$	10	$(10,60)$	60	
$\frac{-20}{27}$	-	0	+	$\frac{100}{62^3}$	*Signo P´*
Decreciente	*Decreciente*	*Mínimo relativo*	*Creciente*	*Creciente*	*Monotonía de P*

Valoremos P en los extremos del intervalo $[0,60]$ y en el mínimo relativo

$$P(0) = \frac{56}{4} = 14\ € \qquad P(10) = \frac{12.10^2+46.10+56}{12^2} = \frac{1716}{144} \sim 11.92€$$

$$P(60) = \frac{12.60^2 + 46.60 + 56}{62^2} = \frac{46016}{3844} \sim 11.97\ €$$

Luego el valor máximo de la acción se alcanza a las **9** de la mañana y el valor mínimo a las **9:10**.

Problema A.3:

Se va a realizar un estudio de mercado para estimar la proporción de consumidores que conoce una determinada marca de yogures. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple de consumidores, se va a preguntar a cada uno si conoce la marca y a partir de los resultados se construirá el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 91 %.

- ***a)*** *Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0.08 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?*
- ***b)*** *Decidimos tomar una muestra de tamaño de 175 consumidores; les preguntamos y un total de 126 responden que conocen la marca. Calcular el intervalo de confianza al 91 % para la proporción de consumidores que conocen la marca.*

Solución:

Calculemos el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 91 %:

$$1-\alpha = 0{,}91 \Rightarrow \alpha = 0{,}09 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.955$$

El valor más cercano en la tabla es 0,954 correspondiente a $z_{\alpha/2} = 1.70$

a) La amplitud del intervalo de confianza debe ser menor o igual que 0.08 $\Rightarrow$ el error máximo admisible $E \leq 0.04$.

Suponemos que conoce la marca el 50 % de los individuos y por tanto, $p_r = 0.5$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}} \leq 0.04 \Rightarrow 1.70\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{n}} \leq 0.04 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.25}{n}} \leq \frac{0.04}{1{,}7} \Rightarrow \frac{0.25}{n} \leq \frac{0.004^2}{1.7^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{0.25\cdot 1.7^2}{0.004^2} \sim 451.56$$

La muestra debe ser al menos de **452** personas

b) En este caso $p_r = \frac{126}{175} = 0.72$

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por

$$\left(p_r - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}},\ p_r + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}\right) = \left(0.72-1.70\sqrt{\frac{0.72\cdot 0.28}{175}},\ 0.72+1.70\sqrt{\frac{0.72\cdot 0.28}{175}}\right) =$$

$$= (0.72-1.70\sqrt{0.001152},\ 0.72+1.70\sqrt{0.001152}) = (0.72-0.058,\ 0.72+0.058) = (0.662,\ 0.778).$$

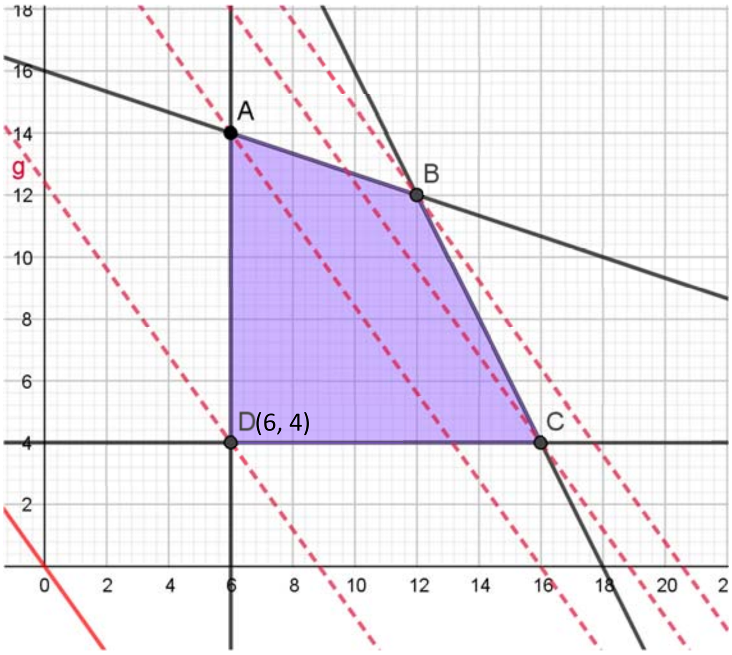
El intervalo de confianza para la proporción viene dado por $(\mathbf{0.662},\ \mathbf{0.778})$

SOLUCIONES OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el valor del beneficio en ese caso?

Solución:



Se trata de un problema de programación lineal.

Sean $x =$ nº de sillas $y =$ nº de taburetes

La función objetivo es

$$z = F(x, y) = 70x + 50y$$

Pretendemos maximizar z, con las restricciones:

$$\begin{cases} I_1: \quad x \geq 6 \\ I_2: \quad y \geq 4 \\ I_3: 4x + 2y \leq 72 \\ I_4: \quad x + 3y \leq 48 \end{cases}$$

La región factible S es el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones. Lo obtenemos gráficamente.

El semiplano solución de la inecuación I_1 está definido por la recta $x = 6$, paralela al eje OY. El punto O (0, 0) no cumple la inecuación $I_1 \Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 no contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_2 está definido por la recta $y = 4$, paralela al eje OX. El punto O (0, 0) no cumple la inecuación $I_2 \Rightarrow$ el semiplano solución de I_2 no contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $4x + 2y = 72$ que pasa por los puntos (0, 36) y (18, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_3 (4.0+2.0 $\leq$ 72)$\Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_4 está definido por la recta $x + 3y = 48$ que pasa por (0, 16) y (48, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_4 (0+3.0 $\leq$ 48)$\Rightarrow$ el semiplano solución de I_4 contiene a O.

La región factible es el polígono $ABCD$, intersección de estos cuatro semiplanos y la solución óptima se encuentra en uno de sus vértices.

Determinamos sus coordenadas

$$A \equiv \begin{cases} x = 6 \\ x + 3y = 48 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 6 \\ 3y = 42 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{42}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad A = (6, 14)$$

$$B \equiv \begin{cases} 4x + 2y = 72 \\ x + 3y = 48 \end{cases} \sim \begin{cases} 4x + 2y = 72 \\ -4x - 12y = -192 \end{cases} \sim \begin{cases} -10y = -120 \\ x = -3y + 48 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 12 \\ x = -36 + 48 \end{cases} \Rightarrow B = (12, 12)$$

$$C \equiv \begin{cases} y = 4 \\ 4x + 2y = 72 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 4 \\ x = \frac{-2y+72}{4} \end{cases} \Rightarrow \; C = (16, 4)$$

$$D \equiv \begin{cases} y = 4 \\ x = 6 \end{cases} \Rightarrow \; D = (6, 4)$$

Valoramos ahora la función objetivo en cada uno de ellos:

$z(A) = 70 \cdot 6 + 50 \cdot 14 = 1\,120$

$z(B) = 70 \cdot 12 + 50 \cdot 12 = 1\,440$

$z(C) = 70 \cdot 16 + 50 \cdot 4 = 1\,320$

$z(D) = 70 \cdot 6 + 50 \cdot 4 = 620$

El beneficio máximo es de **1 440 €** y se alcanza en el punto B. Por tanto, se deben fabricar **12** sillas y **12** taburetes para conseguirlo.

También puede obtenerse la solución gráficamente, trazando paralelas a $z = 0$ desde cada uno de los vértices de la región factible.

La paralela a la recta $z = 0$, trazada desde el vértice B es la que tiene mayor ordenada en el origen.

Problema B.2:

a) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$, con $x \in \Re$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un máximo relativo en $x = -2$ con valor $f(-2) = -6$

b) Calcular

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2}\right) dx$$

Solución:

$a)\ f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$ es una función continua y derivable en $\Re$ para $\forall\, a, b \in \Re$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ tiene en } x = -2 \text{ un máximo relativo} \Rightarrow f'(-2) = 3a(-2)^2 + 2b(-2) + 3 = 0 \\ f(-2) = -6 \quad \Rightarrow \quad a(-2)^3 + b(-2)^2 + 3(-2) - 6 = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12a - 4b = -3 \\ -8a + 4b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a = 3 \\ b = \frac{6+8a}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases}$$

Para que f tenga un máximo relativo en $x = -2$ con valor $f(-2) = -6$ debe valer $\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ y $\boldsymbol{b} = \mathbf{3}$.

$$b)\ \int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2}\right) dx = \left[\frac{5\sqrt{8x^2+1}}{8} - \frac{3e^{-4x^2}}{-8}\right]_0^1 = \left[\frac{5\sqrt{8x^2+1}+3e^{-4x^2}}{8}\right]_0^1 = \frac{5\sqrt{9}+3e^{-4}-(5+3)}{8} = \frac{7+3e^{-4}}{8}$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2}\right) dx = \frac{7+3e^{-4}}{8}}$$

Problema B.3:

Según los datos del Instituto Nacional de Estadística, el 49.3 % de la población aragonesa son hombres y el 50.7 % son mujeres. Del total de hombres, un 80.9% tienen menos de 65 años; del total de mujeres, un 75.9 % tienen menos de 65 años.

a) *Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de menos de 65 años?*

b) *Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 65 años?*

c) *Elegimos una persona de Aragón de entre las que tienen menos de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?*

d) *Si se eligen al azar (con reemplazamiento) tres personas de Aragón, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las tres sea mujer?*

Solución:

Sean los sucesos

A_1 =" la persona aragonesa elegida al azar es hombre" $P(A_1) = 0.493$

A_2 = "la persona aragonesa elegida al azar, es mujer" $P(A_2) = 0.507$

B = "la persona aragonesa elegida al azar, tiene menos de 65 años"

$$P(B/A_1) = 0.809 \qquad P(B/A_2) = 0.759$$

a) $A_2 \cap B$ = "ser una mujer de menos de 65 años"

$$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \cdot P(B/A_2) = 0.507 \cdot 0.759 = 0.384813.$$

$$\boldsymbol{P(A_2 \cap B) = 0.384813.}$$

b) $P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) = 0.809 \cdot 0.493 + 0.384813 = 0.78365.$

$$\boldsymbol{P(B) = 0.78365.}$$

c) Si ha ocurrido B, la probabilidad de que la persona elegida al azar sea mujer es:

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{0.384813}{0.78365} \sim 0.491$$

$$\boldsymbol{P(A_2/B) \sim 0.491}$$

d) El suceso "al menos una de las tres personas elegida es mujer" es el contrario de "ninguna persona elegida es mujer".

Si la elección se realiza con reemplazamiento, los sucesos:

M_i= "la persona elegida en el lugar *i* es mujer" *i = 1, 2, 3* son independientes.

$P(\text{"ninguna persona elegida es mujer"}) = P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}) = P(\overline{M_1})\,P(\overline{M_2})P(\overline{M_3}) = 0.493 \cdot 0.493 \cdot 0.493 \sim 0.12$

$P(\text{"al menos una de las tres personas elegida es mujer"}) = 1 - P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}) \sim 1 - 0.12 = 0.88$

$$P(\text{"al menos una de las tres personas elegida es mujer"}) = \mathbf{0.88}$$

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSSII	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

(*3,25 puntos*) Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B. El lote A incluye 1 kilo de manzanas, 5 kilos de naranjas y 1 kilo de peras, mientras que el lote B incluye 4 kilos de manzanas, 2 kilos de naranjas y 1 kilo de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener, al menos, 24 kilos de manzanas, 30 kilos de naranjas y 12 kilos de peras, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso?

Problema A.2:

(*3,5 puntos*) Dada la función

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1}$$

a) (*0,25 puntos*) Dominio de f.
b) (*0,75 puntos*) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) = 5$.
c) (*1 punto*) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
d) (*1,25 puntos*) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Problema A.3:

(*3,5 puntos*)

Se sabe que el peso de las manzanas de un agricultor tiene distribución normal con desviación típica igual a 20 g. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas del agricultor.

a) (*2 puntos*) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 93% tenga una amplitud menor o igual que 8 g.
b) (*1,5 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño 12. Pesamos las manzanas y obtenemos los siguientes resultados (en gramos)

178, 221, 196, 231, 210, 168, 203, 186, 196, 214, 230, 224

Calcular un intervalo de confianza al 93% para la media del peso de las manzanas del agricultor.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSSII	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

(*3,25 puntos*) Un hotel tiene habitaciones individuales (para una persona), dobles (para dos personas) y familiares (para cuatro personas). El hotel tiene un total de 144 habitaciones con una capacidad total de 312 personas; además, el número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de habitaciones de cada tipo que tiene el hotel.

Problema B.2:

(*3,5 puntos*)

a) (*2 puntos*) Tenemos 4000 euros para invertir en dos fondos M y N. Sea x la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo M e y la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo N; así, se cumple $x+y=4$. El beneficio que se obtiene, en euros, viene dado por

$$B = 10(2x+1)^2 y$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en cada fondo para obtener el máximo beneficio y cuál será ese beneficio máximo.

b) (*1,25 puntos*) Calcular

$$\int_0^1 \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right) dx$$

Problema B.3:

(*3,5 puntos*) Una empresa tiene 64 trabajadores repartidos en tres departamentos: Administración, Producción y Ventas. Se ha hecho un estudio sobre si los trabajadores saben inglés o no, con los siguientes resultados:

	Administración	Producción	Ventas
Sabe inglés	12	30	6
No sabe inglés	4	11	1

a)(*1 punto*) Elegimos al azar un trabajador de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

b) (*1 punto*) Elegimos al azar un trabajador de entre los que saben inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea del departamento de Ventas?

c) (*0,75 puntos*) Elegimos al azar un trabajador de la empresa. Sea A el suceso “el trabajador es del departamento de Administración” y B el suceso “el trabajador sabe inglés”. ¿Son los sucesos A y B independientes?

d) (*0,75 puntos*) Elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres trabajadores de la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo departamento?

SOLUCIONES OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B. El lote A incluye 1 kilo de manzanas, 5 kilos de naranjas y 1 kilo de peras, mientras que el lote B incluye 4 kilos de manzanas, 2 kilos de naranjas y 1 kilo de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener, al menos, 24 kilos de manzanas, 30 kilos de naranjas y 12 kilos de peras, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso?

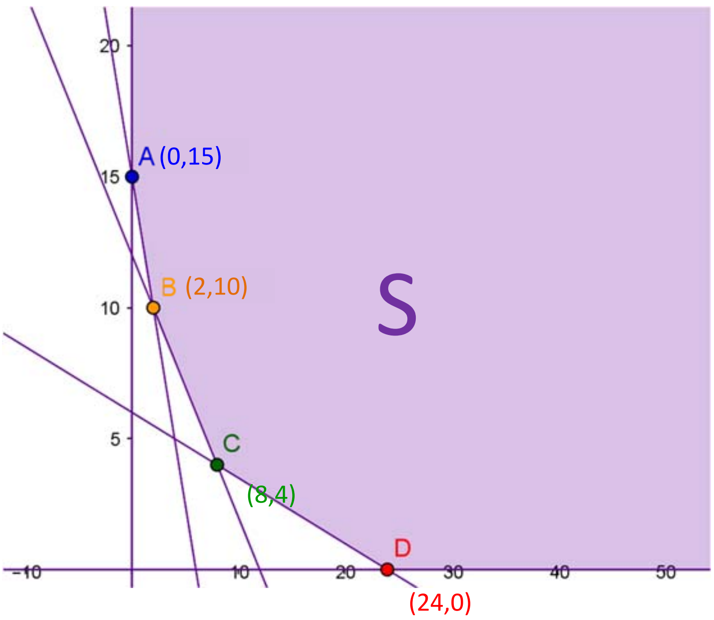
Solución:

Sean $x =$ nº lotes tipo A $\quad y =$ nº de lotes tipo B. La función objetivo es

$$z = F(x, y) = 8x + 10y$$

Pretendemos minimizar z, con las restricciones:

$$\begin{cases} I_1: & x \geq 0 \\ I_2: & y \geq 0 \\ I_3: & x + 4y \geq 24 \\ I_4: & 5x + 2y \geq 30 \\ I_5: & x + y \geq 12 \end{cases}$$



Las dos primeras inecuaciones situan a la solución del sistema en la zona positiva de los dos ejes de coordenadas.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $x + 4y = 24$ que pasa por los puntos (0, 6) y (4, 5). El punto O (0, 0) NO cumple la inecuación I_3 $(0 + 4 \cdot 0 < 24) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 NO contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_4 está definido por la recta $5x + 2y = 30$ que pasa por los puntos (0, 15) y (6, 0). El punto O (0, 0) NO cumple la inecuación I_4 $(5\cdot 0+2\cdot 0< 24)\Rightarrow$ el semiplano solución de I_4 NO contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_5 está definido por la recta $x + y = 12$ que pasa por los puntos (0, 12) y (12, 0). El punto O (0, 0) NO cumple la inecuación I_3 $(0 + 0 < 12)\Rightarrow$ el semiplano solución de I_5 NO contiene a O.

La región factible es el polígono abierto $ABCD$, intersección de estos cinco semiplanos y la solución óptima se encuentra en uno de sus vértices.

Determinamos sus coordenadas

$$A \equiv \begin{cases} x = 0 \\ 5x + 2y = 30 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ 2y = 30 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow \quad A = (0, 15)$$

$$B \equiv \begin{cases} 5x + 2y = 30 \\ x + y = 12 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x + 2y = 30 \\ -5x - 5y = -60 \end{cases} \sim \begin{cases} -3y = -30 \\ x = 12 - y \end{cases} \sim \begin{cases} y = 10 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow B = (2, 10)$$

$$C \equiv \begin{cases} x + y = 12 \\ x + 4y = 24 \end{cases} \sim \begin{cases} -x - y = -12 \\ x + 4y = 24 \end{cases} \sim \begin{cases} 3y = 12 \\ x = 24 - 4y \end{cases} \sim \begin{cases} y = 4 \\ x = 8 \end{cases} \Rightarrow C = (8, 4)$$

$$D \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x + 4y = 24 \end{cases} \Rightarrow D = (24, 0)$$

Valoramos ahora la función objetivo en cada uno de ellos:

$z(A) = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 15 = 150$

$z(B) = 8 \cdot 2 + 10 \cdot 10 = 116$

$z(C) = 8 \cdot 8 + 10 \cdot 4 = 104$

$z(D) = 8 \cdot 24 + 10 \cdot 0 = 192$

La solución óptima se alcanza en el punto C. Deberá encargar **8** lotes del tipo A y **10** lotes del tipo B. El gasto será entonces de **104 €**.

Problema A.2:

Dada la función

$$f(x)=\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}$$

a) *Dominio de f.*
b) *¿Para qué valores de x se cumple $f(x)=5$.*
c) *Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.*
d) *Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

Solución:

a) La función es cociente de dos polinomios, luego únicamente no está definida en los puntos en que se anula el denominador

a) $\mathbf{Dom}\ \boldsymbol{f}=\boldsymbol{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

b) $f(x)=\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}=5 \Rightarrow \frac{4x^2+4x+5}{2x+1}=\frac{5(2x+1)}{2x+1} \Rightarrow 4x^2+4x+5=10x+5 \Rightarrow 4x^2-6x=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(4x-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\end{cases}$

$f(x)=5$ para $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ y para $\boldsymbol{x}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

c) Empecemos por estudiar si hay asíntotas verticales

$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-}\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}=\frac{4}{0}=-\infty \qquad \lim_{x\to-\frac{1}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-}\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}=\frac{4}{0}=\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La recta $x=-\frac{1}{2}$ es una asíntota vertical

Veamos si hay horizontales

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}=\frac{\infty}{-\infty}=-\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$La función no tiene asíntotas horizontales.

Estudiamos finalmente la existencia de asíntotas oblicuas $y=mx+n$

$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}:x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+4x+5}{2x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}=2$

$n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+4x+5-4x^2-2x}{2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+5}{2x+1}=1$

Luego la recta $y=2x+1$ es asíntota oblicua en -∞

Análogamente $m' = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ y $n' = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = 1 \Rightarrow$ la recta $y = 2x + 1$ es también asíntota oblicua en $+\infty$.

La recta $\boldsymbol{y = 2x + 1}$ es asíntota oblicua.

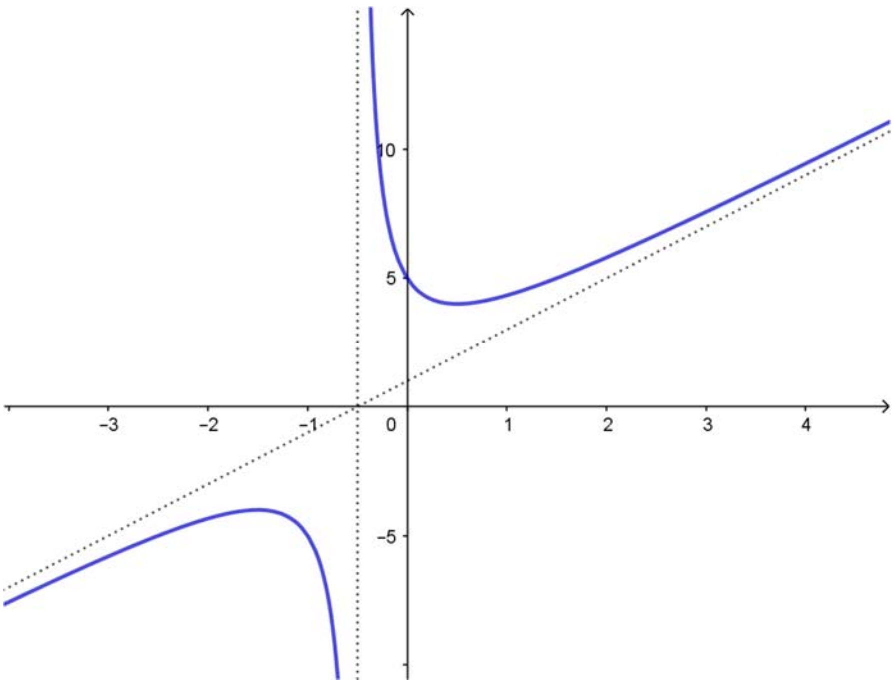
$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$ que es una asíntota vertical.

d) $f(x) = \frac{4x^2+4x+5}{2x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(8x+4)(2x+1)-2(4x^2+4x+5)}{(2x+1)^2} = \frac{8x^2+8x-6}{(2x+1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 8x^2 + 8x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8\pm\sqrt{64+192}}{16} = \frac{-8\pm 16}{16} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$		$-\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$	
+		0	-	$\nexists$	-	0	+	*Signo f´*
Creciente		*Máximo relativo*	*Decreciente*	$\nexists$	*Decreciente*	*Mínimo relativo*	*Creciente*	*Monotonía de f*

La función es creciente en $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ y decreciente en $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



Problema A.3:

Se sabe que el peso de las manzanas de un agricultor tiene distribución normal con desviación típica igual a 20 g. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas del agricultor.

a) *Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 93 % tenga una amplitud menor o igual que 8 g.*

b) *Decidimos tomar una muestra de tamaño 12. Pesamos las manzanas y obtenemos los siguientes resultados (en gramos)*

178, 221, 196, 231, 210, 168, 203, 186, 196, 214, 230, 224

Calcular un intervalo de confianza al 93 % para la media del peso de las manzanas del agricultor.

Solución:

Calculemos el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 93 %:

$$1-\alpha = 0.93 \Rightarrow \alpha = 0.07 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.965$$

El valor más cercano en la tabla es 0.9649 correspondiente a $z_{\alpha/2} = 1.81$

a) El radio el intervalo de confianza es $E = z_{\alpha/2}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y queremos sea menor que $\frac{8}{2} = 4$

$E = 1.81\ \frac{20}{\sqrt{n}} \leq 4$, n número natural $\Rightarrow \frac{36.2}{4} \leq \sqrt{n}$, n número natural $\Rightarrow 9.05^2 \leq n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 81.9025$\leq n$. El primer número natural que cumple esta desigualdad es 82.

Luego la muestra debe tener al menos **82** manzanas.

b) $\bar{x} = \frac{178+221+196+231+210+168+203+186+196+214+230+224}{12}$ = 204.75

El intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas viene dado por

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(204.75 - 1.81\ \frac{20}{\sqrt{12}}\ ,\ 204.75 + 1.81\ \frac{20}{\sqrt{12}}\right) = (194.30\ ,\ \ 215.20)$$

El intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas viene dado por $\mathbf{(194.30\ ,\ \ 215.20)}$

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Un hotel tiene habitaciones individuales (para una persona), dobles (para dos personas) y familiares (para cuatro personas). El hotel tiene un total de 144 habitaciones con una capacidad total de 312 personas; además, el número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de habitaciones de cada tipo que tiene el hotel.

Solución:

Sean x= "nº de habitaciones individuales" y = "nº de habitaciones dobles" z= "nº habitaciones familiares"

$$S \equiv \begin{cases} x + y + z & = 144 \\ x + 2y + 4z = 312 \\ y = 3(x+z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z & = 144 \\ x + 2y + 4z = 312 \\ -3x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$A:B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 144 \\ 1 & 2 & 4 & 312 \\ -3 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{F'_2 = F_2 - F_1 \\ F'_3 = F_3 + 3F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 144 \\ 0 & 1 & 3 & 168 \\ 0 & 4 & 0 & 432 \end{pmatrix}$$

El sistema S es equivalente a

$$S' \equiv \begin{cases} x + y + z & = 144 \\ y + 3z & = 168 \\ 4y & = 432 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 144 - y - z \\ z = \frac{168-y}{3} \\ y = \frac{432}{4} = 108 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 144 - 108 - 20 = 16 \\ z = \frac{168-108}{3} = 20 \\ y = 108 \end{cases}$$

El hotel tiene 16 habitaciones individuales, 108 habitaciones dobles y 20 familiares.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2:

a) *Tenemos 4000 euros para invertir en dos fondos M y N. Sea x la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo M e y la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo N; así, se cumple $x+y=4$. El beneficio que se obtiene, en euros, viene dado por*

$$B = 10(2x+1)^2 y$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en cada fondo para obtener el máximo beneficio y cuál será ese beneficio máximo.

b) *Calcular*

$$\int_0^1 \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right) dx$$

Solución

a) $x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$

$B = 10(2x+1)^2 y = 10(2x+1)^2(4-x) = 10(-4x^3 + 12x^2 + 15x + 4)$ función continua y derivable n veces en R, en particular en su dominio $[0, \infty)$, luego podemos determinar sus posibles máximos y mínimos a través del estudio de sus derivadas.

$$B' = 10\,(-12x^2 + 24x + 15) \qquad B'' = 10\,(-24x + 24)$$

$$B' = 0 \Rightarrow -12x^2 + 24x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{-24 \pm \sqrt{1296}}{-24} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \notin [0, \infty), \text{ o } \quad x = \frac{15}{6} = 2.5$$

$$B''\left(\frac{15}{6}\right) = 10\left(-24 \cdot \frac{15}{6} + 24\right) = -360 < 0$$

$$B = 10(2 \cdot 2.5 + 1)^2 1.5 = 540 \text{ €}.$$

El beneficio es máximo si se invierten **2 500 €** en el fondo M y **1 500 €** en el N y asciende a **540 €**.

b) $\int_0^1 \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right) dx = \int_0^1 \frac{5}{3x+1} dx - \int_0^1 \frac{4}{\sqrt{3x+1}} dx = \left[\frac{5}{3} ln(3x+1)\right]_0^1 - \left[\frac{4.2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^1 =$

$= \frac{5}{3} ln4 - \frac{5}{3} ln1 - \frac{8}{3}\sqrt{4} + \frac{8}{3}\sqrt{1} = \frac{5}{3} ln4 - \frac{16}{3} + \frac{8}{3} = \frac{5}{3} ln4 - \frac{8}{3}$

$$\boldsymbol{\int_0^1 \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right) dx = \frac{5}{3} ln4 - \frac{8}{3}}$$

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.3:

Una empresa tiene 64 trabajadores repartidos en tres departamentos: Administración, Producción y Ventas. Se ha hecho un estudio sobre si los trabajadores saben inglés o no, con los siguientes resultados:

	Administración	*Producción*	*Ventas*
Sabe inglés	*12*	*30*	*6*
No sabe inglés	*4*	*11*	*1*

a) Elegimos al azar un trabajador de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

***b)** Elegimos al azar un trabajador de entre los que saben inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea del departamento de Ventas?*

***c)** Elegimos al azar un trabajador de la empresa. Sea A el suceso "el trabajador es del departamento de Administración" y B el suceso "el trabajador sabe inglés". ¿Son los sucesos A y B independientes?*

***d)** Elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres trabajadores de la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo departamento?*

Solución

Sean A el suceso "el trabajador es del departamento de Administración", Pr el suceso "el trabajador es del departamento de Producción", V el suceso "el trabajador es del departamento de Ventas" y por último B el suceso "el trabajador sabe inglés".

	Administración	Producción	Ventas	Total
Sabe inglés	12	30	6	48
No sabe inglés	4	11	1	16
Total	16	41	7	64

a) $P(B) = \frac{12+30+6}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$. Podíamos haberlo obtenido también por el teorema de la probabilidad total pero es absurdo, teniendo en cuenta la cantidad de datos que tenemos

$$P(B) = P(B/A) \cdot P(A) + P(B/Pr) \cdot P(Pr) + P(B/V) \cdot P(V) = \frac{12}{16} \cdot \frac{16}{64} + \frac{30}{41} \cdot \frac{41}{64} + \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$$

$$\boldsymbol{P(B) = \frac{3}{4}}$$

b) $P(V/B) = \frac{P(B \cap V)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{64}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{8}$

$$\boldsymbol{P(V/B) = \frac{1}{8}}$$

c) $P(A \cap B) = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$ $\quad P(A) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ $\quad P(B) = \frac{3}{4}$ $\quad P(A) \,.\, P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$ luego:

A y B son independientes

d) Representemos por A_i , Pr_i , V_i con $i = 1, 2, 3$ los sucesos "el trabajador elegido en lugar i es de Administración, Producción, Ventas" respectivamente.

P("los tres trabajadores sean del mismo Departamento") $= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(Pr_1 \cap Pr_2 \cap Pr_3) + + P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \frac{16}{64} \cdot \frac{15}{63} \cdot \frac{14}{62} + \frac{41}{64} \cdot \frac{40}{63} \cdot \frac{39}{62} + \frac{7}{64} \cdot \frac{6}{63} \cdot \frac{5}{62} = \frac{67530}{249984} \simeq \mathbf{0.27}$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de:

Asturias

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ver soluciones en la web de la Universidad de Oviedo: www.uniovi.es

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Si $A^3\cdot B+C=A^2\cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m=1$.

---

2. El precio de una llamada a una línea de pago se descompone en dos conceptos: el establecimiento de llamada (precio fijo) más un coste variable en función de la duración. El coste del establecimiento de llamada es de 1 euro y el coste variable es de 1,2 euros por cada minuto hablado durante los primeros 30 minutos (inclusive), pasando a tarifar los minutos restantes a partir de ese momento a 0,8 euros por minuto.

a) **[1 punto]** Si $f(x)$ representa el coste total en euros de la llamada en función de la duración en minutos de la misma (x), obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x=30$.

b) **[2 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0,\infty)$. Si el coste total de una llamada ha sido de 45 euros, ¿cuánto ha durado la llamada?

---

3. El abogado A se encargó del 30 % de los casos que llegaron a un bufete el año pasado, de los cuales ganó el 70 % en los tribunales. El abogado B se encargó del 60 % de los casos que llegaron, de los que ganó en los tribunales el 90 %. Por último, el abogado C se encargó del 10 % restante de casos, ganando en los tribunales el 50 % de ellos. Si se elige al azar un caso que los que llegó el año pasado al bufete:

a) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que se haya ganado en los tribunales?

b) **[1 punto]** Si el caso elegido se ganó, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya llevado el abogado B?

---

4. Se supone que el tiempo de cada consulta en un determinado centro de salud sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 1,5 minutos.

a) **[1 punto]** Para estimar dicho tiempo medio por consulta, se considera una muestra aleatoria de 961 consultas, las cuales han tenido una duración media de 6 minutos. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media de las consultas en ese centro de salud, al 95 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media por consulta a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,2 minutos y un nivel de confianza del 95 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28)=0{,}90$; $F(1{,}64)=0{,}95$; $F(1{,}96)=0{,}975$; $F(2{,}33)=0{,}99$; $F(2{,}58)=0{,}995$.)

Universidad de Oviedo
Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad
2018-2019

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN B

1. Una empresa de joyería tiene dos máquinas A y B con las que puede hacer anillos, pulseras y collares y tiene que decidir el número de horas de trabajo de cada una de las máquinas para la próxima semana. En cada hora de trabajo, la máquina A realiza 1 anillo, 4 pulseras y 2 collares, mientras que la máquina B realiza 4 anillos, 2 pulseras y 3 collares. Durante la próxima semana, la empresa debe producir al menos 80 anillos, 96 pulseras y 120 collares.

a) **[2 puntos]** ¿Cuántas horas debe trabajar cada máquina para satisfacer estos requisitos de demanda? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría usarse 10 horas la máquina A y 30 horas la B?

b) **[1 punto]** El coste por cada hora de trabajo de la máquina A es de 2500 euros y el de la máquina B es de 2000 euros. ¿Cuántas horas tiene que trabajar cada máquina para minimizar el coste total? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

---

2. La variación instantánea de la cotización viene dada por la función $f(x) = 0{,}02x^2 + 1$ donde x representa el tiempo que lleva cotizando desde el comienzo de la semana. Se pide:

a) **[0,75 puntos]** Determinar la función cotización F, si se sabe que dicha función es la primitiva de f y que en el momento inicial la cotización era de 5.

b) **[2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función g definida como $g(x) = f(x) - 9, \forall x \in \mathbb{R}$ y calcular el área limitada por la curva g y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

---

3. En el almacén de un supermercado hay 400 tetrabriks de leche de la marca A y 100 de la marca B. Además se sabe que el 5 % de los tetrabriks de la marca A están caducados, así como el 10 % de los tetrabriks de la marca B. Si se elige un tetrabrik de leche al azar de esos 500 tetrabriks que hay en el almacén, se pide:

a) **[1 punto]** Determinar la probabilidad de que sea de la marca B y no esté caducado.

b) **[1 punto]** Determinar la probabilidad de que sea de la marca B o esté caducado.

---

4. Para hacer un estudio sobre el uso de las nuevas tecnologías (NT) por parte de los adolescentes, se tomó una muestra aleatoria de 100 adolescentes, de los cuales 10 respondieron que las usaban 4 horas a la semana, 15 que las usaban 5 horas por semana, 20 que las usaban 7 horas por semana y otros 20 que las usaban 8 horas por semana, 15 adolescentes dijeron que las usaban 9 horas a la semana, 10 que las usaban 10 horas y otros 10 que las usaban 15 horas. Su supone además que el tiempo que dedican semanalmente a las nuevas tecnologías los adolescentes sigue una distribución normal con desviación típica 1,7 horas.

a) **[1 punto]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el tiempo medio semanal dedicado a las NT por los adolescentes, al 90 % de confianza.

b) **[1 punto]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de adolescentes que usan las nuevas tecnologías más de 6 horas a la semana, al 90 % de confianza.

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Universidad de Oviedo
Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad
2018-2019

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Si $A^3 \cdot B + C = A^2 \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

Solución:

Debemos realizar las operaciones:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ A^2D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } A^3B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 3y \\ -3x - 2y \end{pmatrix}$$

Así pues, la ecuación $A^3B + C = AD$ resulta en el sistema:

$$\begin{pmatrix} 4x + 3y \\ -3x - 2y + my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ -3x + (m-2)y = -4 \end{cases}$$

Calculamos el determinante del sistema.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & m-2 \end{vmatrix} = 4m - 8 + 9 = 4m + 1$$

Igualando a 0, tenemos que, para $m \neq -1/4$ el sistema tiene solución única. Si sustituimos m por ese valor, resulta ser

$$\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ -3x \pm \frac{9}{4}y = -4 \end{cases}$$

Eso corresponde a la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -7 \\ -3 & \frac{-9}{4} & 4 \end{pmatrix}$, que multiplicando la segunda fila por 4 y sumando la primera multiplicada por 3 es equivalente a $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ o el sistema $\begin{cases} 4x + 3y = -7 \\ 0 = -5 \end{cases}$ claramente sin solución.

En resumen, el sistema no tiene solución si $\boldsymbol{m = -1/4}$.

Si $m \neq -1/4$tiene solución y además única.

El caso m = 1 da el sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ -3x - y = -4 \end{cases}$que ya sabemos que tiene solución única. Multiplicando la segunda ecuación por 3 y sumando tenemos $-5x = -5$ es decir $x = 1$. Si la llevamos a la segunda ecuación (valdría igual la primera) nos da $-3 - y = -4$ es decir $y = 1$.

La solución sería pues $\boldsymbol{x = y = 1}$.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.2:

2. El precio de una llamada a una línea de pago se descompone en dos conceptos: el establecimiento de llamada (precio fijo) más un coste variable en función de la duración. El coste del establecimiento de llamada es de 1 euro y el coste variable es de 1,2 euros por cada minuto hablado durante los primeros 30 minutos (inclusive), pasando a tarifar los minutos restantes a partir de ese momento a 0,8 euros por minuto.

a) **[1 punto]** Si $f(x)$ representa el coste total en euros de la llamada en función de la duración en minutos de la misma (x), obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x = 30$.

b) **[2 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0, \infty)$. Si el coste total de una llamada ha sido de 45 euros, ¿cuánto ha durado la llamada?

Solución:

Apartado a)

En primer lugar, vamos a dar la expresión de la función. La lógica nos dice que si no descolgamos el teléfono, no pagamos nada así que $f(0) = 0$

Sabemos que $f(x) = 1 + 1.2x$, si $0 < x \leqslant 30$

Si hablamos 30 minutos es $f(x) = 1 + 1.2(30) = 37$ de modo que pagamos 37 euros. Como los demás van a 0.8 es $f(x) = 37 + 0.8(x - 30)$, si $30 < x$

Poniéndolo todo junto sería

$$f(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ 1 + 1.2x, 0 < x \leqslant 30 \\ 37 + 0.8(x - 30), 30 < x \end{cases}$$

El problema es ambiguo en cuanto a si se deberían considerar llamadas de 0 minutos (que realmente es no llamar) de modo que también sería válido

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 1.2x, & si\ 0 < x \leq 30 \\ 37 + 0.8(x - 30) & si\ 30 < x \end{cases}$$

En el punto x = 30 ya hemos visto que la función vale 30. Calculemos sus límites laterales.

$$\lim_{x \to 30^+} f(x) = \lim_{x \to 30^+} 1 + 1{,}2x = 37$$

Por otra parte:

$$\lim_{x \to 30^+} f(x) = \lim_{x \to 30^+} 37 + 0{,}8(x - 30) = 37$$

Ambos límites coinciden y por tanto la función es continua.

$f(x) = \begin{cases} 1 + 1.2x, & si\ 0 < x \leq 30 \\ 37 + 0.8(x - 30) & si\ 30 < x \end{cases}$, la función es continua.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Apartado b)

Piden estudiar la función en $(0, \infty)$de modo que ahora no hay ambigüedad, el 0 no está. De hecho, después de hacer este apartado quizás sea más razonable considerar en el a) solo

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 1.2x, & si\ 0 < x \le 30 \\ 37 + 0.8(x - 30) & si\ 30 < x \end{cases}$$

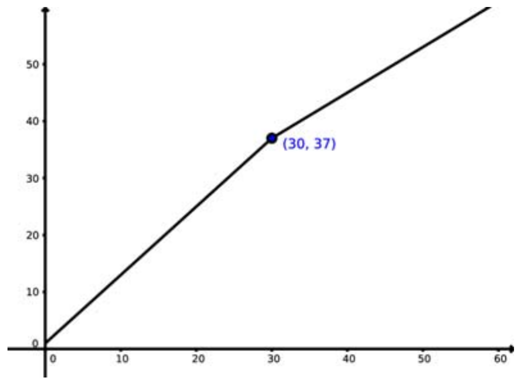
Derivando tenemos $f'(x) = \begin{cases} 1.2 & si\ 0 < x < 30 \\ 0.8 & si\ 30 < x \end{cases}$ (obsérvese que no hemos considerado x = 30 y, de hecho, en ese punto no es derivable por no coincidir las derivadas laterales).

Obtenemos que $f'(x) > 0$ y por tanto la función es creciente en (0, 30) y en $(30, \infty)$.

Derivando otra vez tenemos $f''(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 < x < 30 \\ 0 & si\ 30 < x \end{cases}$ (obsérvese que, otra vez, no tiene sentidoo en x = 30). En los intervalos (0, 30) y $(30, \infty)$la curvatura es nula luego se trata de dos líneas rectas, como es de hecho claro por su propia expresión.

Para representar una recta, bastan dos valores. Luego podemos tomar dos valores en (0, 30) como $f(5) = 7$y $f(10) = 13$y otros dos en el otro intervalo como $f(40) = 45$ y $f(50) = 53$.

La gráfica sería la siguiente:



Finalmente, si la llamada ha costado 45 €, es evidente que ha costado más de 37 y por tanto han sido más de 30 minutos.

De ahí que la expresión a usar sea $37 + 0.8(x - 30)$que debemos igualar a 45.

Tenemos pues $37 + 0.8(x - 30) = 45$cuya solución es $x = 40$.

La llamada ha durado, pues, **40 minutos**.

Problema A.3:

3. El abogado A se encargó del 30 % de los casos que llegaron a un bufete el año pasado, de los cuales ganó el 70 % en los tribunales. El abogado B se encargó del 60 % de los casos que llegaron, de los que ganó en los tribunales el 90 %. Por último, el abogado C se encargó del 10 % restante de casos, ganando en los tribunales el 50 % de ellos. Si se elige al azar un caso que los que llegó el año pasado al bufete:

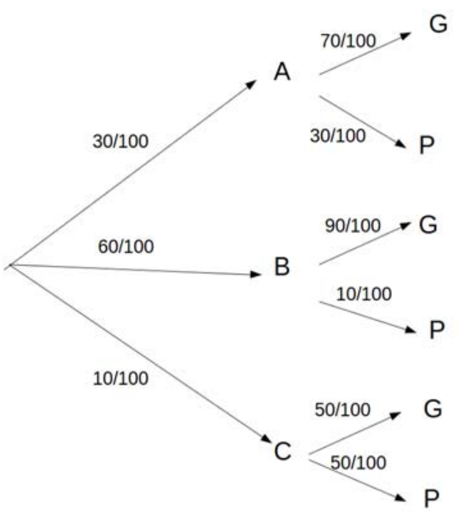
a) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que se haya ganado en los tribunales?

b) **[1 punto]** Si el caso elegido se ganó, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya llevado el abogado B?

Solución:

Apartado a)

Lo más sencillo es hacer un diagrama de árbol para mostrar todos los datos. A, B y C representan al abogado, G quiere decir ganar y P representa perder. Lo completamos de modo que en cada rama los porcentajes sumen 100.



Nos piden la probabilidad de ganar. Por la fórmula de la probabilidad total:

$P(G) = P(G/A) \cdot P(A) + P(G/B) \cdot P(B) + P(G/C) \cdot P(C)$ que, sustituyendo nos da:

$P(G) = \frac{30}{100} \cdot \frac{70}{100} + \frac{60}{100} \cdot \frac{90}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{50}{100} = \frac{80}{100} = 0.8$, luego la probabilidad de ganar es:

$$\boldsymbol{P(G) = 0.8}$$

Apartado b)

Es directamente la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(B/G) = \frac{P(G/B) \cdot P(B)}{P(G)} = \frac{\frac{60}{100} \cdot \frac{90}{100}}{\frac{81}{100}} = \frac{54}{80} = 0.675$$

$$\boldsymbol{P(B/G) = 0.675}$$

Problema A.4:

4. Se supone que el tiempo de cada consulta en un determinado centro de salud sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 1,5 minutos.

a) **[1 punto]** Para estimar dicho tiempo medio por consulta, se considera una muestra aleatoria de 961 consultas, las cuales han tenido una duración media de 6 minutos. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media de las consultas en ese centro de salud, al 95% de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media por consulta a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,2 minutos y un nivel de confianza del 95%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Solución:

Apartado a)

Se trata de una distribución $N(\mu, 1.5)$con μdesconocida. Por tanto, $N\left(\mu, 1.5/\sqrt{961}\right)$o, aproximadamente $N(\mu, 0.0484)$

Si $Z \approx N(0,1)$, calculamos Mtal que $P(-M < Z < M) = 0.95$. Eso se obtiene con:

$2F(M) - 1 = 0.95$ o, lo que es lo mismo $F(M) = 0.975$. En los valores obtenemos M = 1.96.

Así pues, el intervalo es $(6 - 0.0484 \cdot 1.96, 6 + 0.0484 \cdot 1.96) \approx (5.91,\ 6.09)$.

El intervalo de confianza para la duración media de las consultas es aproximadamente de $(\mathbf{5.91}, \mathbf{6.09})$ **minutos.**

Apartado b)

La semiamplitud del intervalo al 95 % es 1.96 por la desviación típica, es decir $\frac{1.96\cdot 1.5}{\sqrt{n}}$. Igualando a 0.2 sale $1.96\frac{1.5}{\sqrt{n}} = 0.2$ o $n = \left(\frac{1.96\cdot 1.5}{0.2}\right)^2 \approx 216.09$.

Como no se puede tomar una muestra de 216.09 pasamos al siguiente número. Hay que tomar 217 datos.

El tamaño muestral mínimo es de **217** datos.

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

1. Una empresa de joyería tiene dos máquinas A y B con las que puede hacer anillos, pulseras y collares y tiene que decidir el número de horas de trabajo de cada una de las máquinas para la próxima semana. En cada hora de trabajo, la máquina A realiza 1 anillo, 4 pulseras y 2 collares, mientras que la máquina B realiza 4 anillos, 2 pulseras y 3 collares. Durante la próxima semana, la empresa debe producir al menos 80 anillos, 96 pulseras y 120 collares.

a) **[2 puntos]** ¿Cuántas horas debe trabajar cada máquina para satisfacer estos requisitos de demanda? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría usarse 10 horas la máquina A y 30 horas la B?

b) **[1 punto]** El coste por cada hora de trabajo de la máquina A es de 2500 euros y el de la máquina B es de 2000 euros. ¿Cuántas horas tiene que trabajar cada máquina para minimizar el coste total? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

Solución:

Apartado a)

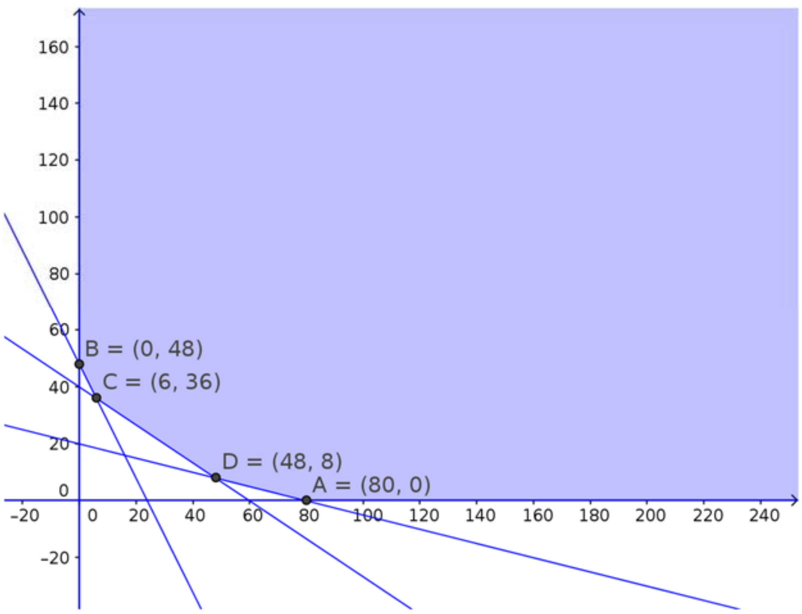
Sea x el tiempo que se emplea la máquina A e y el tiempo que se emplea la máquina B, expresados ambos en horas.

La máquina A, en x horas, produce x anillos, $4x$ pulseras y $2x$ collares en tanto la máquina B produce $4y$ anillos, $2y$ pulseras y $3y$ collares.

Si sumamos ambas producciones tenemos las restricciones:

$$\begin{cases} (Anillos)x + 4y \geq 80 \\ (Pulseras)4x + 2y \geq 96 \\ (Collares)2x + 3y \geq 120 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Representado gráficamente es:



Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

La pregunta es bastante ambigua. Si por "cada máquina" se refiere a "las máquinas conjuntamente" es el conjunto que se ha representado arriba. Si se refiere a "cada máquina por separado" es la siguiente respuesta.

Si usáramos solo la primera máquina, necesitaría 80 horas para hacer los anillos, 96/4 = 24 horas en hacer las pulseras y 120/2 = 60 horas para hacer los collares. Como todo lo hace a la vez, necesitaría 80 horas (y haría pulseras y collares de más).

De la misma manera, la segunda máquina necesitaría 80/4 = 20 horas para los collares, 48 horas para las pulseras y 40 horas para los collares. En 48 horas finalizaría el trabajo haciendo anillos y pulseras de más.

En resumen, **80 horas la máquina A en solitario y 48 horas la máquina B en solitario**.

Finalmente, usando 10 horas la máquina A y 30 la B obtendríamos

$$\begin{cases} (Anillos) 10 + 4(30) = 130 \\ (Pulseras) 4(10) + 2(30) = 100 \\ (Collares) 2(10) + 3(30) = 110 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

que cumple sobradamente las especificaciones de anillos y pulseras pero NO la de collares (por 10 unidades).

No puede usarse 10 horas la máquina A y 30 la B porque no se cumplen las especificaciones. Faltarían 10 collares.

Apartado b)

El problema es $\begin{cases} \boldsymbol{Min 2500x + 2000y} \\ \boldsymbol{x + 4y \geq 80} \\ \boldsymbol{4x + 2y \geq 96} \\ \boldsymbol{2x + 3y \geq 120} \\ \boldsymbol{x \geq 0, y \geq 0} \end{cases}$

Los vértices del conjunto se calculan haciendo los puntos de corte de las restricciones. Son A(80,0) [1ª con {x = 0}], B(0,48) [2ª con {y = 0}], C(6,36) [2ª con 3ª] y D(48,8) [1ª con 3ª].

Si no viéramos el dibujo, habría que hacer los cortes de todas dos a dos. Sin embargo salen puntos fuera de la región factible (por ejemplo la 1ª con la 2ª sale (16,16) que no cumple la tercera restricción).

En cualquier caso, la función de coste es $F(x, y)$ = 2500x + 2000y. El óptimo es en uno de los vértices.

$F(A)$ = 2500(80) + 2000(0) = 200 000, $F(B)$ = 2500(0) + 2000(48) = 96 000

$F(C)$ = 2500(6) + 2000(36) = 87 000, $F(D)$ = 2500(48) + 2000(8) = 136 000.

El coste mínimo se obtiene al usar 6 horas la máquina A y 36 la máquina B.

Dicho coste mínimo son 87 000 euros.

Problema B.2:

2. La variación instantánea de la cotización viene dada por la función $f(x) = 0{,}02x^2 + 1$ donde x representa el tiempo que lleva cotizando desde el comienzo de la semana. Se pide:

a) **[0,75 puntos]** Determinar la función cotización F, si se sabe que dicha función es la primitiva de f y que en el momento inicial la cotización era de 5.

b) **[2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función g definida como $g(x) = f(x) - 9, \forall x \in \mathbb{R}$ y calcular el área limitada por la curva g y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

Solución:

Apartado a)

La variación instantánea es la derivada. De modo que $F'(x) = f(x)$con lo que $F(x) = \int f(x)dx$a falta de determinar la constante de integración.

$$\int f(x)dx = \int (0.02x^2 + 1)dx = \frac{0.02x^3}{3} + x + C$$

¿Cuánto vale C? Pues sabemos que $F(0) = 5$y sustituyendo $\frac{0^3}{3} + 0 + C = 5$ da $C = 5$. Por ello la solución es $F(x) = \frac{0.02x^3}{3} + x + 5$

La función que describe la cotización es $\boldsymbol{F(x) = \frac{0.02x^3}{3} + x + 5}$

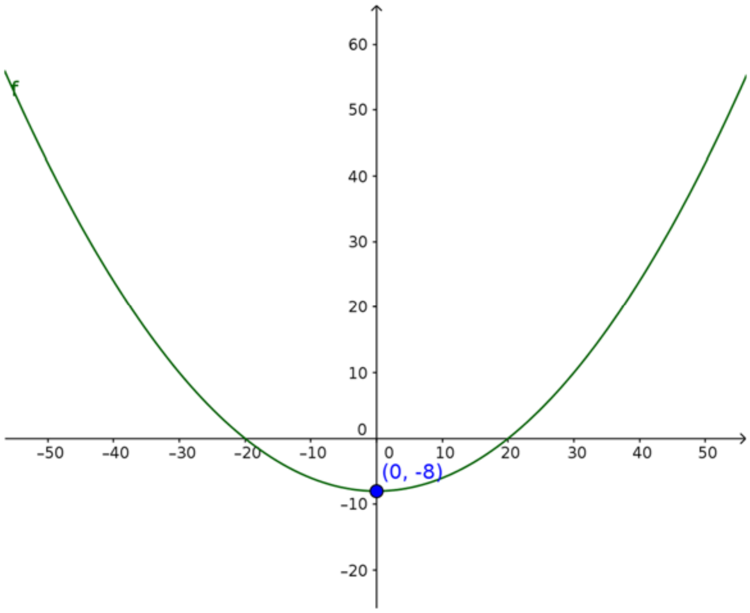
También se podría haber expresado como $F(x) = \frac{2x^3}{300} + x + 5$; $F(x) = \frac{x^3}{150} + x + 5$ o $F(x) = \frac{x^3+150x+750}{150}$. Las cuatro expresiones son totalmente equivalentes.

Apartado b)

$$\boldsymbol{g(x) - 9 = 0.02x^2 - 8}$$

Se trata de una función cuadrática, de modo que no requiere un estudio general, basta saber sus elementos.

- Su dominio son todos los reales y es siempre continua.
- El coeficiente 0.02 > 0. Tiene las ramas hacia arriba (curvatura positiva, forma de U).
- La coordenada en abscisas del vértice es $\boldsymbol{\frac{0}{2(0.02)} = 0}$. En ordenadas es $\boldsymbol{g(0) = -8}$. Por tanto es decreciente en $(-\infty, \boldsymbol{8})$ y creciente en $(\boldsymbol{8}, +\infty)$.
- Es simétrica respecto de su vértice, que acabamos de ver que es $\boldsymbol{x = 0}$.
- Su corte con el eje X es (0, –8), calculado más arriba.
- Sus cortes con el eje Y son las soluciones de $\boldsymbol{0.02x^2 - 8 = 0}$, $\boldsymbol{x = \pm 20}$
- No tiene asíntotas de ningún tipo.



Puesto que la función está por debajo del eje en todo el intervalo, el área es:

$$-\left(\int_0^3 0.02x^2 - 8\,dx\right) = [\frac{0.02x^3}{3} - 8x]_0^3$$

que es igual a:

$$[\frac{0.02(-3)^3}{3} - 8(-3)] - (0 - 0) = 24 - 0.18 = 23.82$$

Área = 23.82 u².

Problema B.3:

3. En el almacén de un supermercado hay 400 tetrabriks de leche de la marca A y 100 de la marca B. Además se sabe que el 5 % de los tetrabriks de la marca A están caducados, así como el 10 % de los tetrabriks de la marca B. Si se elige un tetrabrik de leche al azar de esos 500 tetrabriks que hay en el almacén, se pide:

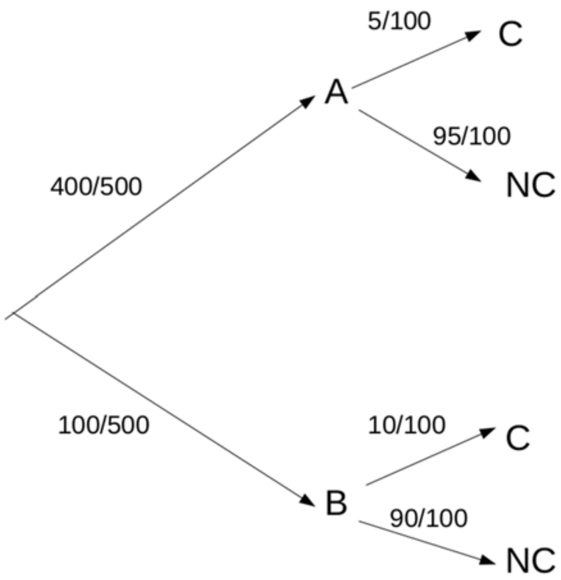
a) **[1 punto]** Determinar la probabilidad de que sea de la marca B y no esté caducado.

b) **[1 punto]** Determinar la probabilidad de que sea de la marca B o esté caducado.

Solución:

Lo más sencillo es hacer un diagrama de árbol. Llamamos A al suceso "ser de la marca A", B a "ser de la marca B", C al suceso "estar caducado" y NC a su complementario, no estar caducado.

El árbol es el siguiente:



Apartado a):

$P(B \cap NC) = \frac{100}{500} \cdot \frac{90}{100} = \frac{90}{500} = 0.18.$

La probabilidad de que sea de la marca B **y** no esté caducado es de 0.18.

Apartado b)

$$P(B \cup C) = P(B) + P(A \cap C) = \frac{100}{500} + \frac{400}{500} \cdot \frac{5}{100} = 0.2 + 0.04 = 0.24$$

La probabilidad de que sea de la marca B **o** no esté caducado es de 0.24.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.4

4. Para hacer un estudio sobre el uso de las nuevas tecnologías (NT) por parte de los adolescentes, se tomó una muestra aleatoria de 100 adolescentes, de los cuales 10 respondieron que las usaban 4 horas a la semana, 15 que las usaban 5 horas por semana, 20 que las usaban 7 horas por semana y otros 20 que las usaban 8 horas por semana, 15 adolescentes dijeron que las usaban 9 horas a la semana, 10 que las usaban 10 horas y otros 10 que las usaban 15 horas. Su supone además que el tiempo que dedican semanalmente a las nuevas tecnologías los adolescentes sigue una distribución normal con desviación típica 1,7 horas.

a) **[1 punto]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el tiempo medio semanal dedicado a las NT por los adolescentes, al 90% de confianza.

b) **[1 punto]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de adolescentes que usan las nuevas tecnologías más de 6 horas a la semana, al 90% de confianza.

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Solución:

Apartado a):

En primer lugar, necesitamos la media, pues la desviación típica ya nos la dan, es 1,7. La estimamos por el valor muestral.

$$E[X] = \frac{1}{100}[4\cdot 10 + 5\cdot 15 + 7\cdot 20 + 8\cdot 20 + 9\cdot 15 + 10\cdot 10 + 15\cdot 10] = 8$$

La media muestral, que es el estimador del tiempo medio semanal es por tanto, $N(\mu, 1.7/\sqrt{100}) = N(\mu, 0.17)$. Se trata de una distribución normal con μdesconocida. Por tanto

Si $Z \approx N(0,1)$, calculamos Mtal que $P(-M < Z < M) = 0.90$. Eso se obtiene con:

$2F(M) - 1 = 0.90$ o, lo que es lo mismo $F(M) = 0.95$. En los valores obtenemos *M* = 1.64.

Así pues, el intervalo es $(8 - 0.17\cdot 1.64,\ 8 + 0.17\cdot 1.64) \approx (7.72,\ 8.28)$

El intervalo de confianza para el tiempo medio semanal de uso de las TIC es aproximadamente de $(\mathbf{7.72},\ \mathbf{8.28})$ horas.

Apartado b)

Llamamos Ya la variable aleatoria que toma el valor 1 si el adolescente usa las TIC más de 6 horas y 0 si no lo hace.

Hay 100 adolescentes luego es una variable binomial $B(100, p)$. Nos piden un intervalo para p.

Por el teorema central del límite, sabemos que $Y \approx N(E[Y], \sqrt{Var(Y)})$es decir,

$$Y \approx N(100p, \sqrt{100p(1-p)})$$

Si llamamos *R* (*razón*) a la proporción, es $R = Y/100 \approx N(p, \sqrt{p\,(1-p)/100})$ de donde

$$Z = \frac{R-p}{\sqrt{p\,(1-p)/100}} \approx N(0,1)$$

Buscamos ahora un valor M de modo que $P(-M < Z < M) = 0.9$ y resulta que ya lo teníamos calculado del apartado a) es M = 1.64.

$$P(-M < Z < M) = 0.9$$

Es repetir el apartado a) quitando de la muestra el 4 y el 5. El intervalo ahora de la forma $(H, +\infty)$. Si $Z \approx N(0{,}1)$, calculamos Rtal que $-1.64 < Z < 1.64 \Leftrightarrow -1.64 < \frac{R-p}{\sqrt{p(1-p)/100}} < 1.64$

Despejando R es $p - 1.64 \cdot \sqrt{p\,(1-p)/100} < R < p + 1.64 \cdot \sqrt{p\,(1-p)/100}$ luego el intervalo es $(p - 1.64 \cdot \sqrt{p\,(1-p)/100}, p + 1.64 \cdot \sqrt{p\,(1-p)/100})$

Necesitamos una estimación de p. Esa es la proporción muestral observada

$$\frac{20+20+15+10+10}{100} = 0.75$$

El intervalo es $(0.75 - 1.64 \cdot \sqrt{0.75\,(1-0.75)/100},\ 0.75 + 1.64 \cdot \sqrt{0.75\,(1-0.75)/100})$ es decir aproximadamente $(0.6788,\ 0.8212)$

El intervalo de confianza para la proporción de adolescentes que pasan más de 6 horas con las TIC es $(\mathbf{0.6788},\ \mathbf{0.8212})$ [en porcentaje (67.88 %, 82.12 %)]

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Una persona ha obtenido 4000 euros de beneficio el último año por invertir en dos empresas A y B. La cantidad de dinero invertida en A fue m veces lo invertido en B, y los beneficios fueron el 10 % en A y el 20 % en B.

a) **[1 punto]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades invertidas en ambas empresas, respectivamente.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la empresa A se haya invertido el doble que en B? En caso afirmativo, ¿cuánto se invirtió en A?

---

2. Dos fuentes de energía A y B producen electricidad a la vez durante 6 horas. Si dado un instante de tiempo x en el intervalo $[0,6]$ se tiene que $f(x) = -x^2 + 6x + 3$ representa la electricidad producida por la fuente A y $g(x) = x + 9$ representa la electricidad producida por la fuente B, se pide:

a) **[1 punto]** Determinar en qué momentos están produciendo la misma cantidad de electricidad ambas fuentes. ¿A cuánto asciende la producción de electricidad de cualquiera de las dos fuentes en esos momentos?

b) **[1 punto]** Determinar en qué momentos la producción de la fuente A decrece.

c) **[1 punto]** Obtener el instante de tiempo en el que la producción conjunta de las dos fuentes es máxima.

---

3. De los estudiantes de secundaria que fueron al viaje de estudios, se determina que tres quintas partes de ellos han consumido alcohol y que un cuarto de ellos han fumado. Además se sabe que el veinte por ciento de ellos han consumido alcohol y fumado.

a) **[1 punto]** Si un estudiante elegido al azar ha fumado, ¿cuál es la probabilidad de que haya consumido alcohol?

b) **[1 punto]** Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya fumado y no haya bebido alcohol?

---

4. a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de turistas asiáticos en Asturias a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 95 %?

b) **[1 punto]** En una muestra aleatoria de 800 turistas que visitan Asturias se obtuvo que solo 80 de ellos son asiáticos. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de turistas asiáticos en Asturias

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Universidad de Oviedo
Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad
2018-2019

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN B

1. Una empresa construye dos tipos de motocicletas eléctricas A y B. Cada jornada dispone de 3600 euros para la fabricación de estas motocicletas, siendo el coste de manufactura de 200 euros para la motocicleta tipo A y de 400 euros para la motocicleta tipo B. Además las condiciones de mercado exigen que el número total de motocicletas fabricadas por jornada no sea mayor de 12. Por otro lado, debido a la organización de la producción en esa empresa, cada jornada no puede fabricar más de 8 motocicletas de tipo B.

a) **[2 puntos]** ¿Cuántas motocicletas de cada tipo puede fabricar una jornada para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B?

b) **[1 punto]** Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de una motocicleta de tipo A es de 200 euros y en la de tipo B es de 320 euros y suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, ¿cuántas motocicletas de cada tipo deben fabricar en una jornada para que el beneficio sea máximo? ¿y para maximizar el número de motocicletas de tipo A fabricadas?

---

2. Dada la función $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$, se pide:

a) **[0,75 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 20$.

b) **[2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$.

---

3. En una agencia de viajes *online* se ha observado que el 80 % de los clientes compra un billete de avión, el 60 % compra un bono de hotel y el 50 % compra las dos cosas. Elegido un cliente al azar de esa agencia, se pide:

a) **[1 punto]** Calcular la probabilidad de que compre un billete de avión o un bono de hotel.

b) **[1 punto]** Calcular la probabilidad de que compre un bono de hotel si se sabe que compró un billete de avión.

---

4. Con el objetivo de estudiar los ingresos anuales de los ejecutivos de multinacionales, se seleccionó una muestra aleatoria de 576 ejecutivos, cuyos ingresos totales (suma de los ingresos de los 576 ejecutivos) el último año ascendieron a 28,8 millones de euros. Se supone además que los ingresos anuales de este tipo de ejecutivos sigue una distribución normal con desviación típica 3000 euros.

a) **[1 punto]** Construye un intervalo de confianza para los ingresos medios anuales de este colectivo, al 99 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar los verdaderos ingresos medios anuales a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 500 euros y un nivel de confianza del 99 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Universidad de Oviedo
Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad
2018-2019

Textos Marea Verde

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

1. Una persona ha obtenido 4000 euros de beneficio el último año por invertir en dos empresas A y B. La cantidad de dinero invertida en A fue m veces lo invertido en B, y los beneficios fueron el 10% en A y el 20% en B.

a) **[1 punto]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades invertidas en ambas empresas, respectivamente.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la empresa A se haya invertido el doble que en B? En caso afirmativo, ¿cuánto se invirtió en A?

Solución:

Apartado a)

Tal como nos dice el enunciado, llamamos x a la cantidad invertida en la empresa A e y a la cantidad invertida en la empresa B.

Puesto que la primera es m veces la segunda, la primera ecuación del sistema es:

$$x = my$$

El beneficio es la suma de los beneficios en ambas, es decir $\frac{10}{100}x + \frac{20}{100}y$.

Igualando a 4000 será $\frac{10}{100}x + \frac{20}{100}y = 4000$

y poniendo las ecuaciones juntas tenemos lo que nos piden:

El sistema para calcular las cantidades es $\begin{cases} \boldsymbol{x = my} \\ \boldsymbol{\frac{10}{100}x + \frac{20}{100}y = 4000} \end{cases}$

Apartado b)

Lo primero, arreglamos un poco el sistema. Pasamos las variables a la izquierda, y multiplicamos la segunda ecuación por 10. queda, pues:

$$\begin{cases} x - my = 0 \\ x + 2y = 40000 \end{cases}$$

El determinante del sistema es $\begin{vmatrix} 1 & -m \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + m$ de modo que, para $m \neq -2$ siempre hay solución única.

El caso $m = -2$ lo tratamos aparte. El sistema es pues $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 40000 \end{cases}$ que es incompatible. Puede verse directamente porque igualando ambas implica la ecuación imposible 0 = 40 000.

O bien, aplicando el método de Gauss y restando la segunda de la primera también llegamos a la misma ecuación imposible y a la matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 40000 \end{pmatrix}$ que es obviamente de un sistema incompatible (el rango de la matriz de coeficientes es uno y el de la matriz ampliada 2).

Nos preguntan ahora si es posible que se invirtiera en A el doble que en B o, en otras palabras, qué ocurre si $m = 2$. Lo primero, por lo anterior sí hay solución única porque $m \neq -2$.

Para resolverlo, sustituimos:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 2y = 40000 \end{cases}$$

Sumando tenemos $2x$ = 40 000 que da x = 20 000 e y = 10 000

En resumen:

- El sistema tiene solución si y solamente si m es distinto de –2.
- Si la solución existe, siempre es única.
- Es perfectamente posible que se haya invertido en A el doble que en B.
- En tal caso, la solución es única y corresponde a invertir 20 000 € en A y 10 000 en B.

Problema A.2:

2. Dos fuentes de energía A y B producen electricidad a la vez durante 6 horas. Si dado un instante de tiempo x en el intervalo $[0,6]$ se tiene que $f(x)=-x^2+6x+3$ representa la electricidad producida por la fuente A y $g(x)=x+9$ representa la electricidad producida por la fuente B, se pide:

a) **[1 punto]** Determinar en qué momentos están produciendo la misma cantidad de electricidad ambas fuentes. ¿A cuánto asciende la producción de electricidad de cualquiera de las dos fuentes en esos momentos?

b) **[1 punto]** Determinar en qué momentos la producción de la fuente A decrece.

c) **[1 punto]** Obtener el instante de tiempo en el que la producción conjunta de las dos fuentes es máxima.

Solución:

Apartado a)

Igualando ambas funciones se tiene $-x^2+6x+3=x+9$ que resulta $x^2-5x+6=0$ cuyas soluciones vienen dadas por la conocida fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}\text{, es decir, 2 y 3.}$$

En x = 2 son 2 + 9 = 11 mientras que en x = 3 es 3 + 9 = 12

Ambas producen la misma electricidad a las **2 horas** (una cantidad de **11**) y a las **3 horas** (una cantidad de **12**).

Apartado b)

Derivando f e igualando a 0 tenemos $-2x + 6 = 0$ que da $x = 3$.

Para ver si crece o decrece estudiamos el signo, dando valores:

$f'(2) = 2 > 0$, $f'(4) = -2 < 0$.

Por tanto:

La producción de A decrece en el intervalo (3, 6]

Apartado c)

Sumando ambas, la producción conjunta es la función

$$c(x)=(-x^2+6x+3)+(x+9)=-x^2+7x+12$$

Derivando c e igualando a 0 tenemos $-2x + 7 = 0$ que da $x = 3.5$.

Para ver si crece o decrece estudiamos el signo, dando valores:

$$c'(3) = 1 > 0,\ c'(4) = -2 < 0.$$

Por tanto, crece a la derecha y decrece a la izquierda con lo que efectivamente es un máximo.

La producción conjunta es máxima a las **tres horas y media**.

Problema A.3:

3. De los estudiantes de secundaria que fueron al viaje de estudios, se determina que tres quintas partes de ellos han consumido alcohol y que un cuarto de ellos han fumado. Además se sabe que el veinte por ciento de ellos han consumido alcohol y fumado.

a) **[1 punto]** Si un estudiante elegido al azar ha fumado, ¿cuál es la probabilidad de que haya consumido alcohol?

b) **[1 punto]** Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya fumado y no haya bebido alcohol?

Solución:

Apartado a)

La manera más fácil de mostrar la información es hacer una tabla. Llamamos A a haber bebido alcohol y F a fumar.

	Alcohol (A)	**No alcohol**	**Total**
Fumar (F)	20/ 100		1 /4
No fumar			
Total	3/ 5		

Poniendo denominador común (sería 20 el mínimo, pero es más cómodo 100 y además son porcentajes).

	Alcohol (A)	**No alcohol**	**Total**
Fumar (F)	20/100		25/100
No fumar			
Total	60/100		

Así pues, la tabla se completa sin dificultad:

	Alcohol (A)	**No alcohol**	**Total**
Fumar (F)	20/100	5/ 100	25/100
No fumar	40/100	35/100	75/100
Total	60/100	40/100	100/100

Ya tenemos todos los datos.

$$P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{20}{100}}{\frac{25}{100}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Si un estudiante ha fumado hay una probabilidad de $\mathbf{4/5 = 0.8}$ o un 80 % de que también haya consumido alcohol.

Apartado b)

Directamente de la tabla 35/100 o 7/20.

$$P(\bar{A} \cap \bar{F}) = \frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0.35$$

La probabilidad de no haber fumado ni consumido alcohol es $\mathbf{7/20 = 0.35}$ o 35 %.

Problema A.4:

4. a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de turistas asiáticos en Asturias a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 95 %?

b) **[1 punto]** En una muestra aleatoria de 800 turistas que visitan Asturias se obtuvo que solo 80 de ellos son asiáticos. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de turistas asiáticos en Asturias

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Solución:

Apartado a)

Llamamos Y a la variable aleatoria que toma el valor 1 si el turista es asiático y 0 si no lo es. Es una variable binomial $B(n,p)$ donde ambos parámetros son desconcidos. Nos piden un intervalo para p.

Por el teorema central del límite, sabemos que $\bar{Y} = Y/n \approx N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$ y tomamos para la varianza el caso más desfavorable, que ya sabemos teóricamente que es $p = 1/2$.

Es decir, $\bar{Y} \approx N(p, \sqrt{\frac{1}{4n}}) = N(p, \frac{1}{2\sqrt{n}})$. Así pues $Z = \frac{\bar{Y}-p}{1/2\sqrt{n}} \approx N(0,1)$

Buscamos ahora un valor M de modo que $P(-M < Z < M) = 0.95$ de donde:

$F(M) - F(-M) = 0.95$; $F(M) - [1 - F(M)] = 0.95$, así que:

$F(M) = 1 + 0.952 = 0.975$ que da $M = 1.96$.

$P(-1.96 < \frac{\bar{Y}-p}{1/2\sqrt{n}} < 1.96) = 0.95$, luego el error es $1.96 \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Igualando tenemos $\frac{1.96}{2\sqrt{n}} = 0.05$ de donde $n = (\frac{1.96}{2 \cdot 0.05})^2 = 384.16$

No pueden buscarse 0.16 personas, así que redondeando al siguiente tenemos el resultado.

Para estimar la proporción al 95 % con un error menor que 0.05 es necesario usar una muestra de al menos **385** personas.

Apartado b)

Llamamos X la variable aleatoria que toma el valor 1 si el turista es asiático y 0 si no lo es. Es una variable binomial $B(n,p)$ pero ahora sabemos que n = 800. Nos piden un intervalo para p.

Por el teorema central del límite, sabemos que $\bar{X} = X/n \approx N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$ pero, nuevamente en este caso, tenemos más datos.

En vez de tomar el caso más desfavorable, usamos la proporción muestral 80/800 = 0.1 y el valor n = 800.

$$\text{Es decir, } \bar{Y} \approx N(p, \sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{800}}) \approx N(p, 0.0106).$$

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Como en el apartado anterior

$P(-1.96 < \frac{\bar{Y}-p}{0.0106} < 1.96) = 0.95$ o, equivalentemente $P(-1.96 < \frac{p-\bar{Y}}{0.0106} < 1.96) = 0.95$ luego el intervalo es $(\bar{Y} - 1.96 \cdot 0.0106,\ \bar{Y} + 1.96 \cdot 0.0106)$. Sustituyendo $\bar{Y}$por 0.1 es (0.792, 0.121)

El intervalo para la proporción de turistas asiáticos es $(0.792, 0.121)$ o,

expresado en porcentaje (7.92 %, 12.1 %)

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

1. Una empresa construye dos tipos de motocicletas eléctricas A y B. Cada jornada dispone de 3600 euros para la fabricación de estas motocicletas, siendo el coste de manufactura de 200 euros para la motocicleta tipo A y de 400 euros para la motocicleta tipo B. Además las condiciones de mercado exigen que el número total de motocicletas fabricadas por jornada no sea mayor de 12. Por otro lado, debido a la organización de la producción en esa empresa, cada jornada no puede fabricar más de 8 motocicletas de tipo B.

a) **[2 puntos]** ¿Cuántas motocicletas de cada tipo puede fabricar una jornada para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B?

b) **[1 punto]** Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de una motocicleta de tipo A es de 200 euros y en la de tipo B es de 320 euros y suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, ¿cuántas motocicletas de cada tipo deben fabricar en una jornada para que el beneficio sea máximo? ¿y para maximizar el número de motocicletas de tipo A fabricadas?

Solución:

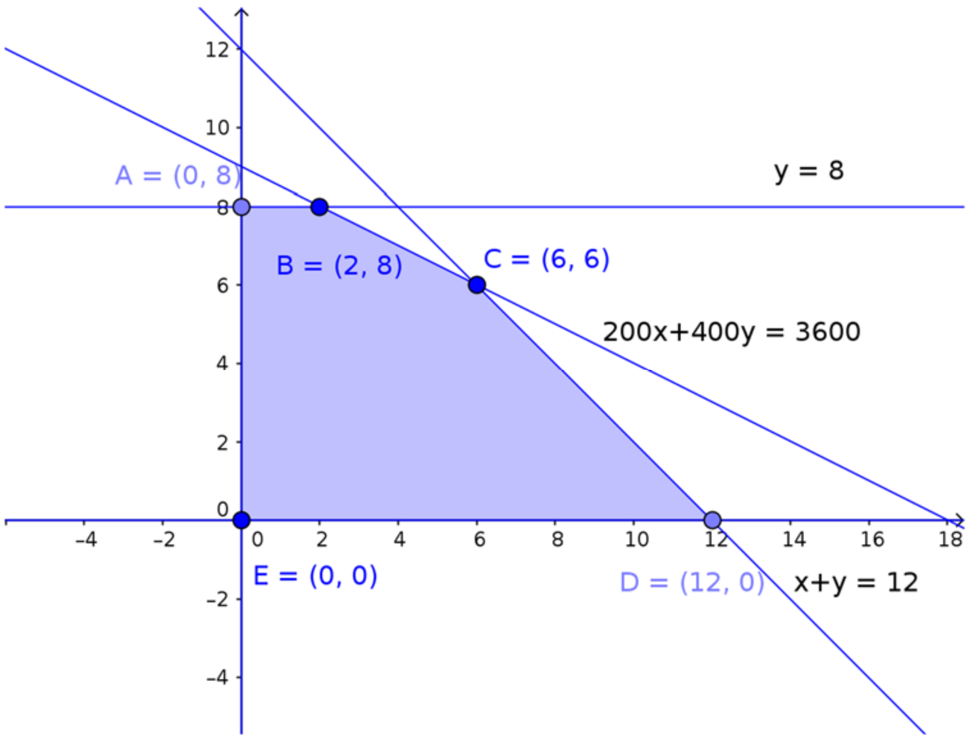
Apartado a)

Denotamos con x al número de motocicletas de tipo A e y al número de motocicletas de tipo B.

Las **restricciones** son, pues:

$$\begin{cases} (Total\ dinero)\, 200x + 400y \le 3600 \\ (Total\ motos)\, x + y \le 12 \\ (Motos\ B)\, y \le 8 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

Representado gráficamente es:



Producir 4 motos de A y el doble de B corresponde a x = 4 e y = 8 que no es admisible pues no cumple la primera restricción. Al sustituir tenemos que 200(4) + 400(8) = 4000 que es mayor que 3600.

No se pueden fabricar 4 motos de A y el doble (8) de B. No cumple la restricción de dinero.

Apartado b)

El problema es:

$$\begin{cases} Max\,200x+320y \\ 200x+400y\le 3600 \\ x+y\le 12 \\ y\le 8 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$$

Los vértices del conjunto se calculan haciendo los puntos de corte de las restricciones. Son A(0, 8) [3ª con {x = 0}], B(2, 8) [1ª con 3ª], C(6, 6) [1ª con 2ª], D(12, 0) [2ª con {y = 0}] y E(0, 0) [{x = 0} con {y = 0}].

Si no viéramos el dibujo, habría que hacer los cortes de todas dos a dos. Sin embargo, salen puntos fuera de la región factible (por ejemplo, la 2ª con la 3ª sale (4, 8) que no cumple la primera restricción) que habría que comprobar si cumplen las demás y en su caso, eliminarlos.

Independientemente de cómo procedamos, la función de coste es F(x, y) = 200x + 320y. El óptimo es en uno de los vértices.

$F(A)$ = 200(0) + 320(8) = 2560,

$F(B)$ = 200(2) + 320(8) = 2960,

$F(C)$ = 200(6) + 320(6) = 3120,

$F(D)$ = 200(12) + 320(0) = 2400,

$F(E)$ = 200(0) + 320(0) = 0.

Por tanto, es el punto (6, 6). Basta interpretarlo.

El beneficio máximo se obtiene fabricando **6** motocicletas de cada tipo

Finalmente, el número máximo de motocicletas de tipo A también se alcanza en uno de los puntos. Pero esta vez se ve directamente que es el (12, 0).

El máximo de bicicletas de tipo A son **12** y, en tal caso, no se fabrica ninguna B.

Problema B.2:

2. Dada la función $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$, se pide:

a) **[0,75 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 20$.

b) **[2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$.

Solución:

Apartado a)

Calculamos la integral indefinida

$$\int f(x) = \int \frac{9}{x} - \frac{18}{x}^2 - 1dx$$

Separando y sacando fuera las constantes queda:

$$\int f(x) = 9\int \frac{dx}{x} - 18\int \frac{dx}{x}^2 - \int dx = ln(x) + \frac{18}{x} - x + K$$

donde K es una constante a determinar.

Sabemos que $F(x) = 9ln(x) + \frac{18}{x} - x + K$ y que $F(1) = 20$ de modo que sustituyendo nos da:

$$20 = 9ln(1) + \frac{18}{1} - 1 + K = 0 + 18 - 1 + K = K + 17$$

es decir, $K = 3$.

La primitiva que cumple $F(1) = 20$ es $\boldsymbol{F(x) = 9\ln(x) + \frac{18}{x} - x + 3}$.

Apartado b)

La única operación que puede fallar es la división. La función no está definida en 0 de modo que el dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$ o, dicho de otro modo $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Es claro que es continua es todo ese dominio.

Para los cortes con los ejes, en primer lugar no se puede cortar con OY puesto que $f(0)$ no está definida.

Para OX, $0 = f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$. Multiplicamos por x^2y resolvemos:

$0 = 9x - 18 - x^2$ que es $x^2 - 9x + 18 = 0$,

y con la fórmula da $x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 18}}{2}$ con soluciones $x = 3$ y $x = 6$.

Para derivar, es más cómodo expresarla con exponentes negativos:

$$f(x) = 9x^{-1} - 18x^{-2} - 1$$

[Naturalmente todos los resultados las cuentas salen igual si no la ponemos de esa manera, pero es más complicado].

La derivada es $f'(x) = -9x^{-2} + 36x^{-3}$ que igualada a 0 es $9x^{-2} - 36x^{-3} = 0$ y, multiplicando por x^3queda $-9x + 36 = 0$ y sale $x = 4$. La derivada se anula en el punto de abscisa $x = 4$.

Hay que estudiar tres intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$ y $(4, +\infty)$ delimitados por los puntos de discontinuidad y ceros. Dando valores y estudiando el signo, por ejemplo, con $f'(-1) = -45 < 0$; $f'(1) = 27 > 0$ y

$f'(10) = -0.09 + 0.0036 < 0$ vemos que es decreciente en $(-\infty, 0)$, *creciente en* $(0, 4)$ y otra vez decreciente en $(4, +\infty)$

En cuanto a la segunda derivada es $f''(x) = 18x^{-3} - 108x^{-4}$ que igualada a 0 es:

$$-18x^{-3} + 108x^{-4} = 0.$$

De modo similar al caso anterior, multiplicamos por x^3y queda $18x - 108 = 0$ y sale $x = 6$.

Hay que estudiar tres intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 6)$ y $(6, +\infty)$ delimitados por los puntos de discontinuidad y ceros. Dando valores y estudiando el signo, por ejemplo, con $f''(-1) = -126 < 0$; $f''(1) = -90 < 0$ y $f''(10) = 0.018 - 0.0108 > 0$ vemos la curvatura:

En que es negativa en $(-\infty, 0) \cup (0, 6)$ tiene curvatura positiva (forma de U) en tanto en $(6, +\infty)$ tiene curvatura negativa (forma de ∏).

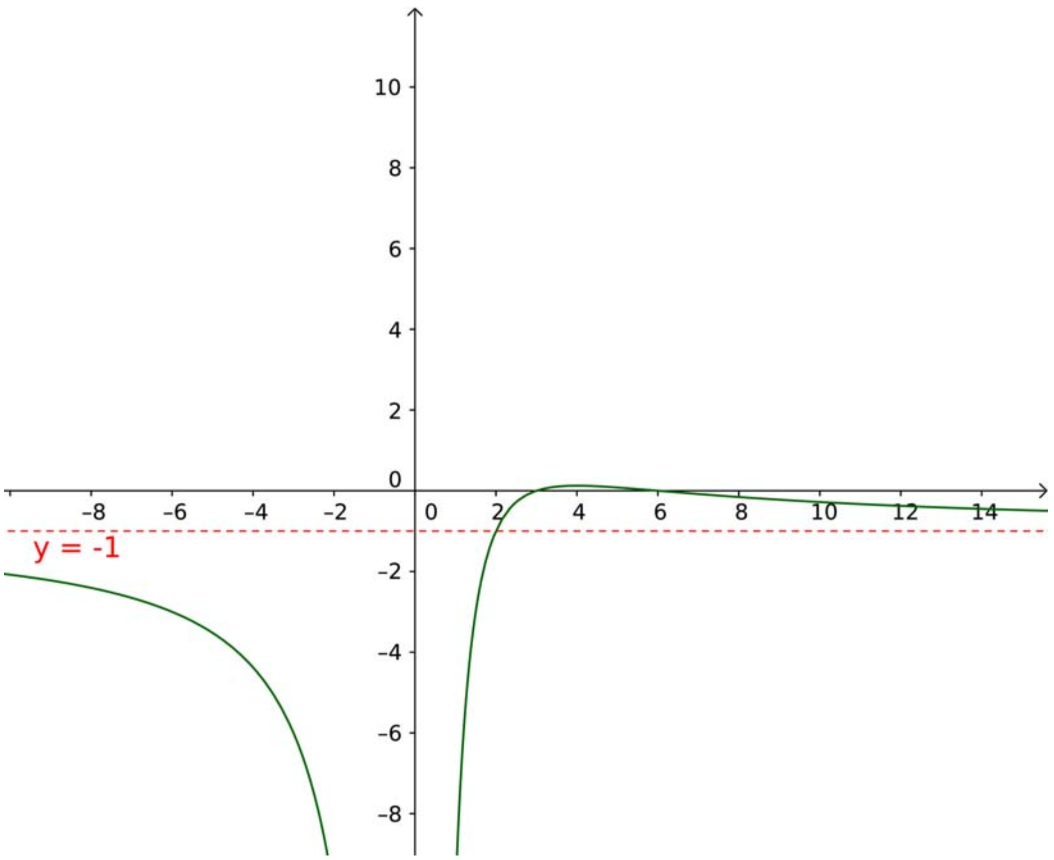
Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y los límites en el infinito son $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ por lo que tiene una asíntota horizontal y ninguna oblicua.

Dando los valores 0.1 y –0.1 tenemos $f(0.1) = 90 - 1800 - 1 < 0$ y $f(-0.1) = -90 - 1800 - 1 < 0$ de modo que vemos que $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ pues ambos límites laterales salen menos infinito.

Tenemos la siguiente tabla de valores. Damos el valor –1 en $(-\infty, 0)$ como adicional, los demás son obligatorios (extremos del dominio, cortes con los ejes, puntos de discontinuidad y ceros de derivadas).

x	$-\infty$	–1	$0^{(-)}$	0	$0^{(+)}$	3	4	6	$+\infty$
$f(x)$	–1	–28	$-\infty$	No existe	$-\infty$	0	0.125	0	–1

La gráfica es aproximadamente:



El área es por definición: $\int_1^{12} |f(x)|\, dx$ pero hay que ver el signo del valor absoluto:

Entre x = 1 y x = 12 la función corta al eje dos veces, en x = 3 y en x = 6.

$$\int_1^{12} |f(x)|\, dx = -\int_1^{3} f(x)dx + \int_3^{6} f(x)dx - \int_6^{12} f(x)dx$$

Ya hemos calculado la primitiva general que es $F(x) = ln(x) + \frac{18}{x} - x + K$. La integral definida no depende de la primitiva que escojamos así que podemos tomar K = 0.

Sustituyendo:

$\int_1^{12} |f(x)|\, dx = -[9ln(x) + \frac{18}{x} - x]_1^3 + [9ln(x) + \frac{18}{x} - x]_3^6 - [9ln(x) + \frac{18}{x} - x]_6^{12}$

que es

$$-[9ln(3) + 6 - 3] - [9ln(1) + 18 - 1] + [9ln(6) + 3 - 6] - [9ln(3) + 6 - 3]$$
$$-\{[9ln(12) + \frac{18}{12} - 12] - [9ln(6) + 3 - 6]\}$$

y operando resulta 5.61.

El área entre 1 y 12 de la función es **5.61 u²**.

Problema B.3:

3. En una agencia de viajes *online* se ha observado que el 80 % de los clientes compra un billete de avión, el 60 % compra un bono de hotel y el 50 % compra las dos cosas. Elegido un cliente al azar de esa agencia, se pide:

a) **[1 punto]** Calcular la probabilidad de que compre un billete de avión o un bono de hotel.

b) **[1 punto]** Calcular la probabilidad de que compre un bono de hotel si se sabe que compró un billete de avión.

Solución:

Apartado a)

La manera más fácil de mostrar la información es hacer una tabla. Llamamos A a comprar un billete de avión y H a comprar un bono de hotel.

	Hotel	**No hotel**	**Total**
Avión	50/100		80/100
No avión			
Total	60/100		100/100

Completar la tabla es sencillo:

	Hotel	**No hotel**	**Total**
Avión	50/100	30/100	80/100
No avión	10/100	10/100	20/100
Total	60/100	40/100	100/100

Nos piden ahora $P(A \cup H)$. Se calcula sumando las tres casillas [la línea encima denota el complementario].

$$P(A \cup H) = P(A \cap H) + P(A \cap \overline{H}) + P(\bar{A} \cap H) = \frac{50}{100} + \frac{30}{100} + \frac{10}{100} = \frac{90}{100}$$

Otra manera de hacerlo es directamente con la fórmula:

$$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) = \frac{80}{100} + \frac{60}{100} - \frac{50}{100} = \frac{90}{100}$$

En cualquier caso, tenemos:

La probabilidad de comprar un billete de avión o un bono de hotel es **0.9** (90%).

Apartado b)

Se trata de una condicionada. Basta aplicar la fórmula:

$$P(H/A) = \frac{P(A \cap H)}{P(A)}$$

Tenemos todos los datos en la tabla.

$$P(H/A) = \frac{P(A \cap H)}{P(A)} = \frac{\frac{50}{100}}{\frac{80}{100}} = \frac{5}{8} = 0.625$$

La probabilidad de comprar un bono de hotel si sabemos que ha comprado un billete de avión es de **0.625 = 5/ 8** o **62.5%**

Problema B.4:

4. Con el objetivo de estudiar los ingresos anuales de los ejecutivos de multinacionales, se seleccionó una muestra aleatoria de 576 ejecutivos, cuyos ingresos totales (suma de los ingresos de los 576 ejecutivos) el último año ascendieron a 28,8 millones de euros. Se supone además que los ingresos anuales de este tipo de ejecutivos sigue una distribución normal con desviación típica 3000 euros.

a) **[1 punto]** Construye un intervalo de confianza para los ingresos medios anuales de este colectivo, al 99% de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar los verdaderos ingresos medios anuales a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 500 euros y un nivel de confianza del 99%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$; $F(2{,}58) = 0{,}995$.)

Solución:

Apartado a)

$X \approx N(\mu, 3000)$ de modo que la media es $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{3000}{\sqrt{576}}) = N(\mu, 125)$. Si la suma es 28.8 millones de euros (28 800 000 €) la media es $\frac{28800000}{576} = \frac{100000}{2} = 50000$.

Si $Z \approx N(0,1)$, calculamos M tal que $P(-M < Z < M) = 0.99$. Eso se obtiene con:

$$2F(M) - 1 = 0.99$$

o, lo que es lo mismo $F(M) = 0.995$. En los valores obtenemos M = 2.58.

Así pues, el intervalo es $(50000 - 125 \cdot 2.58,\ 50000 + 125 \cdot 2.58) \approx (49678,\ 50322)$

El intervalo de confianza para el salario medio de los ejecutivos es **(49 678, 50 322)** euros.

Apartado b)

Ya hemos calculado M, era 2.58. La desviación típica es $\frac{3000}{\sqrt{N}}$ de modo que el error es $\frac{2.58 \cdot 3000}{\sqrt{N}}$.

Igualamos a 500 y despejamos:

$\frac{2.58 \cdot 3000}{\sqrt{N}} = 500$ con lo que $N = (\frac{258 \cdot 3000}{500})^2 = 239.63$

Como no se pueden medir los ingresos de 0.63 ejecutivos, redondeamos al siguiente número natural.

Es necesario medir los ingresos de **240** ejecutivos.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Baleares

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos

Colaborador: Jesús Caballero Vallés

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 1

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. Considerau la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es demana:

a) Resoleu l'equació $|A| = 0$. ($|A|$ és el determinant de la matriu A.) (3 punts)
b) Si $x = 0$, té inversa la matriu A? Per què? (2 punts)
c) Si $x = 2$, té inversa la matriu A? Per què? En cas afirmatiu, resoleu l'equació $A \cdot Z = I$; on I és la matriu identitat 3×3. (5 punts)

2. El nombre de vehicles que ha passat cert dia pel peatge d'una autopista ve donat per la funció:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2, & \text{si } 0 \le t \le 9, \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2, & \text{si } 9 < t \le 24, \end{cases}$$

on N indica el nombre de vehicles i t el temps transcorregut en hores des de les 0:00 h.

a) És contínua la funció $N(t)$? (3 punts)
b) Entre quines hores va augmentar el nombre de vehicles que passava pel peatge? En quines hores disminueix? (5 punts)
c) A quina hora va passar el major nombre de vehicles? Quin va ser aquest nombre? (2 punts)

3. Tenim un dau correcte i dues urnes amb bolles descrites a continuació:

Urna I: 1 bolla negra, 3 bolles vermelles i 6 bolles verdes.
Urna II: 2 bolles negres, 6 bolles vermelles i 2 bolles verdes.

Tiram el dau. Si surt 1 o 2, anam a l'urna I. Si surt 3, 4, 5 o 6, acudim a l'urna II. Extreim a l'atzar una bolla de l'urna corresponent.

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 1

a) Donau un diagrama en arbre que representi l'experiment amb totes les probabilitats. (3 punts)

b) Calculau les probabilitats següents: (4 punts)

i) $p(\{3,4,5,6\}$ i $\{\text{bolla vermella}\})$.
ii) $p(\{\text{bolla verda}\}/\{1\})$.
iii) $p(\{\text{bolla vermella}\}/\{5\})$.
iv) $p(\{2\}$ i $\{\text{bolla verda}\})$.

c) Calculau la probabilitat que la bolla extreta hagi estat vermella i que hagi estat negra. Quina és la probabilitat que la bolla extreta hagi estat verda? Quant val la suma de les tres probabilitats? Justifica la resposta. (3 punts)

4. Resoleu els apartats següents:

a) El pes dels habitants d'una ciutat té una mitjana de 67 kg i una desviació típica de 5 kg. Quina és la probabilitat que la mitjana del pes de 100 persones superi els 68.5 kg? I que sigui menor que 68 kg?. (5 punts)

b) En un hospital s'ha pres la temperatura a una mostra de 64 pacients, per a estimar la temperatura mitjana dels malalts. La mitjana de la mostra ha estat de 37,1 °C, i la desviació típica de la població, d'1,04 °C. Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional amb un nivell de confiança del 99%. Interpreta el resultat en l'entorn del problema. (5 punts)

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 1

OPCIÓ B

1. Una empresa d'autobusos té tres línies: A, B i C. Dilluns varen sortir 5 autobusos a la línia A, 3 a la B i 4 a la C. Dimarts varen sortir 2 autobusos a la línia A, 1 a la B i 4 a la C. Dimecres varen sortir 1 autobús a la línia A, 3 a la B i 5 a la C.

a) Representau les dades en forma de matriu. (2 punts)
b) Té inversa la matriu construïda a l'apartat a)? En cas negatiu, justificau la resposta. En cas positiu, calculau la seva inversa. (4 punts)
c) Si D és la matriu construïda a l'apartat a), resoleu, si és possible, el sistema d'equacions: (4 punts)

$$D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix}.$$

2. Una empresa es dedica a elaborar lots de productes que es venen als supermercats. En aquest moment estan empaquetant dos lots diferents. El lot de tipus A té 1 formatge i 2 botelles de vi, i el transport costa 0,90 €. El lot de tipus B té 3 formatges i 1 botella de vi, i costa 1,50 € transportar-lo. L'empresa disposa de 200 formatges i 100 botelles de vi, i han d'elaborar, almenys, 10 lots del tipus A i 25 del tipus B.

Quants lots de cada classe han d'elaborar perquè les despeses en transport siguin mínimes?

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs. (10 punts)

3. El nombre de visitants a un museu s'obté mitjançant la funció

$$V(t) = \frac{300t}{t^3+2}$$

on t és l'hora des de l'obertura del museu. Suposem que l'hora d'obertura del museu són les 9:00 hores del matí.

a) Quan creix i decreix el nombre de visitants del museu? (4 punts)
b) Quan rep el museu el nombre més gran de visitants? Quin és aquest nombre? (2 punts)
c) En quin valor de t es produeix un punt d'inflexió de $V(t)$? (4 punts)

4. Tenim dues urnes descrites a continuació:

Urna I: 2 bolles negres, 1 bolla vermella i 3 bolles verdes.
Urna II: 1 bolla negra, 2 bolles vermelles i 1 bolla verda.

L'experiment consisteix a extraure una bolla a l'atzar de l'urna I, introduir-la en l'urna II, remoure i extraure, finalment, una bolla a l'atzar de l'urna II.

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II — 2019

Model 1

a) Donau un diagrama en arbre que representi l'experiment amb les probabilitats associades. (3 punts)

b) Calculau la probabilitat que la segona bolla extreta sigui (3 punts)
b.1) vermella. b.2) negra. b.3) verda.

c) Sabent que la segona bolla ha esta negra, quina és la probabilitat que la primera també ho fos? (2 punts)

d) Quina és la probabilitat que la primera fos vermella sent vermella la segona? (2 punts)

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 1: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

SOLUCIONES OPCIÓ A

Problema A.1:

1. Considerau la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es demana:

a) Resoleu l'equació $|A| = 0$. ($|A|$ és el determinant de la matriu A.) (3 punts)
b) Si $x = 0$, té inversa la matriu A? Per què? (2 punts)
c) Si $x = 2$, té inversa la matriu A? Per què? En cas afirmatiu, resoleu l'equació $A \cdot Z = I$; on I és la matriu identitat 3×3. (5 punts)

Solución:

a) Se cumple que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} =-3\,(x+2) - 3\,x^2 - 20 - 5\,(x+2) - x^2 + 36 = -3\,x - 6 - 3\,x^2 - 20 - 5\,x - 10 - x^2 + 36 = -4\,x^2 - 8\,x = -4\,x\,(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \ x+2 = 0 \Leftrightarrow$$

$x = 0,\ x = -2$

b) Si $x = 0$, como $|A| = 0$, A no tiene inversa.
c) Si $x = 2$, como $|A| \neq 0$, A tiene inversa.

La solución a $A\,Z = \mathrm{I}$ es $Z = A^{-1}$.

Se cumple que:

$|A| = -8\,(2+2) = -32$ (apartado a), con $A_{11} = -16$; $A_{12} = 12-4 = 8$, $A_{13} = 4+4 = 8$, $A_{21} = 9-5 = 4$, $A_{22} = -3-5 = -8$, $A_{23} = -1-3 = -4$, $A_{31} = 12+20 = 32$, $A_{32} = -|||14-54||| = -4-20 = -24$, $A_{33} = 4-12 = -8$,

por lo que:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -16 & 8 & 8 \\ 4 & -8 & -4 \\ 32 & 24 & -8 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$Z = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(adj(A))^t = \frac{1}{-32}\begin{pmatrix} -16 & 4 & 32 \\ 8 & -8 & 24 \\ 8 & -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} & -1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} & -1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

Problema A.2:

2. El nombre de vehicles que ha passat cert dia pel peatge d'una autopista ve donat per la funció:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2, & \text{si } 0 \le t \le 9, \\ 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2, & \text{si } 9 < t \le 24, \end{cases}$$

on N indica el nombre de vehicles i t el temps transcorregut en hores des de les 0:00 h.

a) És contínua la funció $N(t)$? (3 punts)

b) Entre quines hores va augmentar el nombre de vehicles que passava pel peatge? En quines hores disminueix? (5 punts)

c) A quina hora va passar el major nombre de vehicles? Quin va ser aquest nombre? (2 punts)

Solución:

a) El único punto problemático es $t = 9$, ya que en las dos ramas la función es polinómica y por tanto continua. Se cumple que:

$$\lim_{t\to 9} N(t) = \begin{cases} \lim\limits_{t\to 9^-} N(t) = \lim\limits_{t\to 9^-} \left(\left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2\right) = \left(\frac{9-3}{3}\right)^2 + 2 = 4 + 2 = 6 \\ \lim\limits_{t\to 9^+} \left(10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2\right) = 10 - \left(\frac{9-15}{3}\right)^2 = 10 - 4 = 6 \end{cases}$$

por lo que

$$\lim_{t\to 9} N(t) = 6 = N(9)$$

Luego la función $\boldsymbol{N(t)}$ es continua en $[0, 24]$.

b) Se cumple que si $t < 9$, $N(t) = \left(\frac{t-3}{3}\right)^2 + 2 \Rightarrow N'(t) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\frac{\boldsymbol{t-3}}{\mathbf{3}} = 0 \Leftrightarrow t = 3$, con:

$N'(t) = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\frac{\boldsymbol{t-3}}{\mathbf{3}} < 0 \Leftrightarrow t < 3$, por lo que N es estrictamente decreciente si $0 < t < 3$ y N es estrictamente creciente si $3 < t < 9$

Si $t > 9$, $N(t) = 10 - \left(\frac{t-15}{3}\right)^2 \Rightarrow N'(t) = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\frac{\boldsymbol{t-15}}{\mathbf{3}} = 0 \Leftrightarrow t = 15$, con:

$N'(\boldsymbol{t}) = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\frac{\boldsymbol{t-15}}{\mathbf{3}} < 0 \Leftrightarrow t > 15$, por lo que N es estrictamente creciente si $9 < t < 15$ y N es estrictamente decreciente si $15 < t < 24$.

Entonces, al ser N continua, tenemos que N es estrictamente decreciente si $0 < t < 3$, N es estrictamente creciente si $3 < t < 15$ y N es estrictamente decreciente si $15 < t < 24$, por lo que el número de vehículos disminuye de 0: 00 a 3: 00, aumenta de 3: 00 a 15: 00 y vuelve a disminuir de 15:00 a 24: 00.

El número de vehículos disminuye de 0: 00 a 3: 00, aumenta de 3: 00 a 15: 00 y vuelve a disminuir de 15:00 a 24: 00

c) Por el crecimiento se ve que el máximo absoluto de N está en $t = 0$ o en $t = 15$, con:

$N(0) = \left(\frac{0-3}{3}\right)^2 + 2 = 3$, $N(15) = 10 - \left(\frac{15-15}{3}\right)^2 = 10$, luego el máximo número de vehículos es 10 y se alcanza a las 15: 00.

El máximo número de vehículos es $\mathbf{10}$ y se alcanza a las $\mathbf{15:00}$.

Problema A.3:

3. Tenim un dau correcte i dues urnes amb bolles descrites a continuació:

Urna I: 1 bolla negra, 3 bolles vermelles i 6 bolles verdes.
Urna II: 2 bolles negres, 6 bolles vermelles i 2 bolles verdes.

Tiram el dau. Si surt 1 o 2, anam a l'urna I. Si surt 3, 4, 5 o 6, acudim a l'urna II. Extreim a l'atzar una bolla de l'urna corresponent.

a) Donau un diagrama en arbre que representi l'experiment amb totes les probabilitats. (3 punts)

b) Calculau les probabilitats següents: (4 punts)

i) $p(\{3,4,5,6\}$ i $\{\text{bolla vermella}\})$.
ii) $p(\{\text{bolla verda}\}/\{1\})$.
iii) $p(\{\text{bolla vermella}\}/\{5\})$.
iv) $p(\{2\}$ i $\{\text{bolla verda}\})$.

c) Calculau la probabilitat que la bolla extreta hagi estat vermella i que hagi estat negra. Quina és la probabilitat que la bolla extreta hagi estat verda? Quant val la suma de les tres probabilitats? Justifica la resposta. (3 punts)

Solución:

a)

$$\nearrow Negra\ \left(\tfrac{1}{10}\right)$$
$$\nearrow Urna\ 1\ \left(\tfrac{1}{3}\right) \rightarrow Roja\ \left(\tfrac{3}{10}\right)$$
$$\searrow Verde\ \left(\tfrac{3}{5}\right)$$
$$Dado$$
$$\nearrow Negra\ \left(\tfrac{1}{5}\right)$$
$$\searrow Urna\ 2\ \left(\tfrac{2}{3}\right) \rightarrow Roja\ \left(\tfrac{3}{5}\right)$$
$$\searrow Verde\ \left(\tfrac{1}{5}\right)$$

b) i) Se cumple que:

$$P(\{3,4,5,6\} \cap \{bola\ roja\}) = P(\{bola\ roja\}/\{3,4,5,6\}) \cdot P(\{3,4,5,6\}) = \frac{3}{5}\frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

ii) Al haber salido un 1 estamos en la urna 1, por lo que $P(\{bola\ verde\}/\{1\}) = \frac{3}{5}$

iii) Al haber salido un 5 estamos en la urna 2, por lo que $P(\{bola\ roja\}/\{5\}) = \frac{3}{5}$

iv) $P(\{2\} \cap \{bola\ verde\}) = P(\{bola\ verde\}/\{2\}) \cdot P(\{2\}) = \frac{3}{5}\frac{1}{6} = \frac{1}{10}$

i) $\frac{2}{5}$ **; ii)** $\frac{3}{5}$**; iii)** $\frac{3}{5}$; $\boldsymbol{iv)}\ \frac{1}{10}$

Colaborador: Jesús Caballero Vallés
Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

c) $P(\{bola\ roja\}) = P(\{bola\ roja\} \cap \{urna\ 1\}) + P(\{bola\ roja\} \cap \{urna\ 2\}) = P(\{bola\ roja\}/\{urna\ 1\}) \cdot P(\{urna\ 1\}) + P(\{bola\ roja\}/\{urna\ 2\}) \cdot P(\{urna\ 2\}) = \frac{3}{10}\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\frac{2}{3} = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$$P(\{bola\ negra\}) = P(\{bola\ negra\} \cap \{urna\ 1\}) + P(\{bola\ negra\} \cap \{urna\ 2\}) = P(\{bola\ negra\}/\{urna\ 1\}) \cdot P(\{urna\ 1\}) + P(\{bola\ negra\}/\{urna\ 2\}) \cdot P(\{urna\ 2\}) = \frac{1}{10}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{2}{3} = \frac{1}{30} + \frac{2}{15} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

$$P(\{bola\ verde\}) = P(\{bola\ verde\} \cap \{urna\ 1\}) + P(\{bola\ verde\} \cap \{urna\ 2\}) = P(\{bola\ verde\}/\{urna\ 1\}) \cdot P(\{urna\ 1\}) + P(\{bola\ verde\}/\{urna\ 2\}) \cdot P(\{urna\ 2\}) = \frac{3}{5}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{2}{3} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

La suma de las tres probabilidades es: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{6}{6} = 1$, como era de esperar.

$P(\{bola\ roja\}) = \frac{1}{2}$; $P(\{bola\ negra\}) = \frac{1}{6}$; $P(\{bola\ verde\}) = \frac{1}{3}$; La suma de las tres es 1.

Problema A.4:

4. Resoleu els apartats següents:

a) El pes dels habitants d'una ciutat té una mitjana de 67 kg i una desviació típica de 5 kg. Quina és la probabilitat que la mitjana del pes de 100 persones superi els 68.5 kg? I que sigui menor que 68 kg?. (5 punts)

b) En un hospital s'ha pres la temperatura a una mostra de 64 pacients, per a estimar la temperatura mitjana dels malalts. La mitjana de la mostra ha estat de 37,1 °C, i la desviació típica de la població, d'1,04 °C. Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional amb un nivell de confiança del 99%. Interpreta el resultat en l'entorn del problema. (5 punts)

Solución:

a) Nos dicen que μ = 67, σ = 5 y n = 100. Se tiene que la probabilidad de que sea superior a 68.5:

$$P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i > 68.5\right) = 1 - P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i \le 68.5\right) = 1 - P\left(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} \le \frac{68.5-67}{\frac{5}{\sqrt{100}}}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} \le \frac{1.5}{\frac{1}{2}}\right) = 1 - P\left(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i - 67}{5\sqrt{100}} \le 3\right)$$

Hemos tipificado para tener una $\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} \approx N(0,1)$. Mirando en la tabla, obtenemos:

$$P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i > 68.5\right) = 1 - P\left(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} \le 3\right) = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

Y que sea menor que 68. De nuevo tipificamos y buscamos en la tabla:

$$P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i < 68\right) = P\left(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} < \frac{68-67}{\frac{5}{\sqrt{100}}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} < 2\right)$$

Donde $\dfrac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} \approx N(0,1)$. Mirando en la tabla, obtenemos:

$$P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i < 68\right) = P\left(\frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - 67}{\frac{5}{\sqrt{100}}} < 2\right) = 0.9772.$$

$$P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i > 68.5\right) = \mathbf{0.0013};\ P\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i < 68\right) = \mathbf{0.9772}$$

b) Se cumple que $\mathrm{X} =$ temperatura sigue una $N(\mu, 1.04)$, por lo que:

$$Y = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\frac{1.04}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{1}{64}\sum_{i=1}^{6} X_i - \mu}{\frac{1.04}{8}} \approx\rightleftarrows N(0,1)$$

Tenemos que:

$$P(-z \le Y \le z) = P(Y \le z) - P(Y \le -z) = P(Y \le z) - P(Y \ge z) = P(Y \le z) - \big(1 - P(Y \le z)\big) =$$
$$2\,P(Y \le z) - 1 = 0.99 \Rightarrow P(Y \le z) = \frac{1.99}{2} = 0.995$$

Mirando en la tabla, obtenemos $z = 2.575$, por lo que el intervalo es:

$$\left[37.1 - 2.575\,\frac{1.04}{8}, 37.1 + 2.575\,\frac{1.04}{8}\right] \approx [36.77, 37.43]$$

Interpretación: Con una confianza muy alta, la media de la temperatura de la población hospitalaria estará en el intervalo indicado:

$$(\mathbf{36.77}, \mathbf{37.43})$$

SOLUCIONES OPCIÓ B

Problema B.1:

1. Una empresa d'autobusos té tres línies: A, B i C. Dilluns varen sortir 5 autobusos a la línia A, 3 a la B i 4 a la C. Dimarts varen sortir 2 autobusos a la línia A, 1 a la B i 4 a la C. Dimecres varen sortir 1 autobús a la línia A, 3 a la B i 5 a la C.

a) Representau les dades en forma de matriu. (2 punts)

b) Té inversa la matriu construïda a l'apartat a)? En cas negatiu, justificau la resposta. En cas positiu, calculau la seva inversa. (4 punts)

c) Si D és la matriu construïda a l'apartat a), resoleu, si és possible, el sistema d'equacions: (4 punts)

$$D\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-33\\-33\\-33\end{pmatrix}.$$

Solución:

a) Ponemos como elemento i,j el número de autobuses que deben salir el día i a la línea j, por lo que la matriz es $D=\begin{pmatrix}5&3&4\\2&1&4\\1&3&5\end{pmatrix}$

b) Se cumple que $\begin{vmatrix}5&3&4\\2&1&4\\1&3&5\end{vmatrix}=25+12+24-4-60-30=-33\neq 0$, luego D tiene inversa ya que su determinante es distinto de cero.

Se cumple que $D_{11}=\begin{vmatrix}1&4\\3&5\end{vmatrix}=5-12=-7$, $D_{12}=-\begin{vmatrix}2&4\\1&5\end{vmatrix}=-10+4=-6$,

$D_{13}=\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=6-1=5$, $D_{21}=-\begin{vmatrix}3&4\\3&5\end{vmatrix}=-15+12=-3$, $D_{22}=\begin{vmatrix}5&4\\1&5\end{vmatrix}=25-4=21$,

$D_{23}=-\begin{vmatrix}5&3\\1&3\end{vmatrix}=-15+3=-12$, $D_{31}=\begin{vmatrix}3&4\\1&4\end{vmatrix}=12-4=8$, $D_{32}=-\begin{vmatrix}5&4\\2&4\end{vmatrix}=-20+8=-12$,

$D_{33}=\begin{vmatrix}5&3\\2&1\end{vmatrix}=5-6=-1$, por lo que: $adj(D)=\begin{pmatrix}-7&-6&5\\-3&21&-12\\8&-12&-1\end{pmatrix}$ y

$$D^{-1}=\frac{1}{|D|}adj(D)^t=-\frac{1}{33}\begin{pmatrix}-7&-3&8\\-6&21&-12\\5&-12&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{33}&\frac{3}{33}&-\frac{8}{33}\\\frac{6}{33}&-\frac{21}{33}&\frac{12}{33}\\-\frac{5}{33}&\frac{12}{33}&\frac{1}{33}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{33}&\frac{3}{33}&-\frac{8}{33}\\\frac{6}{33}&-\frac{21}{33}&\frac{12}{33}\\-\frac{5}{33}&\frac{12}{33}&\frac{1}{33}\end{pmatrix}}$$

c) Multiplicamos por la inversa. La solución es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{33} & \frac{3}{33} & -\frac{8}{33} \\ \frac{6}{33} & -\frac{21}{33} & \frac{12}{33} \\ -\frac{5}{33} & \frac{12}{33} & \frac{1}{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7-3+8 \\ -6+21-12 \\ +5-12-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{-8} \end{pmatrix}$$

Problema B.2:

2. Una empresa es dedica a elaborar lots de productes que es venen als supermercats. En aquest moment estan empaquetant dos lots diferents. El lot de tipus A té 1 formatge i 2 botelles de vi, i el transport costa 0,90 €. El lot de tipus B té 3 formatges i 1 botella de vi, i costa 1,50 € transportar-lo. L'empresa disposa de 200 formatges i 100 botelles de vi, i han d'elaborar, almenys, 10 lots del tipus A i 25 del tipus B.

Quants lots de cada classe han d'elaborar perquè les despeses en transport siguin mínimes?

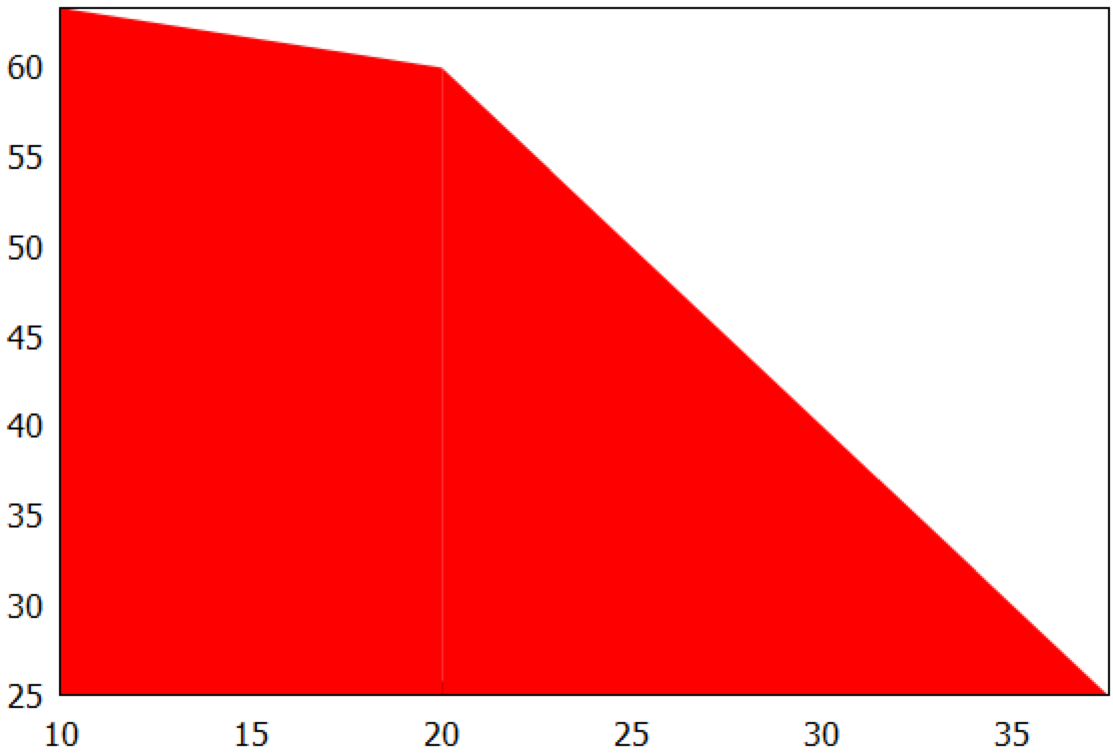
S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs. (10 punts)

Solución:

Si fabrica x lotes del tipo A, y del tipo B, el coste es $f(x,y) = 0.9\,x + 1.5\,y$ y las restricciones son $x \geq 10$, $y \geq 25$, $x + 3\,y \leq 200$ (número total de quesos), $2\,x + y \leq 100$ (número total de vinos), luego el problema es:

$$\begin{array}{l} \min 0.9\,x + 1.5\,y \\ x \geq 10,\ y \geq 25,\ x + 3y \leq 200,\ 2x + y \leq 100 \end{array}.$$

Región factible:



Como la función es lineal y el recinto un politopo, el mínimo se halla en algún vértice del recinto.

Punto de corte de $x = 10$ con $y = \dfrac{200 - x}{3}$: $y = \dfrac{200 - 10}{3} = \dfrac{190}{3}$: $\left(10, \dfrac{190}{3}\right)$.

Punto de corte de $y=\dfrac{200-x}{3}$ con $y=100-x$:

$\dfrac{200-x}{3}=100-x \Leftrightarrow 200-x=300-3\,x \Leftrightarrow x=50, y=100-50=50$: $(50,50)$.

Punto de corte de $y=100-x$ con $y=25$: $100-x=25 \Leftrightarrow x=75$: $(75,25)$.

Valoramos f en los candidatos:

$f\left(10,\dfrac{190}{3}\right)=0.9\times 10+1.5\dfrac{190}{3}=9+95=104$,

$f(50,50)=0.9\times 50+1.5\times 50=45+75=120$,

$f(75,25)=0.9\times 75+1.5\times 25=\dfrac{135}{2}+\dfrac{75}{2}=105$,

$f(10,25)=0.9\times 10+1.5\times 25=9+\dfrac{75}{2}=\dfrac{93}{2}$,

por lo que el mínimo coste es $\frac{93}{2}=46.50$ € y tendrá que elaborar 10 lotes del tipo A y 25 del B.

Se han de elaborar **10** lotes del tipo A y **25** del tipo B. El coste mínimo es de **46.50** euros

Problema B.3:

3. El nombre de visitants a un museu s'obté mitjançant la funció

$$V(t) = \frac{300t}{t^3+2}$$

on t és l'hora des de l'obertura del museu. Suposem que l'hora d'obertura del museu són les 9:00 hores del matí.

a) Quan creix i decreix el nombre de visitants del museu? (4 punts)
b) Quan rep el museu el nombre més gran de visitants? Quin és aquest nombre? (2 punts)
c) En quin valor de t es produeix un punt d'inflexió de $V(t)$? (4 punts)

Solución:

a) Se cumple que $V'(t) = 300\dfrac{t^3+2-t\,3t^2}{\left(t^3+2\right)^2} = 600\dfrac{1-t^3}{\left(t^3+2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow t=1$. Tenemos que:

$V'(t) = 600\dfrac{1-t^3}{\left(t^3+2\right)^2} < 0 \Leftrightarrow 1-t^3 < 0 \Leftrightarrow t>1$, por lo que V es estrictamente creciente si $t<1$ y estrictamente decreciente si $t>1$.

El número de visitantes crece durante la primera hora (hasta las 10), y luego decrece.

b) Según el apartado a) el máximo absoluto se alcanza en $t=1$, con $V(1) = \dfrac{300}{1^3+2} = 100$.

El máximo número de visitantes, **100**, se alcanza a las **10** de la mañana: (1, 100).

c) Se cumple que:

$$V''(t) = 600\frac{-3t^2\left(t^3+2\right)^2 - \left(1-t^3\right)2\left(t^3+2\right)3t^2}{\left(t^3+2\right)^4} = -1800\,t^2\frac{t^3+2+2\left(1-t^3\right)}{\left(t^3+2\right)^3} = -1800\,t^2\frac{4-t^3}{\left(t^3+2\right)^3} = 0 \Leftrightarrow t=\sqrt[3]{4}$$

Con $V''(t) = -1800\,t^2\dfrac{4-t^3}{\left(t^3+2\right)^3} > 0 \Leftrightarrow 4-t^3 < 0 \Leftrightarrow t > \sqrt[3]{4}$, por lo que V cambia de convexidad en un entorno de $\sqrt[3]{4}$ y V tiene un punto de inflexión en $t=\sqrt[3]{4}$

Para $t=\sqrt[3]{4}$ la función *V(t)* tiene un **punto de inflexión**.

Problema B.4:

4. Tenim dues urnes descrites a continuació:

Urna I: 2 bolles negres, 1 bolla vermella i 3 bolles verdes.
Urna II: 1 bolla negra, 2 bolles vermelles i 1 bolla verda.

L'experiment consisteix a extraure una bolla a l'atzar de l'urna I, introduir-la en l'urna II, remoure i extraure, finalment, una bolla a l'atzar de l'urna II.

a) Donau un diagrama en arbre que representi l'experiment amb les probabilitats associades.
(3 punts)

b) Calculau la probabilitat que la segona bolla extreta sigui (3 punts)
b.1) vermella. b.2) negra. b.3) verda.

c) Sabent que la segona bolla ha esta negra, quina és la probabilitat que la primera també ho fos? (2 punts)

d) Quina és la probabilitat que la primera fos vermella sent vermella la segona?
(2 punts)

Solución:

a) Diagrama de árbol:

$$Urna\quad 1\begin{cases} Urna\quad 2\ \ negra\ \left(\dfrac{1}{3}\right)\begin{cases} Negra\ \left(\dfrac{2}{5}\right)\\ Roja\ \left(\dfrac{2}{5}\right)\\ Verde\ \left(\dfrac{1}{5}\right)\end{cases}\\ Urna\quad 2\ \ roja\ \left(\dfrac{1}{6}\right)\begin{cases} Negra\ \left(\dfrac{1}{5}\right)\\ Roja\ \left(\dfrac{3}{5}\right)\\ Verde\ \left(\dfrac{1}{5}\right)\end{cases}\\ Urna\quad 2\ \ verde\ \left(\dfrac{1}{2}\right)\begin{cases} Negra\ \left(\dfrac{1}{5}\right)\\ Roja\ \left(\dfrac{2}{5}\right)\\ Verde\ \left(\dfrac{2}{5}\right)\end{cases}\end{cases}$$

b1) Se cumple que:

$$P(\{segunda\ roja\}) = P(\{segunda\ roja\}\cap\{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ roja\}\cap\{primera\ roja\}) + P(\{segunda\ roja\}\cap\{primera\ verde\}) =$$
$$= P(\{segunda\ roja\}/\{primera\ negra\})P(\{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ roja\}/\{primera\ roja\})P(\{primera\ roja\}) +$$
$$+ P(\{segunda\ roja\}/\{primera\ verde\})P(\{primera\ verde\}) = \frac{2}{5}\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\frac{1}{2} = \frac{2}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{13}{30}$$

b2) Se cumple que:

$$P(\{segunda\ negra\}) = P(\{segunda\ negra\} \cap \{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ negra\} \cap \{primera\ roja\}) + P(\{segunda\ negra\} \cap \{primera\ verde\}) =$$
$$= P(\{segunda\ negra\}/\{primera\ negra\})\,P(\{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ negra\}/\{primera\ roja\})\,P(\{primera\ roja\}) +$$
$$+ P(\{segunda\ negra\}/\{primera\ verde\})\,P(\{primera\ verde\}) = \frac{2}{5}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\frac{1}{2} = \frac{2}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15}$$

b3) Se cumple que:

$$P(\{segunda\ verde\}) = P(\{segunda\ verde\} \cap \{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ verde\} \cap \{primera\ roja\}) + P(\{segunda\ verde\} \cap \{primera\ verde\}) =$$
$$= P(\{segunda\ verde\}/\{primera\ negra\})\ P(\{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ verde\}/\{primera\ roja\})\ P(\{primera\ roja\}) +$$
$$+ P(\{segunda\ verde\}/\{primera\ verde\})\ P(\{primera\ verde\}) = \frac{1}{5}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\frac{1}{2} = \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{5} = \frac{9}{30}$$

b1) P(segunda sea roja) = $13/30$; b2) P(segunda negra) = $4/15$; P(segunda verde) = $9/30$.

c) Se cumple que:

$$P(\{primera\ negra\}/\{segunda\ negra\}) = \frac{P(\{las2\ negras\})}{P(\{segunda\ negra\})} =$$
$$= \frac{P(\{segunda\ negra\}/\{primera\ negra\})P(\{primera\ negra\})}{\left(\begin{array}{l} P(\{segunda\ negra\}/\{primera\ negra\})P(\{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ negra\}/\{primera\ roja\})P(\{primera\ roja\}) + \\ P(\{segunda\ negra\}/\{primera\ verde\})P(\{primera\ verde\}) \end{array}\right)} = \frac{\frac{2}{5}\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{10}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{8}{30}} = \frac{1}{2}$$

c) P(primera negra/segunda negra) = $1/2$.

d) Se cumple que:

$$P(\{primera\ roja\}/\{segunda\ roja\}) = \frac{P(\{las2\ rojas\})}{P(\{segunda\ roja\})} =$$
$$= \frac{P(\{segunda\ roja\}/\{primera\ roja\})P(\{primera\ roja\})}{\left(\begin{array}{l} P(\{segunda\ roja\}/\{primera\ negra\})P(\{primera\ negra\}) + P(\{segunda\ roja\}/\{primera\ roja\})P(\{primera\ roja\}) + \\ P(\{segunda\ roja\}/\{primera\ verde\})P(\{primera\ verde\}) \end{array}\right)} = \frac{\frac{3}{5}\frac{1}{6}}{\frac{2}{5}\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{13}{30}} = \frac{3}{13}$$

d) P(primera roja/segunda roja) = $3/13$.

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Donades $\mathbf{A}$, una matriu quadrada invertible qualsevol, i $\mathbf{A}^{-1}$ la seva inversa; quina matriu s'ha d'obtenir en calcular $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ i $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$? Descriviu/indicau com és aquesta matriu. (1 punt)

b) Considerau la matriu

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & x+2\end{pmatrix}$$

i) Calculau els valors de x per als quals se satisfà que (5 punts)

$$\mathbf{A}^2=2\cdot\mathbf{A}.$$

ii) Per a $x=-1$, calculau $\mathbf{A}^{-1}$. Comprovau el resultat calculant $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$. (4 punts)

2. Un article de consum va estar a la venda durant 8 anys, i el seu preu $P(t)$ (en milers d'euros) va variar amb el temps t (en anys) que portava al mercat segons la funció:

$$P(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}t^3+4t^2+40, & 0\le t\le 6,\\ -\frac{113}{14}t^2+\frac{3826}{7}, & 6<t\le 8.\end{cases}$$

a) Quin va ser el preu de sortida del producte? (1 punt)

b) És contínua la funció? És derivable? Donau els conjunts de continuïtat i derivabilitat. (4 punts)

c) Determinau els intervals de creixement i decreixement del preu del producte. (3 punts)

d) Esbrinau en quin moment es varen assolir els preus màxim i mínim i quins varen ser aquests preus. (2 punts)

3. En una màquina s'han fabricat 100 peces, de les quals 15 han presentat algun defecte.

a) Calculau la proporció de peces que no són defectuoses. (2 punts)

b) Calculau la probabilitat que, si examinam dues peces a l'atzar, ambdues resultin defectuoses. (5 punts)

c) Si provam dues peces a l'atzar i la primera és defectuosa, quina és la probabilitat que la segona no ho sigui? (3 punts)

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 2

4. El 70% dels alumnes de batxillerat tenen mòbil.

a) Si un centre té 1.400 alumnes de batxillerat, quants s'espera que tinguin mòbil? (1 punt)

b) Quina és la probabilitat que, en una mostra aleatòria amb repetició de 150 alumnes de batxillerat, n'hi hagi més de 100 amb telèfon mòbil? (5 punts)

c) Quina és la probabilitat que, en una mostra aleatòria amb repetició de 200 alumnes de batxillerat, n'hi hagi 140 o menys amb telèfon mòbil? (4 punts)

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 2

OPCIÓ B

1. Un institut té tres partides pressupostàries: llibres, material d'oficina i mobles. El pressupost per a mobles d'aquest institut és cinc vegades la suma del de llibres més el del material d'oficina. El pressupost per a llibres és el triple del de material d'oficina. La suma del pressupost per a mobles i material d'oficina és 7 vegades el pressupost de llibres.

a) Amb aquestes dades, podem saber els diners destinats a cada partida pressupostària? (7 punts)

b) Determinau les quantitats si per a llibres hi ha 2100 €. (3 punts)

2. KSE és una empresa que fabrica dos models de guants: un model normal i un model de luxe. L'empresa té disponibles 900 hores de temps al departament de producció, 300 hores al departament d'acabat i 100 hores al departament d'empaquetat. Les hores necessàries de cada departament per parell de guants i els beneficis, en €, es donen a la taula següent:

	Producció	Acabat	Empaquetat	Beneficis
Normal	1	1/2	1/8	4
De luxe	3/2	1/3	1/4	8

Quants parells de cada model han de fabricar per maximitzar el benefici? Quin és aquest benefici? (10 punts)

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs.

3. Dibuixau l'àrea tancada entre els gràfics de les funcions següents: $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x + 1$ (4 punts). Calculau l'àrea del recinte anterior (6 punts).

4. Una empresa té dues fàbriques, en la primera són dones el 60% dels treballadors i en la segona són homes el 55% dels treballadors. Es tria a l'atzar un treballador de cada fàbrica per pertànyer al comitè d'empresa. Suposam que el fet de pertànyer a una fàbrica és independent de pertànyer a l'altra.

a) Calculau la probabilitat dels esdeveniments següents: (6 punts)

A = "Tots dos són homes".
B = "Solament un és dona".
C = "Tots dos són dones".

b) Raonau si el succés contrari de l'esdeveniment C és l'A, el B, l'$A \cap B$, l'$A \cup B$ o algun altre esdeveniment, i calculau-ne la probabilitat. (4 punts)

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II 2019

Model 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 2: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

SOLUCIONES OPCIÓ A

Problema A.1:

1. *a*) Donades $\mathbf{A}$, una matriu quadrada invertible qualsevol, i $\mathbf{A}^{-1}$ la seva inversa; quina matriu s'ha d'obtenir en calcular $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ i $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$? Descriviu/indicau com és aquesta matriu. (1 punt)

b) Considerau la matriu

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & x+2\end{pmatrix}$$

i) Calculau els valors de x per als quals se satisfà que (5 punts)

$$\mathbf{A}^2=2\cdot\mathbf{A}.$$

ii) Per a $x=-1$, calculau $\mathbf{A}^{-1}$. Comprovau el resultat calculant $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$. (4 punts)

Solución:

a) La matriz identidad (1 en la diagonal principal, 0 en el resto)

b) i) Se cumple que:

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & x+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & x+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2x+x^2+2x\\ 0 & x^2+4x+4\end{pmatrix}=2A=\begin{pmatrix}4 & 2x\\ 0 & 2x+4\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$2x+x^2+2x=2x,\ x^2+4x+4=2x+4\Leftrightarrow$$
$$x^2+2x=x(x+2)=0\Leftrightarrow x=0,\ x=-2.$$

Se verifica la igualdad para $\boldsymbol{x=0,\ x=-2}$

b) ii) Se cumple que $|A|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$, por lo que $A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)^{y}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Comprobación:

$$A\,A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Problema A.2:

2. Un article de consum va estar a la venda durant 8 anys, i el seu preu $P(t)$ (en milers d'euros) va variar amb el temps t (en anys) que portava al mercat segons la funció:

$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40, & 0 \le t \le 6, \\ -\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7}, & 6 < t \le 8. \end{cases}$$

a) Quin va ser el preu de sortida del producte? (1 punt)
b) És contínua la funció? És derivable? Donau els conjunts de continuïtat i derivabilitat. (4 punts)
c) Determinau els intervals de creixement i decreixement del preu del producte. (3 punts)
d) Esbrinau en quin moment es varen assolir els preus màxim i mínim i quins varen ser aquests preus. (2 punts)

Solución:

a) Es $P(0) = \frac{1}{3}0^3 + 4\,0^2 + 40 = 40$ miles de euros.

El precio de salida es de $40\ 000$ euros.

b) La función está definida a trozos por dos funciones polinómicas, que son siempre continuas y derivables; el único punto dudoso es el de unión de los dos trozos. Si $t < 6$, P es continua (polinomio), si $t > 6$, P es continua (polinomio). Se cumple que:

$$\lim_{t\to 6^-} P(t) = \lim_{t\to 6^-}\left(\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40\right) = \frac{1}{3}6^3 + 4\,6^2 + 40 = 256 = \lim_{t\to 6^+} P(t) = \lim_{t\to 6^+}\left(-\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7}\right) = -\frac{113}{14}6^2 + \frac{3826}{7}$$

Por tanto, P es continua en 6 y P es continua en $[0, 8]$

Si $t < 6$, P es derivable (polinomio), si $t > 6$, P es derivable (polinomio). Se cumple que, si $t < 6$:

$P(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 40 \Rightarrow P'(t) = t^2 + 8t$. Entonces, como P es continua en 6, $P'_-(6) = 6^2 + 8 \times 6 = 84$.

Si $t > 6$, $P(t) = -\frac{113}{14}t^2 + \frac{3826}{7} \Rightarrow P'(t) = -\frac{113}{14}t$.

Entonces, como P es continua en 6, $P'_+(6) = -\frac{113}{14} \times 6 \neq P'_-(6)$

Por tanto P ***no es derivable en 6 y*** P ***es derivable en*** $(0, 8) - \{6\}$

c) Utilizamos el signo de la derivada primera para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

Si $0 \le t < 6$, $P'(t) = t^2 + 8t$, que como t es positivo, siempre es positiva, luego la función es creciente en [0, 6)

Si $6 < t \le 8$, $P'(t) = -\frac{113}{14}t$, que es siempre negativa, luego la función es decreciente en (6, 8].

d) Los valores máximos y mínimos se encuentran en los puntos en que se anula la derivada, o donde la derivada no existe, o en los extremos del intervalo de definición. Hemos visto que en [0, 8] la derivada no se anula nunca. Pero que en x = 6, la función no es derivable, y en un entorno de dicho punto pasa de ser creciente a ser decreciente, luego en (6, 256 000) hay un máximo. Sabemos que en 0 vale 40 000, siendo (0, 40 000) un mínimo relativo. Y en

$$P(t) = -\frac{113}{14}\,t^2 + \frac{3826}{7} \Rightarrow P(8) = -\frac{113}{14}\,(8)^2 + \frac{3826}{7} = 30$$

En (8, 30 000) tenemos el valor mínimo absoluto.

El valor máximo absoluto de la función en el intervalo [0, 8] se alcanza en $(6, 84)$ siendo de $84\ 000$ euros. Los valores mínimos son $(0, 40)$ y $(8, 30)$ siendo el precio mínimo absoluto de $30\ 000$ euros.

Problema A.3:

3. En una màquina s'han fabricat 100 peces, de les quals 15 han presentat algun defecte.

a) Calculau la proporció de peces que no són defectuoses. (2 punts)
b) Calculau la probabilitat que, si examinam dues peces a l'atzar, ambdues resultin defectuoses. (5 punts)
c) Si provam dues peces a l'atzar i la primera és defectuosa, quina és la probabilitat que la segona no ho sigui? (3 punts)

Solución:

a) Llamamos D a las piezas defectuosas, y nos dicen que $P(D)$ = 15/100 = 0.15.

Por el suceso contrario sabemos, por tanto, que:

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 0.85.$$

$$P(\overline{D}) = \mathbf{0.85}.$$

b) La probabilidad de que dos piezas sean defectuosas, es:

$$P(D \cap D) = P(D) \cdot P(D/D)$$

Para calcular la probabilidad de que la segunda pieza también sea defectuosa, sabemos que nos quedan un total de 99 piezas, y de ellas 14 defectuosas, luego:

$$P(D \cap D) = P(D) \cdot P(D/D) = \frac{15}{100} \cdot \frac{14}{99} = \frac{210}{9900} = \frac{7}{330} = 0.02121212\ldots \cong 0.02$$

$$P(D \cap D) = 0.02121212\ldots \cong \mathbf{0.02}$$

c) Sabemos que la primera pieza es defectuosa, y nos piden la probabilidad de que la segunda no lo sea, es decir:

$$P(\overline{D}/D)$$

Hemos sacado ya una pieza defectuosa, luego nos quedan 99 piezas, y todas ellas no defectuosas, es decir, 85, por tanto:

$$P(\overline{D}/D) = \frac{85}{99} = 0.858585\ldots \cong 0.86.$$

$$P(\overline{D}/D) = \frac{85}{99} = 0.858585\ldots \cong \mathbf{0.86}.$$

Colaborador: Jesús Caballero Vallés
Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.4:

4. El 70% dels alumnes de batxillerat tenen mòbil.

a) Si un centre té 1.400 alumnes de batxillerat, quants s'espera que tinguin mòbil? (1 punt)

b) Quina és la probabilitat que, en una mostra aleatòria amb repetició de 150 alumnes de batxillerat, n'hi hagi més de 100 amb telèfon mòbil? (5 punts)

c) Quina és la probabilitat que, en una mostra aleatòria amb repetició de 200 alumnes de batxillerat, n'hi hagi 140 o menys amb telèfon mòbil? (4 punts)

Solución:

a) Nos dicen que el 70 % de los alumnos tienen móvil, y que hay 1 400 alumnos, luego se espera que:

$$1400\frac{70}{100} = 980$$

Se espera que tengan móvil $\mathbf{980}$ alumnos.

b) Para calcular la probabilidad de que en una muestra aleatoria con repetición de 150 haya más de 100 alumnos con móvil, usamos una distribución binomial, dónde n = 150, y p = 0.7.

$$B(n,p) = B(150, 0.7)$$

Al ser $150 \cdot 0.7 = 105 > 5$ y $150 \cdot 0.3 = 45 > 5$ aproximamos con una normal:

$$B(n,p) = B(150, 0.7) \rightarrow N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N(105, \sqrt{150 \cdot 0.7 \cdot 0.3}) = N(105, 5.6)$$

Pasamos de la binomial a la normal y tipificamos:

$$P(x > 100) = P(x' > 100.5) = P(z > \frac{100.5 - 105}{5.6}) = P(z > -0.8) = P(z < 0.8) = 0.7881.$$

La probabilidad de que haya más de 100 alumnos con teléfono móvil es de $\mathbf{0.7881 \cong 0.79.}$

c) Para calcular la probabilidad de que en una muestra aleatoria con repetición de 200 alumnos haya 140 alumnos o menos con móvil, usamos de nuevo una distribución binomial, dónde n = 200, y p = 0.7, que pasamos a una normal:

$$B(n,p) = B(200, 0.7) \rightarrow N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N(140, \sqrt{200 \cdot 0.7 \cdot 0.3}) = N(140, 6.48)$$

$$P(x \leq 140) = P(x' \leq 140.5) = P(z \leq \frac{140.5 - 140}{6.48}) = P(z \leq 0.08) = 0.5319.$$

La probabilidad de que haya 140 alumnos o menos con teléfono móvil en una muestra de 200 alumnos es de $\mathbf{0.5319 \cong 0.53}$.

SOLUCIONES OPCIÓ B

Problema B.1:

1. Un institut té tres partides pressupostàries: llibres, material d'oficina i mobles. El pressupost per a mobles d'aquest institut és cinc vegades la suma del de llibres més el del material d'oficina. El pressupost per a llibres és el triple del de material d'oficina. La suma del pressupost per a mobles i material d'oficina és 7 vegades el pressupost de llibres.

a) Amb aquestes dades, podem saber els diners destinats a cada partida pressupostària? (7 punts)

b) Determinau les quantitats si per a llibres hi ha 2100 €. (3 punts)

Solución:

a) Llamamos L al presupuesto para libros, Of al de material de oficina y M al de muebles. Planteamos un sistema de ecuaciones con los datos que nos dan:

$$\begin{cases} M = 5(L + Of) \\ L = 3Of \\ M + Of = 7L \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M = 5(3Of + Of) = 20(Of) \\ L = 3Of \\ M + Of = 7(3Of) \rightarrow M = 20(Of) \end{cases}$$

Observamos que es un sistema compatible indeterminado, es decir, que tiene infinitas soluciones, luego no podemos saber que dinero se destina a cada partida presupuestaria.

b) Nos dicen que: $L = 2100$

$$\begin{cases} L = 2100 = 3Of \\ Of = 700 \\ M = 20(Of) = 20(700) = 14\,000 \end{cases}$$

Si se destinan $2\,100$ euros a **libros**, entonces se destinan 700 euros a **material de oficina** y $14\,000$ euros a **muebles**.

Problema B.2:

2. KSE és una empresa que fabrica dos models de guants: un model normal i un model de luxe. L'empresa té disponibles 900 hores de temps al departament de producció, 300 hores al departament d'acabat i 100 hores al departament d'empaquetat. Les hores necessàries de cada departament per parell de guants i els beneficis, en €, es donen a la taula següent:

	Producció	Acabat	Empaquetat	Beneficis
Normal	1	1/2	1/8	4
De luxe	3/2	1/3	1/4	8

Quants parells de cada model han de fabricar per maximitzar el benefici? Quin és aquest benefici? (10 punts)

S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vèrtexs.

Solución:

Llamamos N a una pareja de guantes del modelo normal, y L a una de lujo.

Nos dicen que:

	Producción	Acabado	Empaquetado	Beneficios
Normal (N)	1	1/2	1/8	4
De lujo (L)	3/2	1/3	1/4	8

Planteamos un problema de programación lineal. Restricciones:

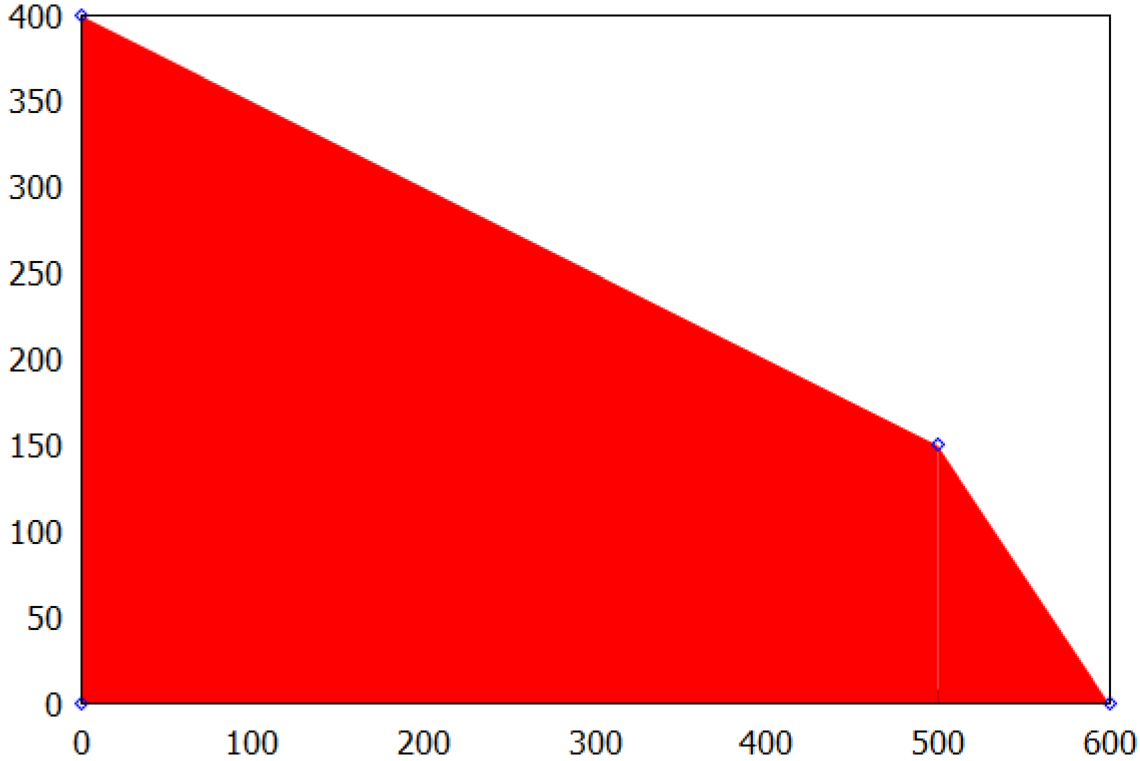
$$\begin{cases} N \geq 0;\ L \geq 0 \\ N + \dfrac{3L}{2} \leq 900 \\ \dfrac{N}{2} + \dfrac{L}{3} \leq 300 \\ \dfrac{N}{8} + \dfrac{L}{4} \leq 100 \end{cases}$$

Y la función beneficio: $B(N, L) \ = \ 4N + 8L$

Calculamos los puntos de intersección y determinamos los vértices:

$$\begin{cases} N = 0;\ L = 0 \\ N + \dfrac{3L}{2} = 900 \\ \dfrac{N}{2} + \dfrac{L}{3} = 300 \\ \dfrac{N}{8} + \dfrac{L}{4} = 100 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = 0;\ L = 0 \\ 2N + 3L = 1800 \\ 3N + 2L = 1800 \\ N + 2L = 800 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = 0; (0,0);\ (0,600);\ (0,900);\ (0,400) \\ L = 0;\ (900,0);\ (600,0);\ (800,0) \\ 2N + 3L = 1800;\ 3N + 2L = 1800;\ (360,360) \\ N + 2L = 800;\ (1200,-200);\ (500,150). \end{cases} \rightarrow$$

Región factible:



Los vértices son: (0, 0); (0, 400); (600, 0); (500, 150).

Calculamos la función beneficio en cada uno de ellos:

(0, 0) → $B(N, L) = 4N + 8L \rightarrow B(0, 0) = 0$

(0, 400) → $B(N, L) = 4N + 8L \rightarrow B(0, 400) = 3200$

(600, 0) → $B(N, L) = 4N + 8L \rightarrow B(600, 0) = 2400$

(500, 150) → $B(N, L) = 4N + 8L \rightarrow B(500, 150) = 2000 + 1200 = 3200$

El beneficio máximo es 3 200, que se obtiene con cualquier punto del segmento de extremos (0, 400) y (500, 150).

$$\frac{N-0}{500} = \frac{L-400}{150-400} \rightarrow -250N = 500L - 200000 \rightarrow N + 2L = 800$$

Como no se puede fabricar un número decimal de guantes de algún tipo, buscamos soluciones enteras de la recta $N + 2L = 800$:

$$N + 2L = 800 \rightarrow (0, 400);\ (2, 399);\ (4, 398);\ \dots;\ (500, 150).$$

Observamos que de los guantes normales se debe fabricar un número par comprendido entre 0 y 500, a los que corresponde a los de lujo los valores 400, …, 150. Con todo ello se obtiene el mismo beneficio.

El beneficio máximo es **3 200**, que se obtiene con puntos de:
$(0, 400);\ (2, 399);\ (4, 398);\ \dots;\ (500, 150).$

Problema B.3:

3. Dibuixau l'àrea tancada entre els gràfics de les funcions següents: $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x + 1$ (4 punts). Calculau l'àrea del recinte anterior (6 punts).

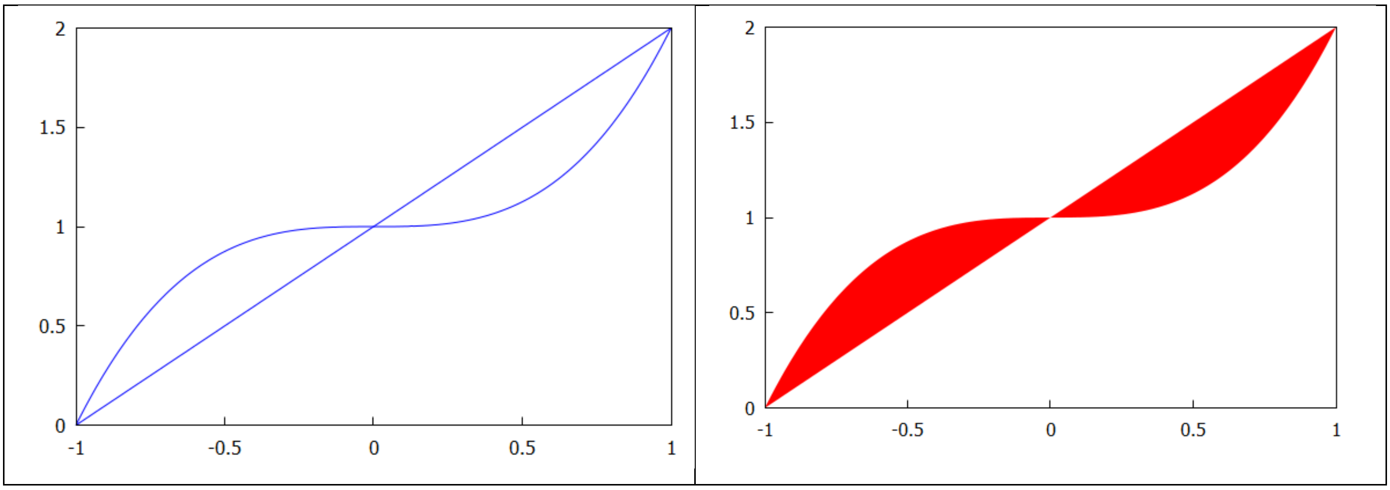
Solución:

La función $f(x) = x^3 + 1$ es una función polinómica, una cúbica, de derivada $f'(x) = 3x^2$ siempre mayor o igual que cero, luego es una función siempre creciente.

La función $g(x) = x + 1$ es una recta de pendiente 1, siempre creciente.

Se cortan en tres puntos: (0, 0), (-1, 0) y (1, 0).

Dibujamos las gráficas:



El área pedida será la integral definida entre –1 y 1, las abscisas de los dos puntos de corte de ambas gráficas. Entre –1 y 0 la cúbica va por encima de la recta, y entre 0 y 1, viceversa. Pero al ser las gráficas simétricas con centro de simetría en (0, 1) también podríamos calcular el área entre 0 y 1, y multiplicar por 2.

$$Área = \int_{-1}^{0}((x^3+1)-(x+1))dx + \int_{0}^{1}((x+1)-(x^3+1))dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_{0}^{1}$$

$$= (-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}u^2$$

$$\boldsymbol{Área = \frac{1}{2}u^2}$$

Problema B.4:

4. Una empresa té dues fàbriques, en la primera són dones el 60% dels treballadors i en la segona són homes el 55% dels treballadors. Es tria a l'atzar un treballador de cada fàbrica per pertànyer al comitè d'empresa. Suposam que el fet de pertànyer a una fàbrica és independent de pertànyer a l'altra.

a) Calculau la probabilitat dels esdeveniments següents: (6 punts)

$$A = \text{"Tots dos són homes".}$$
$$B = \text{"Solament un és dona".}$$
$$C = \text{"Tots dos són dones".}$$

b) Raonau si el succés contrari de l'esdeveniment C és l'A, el B, l'$A \cap B$, l'$A \cup B$ o algun altre esdeveniment, i calculau-ne la probabilitat. (4 punts)

Solución:

Llamamos M al suceso ser mujer y H al de ser hombre. Llamamos $F1$ a ser un trabajador/a de la fábrica 1, y $F2$ el serlo de la fábrica 2.

El enunciado nos dice que:

$$P(M/F1) = 0.6; P(H/F2) = 0.55.$$

a) Se elige un trabajador de cada fábrica. Y nos piden:

A. Ambos sean hombres: $P(A) = P(H/F1) \cdot P(H/F2)$

$H/F1$ es el suceso contrario a $M/F1$, luego $P(H/F1) = 1 – 0.6 = 0.4$

$$P(A) = P(H/F1) \cdot P(H/F2) = 0.4 \cdot 0.55 = 0.22.$$

B. El suceso solamente uno es mujer, significa que, si en la fábrica 1 se ha elegido una mujer, entonces en la 2 se ha elegido a un hombre, y que, si en la 1 se ha elegido a un hombre, entonces en la 2 se ha elegido a una mujer:

$M/F2$ es el suceso contrario a $H/F2$, luego $P(M/F2) = 1 – 0.55 = 0.45$.

$$P(B) = P(M/F1) \cdot P(H/F2) + P(H/F1) \cdot P(M/F2) = 0.6 \cdot 0.55 + 0.4 \cdot 0.45 = 0.51.$$

C. Ambos sean mujeres: $P(C) = P(M/F1) \cdot P(M/F2)$

$$P(C) = P(M/F1) \cdot P(M/F2) = 0.6 \cdot 0.45 = 0.27.$$

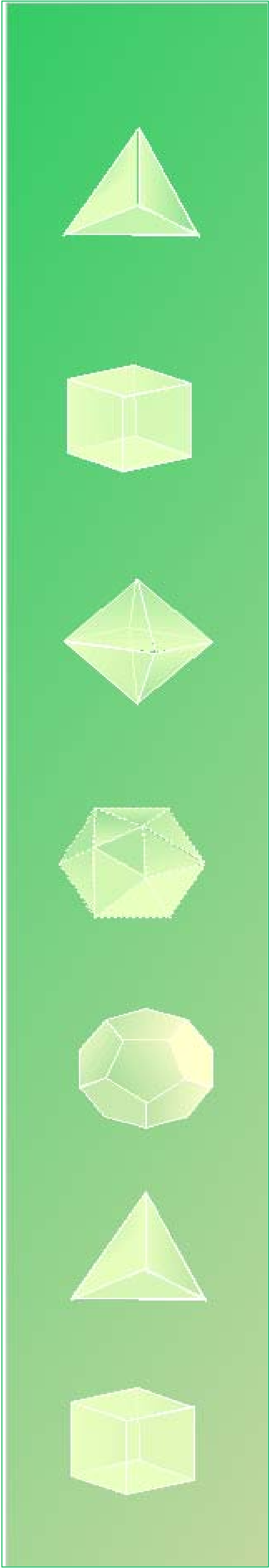
$$P(A) = \mathbf{0.22};\ P(B) = \mathbf{0.51};\ P(C) = \mathbf{0.27}.$$

b) Nos piden ahora el suceso contrario de C, es decir, que ambos sean mujeres. Ese suceso es que ambos sean hombres o que uno sea un hombre y el otro una mujer. Es decir, $A \cup B$. Vamos a comprobarlo:

$P(C) = P(M/F1) \cdot P(M/F2) = 0.6 \cdot 0.45 = 0.27.$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.22 + 0.51 = 0.73 = 1 – 0.27$

En efecto, el suceso contrario de C es $\boldsymbol{A \cup B}$.



Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de:

Canarias

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2018–2019

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II (1)

Convocatoria: Junio

- **Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B).**
- **Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2,5 puntos.**

PRUEBA A

1. A partir de una muestra de 225 parados, se estima que un intervalo de confianza para la prestación social media que reciben está entre 407,72 y 442,28 euros (ambos incluidos). Suponiendo hipótesis de normalidad, con una desviación típica de 90 euros:

a) ¿Cuál es la media muestral obtenida?
b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?
c) Usando la estimación puntual de la prestación social media obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de la prestación social de 25 parados sea mayor o igual que 430 euros?

2. Una empresa fabrica altavoces para equipos de cine en casa en tres factorías situadas en Japón, Alemania y España. Estos altavoces son de 4 tipos: central, delanteros, efectos y "subwoofer". En Japón se fabrican altavoces de los 4 tipos siendo idéntica la cantidad de cada uno. En Alemania sólo se fabrican los "subwoofer" y de efectos, siendo la producción de los de efectos doble que los otros. En España se fabrican todos menos el "subwoofer", con idéntica producción de cada tipo. Finalmente, también sabemos que la producción de la fábrica de Japón es doble que la de Alemania, y ésta coincide con la española.

a) Construir el árbol de probabilidades.
b) Elegido, al azar un altavoz fabricado por esta empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sea un altavoz central?
c) Si compramos un altavoz central de esta empresa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en España?

3. Durante los últimos 5 años, el beneficio de una empresa, en cientos de miles de euros, viene dado por la función:

$$b(t)=\left|\begin{matrix} 2t, t\in[0,3] \\ 6-\frac{(t-3)^2}{2}, t\in 3,5 \\ ¿ \end{matrix}\right| ¿¿¿$$

siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

a) ¿Cuándo ha crecido y ha decrecido $b(t)$?
b) En su caso, determinar cuándo se observan los máximos y mínimos locales de $b(t)$, así como los correspondientes valores.
c) ¿Cuándo el beneficio fue igual a 500000 euros?

4. Una guagua de Madrid a París ofrece hasta 90 plazas de dos tipos: A (al precio de 65€ y con 30 kgr. de equipaje), y B (al precio de 95 € y con 50 kgr. de equipaje). Si la guagua admite hasta 3000 Kg. de equipaje y se quiere maximizar el ingreso total por la venta de plazas:

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal y representar la región factible.
b) ¿Cuántas plazas de cada tipo determinan la solución óptima? ¿Cuál es el ingreso total óptimo?

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA

PRUEBA B

1. Se desea estimar la proporción p de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos de tamaño n.

a) A partir de estudios realizados en poblaciones similares, se cree que el porcentaje de daltónicos en esta población está en torno al 30%. Utilizando este valor, calcular el tamaño de la muestra para que, con un nivel de confianza del 0,95, el error cometido en la estimación de p sea inferior al 3,1%.

b) Finalmente se toma una muestra de 64 individuos, en la que se observa un 35% de individuos daltónicos. Determinar, usando un nivel de confianza del 99%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de daltónicos de la población.

2. En cierta región, el peso de los jóvenes que sufren diabetes tipo 2 sigue una distribución normal de media 89 kilogramos y desviación típica igual a 20 kilogramos. Determinar:

a) El porcentaje de jóvenes de esa región, con diabetes tipo 2 que pesa entre 86 y 100 kilogramos.

b) La probabilidad de que el peso medio de un grupo de 25 jóvenes de esa región, con diabetes tipo 2, sea superior a 90 kilogramos.

3. Un rincón de una plaza tiene una superficie limitada por $y=(x-3)^2$ e $y=-3x+9$ $(x\geq 0, y\geq 0)$. Si se mide en metros, se pide:

a) Representar la superficie.

b) Para hacerla transitable, se ha de rellenar de hormigón cuyo coste (incluido trabajo y transporte) es de 70 euros por metro cuadrado. Si se desperdicia las dos novenas partes del hormigón comprado, ¿cuánto costará hacer el relleno?

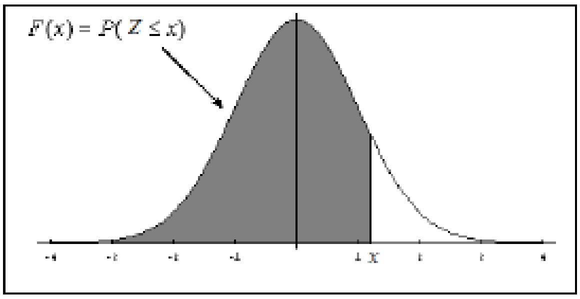
4. Un alumno paga 3 euros al comprar tres lápices, un impreso y dos carpetas. El doble del precio de un lápiz excede en cinco céntimos de euro a la suma de los precios de un impreso y de una carpeta. Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicaría al de una carpeta.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Calcular el precio de cada lápiz, impreso y carpeta.

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Distrito Universitario de Canarias



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

CONVOCATORIA ORDINARIA

SOLUCIONES PRUEBA A

Problema A.1:

1. A partir de una muestra de 225 parados, se estima que un intervalo de confianza para la prestación social media que reciben está entre 407,72 y 442,28 euros (ambos incluidos). Suponiendo hipótesis de normalidad, con una desviación típica de 90 euros:

a) ¿Cuál es la media muestral obtenida?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Usando la estimación puntual de la prestación social media obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de la prestación social de 25 parados sea mayor o igual que 430 euros?

Solución:

a) Nos dice que el número de parados es: n = 225 parados; desviación típica = 90 €; X = prestación social en €.

$$I.C. = \left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$I.C. = [407.72, 442.28]$ la media muestral es $\bar{x} = \frac{407.72+442.28}{2} = 425$ €

La media muestral es $\boldsymbol{\bar{x} = 425}$ **€**

b) Nivel de confianza = $1 - \alpha$

$$\bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 442.28 \Rightarrow 425 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{90}{\sqrt{225}} = 442.28 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.88$$

$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $y\ como$ $P(Z \le 2.88) = 0.998$, entonces $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.998 \Rightarrow \alpha = 0.004$

$1 - \alpha = 0.996$

El nivel de confianza es **99.6 %**

c) n = 25 parados

Distribución de las medias muestrales: $\boldsymbol{\bar{X}} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \to \boldsymbol{\bar{X}} \sim N\left(425, \frac{90}{\sqrt{25}}\right) = N(425, 18)$

$P(\boldsymbol{\bar{X}} \ge 430) = P\left(Z \ge \frac{430-425}{18}\right) = P(Z \ge 0.28) = 1 - P(Z < 0.28) = 1 - 0.6103 = 0.3897.$

La probabilidad de que la prestación social media sea mayor o igual a 430 es de **0.3897 ≅ 0.39.**

Problema A.2:

2. Una empresa fabrica altavoces para equipos de cine en casa en tres factorías situadas en Japón, Alemania y España. Estos altavoces son de 4 tipos: central, delanteros, efectos y "subwoofer". En Japón se fabrican altavoces de los 4 tipos siendo idéntica la cantidad de cada uno. En Alemania sólo se fabrican los "subwoofer" y de efectos, siendo la producción de los de efectos doble que los otros. En España se fabrican todos menos el "subwoofer", con idéntica producción de cada tipo. Finalmente, también sabemos que la producción de la fábrica de Japón es doble que la de Alemania, y ésta coincide con la española.

a) Construir el árbol de probabilidades.

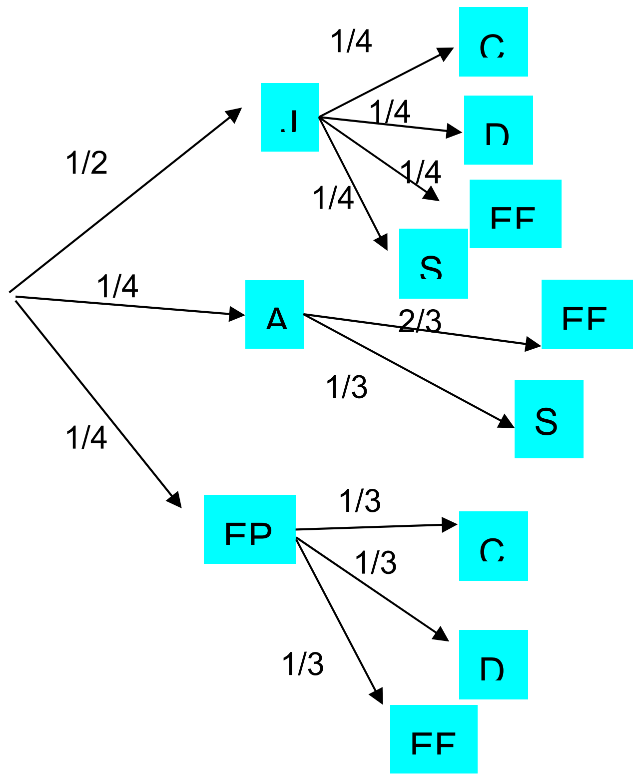
b) Elegido, al azar un altavoz fabricado por esta empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sea un altavoz central?

c) Si compramos un altavoz central de esta empresa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en España?

Solución:

Se definen los sucesos: J = el altavoz se fabrica en Japón, A = el altavoz se fabrica en Alemania, EP = el altavoz se fabrica en España. C = el altavoz es central, D = el altavoz es delantero, EF = el altavoz es de efectos, S = el altavoz es subwoofer.

a) El árbol de probabilidades es



b) Por el Teorema de la probabilidad total

$$P(C) = P(J) \cdot P(C/J) + P(A) \cdot P(C/A) + P(EP) \cdot P(C/EP)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{24} = \mathbf{0.2083}$$

c) Por el teorema de Bayes

$$P(EP/C) = \frac{P(EP) \cdot P(C/EP)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{24}} = \frac{2}{5} = \mathbf{0.4}$$

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.3:

3. Durante los últimos 5 años, el beneficio de una empresa, en cientos de miles de euros, viene dado por la función:

$$b(t) = \begin{vmatrix} 2t, t \in [0,3] \\ 6 - \frac{(t-3)^2}{2}, t \in 3,5 \\ ¿ \end{vmatrix} ¿¿¿$$

siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

a) ¿Cuándo ha crecido y ha decrecido $b(t)$?

b) En su caso, determinar cuándo se observan los máximos y mínimos locales de $b(t)$, así como los correspondientes valores.

c) ¿Cuándo el beneficio fue igual a 500000 euros?

Solución:

a) *b(t)* es continua en (0, 3) y en (3, 5) por ser polinómica en ambos casos. También es continua en t = 3 porque los límites laterales coinciden con $b(3)$ = 6.

$\lim\limits_{t\to 3^-} 2t = 6 = b(3)$ $\qquad$ $\lim\limits_{t\to 3^+} [6 - \frac{(t-3)^2}{2}] = 6$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de *b(t)* hallamos su derivada:

$$b'(t) = 2 \quad si\ t \in (0,3) \qquad b'(t) = \frac{-2(t-3)}{2} = -t + 3$$

b'(t) es positiva en (0, 3), por tanto, b es creciente en (0, 3), es decir, durante los tres primeros años. *b'(t)* es negativa en (3, 5), por tanto, b es decreciente en ese intervalo, es decir entre los tres y los 5 años.

Crece durante los tres primeros años y decrece entre los 3 y los 5 años.

b) El máximo de la función se obtiene para t = 3 y $b(3)$ = 6. A los tres años los beneficios son máximos y ascienden a 600000 €. Los mínimos de la función *b(t)* son t = 0 y t = 5, ya que la función crece en (0, 3) y decrece en (3, 5). $b(0)$ = 0 y $b(5)$ = 4, lo que significa que los beneficios mínimos son 0 € al inicio y 400000 € a los 5 años.

El máximo se alcanza a los 3 años y es de **600 000 €**. Los beneficios son mínimos al inicio, **0** euros y a los 5 años, **400 000** euros.

c) Los beneficios son de 500000 € cuando *b(t)* = 5. En el intervalo (0, 3):

$$b(t) = 5 \Rightarrow 2t = 5 \Rightarrow t = \frac{5}{2} = 2.5$$

En el intervalo (3, 5):

$$b(t) = 5 \Rightarrow 6 - \frac{(t-3)^2}{2} = 5 \Rightarrow \frac{(t-3)^2}{2} = 1 \Rightarrow t - 3 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow t = 3 + \sqrt{2} = 4.4$$

Que es la única solución válida en este intervalo.

Los beneficios fueron de **500 000 €** a los 2.5 años y a los 4.4 años.

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.4:

4. Una guagua de Madrid a París ofrece hasta 90 plazas de dos tipos: A (al precio de 65€ y con 30 kgr. de equipaje), y B (al precio de 95 € y con 50 kgr. de equipaje). Si la guagua admite hasta 3000 Kg. de equipaje y se quiere maximizar el ingreso total por la venta de plazas:
a) Formular el correspondiente problema de programación lineal y representar la región factible.
b) ¿Cuántas plazas de cada tipo determinan la solución óptima? ¿Cuál es el ingreso total óptimo?

Solución:

x = número de plazas de tipo A precio: 65 € 30 kg equipaje

y = número de plazas de tipo B precio: 95 € 50 kg equipaje

90 plazas en total y 3000 kg de equipaje como máximo:

$max\ z = 65x + 95y$		$max\ z = 65x + 95y$
s.a: $30x + 50y \le 3000$	simplificando:	s.a: $3x + 5y \le 300$
$x + y \le 90$		$x + y \le 90$
$x \ge 0, y \ge 0$		$x \ge 0, y \ge 0$

Hallamos los puntos de corte de cada recta con los ejes de coordenadas.

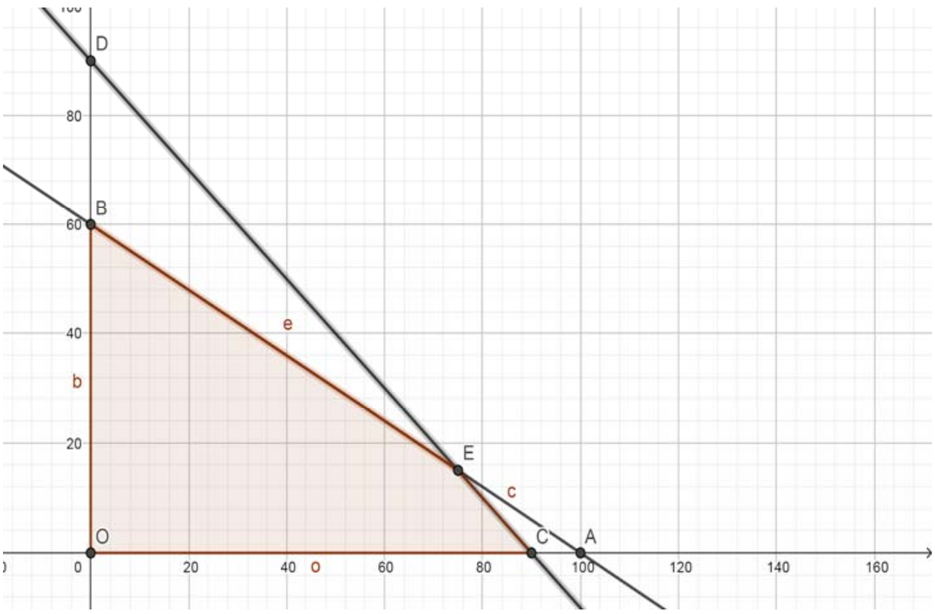
$$y = \frac{300-3x}{5}\ corta\ al\ eje\ X\ en\ A(100,0)\ \ y\ al\ eje\ X\ en\ B(0,60)\ y$$
$$= 90 - x\ \ corta\ al\ eje\ X\ en\ C(90,0)\ \ y\ al\ eje\ Y\ en\ D(0,90)$$

Hallamos los puntos de corte de las rectas $y = 90 - x$ $\quad y = \frac{300-3x}{5}$

$90 - x\ = \frac{300-3x}{5} \Rightarrow 450 - 5x = 300 - 3x \Rightarrow 150 = 2x \Rightarrow x = 75 \qquad y = 90 - 75 = 15$

El punto de corte es E(75, 15)

Representamos gráficamente las rectas y la región factible:



Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Hallamos los valores de la función objetivo en los vértices de la región factible:

$z(B)$ = 65·0 + 95·60 = 5700 €

$z(E)$ = 65·75 + 95·15 = 6300 €

$z(C)$ = 65·90 + 95·0 = 5850 €

$z(O)$ = 65·0 +95·0 = 0 €

La solución óptima es, por tanto, el punto E, es decir, vender **75** plazas de tipo A y 15 de tipo B. El ingreso total óptimo sería **6 300 €.**

SOLUCIONES PRUEBA B

CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

1. Se desea estimar la proporción p de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos de tamaño n.

a) A partir de estudios realizados en poblaciones similares, se cree que el porcentaje de daltónicos en esta población está en torno al 30%. Utilizando este valor, calcular el tamaño de la muestra para que, con un nivel de confianza del 0,95, el error cometido en la estimación de p sea inferior al 3,1%.

b) Finalmente se toma una muestra de 64 individuos, en la que se observa un 35% de individuos daltónicos. Determinar, usando un nivel de confianza del 99%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de daltónicos de la población.

Solución:

a) p = 0.30 proporción de daltónicos

Error menor que 3.1 % n= ?

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{0.05}{2} = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} < 0.031 \Rightarrow 1.96\cdot\sqrt{\frac{0.3\cdot 0.7}{n}} < 0.031 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.21}{n}} < \frac{0.031}{1.96} \Rightarrow \frac{0.21}{n} < \left(\frac{0.031}{1.96}\right)^2$$

$$n > \frac{0.21}{\left(\frac{0.031}{1.96}\right)^2} \Rightarrow n > 839.48$$

El tamaño de la muestra debe ser de **840** personas, como mínimo, para que el error cometido en la estimación de p sea inferior al **3.1 %**

b) n = 64

$$\hat{p} = 0.35\ \mathit{proporción\ muestral\ de\ daltónicos}$$

$$1-\alpha = 0.99 \Rightarrow P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{0.01}{2} = 0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$I.C. = \left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

$$= \left[0.35 - 2.575\cdot\sqrt{\frac{0.35\cdot 0.65}{64}},\quad 0.35 + 2.575\cdot\sqrt{\frac{0.35\cdot 0.65}{64}},\right]$$

$$\boldsymbol{I.C. = [0.1965, 0.5035]}$$

El porcentaje de daltónicos está entre el 19.65 % y el 50.35 % con un nivel de confianza del 99 %.

Problema B.2:

2. En cierta región, el peso de los jóvenes que sufren diabetes tipo 2 sigue una distribución normal de media 89 kilogramos y desviación típica igual a 20 kilogramos. Determinar:

a) El porcentaje de jóvenes de esa región, con diabetes tipo 2 que pesa entre 86 y 100 kilogramos.

b) La probabilidad de que el peso medio de un grupo de 25 jóvenes de esa región, con diabetes tipo 2, sea superior a 90 kilogramos.

Solución:

X = peso de jóvenes con diabetes tipo 2

$$X \sim N(89, 20)$$

a) $P(86 \le X \le 100) = P\left(\frac{86-89}{20} \le Z \le \frac{100-89}{20}\right) = P(-0.15 \le Z \le 0.55) = P(Z \le 0.55) - P(Z \le -0.15) = 0.7088 - (1 - 0.5596) = 0.2684.$

El **26.84 %** de los jóvenes con diabetes tipo 2 pesan entre 86 y 100 Kg.

b) n = 25 jóvenes

distribución de las medias muestrales $\overline{\boldsymbol{X}} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{n}\right) \Rightarrow \overline{\boldsymbol{X}} \sim N(89, 4)$

$P(\overline{\boldsymbol{X}} > 90) = P\left(Z > \frac{90-89}{4}\right) = P(Z > 0.25) = 1 - 0.5987 = 0.4013.$

La probabilidad de que el peso medio de un grupo de 25 jóvenes, con diabetes tipo 2, se superior a 90 kg es de **0.4013.**

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.3:

3. Un rincón de una plaza tiene una superficie limitada por $y=(x-3)^2$ e $y=-3x+9$ $(x\geq 0, y\geq 0)$. Si se mide en metros, se pide:

a) Representar la superficie.

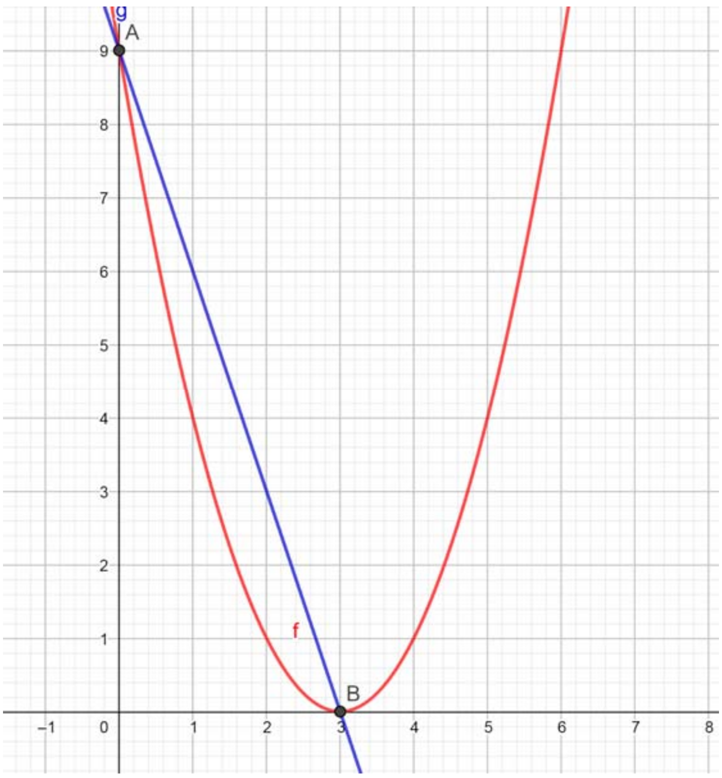
b) Para hacerla transitable, se ha de rellenar de hormigón cuyo coste (incluido trabajo y transporte) es de 70 euros por metro cuadrado. Si se desperdicia las dos novenas partes del hormigón comprado, ¿cuánto costará hacer el relleno?

Solución:

a) Hallamos los puntos de corte de ambas funciones:

$$(x-3)^2 = -3x+9 \Rightarrow x^2-6x+9 = -3x+9 \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x_1=0; x_2=3$$

$$y_1 = 9; y_2 = 0$$



b) Calculamos el área entre las curvas:

$$\int_0^3 [(-3x+9)-(x-3)^2]dx = \int_0^3 (-x^2+3x)dx = \left[\frac{-x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = -\frac{3^3}{3}+\frac{3\cdot 3^2}{2} = \frac{9}{2} = 4.5\ m^2$$

Si se desperdician 2/9 del hormigón comprado, entonces 7/9 partes de la cantidad comprada x serán 4.5 metros cuadrados.

$\frac{7}{9}\cdot x = 4.5 \Rightarrow x = \frac{4.5\cdot 9}{7} = 5.79\ m^2$ El precio será $\frac{70\cdot 4.5\cdot 9}{7} = 405$ €.

Costará hacer el relleno **405 euros**.

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.4:

4. Un alumno paga 3 euros al comprar tres lápices, un impreso y dos carpetas. El doble del precio de un lápiz excede en cinco céntimos de euro a la suma de los precios de un impreso y de una carpeta. Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicaría al de una carpeta.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Calcular el precio de cada lápiz, impreso y carpeta.

Solución:

a) L = precio del lápiz (en euros) $\qquad 3L + I + 2C = 3$

I = precio del impreso (en euros) $\qquad 2L = I + C + 0.05$

C = precio de la carpeta (en euros) $\qquad L + 0.05 = 2C$

b)
$$\begin{aligned} L \qquad - 2C &= -0.05 \\ 3L + I + 2C &= 3 \\ 2L - I - C &= 0.05 \end{aligned}$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -0.05 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0.05 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3-2F1]{F2-3F1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -0.05 \\ 0 & 1 & 8 & 3.15 \\ 0 & -1 & 3 & 0.15 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3+F2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -0.05 \\ 0 & 1 & 8 & 3.15 \\ 0 & 0 & 11 & 3.3 \end{pmatrix}$$

$$11C = 3.3 \Rightarrow C = 0.3 \text{ €}$$

$$I + 8C = 3.15 \Rightarrow I = 3.15 - 8 \cdot 0.3 \Rightarrow I = 0.75 \text{ €}$$

$3L + I + 2C = 3 \Rightarrow 3L + 0.75 + 2 \cdot 0.3 = 3 \Rightarrow L = 0.55$ €.

Solución: el lápiz cuesta 0.55 €, el impreso 0.75 € y la carpeta 0.3 €.

Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2018–2019

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II (3)

Convocatoria: JULIO

- Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas (A o B).
- Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2,5 puntos.

PRUEBA A

1. Una empresa informática comercializa un programa de retoque fotográfico. Un 50% de las licencias de este programa se han vendido para sistemas Windows, un 40% para MacOS y un 10% para Linux. Transcurrido un año de la compra, renuevan la licencia un 90% de los usuarios de Windows, un 60% de los de Linux y un 75% de los de MacOS.

a) Construir el árbol de probabilidades.

b) Se recibe una llamada de un usuario que ha renovado la licencia. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un usuario Linux?

c) Se eligen al azar 10 propietarios de licencias de este programa para una encuesta de opinion. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos sea usuario Linux?

2. Un estudio sobre la proporción de habitantes mayores de 60 años, sin dispositivos móviles, de una determinada ciudad, ha dado el intervalo de confianza [0,1804, 0,2196], con un nivel de confianza del 95%. Suponiendo que dicha proporción se puede aproximar por una distribución normal:

a) ¿Cuál es la proporción muestral de habitantes sin dispositivos móviles?

b) ¿Cuál es el tamaño de la muestra utilizado?

c) Con un nivel de confianza del 99% y con la misma información muestral, ¿cuál sería el correspondiente intervalo?

3. El beneficio de un parque acuático depende, principalmente, de la estación del año. La función que representa el beneficio, expresado en millones de euros, durante el último año fraccionado en meses es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+8}{2}, & 0 \leq x \leq 4 \\ -x^2 + 12x - 26, & 4 < x \leq 8 \\ 6, & 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

Justificando las respuestas:

a) Representar gráficamente la función. ¿Cuándo ha crecido y decrecido el beneficio?

b) Calcular en qué momentos se obtuvieron los beneficios máximo y mínimo y a cuánto ascendían estas cantidades.

c) ¿Cuándo fue el beneficio igual a 6.000.000 €?

4. Una carpintería construye mesas y armarios de oficina utilizando tableros de aglomerado de idéntica medida. Para construir una mesa se requieren 2.5 tableros, y para construir una estantería se necesitan 6 tableros. Para ensamblar las piezas se utilizan 10 tornillos en cada mesa y 60 tornillos en cada estantería. El almacén dispone de 740 tableros y 6200 tornillos. Por cada mesa se obtiene un beneficio de 80€, por cada estantería un beneficio de 120€ y se tiene que satisfacer una demanda mínima de 50 mesas y 60 estanterías. Suponiendo que siempre se vende toda la producción, si se quiere maximizar los beneficios:

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal y representar la región factible.

b) ¿Cuántas mesas y estanterías se deben fabricar con los tableros y tornillos disponibles en el almacén? ¿Cuál es el valor del beneficio óptimo?

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

PRUEBA B

1. Debido a la problemática de tráfico por las mañanas en el acceso a las principales ciudades, una empresa quiere estudiar el tiempo empleado en llegar al puesto de trabajo de sus trabajadores. Para una muestra de 100 empleados, se ha obtenido un tiempo medio de 40 minutos. Si la variable sigue una distribución normal cuya desviación típica es de 12 minutos,

a) Determinar el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza del 88%.

b) ¿Qué tamaño muestral se necesita para estimar el tiempo en llegar al trabajo, con un error menor de 4 minutos y con un nivel de confianza del 95%?

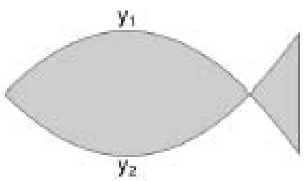
2. En una empresa hay 250 empleados. Su edad sigue una distribución normal de media 44 años y de desviación típica 18 años.

a) ¿Cuántos empleados se espera que haya con más de 62 años?

b) ¿Cuántos empleados se espera que haya con menos de 40 años?

c) Halla el número de empleados que podría conseguir el carnet joven de transporte que promociona el Ayuntamiento si el requisito es ser mayor de edad y no haber cumplido los 30 años.

3. En una pared, a la entrada de un puerto pesquero, se va construir un mosaico de piedra en forma de pez como indica la figura adjunta, definida por las parábolas $y_1 = -\frac{1}{10}x^2 + x + 5$ e $y_2 = \frac{1}{10}x^2 - x + 5$, entre $x = 0$ y $x = 12$. Los valores de x e y se expresan en metros.



a) Determinar la superficie total de la figura.

b) Para construir el mosaico, la empresa A asegura que es capaz de recubrir de piedra 1 m^2 de superficie en 1.5 horas de trabajo, y cobra cada hora a 120€. La empresa B afirma que tarda 2 horas en recubrir 1 m^2 de superficie y cobra la hora a 85€. Asimismo, la empresa A cobra 10€ por m^2 de piedra, mientras que la empresa B cobra 12€/m^2 por el mismo tipo de piedra. ¿Qué empresa hará el trabajo con un menor coste?

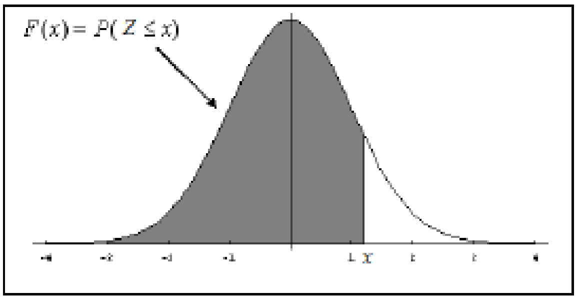
4. En un centro educativo se imparten enseñanzas de ESO, Bachillerato y Ciclos Formativos. Si sumamos el 20% del alumnado de ESO, con el 20% del alumnado de Bachillerato y el 40% del alumnado de Ciclos Formativos se obtienen 42 alumnos más que el 20% del alumnado total del centro. Asimismo si sumamos el número de alumnos de ESO más la mitad de los de Ciclos Formativos obtenemos 40 alumnos menos que el total de matriculados en Bachillerato. Si el centro tiene en total 1115 alumnos,

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Hallar el número de matriculados en cada tipo de enseñanza.

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Distrito Universitario de Canarias



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES PRUEBA A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

1. Una empresa informática comercializa un programa de retoque fotográfico. Un 50% de las licencias de este programa se han vendido para sistemas Windows, un 40% para MacOS y un 10% para Linux. Transcurrido un año de la compra, renuevan la licencia un 90% de los usuarios de Windows, un 60% de los de Linux y un 75% de los de MacOS.

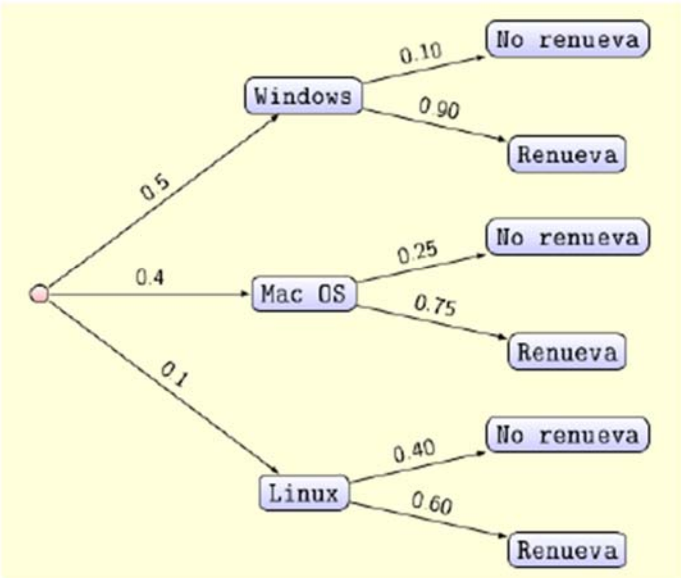
a) Construir el árbol de probabilidades.

b) Se recibe una llamada de un usuario que ha renovado la licencia. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un usuario Linux?

c) Se eligen al azar 10 propietarios de licencias de este programa para una encuesta de opinion. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos sea usuario Linux?

Solución:

a)



b)

$$P(L/R) = \frac{P(R/L)\cdot P(L)}{P(R/W)\cdot P(W) + P(R/M)\cdot P(M) + P(R/L)\cdot P(L))} =$$

$$= \frac{0.60\cdot 0.1}{0.90\cdot 0.5 + 0.75\cdot 0.4 + 0.60\cdot 0.1} = 0.074$$

La probabilidad de que sea de Linux es de **0.074.**

c) El número X de usuarios Linux entre los 10 elegidos sigue una distribución binomial B(10, 0.1)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0.1^0 (1 - 0.10)^{10} = 1 - 0.9^{10} = 0.6513$$

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.2:

2. Un estudio sobre la proporción de habitantes mayores de 60 años, sin dispositivos móviles, de una determinada ciudad, ha dado el intervalo de confianza [0,1804, 0,2196], con un nivel de confianza del 95%. Suponiendo que dicha proporción se puede aproximar por una distribución normal:

a) ¿Cuál es la proporción muestral de habitantes sin dispositivos móviles?

b) ¿Cuál es el tamaño de la muestra utilizado?

c) Con un nivel de confianza del 99% y con la misma información muestral, ¿cuál sería el correspondiente intervalo?

Solución:

a) $\hat{p} = \frac{0{,}1804+0{,}2196}{2} = 0.2$

La proporción muestral de habitantes in dispositivos móviles es de 0.2.

b) $\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right] = [0{,}1804\,, 0{,}2196]$ 95% -> $z_{\alpha/2} = 1.96$

$\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 0.1804 \Longrightarrow 0.2 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{n}} = 0.1804 \Longrightarrow$

$0.2 - 0.1804 = 1.96 \cdot \frac{\sqrt{0.16}}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0.0196 = 1.96 \cdot \frac{0.4}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96\cdot 0.4}{0.0196} \Longrightarrow$

$\sqrt{n} = 40 \Longrightarrow n = 1600$

El tamaño de la muestra utilizado en el estudio es de $1\,600$ habitantes.

c) 99% -> $z_{\alpha/2} = 2.575$

$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = \left(0.2 - 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{1600}}, 0.2 + 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{1600}}\right) =$

$= (0.17425, 0.22575)$

El intervalo sería de $(0.17425, 0.22575)$

Problema A.3:

3. El beneficio de un parque acuático depende, principalmente, de la estación del año. La función que representa el beneficio, expresado en millones de euros, durante el último año fraccionado en meses es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+8}{2}, & 0 \le x \le 4 \\ -x^2 + 12x - 26, & 4 < x \le 8 \\ 6, & 8 < x \le 12 \end{cases}$$

Justificando las respuestas:

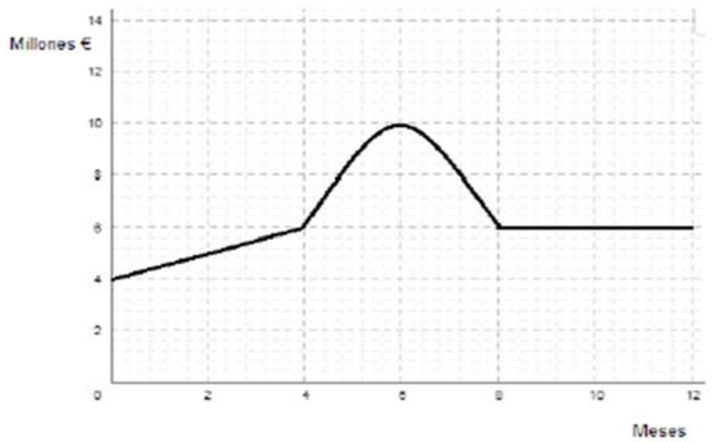
a) Representar gráficamente la función. ¿Cuándo ha crecido y decrecido el beneficio?

b) Calcular en qué momentos se obtuvieron los beneficios máximo y mínimo y a cuánto ascendían estas cantidades.

c) ¿Cuándo fue el beneficio igual a 6.000.000 €?

Solución:

a)



Los beneficios han crecido desde el inicio del año hasta el mes de junio. Han decrecido desde junio al mes de agosto y se han mantenido constantes desde agosto hasta final de año.

b) $f'(x) = -2x + 12$; $-2x + 12 = 0$; $x = 6$

$f''(x) = -2$; $f''(6) < 0$; Se produce un máximo en el mes 6 (junio)

El mínimo se produce al inicio del año (enero)

$f(6) = -6^2 + 12\cdot 6 - 26 = 10$ $\qquad$ $f(0) = \frac{0+8}{2} = 4$

El máximo se alcanza en el mes de junio con un beneficio de 10 millones de euros y el mínimo se alcanzó en el mes de enero con un beneficio de 4 millones de euros.

El beneficio máximo se alcanza en el mes de junio y es de 10 millones de euros, y el mínimo, en enero, de 4 millones de euros.

c) $-x^2 + 12x - 26 = 6$; $-x^2 + 12x - 32 = 0$; $X_1 = 4$ y $X_2 = 8$

El beneficio es igual a **6 millones de €** en los meses 4 (abril) y 8 (agosto). También desde agosto hasta final de año.

Problema A.4:

4. Una carpintería construye mesas y armarios de oficina utilizando tableros de aglomerado de idéntica medida. Para construir una mesa se requieren 2.5 tableros, y para construir una estantería se necesitan 6 tableros. Para ensamblar las piezas se utilizan 10 tornillos en cada mesa y 60 tornillos en cada estantería. El almacén dispone de 740 tableros y 6200 tornillos. Por cada mesa se obtiene un beneficio de 80€, por cada estantería un beneficio de 120€ y se tiene que satisfacer una demanda mínima de 50 mesas y 60 estanterías. Suponiendo que siempre se vende toda la producción, si se quiere maximizar los beneficios:

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal y representar la región factible.

b) ¿Cuántas mesas y estanterías se deben fabricar con los tableros y tornillos disponibles en el almacén? ¿Cuál es el valor del beneficio óptimo?

Solución:

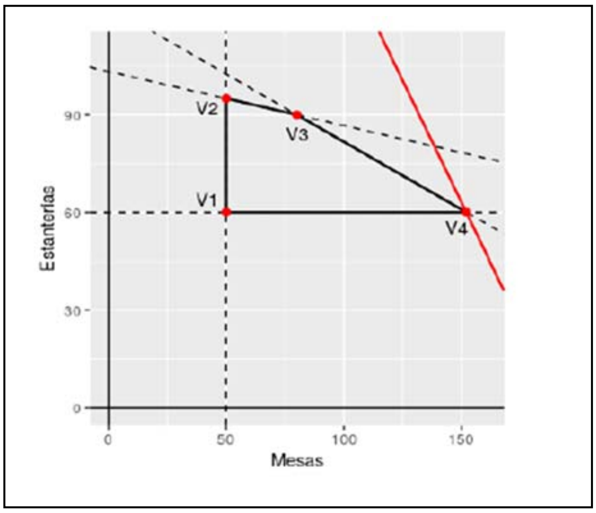
Si llamamos M al número de mesas y E al número de estanterías construidas, tenemos que la función a maximizar es:

$$f(M,E) = 80M + 120E$$

sujeta a las restricciones:

$$\begin{gathered} 2.5M + 6E \leq 740 \\ 10M + 60E \leq 6200 \\ M \geq 50 \\ E \geq 60 \end{gathered}$$

Gráficamente:



Los vértices de la región factible son:

- $V_1 = (50,60)$
- $\left.\begin{aligned} 10M + 60E &= 6200 \\ M &= 50 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 60E = 6200 - 500 = 5700$:
  $= 95 \Rightarrow V_2 = (50,95)$
- $\left.\begin{aligned} 2.5M + 6E &= 740 \\ 10M + 60E &= 6200 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -15M = -1200 \Rightarrow M = 80$:
  $= (740 - 2.5 \cdot 80)/6 = 90 =$
- $\left.\begin{aligned} 2.5M + 6E &= 740 \\ E &= 60 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2.5M = 740 - 360 \Rightarrow M = \frac{740-}{2}$
  $V_4 = (152,60)$

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$f(V_1) = 11200$, $f(V_2) = 15400$, $f(V_3) = 17200$, $f(V_4) = 19360$

Por tanto, la solución *óptima* se encuentra en V_4 y consiste en fabricar **152** mesas y **60** estanterías. El beneficio será **19 360 €.**

SOLUCIONES PRUEBA B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

1. Debido a la problemática de tráfico por las mañanas en el acceso a las principales ciudades, una empresa quiere estudiar el tiempo empleado en llegar al puesto de trabajo de sus trabajadores. Para una muestra de 100 empleados, se ha obtenido un tiempo medio de 40 minutos. Si la variable sigue una distribución normal cuya desviación típica es de 12 minutos,

a) Determinar el intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza del 88%.

b) ¿Qué tamaño muestral se necesita para estimar el tiempo en llegar al trabajo, con un error menor de 4 minutos y con un nivel de confianza del 95%?

Solución:

a) $\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[40 - 1.555 \cdot \frac{12}{\sqrt{100}}\ ,\ 40 + 1.555 \cdot \frac{12}{\sqrt{100}}\right] = [38.134, 41.866]$

$88\% \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.555$

El intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza del 88 % es de $(38.134, 41.866)$.

b) $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 4 = 1.96 \cdot \frac{12}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 12}{4} \rightarrow \sqrt{n} = 5.88 \rightarrow n = 34.57$

$95\% \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$

Como *n* tiene que ser un entero, el tamaño muestral debe ser mayor o igual a 35 empleados.

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2:

2. En una empresa hay 250 empleados. Su edad sigue una distribución normal de media 44 años y de desviación típica 18 años.

a) ¿Cuántos empleados se espera que haya con más de 62 años?

b) ¿Cuántos empleados se espera que haya con menos de 40 años?

c) Halla el número de empleados que podría conseguir el carnet joven de transporte que promociona el Ayuntamiento si el requisito es ser mayor de edad y no haber cumplido los 30 años.

Solución:

a) X= "Número de empleados de cierta empresa" ~ N(44, 18)

$P(X > 62) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

$250 \cdot 0.1587 = 39.675$

Se espera que 40 empleados tengan más de 62 años.

b) $P(X < 40) = P(Z < -0.22) = P(Z > 0.22) = 1 - P(Z < 0.22) = 1 - 0.5871 = 0.4129$

$250 \cdot 0.4129 = 103.225$

Se espera que 103 empleados tengan menos de 40 años.

c) $P(18 \le X \le 30) = P(-1.44 \le Z \le -0.78) = P(0.78 \le Z \le 1.44) = P(Z \le 1.44) - P(Z \le 0.78) = 0.9251 - 0.7823 = 0.1428$

$250 \cdot 0.1428 = 35.7$

Se espera que 36 empleados tengan entre 18 y 30 años.

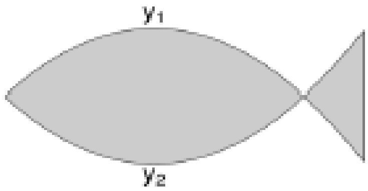
a) Se espera que 40 empleados tengan más de 40 años.

b) Se espera que 103 empleados tengan menos de 62 años.

c) Se espera que 36 empleados tengan entre 18 y 30 años.

Problema B.3:

3. En una pared, a la entrada de un puerto pesquero, se va construir un mosaico de piedra en forma de pez como indica la figura adjunta, definida por las parábolas $y_1 = -\frac{1}{10}x^2 + x + 5$ e $y_2 = \frac{1}{10}x^2 - x + 5$, entre $x = 0$ y $x = 12$. Los valores de x e y se expresan en metros.



a) Determinar la superficie total de la figura.
b) Para construir el mosaico, la empresa A asegura que es capaz de recubrir de piedra 1 m^2 de superficie en 1.5 horas de trabajo, y cobra cada hora a 120€. La empresa B afirma que tarda 2 horas en recubrir 1 m^2 de superficie y cobra la hora a 85€. Asimismo, la empresa A cobra 10€ por m^2 de piedra, mientras que la empresa B cobra 12€/m^2 por el mismo tipo de piedra. ¿Qué empresa hará el trabajo con un menor coste?

Solución:

a) Determinamos los puntos de corte de las parábolas:

$$-\frac{1}{10}x^2 + x + 5 = \frac{1}{10}x^2 - x + 5 \Rightarrow \frac{2}{10}x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x = 0 \Rightarrow x(x - 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$$

La superficie total es entonces:

$$\int_0^{10} \big(y_1(x) - y_2(x)\big)\,dx + \int_{10}^{12} \big(y_2(x) - y_1(x)\big)\,dx =$$

$$\int_0^{10} \left(-\frac{2}{20}x^2 + 2x\right) dx + \int_{10}^{12} \left(\frac{2}{20}x^2 - 2x\right) dx =$$

$$\left[-\frac{2}{20}\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^{10} + \left[\frac{2}{20}\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{10}^{12} =$$

$$-\frac{2000}{60} + 100 + \left(\frac{3456}{60} - 144 - \frac{2000}{60} + 100\right) = -\frac{544}{60} + 56 = 46.9333m^2$$

La superficie total es de aproximadamente $47\ \mathrm{m}^2$.

b)

Empresa A:

- Tiempo empleado: $46.9333 \cdot 1.5 = 70.3999$ horas
- Coste mano de obra: $70.3999 \cdot 120 = 8447.994$€
- Coste de la piedra: $46.9333 \cdot 10 = 469.333$ €
- Coste total: $8447.994 + 469.333 = 8917.327$ €

Empresa B:

- Tiempo empleado: $46.9333 \cdot 2 = 93.8666$ horas
- Coste mano de obra: $93.8666 \cdot 85 = 7978.661$€
- Coste de la piedra: $46.9333 \cdot 12 = 563.1996$ €
- Coste total: $7978.661 + 563.1996 = 8541.861$ €

Por tanto resulta más barata la empresa B.

Problema B.4:

4. En un centro educativo se imparten enseñanzas de ESO, Bachillerato y Ciclos Formativos. Si sumamos el 20% del alumnado de ESO, con el 20% del alumnado de Bachillerato y el 40% del alumnado de Ciclos Formativos se obtienen 42 alumnos más que el 20% del alumnado total del centro. Asimismo si sumamos el número de alumnos de ESO más la mitad de los de Ciclos Formativos obtenemos 40 alumnos menos que el total de matriculados en Bachillerato. Si el centro tiene en total 1115 alumnos,

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
b) Hallar el número de matriculados en cada tipo de enseñanza.

Solución:

x = número de alumnos de ESO $\quad x + y + z = 1115$

y = número de alumnos de ESO $\quad 0.2x + 0.2y + 0.4z = 42 + 0.2\cdot 1115$

z = número de alumnos de ESO $\quad x + \frac{z}{2} + 40 = y$

Simplificando las ecuaciones:

$$x + y + z = 1115$$
$$x + y + 2z = 1325$$
$$2x - 2y + z = -80$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1115 \\ 1 & 1 & 2 & 1325 \\ 2 & -2 & 1 & -80 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3-2F1]{F2-F1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1115 \\ 0 & 0 & 1 & 210 \\ 0 & -4 & -1 & -2310 \end{pmatrix}$$

De la segunda ecuación: $z = 210$

De la tercera ecuación: $-4y - z = -2310 \Rightarrow -4y = -2310 + 210 \Rightarrow y = \frac{-2100}{-4} = 525$

De la primera ecuación: $x + y + z = 1115 \Rightarrow x + 525 + 210 = 1115 \Rightarrow x = 380$

En el centro hay matriculados **380** alumnos de ESO, **525** de Bachillerato y **210** de Ciclos Formativos.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Cantabria

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: José Gallegos Fernández

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JUNIO 2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.
No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
No se permiten calculadoras gráficas, ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay tres modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es seis veces el número de cajas del modelo C.

A1. [1 punto] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de cajas de cada modelo que se pueden utilizar para enviar el pedido.

A2. [1 punto] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

A3. [0,5 puntos] Resolverlo.

A4. [0,5 puntos] ¿A cuánto ha ascendido la factura de compra de las cajas, sabiendo que una unidad del modelo A cuesta 4,5 euros; una del modelo B, 8 euros; y una del C, 12 euros?

B. [0,5 puntos] Despejar la incógnita X de la siguiente ecuación matricial: $B\,X\,B = B\,(X+A)$

Ejercicio 2 [3,5 puntos] Dada la función : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

A. [0,2 puntos] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [0,6 puntos] Las asíntotas.
C. [1,1 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
D. [1,1 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
E. [0,5 puntos] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Ejercicio 3 [3 puntos]

De los 360 alumnos de nuevo ingreso de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, conocemos el número de matriculados en el Centro de Idiomas de la Universidad. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	Matriculados en C. de Idiomas	No matriculados en C. de Idiomas	Total
G. Económicas	57	63	120
G. Adm. y D. Empresas	106	134	240
Total	163	197	360

Elegido un alumno al azar,
A. [1 punto] ¿Calcular la probabilidad de que no esté matriculado en el Centro de Idiomas?
B. [1 punto] Si sabemos que el alumno pertenece al Grado en Económicas, ¿cuál es la probabilidad de que esté inscrito en el Centro de Idiomas?
C. [1 punto] Calcular la probabilidad de que sea del Grado en Administración y D. de Empresas y no esté inscrito en el Centro de Idiomas.

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Dado el siguiente sistema: $\begin{cases} -x & +4y & = 6 \\ 2x & +3y & = \dfrac{5a}{2} \\ 5x & +2y & = a^2 \end{cases}$

A1. [2,5 puntos] Determinar, según los valores del parámetro a, los casos en los que tiene o no tiene solución y si esta es única o no.

A2. [0,5 puntos] Resolver los casos compatibles.

B. [0,5 puntos] A, B y C son tres matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes son: $|A|=3$, $|B|=-2$ y $|C|=6$. Calcular:

B1. [0,2 puntos] $|A^t B^{-1}|$

B2. [0,1 puntos] $|D|$ siendo D la matriz resultante de multiplicar por 2 los elementos de la segunda columna de C.

B3. [0,2 puntos] $|B^2 E|$ siendo E la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de A.

Ejercicio 2 [3,5 puntos]

A. [1,75 puntos]

Una empresa juguetera puede vender x unidades al mes de un determinado modelo de tren eléctrico, al precio de $518-x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de $275x$ euros que dependen del número x de unidades.

Hallar el número de unidades que maximizan el beneficio mensual. ¿A cuánto ascienden los ingresos?

B. [1,75 puntos] Dada la función $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$

B1. [0,1 puntos] Los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B2. [0,4 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

B3. [0,4 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

B4. [0,25 puntos] Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

B5. [0,6 puntos] Calcular el área de la región delimitada por la curva y el eje OX.

Ejercicio 3 [3 puntos]

El gasto mensual en alquiler de los inquilinos de la zona centro de determinada ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica 73 euros. Una muestra aleatoria de 350 inquilinos da como resultado una renta media de 689,3 euros.

A. [1,5 puntos] Obtener el intervalo de confianza del 93% para la renta media.

B. [1,5 puntos] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 91% sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

OPCIÓN DE EXAMEN 1

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1.1:

Ejercicio 1 [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay tres modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es seis veces el número de cajas del modelo C.

A1. [1 punto] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de cajas de cada modelo que se pueden utilizar para enviar el pedido.

A2. [1 punto] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

A3. [0,5 puntos] Resolverlo.

A4. [0,5 puntos] ¿A cuánto ha ascendido la factura de compra de las cajas, sabiendo que una unidad del modelo A cuesta 4,5 euros; una del modelo B, 8 euros; y una del C, 12 euros?

B. [0,5 puntos] Despejar la incógnita X de la siguiente ecuación matricial: B X B = B (X+A)

Solución:

A) Llamamos A al número de cajas del tipo A, B al número de cajas del tipo B y C al número de cajas del tipo C. Entonces:

A1) $$\left.\begin{aligned} A+B+C&=35 \\ 5A+10B+15C&=325 \\ A+B&=6C \end{aligned}\right\}$$

A2) $$\left.\begin{aligned} A+B+C&=35 \\ A+2B+3C&=65 \\ A+B-6C&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 1 & 2 & 3 & 65 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right) \underset{3^aF\leftrightarrow 1^aF-3^aF}{\overset{2^aF\leftrightarrow 2^aF-1^aF}{\Rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 1 & 2 & 30 \\ 0 & 0 & 7 & 35 \end{array}\right) \overset{3^aF\leftrightarrow 3^aF/7}{\Rightarrow}$$

$$\overset{3^aF\leftrightarrow 3^aF/7}{\Rightarrow} \left.\begin{aligned} A+B+C&=35 \\ B+2C&=30 \\ C&=5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\boxed{C=5} \\ &B+10=30 \Rightarrow \boxed{B=20} \\ &A+20+5=35 \Rightarrow \boxed{A=10} \end{aligned}\right\}$$

Luego el sistema es compatible determinado, de solución $A=10$, $B=20$ y $C=50$.

A3) La solución del sistema es $\{(10,20,5)\}$, es decir, necesita 10 cajas de tipo A, 20 de tipo B y 5 de tipo C para enviar el pedido.

A4) El precio total del pedido se calcula multiplicando el precio de cada caja por la cantidad de cajas que se necesitan de dicho tipo y sumando dichas cantidades: $10\cdot 4,5+20\cdot 8+5\cdot 12=45+160+60=265$.

Precio total: **265 €**.

B) $$B\cdot X\cdot B=B\cdot(X+A) \Rightarrow B^{-1}\cdot B\cdot X\cdot B=B^{-1}\cdot B\cdot(X+A) \Rightarrow X\cdot B=X+A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X\cdot B-X=A \Rightarrow X\cdot(B-I)=A \Rightarrow X=A\cdot(B-I)^{-1}$$

suponiendo que tanto B como $(B-I)$ son matrices invertibles.

Problema 1.2:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Ejercicio 2 [3,5 puntos] Dada la función : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

A. [0,2 puntos] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [0,6 puntos] Las asíntotas.
C. [1,1 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
D. [1,1 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
E. [0,5 puntos] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Solución:

A) El dominio vendrá dado por los puntos que tienen imagen, es decir, todos aquellos valores de x que no anulen al denominador:

$$Dom\ f = \{x \in \mathbb{R}/x^2-4 \neq 0\} = \boxed{\mathbb{R}-\{-2;2\}} \text{ ya que } x^2-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm 2$$

El punto de corte con el eje de ordenadas vendrá dado por el valor $x = 0$ (que está en el dominio y, por tanto, proporciona un punto de corte) y su imagen: $f(0)=\dfrac{1}{-4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(0,\dfrac{-1}{4}\right)}$

Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen al resolver la ecuación $f(x)=0$:

$\dfrac{x^2+1}{x^2-4}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+1=0$ que no tiene soluciones en el conjunto de los números reales. Por tanto, no hay puntos de corte con el eje de abscisas.

Dominio = $\mathbb{R}-\{-2;2\}$. El único punto de corte con los ejes es (0, –1/4)

B1) Las posibles asíntotas verticales se encontrarán en los puntos que no pertenecen al dominio:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+1}{x^2-4} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2+1}{x^2-4} = \left(\dfrac{3}{0^+}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2+1}{x^2-4} = \left(\dfrac{3}{0^-}\right) = -\infty \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=-2} \text{ A.V.}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2-4} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+1}{x^2-4} = \left(\dfrac{3}{0^-}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+1}{x^2-4} = \left(\dfrac{3}{0^+}\right) = +\infty \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=2} \text{ A.V.}$$

B2) Como $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2+1}{x^2-4} = 1$ (grado numerador = grado denominador) $\Rightarrow \quad \boxed{y=1}$ A.H.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+1}{x^2-4} = 1 \quad \text{(función par)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=1} \text{ A.H.}$$

B3) Como consecuencia de que hay una asíntota horizontal, no existen asíntotas oblicuas.

Las asíntotas verticales son $\boldsymbol{x=-2}$ y $\boldsymbol{x=2}$. Hay asíntota horizontal: $\boldsymbol{y=1}$.

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

C1) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{2x\cdot\left(x^2-4\right)-\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\dfrac{-10x}{\left(x^2-4\right)^2}$

Por tanto:

f es creciente cuando *f'* sea positiva, es decir, si $x < 0$.

f es decreciente cuando *f'* sea negativa, es decir, si $x > 0$.

C2) Así pues, el único punto donde cambia la monotonía es en $x = 0$, que está en el dominio tanto de *f* como de *f '*, y donde la función es continua y derivable. Por tanto, es un extremo relativo. Al cambiar la monotonía de creciente a decreciente, es un máximo relativo.

f creciente	$\left]-\infty,0\right[$	$\left(0,\dfrac{-1}{4}\right)$ máximo relativo
f decreciente	$\left]0,\infty\right[$	

D1) $f'(x)=\dfrac{-10x}{\left(x^2-4\right)^2} \quad\Rightarrow\quad f''(x)=\dfrac{-10\cdot\left(x^2-4\right)^{\cancel{2}}+10x\cdot 2\cdot\cancel{\left(x^2-4\right)}\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^{\cancel{4}\,3}}=\dfrac{30x^2+40}{\left(x^2-4\right)^3}$

Por tanto, ya que el numerador no se anula nunca y es siempre positivo, el signo de la segunda derivada es el mismo que el del denominador:

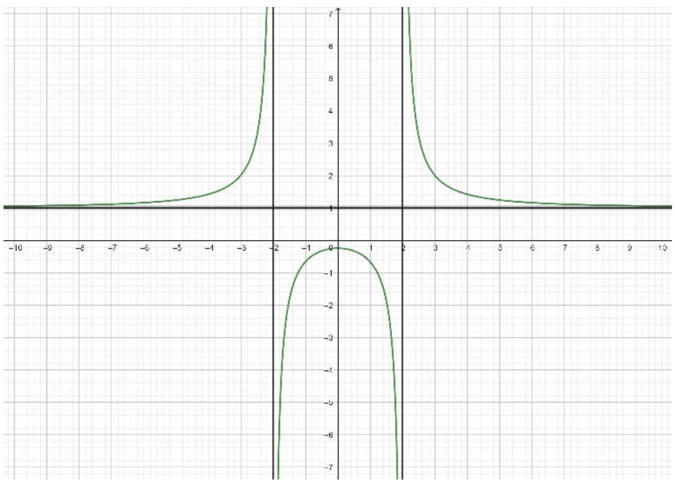
f es cóncava cuando *f"* es negativa, es decir, si $-2<x<2$ (entre las raíces el signo es el contrario al coeficiente líder 1).

f es convexa cuando *f"* es positiva, es decir, si $x<-2$ o $x>2$ (en los otros intervalos los signos se alternan con el anterior).

D.2.) Así pues, los únicos puntos donde cambia la curvatura no están en el dominio de definición de la función y, por tanto, no pueden ser puntos de inflexión. Dicho de otra forma: como la segunda derivada no se anula, no hay puntos de inflexión.

f cóncava $(\cap)$	$\left]-2,2\right[$	No hay puntos de inflexión
f convexa $(\cup)$	$\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,\infty\right[$	

E.)



Problema 1.3:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Ejercicio 3 [3 puntos]

De los 360 alumnos de nuevo ingreso de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, conocemos el número de matriculados en el Centro de Idiomas de la Universidad. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	Matriculados en C. de Idiomas	No matriculados en C. de Idiomas	Total
G. Económicas	57	63	120
G. Adm. y D. Empresas	106	134	240
Total	163	197	360

Elegido un alumno al azar,

A. [1 punto] ¿Calcular la probabilidad de que no esté matriculado en el Centro de Idiomas?

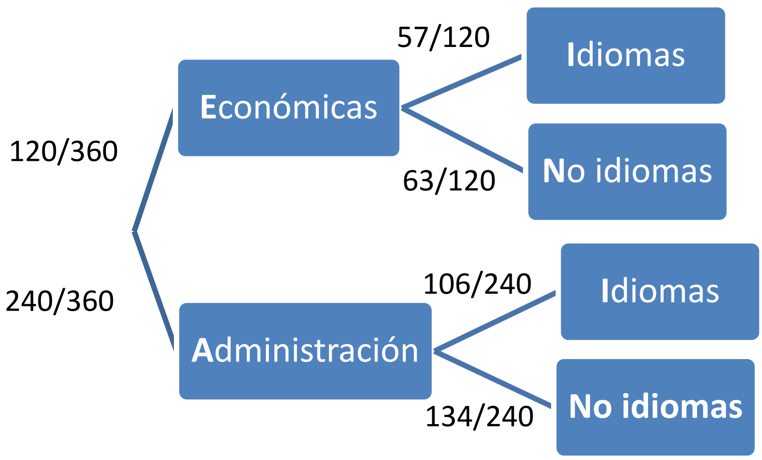
B. [1 punto] Si sabemos que el alumno pertenece al Grado en Económicas, ¿cuál es la probabilidad de que esté inscrito en el Centro de Idiomas?

C. [1 punto] Calcular la probabilidad de que sea del Grado en Administración y D. de Empresas y no esté inscrito en el Centro de Idiomas.

Solución:

Consideremos los siguientes sucesos:

E = "estudiar Económicas", A = "estudiar Administración", I = "estar matriculado en el Centro de Idiomas" y N = "no estar matriculado en el Centro de Idiomas"



A) $P(N) \overset{T^{\text{ma}}\text{ Prob. total}}{=} P(A)\cdot P(N/A)+P(E)\cdot P(N/E)=\frac{\boxed{240}}{360}\cdot\frac{134}{\boxed{240}}+\frac{\boxed{120}}{360}\cdot\frac{63}{\boxed{120}}=\frac{197}{360}=0.5472$

B) $P(I/E)=\frac{57}{120}=0.475$

C) $P(A\cap N)=P(N/A)\cdot P(A)=\frac{134}{\boxed{240}}\cdot\frac{\boxed{240}}{360}=\frac{134}{360}=0.372$

A) $P(N) \ = \mathbf{0.5472}$; B) $P(I/E)=\mathbf{0.475}$; C) $P(A\cap N)=\mathbf{0.372}$

OPCIÓN DE EXAMEN 2

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 2.1:

Ejercicio 1 [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Dado el siguiente sistema: $\begin{cases} -x & +4y & = 6 \\ 2x & +3y & = \dfrac{5a}{2} \\ 5x & +2y & = a^2 \end{cases}$

A1. [2,5 puntos] Determinar, según los valores del parámetro a, los casos en los que tiene o no tiene solución y si esta es única o no.

A2. [0,5 puntos] Resolver los casos compatibles.

B. [0,5 puntos] A, B y C son tres matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes son: $|A|=3$, $|B|=-2$ y $|C|=6$. Calcular:

B1. [0,2 puntos] $|A^t B^{-1}|$

B2. [0,1 puntos] $|D|$ siendo D la matriz resultante de multiplicar por 2 los elementos de la segunda columna de C.

B3. [0,2 puntos] $|B^2 E|$ siendo E la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de A.

Solución:

A) Las matrices asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $(A|b)=\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5a/2 \\ 5 & 2 & a^2 \end{array}\right)$.

Estudiemos sus rangos:

A1) $\text{rango}(A)=2$ ya que hay un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3-8=-11\neq 0$.

$$|A|b| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5a/2 \\ 5 & 2 & a^2 \end{vmatrix} = -3a^2+50a+24-90-8a^2+5a = -11a^2+55a-66=0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2-5a+6=0 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=3 \end{cases}$$

Por tanto:

Si $a\neq 2$ y $a\neq 3$, $\text{rango}(A|b)=3\neq\text{rango}(A)=2$ y, como consecuencia, el sistema es incompatible (sin solución).

Si $a=2$ o $a=3$, $\text{rango}(A|b)=2=\text{rango}(A)=\text{nº incógnitas}$ y, como consecuencia, el sistema es compatible determinado (solución única).

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

A2) Si $a = \mathbf{2}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{3^aF \leftrightarrow 5\cdot 1^aF + 3^aF \\ 2^aF \leftrightarrow 2\cdot 1^aF + 2^aF}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 6 \\ 0 & 11 & 17 \\ 0 & 22 & 34 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x + 4y = 6 \\ 11y = 17 \end{array}\right\} \Rightarrow Sol = \left\{\left(\frac{2}{11}, \frac{17}{11}\right)\right\}$$

Si $a = \mathbf{3}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & \frac{15}{2} \\ 5 & 2 & 9 \end{array}\right) \overset{\substack{3^aF \leftrightarrow 5\cdot 1^aF + 3^aF \\ 2^aF \leftrightarrow 2\cdot 1^aF + 2^aF}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 6 \\ 0 & 11 & \frac{39}{2} \\ 0 & 22 & 39 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x + 4y = 6 \\ 22y = 39 \end{array}\right\} \Rightarrow Sol = \left\{\left(\frac{12}{11}, \frac{39}{22}\right)\right\}$$

Si $a \neq \mathbf{2}$ y $a \neq \mathbf{3}$	$\text{rango}(A\mid b) = \mathbf{3} \neq \text{rango}(A) = \mathbf{2}$	Compatible incompatible	
Si $a = \mathbf{2}$ o $a = \mathbf{3}$	$\text{rango}(A\mid b) = \mathbf{2} = \text{rango}(A) = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas	Compatible determinado	
Si $a = \mathbf{2}$	$Sol = \left\{\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{11}}, \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{11}}\right)\right\}$	Si $a = \mathbf{3}$	$Sol = \left\{\left(\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{11}}, \frac{\mathbf{39}}{\mathbf{22}}\right)\right\}$

B1) $\left|A^t \cdot B^{-1}\right| = \left|A^t\right| \cdot \left|B^{-1}\right| = \frac{|A|}{|B|} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{-2}} = \boxed{\frac{-3}{2}}$

Ya que el determinante de una matriz y la de su traspuesta son iguales y el determinante de una matriz y la de su inversa, caso de existir, también son inversos.

B2) $|D| = \mathbf{2} \cdot |C| = \mathbf{2} \cdot \mathbf{6} = \boxed{12}$

Ya que, al multiplicar toda una columna por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

B3) $\left|B^2 \cdot E\right| = |B \cdot B \cdot E| = |B| \cdot |B| \cdot |A| \cdot (-\mathbf{1}) = |B|^2 \cdot |A| \cdot (-\mathbf{1}) = (-\mathbf{2})^2 \cdot \mathbf{3} \cdot (-\mathbf{1}) = \mathbf{4} \cdot \mathbf{3} \cdot (-\mathbf{1}) = \boxed{-12}$

Ya que, al intercambiar dos filas de orden, el determinante cambia de signo.

B1) $|A^t \cdot B^{-1}| = \frac{-3}{2}$; B2) $|D| = \mathbf{12}$; B3.) $|B^2 \cdot E| = -\mathbf{12}$.

Problema 2.2:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Ejercicio 2 [3,5 puntos]

A. [1,75 puntos]

Una empresa juguetera puede vender x unidades al mes de un determinado modelo de tren eléctrico, al precio de $518\text{-}x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de $275x$ euros que dependen del número x de unidades.

Hallar el número de unidades que maximizan el beneficio mensual. ¿A cuánto ascienden los ingresos?

B. [1,75 puntos] Dada la función $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$

B1. [0,1 puntos] Los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B2. [0,4 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

B3. [0,4 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

B4. [0,25 puntos] Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

B5. [0,6 puntos] Calcular el área de la región delimitada por la curva y el eje OX.

Solución:

A) El beneficio mensual se obtendrá al restarle a los ingresos por las ventas, $f(x)=(518-x^2)\cdot x=-x^3+518x$, los gastos totales, $g(x)=275x+225$.

Por tanto, la función que queremos maximizar es $B(x)=-x^3+243x-225$, donde x es el número de unidades que se han vendido en un mes.

Así pues: $B'(x)=-3x^2+243=0 \overset{:3}{\Leftrightarrow} -x^2+81=0 \Leftrightarrow x^2=81 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-9 \\ x_2=9 \end{cases}$

$$B''(x)=-6x \Rightarrow \begin{cases} B''(-9)=54>0 \Rightarrow \text{mínimo en } x=-9 \\ B''(9)=-54<0 \Rightarrow \text{máximo en } x=9 \quad [B(9)=-729+2187-225=1233] \end{cases}$$

Como conclusión, se tienen que fabricar 9 unidades al mes y el beneficio será de 1233 €.

B) $f(x)=-2x^3-4x^2+6x$

B1) $f(0)=0 \Rightarrow \boxed{(0,0)}$ es el punto de corte con el eje de ordenadas

$$f(x)=-2x^3-4x^2+6x=0 \Rightarrow x\cdot(x^2+2x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

Luego $\boxed{(-3,0);(0,0);(1,0)}$ son los puntos de corte con el eje de abscisas.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

B2) $f'(x) = -6x^2 - 8x + 6 = 0 \overset{:(-2)}{\Leftrightarrow} 3x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{52}}{6} = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}$

Luego, como el signo entre las raíces es el contrario al coeficiente líder (-6) y se alternan:

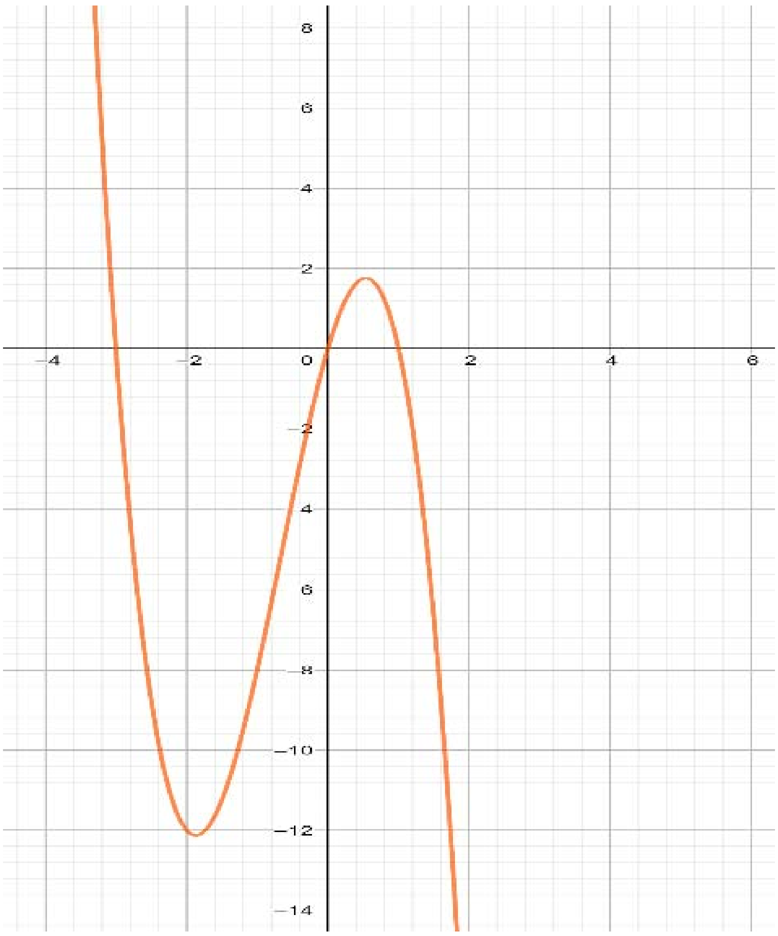
f decreciente	$\left]-\infty, \dfrac{-2-\sqrt{13}}{3}\right[\cup \left]\dfrac{-2+\sqrt{13}}{3}, \infty\right[$	$(-1.86852, -12.129)$ mínimo relativo
f creciente	$\left]\dfrac{-2-\sqrt{13}}{3}, \dfrac{-2+\sqrt{13}}{3}\right[$	$(0.535184, 1.7588)$ máximo relativo

B3) $f''(x) = -12x - 8 = 0 \overset{:(-4)}{\Leftrightarrow} 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2}{3}$

Luego:

f cóncava $(\cap \text{ o } f'' < 0)$	$\left]\dfrac{-2}{3}, \infty\right[$	$\left(\dfrac{-2}{3}, \dfrac{-140}{27}\right)$ punto de inflexión
f convexa $(\cup \text{ o } f'' > 0)$	$\left]-\infty, \dfrac{-2}{3}\right[$	

B4)



CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

B5) El área limitada por la curva y el eje OX se calcula mediante:

$$\left|\int_{-3}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)\,dx\right| = \left|\frac{-45}{2}\right| + \left|\frac{7}{6}\right| = \frac{135+7}{6} = \frac{142}{6} = \boxed{\frac{71}{3}\ u^2}$$

$$\int\left(-2x^3 - 4x^2 + 6x\right)dx = \frac{-x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + 3x^2$$

$$\left[\frac{-x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + 3x^2\right]_{x=-3}^{x=0} = 0 - \left[\frac{-81}{2} + 36 + 27\right] = \frac{81}{2} - 63 = \frac{81-126}{2} = \frac{-45}{2}$$

$$\left[\frac{-x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + 3x^2\right]_{x=0}^{x=1} = \left[\frac{-1}{2} - \frac{4}{3} + 3\right] - 0 = \frac{-3-8+18}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\left|\int_{-3}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)dx\right| = \left|\frac{-135}{6}\right| + \left|\frac{7}{6}\right| = \frac{135+7}{6} = \frac{142}{6} = \boxed{\frac{71}{3}}$$

Problema 2.3:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Ejercicio 3 [3 puntos]

El gasto mensual en alquiler de los inquilinos de la zona centro de determinada ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica 73 euros. Una muestra aleatoria de 350 inquilinos da como resultado una renta media de 689,3 euros.

A. [1,5 puntos] Obtener el intervalo de confianza del 93% para la renta media.

B. [1,5 puntos] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 91% sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

Solución:

A) X = gasto mensual en alquiler $\sim N(\mu, 73)$

M = muestra de **350** > 30 inquilinos $\sim N\left(689.3; \frac{73}{\sqrt{350}}\right) = N(689.3; 3.9)$

Nivel de confianza: $1-\alpha = 0.93 \Rightarrow \alpha = 0.07 \Rightarrow \quad 1-\dfrac{\alpha}{2} = 0.965 = P\left[Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.815$

Error de estimación: $E_\alpha = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.815 \cdot 3.9 = 7.0785$

Intervalo de confianza al 93 % para la media poblacional: $I_\alpha =]689.3 - 7.0785; 689.3 + 7.0785[$

Intervalo de confianza al 93 % para la media poblacional: $\boxed{I_\alpha =]682.2215; 696.3785[}$

B) Nivel de confianza: $1-\alpha = 0.91 \Rightarrow \alpha = 0.09 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.955 = P\left[Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.695$

Error de estimación: $E_\alpha = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.695 \cdot \dfrac{73}{\sqrt{n}} = 2.3595 \Rightarrow 52.44 \simeq \dfrac{123.735}{2.3595} = \sqrt{n} \Rightarrow n \simeq 2749.95$

El tamaño mínimo de la muestra para que se cumplan las condiciones del enunciado debe ser: $\boxed{\mathbf{2750}\text{ personas}}$

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.
No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
No se permiten calculadoras gráficas, ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [3 PUNTOS] Una empresa que fabrica bombillas debe satisfacer un pedido de 450 unidades que empaqueta en cajas de tamaños distintos. Hay dos modelos de cajas, A y B, en los que caben respectivamente 15 y 20 unidades. Se dispone de un total de k cajas. Además, el número de cajas del modelo A coincide con las dos terceras partes del total de cajas del modelo B. El sistema de ecuaciones lineales que permite calcular el número de cajas de cada modelo a utilizar para enviar el pedido, es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 15x + 20y = 450 \\ x + y = k \\ 3x - 2y = 0 \end{array}\right\}$$

Determinar, según el número total de cajas disponibles, (según los valores del parámetro k), los casos en los que el sistema tiene o no tiene solución, y si esta es única o no. Resolver el sistema cuando tenga solución.

B. [0,5 PUNTOS] Sean A y B dos matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes tienen como valor -3 y 10 respectivamente. Con estos datos, calcular:

B1. [0,25 PUNTOS] $|A^{-1}B^2|$

B2. [0,25 PUNTOS] $|CB^t|$, siendo C la matriz resultante de multiplicar la tercera fila de A por 6, y B^t la matriz traspuesta de B.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [2,9 PUNTOS] Dada la función $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

A1. [0,1 PUNTOS] Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.

A2. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

A3. [0,5 PUNTOS] Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = x-3$.

A4. [1,7 PUNTOS] Calcular el área de la región anterior.

B. [0,6 PUNTOS] Sea ahora la función $f(x) = \frac{x^2-2x-12}{x^2-2x-15}$. ¿En qué puntos es discontinua? ¿Se puede definir de nuevo esta función para evitar alguna discontinuidad?

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

La edad de los asistentes a un concierto de música clásica celebrado recientemente en la ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica de 3 años. Una muestra aleatoria de 350 espectadores ha dado como resultado una edad media de 64,3 años.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 92 % para la edad media de los asistentes.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra si deseamos que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea de 0,7?

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

Una empresa textil confecciona dos estampados diferentes: A y B. Debe satisfacer una demanda de al menos 50 rollos de tela del estampado A; y de al menos 50 rollos del estampado B. Los ingresos obtenidos por rollo de tela son de 30 euros para el estampado A y de 20 euros para el B. Por otro lado, el número de rollos del B no debe ser inferior a la mitad de rollos del estampado A. Además, la capacidad del almacén es de 375 rollos. ¿Cuántos rollos de tela de cada tipo de estampado debe producir para obtener unos ingresos máximos?

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Dada la función, determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = -2$ y en $x = 0$.

$$f(x)=\begin{cases} -6x+3, & \text{si} \quad -4<x<-2 \\ x^2+ax+5, & \text{si} \quad -2\le x<0 \\ \dfrac{x+15}{x+b} & \text{si} \quad 0\le x<3 \end{cases}$$

B. [1,75 PUNTOS] Determinar las asíntotas de la función $f(x)=\frac{2x^2+5}{x^2+4x-21}$. Si existen asíntotas verticales, esbozar la posición de la gráfica respecto a las mismas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Se tienen dos urnas. La urna I tiene 2 bolas negras, 3 rojas y 5 amarillas. La urna II contiene 3 bolas negras, 4 rojas y 3 amarillas. Se lanza un dado. Si sale 1, 3 o 5, se extrae una bola de la urna I. Si sale 2, 4 o 6, se extrae una bola de la urna II.

A. [1 PUNTO] Calcular la probabilidad que tenemos de extraer una bola amarilla.

B. [1 PUNTO] Si hemos extraído una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído de la urna I?

C. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola amarilla de la urna II?

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

OPCIÓN DE EXAMEN 1

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Problema 1.1:

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [3 PUNTOS] Una empresa que fabrica bombillas debe satisfacer un pedido de 450 unidades que empaqueta en cajas de tamaños distintos. Hay dos modelos de cajas, A y B, en los que caben respectivamente 15 y 20 unidades. Se dispone de un total de k cajas. Además, el número de cajas del modelo A coincide con las dos terceras partes del total de cajas del modelo B. El sistema de ecuaciones lineales que permite calcular el número de cajas de cada modelo a utilizar para enviar el pedido, es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 15x + 20y = 450 \\ x + y = k \\ 3x - 2y = 0 \end{array}\right\}$$

Determinar, según el número total de cajas disponibles, (según los valores del parámetro k), los casos en los que el sistema tiene o no tiene solución, y si esta es única o no. Resolver el sistema cuando tenga solución.

B. [0,5 PUNTOS] Sean A y B dos matrices cuadradas de dimensión 3. Sus determinantes tienen como valor -3 y 10 respectivamente. Con estos datos, calcular:

B1. [0,25 PUNTOS] $|A^{-1}B^2|$

B2. [0,25 PUNTOS] $|CB^t|$, siendo C la matriz resultante de multiplicar la tercera fila de A por 6, y B^t la matriz traspuesta de B.

Solución:

A) Discutamos el sistema $\left.\begin{array}{l} 15x+20y=450 \\ x+y=k \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+4y=90 \\ x+y=k \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\}$ en función de los valores de k:

La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y tiene rango 2 ya que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-4=-1\neq 0$

La matriz ampliada del sistema es $(A|b)=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 90 \\ 1 & 1 & k \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$ con determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 90 \\ 1 & 1 & k \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 12k-180-270+6k=18k-450=0 \quad \Leftrightarrow \quad k=25$$. Por tanto:

Si $k\neq 25$, $rango(A|b)=3\neq 2=rango(A)$ y el sistema es **incompatible** (sin solución).

Si $k=25$, $rango(A|b)=2=rango(A)=$ número de incógnitas y el sistema es **compatible determinado** (con solución única).

En este caso:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+4y=90 \\ x+y=25 \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=25 \\ 3x+4y=90 \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\} \underset{3^aF\leftrightarrow 3\cdot 1^aF-3^aF}{\overset{2^aF\leftrightarrow 2^aF-3\cdot 1^aF}{\Rightarrow}} \left.\begin{array}{l} x+y=25 \\ y=15 \\ 5y=75 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+15=25 \Rightarrow x=10 \\ y=15 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{Sol=\{(10,15)\}}$$

Por tanto, si $k=25$, necesitará $\mathbf{10}$ cajas de tipo A y $\mathbf{15}$ de tipo B para satisfacer el pedido.

B)

B1) $\left|A^{-1}\cdot B^2\right| = \left|A^{-1}\right|\cdot\left|B^2\right| = |A|^{-1}\cdot|B|^2 = \dfrac{|B|^2}{|A|} = \dfrac{10^2}{-3} = \boxed{\dfrac{-100}{3}}$

Ya que el determinante de una matriz y la de su inversa, caso de existir, también son inversos.

B2) $\left|C\cdot B^t\right| = |C|\cdot\left|B^t\right| = 6\cdot|A|\cdot|B| = 6\cdot(-3)\cdot 10 = \boxed{-180}$

Ya que, al multiplicar toda una fila por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número y el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

$$|A^{-1}\cdot B^2| = \boxed{\frac{-100}{3}};\ |C\cdot B^t| = \boxed{-180}$$

Problema 1.2:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [2,9 PUNTOS] Dada la función $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

A1. [0,1 PUNTOS] Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.

A2. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

A3. [0,5 PUNTOS] Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = x-3$.

A4. [1,7 PUNTOS] Calcular el área de la región anterior.

B. [0,6 PUNTOS] Sea ahora la función $f(x) = \frac{x^2-2x-12}{x^2-2x-15}$ ¿En qué puntos es discontinua? ¿Se puede definir de nuevo esta función para evitar alguna discontinuidad?

Solución:

A) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

A1) El punto de corte con el eje de ordenadas será $(0, f(0)) = \boxed{(0,5)}$.

Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen a partir de las soluciones de $f(x) = 0$:

$$x^2 - 3x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9+20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}, 0\right) \equiv (-1.19; 0)} \\ \boxed{\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}, 0\right) \equiv (4.19; 0)} \end{cases}$$

Puntos de corte con los ejes: $(\mathbf{0}, \mathbf{5})$; $\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}, 0\right) \equiv (\mathbf{-1.19}, \mathbf{0})$; $\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}, 0\right) \equiv (\mathbf{4.19}, \mathbf{0})$

A2) $$f'(x) = -2x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'(x) > 0 \text{ si } x < \frac{3}{2} \\ f'(x) < 0 \text{ si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

El cambio en la monotonía se produce cuando $x = \frac{3}{2}$, que está en el dominio de la función, la función es continua y derivable en él. Por tanto, es un extremo. Al pasar la función de ser creciente a decreciente, es un máximo relativo. Además: $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 5 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 5 = \frac{-9+18+20}{4} = \frac{29}{4}$.

Por tanto:

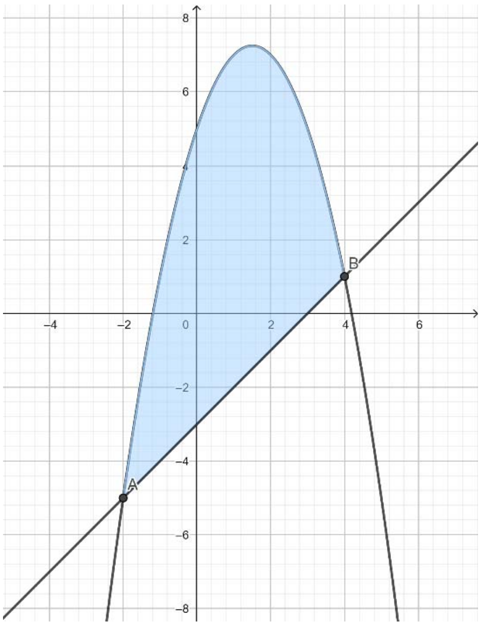
f decreciente	$\left]\frac{3}{2}, \infty\right[$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{29}{4}\right)$ máximo relativo
f creciente	$\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$	

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

A3) Averiguamos los puntos de corte de ambas funciones resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$:

$$-x^2+3x+5 = x-3 \quad\Rightarrow\quad x^2-2x-8=0 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{2\pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Así pues, los puntos de corte son: $\begin{cases} A(-2,-5) \\ B(4,1) \end{cases}$



A4) El área de la región anterior se calcula mediante la integral definida de la diferencia de ambas:

$$\int_{-2}^{4} \left[\left(-x^2+3x+5\right)-\left(x-3\right)\right] dx = \int_{-2}^{4} \left(-x^2+2x+8\right) dx = \left[\frac{-x^3}{3}+x^2+8x\right]_{x=-2}^{x=4} =$$

$$= \left[\frac{-64}{3}+16+32\right] - \left[\frac{8}{3}+4-16\right] = -24+60 = \boxed{36\ u^2}$$

Área = **36** u^2.

B)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 12}{x^2 - 2x - 15}$$

Esta función no será continua en los valores de x que hagan 0 el denominador, los calculamos: $x^2 - 2x - 15 = 0$, obtenemos:

$x = 5$ y $x = -3$

Calculamos los límites de la función en estos valores:

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-2x-12}{x^2-2x-15} = \frac{9+6-12}{9+6-15} = \frac{3}{0} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-2x-12}{x^2-2x-15} = \frac{25-10-12}{25-10-15} = \frac{3}{0} = \pm\infty\ ,$$

por tanto para estos valores la función presenta asíntotas verticales, es decir, la función tiene discontinuidades inevitables de primera especie de salto infinito.

La función es discontinua en $x = 5$ y $x = -3$, y no hay forma de definirla para que sea continua en esos puntos.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 1.3:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

La edad de los asistentes a un concierto de música clásica celebrado recientemente en la ciudad, sigue una distribución normal con desviación típica de 3 años. Una muestra aleatoria de 350 espectadores ha dado como resultado una edad media de 64,3 años.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 92 % para la edad media de los asistentes.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra si deseamos que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea de 0,7?

Solución:

A) X = edad de los asistentes a un concierto de música clásica $\sim N(\mu, 3)$

M = muestra de **350** > 30 asistentes $\sim N\left(64.3; \frac{3}{\sqrt{350}}\right) = N(64.3; 0.16)$

Nivel de confianza: $1-\alpha = 0.92 \Rightarrow \alpha = 0.08 \Rightarrow \quad 1-\dfrac{\alpha}{2} = 0.96 = P\left[Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.75$

Error de estimación: $E_\alpha = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot 0.16 = 0.28$

Intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional: $I_\alpha =]64.3 - 0.28; 64.3 + 0.28[$

Intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional: $\boxed{I_\alpha =]64.02, 64.58[}$

B) Nivel de confianza: $1-\alpha = 0.98 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.99 = P\left[Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Rightarrow \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.325$

Error de estimación: $E_\alpha = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{n}} = 0.7 \Rightarrow 9.96 \simeq \dfrac{6.975}{0.7} = \sqrt{n} \Rightarrow n \simeq 99.29$

El tamaño mínimo de la muestra para que se cumplan las condiciones del enunciado debe ser: $\boxed{\mathbf{100} \text{ personas}}$

OPCIÓN DE EXAMEN 2

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Problema 2.1:

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

Una empresa textil confecciona dos estampados diferentes: A y B. Debe satisfacer una demanda de al menos 50 rollos de tela del estampado A; y de al menos 50 rollos del estampado B. Los ingresos obtenidos por rollo de tela son de 30 euros para el estampado A y de 20 euros para el B. Por otro lado, el número de rollos del B no debe ser inferior a la mitad de rollos del estampado A. Además, la capacidad del almacén es de 375 rollos. ¿Cuántos rollos de tela de cada tipo de estampado debe producir para obtener unos ingresos máximos?

Solución:

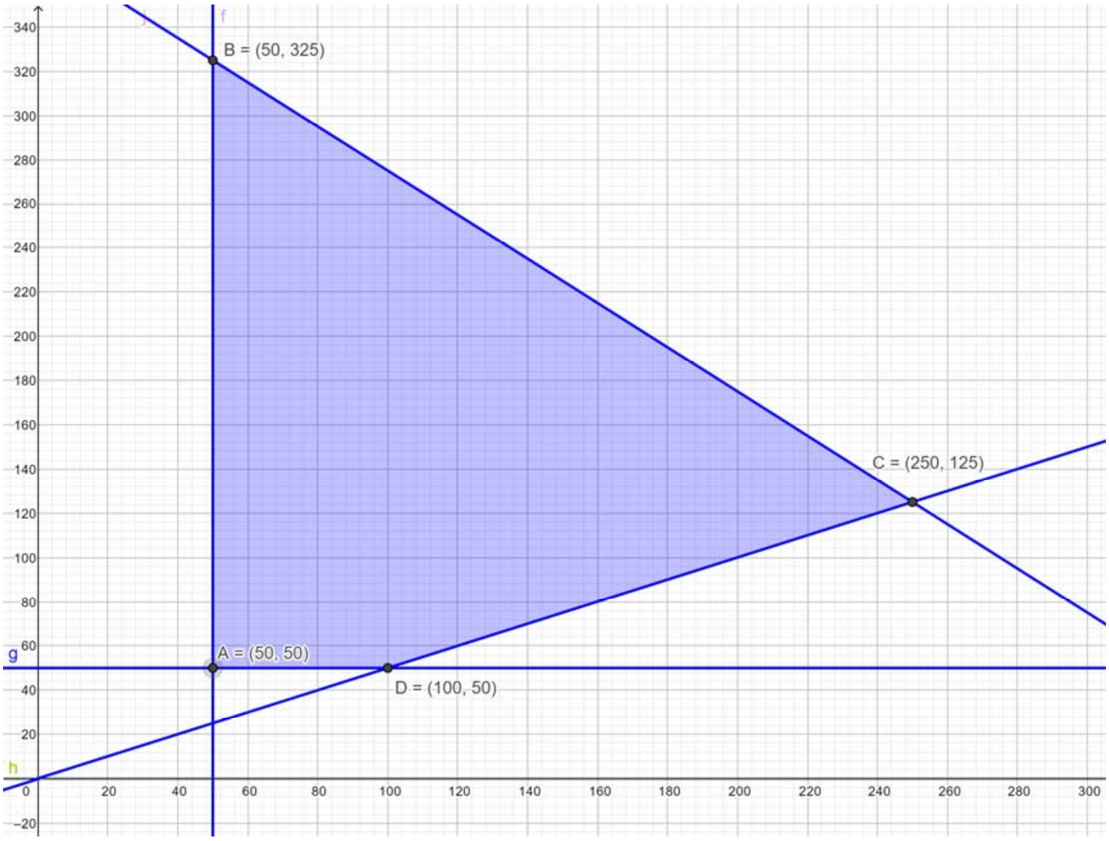
Llamemos x = número de rollos de estampado A e y = número de rollos de estampado B.

Las restricciones del problema quedarían expresadas de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \geq 50 \\ y \geq \dfrac{x}{2} \\ x + y \leq 375 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \geq 50 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + y \leq 375 \end{array}\right\}$$

La función de los ingresos que se quiere maximizar es: $f(x,y) = 30 \cdot x + 20 \cdot y$

Si dibujamos la región que determinan las restricciones obtenemos:



Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Los vértices del polígono son:

$$A \equiv \left.\begin{cases} x = 50 \\ y = 50 \end{cases}\right\} \Rightarrow (50, 50)$$

$$B \equiv \left.\begin{cases} x = 50 \\ x + y = 375 \quad \Rightarrow \quad 50 + y = 375 \quad \Rightarrow \quad y = 325 \end{cases}\right\} \Rightarrow (50, 325)$$

$$C \equiv \left.\begin{cases} x + y = 375 \\ x - 2y = 0 \end{cases}\right\} \overset{\text{reducción de x}}{\Rightarrow} \left.\begin{matrix} 3y = 375 \\ x = 2y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 125 \\ x = 250 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (250, 125)$$

$$D \equiv \left.\begin{cases} x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2y \quad \Rightarrow \quad x = 100 \\ y = 50 \end{cases}\right\} \Rightarrow (100, 50)$$

Así pues, los puntos A(50,50); B(50,325); C(250,125) y D(100,50) son los candidatos a maximizar la función objetivo en dicha región. Veamos cuál es:

$$f(50,50) = [30x + 20y]_{\substack{x=50 \\ y=50}} = 30 \cdot 50 + 20 \cdot 50 = 1500 + 1000 = 2500 \ €$$

$$f(50,325) = [30x + 20y]_{\substack{x=50 \\ y=325}} = 30 \cdot 50 + 20 \cdot 325 = 1500 + 6500 = 8000 \ €$$

$$f(250,125) = [30x + 20y]_{\substack{x=250 \\ y=125}} = 30 \cdot 250 + 20 \cdot 125 = 7500 + 2500 = 10000 \ €$$

$$f(100,50) = [30x + 20y]_{\substack{x=100 \\ y=50}} = 30 \cdot 100 + 20 \cdot 50 = 3000 + 1000 = 4000 \ €$$

Conclusión:

El máximo ingreso se obtiene con **250** rollos de estampado tipo A y **125** rollos de estampado tipo B, siendo dicho ingreso de **10 000 €**.

Problema 2.2:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Dada la función, determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = -2$ y en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} -6x+3, & \text{si} \quad -4 < x < -2 \\ x^2 + ax + 5, & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ \dfrac{x+15}{x+b} & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \end{cases}$$

B. [1,75 PUNTOS] Determinar las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2+5}{x^2+4x-21}$. Si existen asíntotas verticales, esbozar la posición de la gráfica respecto a las mismas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

Solución:

A) Para que sea continua en $x = -2$ se debe cumplir que existan y sean iguales la imagen y el límite:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = (-2)^2 + a\cdot(-2) + 5 = -2a + 9 \\ \lim\limits_{x\to -2^-} (-6x+3) = -6\cdot(-2) + 3 = 12 + 3 = 15 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \left(x^2 + ax + 5\right) = (-2)^2 + a\cdot(-2) + 5 = -2a + 9 \end{array}\right\} \overset{\text{son iguales}}{\Rightarrow} \quad -2a + 9 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a = -3}$$

Para que sea continua en $x = 0$ se debe cumplir que existan y sean iguales la imagen y el límite:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \dfrac{0+15}{0+b} = \dfrac{15}{b} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \left(x^2 + ax + 5\right) = 0^2 + a\cdot 0 + 5 = 5 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x+15}{x+b}\right) = \dfrac{0+15}{0+b} = \dfrac{15}{b} \end{array}\right\} \overset{\text{son iguales}}{\Rightarrow} \quad 5 = \frac{15}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{b = 3}$$

Luego, la función será continua en $x = -2$ y $x = 0$ cuando $\boldsymbol{a = -3}$ y $\boldsymbol{b = 3}$.

B) $f(x) = \frac{2x^2+5}{x^2+4x-21} \quad \Rightarrow \quad Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 4x - 21 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-7; 3\}$

ya que $x^2 + 4x - 21 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+84}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \dfrac{-4 \pm 10}{2} = \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

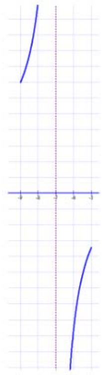
Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Por tanto, los únicos puntos donde puede haber asíntota vertical son aquellos que no están en el dominio.

Como el numerador de la fracción nunca se anula y siempre es positivo, el signo de la función será el mismo que el del denominador. Como este es un polinomio de segundo grado con dos raíces diferentes, el signo entre los ceros es el contrario al del coeficiente líder y los otros signos se alternan. Así pues, el signo es negativo entre –7 y 3 y positivo antes de –7 y después de 3.

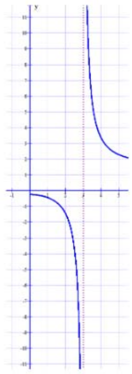
Teniendo en cuenta lo anterior, estudiemos ahora los límites en ambos puntos:

$$x=-7: \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -7^-}\dfrac{2x^2+5}{x^2+4x-21}=\left(\dfrac{103}{0^+}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -7^+}\dfrac{2x^2+5}{x^2+4x-21}=\left(\dfrac{103}{0^-}\right)=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x=-7} \text{ es una asíntota vertical.}$$



A la izquierda la función tiende a +∞ y a la derecha tiende a -∞.

$$x=3: \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x^2+5}{x^2+4x-21}=\left(\dfrac{23}{0^-}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x^2+5}{x^2+4x-21}=\left(\dfrac{23}{0^+}\right)=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x=3} \text{ es una asíntota vertical.}$$



A la izquierda la función tiende a -∞ y a la derecha tiende a +∞.

Las asíntotas verticales son: ***x* = –7** y ***x* = 3**

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 2.3:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Se tienen dos urnas. La urna I tiene 2 bolas negras, 3 rojas y 5 amarillas. La urna II contiene 3 bolas negras, 4 rojas y 3 amarillas. Se lanza un dado. Si sale 1, 3 o 5, se extrae una bola de la urna I. Si sale 2, 4 o 6, se extrae una bola de la urna II.

A. [1 PUNTO] Calcular la probabilidad que tenemos de extraer una bola amarilla.

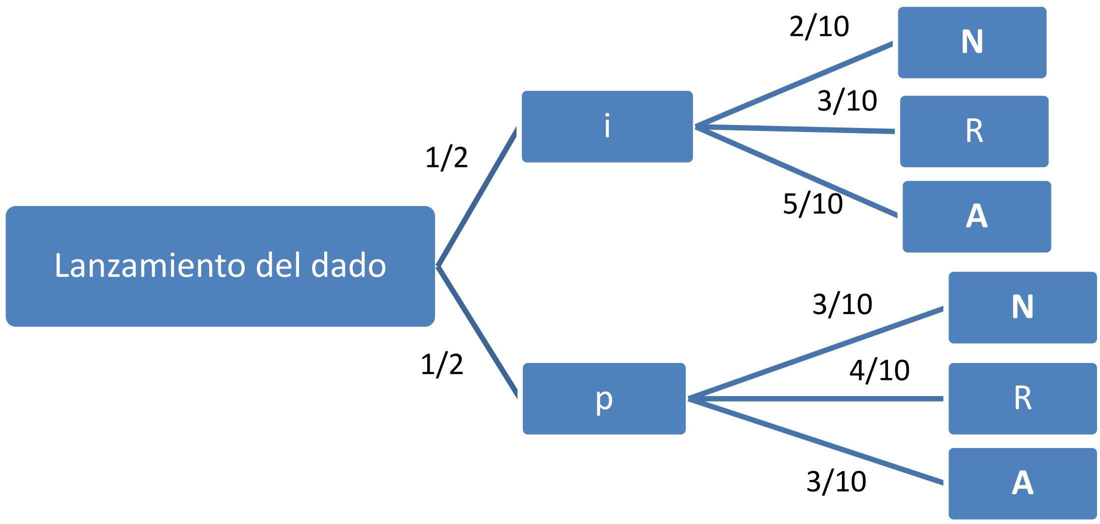
B. [1 PUNTO] Si hemos extraído una bola roja, ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído de la urna I?

C. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola amarilla de la urna II?

Solución:

Consideremos los siguientes sucesos:

i = "sacar impar en el dado", p = "sacar par en el dado", A = "sacar bola amarilla de la urna", N = "sacar bola negra de la urna" y R = "sacar bola roja de la urna"



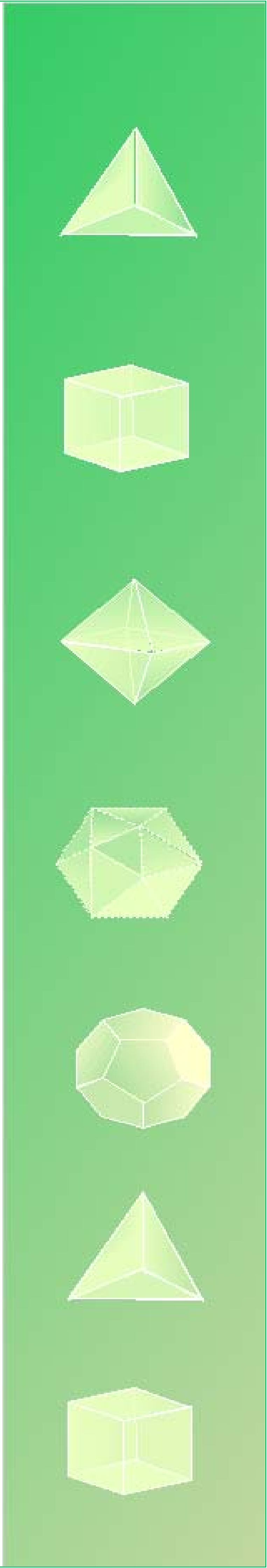
A) $P(A) \overset{T^{ma}\ \text{Prob.}\ total}{=} P(i)\cdot P(A/i)+P(p)\cdot P(A/p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}=\frac{8}{20}=\frac{40}{100}=0.4\ =40\ \%$

B) $P(i/R) \overset{T^{ma}\ Bayes}{=} \frac{P(R/i)\cdot P(i)}{P(R)}=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{7}{20}}=\frac{3}{7}\approx 0.429$

$$P(R) \overset{T^{ma}\ \text{Prob.}\ total}{=} P(i)\cdot P(R/i)+P(p)\cdot P(R/p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}=\frac{7}{20}$$

C) $P(A/p)=\frac{3}{10}=0.3\ =30\ \%$.

A) $P(A)\ =\mathbf{0.4}$; B) $P(i/R)\ =\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}\approx 0.429$; C) $P(A/p)=\frac{3}{10}=\mathbf{0.3}$.



Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Castilla - La Mancha

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Textos Marea Verde

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2019
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. *Un cliente hace un pedido a una fábrica de harinas que ofrece 3 tamaños distintos de sacos: pequeño, mediano y grande. Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes y el peso total de su pedido es 1800 kilogramos. Si el peso de dos sacos pequeños y tres medianos es el mismo que el de dos sacos grandes y el peso de un saco grande es cuatro veces el peso de un saco pequeño.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el peso de cada tipo de saco (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

2. *En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = 3x+4y$ sujeta a las siguientes restricciones:* $x+y \geq 2$; $x \leq y$; $0 \leq y \leq 2$; $x \geq 0$

a) Dibuja la región factible. (1 pto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)

c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. (0.25 ptos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} 4x-(3/2) & si\ x \leq c \\ (x-2)^2+3/2 & si\ x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.5 ptos)

b) Para $c = 1$, representa gráficamente la función f. (1 pto)

4. *La función $v(t) = 48t^2 - 2t^3$ nos da el número de ordenadores afectado por un virus informático, siendo t el tiempo (en horas) desde que se localizó el primer ordenador con virus*

a) Averigua, si existe, el momento en el que el virus dejará de propagarse. (0.5 ptos)

b) Estudia cuando aumenta y cuando disminuye la propagación del virus. (0.5 ptos)

c) ¿En qué momento se produce el número máximo de ordenadores afectados? ¿cuántos ordenadores? (0.5 ptos)

5. *En un cierto banco el 5 % de los créditos concedidos son para la compra de una casa. De los créditos concedidos para la compra de una casa, el 40 % resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una casa, se sabe que el 10 % de ellos resultan impagados.*

a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados. (0.75 ptos)

b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito fuera para una casa? (0.75 ptos)

6. *Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar en frascos de 500 gramos de kétchup en una muestra de 10 frascos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos del kétchup se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para el contenido medio de azúcar en un frasco de 500 gramos de kétchup. (1 pto)

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2019
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta B

1. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ a & b \end{pmatrix}$, *encontrar los valores de los parámetros* a *y* b *para que las matrices conmuten. (1.5 ptos)*

2. *Se reparten tres tipos de becas:* B_1 *por valor de 400 euros,* B_2 *de 160 euros y* B_3 *de 200 euros. El dinero total destinado a las becas es de 43400 euros y son 145 personas las que obtienen beca. Cada persona solamente puede obtener una beca. Sabiendo que la cantidad de personas que recibe la beca* B_1 *es 5 veces mayor que la que obtiene la beca* B_2*:*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permite averiguar qué cantidad de personas reciben cada tipo de beca. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} |x+2|+t & si\ x \le -1 \\ (x-t)^2 & si\ x > -1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t *la función* $f(x)$ *es continua en* x*=-1? (0.5 ptos)*

b) Para $t = 3$*, calcula los extremos relativos de la función* $f(x)$ *en el intervalo* $(-1, +\infty)$*. (0.5 ptos)*

c) Para $t = 3$*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x)$ *en* $(-1, +\infty)$*. (0.5 ptos)*

4. *Sea la función* $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 1$*. Sabemos que presenta un punto de inflexión en el punto de abcisa* $x = 0$*, un máximo en* $x = 1$ *y la pendiente de la recta tangente en* $x = -1$ *es 24. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros* a, b *y* c*. (1.5 ptos)*

5. *En una clase de pintura hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.*

a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 ptos)

b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Cuenca? (0.75 ptos)

6. *El tiempo de atención a un paciente por parte de un centro médico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica* $\sigma = 2$ *minutos. Se hace un estudio de los tiempos de atención de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de atención al paciente por parte del centro, con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (1 pto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONES PROPUESTA A

Problema A.1:

Un cliente hace un pedido a una fábrica de harinas que ofrece tres tamaños distintos de sacos: pequeño, mediano y grande. Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes, y el peso total de su pedido es de 1800 kg. Si el peso de 2 sacos pequeños y 3 medianos es el mismo que el de 2 sacos grandes, y el peso de un saco grande es 4 veces el peso de un saco pequeño.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el peso de cada tipo de saco.
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Llamamos x al peso del saco pequeño, y al mediano y z al del grande.

Con los datos del enunciado obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{20x+14y+6z=1800}\\ \mathbf{2x+3y=2z}\\ \mathbf{z=4x}\end{array}\right\}$$

b) Podemos resolver el sistema de diferentes maneras, pero al estar ya despejada la variable z, una forma sencilla es sustituir esto en las otras dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{20x+14y+24x=1800}\\ \mathbf{2x+3y=8x}\\ \mathbf{z=4x}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{c}\mathbf{44x+14y=1800}\\ \mathbf{3y=6x}\\ \mathbf{z=4x}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{c}\mathbf{44x+28x=72x=1800}\\ \mathbf{y=2x}\\ \mathbf{z=4x}\end{array}\right\}$$

De dónde x = 25, y = 50, z = 100.

Comprobamos como siempre los resultados.

Los sacos pesan: $\mathbf{x=25}$, $\mathbf{y=50}$, $\mathbf{z=100}$ kilogramos

Problema A.2:

En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 3x + 4y$ sujeta a las siguientes restricciones: $x + y \geq 2$; $x \leq y$; $0 \leq y \leq 2$; $x \geq 0$.

a) Dibuja la región factible.
b) Determina los vértices de la región factible.
c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores.

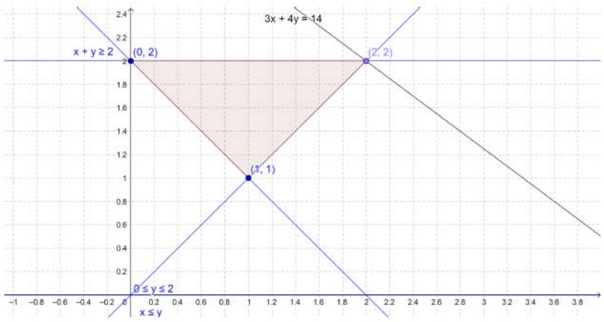
Solución:

Con las restricciones obtenemos este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x \geq 0\,,\ \ x \leq y} \\ \boldsymbol{x + y \geq 2} \\ \boldsymbol{0 \leq y \leq 2} \end{cases}$$

Por otro lado, la **función objetivo** es la siguiente: $f(x, y) = 3x + 4y$.

a) Representamos la región factible que define este sistema de inecuaciones:



b) Los vértices de la región factible observados en la figura son: A (1, 1); B (2, 2); C (0, 2).

c) Calculemos para cada vértice el valor de la función objetivo: $f(x, y) = 3x + 4y$.

- $f(1, 1) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7$
- $f(2, 2) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 14$
- $f(0, 2) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$

Por tanto, el valor mínimo, 7, se alcanza en el punto A (1, 1); y el valor máximo, 14, se alcanza en el punto B (2, 2).

Los vértices son: $\boldsymbol{A}\,(1, 1)$ en el que se alcanza el valor mínimo; $B\,(2, 2)$ en el que se alcanza el valor máximo; y $\boldsymbol{C}$ **(0, 2).**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.3:

Se considera la función: $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{4x - 3/2} & \boldsymbol{si\ x\ \leq c} \\ \mathbf{(x-2)^2 + 3/2} & \boldsymbol{si\ x\ > c} \end{cases}$.

a) ¿Para qué valor de c la función es continua en $x = c$?
b) Para $c = 1$, representa la función f.

Solución:

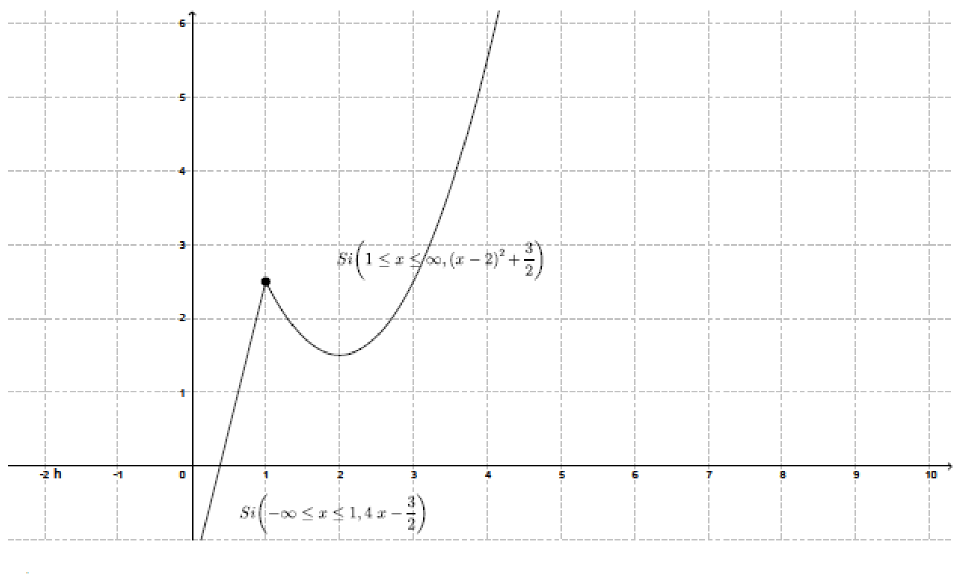
a) La función está definida a trozos por dos funciones polinómicas, una recta y una parábola, que, por tanto, son continuas en toda la recta real. El único punto dudoso es el punto c de unión. Buscamos el valor que debe tener c para que sea continua.

Debe ser $4c - 3/2 = (c-2)^2 + 3/2 \Rightarrow (c-2)^2 - 4c = -3/2 - 3/2 = -3 \Rightarrow c^2 - 4c + 4 - 4c + 3 = 0 \Rightarrow$

$c^2 - 8c + 7 = 0$, de raíces $c = 1$ y $c = 7$.

Para $c = \mathbf{1}$ y para $c = \mathbf{7}$ la función es continua.

b) Representamos la recta, de pendiente 4 y ordenada en el origen 3/2. Representamos la parábola de vértice (2, 3/2). Ambas funciones se cortan en (1, 5/2).



Problema A.4:

La función $v(t) = 48\, t^2 - 2t^3$ nos da el número de ordenadores afectado por un virus informático, siendo t el tiempo (en horas) desde que se localizó el primer ordenador con virus:

a) Averigua, si existe, el momento en el que el virus dejará de propagarse.
b) Estudia cuando aumenta y cuando disminuye la propagación del virus.
c) ¿En qué momento se produce el máximo número de ordenadores afectados? ¿Cuántos ordenadores?

Solución:

a) La función $v(t) = 48\, t^2 - 2t^3$ nos da el número de ordenadores afectados por el virus informático. Calculamos cuando se anula: $48\, t^2 - 2t^3 = 2t^2(24 - t) = 0$.

Se anula para $t = 0$ y $t = 24$. Por tanto, dejará de propagarse al cabo de 24 horas.

El virus dejará de propagarse al cabo de 24 horas.

b) Calculamos la derivada: $v'(t) = 96\, t - 6t^2$ y la igualamos a cero: $v'(t) = 0 = 6t(16 - t)$. Se anula para $t = 0$ y $t = 16$. $v''(t) = 96 - 12\, t$. $v''(t) > 0$ si $0 \le t < 16$. $v''(t) < 0$ si $t > 16$. Por tanto, aumenta la propagación del virus en (0, 16) y disminuye si $t > 16$.

La propagación aumenta de 0 a 16 horas y disminuye a partir de las 16 horas.

c) La función alcanza un máximo para $t = 16$, con $v(16) = 4\,096$. Luego a las 16 horas se produce el máximo de ordenadores infectados, que es de 4 096 ordenadores.

El máximo de ordenadores infectados se produce a las 16 horas, siendo de $4\,096$ ordenadores.

Problema A.5:

En un cierto banco el 5 % de los créditos concedidos son para la compra de una casa. De los créditos concedidos para la compra de una casa, el 40 % de ellos resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una casa se sabe que el 10 % de ellos resultan impagados.

a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados.
b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito sea para una casa?

Solución:

Nombramos los sucesos: C = Crédito concedido para la compra de una casa, I = Crédito impagado, P = Crédito pagado.

Los datos que nos dan son:

$$P(C) = 0.05, \quad P(I/C) = 0.4, \quad P(I/\overline{C}) = 0.1,$$

Con estos datos podemos deducir:

$$P(C \cap I) = P(C) \cdot P(I/C) = 0.05 \cdot 0.4 = 0.02.$$

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0.05 = 0.95.$$

$$P(\overline{C} \cap I) = P(\overline{C}) \cdot P(I/\overline{C}) = 0.95 \cdot 0.1 = 0.095.$$

Hacemos la tabla de contingencia:

	Casa (C)	No casa ($\overline{C}$)	Total
Impagado (I)	**0.02**	**0.095**	0.115
Pagado (P)	0.03	0.855	0.885
Total	**0.05**	**0.95**	***1***

De la que deducimos que:

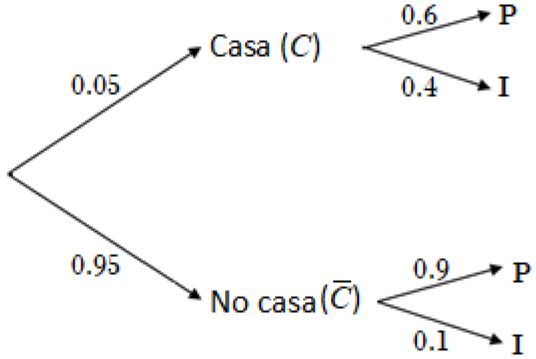
$$P(I) = P(C \cap I) + P(\overline{C} \cap I) = 0.02 + 0.095 = 0.115.$$

$$P(C \cap P) = P(C) - P(C \cap I) = 0.05 - 0.02 = 0.03.$$

$$P(\overline{C} \cap P) = P(\overline{C}) - P(\overline{C} \cap I) = 0.95 - 0.095 = 0.855.$$

$$P(P) = P(C \cap P) + P(\overline{C} \cap P) = 0.03 + 0.855 = 0.885.$$

Con los datos del enunciado también podemos construir el siguiente diagrama de árbol:



Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Y ahora respondemos a todas las preguntas:

a) $P(I) = P(C\cap I) + P(\bar{C}\cap I)$ = 0.02 + 0.095 = 0.115.

b) $P(C/P) = P(C\cap P)/P(P)$ = 0.03/0.885 = 0.03389831.

La probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados es de $\mathbf{0.115}$.

Sabiendo que un crédito se ha pagado, la probabilidad de que el crédito sea para una casa es aproximadamente de $\mathbf{0.034}$.

a) También se podría haber utilizado el Teorema de la Probabilidad Total:

$P(I) = P(C\cap I) + P(\bar{C}\cap I) = P(C)\cdot P(I/C) + P(\bar{C})\cdot P(I/\bar{C}) = 0.05 \cdot 0.4 + 0.95 \cdot 0.1 = 0.02 + 0.095 = 0.115$

b) O haber utilizado el Teorema de Bayes:

$$P(C/P) = \frac{P(C\cap P)}{P(P)} = \frac{P(C)\cdot P(P/C)}{P(P)} = \frac{0.05 \cdot 0.6}{0.885} = 0.03389831$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.6:

Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar en frascos de 500 gramos de kétchup en una muestra de 10 frascos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$, se pide:

a) Hallar el intervalo de confianza el 97 % para el contenido medio de azúcar en un frasco de 500 gramos de kétchup.
b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza.
c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta.

Solución:

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right)$$

Nos dan los siguientes datos: $\boldsymbol{\sigma = 10, 1 - \alpha = 0.97}$, $n = 10$.

Calculamos la media muestral:

$\overline{x} = \frac{60+80+120+95+65+70+75+85+100+90}{10} = 84.$

Buscamos en la tabla: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17.$

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(\overline{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right) = \left(84 - 2.17\frac{10}{\sqrt{10}}, 84 + 2.17\frac{10}{\sqrt{10}}\right)$$
$$= (77.1378575, \quad 90.8621425)$$

a) Intervalo de confianza: $(77.1378575,\ 90.8621425)$.

b) Si se quiere que el intervalo de confianza tenga menor amplitud sin modificar el nivel de confianza, se puede aumentar el tamaño de la muestra.

b) Aumentar el tamaño de la muestra.

c) Si la probabilidad fuese del 98.5 % > 97 %, el intervalo de confianza tendría mayor amplitud, por lo que el valor de la media muestral de 85 estaría en dicho intervalo.

c) La media muestral de 85 si puede estar en ese intervalo.

SOLUCIONES PROPUESTA B

Problema B.1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ a & b \end{pmatrix}$, encontrar los valores de los parámetros a y b para que las matrices conmuten.

Solución:

Imponemos que las matrices conmuten:

$$\boldsymbol{A \cdot B = B \cdot A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1+3}\boldsymbol{a} & \mathbf{5+3}\boldsymbol{b} \\ \mathbf{3}+\boldsymbol{a} & \mathbf{15}+\boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{16} & \mathbf{8} \\ \boldsymbol{a}+\mathbf{3}\boldsymbol{b} & \mathbf{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

Igualamos:

$\left\{ \begin{array}{c} 1+3a = 16 \\ 5+3b = 8 \\ 3+a = a+b \\ 15+b = 3a+b \end{array} \right\}$, de donde a = 5 y b = 1, que verifican las cuatro ecuaciones.

$\boldsymbol{a} = 5,\ \boldsymbol{b} = 1.$

Problema B.2:

Se reparten tres tipos de becas: B_1 por valor de 400 euros, B_2 de 160 euros y B_3 de 200 euros. El dinero total destinado a las becas es de 43 400 euros, y son 145 personas las que obtienen beca. Cada persona sólo puede obtener una beca. Sabiendo que la cantidad de personas que reciben la beca B_1 es cinco veces mayor que la que recibe la beca B_2:

a) Plantea el sistema de ecuaciones qué nos permita averiguar qué cantidad de personas reciben cada tipo de beca.
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Llamamos x a número de personas que reciben la beca B_1, y al número que recibe la B_2, y z al número de las que reciben la beca B_3.

El sistema es:

$$\begin{cases} x + y + z = 145 \\ 400x + 160y + 200z = 43400 \\ x = 5y \end{cases}$$

b) Sustituimos la tercera ecuación en las dos primeras

$$\begin{cases} 5y + y + z = 145 \\ 2000y + 160y + 200z = 43400 \\ x = 5y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6y + z = 145 \\ 2160y + 200z = 43400 \\ x = 5y \end{cases}$$

Sustituimos la primera ecuación en la segunda:

$$\begin{cases} z = 145 - 6y \\ 2160y + 200z = 43400 \\ x = 5y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 145 - 6y \\ 960y = 14400 \rightarrow y = 15 \\ x = 5y \end{cases}$$

Y sustituyendo:

$$\begin{cases} z = 55 \\ y = 15 \\ x = 75 \end{cases}$$

La solución es: $\boldsymbol{x = 75}$, $\boldsymbol{y = 15}$, $\boldsymbol{z = 55}$.

Problema B.3:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x+2|+t, & si\ x \le -1 \\ (x-t)^2, & si\ x > -1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valores de t la función $f(x)$ es continua en $x = -1$?
b) Para $t = 3$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, +\infty)$.
c) Para $t = 3$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, +\infty)$.

Solución:

a) La función $f(x) = \begin{cases} |x+2|+t, & si\ x \le -1 \\ (x-t)^2, & si\ x > -1 \end{cases}$ está formada por funciones siempre continuas, ya que está formada por función valor absoluto y función polinómica. El único punto dudoso es dónde se unen las dos ramas. Imponemos que en $x = -1$ ambas ramas tomen el mismo valor.

$$|-1+2|+t = (-1-t)^2 \to 1+t = t^2+2t+1 \to t^2+t = 0 = t(t+1)$$

Luego si $t = 0$ o si $t = -1$ la función es continua en toda la recta real.

La función es continua en $\mathbf{x = -1}$ **si** $\boldsymbol{t = 0}$ o si $\boldsymbol{t = -1}$.

b) Para t = 3, la función $f(x) = \begin{cases} |x+2|+3, & si\ x \le -1 \\ (x-3)^2, & si\ x > -1 \end{cases}$ no es continua en $x = -1$. Calculamos los extremos relativos en la segunda rama. Derivamos e igualamos a cero: $f'(x) = 2(x-3) = 0$.

Se anula en $x = 3$. Calculamos la derivada segunda: $f''(x) = 2 > 0$, luego es un mínimo. (No hacía falta hacerlo pues se trata de una parábola de la que sabemos que su vértice es un mínimo). El mínimo relativo es (3, 0), que es un mínimo absoluto. Tiene un extremo relativo en $x = -1$, dónde se juntan las dos ramas, que es un máximo relativo: (–1, 4). La otra rama tiene un mínimo relativo en $x = -2$, en (–2, 3).

Para $\boldsymbol{t = 3}$ alcanza un mínimo absoluto en $(3, 0)$.

c) La función derivada es negativa para $x < 3$, luego la función es decreciente en (–1, 3). La función derivada es positiva para $x > 3$, luego la función es creciente.

La función es **decreciente en (–1, 3) y creciente si $x > 3$.**

Problema B.4:

Sea la función $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 1$. Sabemos que presenta un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$, un máximo en $x = 1$ y la pendiente de la recta tangente en $x = -1$ es 24. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1,5 punto).

Solución:

Calculamos las derivadas sucesivas de la función:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx + 1.$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + c.$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx.$$

Sabemos que tiene un punto de inflexión en $x = 0$. Como $f''(0) = 0$ siempre no nos da información de los parámetros.

Un máximo en $x = 1$, supone que se anula la derivada primera: $f'(1) = 4a + 3b + c = 0$.

Si la pendiente de la recta tangente en $x = -1$ es 24, supone que la derivada primera en ese punto vale 24: $f'(-1) = -4a + 3b + c = 24$.

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{cases} 4a + 3b + c = 0 \\ -4a + 3b + c = 24. \end{cases}$$

Las restamos y las sumamos:

$$\begin{cases} 6b + 2c = 24 \\ 8a = -24. \end{cases}$$

Luego $a = -3$, $c = 12 - 3b$. Por tanto, el máximo es: $(1, 4a + 3b + c) = (1, 4(-3) + 3b + 12 - 3b) = (1, 0)$, con derivada segunda $f''(1) = 12a + 6b = 12(-3) + 6\,b = -36 + 6b < 0$. Luego si $b < 6$ la derivada segunda es negativa y el punto es un máximo, pero si es $b > 6$, entonces es un mínimo.

Los parámetros deben valer: $\boldsymbol{a = -3}$, $\boldsymbol{c = 12 - 3b}$, con $\boldsymbol{b < 6}$.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.5:

En una clase de pintura hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 de Cuenca y 8 de Toledo.

a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas)

b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que los 5 sean alumnos de Cuenca?

Solución:

Nombramos los sucesos: A = Ser de Albacete, C = Ser de Cuenca, T = Ser de Toledo, *no*A = No ser de Albacete.

Los datos que nos dan son:

$$P(A) = 14/27 \quad P(C) = 5/27 \quad P(T) = 8/27 \quad P(\bar{A}) = 13/27.$$

a) Se supone que le pueden tocar las dos entradas al mismo alumno:

$$P(\bar{\boldsymbol{A}} \cap \bar{\boldsymbol{A}}) = P(\bar{\boldsymbol{A}}) \cdot P(\bar{\boldsymbol{A}}) = 13/27 \cdot 13/27 = 0.23182442.$$

La probabilidad de que ambas no toquen a alguien de Albacete es $\mathbf{0.2318}$.

b) Ahora se elimina la persona a la que ya le haya tocado:

$$P(5C) = P(C) \cdot P(2C/C) \cdot P(3C/2C) P(4C/3C) \cdot P(5C/4C) = 5/27 \cdot 4/26 \cdot 3/25 \cdot 2/24 \cdot 1/23 =$$

$$120/9687600 = 0.000012387.$$

La probabilidad de que las 5 toquen a alguien de Cuenca es $\mathbf{0.000012387}$.

Problema B.6:

El tiempo de atención a un paciente por parte de un centro médico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 2 minutos. Se hace un estudio de los tiempos de atención de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de atención al paciente, por parte del centro, con un nivel de confianza del 95 %.
b) ¿Cuál será el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto?

Solución:

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Considerando X = tiempo de atención a un paciente.

Calculamos la media muestral:

$$\bar{x} = \frac{5+6+7+8+9+11+12+14+15+16}{10} = 10.3$$

En el enunciado nos dicen que, $\sigma = 2$, n = 10, 1 $-\alpha$ = 0.95, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, sustituyendo, tenemos

$$\left(10.3 - 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}\,,\;\; 10.3 + 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = (9.060387,\;\; 11.5396128)$$

El tiempo de atención a un paciente está entre 9.06 y 11.54 minutos con una confianza del 95 %.

El error máximo admisible viene dado por: $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Por tanto, para E = 1, $1 = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}$, luego, $\sqrt{n} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma = 1.96 \cdot 2$, y n = 15.3664.

Para que el error máximo admisible sea inferior a un minuto, el tamaño de la muestra debe ser igual o mayor que 16.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2019
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. *En una tienda de comida a granel tienen a la venta tres tipos de judías secas: blancas, canela y pintas. Estas se venden a 2.75, 3 y 2.50 euros el kilogramo, respectivamente. Ayer se vendieron 40 kilos en total por un valor de 111.5 euros. La suma de los kilogramos de judías blancas y canela vendidas fueron el triple de las pintas.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos kilogramos de judías de cada tipo se vendieron. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

2. *En un taller se confeccionan prendas vaqueras con dos tipos de tejidos de distinta calidad (T_1, T_2). Disponen de 160 m^2 del tejido T_1 y 240 m^2 del tejido T_2. Hacen dos conjuntos: Uno con chaqueta y falda y otro con cazadora y pantalón. El primero utiliza 2 m^2 de T_1 y 2 m^2 de T_2, el conjunto del pantalón utiliza 1 m^2 de T_1 y 3 m^2 de T_2. El conjunto con falda cuesta 250 euros y el del pantalón 350 euros.*

a) Expresa la función objetivo. (0.25 ptos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 pto).

c) Calcula el número de conjuntos de cada tipo que deben hacer para obtener máximas ganancias. (0.25 ptos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+t & si\ x \le -3 \\ 4 & si\ -3 < x < 3 \\ (x-4)^2 - 5 & si\ x \ge 3 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = -3. (0.5 ptos)

b) Para t = 3, representa gráficamente la función f. (1 pto)

4. *Sabemos que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un mínimo en el punto (1,1) y corta al eje de ordenadas en 4. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)*

5. *En una universidad el 40 % de los estudiantes son aficionados a la lectura, el 50 % al cine, y al 70 % les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.*

a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine? (0.75 ptos)

b) Si elegimos un estudiante al azar y le gusta la lectura, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el cine? (0.75 ptos)

6. *El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ=20 minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 ptos)

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea μ = 2.3 horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 ptos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Propuesta B

1. *Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & -1 & -2\\0 & 2 & 4\end{pmatrix}$ *y* $D=\begin{pmatrix}4 & -5\\-3 & 4\end{pmatrix}$

a) Calcula $A\cdot B-C^T$ *. (0.75 ptos)*

b) Comprueba que la matriz C no tiene inversa y explica la razón por la que el producto $D^2\cdot B$ *no puede ser realizado. (0.75 ptos)*

2. *Los precios de un gimnasio son diferentes según la franja horaria dispuesta en tres turnos: mañana, mediodía y tarde. Este mes han acudido 150 personas por la mañana, 30 en la franja del mediodía y 270 por la tarde y el gimnasio ha ingresado un total de 15900 euros. La diferencia entre el precio de la tarde y la mañana equivale a la mitad del precio para el mediodía y al sumar los precios del mediodía y la tarde obtenemos el doble del precio de la mañana.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el precio de cada franja horaria. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. *Se considera la función* $f(x)=\begin{cases}-x-4 & \text{si } x<c\\-3 & \text{si } c\le x\le 0\\x^2-10x & \text{si } x>0\end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ *es continua en* $x=c$*? (0.5 ptos)*

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ *en el intervalo* $(0,+\infty)$*. (0.5 ptos)*

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ *en* $(0,+\infty)$*. (0.5 ptos)*

4. *Los costes de fabricación de un modelo de vehículo* $C(x)=-x^3+45x^2-243x+500$ *(en miles de euros) en función del número de vehículos (en cientos) fabricados (* $1\le x\le 27$*)*

a) Determina la cantidad de vehículos que dan el coste máximo y mínimo. (1 pto)

b) ¿A qué valor ascienden ambos? (0.5 ptos)

5. *El 5 % de los estudiantes matriculados en una determinada asignatura de bachillerato son deportistas aficionados. El 0.5 % de estos alumnos deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso en dicha asignatura. Mientras que el 15 % de los alumnos no deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso.*

a) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido un suspenso en la citada asignatura? (0.75 ptos)

b) Sabiendo que un alumno elegido al azar ha obtenido un suspenso, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado? (0.75 ptos)

6. *El contenido en grasas saturadas por litro de leche sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica* $\sigma=0.1$ *g/l. Se tomó una muestra aleatoria de 100 litros de leche obteniéndose el intervalo de confianza (0.682, 0.718) para el contenido medio de grasas saturadas en la muestra.*

a) Calcula el contenido medio de grasas saturadas para los 100 litros de leche de la muestra. (0.25 ptos)

b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo. (0.75 ptos)

c) Halla un intervalo de confianza para la el contenido medio de grasas saturadas con un nivel de confianza del 95 %. (0.5 ptos)

d) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error máximo admisible sea menor que 0.01 g/l? (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONES PROPUESTA A

Problema A.1:

1. *En una tienda de comida a granel tienen a la venta tres tipos de judías secas: blancas, canela y pintas. Estas se venden a 2.75, 3 y 2.50 euros el kilogramo, respectivamente. Ayer se vendieron 40 kilos en total por un valor de 111.5 euros. La suma de los kilogramos de judías blancas y canela vendidas fueron el triple de las pintas.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos kilogramos de judías de cada tipo se vendieron. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

Solución:

Llamamos B a los kilogramos de judías blancas que se vendieron, C a los de judías canela, y P a los de judías pintas.

a) El sistema es:

$$\begin{cases} B + C + P = 40 \\ 2.75B + 3C + 2.5P = 111.5 \\ B + C = 3P \end{cases}$$

b) Restamos a la primera ecuación, la tercera: $P = 40 - 3P$, de dónde P = 10 kilogramos. Sustituimos en las ecuaciones segunda y tercera;

$$\begin{cases} P = 10 \\ 2.75B + 3C + 25 = 111.5 \\ B + C = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P = 10 \\ 2.75B + 3C = 86.5 \\ B + C = 30 \end{cases}$$

Multiplicamos por 3 la tercera ecuación y le restamos la segunda:

$$\begin{cases} P = 10 \\ 0.25B = 3.5 \\ B + C = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P = 10 \\ 0.25B = 3.5 \\ B + C = 30 \end{cases} \rightarrow B = \frac{3.5}{0.25} = 14$$

Y sustituyendo:

$$\begin{cases} P = 10 \\ B = 14 \\ C = 16 \end{cases}$$

Se vendieron **14** kilogramos de judías blancas, **16** de judías canela y **10** de judías pintas**.**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.2:

2. *En un taller se confeccionan prendas vaqueras con dos tipos de tejidos de distinta calidad (T_1, T_2). Disponen de 160 m² del tejido T_1 y 240 m² del tejido T_2. Hacen dos conjuntos: Uno con chaqueta y falda y otro con cazadora y pantalón. El primero utiliza 2 m² de T_1 y 2 m² de T_2, el conjunto del pantalón utiliza 1 m² de T_1 y 3 m² de T_2. El conjunto con falda cuesta 250 euros y el del pantalón 350 euros.*

a) Expresa la función objetivo. (0.25 ptos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 pto).

c) Calcula el número de conjuntos de cada tipo que deben hacer para obtener máximas ganancias. (0.25 ptos)

Solución:

Llamamos x al número de conjuntos de chaqueta y falda confeccionados e y al número de conjuntos de falda y pantalón.

a) La **función objetivo**, que deseamos maximizar, es la siguiente: $\boldsymbol{f(x, y) = 250x + 350}y$.

b) Con las restricciones obtenemos este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 160 \\ 2x + 3y \leq 240 \\ x \geq 0\ ,0 \leq y \end{cases}$$

Representamos la región factible que define este sistema de ecuaciones:

Los vértices de la región factible observados en la figura son: O (0, 0); B (60, 40); C (80, 0); D (0, 80).

c) Calculemos para cada vértice el valor de la función objetivo: $f(x, y) = 250x + 350y$.

- $f(0, 0) = 0$.
- $f(60, 40) = 250 \cdot 60 + 350 \cdot 40 = 15000 + 14000 = 29\,000$.
- $f(80, 0) = 80 \cdot 250 = 20\,000$.
- $f(0, 80) = 80 \cdot 350 = 28\,000$.

Por tanto, el valor máximo, 29 000, se alcanza en el punto B (60, 40).

Para obtener las máximas ganancias, **29 000** euros, se deben fabricar **60** conjuntos de chaqueta y falda y **40** conjuntos de falda y pantalón.

Problema A.3:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+t & si\ x \le -3 \\ 4 & si\ -3 < x < 3 \\ (x-4)^2 - 5 & si\ x \ge 3 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = -3. (0.5 ptos)

b) Para t = 3, representa gráficamente la función f. (1 pto)

Solución:

a) La función $f(x) = \begin{cases} x+t, si\ x\ \le -3 \\ 4, si\ -3 \le x \le 3 \\ (x-4)^2 - 5, si\ x \ge 3 \end{cases}$ está formada por funciones polinómicas, siempre continuas. Los únicos puntos dudosos son dónde se unen dos ramas. Imponemos que en x = –3 ambas ramas tomen el mismo valor:

$$-3\ +\ t\ =\ 4 \rightarrow t = 7$$

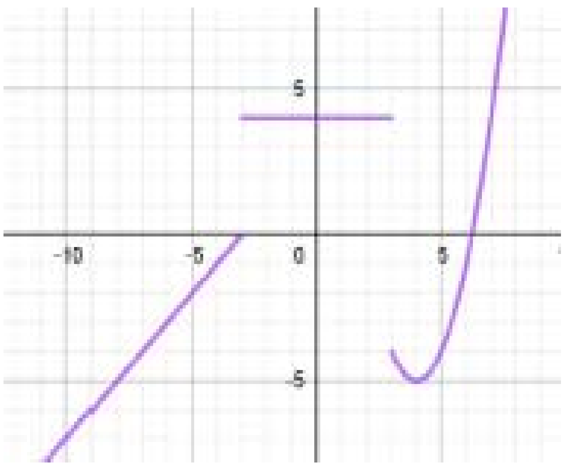
Si t = 7, la función es continua en x = –3.

En x = 3, la función no es continua, presenta un salto de longitud 8, pues.

$$4 = (x-4)^2 - 5 \rightarrow 4 \neq (-1)^2 - 5 = -4$$

La función es continua en ***x* = –3** si ***t* = 7**.

b) Para t = 3, la función es $f(x) = \begin{cases} x+3, si\ x\ \le -3 \\ 4, si\ -3 \le x \le 3 \\ (x-4)^2 - 5, si\ x \ge 3 \end{cases}$, formada por una semirrecta, de pendiente 1 y ordenada en el origen 3, un segmento horizontal y la rama de una parábola con vértice en (4, 5).



Problema A.4:

4. *Sabemos que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un mínimo en el punto (1,1) y corta al eje de ordenadas en 4. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)*

Solución:

De la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ nos dicen que tiene un mínimo en (1, 1):

Luego $f'(1) = 2a(1) + b = 0 = 2a + b.$

Como pasa por (1, 1): $f(1) = a1^2 + b1 + c = 1 = a + b + c$

Corta al eje de ordenadas en 4: $f(0) = a0^2 + b0 + c = 4 = c.$

Por lo que c = 4. $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b + 4 = 1 \ \rightarrow a + b = -3 \end{cases}$

Restamos las dos ecuaciones: a = 3. Por lo que b = –6.

La función pedida es:

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

La función pedida es: $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 6x + 4}$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.5:

5. *En una universidad el 40 % de los estudiantes son aficionados a la lectura, el 50 % al cine, y al 70 % les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.*

a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine? (0.75 ptos)

b) Si elegimos un estudiante al azar y le gusta la lectura, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el cine? (0.75 ptos)

Solución:

Nombramos los sucesos: L = Estudiante aficionado a la lectura, C = Aficionado al cine.

Los datos que nos dan son:

$$P(L) = 0.4, \qquad P(C) = 0.5, \qquad P(L \cup C) = 0.7.$$

a) La probabilidad de que le guste la lectura y el cine es:

$$P(L \cap C) = P(L) + P(C) - P(L \cup C) = 0.4 + 0.5 - 0.7 = 0.2.$$

La probabilidad de que le guste la lectura y el cine es: 0.2.

b) Ahora nos piden una probabilidad condicionada:

$$P(C/L) = \frac{\boldsymbol{P(C \cap L)}}{\boldsymbol{P(L)}} = \frac{\mathbf{0.2}}{\mathbf{0.4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0.5}.$$

La probabilidad de que le guste el cine sabiendo que le gusta la lectura es 0.5.

Problema A.6:

6. *El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 ptos)

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 2.3$ horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 ptos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\boldsymbol{\overline{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\ ,\ \boldsymbol{\overline{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

En el enunciado nos dicen que, $\bar{x} = 2\ horas = 120\ minutos$, $\sigma = 20$, n = 36, 1 − α = 0.95, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, sustituyendo, tenemos:

$\left(120 - 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{35}}\ ,\ 120 + 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{36}}\right) = (113.46, 126.53)$ en minutos, que en horas es:

$$(1.891, 2.118)$$

El tiempo de uso del móvil se encuentra entre **1.89** y **2.12** horas con una confianza del 95 %.

b) 2.3 no pertenece al intervalo $(1.891, 2.118)$, luego con ese nivel de confianza del 95 %, no se puede admitir. Es posible, manteniendo el nivel de confianza, ampliar el intervalo, disminuyendo el tamaño de la muestra. Por ejemplo, con una muestra de tamaño 4, el intervalo sería:

$$(1.673, 2.326)$$

pero esa muestra es demasiado pequeña.

c) El error máximo admisible viene dado por: $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Por tanto, $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}$

Calculamos $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: 1–α = 0.9464, α = 0.0536, α/2 = 0.0268, 1–α/2 = 0.9732. luego, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.93$.

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\frac{20}{60}}{\sqrt{100}} = 1.93 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{10} = 0.0643.$$

El error máximo admisible es $\mathbf{0.0643\ horas = 3.86\ minutos}$.

SOLUCIONES PROPUESTA B

Problema B.1:

1. *Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & -1 & -2\\0 & 2 & 4\end{pmatrix}$ *y* $D=\begin{pmatrix}4 & -5\\-3 & 4\end{pmatrix}$

a) Calcula $A{\cdot}B-C^T$. *(0.75 ptos)*

b) Comprueba que la matriz C *no tiene inversa y explica la razón por la que el producto* $D^2{\cdot}B$ *no puede ser realizado. (0.75 ptos)*

Solución:

a) Calculamos la matriz pedida:

$$A\cdot B-C^T=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 2\\2 & -2 & 4\end{pmatrix}=\cdot\begin{pmatrix}6 & 3 & 15\\4 & 2 & 10\\8 & 4 & 20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 2\\2 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3 & 15\\4 & 3 & 8\\6 & 6 & 16\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B-C^T=\begin{pmatrix}\mathbf{7} & \mathbf{3} & \mathbf{15}\\\mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{8}\\\mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{16}\end{pmatrix}$$

b) Para saber si la matriz C tiene inversa, calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 2\\2 & -2 & 4\end{vmatrix}=4+0+0-(0+4+0)=0.$$

Como se anula su determinante, la matriz C no tiene inversa.

Intentamos calcular:

$$D^2\cdot\mathrm{B}=\begin{pmatrix}4 & -5\\-3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -5\\-3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

La matriz D es de orden 2x2, luego D^2 es también de dimensión 2 x 2, y la matriz B es de dimensión 1x3. No coinciden el número de columnas de D^2 con el de filas de B, luego no se pueden multiplicar.

Problema B.2:

2. *Los precios de un gimnasio son diferentes según la franja horaria dispuesta en tres turnos: mañana, mediodía y tarde. Este mes han acudido 150 personas por la mañana, 30 en la franja del mediodía y 270 por la tarde y el gimnasio ha ingresado un total de 15900 euros. La diferencia entre el precio de la tarde y la mañana equivale a la mitad del precio para el mediodía y al sumar los precios del mediodía y la tarde obtenemos el doble del precio de la mañana.*

   a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el precio de cada franja horaria. (1.5 ptos)

   b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

Solución:

Llamamos Ma al precio del gimnasio por las mañanas, Me al del mediodía, y T al de por la tarde:

a) El sistema es:

$$\begin{cases} 150Ma + 30Me + 270T = 15900 \\ T - Ma = \dfrac{Me}{2} \\ Me + T = 2Ma \end{cases}$$

Multiplicamos por 2 la segunda ecuación, pasamos todos los términos al primer miembro:

$$\begin{cases} 150Ma + 30Me + 270T = 15900 \\ 2T - 2Ma - \mathrm{Me} = 0 \\ T - 2Ma + Me = 0 \end{cases}$$

Restamos a la segunda ecuación, la tercera:

$$\begin{cases} 150Ma + 30Me + 270T = 15900 \\ 2T - 2Ma - Me = 0 \\ T - 2Me = 0 \rightarrow T/2 = Me \end{cases}$$

Sustituimos el valor de Me:

$$\begin{cases} 150Ma + 285T = 15900 \\ Me = \dfrac{2Ma}{3} \\ T = 2Me \end{cases}$$

Resolvemos:

$$\begin{cases} Ma = 30 \\ T = 40 \\ Me = 20 \end{cases}$$

El gimnasio cuesta **30** euros por las mañanas, **40** euros por las tardes y **20** euros al mediodía.

Problema B.3:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} -x-4 & si\ x < c \\ -3 & si\ c \le x \le 0 \\ x^2 - 10x & si\ x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función f(x) es continua en x = c? (0.5 ptos)

b) Calcula los extremos relativos de la función f(x) en el intervalo (0, +∞). (0.5 ptos)

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x) en (0, +∞). (0.5 ptos)

Solución:

a) La función $f(x) = \begin{cases} -x-4, & si\ x < c \\ -3, & si\ c \le x \le 0 \\ x^2 - 10x, & si\ x > 0 \end{cases}$ está formada por funciones polinómicas, siempre continuas. Los únicos puntos dudosos son dónde se unen dos ramas. Imponemos que en $x = c$ ambas ramas tomen el mismo valor:

$$-3 = -c - 4 \rightarrow c = -1$$

Si $c = –1$, la función es continua en $x = c$.

En $x = 0$, la función no es continua, presenta un salto de longitud 3, pues.

$$-3 \neq 0^2 - 10 \cdot 0 = 0$$

La función es continua en $x = c$ si $\boldsymbol{c = -1}$.

b) Para $c = –1$, la función es $f(x) = \begin{cases} -x-4, & si\ x < -1 \\ -3, & si\ -1 \le x \le 0, \\ x^2 - 10x, & si\ x > 0 \end{cases}$ formada por una semirrecta, de pendiente –1 y ordenada en el origen –4, un segmento horizontal y la rama de una parábola.

Calculamos los máximos y mínimos para $x > 0$. Derivamos e igualamos a cero:

$f'(x) = 2x – 10 = 0$, luego $x = 5$.

Hallamos la derivada segunda:

$f''(x) = 2 > 0$, por lo que se trata de un mínimo, que se alcanza en:

$x^2 – 10x = (5)^2 – 10(5) = 15$.

Por lo que el vértice de la parábola, que es un mínimo relativo de la función, es el punto (5, 15).

Para $x > 0$ la función alcanza un valor mínimo relativo en $(5, 15)$.

b) Para $0 < x < 5$ la derivada primera es negativa, luego la función es decreciente. Para $x > 5$, la derivada primera es positiva, luego la función es creciente.

Problema B.4:

4. *Los costes de fabricación de un modelo de vehículo* $C(x) = -x^3 + 45x^2 - 243x + 500$ *(en miles de euros) en función del número de vehículos (en cientos) fabricados* ($1 \le x \le 27$)

   a) Determina la cantidad de vehículos que dan el coste máximo y mínimo. (1 pto)

   b) ¿A qué valor ascienden ambos? (0.5 ptos)

Solución:

Se llama x al número de vehículos fabricados (por cientos) y $C(x) = -x^3 + 45x^2 - 243x + 500$, para $1 \le x \le 27$, al coste de fabricación en miles de euros a.

Para determinar los valores máximos y mínimos calculamos la derivada:

$$C'(x) = -3x^2 + 90x - 243,$$

Y la igualamos a cero:

$$C'(x) = -3x^2 + 90x - 243 = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 + 30x - 81,$$

Se anula para $x = 3$ y para $x = 27$. Calculamos la derivada segunda:

$$C''(x) = -6x + 90,$$

$C''(3) = -18 + 90 > 0$, luego en $x = 3$ se alcanza un mínimo: $C(3) = -3^3 + 45\cdot 3^2 - 243\cdot 3 + 500 = 149,$ luego (3, 149) es un mínimo.

$C''(27) = -162 + 90 < 0,$ luego en $x = 27$ se alcanza un máximo: $C(27) = 27^3 + 45\cdot 27^2 - 243\cdot 27 + 500 =$ 7061, luego (27, 7061) es un máximo.

Analizamos también los extremos del intervalo, $x = 1$ y $x = 27$. Para $x = 27$ ya lo hemos hecho. Para $x = 1$:

$C(1) = -1^3 + 45\cdot 1^2 - 243\cdot 1 + 500 = -1 + 45 - 243 + 500 = 301$, luego es un máximo relativo menor que el obtenido en 27.

El coste de fabricación es **mínimo** si se fabrican 300 **vehículos**, y es de 149 000 **euros**. El coste de fabricación es **máximo** si se fabrican 2 700 **vehículos**, y dicho coste es de 7 061 000 **euros**.

Problema B.5:

5. *El 5 % de los estudiantes matriculados en una determinada asignatura de bachillerato son deportistas aficionados. El 0.5 % de estos alumnos deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso en dicha asignatura. Mientras que el 15 % de los alumnos no deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso.*

a) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido un suspenso en la citada asignatura? (0.75 ptos)

b) Sabiendo que un alumno elegido al azar ha obtenido un suspenso, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado? (0.75 ptos)

Solución:

Nombramos los sucesos: S = Estudiante con calificación de suspenso, D = Deportista aficionado.

Los datos que nos dan son:

$$P(D) = 0.05, \quad P(S/D) = 0.005, \qquad P(S/\overline{\boldsymbol{D}}) = 0.15.$$

Deducimos que la probabilidad del suceso contrario a ser deportista aficionado es: $P(\overline{\boldsymbol{D}}) = 0.95$

a) La probabilidad de suspenso es:

$$P(S) = P(S \cap D) + P(S \cap \overline{\boldsymbol{D}}) = P(D) \cdot P(S/D) + P(\overline{\boldsymbol{D}}) \cdot P(S/\overline{\boldsymbol{D}}) =$$

$$= 0.05 \cdot 0.005 + 0.095 \cdot 0.15 = 0.0145.$$

La probabilidad de suspenso en esa asignatura es: $\mathbf{0.0145}$.

b) Ahora nos piden una probabilidad condicionada:

$$P(D/S) = \frac{\boldsymbol{P(D \cap S)}}{\boldsymbol{P(S)}} = \frac{\mathbf{0.5 \cdot 0.005}}{\mathbf{0.0145}} = \frac{\mathbf{0.0025}}{\mathbf{0.0145}} = \mathbf{0.1724}.$$

La probabilidad de que sea deportista sabiendo que ha obtenido un suspenso es $\mathbf{0.1724}$.

Problema B.6:

6. *El contenido en grasas saturadas por litro de leche sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ=0.1 g/l. Se tomó una muestra aleatoria de 100 litros de leche obteniéndose el intervalo de confianza (0.682, 0.718) para el contenido medio de grasas saturadas en la muestra.*

a) Calcula el contenido medio de grasas saturadas para los 100 litros de leche de la muestra. (0.25 ptos)

b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo. (0.75 ptos)

c) Halla un intervalo de confianza para la el contenido medio de grasas saturadas con un nivel de confianza del 95 %. (0.5 ptos)

d) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error máximo admisible sea menor que 0.01 g/l? (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

En el enunciado nos dicen que: $\sigma = 0.1$, n = 100, sustituyendo, tenemos

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0.1}{\sqrt{100}},\ \ \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0.1}{\sqrt{100}}\right) = \left(\bar{x} - \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{100}, \bar{x} + \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{100}\right) = (0.682,\ 0.718)$$

Sumamos y dividimos por dos: $\bar{x} = \frac{0.682+0.718}{2} = 0.7$.

El contenido medio de grasas saturadas para 100 litros de la muestra es de $\mathbf{0.7}$ g/l.

a) Despejamos $\boldsymbol{Z_{\frac{\alpha}{2}}}$:

$$\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0.1}{\sqrt{100}} = 0.718 = 0.7 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0.1}{\sqrt{100}} \to Z_{\frac{\alpha}{2}} = (0.718 - 0.7)/0.01 = 1.8.$$

A 1.8 le corresponde por la tabla un valor: 0.9641. Por lo que:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9641 \to \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.9641 = 0.0359 \to \alpha = 0.0718 \to 1 - \alpha = 0.9282.$$

El nivel de confianza ha sido del $\mathbf{92.82}$ %.

b) Calculamos el nuevo intervalo de confianza al 95 %:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Sabemos que, $\bar{x} = 0.7$, $\sigma = 0.1$, n = 100, $1 - \alpha = 0.95$, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, por lo que:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(0.7 - 1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{100}}, 0.7 + 1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{100}}\right) = (0.6804, 0.7196)$$

El intervalo de confianza al 95 % es de $(\mathbf{0.6804, 0.7196})$.

c) El error máximo admisible viene dado por: $E = Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Por tanto, para E = 0.01, $0.01 = Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{n}}$, luego:

$$\sqrt{n} \cdot 0.01 > 1.96 \cdot 0.1 \to \sqrt{n} > 19.6 \to n > 384.16.$$

Para que el error máximo admisible sea inferior a 0.01, el tamaño de la muestra debe ser igual o mayor que $\mathbf{385}$.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de:

Castilla y León

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz Yáñez y

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

	Evaluación de Bachillerato para Acceder a Estudios Universitarios **Castilla y León**	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	**EXAMEN** **Nº Páginas: 2 y tabla**

OPTATIVIDAD: EL ALUMNO DEBERÁ ESCOGER UNA DE LAS DOS OPCIONES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DE LA MISMA.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN
Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables.

Opción A

1A- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 3x+ay+2z=2 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.
b) Resuelve el sistema para $a=-1$.

2A- Un estudio basado en los datos censales sobre la evolución de la población en una ciudad española revela que, en el periodo 2005-2015, el número de habitantes (en miles) sigue la función

$$p(t)=(t-2)^2(1-2t)+252t+116$$

donde t indica el tiempo medido en años, siendo $t=0$ el tiempo correspondiente al año 2005. Tomando $p(t)$, determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de habitantes de dicha ciudad. ¿En qué momento del tiempo el número de habitantes es máximo? ¿Qué número de habitantes tiene la ciudad en ese momento?

3A- Las autoridades sanitarias están estudiando los efectos del tabaco en la salud. El tiempo que tarda un fumador en dejar definitivamente de fumar se ajusta a una distribución normal, de media 5 meses y desviación típica 2 meses. Con esta información:
a) Calcula la probabilidad de que un fumador tarde más de 4 meses en dejar definitivamente de fumar? **(1 punto).**
b) Si se toman 50 fumadores, calcula la probabilidad de que el tiempo medio que tardan los 50 fumadores en dejar definitivamente de fumar sea inferior a 6 meses. **(2 puntos)**

4A- La ficha técnica del estudio social "*Influencers* en redes sociales" indica que se ha encuestado a 1096 individuos de 16 a 55 años de edad residentes en España. La muestra se ha tomado de manera estratificada, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos que se declaran seguidores de *influencers* es de $\pm 3\%$ con un nivel de confianza del 95.5 %.
Para esta ficha técnica, identifica los siguientes elementos: población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. Examen. Propuesta 4/2019. Página 1 de 2

Opción B

1B- Una familia de 3 miembros recibe la devolución de los impuestos abonados en la campaña RENTA2017 por un importe total de 3250 €. Sabiendo que la madre recibe el doble que el hijo y que el padre recibe $\frac{2}{3}$ de lo que recibe la madre, calcula el importe de la devolución que recibe cada miembro de la familia.

2B- La producción de petróleo (millones de barriles) de un pozo petrolífero a lo largo del tiempo x (años) se mide según la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 17x & \text{si } 0 \le x < 5 \\ -3x^2 + 30x + 10 & \text{si } 5 \le x < 10 \\ 10 & \text{si } x \ge 10 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función $f(x)$. ¿Cuántos barriles de petróleo produce dicho pozo cuando $x = 8$?
b) Calcula el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo [2,3].

3B- El 15% de los paquetes repartidos por una empresa de transporte llegan defectuosos. Entre los paquetes que llegan defectuosos un 9% llega fuera de plazo, mientras que entre los no defectuosos sólo un 2 % llega fuera de plazo. Se elige un paquete al azar repartido por esta empresa:
a) Calcula la probabilidad de que el paquete elegido llegue fuera de plazo.
b) Sabiendo que el paquete elegido llega fuera de plazo, ¿qué probabilidad hay de que llegue defectuoso?

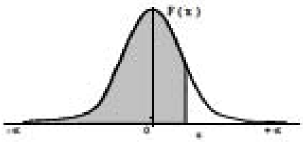
4B- En el aeropuerto A, se toma una muestra de 100 días y se observa que en 25 hay saturación aérea. Con esos datos, se calculan dos intervalos de confianza para el parámetro proporción de días con saturación aérea en el aeropuerto A: [0.122, 0.378] y [0.165, 0.335] ¿Cuál es el intervalo de menor confianza? Justifica tu respuesta.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. Examen. Propuesta 4/2019. Página 2 de 2

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal
LibrosMareaVerde.tk

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

1A- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 3x+ay+2z=2 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

b) Resuelve el sistema para $a=-1$.

Solución:

Consideramos las matrices de los coeficientes, C, y ampliada, A:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & a & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de C, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & a & 2 \end{vmatrix} = 6 + 2a - 12 - (9 - 4a + 4) = 6a - 19$.

Hallamos los valores de a para los que el determinante vale 0:

$6a-19=0;\ a=\frac{19}{6}$, obtenemos $a = \frac{19}{6}$.

Caso 1. Si $a \neq \frac{19}{6}$, el sistema es **Compatible Determinado** pues el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, luego su rango es 3, igual al de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas.

Caso 2. Si $a = \frac{19}{6}$, $rg(C) = 2$.

Veamos el rango de la matriz A: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & a & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8+8-(-24+4) \neq 0$, luego, $rg(A) = 3$, **Sistema Incompatible**

Si $a \neq \frac{19}{6}$	$rg(A) = rg(C) = 3$ = número de incógnitas	**Compatible Determinado**
Si $a = \frac{19}{6}$,	$rg(C) = 2$. $rg(A) = 3$	**Sistema Incompatible**

Resolvemos para $a = -1$, sustituimos en el sistema y nos queda: $\left.\begin{matrix} x+y-z=2 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 3x-y+2z=2 \end{matrix}\right\}$

Resolvemos por Cramer:

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal
LibrosMareaVerde.tk

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & a & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-25} = \frac{2}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & a & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{-25} = \frac{4}{5}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & a & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-20}{-25} = \frac{4}{5};$$

De donde x = 2/5, y = 4/5, z = 4/5.

La solución es: $\boldsymbol{x = \frac{2}{5}}$, $\boldsymbol{y = \frac{4}{5}}$, $\boldsymbol{z = \frac{4}{5}}$.

Problema A.2:

2A- Un estudio basado en los datos censales sobre la evolución de la población en una ciudad española revela que, en el período 2005-2015, el número de habitantes (en miles) sigue la función

$$p(t) = (t-2)^2(1-2t) + 252t + 116$$

donde t indica el tiempo medido en años, siendo $t = 0$ el tiempo correspondiente al año 2005. Tomando $p(t)$, determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de habitantes de dicha ciudad. ¿En qué momento del tiempo el número de habitantes es máximo? ¿Qué número de habitantes tiene la ciudad en ese momento?

Solución:

Estudiamos la función:

$p(t) = (t-2)^2(1-2t) +252t + 116 = (t^2-4t+4)(1-2t) +252t + 116 = t^2-4t+4-2t^3+8t^2-8t+252t+116 = -2t^3+9t^2+240t+120.$

Calculamos la primera derivada:

$$p'(t) = -6t^2 +18t + 240.$$

Igualamos a 0 y resolvemos: $-6t^2 +18t + 240 = 0$; $-t^2 +3t + 40 = 0$; $t = -5$ y $t = 8$.

Calculamos la segunda derivada:

$$p''(t) = -12t +18;\ p''(-5) = -12(-5) +18 = 78 > 0;\ p''(8) = -12(8) +18 < 0.$$

El valor negativo no está en el intervalo de definición de la función.

La función es creciente en el intervalo (0, 8) y decreciente en (8, 10). Como el año 2005, es el año 0, el año 2015 corresponde con el año 10. El año 8 corresponde con el 2013.

$$p(8) = -2(8)^3 + 9(8)^2 +240(8) + 120 = 1\,592.$$

En (8, 1 592) se alcanza un máximo.

El número de habitantes **crece** hasta 2013, y **decrece** hasta 2015. Alcanza un **máximo** en **2013** de **1 592** habitantes.

Problema A.3:

3A- Las autoridades sanitarias están estudiando los efectos del tabaco en la salud. El tiempo que tarda un fumador en dejar definitivamente de fumar se ajusta a una distribución normal, de media 5 meses y desviación típica 2 meses. Con esta información:

a) Calcula la probabilidad de que un fumador tarde más de 4 meses en dejar definitivamente de fumar? (**1 punto**).

b) Si se toman 50 fumadores, calcula la probabilidad de que el tiempo medio que tardan los 50 fumadores en dejar definitivamente de fumar sea inferior a 6 meses. (**2 puntos**)

Solución:

Los datos que nos dan son: $\mu = 5$; $\sigma = 2$; $n = 50$;

a) Queremos calcular $P(X > 4)$, tipificamos y buscamos en la tabla:

$$P(X > 4) = P(Z > \frac{4-5}{2}) = P(Z > \frac{-1}{2}) = 0.6815.$$

La probabilidad de que un fumador tarde más de 4 meses en dejar de fumar es de **0.68**.

b) La distribución de la media poblacional es una normal: $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(5, \frac{2}{\sqrt{50}})$

Por tanto:

$$P(\bar{X} < 6) = P\left(Z < \frac{6-5}{\frac{2}{\sqrt{50}}}\right) = P\left(Z < \frac{\sqrt{50}}{2}\right) = P(Z < 3.54) = 0.9998.$$

La probabilidad de que el tiempo medio de que 50 fumadores dejen de fumar en menos de 6 meses es muy alta, de **0.9998**.

Problema A.4:

4A- La ficha técnica del estudio social "*Influencers* en redes sociales" indica que se ha encuestado a 1096 individuos de 16 a 55 años de edad residentes en España. La muestra se ha tomado de manera estratificada, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos que se declaran seguidores de *influencers* es de $\pm 3\%$ con un nivel de confianza del 95.5 %.
Para esta ficha técnica, identifica los siguientes elementos: población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

Solución:

Los datos que nos dan son: $E = \pm 3$; $\text{Nivel de confianza} = 95.5$; $n = 1\,096$*;*

Población: La población que se desea estudiar es la de las personas residentes en España con una edad comprendida entre 16 y 55 años.

Diseño muestral: Se ha tomado una muestra de manera estratificada con muestreo aleatorio simple en cada estrato:

Muestreo aleatorio estratificado

Se divide la población en grupos homogéneos de una determinada característica, *estratos*, por ejemplo, edad, y se toma una muestra aleatoria simple en cada estrato. No dice si, por ejemplo, cada estrato se forma con edades de 5 años.

Tamaño muestral: **1 096 individuos.**

Parámetro estimado: Se pregunta a cada individuo si son, o no, seguidores de *influencers*.

Se llama error máximo admisible al valor $E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Conocemos E, n, $z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, Pero no conocemos σ ni nos piden calcular nada.

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

1B- Una familia de 3 miembros recibe la devolución de los impuestos abonados en la campaña RENTA2017 por un importe total de 3250 €. Sabiendo que la madre recibe el doble que el hijo y que el padre recibe $\frac{2}{3}$ de lo que recibe la madre, calcula el importe de la devolución que recibe cada miembro de la familia.

Solución:

Planteamos un sistema de ecuaciones. Llamamos x a lo que recibe la madre, y a lo que recibe el hijo, y z a lo que recibe el padre.

Nos dicen que:

$$\begin{cases} x + y + z = 3\,250 \\ x = 2y \\ z = (2/3)x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3\,250 \\ x = 2y \\ z = (2/3)2y = (4/3)y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2y + y + (4/3)y = 3\,250 = (13/3)y \\ x = 2y \\ z = (2/3)x \end{cases}$$

Por lo que:

y = (3250)3/13 = 750

x = 2y = 1500

z = (4/3) y = 1000

La madre recibe **1500** euros, el hijo, **750** euros, y el padre **1000** euros.

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.2:

2B- La producción de petróleo (millones de barriles) de un pozo petrolífero a lo largo del tiempo x (años) se mide según la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 17x & \text{si } 0 \le x < 5 \\ -3x^2 + 30x + 10 & \text{si } 5 \le x < 10 \\ 10 & \text{si } x \ge 10 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función $f(x)$. ¿Cuántos barriles de petróleo produce dicho pozo cuando $x = 8$?
b) Calcula el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo [2,3].

Solución:

a) Estudiamos la función:

$$f(x) = \begin{cases} 17x & si\ 0 \le x \le 5 \\ -3x^2 + 30x + 10 & si\ 5 \le x < 10 \\ 10 & si\ x \ge 10 \end{cases}$$

Está definida sólo para valores positivos de x. Su dominio es la recta real positiva más el cero.

Está formada a trozos por 3 funciones polinómicas, que son siempre continuas. Sólo puede no ser continua en los puntos de unión de los trozos.

Para x = 5, $17x$ = 17(5) = 85; $-3x^2 + 30x + 10 = -3(25) + 30(5) + 10 = 85$.

Luego es continua en x = 5.

Para x = 10, $-3x^2 + 30x + 10 = -3(100) + 30(10) + 10 = 10$; que coincide con el valor, 10.

Luego es continua en x = 10.

La función es continua en todo su dominio de definición.

Para x = 8; $-3x^2 + 30x + 10 = -3(64) + 30(8) + 10 = 58$.

La función es continua en todo su dominio.

Produce **58** barriles de petróleo.

b) En el intervalo [2, 3] la función es una recta, luego no es necesario calcular una integral (aunque se puede hacer así. Es el área de un trapecio de altura 1, y bases 17(2) = 34 y 17(3) = 51.

Área = (34 + 51)/2 = 42.5

O bien, el área pedida la calculamos con la integral definida:

$$\int_2^3 [17x]dx = \left[\frac{17x^2}{2}\right]_2^3 = \left(\frac{17(9)}{2} - \frac{17(4)}{2}\right) = \frac{17}{2}(9-4) = 42.5$$

El área vale **42.5** u^2.

Problema B.3:

3B- El 15% de los paquetes repartidos por una empresa de transporte llegan defectuosos. Entre los paquetes que llegan defectuosos un 9% llega fuera de plazo, mientras que entre los no defectuosos sólo un 2 % llega fuera de plazo. Se elige un paquete al azar repartido por esta empresa:
a) Calcula la probabilidad de que el paquete elegido llegue fuera de plazo.
b) Sabiendo que el paquete elegido llega fuera de plazo, ¿qué probabilidad hay de que llegue defectuoso?

Solución:

a) Nombramos los sucesos: D = El paquete llega defectuoso; P = El paquete llega fuera de plazo.

Los datos que nos dan son:

$$P(D) = 0.15; \quad P(P/D) = 0.09; \quad P(P/\overline{D}) = 0.02.$$

Calculamos $P(\overline{D}) = 1 - 0.15 = 0.85$.

Usamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(P) = P(D) \cdot P(P/D) + P(\overline{D}) \cdot P(P/\overline{D}) = 0.15 \cdot 0.09 + 0.85 \cdot 0.02 = 0.0305.$$

La probabilidad de que el paquete llegue fuera de plazo es del 0.0305.

b) Mediante el teorema de Bayes, nos piden ahora:

$$P(D/P) = \frac{P(D \cap P)}{P(P)} = \frac{P(D) \cdot P(P/D)}{P(P)} = \frac{0.15 \cdot 0.09}{0.0305} = 0.44262295,$$

es decir, hay una probabilidad del 0.44 de que, si llega fuera de plazo, además llegue defectuoso.

Sabiendo que llega fuera de plazo, la probabilidad de que llegue defectuoso es de 0.44.

Problema B.4:

4B- En el aeropuerto A, se toma una muestra de 100 días y se observa que en 25 hay saturación aérea. Con esos datos, se calculan dos intervalos de confianza para el parámetro proporción de días con saturación aérea en el aeropuerto A: [0.122, 0.378] y [0.165, 0.335] ¿Cuál es el intervalo de menor confianza? Justifica tu respuesta.

Solución:

Considerando X = número de días con saturación aérea.

El intervalo de confianza es de una distribución binomial con valores p, q, n:

$$\left(p - Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}, p + Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right)$$

En el enunciado nos dicen, $p = \frac{25}{100}, q = \frac{25}{100}$, n = 100, tenemos

Para los dos supuestos, los valores de p, q y n coinciden, sólo cambia α

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (\mathbf{0.122},\ \ \mathbf{0.378})$$

La amplitud del intervalo es: (0.378 – 0.122) / 2 = (0.256) / 2 = 0.128.

El error máximo cometido es de: (0.128) / 2 = 0.064.

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\propto\prime}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\propto\prime}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (0.165,\ \ 0.335)$$

La amplitud del intervalo es: (0.335 – 0.165) / 2 = (0.17) / 2 = 0.085.

El error máximo cometido es de: (0.085) / 2 = 0.0425.

A mayor amplitud del intervalo, mayor nivel de confianza. Y viceversa. Por tanto:

El intervalo de menor confianza es $(\mathbf{0.165},\ \ \mathbf{0.335})$.

	Evaluación de Bachillerato para Acceder a Estudios Universitarios **Castilla y León**	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	EXAMEN **Nº Páginas: 2 y tabla**

OPTATIVIDAD: EL ALUMNO DEBERÁ ESCOGER UNA DE LAS DOS OPCIONES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DE LA MISMA.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables.

Opción A

1A- Un comerciante dispone de 350000 € para comprar dos modelos de lámparas. El modelo A tiene un coste de 150 € y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 15 €. El modelo B tiene un coste de 100 € y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 11 €. Por experiencia sabe que sólo puede almacenar 3000 lámparas como máximo y que puede vender como máximo 2000 lámparas del modelo A. Determina, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas lámparas de cada modelo debe comprar para maximizar el beneficio conseguido en las ventas. Calcula ese beneficio máximo.

2A- Representa gráficamente la función $y = -ax^3 - bx + c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que tiene un mínimo relativo en el punto $(x, y) = (1, -1)$. Justifica brevemente la representación gráfica obtenida.

3A- Una multinacional farmacéutica elabora un test para la detección precoz de la enfermedad producida por el virus del Ébola. El test da positivo en el 86% de las personas que son portadoras del virus y da negativo en el 92% de las personas que no son portadoras del virus. Además, en una cierta zona geográfica el 2% de la población es portadora del virus. Se elige al azar una persona de esa zona geográfica y se la somete al test. Calcula razonadamente la probabilidad de que sea portadora del virus sabiendo que el test ha dado positivo.

4A- Supongamos que tenemos una moneda de 2 euros trucada de manera que la probabilidad de que al lanzarla al aire salga cara es el triple de que salga cruz. Calcula razonadamente la probabilidad de que al lanzarla una vez al aire salga cruz.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. Examen. Propuesta 1/2019. Página 1 de 2

Opción B

1B- Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - (1 - a^2)z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

Calcula razonadamente los valores del parámetro a para que el sistema tenga soluciones distintas de la solución trivial (0, 0, 0).

2B- Un alumno asiste a una clase que dura 60 minutos. Se estima que la capacidad de atención de un alumno en cada instante de tiempo t viene dada por la función $f(t) = -2t^2 + 120t + 5$, con $t \in [0, 60]$.

a) Calcula la capacidad de atención cuando lleva una hora de clase. **(1 punto)**

b) Halla el instante de tiempo t (en minutos) en el que la capacidad de atención es máxima. ¿Cuál es la capacidad de atención máxima? **(2 puntos)**

3B- Se sabe que el tiempo de resolución de los exámenes propuestos por un profesor universitario sigue una distribución normal de media 74 minutos.

a) Si en el primer examen de este curso la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue 8 minutos, ¿cuál es la probabilidad de haber necesitado para resolver el examen más de los 90 minutos disponibles?

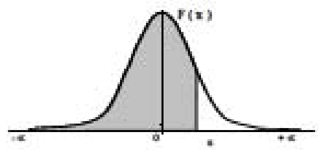
b) En el segundo examen la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue de 9 minutos. Si se presentaron 36 alumnos a este segundo examen, determina la probabilidad de que el tiempo medio de resolución de esos alumnos fuera inferior a 77 minutos.

4B- Se consideran dos sucesos independientes A y B. Si la probabilidad de que ocurra A es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que ocurran ambos a la vez es $\frac{1}{3}$, calcula la probabilidad de que no ocurra A y no ocurra B.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. Examen. Propuesta 1/2019. Página 2 de 2

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

1A- Un comerciante dispone de 350000 € para comprar dos modelos de lámparas. El modelo A tiene un coste de 150 € y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 15 €. El modelo B tiene un coste de 100 € y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 11 €. Por experiencia sabe que sólo puede almacenar 3000 lámparas como máximo y que puede vender como máximo 2000 lámparas del modelo A. Determina, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas lámparas de cada modelo debe comprar para maximizar el beneficio conseguido en las ventas. Calcula ese beneficio máximo.

Solución:

Se trata de un problema de programación lineal con dos variables, los dos modelos de lámpara.

Si traducimos a ecuaciones las restricciones obtenemos este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0\,,\ \ y \geq 0,\ \ x \leq 2\,000 \\ x + y \leq 3\,000 \\ 150x + 100y \leq 350\,000 \end{cases} \quad \text{simplificamos: } \begin{cases} x \geq 0\,,\ \ y \geq 0, x \leq 2\,000 \\ x + y \leq 3\,000 \\ 3x + 2y \leq 7\,000 \end{cases}$$

Por otro lado, la función objetivo es la siguiente: $15x + 11y = B(x, y)$

Para obtener los puntos de intersección resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$A)\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \quad A(0, 0)$

$B)\ \begin{cases} y = 0 \\ x = 2000 \end{cases} \rightarrow \quad B(2000, 0)$

$C)\ \begin{cases} 3x + 2y = 7000 \\ x = 2000 \end{cases} \rightarrow \quad C(2000, 500)$

$D)\ \begin{cases} x + y = 3000 \\ 3x + 2y = 7000 \end{cases} \rightarrow \quad D(1000, 2000)$

$E)\ \begin{cases} x + y = 3000 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \quad E(0, 3000)$

$F)\ \begin{cases} x + y = 3000 \\ x = 2000 \end{cases} \rightarrow \quad F(2000, 1000)$ No pertenece a la región

$G)\ \begin{cases} 3x + 2y = 7000 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \quad G(7000/3, 0)$, No pertenece a la región

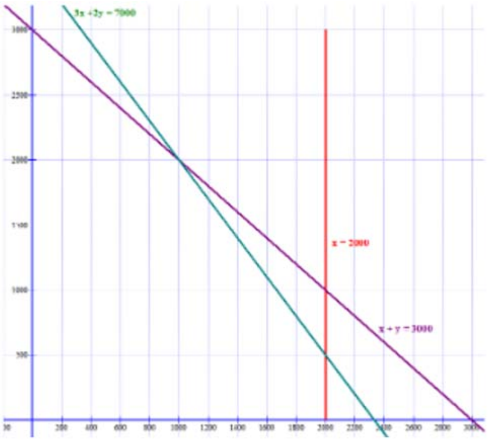
$H)\ \begin{cases} x + y = 3000 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \quad H(3000, 0)$, No pertenece a la región

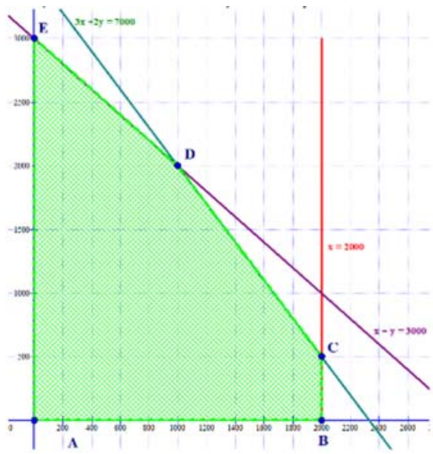
$I)\ \begin{cases} 3x + 2y = 7000 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \quad I(0, 3500)$, No pertenece a la región

Los puntos de intersección son: $A(0, 0)$, $B(2000, 0)$, $C(2000, 500)$, $D(1000, 2000)$, $E(0, 3000)$, $F(2000, 1000)$, $G(7000/3, 0)$, $H(3000, 0)$, $I(0, 3500)$.

Pero no todos verifican todas las restricciones. Dibujamos la región:

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal
LibrosMareaVerde.tk





Los vértices de la región son: $A(0, 0)$, $B(2000, 0)$, $C(2000, 500)$, $D(1000, 2000)$, $E(0, 3000)$

Calculemos para cada vértice el valor del beneficio: $B(x, y) = 15x + 11\boldsymbol{y}$

$B(0, 0) = 15 \cdot 0 + 11 \cdot 0 = 0$

$B(2000, 0) = 2000 \cdot 15 + 11 \cdot 0 = 30000$

$B(2000, 500) = 1000 \cdot 15 + 11 \cdot 2000 = 35500$

$B(1000, 2000) = 15 \cdot 1000 + 11 \cdot 2000 = 37000$

$B(0, 3000) = 2000 \cdot 12 + 11 \cdot 1000 = 33000.$

Por tanto, para obtener el máximo ingreso deberá comprar **1000** lámparas del modelo A y **2000** lámparas del modelo B, siendo entonces el beneficio de **37 000 euros**.

Problema A.2:

2A- Representa gráficamente la función $y = -ax^3 - bx + c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que tiene un mínimo relativo en el punto $(x, y) = (1, -1)$. Justifica brevemente la representación gráfica obtenida.

Solución:

Como pasa por el punto (0, 0), $f(0) = 0$, luego, $0 = -a\cdot 0^3 - b\cdot 0 + c = c$.

Pasa también por el punto (1, –1), luego $-1 = -a\cdot 1^3 - b\cdot 1 = -a\cdot 1^3 - b\cdot 1$, por lo que $1 = a + b$.

Además, en dicho punto hay un extremo relativo, luego su derivada vale 0. $f'(x) = -3ax^2 - b$, por tanto $f'(0) = 0 = -3a - b$, resolvemos el sistema: .

$a = -0.5$, $b = 1.5$, $c = 0$.

La función pedida es: $y = 0.5x^3 - 1.5x = x\,(0.5x^2 - 1.5)$

$a = -0.5$, $b = 1.5$, $c = 0$. $y = 0.5x^3 - 1.5x$

Estudiamos la función:

Es una función polinómica continua en toda la recta real. No tiene asíntotas verticales.

Corta al eje de abscisas en $x = 0$ y en $x^2 = 1.5/0.5 = 3$, luego $x = \pm\sqrt{3} \cong \pm 1.73$

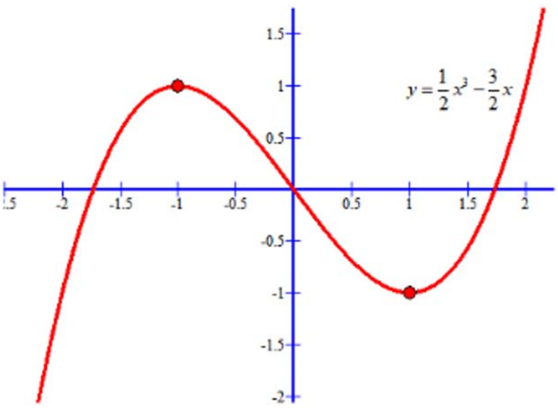
Corta al eje de ordenadas en (0, 0)

Comportamiento en el infinito: Cuando x tiende a $-\infty$, la función tiende a $-\infty$. Cuando x tiende a $+\infty$, la función tiende a $+\infty$.

Calculamos los extremos relativos:

$$y' = 1.5x^2 - 1.5 = 0 = (x^2 - 1)$$

Se anula en $x = 1$, y en $x = -1$. $f'(0) = -1.5 < 0$, por lo que en ese punto es decreciente. Es creciente para $x < -1$, decreciente en el intervalo $(-1, 1)$ y creciente para $x > 1$. $f(-1) = -(0.5 - 1.5) = 1$. Tiene un máximo en (–1, 1) y un mínimo en (1, –1).



Problema A.3:

3A- Una multinacional farmacéutica elabora un test para la detección precoz de la enfermedad producida por el virus del Ébola. El test da positivo en el 86% de las personas que son portadoras del virus y da negativo en el 92% de las personas que no son portadoras del virus. Además, en una cierta zona geográfica el 2% de la población es portadora del virus. Se elige al azar una persona de esa zona geográfica y se la somete al test. Calcula razonadamente la probabilidad de que sea portadora del virus sabiendo que el test ha dado positivo.

Solución:

Nombramos los sucesos: P = El test da positivo; V = Persona portadora del virus.

Los datos que nos dan son:

$P(P/V)$ = 0.86; $P(\bar{P}/\bar{V})$ = 0.92; $P(V)$ = 0.02.

Calculamos $P(\bar{V})$ = 1 – 0.02 = 0.98 y $P(P/\bar{V})$ = 1 – 0.92 = 0.08.

Nos piden $P(V/P)$

Usamos el teorema de la probabilidad total:

Enunciado del teorema de la probabilidad total

$$P(P) = P(P/V) \cdot P(V) + P(P/\bar{V}) \cdot P(\bar{V})$$

$P(P) = P(V) \cdot P(P/V) + P(\bar{V}) \cdot P(P/\bar{V})$ = 0.02 · 0.86 + 0.98 · 0.08 = 0.0956.

Mediante el teorema de Bayes calculamos $P(V/P)$

Enunciado del teorema de Bayes

$$P(V/P) = \frac{P(P/V) \cdot P(V)}{P(P)}$$

$P(V/P) = \frac{P(P/V) \cdot P(V)}{P(P)} = \frac{0.86 \cdot 0.02}{0.0956} = 0.17991632$

La probabilidad de que una persona elegida al azar en esa zona geográfica, sea portadora del virus, sabiendo que ha dado positivo es: $P(V/P) = 0.1799163 \cong \mathbf{0.18}$.

Problema A.4:

4A- Supongamos que tenemos una moneda de 2 euros trucada de manera que la probabilidad de que al lanzarla al aire salga cara es el triple de que salga cruz. Calcula razonadamente la probabilidad de que al lanzarla una vez al aire salga cruz.

Solución:

Nombramos al suceso: P = Probabilidad de cruz.

Los datos que nos dan son:

$P(C) + P(P) = 1$; $P(C) = 3\,P(P)$

Luego $P(P) = 1/4$.

La probabilidad de que salga cruz es $1/4$.

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal
LibrosMareaVerde.tk

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

1B- Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - (1-a^2)z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

Calcula razonadamente los valores del parámetro a para que el sistema tenga soluciones distintas de la solución trivial (0, 0, 0).

Solución:

En un sistema homogéneo. Para que tenga soluciones distintas de la trivial el rango de la matriz de los coeficientes debe ser 2, o lo que es lo mismo, el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser cero.

Consideramos la matriz: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -(1-\mathrm{a}^2) \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de C, y hallamos los valores de a para los que el determinante vale 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -(1-\mathrm{a}^2) \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 10(1-a^2) + 12 - (8(-(1-a^2) + 2 + 30) = 4 - 10 + 10\,a^2 + 12 + 8 - 8a^2 - 2 - 30 = 2a^2 - 18 = 0 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3.$$

Como tiene menores de orden 2 de determinante distinto de cero, sabemos que si a es distinto de 3 y de -3 el sistema homogéneo sólo tiene la solución trivial, y que si $a = \pm 3$, entonces sólo tiene la solución trivial.

El sistema tiene soluciones distintas de la trivial si $\boldsymbol{a} = 3$ o si $\boldsymbol{a} = -3$.

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal

Problema B.2:

2B- Un alumno asiste a una clase que dura 60 minutos. Se estima que la capacidad de atención de un alumno en cada instante de tiempo t viene dada por la función $f(t) = -2t^2 + 120t + 5$, con $t \in [0, 60]$.

a) Calcula la capacidad de atención cuando lleva una hora de clase. (**1 punto**)

b) Halla el instante de tiempo t (en minutos) en el que la capacidad de atención es máxima. ¿Cuál es la capacidad de atención máxima? (**2 puntos**)

Solución:

La función capacidad de atención es:

$$f(t) = -2t^2 + 120t + 5,\ t \in [0, 60].$$

a) Cuando lleva una hora de clase, $t = 60$:

$$f(60) = -2(60)^2 + 120(60) + 5 = 5 \text{ minutos}.$$

Al cabo de una hora de clase tiene una capacidad de atención de **5** minutos.

b) Para calcular la capacidad de atención máxima calculamos la derivada e igualamos a cero:

$$f'(t) = -4t + 120 = 0;\ t = 120/4 = 30.$$

Comprobamos con la derivada segunda si se trata de un máximo, un mínimo…

$$f''(t) = -4 < 0$$

por lo que, en efecto, es un máximo:

$$f(30) = -2(30)^2 + 120(30) + 5 = 1\,805 \text{ minutos} = 30 \text{ horas y } 5 \text{ minutos}.$$

La capacidad de atención a los 0 minutos y a los 60 minutos es de 5 minutos. La función es una parábola que crece y tiene su vértice en 30 minutos. Luego el punto (30, 1 805) es un máximo absoluto.

La capacidad de atención es máxima a los **30** minutos, siendo entonces de **1 805** minutos.

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.3:

3B- Se sabe que el tiempo de resolución de los exámenes propuestos por un profesor universitario sigue una distribución normal de media 74 minutos.
a) Si en el primer examen de este curso la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue 8 minutos, ¿cuál es la probabilidad de haber necesitado para resolver el examen más de los 90 minutos disponibles?
b) En el segundo examen la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue de 9 minutos. Si se presentaron 36 alumnos a este segundo examen, determina la probabilidad de que el tiempo medio de resolución de esos alumnos fuera inferior a 77 minutos.

Solución:

Considerando X = tiempo de resolución de exámenes

Los datos del enunciado son: La distribución es normal, de media $\mu = 74$.

a) $\sigma = 8;\ X = N(74, 8).$

Queremos calcular $P(X > 90)$, tipificamos y buscamos en la tabla:

$$P(X > 90) = P(Z > \frac{90-74}{8}) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

La probabilidad de haber necesitado más de 90 minutos es de 0.0228.

b) $\sigma = 9;\ n = 36.$

La distribución de la media poblacional es una normal: $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(74, \frac{9}{\sqrt{36}})$

Por tanto:

$$P(\bar{X} < 77) = P\left(Z < \frac{77-74}{\frac{9}{\sqrt{36}}} = \frac{(3)\cdot 6}{9}\right) = P(Z < 2) = 0.9772.$$

La probabilidad de que el tiempo medio sea inferior a 77 minutos es de 0.9772.

Problema B.4:

4B- Se consideran dos sucesos independientes A y B. Si la probabilidad de que ocurra A es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que ocurran ambos a la vez es $\frac{1}{3}$, calcula la probabilidad de que no ocurra A y no ocurra B.

Solución:

Los datos que nos dan son:

1) Los sucesos A y B son independientes.
2) $P(A) = 1/2$.
3) $P(A \cap B) = 1/3$.

Nos piden $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

Sabemos que:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$$

Calculamos los datos que nos faltan:

Sabemos que los sucesos son independientes, luego:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \tfrac{1}{2} \cdot P(B) \to \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2} \cdot P(B) \to P(B) = \tfrac{2}{3}.$$

Sustituimos:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

La probabilidad de que no ocurra A y no ocurra B es $1/6$.

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II
Selectividad 2019
Comunidad autónoma de Cataluña

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

http://universitats.gencat.cat/ca/pau/model_examens/

Revisores: Luis Carlos Vidal Del Campo

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat 2019

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. En un estudi de mercat, 500 participants han tastat tres cafès diferents, presentats com a producte A, producte B i producte C, i han escollit quin dels tres els ha agradat més. Sabem que el producte B ha estat escollit pel doble de persones que el producte A i que el producte B l'han escollit 32 persones més que els productes A i C junts. Calculeu quantes persones han escollit cada producte.
[2 punts]

2. Resoleu les qüestions següents:

a) Considereu la matriu $M=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu els valors de a i b per tal que es verifiqui la igualtat $M^2+a\cdot M+b\cdot I=\mathbf{0}$, en què I és la matriu identitat $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és la matriu nul·la.
[1 punt]

b) Considereu la matriu $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trobeu totes les matrius B que commuten amb la matriu A, és a dir, que compleixen que $A\cdot B=B\cdot A$.
[1 punt]

3. La gràfica de la funció $f(x)=ax+b+\dfrac{8}{x}$ passa pel punt $(-2,-6)$ i la recta tangent en aquest punt és paral·lela a l'eix de les abscisses.

a) Calculeu el valor de a.
[1 punt]

b) Calculeu el valor de b.
[1 punt]

4. La funció $f(x)=\dfrac{40}{x^2-22x+125}$ mostra aproximadament la venda diària, en milers d'unitats, d'un perfum de moda en funció de x, en què x és el dia del mes de febrer.

a) Quantes unitats de perfum es van vendre, aproximadament, el dia 5 de febrer? Quin és l'increment de vendes entre el dia 7 i el dia 9 de febrer?
[0,75 punts]

b) Quin dia del mes de febrer es van vendre més perfums i quantes unitats se'n van vendre?
[1,25 punts]

5. En una fàbrica es disposa de 80 kg d'acer i 120 kg d'alumini per a fabricar bicicletes de muntanya i de passeig, que es vendran a 200 € i 150 €, respectivament. Per a fabricar una bicicleta de muntanya són necessaris 1 kg d'acer i 3 kg d'alumini, i per a fabricar-ne una de passeig, 2 kg de cada un dels dos metalls.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió factible.
[1,25 punts]

b) Calculeu quantes bicicletes de cada tipus s'han de fabricar per a obtenir el màxim benefici i digueu quin és aquest benefici.
[0,75 punts]

6. Una botiga obre al públic des de les 10 hores fins a les 21 hores. Sabem que els ingressos per vendes, en funció de l'hora del dia, venen donats per la funció:

$$I(t) = -5(m-t)^2 + n,$$

per a $10 \le t \le 21$.

a) Trobeu el valor de m sabent que els ingressos màxims es produeixen a les 18 hores.
[1 punt]

b) Trobeu el valor de n sabent que a les 21 hores hi ha uns ingressos de 500 €.
[1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat 2019

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 4

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Considereu la funció $f(x) = 2x^3 + ax$. Calculeu el valor de la constant a per tal que aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$. Digueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim i doneu també el valor que pren la funció $f(x)$ en aquest punt.
[2 punts]

2. L'empresa d'esport d'aventura Xtrem prepara per a la darrera setmana de juny dos paquets: el paquet bàsic (PB) i el paquet súper (PS). El PB inclou una baixada de ràfting, una baixada fent barranquisme i un salt de pont, i té un preu de 50 €. D'altra banda, el PS inclou tres baixades de ràfting, dues fent barranquisme i un salt de pont, i el preu és de 120 €.

Per limitacions climàtiques i de personal, només es poden fer 12 baixades de ràfting, 9 fent barranquisme i 8 salts de pont.

Per a fer la promoció turística, es vol saber quina combinació de paquets proporciona més ingressos.

a) Trobeu les inequacions que han de complir totes les possibles combinacions de paquets. Dibuixeu la regió del pla en què es troben aquestes possibles solucions i trobeu la funció que dona els ingressos en funció del nombre de paquets de cada tipus.
[1,25 punts]

b) Trobeu el nombre de paquets de cada tipus que ha d'oferir l'empresa per a obtenir els ingressos màxims i digueu quins serien aquests ingressos.
[0,75 punts]

3. Un nutricionista, després de fer un estudi personalitzat a un pacient, li proposa una dieta. Segons el model del nutricionista, el pes en kilograms del pacient seguirà la funció

$$f(x)=\frac{63x+510}{x+6},$$

en què x denota el nombre de mesos que fa que segueix la dieta.

a) Justifiqueu que la funció f és estrictament decreixent quan $x \geq 0$.
[0,75 punts]

b) Determineu el pes inicial del pacient i quant pesarà al cap de dos mesos de seguir la dieta segons el model. Cap a quin valor tendirà el seu pes a llarg termini? Argumenteu si aquest valor límit s'assolirà en algun moment.
[1,25 punts]

4. Per la Festa Major, la pastisseria del poble elabora unes capses de bombons especials. La capsa petita conté 10 bombons, la mitjana té 15 bombons i la gran en té 25. Cada capsa va decorada amb un llaç commemoratiu. En total han utilitzat 210 llaços i 2.650 bombons. Tenint en compte que han elaborat el doble de capses petites que de mitjanes i grans juntes, quantes capses de cada tipus han elaborat?
[2 punts]

5. Un comerciant pot comprar articles a 350 € la unitat. Si els ven a 750 € la unitat, en ven 30. Sabem que la relació entre aquestes dues variables (el preu de venda i el nombre d'unitats venudes) és lineal i que, per cada descompte de 20 € en el preu de venda, incrementa les vendes en 3 unitats. Considerant que el comerciant només comprarà el nombre d'articles que sap que vendrà:

a) Escriviu la funció de beneficis a partir del nombre de vegades x que s'aplica el descompte.
[1 punt]

b) Determineu el preu de venda que fa màxims els beneficis del comerciant i justifiqueu que és un màxim. Determineu quantes unitats vendrà.
[1 punt]

6. En una oficina tenen tres proveïdors que els subministren el material. La matriu $\boldsymbol{P}$ ens dona els preus unitaris, en euros, de cada un dels articles $A1$, $A2$ i $A3$, segons els proveïdors $p1$, $p2$ i $p3$.

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Representem una comanda de x unitats de $A1$, y unitats de $A2$ i z unitats de $A3$ per un vector fila $C=(x\ y\ z)$.

a) Expliqueu què representen cadascun dels elements del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$.
[0,5 punts]

b) Si hem de comprar 25 unitats de $A1$, 10 de $A2$ i 15 de $A3$, quin dels tres proveïdors ens ofereix un millor preu per a tota la comanda? Quin és aquest preu?
[1,5 punts]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

SOLUCIONES SÈRIE 1

Problema 1.1:

1. En un estudi de mercat, 500 participants han tastat tres cafès diferents, presentats com a producte A, producte B i producte C, i han escollit quin dels tres els ha agradat més. Sabem que el producte B ha estat escollit pel doble de persones que el producte A i que el producte B l'han escollit 32 persones més que els productes A i C junts. Calculeu quantes persones han escollit cada producte. *[2 punts]*

Solución:

Con los datos del enunciado planteamos un sistema de ecuaciones.

Llamamos x al número de personas que ha escogido el producto A, y al B, y z al C.

$$\begin{cases} x+y+z=500 \\ y=2x \\ y=32+x+z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=500 \\ 2x-y=0 \\ x-y+z=-32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=500 \\ x-y+z=-32 \\ 2x-y=0 \end{cases}$$

Vamos a resolverlo por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 1 & -1 & 1 & -32 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 2 & 0 & 532 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 2 & 0 & 0 & 532 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 532 \end{array}\right)$$

Restamos a la primera fila, la segunda. Cambiamos de orden la primera columna por la segunda. Cambiamos de orden la tercera fila por la segunda. ¡Ya podemos resolver, teniendo cuidado cuáles son ahora cada una de las incógnitas!

$$\begin{cases} x+y+z=500 \\ 2x-y=0 \\ 2y=532 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=500-x-y=500-133-266=101 \\ y=2x=266 \rightarrow x=133 \\ y=266 \end{cases}$$

El producto A lo han escogido 133 personas, el B, 266, y el producto C, 101 personas.

Problema 1.2:

2. Resoleu les qüestions següents:

a) Considereu la matriu $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu els valors de a i b per tal que es verifiqui la igualtat $M^2 + a \cdot M + b \cdot I = 0$, en què I és la matriu identitat $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és la matriu nul·la. *[1 punt]*

b) Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trobeu totes les matrius B que commuten amb la matriu A, és a dir, que compleixen que $A \cdot B = B \cdot A$.

Solución:

a) Planteamos la ecuación matricial:

$$M^2 + a \cdot M + b \cdot I = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 14 + 2a + b & 5 + 5a \\ 2 + 2a & 11 - a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos cuatro ecuaciones y dos incógnitas. De la ecuación: $2 + 2a = 0$, obtenemos $a = -1$; sustituimos en: $11 - a + b = 0$ y obtenemos $b = -12$; Comprobamos que verifican la primera ecuación: $14 + 2a + b = 0 = 14 + 2(-1) - 12$.

$$\boldsymbol{a = -1; b = -12}$$

b) Planteamos ahora la ecuación:

$$A \cdot B = B \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z & r \\ x - z & y - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x - y \\ r & z - r \end{pmatrix}$$

Tenemos cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} z = y \\ r = x - y \\ r = x - z \\ y - r = z - r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = y \\ r = x - y \\ r = x - y \\ z - r = z - r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = y \\ r = x - y \end{cases}$$

Al sustituir el valor de z, observamos que la cuarta ecuación es una identidad, y que la segunda y la tercera son iguales, con lo que ahora tenemos dos ecuaciones y cuatro incógnitas. Todas las matrices B pedidas son de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x - y \end{pmatrix}$$

La matriz $B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{x - y} \end{pmatrix}$ conmutará con la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Problema 1.3:

3. La gràfica de la funció $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ passa pel punt (-2, -6) i la recta tangent en aquest punt és paral·lela a l'eix d'abscisses.
   a) Calculeu el valor de a. *[1 punt]*
   b) Calculeu el valor de b. *[1 punt]*

Solución:

De la función $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ nos dicen que:

1) pasa por el punto (-2, -6) y que

2) la recta tangente es paralela al eje de abscisas.

Imponemos 1) $f(-2) = -6 = a(-2) + b + \frac{8}{(-2)} = -2a + b - 4 \rightarrow -2 = -2a + b$.

a) Imponemos 2) $f(x) = ax + b + \frac{8}{x} \rightarrow f'(x) = a - \frac{8}{x^2} \rightarrow f'(-2) = 0 = a - \frac{8}{(-2)^2} = a - 2 \rightarrow$

$$a = 2$$

b) De 1) tenemos: $-2 = -2a + b \rightarrow -2 = -2(2) + b \rightarrow b = 4 - 2 = 2$.

$$\boldsymbol{a = 2} \text{ y } \boldsymbol{b = 2}$$

Problema 1.4:

4. La funció $f(x) = \frac{40}{x^2-22x+125}$ ens mostra aproximadament la venda diària, en milers d'unitats, d'un perfum de moda en funció de x, en què x és el dia del mes de febrer.

   a) Quantes unitats de perfum es van vendre, aproximadament, el dia 5 de febrer? Quin és l'increment de vendes entre el dia 7 i el dia 9 de febrer? *[0,75 punts.]*

   b) Quin dia del mes de febrer es van vendre més perfums i quantes unitat se'n van vendre? *[1,25 punts.]*

Solución:

a) Las unidades de venta vienen dadas por:

$$f(x) = \frac{40}{x^2 - 22x + 125}$$

El día 5 de febrero se venderán: $f(5) = \frac{40}{5^2-22\cdot 5+125} = \frac{40}{25-110+125} = \frac{40}{40} = 1$, es decir, mil unidades.

El incremento de ventas entre el 9 y el 7 es:

$$f(9) - f(7) = \frac{40}{9^2-22\cdot 9+125} - \frac{40}{7^2-22\cdot 7+125} = \frac{40}{206-198} - \frac{40}{174-154} = \frac{40}{8} - \frac{40}{20} = 5 - 2 = 3.$$

El incremento de ventas ha sido de 3 000 unidades.

El 5 de febrero se vendieron $1\ 000$ unidades y el incremento de ventas entre el 9 y el 7 ha sido de $3\ 000$ unidades.

b) Para estudiar el día de máximas ventas debemos utilizar la derivada primera:

$$f(x) = \frac{40}{x^2-22x+125} \to f'(x) = \frac{-40(2x-22)}{(x^2-22x+125)^2} = 0 \to 2x = 22 \to x = 11.$$

El 11 tenemos un posible máximo o mínimo. Para determinarlo podemos usar la derivada segunda o el signo de la derivada primera.

El denominador de la derivada primera es siempre positivo. El numerador $-40(2x-22)$ cambia de signo en 11. Para $x > 11$ el signo es negativo, luego la función es decreciente. Para $x < 11$ el signo es positivo, luego la función es creciente. Por tanto, para $x = 11$ tenemos un máximo.

$$f(11) = \frac{40}{11^2 - 22\cdot 11 + 125} = \frac{40}{121 - 242 + 125} = \frac{40}{246 - 242} = \frac{40}{4} = 10.$$

El día 11 de febrero es el día de máximas ventas que son $10\ 000$ unidades.

Problema A.5:

5. En una fàbrica es disposa de 80 kg d'acer i 120 kg d'alumini per fabricar bicicletes de muntanya i de passeig que es vendran a 200 € i 150 €, respectivament. Per a fabricar una bicicleta de muntanya són necessaris 1 kg d'acer i 3 kg d'alumini, i per a fabricar-ne una de passeig, 2 kg de cada un dels dos metalls.
   a) Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió factible. *[1,25 punts]*
   b) Calculeu quantes bicicletes de cada tipus s'han de fabricar per a obtenir el màxim benefici i digueu quin és aquest benefici. *[0,75 punts]*

Solución:

Llamamos x a las bicicletas de montaña e y a las de paseo.

a) Función objetivo: $f(x, y) = 200x + 150y$.

Restricciones:

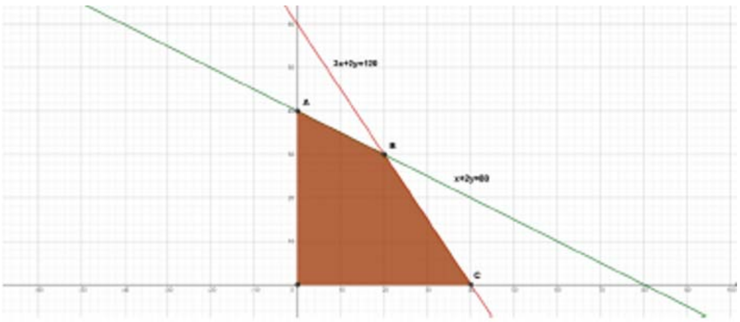
$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{cases}$$

Para dibujar la región factible buscamos los puntos de intersección de las rectas que lo limitan.

$$\begin{cases} x = 0;\ y = 0 \\ x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 120 \end{cases} \to \begin{cases} x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 120 \end{cases} \to B(20, 30); \to \begin{cases} x = 0; \\ x + 2y = 80 \to C(0, 40) \\ 3x + 2y = 120 \to E(0, 60) \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 80 \to (80, 0) \\ 3x + 2y = 120 \to A(40, 0) \end{cases}$$

Los vértices de la región factible son: $A(40, 0)$; $B(20, 30)$; $C(0, 40)$; $O(0, 0)$.



b) Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$A(40, 0)$: $f(40, 0) = 200(40) + 150(0) = 8\,000$.

$B(20, 30)$: $f(20, 30) = 200(20) + 150(30) = 4\,000 + 4\,500 = 8\,500$.

$C(0, 40)$: $f(0, 40) = 200(0) + 150(40) = 6\,000$.

$O(0, 0)$: $f(0, 0) = 200(0) + 150(0) = 0$.

El beneficio es máximo en el vértice $B(20, 30)$. Por lo tanto, se deben fabricar:

20 bicicletas de montaña y **30** de paseo para que el beneficio sea máximo, de **8 500** euros.

Problema A.6:

6. Una botiga obre al públic des de les 10 hores fins a les 21 hores. Se sap que els ingressos per vendes, en funció de l'hora del dia, venen donats per la funció:

$$I(t) = -5(m-t)^2 + n,$$

per a $10 \le t \le 21$

a) Trobeu el valor de m sabent que els ingressos màxims es produeixen a les 18 hores.
[1 punt]
b) Trobeu el valor de n sabent que a les 21 hores hi ha uns ingressos de 500 €.
[1 punt]

Solución:

La función, ingresos por las ventas, viene dada por:

$$I(t) = -5(m-t)^2 + n, 10 \le t \le 21.$$

a) Queremos que los beneficios sean máximos a las 18 horas. Para ello, debemos usar la derivada primera:

$$I(t) = -5(m-t)^2 + n \to I'(t) = -10(m-t)(-1) \to I'(18) = 10(m-18) = 0 \to m = 18.$$

$$\boldsymbol{m = 18.}$$

b) Nos dicen que los ingresos a las 21 horas son de 500 euros:

$$I(t) = -5(m-t)^2 + n \to I(21) = 500 = -5(m-21)^2 + n = -5(18-21)^2 + n = -45 + n.$$

Luego n es igual a 545.

$$I(t) = -5(18-t)^2 + 545, 10 \le t \le 21.$$

$$\boldsymbol{n = 545.}$$

SOLUCIONES SÈRIE 4

Problema B.1:

c) Considereu la funció $f(x) = 2x^3 + ax$. Calculeu el valor de la constant a per tal que aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$. Digueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim i doneu també el valor que pren la funció $f(x)$ en aquest punt. *[2 punts]*

Solución:

c) Para determinar que la función tenga un extremo relativo utilizamos la derivada primera:

$$f(x) = 2x^3 + ax \to f'(x) = 6x^2 + a \to f'(-1) = 0 = 6(-1)^2 + a = 6 + a \to a = -6$$

La función tendrá un extremo relativo en $x = -1$ si $a = -6$.

Para determinar si es un máximo o un mínimo podemos determinar el signo de la derivada primera cerca del punto, o utilizar la derivada segunda:

$$f(x) = 2x^3 - 6x \to f'(x) = 6x^2 - 6 \to f''(x) = 12x \to f''(-1) = -12 < 0$$

Como la derivada segunda en el punto es menor que cero, entonces es un máximo relativo.

Nos piden el valor de dicho máximo:

$$f(x) = 2x^3 - 6x \to f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) = -2 + 6 = 4.$$

$\boldsymbol{a = -6}$; El punto $\boldsymbol{(-1,\ 4)}$ es un máximo relativo.

Autor: Autor: Andrés García Mirantes
www.apuntesmareaverde.org.es
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.2:

L'empresa d'esport d'aventura Xtrem prepara per a la darrera setmana de juny dos paquets: el paquet bàsic (PB) i el paquet súper (PS). El PB inclou una baixada de ràfting, una baixada fent barranquisme i un salt de pont, i té un preu de 50€. D'altra banda, el PS inclou tres baixades de ràfting, dues fent barranquisme i un salt de pont, i el preu és de 120€.
Per limitacions climàtiques i de personal, només es poden fer 12 baixades de ràfting, 9 fent barranquisme i 8 salts de pont.
Per a fer la promoció turística, es vol saber quina combinació de paquets proporciona més ingressos.

a) Trobeu les inequacions que han de complir totes les possibles combinacions de paquets. Dibuixeu la regió del pla en què es troben aquestes possibles solucions i trobeu la funció que dona els ingressos en funció del nombre de paquets de cada tipus. *[1,25 punts]*

b) Trobeu el nombre de paquets de cada tipus que ha d'oferir l'empresa per a obtenir els ingressos màxims i digueu quins serien aquests ingressos. *[0,75 punts]*

Solución:

a) Escribimos la función objetivo y las restricciones. Llamamos r a las bajadas de rafting, b a barranquismo y p a los saltos de puente. Llamamos x a los paquetes básicos PB, e y a los paquetes super:

Función beneficio: $B(x,y) = 50x + 120y$

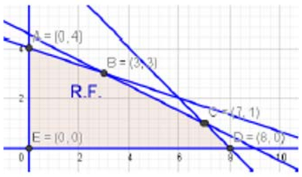
$$0 \le r \le 12;\ 0 \le b \le 9;\ 0 \le p \le 8$$

Restricciones:

$$\begin{cases} x + 3y \le 12 \\ x + 2y \le 9 : x \ge 0;\ y \ge 0 \\ x + y \le 8 \end{cases}$$

Hallamos los vértices de la región

$$\begin{cases} x = 0: x + 3y = 12 \to y = 4;\ x + 2y = 9 \to y = 4.5;\ x + y = 8 \to y = 4 \to A(0,4) \\ x + 3y = 12;\ x + 2y = 9 \to B(3,3);\ x + 2y = 9;\ x + y = 8 \to y = 1, x = 7 \to C(7,1) \\ y = 0: x + 3y = 12 \to x = 12; x + 2y = 9 \to x = 9;\ x + y = 8 \to x = 8 \to D(8,0);\ E(0,0) \end{cases}$$



b) Calculamos la función beneficio en cada uno de los vértices:

$A(0,4) \to B(0,4) = 50(0) + 120(4) = 480;$

$B(3,3) \to B(3,3) = 50(3) + 120(3) = 150 + 360 = 510;$

$C(7,1) \to B(7,1) = 50(7) + 120(1) = 350 + 120 = 470;$

$D(8,0) \to B(8,0) = 50(8) + 120(0) = 400 = 400;$

Se obtiene el máximo beneficio, 510 euros, si se ofrecen 3 paquetes de cada tipo.

Problema B.3:

3 Un nutricionista, després de fer un estudi personalitzat a un pacient, li proposa una dieta. Segons el model del nutricionista, el pes en kilograms del pacient seguirà la funció

$$f(x) = \frac{63x+510}{x+6},$$

en què x denota el nombre de mesos que fa que segueix la dieta.

a) Justifiqueu que la funció f és estrictament decreixent quan $x \geq 0$. *[0,75 punts]*

b) Determineu el pes inicial del pacient i quant pesarà al cap de dos mesos de seguir la dieta segons el model. Cap a quin valor tendirà el seu pes a llarg termini? Argumenteu si aquest valor límit s'assolirà en algun moment. *[1,25 punts]*

Solución:

a) La función peso según el número de meses viene dada por:

$$f(x) = \frac{63x+510}{x+6}$$

Para estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función analizamos el signo de la derivada primera:

$$f(x) = \frac{63x+510}{x+6} \to f'(x) = \frac{63(x+6)-(63x+510)1}{(x+6)^2} = \frac{378-510}{(x+6)^2} = \frac{-132}{(x+6)^2} < 0$$

El denominador es siempre positivo, y el numerador siempre negativo, luego la función es siempre decreciente.

b) El peso inicial del paciente es el peso en el mes cero:

$$f(x) = \frac{63x+510}{x+6} \to f(0) = \frac{63(0)+510}{0+6} = \frac{510}{6} = 85$$

El peso inicial del paciente es de 85 kilogramos.

Al cabo de dos meses pesará:

$$f(x) = \frac{63x+510}{x+6} \to f(2) = \frac{63(2)+510}{2+6} = \frac{636}{8} = 79.5$$

Pesará 79.5 kilogramos.

Aunque la función sea decreciente existe un valor límite del que no se bajará de peso. Vamos a calcularlo.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{63x+510}{x+6} = 63$$

Nunca pesará 63 kilogramos, ni menos que 63 kilogramos, por muchos meses que haga dieta.

El peso inicial del paciente es de **85** kg, al cabo de dos meses pesará **79.5** kg. Nunca llegará a pesar **63** kg.

Problema B.4:

4 Per la Festa Major, la pastisseria del poble elabora unes capses de bombons especials. La capsa petita conté 10 bombons, la mitjana té 15 bombons i la gran en té 25. Cada capsa va decorada amb una llaç commemoratiu. En total han utilitzat 210 llaços i 2.650 bombons. Tenint en compte que han elaborat el doble de capses petites que de mitjanes i grans juntes, quantes capses de cada tipus han elaborat? *[2 punts]*

Solución:

Planteamos un sistema de ecuaciones con los datos del enunciado.

Llamamos x al número de cajas pequeñas que se elaboran, y al de medianas y z al de grandes.

$$\begin{cases} x+y+z=210 \\ 10x+15y+25z=2650 \\ x=2(y+z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=210 \\ 2x+3y+5z=530 \\ x-2y-2z=0 \end{cases}$$

Hemos dividido por 5 la segunda ecuación, y pasado las incógnitas al primer miembro en la tercera.

Para resolverlo usamos el Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 2 & 3 & 5 & 530 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & 1 & 3 & 110 \\ 0 & 3 & 3 & 210 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & 1 & 3 & 110 \\ 0 & 0 & 6 & 120 \end{array}\right)$$

Hemos restado a la segunda fila, la primera multiplicada por 2. Hemos restado a la primera fila, la tercera. Hemos restado a la tercera, la segunda multiplicada por 3.

Nos queda el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=210 \\ y+3z=110 \\ 6z=120 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=210 \rightarrow x=210-50-20=140 \\ y+3(20)=110 \rightarrow y=110-60=50 \\ z=20 \end{cases}$$

Se elaboran **140** cajas pequeñas, **50** medianas y **20** grandes.

Problema B.5:

5 Un comerciant pot comprar articles a 350 € la unitat. Si els ven a 750 € la unitat, en ven 30. Sabem que la relació entre aquestes dues variables (el preu de venda i el nombre d'unitats venudes) és lineal i que, per cada descompte de 20 € en el preu de venda, incrementa les vendes en 3 unitats. Considerant que el comerciant només comprarà el nombre d'articles que sap que vendrà:

a) Escriviu la funció de beneficis a partir del nombre de vegades x que s'aplica el descompte. *[1 punt]*

b) Determineu el preu de venda que fa màxims els beneficis del comerciant i justifiqueu que és un màxim. Determineu quantes unitats vendrà. *[1 punt]*

Solución:

Llamamos x al número de veces que el comerciante aplica el descuento.

a) Cada unidad vendida a 750 euros y comprada a 350 euros, gana 750 – 350 = 400 euros. Entonces vende 30 unidades. Si hace un descuento de 20 euros en cada unidad, incrementa la venta en 3 unidades. La relación entre el precio de venta y el número de unidades es lineal: 30 + 3x. Por tanto:

La función beneficio es:

$$\boldsymbol{f(x) = (400 - 20x)(30 + 3x) = -60x^2 + 1200x - 600x + 12000 = -60x^2 + 600x + 12000}$$

b) Debemos determinar los máximos beneficios usando la derivada primera, e igualándola a cero:

$$f'(x) = -120x + 600 = 0 \rightarrow x = \frac{600}{120} = 5$$

Para determinar si es un máximo o un mínimo, hallamos la derivada segunda:

$$f''(x) = -120 < 0$$

Es menor que cero en todos los puntos, luego es un máximo.

Determinamos con ese precio de venta cuál es el beneficio:

$$f(x) = -60x^2 + 600x + 12000 \rightarrow f(5) = -60(5)^2 + 600(5) + 12000 = 13500$$

El precio de venta es: 700 – 20(5) = 600.

Cada mes el comerciante venderá: 30 + 3(5) = 45 unidades.

Precio de venta: **600** euros. Venderá **45** unidades.

Problema B.6:

6. En una oficina tenen tres proveïdors que els subministren el material. La matriu P ens dona els preus unitaris, en euros, de cada un dels articles $A1$, $A2$ i $A3$, segons els proveïdor $p1$, $p2$ i $p3$.

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}.$$

Representem una comanda de x unitats de $A1$, y unitats de $A2$ i z unitats de $A3$ per un vector fila $C = (x\ y\ z)$.

a) Expliqueu què representen cadascun dels elements del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$. *[0,5 punts]*

b) Si hem de comprar 25 unitats de $A1$, 10 de $A2$ i 15 de $A3$, quin dels tres proveïdors ens ofereix un millor preu per tota la comanda? Quin és aquest preu? *[1,5 punts]*

Solución:

a) Nos dicen que $C(x, y, z)$, y que $P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$.

$$C \cdot P = (x, y, z)\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Indica los pedidos de cada artículo multiplicado por su precio, según cada uno de los proveedores.

b) $C \cdot P = (x, y, z)\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix} = (25, 10, 15)\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix} = (430 \quad 415 \quad 410)$

El precio del pedido del proveedor p1 es de 430 euros, el de p2 de 415 euros y el de p3 de 410 euros.

El mejor precio es 410 euros, el del proveedor $\mathrm{p3}$.

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat 2019

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Volem enviar una data codificada. Per a fer-ho, considerem el vector de tres components $X = (d\ m\ a)$, en el qual d expressa el dia, m el mes i a l'any. Tot seguit, fem l'operació $X \cdot A + B$, en què A i B són les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B = (5\ \ -5\ \ 5).$$

El resultat d'aquesta operació és el vector codificat que enviem.

a) Si la data que volem enviar és l'1 de gener de 2019, és a dir, si $X = (1\ \ 1\ \ 2019)$, quin és el vector codificat que enviarem? [0,75 punts]

b) Si el vector codificat que ens ha arribat és $(2036\ \ 1\ \ -13)$, quina és la data sense codificar? [1,25 punts]

2. Per a la campanya d'aquest estiu, una botiga d'esports que ven patinets elèctrics espera vendre 40 patinets a un preu de 1.000 € per patinet. Segons un estudi de mercat, la relació entre el nombre de vegades que es rebaixa el preu del patinet en 50 € i el nombre de patinets venuts és lineal, i, per cada 50 € de rebaixa en el preu de venda de cada patinet, hi haurà un increment de les vendes de 10 patinets més.

a) Escriviu la funció d'ingressos de la botiga en funció del nombre de vegades que rebaixi en 50 € el preu inicial de 1.000 € del patinet. [1 punt]

b) Trobeu quin ha de ser el preu del patinet per tal d'obtenir els ingressos màxims. Trobeu també el nombre de patinets que es vendran i els ingressos que s'obtindran amb aquest preu. [1 punt]

3. Es preveu un canvi important en la població d'una determinada zona per qüestions mediambientals. El nombre d'habitants de la zona, en milions, vindrà donat per la funció $P(t) = \dfrac{t^2+28}{(t+2)^2}$, en què t mesura el temps en anys des del moment actual ($t = 0$).

a) Digueu quin és el nombre d'habitants de la zona actualment i quin serà aquest nombre a molt llarg termini. [1 punt]

b) En quin moment s'arribarà al nombre mínim d'habitants? Quants habitants hi haurà en aquell moment? Quin és el nombre màxim d'habitants que s'assoleix en aquesta zona? [1 punt]

4. En tres sortejos consecutius de la Lotto 6/49 hi ha hagut 51 persones que han encertat els 6 números de la combinació guanyadora en algun dels tres sortejos. El nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el tercer sorteig és la meitat del total de persones que la van encertar en els dos primers sortejos junts. També sabem que el nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el primer sorteig supera en 11 el total de persones que van encertar-la en el segon i en el tercer sortejos junts. Amb aquestes dades, calculeu quantes persones van encertar la combinació guanyadora de la Lotto 6/49 en cada un dels tres sortejos. [2 punts]

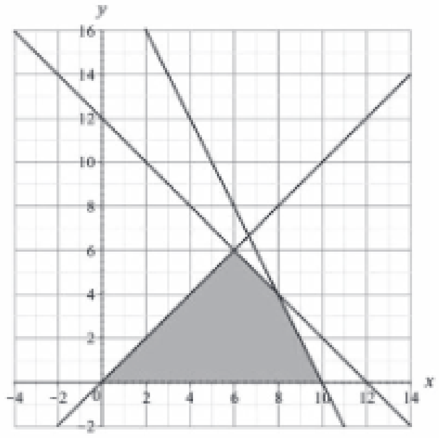
5. Considereu una funció $f(x)$ que té com a primera derivada $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$, en què b és un paràmetre real.

a) Determineu el valor de b perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en $x = -1$ i raoneu si es tracta d'un màxim o d'un mínim. [1 punt]

b) Si sabem que la gràfica de la funció $f(x)$ passa pel punt (0, 3), trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en aquest punt. [1 punt]

6. Un forn artesà fa dos tipus de panets, els integrals i els de cereals. En l'elaboració, a més a més de la farina corresponent, es fa servir llevat de massa mare i aigua. La quantitat de llevat de massa mare i d'aigua que s'utilitza en l'elaboració de cada panet depèn de si es tracta d'un panet integral o de cereals.

Volem saber quants panets de cada tipus es poden fer. Després de comprovar la quantitat de massa mare i d'aigua de què es disposa, i tenint en compte que la quantitat de panets de cereals no pot superar la de panets integrals, s'obté la regió següent amb totes les possibilitats.



En el gràfic, l'eix de les x representa el nombre de panets integrals, i el de les y, el nombre de panets de cereals.

a) Escriviu les inequacions que donen lloc a aquesta regió factible. [1 punt]

b) Si els panets integrals es venen a 8 € cada unitat i els de cereals a 10 €, quants panets de cada tipus cal vendre per a obtenir els màxims ingressos? Quins són aquests màxims ingressos? [1 punt]

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Problema 1.1:

1. Volem enviar una data codificada. Per a fer-ho, considerem el vector de tres components $X = (d \ \ m \ \ a)$, en el qual d expressa el dia, m el mes i a l'any. Tot seguit, fem l'operació $X \cdot A + B$, en què A i B són les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

El resultat d'aquesta operació és el vector codificat que enviem.

a) Si la data que volem enviar és l'1 de gener de 2019, és a dir, si $X = (1 \ 1 \ 2019)$, quin és el vector codificat que enviarem? [0,75 punts]

b) Si el vector codificat que ens ha arribat és $(2036 \ 1 \ -13)$, quina és la data sense codificar? [1,25 punts]

Solución:

a) Debemos hacer la operación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2019 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2020 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2025 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Debemos enviar $\mathbf{\begin{pmatrix} 2025 & -4 & 3 \end{pmatrix}}$

b) La situación ahora es:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2036 & 1 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2031 & 6 & -18 \end{pmatrix}$$

Podemos plantear el sistema de ecuaciones, o calcular la matriz inversa de A, que existe, ya que su determinante es distinto de cero, es 1.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2131 & 6 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2031 & 6 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2019 \end{pmatrix}$$

La fecha que queremos trasmitir es **6 de junio de 2019**.

Problema 1.2:

2. Per a la campanya d'aquest estiu, una botiga d'esports que ven patinets elèctrics espera vendre 40 patinets a un preu de 1.000 € per patinet. Segons un estudi de mercat, la relació entre el nombre de vegades que es rebaixa el preu del patinet en 50 € i el nombre de patinets venuts és lineal, i, per cada 50 € de rebaixa en el preu de venda de cada patinet, hi haurà un increment de les vendes de 10 patinets més.

a) Escriviu la funció d'ingressos de la botiga en funció del nombre de vegades que rebaixi en 50 € el preu inicial de 1.000 € del patinet. [1 punt]

b) Trobeu quin ha de ser el preu del patinet per tal d'obtenir els ingressos màxims. Trobeu també el nombre de patinets que es vendran i els ingressos que s'obtindran amb aquest preu. [1 punt]

Solución:

a) Llamamos x al número de veces que se rebaja el precio del patinete. Nos dicen que según un estudio de mercado la relación es lineal entre el número de veces que se rebaja el precio y el número de patinetes vendidos. Y por cada 50 euros de rebaja en el precio se incrementan las ventas en 10 patinetes más. La función ingresos de la tienda es el número de patinetes vendidos $(40 + 10x)$ multiplicado por el precio de cada patinete $(1000 - 50x)$.

$$\boldsymbol{I(x) = (40 + 10x)(1000 - 50x)}$$

b) Para calcular los ingresos máximos, usamos la derivada de la función ingresos:

$$I(x) = (40 + 10x)(1000 - 50x) = 40000 - 2000x + 10000x - 500x^2$$
$$= 40000 + 8000x - 500x^2 \rightarrow I'(x) = 8000 - 1000x = 0 \rightarrow x = \frac{8000}{1000} = 8.$$

Para determinar si es un máximo o un mínimo calculamos la derivada segunda:

$$I''(x) = -1000 \rightarrow I''(8) = -1000 < 0$$

Es siempre menor que cero, luego es un máximo.

Precio del patinete: $1000 - 50x = 1000 - 50(8) = \mathbf{600}$ euros.

Se venderán 8 patinetes.

El beneficio obtenido:

$$I(x) = (40 + 10x)(1000 - 50x) \rightarrow I(8) = (40 + 10(8))(1000 - 50(8)) = (120)(600) = 72000$$

Se obtendrá un beneficio de $72\,000$ euros.

Problema 1.3:

3. Es preveu un canvi important en la població d'una determinada zona per qüestions mediambientals. El nombre d'habitants de la zona, en milions, vindrà donat per la funció $P(t) = \frac{t^2+28}{(t+2)^2}$, en què t mesura el temps en anys des del moment actual ($t = 0$).

a) Digueu quin és el nombre d'habitants de la zona actualment i quin serà aquest nombre a molt llarg termini. [1 punt]

b) En quin moment s'arribarà al nombre mínim d'habitants? Quants habitants hi haurà en aquell moment? Quin és el nombre màxim d'habitants que s'assoleix en aquesta zona? [1 punt]

Solución:

a) El número de habitantes viene dado por la función:

$$P(t) = \frac{t^2+28}{(t+2)^2}$$

En el momento actual, $t = 0$, luego:

$$P(t) = \frac{t^2+28}{(t+2)^2} \to P(0) = \frac{(0)^2+28}{((0)+2)^2} = \frac{28}{4} = 7$$

Actualmente hay **7 millones** de habitantes.

Calculamos ahora el límite cuando el tiempo tiende a infinito.

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2+28}{(t+2)^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

La población tenderá al millón de habitantes.

b) Para calcular máximos y mínimos usamos la derivada primera:

$$P(t) = \frac{t^2+28}{(t+2)^2} \to P'(t) = \frac{2t(t+2)^2-(t^2+28)2(t+2)}{(t+2)^4} = \frac{2t(t+2)-2(t^2+28)}{(t+2)^3} = \frac{4(t-14)}{(t+2)^3}$$
$$= 0 \to t = 14$$

Si $t > -2$ el denominador es positivo. Si $t > 14$ la derivada primera es positiva, y si menor, es negativa, por lo que la función pasa en 14 de decreciente a creciente, luego en 14 hay un mínimo.

La población irá decreciendo hasta dentro de 14 años, cuando habrá $P(14) = \frac{(14)^2+28}{(14+2)^2} = 0.875$.

Dentro de **14** años habrá **875 000** habitantes.

Para determinar el máximo, sólo puede estar en los extremos del intervalo. Ya hemos visto que en + infinito vale 1 millón de habitantes, y que en el instante inicial vale 7 millones, luego es ahora cuando tiene el mayor número de habitantes.

El número máximo de habitantes es de 7 millones y se alcanza en el momento actual.

Problema 1.4:

4. En tres sortejos consecutius de la Lotto 6/49 hi ha hagut 51 persones que han encertat els 6 números de la combinació guanyadora en algun dels tres sortejos. El nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el tercer sorteig és la meitat del total de persones que la van encertar en els dos primers sortejos junts. També sabem que el nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el primer sorteig supera en 11 el total de persones que van encertar-la en el segon i en el tercer sortejos junts. Amb aquestes dades, calculeu quantes persones van encertar la combinació guanyadora de la Lotto 6/49 en cada un dels tres sortejos. [2 punts]

Solución:

Llamamos x al número de personas que han acertado la combinación ganadora en el primer sorteo, y al que lo han acertado en el segundo, y z al número de personas acertantes en el tercer sorteo.

Escribimos en forma de ecuaciones lo que nos dice el enunciado:

$$\begin{cases} x+y+z=51 \\ 2z=x+y \\ x=11+y+z \end{cases} \to \begin{cases} x+y+z=51 \\ x+y-2z=0 \\ x-y-z=11 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51 \\ 0 & 0 & 3 & 51 \\ 0 & 2 & 2 & 40 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51 \\ 0 & 2 & 2 & 40 \\ 0 & 0 & 3 & 51 \end{array}\right)$$

Hemos restado a la primera fila, la segunda. Hemos restado a la primera fila, la tercera. Intercambiamos la segunda fila con la tercera.

Y obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=51 \\ 2y+2z=40 \\ 3z=51 \end{cases} \to \begin{cases} x+y+z=51 \\ y+z=20 \\ z=17 \end{cases} \to \begin{cases} x+3+17=51 \to x=31 \\ y+17=20 \to y=3 \\ z=17 \end{cases}$$

En el primer sorteo han acertado **31** personas, **3** en el segundo, y **17** en el tercero.

Problema 1.5:

5. Considereu una funció $f(x)$ que té com a primera derivada $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$, en què b és un paràmetre real.
   a) Determineu el valor de b perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en $x = -1$ i raoneu si es tracta d'un màxim o d'un mínim. [1 punt]
   b) Si sabem que la gràfica de la funció $f(x)$ passa pel punt $(0, 3)$, trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en aquest punt. [1 punt]

Solución:

a) Sabemos que:

$$f'(x) = 2x^2 + bx + 4$$

Nos dicen que en $x = -1$ hay un extremo relativo, luego en dicho punto se debe anular la derivada primera:

$$f'(-1) = 2(-1)^2 + b(-1) + 4 = 2 - b + 4 = 6 - b = 0 \rightarrow b = 6$$

Por lo que b debe ser igual a 6.

$$\boldsymbol{b = 6}$$

Para saber si se trata de un máximo o un mínimo, hallamos la derivada segunda:

$$f'(x) = 2x^2 + 6x + 4 \rightarrow f''(x) = 4x + 6 \rightarrow f''(-1) = 4(-1) + 6 = 2 > 0$$

Como es mayor que cero, el extremo relativo es un mínimo.

En $x = -1$ hay un mínimo.

b) Para calcular la ecuación de la recta tangente conocemos un punto (0, 3), y debemos calcular la pendiente. Sabemos que $f'(x) = 2x^2 + 6x + 4$, luego la pendiente en (0, 3) es:

$$f'(x) = 2x^2 + 6x + 4 \rightarrow f'(0) = 4.$$

La ecuación de la recta tangente es:

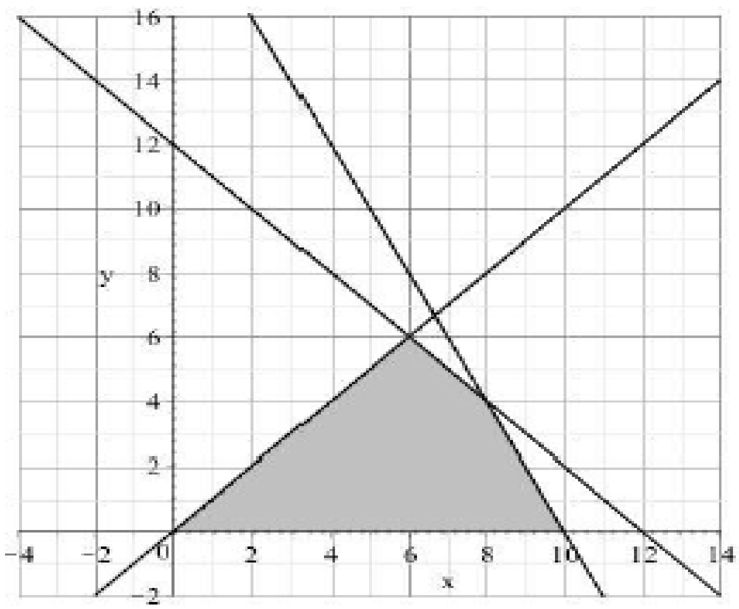
$$y - 3 = 4(x - 0) \rightarrow y = 3 + 4x$$

Recta tangente: $\boldsymbol{y = 3 + 4x}$

Problema 1.6:

6. Un forn artesà fa dos tipus de panets, els integrals i els de cereals. En l'elaboració, a més a més de la farina corresponent, es fa servir llevat de massa mare i aigua. La quantitat de llevat de massa mare i d'aigua que s'utilitza en l'elaboració de cada panet depèn de si es tracta d'un panet integral o de cereals.

Volem saber quants panets de cada tipus es poden fer. Després de comprovar la quantitat de massa mare i d'aigua de què es disposa, i tenint en compte que la quantitat de panets de cereals no pot superar la de panets integrals, s'obté la regió següent amb totes les possibilitats.



En el gràfic, l'eix de les x representa el nombre de panets integrals, i el de les y, el nombre de panets de cereals.

a) Escriviu les inequacions que donen lloc a aquesta regió factible. [1 punt]

b) Si els panets integrals es venen a 8 € cada unitat i els de cereals a 10 €, quants panets de cada tipus cal vendre per a obtenir els màxims ingressos? Quins són aquests màxims ingressos? [1 punt]

Solución:

a) Nos dicen que x es el número de panes integrales e y el de panes de cereales.

Además de los ejes coordenados tenemos tres rectas.

Una pasa por el origen de coordenadas (0, 0) y por (6, 6), luego es la recta $y = x$.

Otra pasa por el punto (0, 12) y por (12, 0), luego es: $y = 12 + mx \rightarrow\ y = 12 - x$.

La tercera pasa por el punto (10, 0), por (8, 4), por (6, 8) …:

$$y = b + mx \rightarrow 0 = b + 10m \rightarrow 4 = b + 8m$$

Restando: $-4 = 2m \rightarrow m = \frac{-4}{2} = -2 \rightarrow b = -10m = 20 \rightarrow y = 20 - 2x.$

Ahora sólo nos queda determinar el signo de las regiones:

Las ecuaciones de la región factible son:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0;\ y \leq x \\ y \leq 12 - x \\ y \leq 20 - 2x \end{cases}$$

b) Escribimos la función objetivo. Los ingresos obtenidos son:

$$I(x, y) = 8x + 10y$$

Los vértices de la región factible, según la gráfica, son: A(0, 0); B(6, 6); C(8, 4); D(10, 0). Calculamos la función objetivo en cada uno de los vértices:

A(0, 0): $I(0,0) = 8(0) + 10(0) = 0$

B(6, 6): $I(6,6) = 8(6) + 10(6) = 48 + 60 = 108$

C(8, 4): $I(8,4) = 8(8) + 10(4) = 64 + 40 = 104$

D(10, 0): $I(10,0) = 8(10) + 10(0) = 80$

Los máximos ingresos se obtienen vendiendo **6** panes integrales y **6** panes de cereales.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

EBAU 2019

Comunidad autónoma de

Extremadura

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II — Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.
Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.
Problema 1: de 0 a 3.5 puntos; Problema 2: de 0 a 3 puntos; Problema 3: de 0 a 3.5 puntos.

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Una tienda de electrodomésticos desea adquirir, para su venta posterior, dos tipos de cocinas: vitrocerámicas y de inducción, disponiendo para ello de 3000 euros. Cada cocina vitrocerámica le cuesta 100 euros y cada cocina de inducción 200 euros. El almacén solo tiene espacio para un total de 20 cocinas. El beneficio obtenido por cada vitrocerámica es del 30 % de su precio de coste y el beneficio de cada cocina de inducción es del 25 % también sobre su precio de coste. Además, por razones de mercado el número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12. Se pide determinar, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántas cocinas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio? **(3 puntos)**
(b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo? **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 2

Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en m^3/s) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \quad (0 \le t \le 6)$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las horas de máximo y mínimo caudal. **(1.5 puntos)**

(b) Calcular dichos valores máximo y mínimo. **(0.5 puntos)**

(c) Hallar el valor del área encerrada por la función $C(t)$ y el eje OX entre los valores $t = 3$ y $t = 5$. **(1 punto)**

PROBLEMA 3

En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un pino elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**

(c) Si se selecciona un árbol al azar y está infectado por la oruga, ¿cuál es la probabilidad de que sea un pino? **(1.5 puntos)**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II — Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar para qué valor del parámetro x no existe $(A \cdot B)^{-1}$. **(2 puntos)**

(b) Hallar la matriz inversa de $A \cdot B$ para $x = 1$. **(1.5 puntos)**

PROBLEMA 2

El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 2 y 8 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 3 + Ax & \text{si } 2 \le x \le 5 \\ 53 + 2x + Bx^2 & \text{si } 5 < x \le 8 \end{cases}$$

siendo $F(x)$ la facturación de la empresa en bolsa (en miles de euros) y x el precio de la acción (en euros). Se sabe que para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros y que la función es continua. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las constantes A y B. **(2 puntos)**

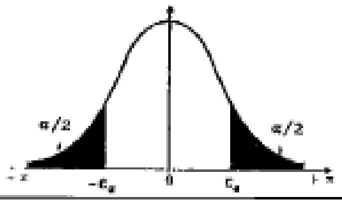
(b) Calcular las asíntotas verticales de la función $F(x)/(x^2 - 3x - 4)$ en el intervalo $[2, 5]$. **(1 punto)**

PROBLEMA 3

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono sigue una distribución normal con desviación típica 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad. **(2.5 puntos)**

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 5? **(1 punto)**



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

Una tienda de electrodomésticos desea adquirir, para su venta posterior, dos tipos de cocinas: vitrocerámicas y de inducción, disponiendo para ello de 3000 euros. Cada cocina vitrocerámica cuesta 100 euros y cada cocina de inducción 200 euros. El almacén solo tiene espacio para un total de 20 cocinas. El beneficio obtenido por cada vitrocerámica es del 30% de su precio de coste y el beneficio de cada cocina de inducción es del 25% también sobre su precio de coste. Además, por razones de mercado el número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12. Se pide determinar, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántas cocinas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?

(b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo?

Solución:

Se trata de un problema de programación lineal con dos variables.

Completemos la tabla:

Tipo de cocina	Coste (€)	Almacén	Beneficio (€)
Vitrocerámica (x unidades)	100	-	30% de 100 = 30
Inducción (y unidades)	200	≤ 12	25% de 200 = 50
¿De cuánto disponemos?	3000	20	-

Si traducimos a ecuaciones dichas restricciones obtenemos este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ y \leq 12 \\ x + y \leq 20 \\ 100x + 200y \leq 3000 \quad (x + 2y \leq 30) \end{cases}$$

Por otro lado, la función objetivo es la siguiente: Beneficio: $30x + 50y = B(x, y)$

Representamos la región que define este sistema de ecuaciones:

Para obtener los vértices resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \mathrm{A}(0,0) \qquad \mathrm{B)} \begin{cases} x + y = 20 \\ \quad y = 0 \end{cases} \rightarrow \mathrm{B}(20,0) \qquad \mathrm{C)} \begin{cases} x + y = 20 \\ x + 2y = 30 \end{cases} \rightarrow \mathrm{C}(10,10)$$

$$D \begin{cases} x + 2y = 30 \\ \quad y = 12 \end{cases} \rightarrow \mathrm{D}(6,12) \qquad \mathrm{E)} \begin{cases} x = 0 \\ y = 12 \end{cases} \rightarrow \mathrm{E}(0,12)$$

Los vértices de la región son: A(0, 0), B(20, 0), C(10, 10), D(6, 12) y E(0, 12).

Calculemos para cada vértice el valor de la ganancia: $\boldsymbol{B(x, y) = 30x + 50y}$

- $B(0, 0) = 30 \cdot 0 + 50 \cdot 0 = 0$
- $B(20, 0) = 30 \cdot 20 + 50 \cdot 0 = 600$
- $B(10, 10) = 30 \cdot 10 + 50 \cdot 10 = 800$
- $B(6, 12) = 30 \cdot 6 + 50 \cdot 12 = 780$
- $B(0, 12) = 30 \cdot 0 + 50 \cdot 12 = 600$

a) Por tanto, para obtener el máximo beneficio deberá adquirir **10 cocinas vitrocerámicas y 10 cocinas de inducción.**

b) El beneficio máximo tiene un valor de **800 euros.**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.2:

Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en m^3/s) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \qquad (0 \le t \le 6)$$

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las horas de máximo y mínimo caudal.

(b) Calcular dichos valores máximo y mínimo.

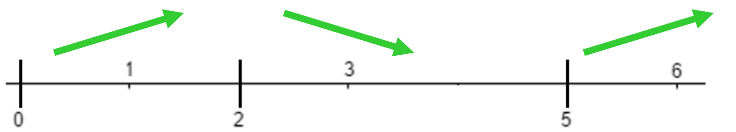
(c) Hallar el valor del área encerrada por la función $C(t)$ y el eje OX entre los valores $t = 3$ y $t = 5$.

Solución:

Vamos a estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función igualando su derivada a 0:

$$C'(t) = 0 = 6t^2 - 42t + 60 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 10 = 0$$

Resolviendo dicha ecuación obtenemos los valores críticos $t = 5$ y $t = 2$. Representamos estos valores en la recta real y vemos qué ocurre con el crecimiento y decrecimiento de la función para los tres intervalos que surgen:



$C'(1) > 0$ $C'(3) < 0$ $C'(6) > 0$

Por tanto, podemos afirmar que para $t = 2$ la función presenta un máximo relativo y para $t = 5$ la función presenta un mínimo relativo. Podemos verlo con el estudio de la segunda derivada de la función.

$$C''(t) = 12t - 42$$

Veamos qué signo toman los puntos críticos $t = 2$ y $t = 5$ en la segunda derivada:

- $C''(2) = 12 \cdot 2 - 42 < 0$, es decir, hay un máximo relativo en $t = 2$.
- $C''(5) = 12 \cdot 5 - 42 > 0$, es decir, hay un mínimo relativo en $t = 5$.

Sustituimos los valores 2, 5 y los extremos 0 y 6 en la expresión de la función para obtener el caudal máximo y mínimo y sus valores:

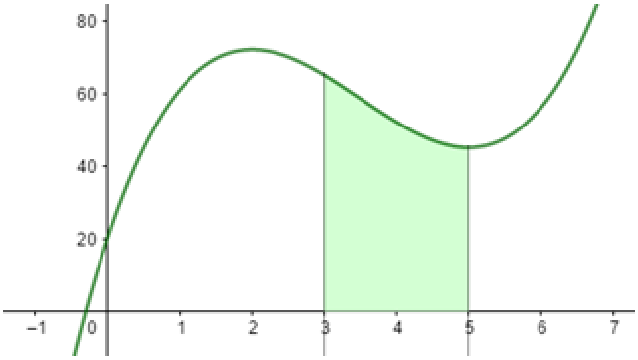
- $C(0) = 2 \cdot 0^3 - 21 \cdot 0^2 + 60 \cdot 0 + 20 = 20\ m^3/s$
- $C(2) = 2 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 + 20 = 72\ m^3/s$
- $C(5) = 2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 + 20 = 45\ m^3/s$
- $C(6) = 2 \cdot 6^3 - 21 \cdot 6^2 + 60 \cdot 6 + 20 = 56\ m^3/s$

(a) **El mínimo caudal es para $t = 0$ y el máximo para $t = 2$**

(b) El mínimo caudal es de **$20\ m^3/s$** y el máximo es de **$72\ m^3/s$**

(c) El área del recinto delimitado por la curva, el eje de abscisas OX y las rectas x =3 y x =5 viene dado por el valor de la siguiente integral:

$$A = \int_3^5 (2t^3 - 21t^2 + 60t + 20)dt = \left[\frac{1}{2}t^4 - 7t^3 + 30t^2 + 20t\right]_3^5 = 106\ u^2$$



Área = 106 u².

Problema A.3:

En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un pino elegido al azar esté infectado por la oruga.

(b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga.

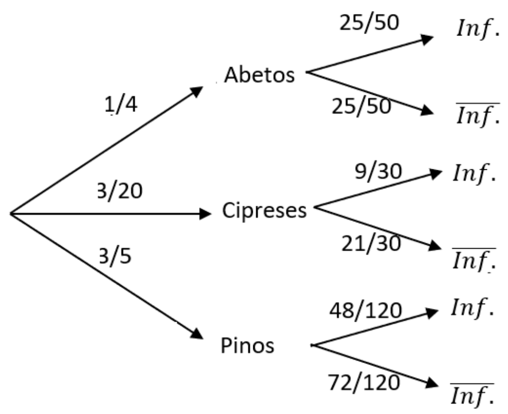
(c) Si se seleccionan un árbol al azar y está infectado por la oruga, ¿cuál es la probabilidad de que sea un pino?

Solución:

Construimos un diagrama en árbol y posteriormente responderemos las preguntas:

El total de árboles es de 200, luego:

$P(\text{abeto}) = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$ $\quad$ $P(\text{ciprés}) = \frac{30}{200} = \frac{3}{20}$ $\quad$ $P(\text{pino}) = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}$



a) $P(Infectado/Pino) = \frac{48}{120} = \mathbf{0.4}$

b) Aplicamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(Infectado) = P(Ab)\cdot P(Inf./Ab) + P(Cip)\cdot P(Inf./Cip) + P(Pino)\cdot P(Inf./Pino) =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{25}{50}+\frac{3}{20}\cdot\frac{9}{30}+\frac{3}{5}\cdot\frac{48}{120} = \frac{72}{200} = \mathbf{0.36}$$

La probabilidad de que un carbol esté infectado es de 0.36.

Aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(Pino/Inf.) = \frac{P(Pino)\cdot P(Inf./Pino)}{P(Infectado)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{48}{120}}{\frac{72}{200}} = \frac{48}{72} \cong \mathbf{0.67}$$

$$P(Pino/Inf.) \cong \mathbf{0.67}$$

SOLUCIONES OPCIÓN B

CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar para qué valor del parámetro x no existe $(A{\cdot}B)^{-1}$.

(b) Hallar la matriz inversa de $A \cdot B$ para $x = 1$.

Solución:

La inversa de la matriz $(\mathrm{A}{\cdot}\mathrm{B})$ no existe cuando el determinante de esta matriz sea igual a 0.

Calculamos los elementos de la matriz $\mathrm{A}{\cdot}\mathrm{B}$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 & 3 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz $\mathrm{A}{\cdot}\mathrm{B}$:

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 2x-1 & 3 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 2x - 1 + 3x = 5x - 1$$

Luego $|A \cdot B| = 0 \ \leftrightarrow 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

No existe $(A{\cdot}B)^{-1}$ para $\boldsymbol{x} = 1/5$.

(a) Para $x = 1$ tenemos la siguiente matriz $A{\cdot}B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

Como $(A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}|} \cdot \ \mathrm{Adj}(A \cdot B)^t$,

$$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathrm{Adj}(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4$$

Y, por tanto, se tiene que la matriz inversa es:

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} & -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \end{pmatrix}$$

Problema B.2:

El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 2 y 8 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{3 + Ax} & \boldsymbol{si\ 2 \leq x \leq 5} \\ \boldsymbol{53 + 2x + Bx^2} & \boldsymbol{si\ 5 \leq x \leq 8} \end{cases}$$

Siendo $F(x)$ la facturación de la empresa en bolsa (en miles de euros) y $\boldsymbol{x}$ el precio de la acción (en euros). Se sabe que para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros y que la función es continua. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las constantes A y B.

(b) Calcular las asíntotas verticales de la función $F(x)/(x^2 - 3x - 4)$ en el intervalo $[2, 5]$.

Solución:

(a) Como F es continua, los límites laterales en $x = 5$ deben coincidir y ser iguales al valor de la función en dicho punto. El valor de la función cuando $x = 5$ es (de acuerdo con el enunciado): $F(5) = 13$.

Por tanto:
$F(5) = 3 + 5A = 13$. Despejando tenemos que $\boldsymbol{A = 2}$

Por otro lado:
$$\lim_{x\to 5^-} F(x) = \lim_{x\to 5^+} F(x)$$

$$\lim_{x\to 5^-} F(x) = \lim_{x\to 5^-} (3 + Ax) = 3 + 5A = 3 + 5 \cdot 2 = 13$$

$$\lim_{x\to 5^+} F(x) = \lim_{x\to 5^+} (53 + 2x + Bx^2) = 63 + 25B$$

Igualamos los límites laterales y obtenemos:

$63 + 25B = 13$. Despejando tenemos que $\boldsymbol{B = -2}$

Las constantes deben valer $A = 2$ y $B = -2$.

(b) La función en $[2, 5]$ es $G(x) = \frac{3+2x}{x^2-3x-4}$

Calculamos los valores de x que igualan el denominador a 0:

$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 4$ y $x_2 = -1 \notin [2, 5]$

Por tanto, la asíntota vertical es $\boldsymbol{x = 4}$.

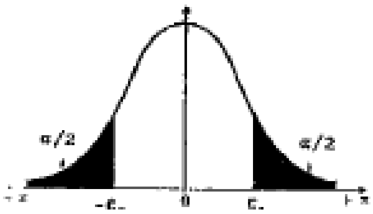
La única asíntota vertical del intervalo es $x = 4$.

Problema B.3:

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono, sigue una distribución normal con desviación típica 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95% para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad.

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 5?



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

Solución:

Se trata de un problema de cálculo de un intervalo de confianza de la media para una población con distribución normal conociendo el tamaño de la muestra (n = 100) y el tiempo medio ($\bar{x}$ = 36).

Sea X: tiempo en hacer la portabilidad
Disponemos de esta información:

- Tamaño de la muestra n = 100
- Desviación típica σ = 24
- Media de la muestra $\bar{x}$ = 36

$X: N\left(\bar{x}\,, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(36, 2.4)$ tras normalizar, $z = \frac{x-\bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ tenemos Z: N(0, 1)

(a) Se nos pide que calculemos $P(-a \leq z \leq a) = 0.95$, es decir, $P(z \leq a) = 0.975 \Rightarrow a$ = 3.3
De manera que $P(-3.3 \leq z \leq 3.3) = 0.95$

Destipificando,

$$P\left(-3.3 \leq \frac{x-\bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 3.3\right) = 0.95 \Leftrightarrow P\left(\bar{x} - 3.3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq x \leq \bar{x} + 3.3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Por tanto, el intervalo de tiempo medio en que se hace efectiva la portabilidad al 95 % de confianza es:

$$\left(\bar{x} - 3.3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + 3.3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(36 - 3.3 \cdot \frac{24}{\sqrt{100}}\ ;\ 36 + 3.3 \cdot \frac{24}{\sqrt{100}}\right) = (\mathbf{28.08,\ 43.92})$$

(b) Para que el intervalo tenga una amplitud de longitud 5, $3.3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ deberá ser igual a 2.5.

De donde despejando n tenemos el tamaño de muestra buscado:

$$n = \left(\frac{3.3 \cdot 24}{2.5}\right)^2 \cong \mathbf{1004}$$ El tamaño muestral debe ser de 1004 personas.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II — Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.

Problema 1: de 0 a 3.5 puntos; Problema 2: de 0 a 3 puntos; Problema 3: de 0 a 3.5 puntos.

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Un taller industrial fabrica dos clases de motores A y B. Cada motor de clase A requiere 2 horas de montaje y 1 hora de reglaje, con un beneficio de 220 euros y cada motor de clase B, 3 horas de montaje y 1/2 hora de reglaje con un beneficio de 280 euros.

Si solo se dispone cada día de 300 horas para el montaje de motores y de 120 horas para su reglaje y el número de motores de la clase B no puede ser superior a 80, se pide, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántos motores de cada clase se deben fabricar para obtener el máximo beneficio? **(3 puntos)**

(b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo? **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 2

La potencia requerida por la maquinaria eléctrica de una empresa durante las 10 horas de su funcionamiento viene dada por la expresión:

$$P(t) = -t^3 + 15t^2 - 48t + 50 \quad (0 \leq t \leq 10)$$

donde t es el tiempo expresado en horas y $P(t)$ la potencia expresada en kilowatios (kw). Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar a qué horas se producen el máximo y el mínimo de esta potencia. **(1.5 puntos)**

(b) Calcular dichos valores máximo y mínimo. **(0.5 puntos)**

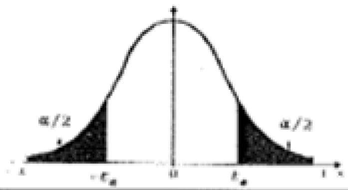
(c) Calcular el área encerrada por la función $P(t)$ y el eje OX entre $t = 1$ y $t = 5$. **(1 punto)**

PROBLEMA 3

Se realiza un estudio sobre el tiempo de reacción de los conductores ante un imprevisto. Se considera una población de 10000 conductores, de los cuales 5000 tienen una antigüedad superior a 10 años, 3000 tienen una antigüedad entre 3 y 10 años y el resto tienen una antigüedad inferior a 3 años. Se selecciona una muestra de 500 conductores mediante muestreo estratificado con afijación proporcional. Se pide, justificando la respuesta:

(a) ¿Cuántos conductores de cada uno de los estratos mencionados anteriormente se incluirán en la muestra? **(1 punto)**

(b) En los conductores con una antigüedad de menos de 3 años que resultan elegidos en la muestra, se observa que el tiempo medio de reacción es de 1.2 segundos. Supuesta que dicha variable tiene distribución normal con desviación típica 0.3 segundos, proporcionar un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de reacción de estos conductores. **(2.5 puntos)**



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II — Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el valor de b para el que no existe la matriz inversa de A. **(1.5 puntos)**

(b) Para $b = 1$, hallar la matriz X que verifique $A.X = A^3 - I$. **(2 puntos)**

PROBLEMA 2

En un cultivo de bacterias desarrollado durante 6 horas se produce cierta sustancia de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$S(t) = At^3 - 2Bt^2 + 5t, \; 1 \leq t \leq 6$$

donde $S(t)$ es la cantidad de sustancia producida (en ml) y t el tiempo de desarrollo del cultivo. Se sabe que la producción de la sustancia es mínima a las 5 horas, momento en el cual se inhibe la actividad bacteriana y la producción es de 0 ml.

(a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta. **(2 puntos)**

(b) Calcular las asíntotas de la función $S(t)/(t^2(t-2))$ en el intervalo $(1, \infty)$. **(1 punto)**

PROBLEMA 3

En una bodega, el 50 % del vino que se fabrica es tinto, el 30 % blanco y el resto rosado. Una vez en las barricas se vuelve agrio el 5 % del vino tinto, el 10 % del vino blanco y el 7 % del vino rosado. mediante muestreo estratificado con afijación proporcional

(a) Calcular la probabilidad de que una barrica elegida al azar contenga vino blanco y que además dicho vino esté agrio. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que una barrica de vino tinto contenga vino con buen sabor. **(1 punto)**

(c) Si se selecciona al azar una barrica y el vino está agrio, ¿cuál es la probabilidad de que contenga vino tinto? **(1.5 puntos)**

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Un taller industrial fabrica dos clases de motores A y B. Cada motor de clase A requiere 2 horas de montaje y 1 hora de reglaje, con un beneficio de 220 euros y cada motor de clase B, 3 horas de montaje y 1/2 hora de reglaje con un beneficio de 280 euros.

Si solo se dispone cada día de 300 horas para el montaje de motores y de 120 horas para su reglaje y el número de motores de la clase B no puede ser superior a 80, se pide, justificando las respuestas:

(a) ¿Cuántos motores de cada clase se deben fabricar para obtener el máximo beneficio?

(b) ¿Cuál es el valor de dicho beneficio máximo?

Solución:

Se trata de un problema de programación lineal con dos variables.

Completamos la siguiente tabla:

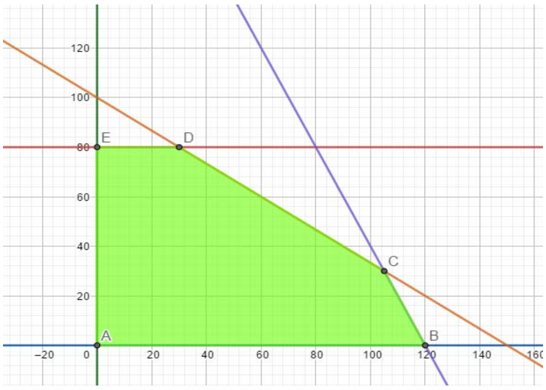
Tipo de motor	Montaje (horas)	Reglaje (horas)	Beneficio (€)	Unidades
A (x unidades)	2	1	220	-
B (y unidades)	3	1/2	280	≤ 80
¿De cuánto disponemos?	300	120	-	-

Si traducimos a ecuaciones dichas restricciones obtenemos este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ y \leq 80 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ x + \frac{1}{2}y \leq 120 \quad (2x + y \leq 240) \end{cases}$$

Por otro lado, la función objetivo es la siguiente: $B(x, y) = 220x + 280y$

Representamos la región que define el sistema de inecuaciones:



Para obtener los vértices de la región factible resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{A}(0, 0)$$

$$\text{B)} \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 120 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{B}(120, 0)$$

$$\text{C)} \begin{cases} 2x + 3y = 300 \\ x + \frac{1}{2}y = 120 \end{cases} \rightarrow \text{C}(105, 30)$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

D) $\begin{cases} 2x + 3y = 300 \\ y = 80 \end{cases}$ → *D(30, 80)*

E) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 80 \end{cases}$ → *E(0, 80)*

Calculemos para cada vértice el valor de la ganancia: $B(x, y) = 220x + 280y$

- $B(0,0) = 280 \cdot 0 + 280 \cdot 0 = 0$
- $B(120, 0) = 220 \cdot 120 + 280 \cdot 0 = 26400$
- $B(105, 30) = 220 \cdot 105 + 280 \cdot 30 = 31500$
- $B(30, 80) = 220 \cdot 30 + 280 \cdot 80 = 29000$
- $B(0, 80) = 220 \cdot 0 + 280 \cdot 80 = 22400$

b) Por tanto, para obtener el máximo beneficio deberá fabricar **105 motores de clase A y 30 motores de clase B.**

a) El beneficio máximo tiene un valor de **31 500 euros**.

Problema A.2:

La potencia requerida por la maquinaria eléctrica de una empresa durante las 10 horas de su funcionamiento viene dada por la expresión:

$$P(t) = -t^3 + 15t^2 - 48t + 50 \qquad (0 \le t \le 10)$$

donde t es el tiempo expresado en horas y $P(t)$ la potencia expresada en kilovatios (kw). Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar a qué horas se producen el máximo y el mínimo de esta potencia.

(b) Calcular dichos valores máximo y mínimo.

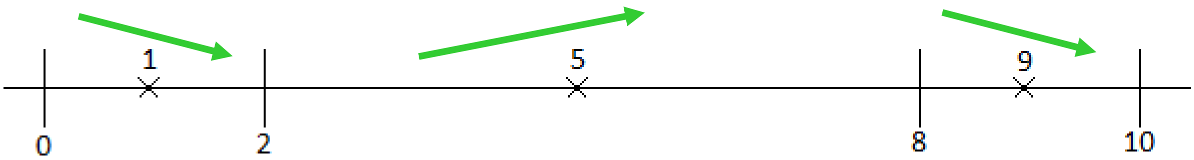
(c) Calcular el área encerrada por la función $P(t)$ y el eje OX entre t = 1 y t = 5.

Solución:

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función. Para ello derivamos la función $P(t)$ y la igualamos a 0:

$$P'(t) = -3t^2 + 30t - 48 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \;\; o \;\; t = 8$$

Resolviendo dicha ecuación obtenemos los valores críticos t = 2 y t = 8. Representamos estos valores en la recta real y vemos qué ocurre con el crecimiento y decrecimiento de la función para los tres intervalos que surgen:



$P'(1) < 0$ $\qquad$ $P'(5) > 0$ $\qquad$ $P'(9) < 0$

Por tanto, podemos afirmar que para $t = 2$ hay un mínimo relativo y para $t = 8$ hay un máximo relativo. Comprobamos con el estudio de la segunda derivada de la función.

$$P''(t) = -6t + 30$$

Veamos qué signo toman los puntos críticos $t = 2$ y $t = 8$ en la segunda derivada:

- $P''(2) = -6 \cdot 2 - 30 > 0$, es decir, hay un mínimo relativo en $t = 2$.
- $P''(8) = -6 \cdot 8 - 42 < 0$, es decir, hay un máximo relativo en $t = 8$.

Sustituimos los valores 2 y 8 y los extremos 0 y 10 en la expresión de la función para obtener los valores del máximo y del mínimo:

- $P(0) = -0^3 + 15 \cdot 0^2 - 48 \cdot 0 + 50 = 50$ kw.
- $P(2) = -2^3 + 15 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 50 = 6$ kw.

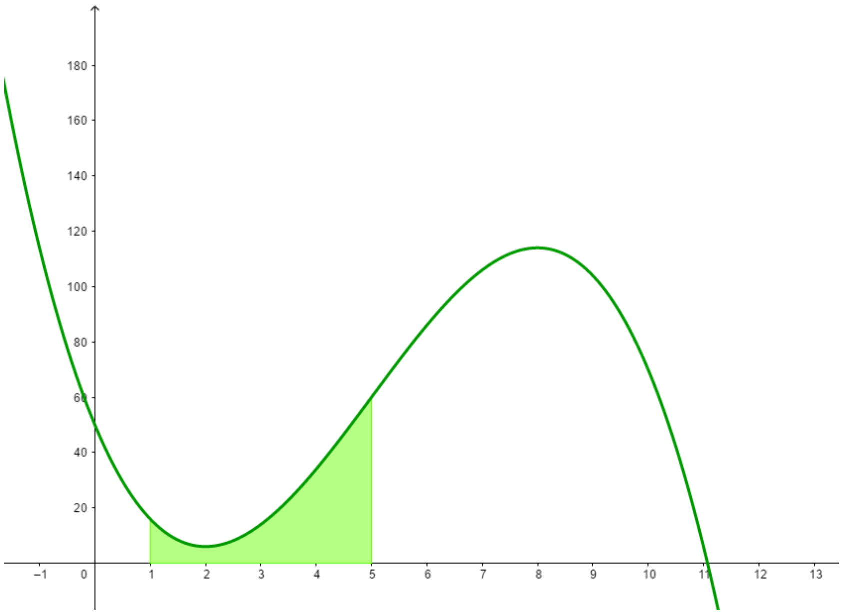
- $P(8) = -8^3 + 15 \cdot 8^2 - 48 \cdot 8 + 50 = 114$ kw.
- $P(10) = -10^3 + 15 \cdot 10^2 - 48 \cdot 10 + 50 = 70$ kw.

La potencia mínima se alcanza a las 2 horas y la potencia máxima a las 8 horas.

La potencia mínima es de **6 kw** y la mínima es de **114 kw**.

c) El área del recinto delimitado por la curva, el eje de abscisas OX y las rectas $t = 1$ y $t = 5$ viene dado por el valor de la siguiente integral:

$$A = \int_1^5 (-t^3 + 15t^2 - 48t + 50)dt = \left[-\frac{1}{4}t^4 + 5t^3 - 24t^2 + 50t\right]_1^5 = 88\ u^2$$



Área = 88 u².

Problema A.3:

Se realiza un estudio sobre el tiempo de reacción de los conductores ante un imprevisto. Se considera una población de 10 000 conductores, de los cuales 5 000 tienen una antigüedad superior a 10 años, 3 000 tienen una antigüedad entre 3 y 10 años y el resto tienen una antigüedad inferior a 3 años. Se selecciona una muestra de 500 conductores mediante muestreo estratificado con afijación proporcional. Se pide, justificando la respuesta:

(a) ¿Cuántos conductores de cada uno de los estratos mencionados anteriormente se incluirán en la muestra?

(b) En los conductores con una antigüedad de menos de 3 años que resultan elegidos en la muestra, se observa que el tiempo medio de reacción es de 1.2 segundos. Supuesta que dicha variable tiene distribución normal con desviación típica 0.3 segundos, proporcionar un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de reacción de estos conductores.

Solución:

- A: Conductores cuya antigüedad supera los 10 años. $\frac{5000}{10000} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\ \%$
- B: Conductores con antigüedad entre 3 y 10 años. $\frac{3000}{10000} = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\ \%$
- C: Conductores cuya antigüedad es inferior a 3 años. $\frac{2000}{10000} = \frac{1}{5} = 0.2 = 20\ \%$

Como el tamaño de la muestra, n, es de 500 personas, de cada estrato se incluirán en la muestra:

- 50 % de 500 = 250 conductores de A
- 30 % de 500 = 150 conductores de B
- 20 % de 500 = 100 conductores de C

b) Sea X la variable "conductores cuya antigüedad es inferior a 3 años", la muestra es de 100 conductores. X sigue una distribución normal de parámetros μ = 1.2 y $\boldsymbol{\sigma}$ = 0.3. Es decir,

$$X \sim N(1.2, 0.3)$$

Se nos pide que calculemos $P(-a \leq z \leq a) = 0.95$ *o lo que es lo mismo*

$$P(z \leq a) = 0.975 \Rightarrow \ a = 1.96$$

De manera que $P(-1.96 \leq z \leq 1.96) = 0.95$

Destipificando, $P\left(-1.96 \leq \frac{x-\bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96\right) = 0.95 \Leftrightarrow$

$$P\left(1.2 - 1.96 \cdot \frac{0.3}{\sqrt{100}} \leq x \leq 1.2 + 1.96 \cdot \frac{0.3}{\sqrt{100}}\right) = 0.95$$

Por tanto, el intervalo de confianza para el tiempo medio de reacción de conductores con una antigüedad inferior a 3 años con un 95 % de fiabilidad es: $(1.1412, 1.2588)$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el valor de b para el que no existe la matriz inversa de A.

(b) Para $b = 1$, hallar la matriz X que verifique $AX = A^3 - \mathrm{I}$

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz A. A continuación, lo igualamos a 0 para obtener el valor de b para el que dicha matriz no tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2b\,; \quad 3 - 2b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$$

Por tanto, si $\boldsymbol{b = \frac{3}{2}}$, $|A| = 0$ y entonces no existe A^{-1}.

(b) Como $AX = A^3 - \mathrm{I}$, despejando X tenemos $X = A^{-1}\,(A^3 - \mathrm{I})$

Si $b = 1$, tenemos que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 30 & 20 & 41 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - I = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 30 & 20 & 41 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 30 & 20 & 40 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de A. Para ello, calculamos su determinante a partir del resultado del apartado anterior; calculamos su matriz traspuesta y la adjunta de esta.

$$|A| = 3 - 2 = 1$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\;;\; Adj(\mathrm{A}^t) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\;; \text{como } |A| = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Y, por tanto, } X = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 30 & 20 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{10} & \mathbf{0} & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

Problema B.2:

En un cultivo de bacterias desarrollado durante 6 horas se produce cierta sustancia de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$S(t) = At^3 - 2Bt^2 + 5t, \qquad 1 \le t \le 6$$

donde *S(t)* es la cantidad de sustancia producida (en ml) y t el tiempo de desarrollo del cultivo. Se sabe que la producción de la sustancia es mínima a las 5 horas, momento en el cual se inhibe la actividad bacteriana y la producción es de 0 ml.

(a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

(b) Calcular las asíntotas de la función $\boldsymbol{S(t)/t^2(t-2)}$) en el intervalo $(\mathbf{1}, \infty)$.

Solución:

(a) Sabemos que la función tiene un mínimo para t = 5 siendo la producción de 0 ml.

Por tanto, $S'(5) = 0$ (por tener un mínimo en t =5) y además $S(5) = 0$ (según el enunciado).

Calculamos la primera derivada de *S(t)* y la igualamos a 0:

$S'(t) = 3At^2 - 4Bt + 5$, como $S'(5) = 0$ sustituimos en la expresión y tenemos:

$S'(5) = 3 \cdot 5^2 A - 4 \cdot 5B + 5 = 0 \Leftrightarrow 75A - 20B = 0$

$S(5) = 5^3 A - 2 \cdot 5^2 B + 5 \cdot 5 = 0 \Leftrightarrow 125A - 50B + 25 = 0$

Obtenemos así un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (A y B):

$$\begin{cases} 75A - 20B + 5 \quad = 0 \\ 125A - 50B + 25 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos $A = \frac{1}{5}$ y $B = 1$

Las constantes valen: A = 1/5 y B = 1.

(b) Para calcular las asíntotas verticales buscamos los valores de t que hacen que el valor de la expresión del denominador sea igual a 0:

$t^2(t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \notin [1,6]$ o $t = 2$, luego la recta x = 2 es asíntota vertical.

Para calcular las posibles asíntotas horizontales, hallamos el siguiente límite:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{5}t^3 - 2t^2 + 5t}{t^2(t-2)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{5}t^2 - 2t + 5}{t(t-2)} = \frac{1}{5},$$ luego la recta $y = \frac{1}{5}$ es asíntota horizontal.

No tiene asíntotas oblicuas.

Las únicas asíntotas en el intervalo $[\mathbf{1}, \mathbf{6}]$ es la asíntota vertical $\boldsymbol{x} = 2$, y la asíntota horizontal $\boldsymbol{y} = 1/5$.

Problema B.3:

En una bodega, el 50 % del vino que se fabrica es tinto, el 30 % blanco y el resto rosado. Una vez en las barricas se vuelve agrio el 5% del vino tinto, el 10 % del vino blanco y el 7 % del vino rosado, mediante muestreo estratificado con afijación proporcional.

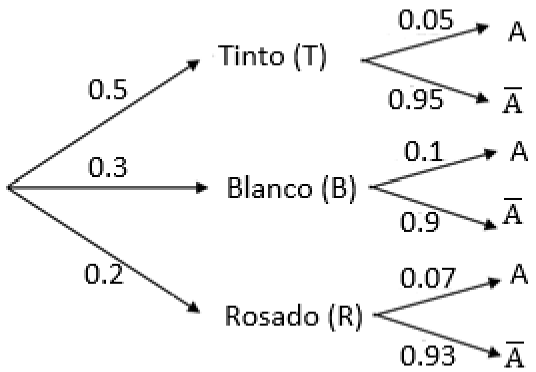
(a) Calcular la probabilidad de que una barrica elegida al azar contenga vino blanco y que además dicho vino esté agrio.

(b) Calcular la probabilidad de que una barrica de vino tinto contenga vino con buen sabor.

(c) Si se selecciona una barrica y el vino está agrio, ¿cuál es la probabilidad de que contenga vino tinto?

Solución:

Construimos un diagrama en árbol que recoja la información del enunciado:



A = vino agrio

(a) $P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B) = 0.3 \cdot 0.1 = \mathbf{0.03}$

(b) $P(\bar{A}/T) = \frac{P(\bar{A} \cap T)}{P(T)} = \frac{0.5 \cdot 0.95}{0.5} = \mathbf{0.95}$

(c) Aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(T/\bar{A}) = \frac{P(T \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(T) \cdot P(\bar{A}/T)}{P(\bar{A})} = \frac{0.5 \cdot 0.95}{0.5 \cdot 0.95 + 0.3 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.93} = \mathbf{0.512}$$

Obtenemos el valor de $P(\bar{A})$ utilizando el Teorema de la Probabilidad Total:

$P(\bar{A}) = P(T \cap \bar{A}) + P(B \cap \bar{A}) + P(R \cap \bar{A}) =$
$P(T) \cdot P(\bar{A}/T) + P(B) \cdot P(\bar{A}/B) + P(R) \cdot P(\bar{A}/R) = 0.5 \cdot 0.95 + 0.3 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.93$

a) La probabilidad de que una barrica elegida al azar contenga vino blanco y que además dicho vino esté agrio es de 0.02; b) La probabilidad de que una barrica de vino tinto contenga vino con buen sabor es de 0.95 y c) si se selecciona una barrica y el vino está agrio, la probabilidad de que contenga vino tinto es de 0.512.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Galicia

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: MARÍA DOLORES VÁZQUEZ TORRÓN
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

XUNTA DE GALICIA / CiUG	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1: (3 puntos)

Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular la matriz $B^t \cdot A \cdot B$

b) Calcular la inversa de la matriz A-I, en donde I es la matriz identidad de orden 2.

c) Despejar la matriz X en la ecuación matricial A · X - B = X y calcúlala.

Problema A.2: (3 puntos)

El número de espectadores de una serie (N), en millones, en función del tiempo (t), en años, sigue un modelo dado por la función: $N(t) = K + \frac{8t}{1+t^2}$

a) Calcula el valor de K si se sabe que al final del segundo año el número de espectadores era de 4.2 millones. **b)** Estudia el crecimiento, el decrecimiento y el momento y valor máximo de la audiencia.

Problema A.3: (2 puntos)

Los videojuegos que se consumen en Galicia se juegan el 45% en consola y el resto en el móvil. De los que se juegan en consola, el 70% son de acción, el 10% de estrategia y el resto de otras categorías.

a) ¿Qué porcentaje de los videojuegos consumidos en Galicia son de acción?

b) Se elige al azar un jugador que está jugando a un juego de estrategia: ¿cuál es la probabilidad de que lo esté haciendo a través del móvil?

Problema A.4: (2 puntos)

Un estudio electoral con una muestra de 400 electores obtiene un intervalo para la proporción de votantes de un partido de [0.23; 0.31] **a)** ¿Cuánto vale la proporción muestral? **b)** ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se estableció el intervalo? **c)** ¿Cuál es el error máximo cometido con el intervalo anterior?

XUNTA DE GALICIA CiUG	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1: (3 puntos)

Una tienda deportiva desea liquidar 2000 camisetas y 1000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30€; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50€. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.

a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos. **b)** representa la región factible **c)** ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Problema B.2: (3 puntos)

Dada la función $f(x)= x^2 – 6x +8$ **a)** Realiza su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos. **b)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y los ejes de coordenadas

Problema B.3: (2puntos)

En una población, de cada 100 consumidores de agua mineral 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30% de consumidores de A, el 20% de los consumidores de B y el 40% de consumidores de C son mujeres. **a**) Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población: ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **b)** Si se ha seleccionado al azar una mujer, halla la probabilidad de que consuma la marca B

Problema B.4: (2puntos)

Después de años de utilizarlo se sabe que la puntuación de un test de uso habitual en cierta rama industrial sigue una distribución normal de media 74 y desviación típica 16. En una empresa se decide realizarlo a 100 de sus empleados. **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una media muestral superior a 78 puntos, de seguirse la pauta genera? **b)** ¿Y la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 74 puntos?

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular la matriz $B^t \cdot A \cdot B$

b) Calcular la inversa de la matriz A-I, en donde I es la matriz identidad de orden 2.

c) Despejar la matriz X en la ecuación matricial $A{\cdot}X - B = X$ y calcúlala.

Solución:

a) $B^t \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{B^t \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) Calculamos la inversa por adjuntos.

$$(A-I)^{-1} = \frac{(Adj(A-I))^t}{|A-I|}$$

$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A-I| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$

$Adj(A-I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(Adj(A-I))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(A-I)^{-1} = \dfrac{(Adj(A-I))^t}{|A-I|} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) Calcular y despejar X en la ecuación matricial $A{\cdot}X - B = X$

$AX - X = B$ *sacamos factor común X por la derecha*

$(A - I)X = B$ multiplicamos por $(A - I)^{-1}$ por la izquierda

$(A-I)^{-1}(A-I)X = (A-I)^{-1}B \Rightarrow X = (A-I)^{-1}B$

$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Problema A.2:

El número de espectadores de una serie (N), en millones, en función del tiempo (t), en años, sigue un modelo dado por la función: $N(t) = K + \frac{8t}{1+t^2}$

a) Calcula el valor de K si se sabe que al final del segundo año el número de espectadores era de 4.2 millones.

b) Estudia el crecimiento, el decrecimiento y el momento y valor máximo de la audiencia.

Solución:

a) $N(t) = K + \frac{8t}{1+t^2}$ K / al final del 2º año el número de espectadores es de 4.2 $\Rightarrow N(2) = 4.2$

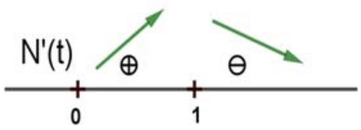
$N(2) = k + \dfrac{8 \cdot 2}{1 + 2^2} = 4.2 \Rightarrow K = 1$

$$\boldsymbol{K = 1}$$

b) Crecimiento y decrecimiento

$$N'(t) = \frac{8(-t^2+1)}{(1+t^2)^2}$$

$N'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1 (-1 \notin Dominio\ nº\ de\ espectadores)$



La función es creciente en el intervalo (0, 1) y decreciente en (1, ∞), es decir el nº de espectadores aumenta durante el primer año y desciende a partir del primero.

Extremos:

Por ser la función continua y estar definida en (0, ∞) la función tiene un máximo absoluto en x = 1

También se puede estudiar utilizando la segunda derivada:

$N''(t) = \frac{16t(t^2-3)}{(1+t^2)^3}$ $N''(1) < 0 \Rightarrow x = 1$ es un máximo absoluto

$N(t) = 1 + \frac{8t}{1+t^2} \to N(1) = 5$

Solución: A finales del primer año se produce el máximo de audiencia que será de **5 millones** de espectadores.

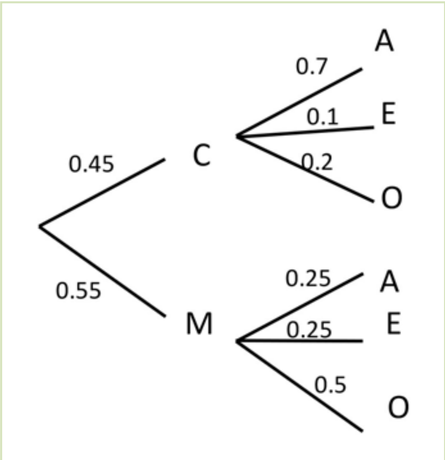
Problema A.3:

Los videojuegos que se consumen en Galicia se juegan el 45 % en consola y el resto en el móvil. De los que se juegan en consola, el 70 % son de acción, el 10 % de estrategia y el resto de otras categorías.

a) ¿Qué porcentaje de los videojuegos consumidos en Galicia son de acción?

b) Se elige al azar un jugador que está jugando a un juego de estrategia: ¿cuál es la probabilidad de que lo esté haciendo a través del móvil?

Solución:



Suceso:

C consola	$P(C)$ = 0.45	
M móvil	$P(M)$ = 0.55	
A acción	$P(A/C)$ = 0.7	$P(A/M)$ = 0.25
E estrategia	$P(E/C)$ = 0.1	$P(E/M)$ = 0.25
O otras	$P(O/C)$ = 0.2	$P(O/M)$ = 0.5

a) $P(A) = P(A/C) \cdot P(C) + P(A/M) \cdot P(M) = 0.7 \cdot 0.45 + 0.25 \cdot 0.55 = 0.4525 \Rightarrow$

El **45.25 %** de los videojuegos consumidos en Galicia son de acción

b) $P(M/E) = \frac{P(E \cap M)}{P(E)} = \frac{0.55 \cdot 0.25}{0.55 \cdot 0.25 + 0.45 \cdot 0.1} = \frac{0.1375}{0.1825} = 0.7534$

La probabilidad de que un jugador elegido al azar que está jugando a un juego de estrategia lo esté haciendo a través del móvil es del **75.34%**

Problema A.4:

Un estudio electoral con una muestra de 400 electores obtiene un intervalo para la proporción de votantes de un partido de [0.23, 0.31]

a) ¿Cuánto vale la proporción muestral?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza con el que se estableció el intervalo?

c) ¿Cuál es el error máximo cometido con el intervalo anterior?

Solución:

a) n = 400 IC [0.23; 0.31] intervalo centrado en la proporción muestral:

$$\hat{p} = \frac{0.23 + 0.31}{2} = \mathbf{0.27}$$

b) *N*ivel de confianza de construcción del intervalo

El radio del intervalo $\frac{0.31-0.23}{2} = 0.04 = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{0.27\cdot 0.73}{400}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.801$

$P[Z < 1.801] = 1 - \alpha/2 \Rightarrow \alpha = 0.0708 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.9292$

El nivel de confianza con el que se construyó el intervalo es **92.92%**

c) Error máximo cometido $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = radio\ del\ intervalo \Rightarrow E$ ***= 0.04***

Error máximo: $\mathbf{E = 0.04 \Rightarrow 4\ \%}$

SOLUCIONES OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

Una tienda deportiva desea liquidar 2000 camisetas y 1000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30€; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50€. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.

a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos. **b)** representa la región factible **c)** ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Solución:

	Camiseta	chándal	Precio venta (€)	
X n.º lotes tipo 1	1	1	30	Mínimo 200 lotes
Y n.º lotes tipo 2	3	1	50	Mínimo 100 lotes
	Máximo 2000	Máximo 1000		

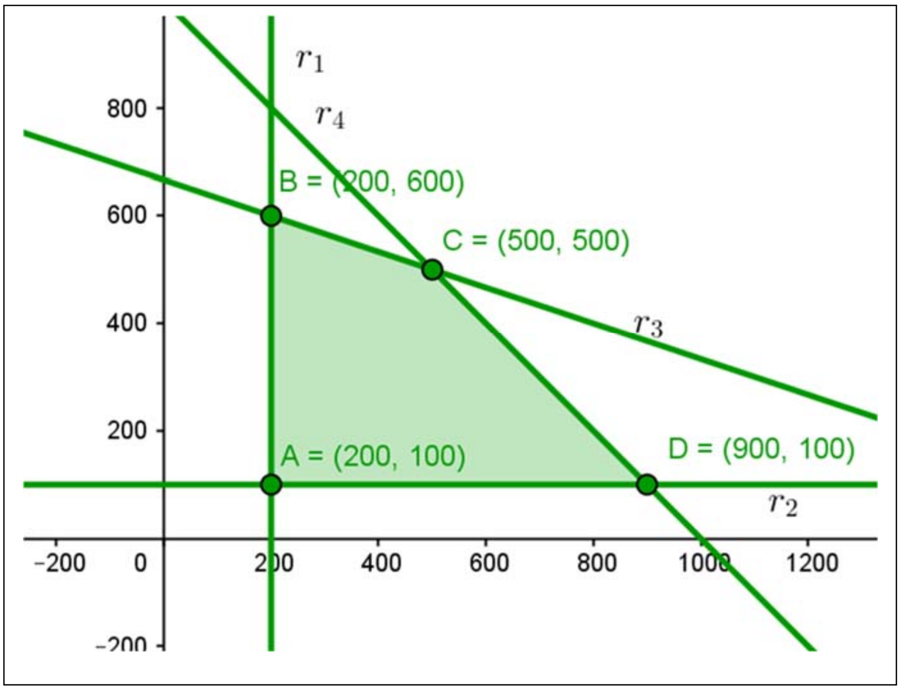
a) Maximizar $z = f(x, y) = 30x + 50y$ sujeto a:

$$\left.\begin{array}{r} r_1: x \geq 200 \\ r_2: y \geq 100 \\ r_3: x + 3y \leq 2000 \\ r_4: x + y \leq 1000 \end{array}\right\}$$

no son necesarias

(redundantes) $(x \geq 0;\ y \geq 0)$

b) Región factible



Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Calculamos los vértices de la región factible resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes

$$A{:}\, r_1 \cap r_2 \;\; A(200, 100)$$
$$B{:}\, r{:}\, 1 \cap r_3 B(200, 600)$$
$$C{:}\, r_3 \cap r_4 \;\; C(500, 500)$$
$$D{:}\, r_2 \cap r_4 \;\; D(900, 100)$$

c) Maximizar la función objetivo $f(x, y) = 30x + 50y$

$f(200, 100) = 11\,000$ €

$f(200, 600) = 36\,000$ €

$f(500, 500) = 40\,000$ €

$f(900, 100) = 32\,000$ €

Los ingresos máximos se obtienen vendiendo **500** lotes tipo 1 y **500** lotes tipo 2.

Estos ingresos ascienden a **40 000€**

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema B.2:

Dada la función $f(x)= x^2 - 6x + 8$ **a)** Realiza su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos. **b)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y los ejes de coordenadas

Solución:

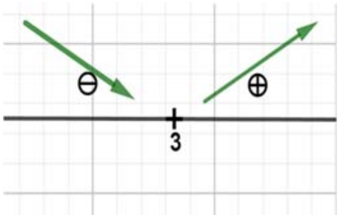
a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

- Puntos de corte con eje OX (y = 0) $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \Rightarrow (4,0) \\ x = 2 \Rightarrow (2,0) \end{matrix}$

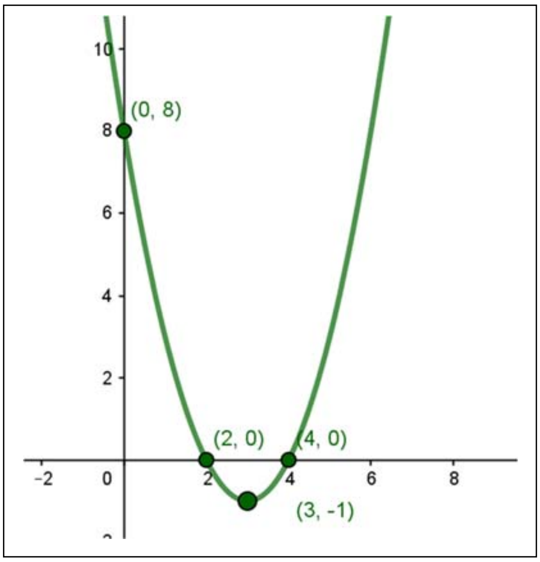
- Puntos de corte con el eje OY (x = 0) $\Rightarrow y = 8 \Rightarrow (0,8)$

- Extremos relativos: $f'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow x = 3, y = -1 \Rightarrow$ mínimo relativo (3, –1).



Otro método calculando el vértice de la parábola:

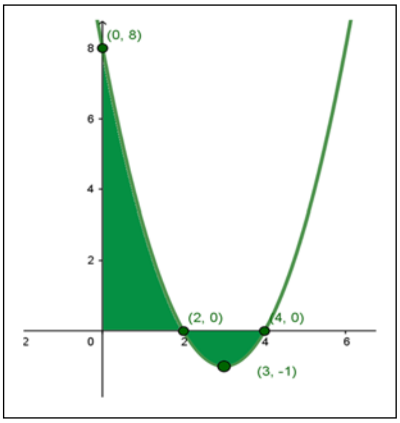


$x_v = \frac{-b}{2a} = 3 \Rightarrow v(3,-1)$ es un mínimo por ser una parábola de coeficiente principal positivo y por lo tanto convexa.

- Monotonía

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$ decreciente en $(-\infty, 3)$ y creciente en $(3, \infty)$

A la misma conclusión se llega por ser una función continua en R con un mínimo en x = 3



b) Área determinada por la función y los ejes de coordenadas

$$A = \int_0^2 (x^2 - 6x + 8)\,dx + \left|\int_2^4 (x^2 - 6x + 8)\,dx\right| = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{3} + 8x\right]_0^2 + \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{3} + 8x\right]_2^4\right|$$

$$= \frac{20}{3} + \left|\frac{-4}{3}\right| = 8u^2$$

Área = 8 u².

Problema B.3:

En una población, de cada 100 consumidores de agua mineral 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30 % de consumidores de A, el 20 % de los consumidores de B y el 40 % de consumidores de C son mujeres. **a)** Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población: ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **b)** Si se ha seleccionado al azar una mujer, halla la probabilidad de que consuma la marca B.

Solución:

	A	B	C	
H (hombre)	21	20	27	68
M (mujer)	9 (30 % de 30)	5 (20 % de 45)	18 (40 % de 45)	32
	30	25	45	100

a) $P(M) = \frac{32}{100} = 0.32$ probabilidad de ser mujer que se obtiene directamente de la tabla

$$\boldsymbol{P(M) = 0.32.}$$

b) $P(B/M) = \frac{P(B\cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{5}{100}}{\frac{32}{100}} = 0.15625$

$$\boldsymbol{P(B/M) = 0.15625.}$$

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema B.4:

Después de años de utilizarlo se sabe que la puntuación de un test de uso habitual en cierta rama industrial sigue una distribución normal de media 74 y desviación típica 16. En una empresa se decide realizarlo a 100 de sus empleados. **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una media muestral superior a 78 puntos, de seguirse la pauta genera? **b)** ¿Y la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 74 puntos?

Solución:

X puntuación del test

$X \sim N(\mu, \sigma) = N(74, 16) \Rightarrow \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(74, \frac{16}{\sqrt{100}}) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X}-74}{1.6} \sim N(0,1)$

a)

$$P(\bar{X} > 78) = P(Z \geq \frac{78-74}{1.6}) = P(Z \geq 2.5)1 - P(z \leq 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

$$\boldsymbol{P(\bar{X} > 78) = 0.0062}$$

b)

$$P(\bar{X} < 74) = P(Z \leq \frac{74-74}{1.6}) = P(Z \leq 0) = 0.5$$

$$\boldsymbol{P(\bar{X} < 74) = 0.5}$$

Podría sacarse esta conclusión directamente indicando que la distribución normal es simétrica respecto a la media (74) dejando una probabilidad de 0.5 tanto a su izquierda como a su derecha.

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

XUNTA DE GALICIA CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA de Julio

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:(3 puntos)

En una caja hay billetes de 5, 10 y 20 por un valor de 400 €. Se sabe que el número de billetes de 20 € es la tercera parte del total y que el número de billetes de 5 € es inferior en 4 unidades al resto. **a)** Escribe un sistema de ecuaciones que represente el problema. **b)** Escríbelo en forma matricial. **c)** Calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes y resuelve el sistema.

Problema A.2: (3 puntos)

El precio de venta de un electrodoméstico en un centro comercial (en cientos de euros) viene dado por la función $P(t) = \frac{44}{t^2-4t+16} + 2$siendo t el tiempo transcurrido en años desde el momento en que se puso a la venta.

a) Calcula el precio de lanzamiento del producto. ¿En qué momento el precio del electrodoméstico vuelve a ser el mismo que el precio de lanzamiento?

b) Determina los períodos en los que el precio del electrodoméstico ha aumentado y ha disminuido. ¿Cuál ha sido el precio de venta máximo? ¿En qué momento se ha producido?

c) Estudia la tendencia del precio de venta del electrodoméstico con el paso del tiempo.

Problema A.3: (2 puntos)

En una ciudad, el 20 % de las personas que acceden a un centro comercial proceden del centro de la ciudad el 45 % de barrios periféricos y el resto, de pueblos cercanos. Efectúan compras el 60 %, el 75 % y el 50 % respectivamente. **a)** Si un determinado día visitan el centro comercial 2000 personas, ¿cuál es el número esperado que no realiza compras? **b)** Si elegimos al azar una persona que ha realizado alguna compra en este centro comercial, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de un pueblo cercano?

Problema A.4: (2 puntos)

Se tomó una muestra aleatoria de 100 jóvenes y se les midió el nivel de glucosa en sangre obteniendo una media muestral de 105 mg/cm^3. Se sabe que la desviación típica en la población es de 15 mg/cm$^{3.}$

a) Obtén un intervalo de confianza, al 95 % para el nivel medio de glucosa en sangre de la población.

b) ¿Cuánto vale el error máximo en el intervalo anterior?

c) Qué ocurre con la amplitud del intervalo si el nivel de confianza es del 99 %?

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
LibrosMareaVerde.tk

XUNTA DE GALICIA CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA de Julio

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:(3 puntos)

Una bodega produce vinos blancos y tintos. La producción de ambos tipos de vino no debe superar los 90 millones de litros y la producción de vino blanco no debe superar el doble de la de vino tinto ni ser inferior a su mitad. También se sabe que para atender la demanda se deben producir al menos 45 millones de litros. La bodega comercializa el vino blanco a 8 € el litro y el tinto a 6 € el litro.

a) Plantea y representa gráficamente el problema.

b) ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos y como se consiguen?

Problema B.2: (3 puntos)

Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & 0 \le x \le 4 \\ 7 - x & 4 < x \le 7 \end{cases}$

a) Representa la función estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos. ¿Para qué valores de x, $f(x) \ge 0$?

b) Calcula el área del recinto limitado por los ejes y la parte de la función tal que $f(x) \ge 0$

Problema B.3: (2 puntos)

Para la construcción de un panel luminoso se dispone de un contenedor de 200 bombillas blancas, 150 bombillas azules y 250 rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es 0.01 si es blanca, 0.02 si es azul y el 0.03 si es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor:

a) Calcula la probabilidad de que la bombilla no funcione.

b) Sabiendo que la bombilla elegida funciona, calcula la probabilidad de que dicha bombilla no sea roja

Problema B.4:(2 puntos)

En una muestra aleatoria de n = 25 estudiantes de bachillerato, el 75 % afirman querer realizar estudios universitarios.

a) Calcula un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes de bachillerato que quieren realizar estudios universitarios con un nivel de confianza del 90 %.

b) Si se sabe que 8 de cada 10 estudiantes de bachillerato afirman querer realizar estudios universitarios y tomamos una muestra aleatoria a 100 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de estudiantes de la muestra que quieren realizar universitarios sea superior al 65 %?

SOLUCIONES OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

En una caja hay billetes de 5, 10 y 20 por un valor de 400 €. Se sabe que el número de billetes de 20 € es la tercera parte del total y que el número de billetes de 5 € es inferior en 4 unidades al resto. **a)** Escribe un sistema de ecuaciones que represente el problema. **b)** Escríbelo en forma matricial. **c)** Calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes y resuelve el sistema.

Solución:

a) Llamamos x al número de billetes de 5 euros, y al número de billetes de 10 euros y z al de 20 euros. Escribimos las condiciones del enunciado obteniendo un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+10y+20z=400 \\ z=\dfrac{x+y+z}{3} \\ x=y+z-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+10y+20z=400 \\ x+y-2z=0 \\ x-y-z=-4 \end{array}\right\}$$

b) $AX=B$: $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) A^{-1}; $|A|=-65$

$$AdjA=\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -10 & -25 & 15 \\ -40 & 30 & -5 \end{pmatrix};\ (AdjA)^t=\begin{pmatrix} -3 & -10 & -40 \\ -1 & -25 & 30 \\ -2 & 15 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}=\frac{(AdjA)^t}{|A|}=\begin{pmatrix} \frac{3}{65} & \frac{10}{65} & \frac{40}{65} \\ \frac{1}{65} & \frac{25}{65} & \frac{-30}{65} \\ \frac{2}{65} & \frac{-15}{65} & \frac{5}{65} \end{pmatrix}}$$

Para resolver el sistema podemos hacerlo por Gauss o como ya está calculada la inversa de A se puede resolver la ecuación matricial

$AX=B \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$

$$X=\begin{pmatrix} \frac{3}{65} & \frac{10}{65} & \frac{40}{65} \\ \frac{1}{65} & \frac{25}{65} & \frac{-30}{65} \\ \frac{2}{65} & \frac{-15}{65} & \frac{5}{65} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 400 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Solución: 16 billetes de 5 €, 8 billetes de10 € y 12 billetes de 20 €.

Problema A.2:

El precio de venta de un electrodoméstico en un centro comercial (en cientos de euros) viene dado por la función$P(t) = \frac{44}{t^2-4t+16} + 2$ siendo t el tiempo transcurrido en años desde el momento en que se puso a la venta.

a) Calcula el precio de lanzamiento del producto. ¿En qué momento el precio del electrodoméstico vuelve a ser el mismo que el precio de lanzamiento? b) Determina los períodos en los que el precio del electrodoméstico ha aumentado y ha disminuido. ¿Cuál ha sido el precio de venta máximo? ¿En qué momento se ha producido? c) Estudia la tendencia del precio de venta del electrodoméstico con el paso del tiempo.

Solución:

$$P(t) = \frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2$$

a) $P(0)$ = $P(0) = \frac{44}{16} + 2 = 4.75$

El precio de lanzamiento del producto es de 4.75·100 = 475 €

Momento en que el precio del producto vuelve a coincidir con el precio de lanzamiento:

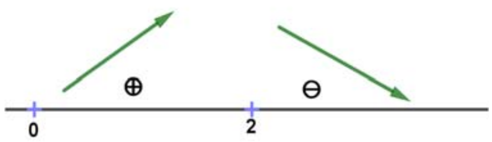
$$\frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2 = 4.75 \Rightarrow 44 = 2.75t^2 - 11t + 44 \;\Rightarrow\; 2.75t^2 - 11t = 0 \Rightarrow\; t(2.75t - 11) = 0$$
$$\Rightarrow t = 0, \qquad t = 4$$

t = 0: año de lanzamiento.

t = 4: El precio de producto vuelva a coincidir con el precio de lanzamiento el cuarto año.

b) Aumento y disminución de precio. Precio máximo

$P'(t) = \frac{-44(2t-4)}{(t^2-4t+16)^2} = 0 \Rightarrow t = 2$



El precio aumenta en los dos primeros años y disminuye a partir del segundo

La función es continua en [0, ∞) por ser racional y $t^2 - 4t + 16 \neq 0, \forall t$ por lo tanto en t = 2, (2º año) se produce el precio máximo de venta. Este precio asciende a la cantidad de 5.66667·100 = 566.67 €

También puede razonarse utilizando la 2ª derivada.

c) Tendencia del precio de venta:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2 = 2$$

La tendencia del precio de venta a lo largo del tiempo es de 2 ·100 = 200 €

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema A.3:

En una ciudad, el 20 % de las personas que acceden a un centro comercial proceden del centro de la ciudad el 45 % de barrios periféricos y el resto, de pueblos cercanos. Efectúan compras el 60 %, el 75 % y el 50 % respectivamente. **a)** Si un determinado día visitan el centro comercial 2000 personas, ¿cuál es el número esperado que no realiza compras? **b)** Si elegimos al azar una persona que ha realizado alguna compra en este centro comercial, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de un pueblo cercano?

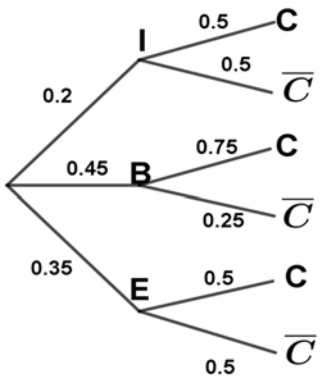
Solución:

I proceden del centro de la ciudad	$P(I) = 0.2$	$P(C/I) = 0.6$
B proceden de barrios periféricos	$P(B) = 0.45$	$P(C/B) = 0.45$
E proceden de pueblos cercanos	$P(E) = 0.35$	$P(C/E) = 0.5$
C realizan compras		

a) $\boldsymbol{P(C)} = P(I)P(C/I) + P(B)P(C/B) + P(E)P(C/E) = 0.2 \cdot 0.6 + 0.45 \cdot 0.75 + 0.35 \cdot 0.5 = 0.6325$

Probabilidad de NO realizar una compra:

$$P(\bar{C}) = 1 - 0.6325 = 0.3675$$



n = 2000:

np = 2000·0.3675 = 735 personas.

El número esperado de personas que NO realizan compra es de **735** personas.

b) $P(E/C) = \frac{P(E\cap C)}{P(C)} = \frac{0.5\cdot 0.35}{0.6325} = 0.2767$

La probabilidad de que una persona que realizase una compra proceda de un pueblo cercano es de **0.2767 (27.67 %)**

Problema A.4:

Se tomó una muestra aleatoria de 100 jóvenes y se les midió el nivel de glucosa en sangre obteniendo una media muestral de 105 mg/cm^3. Se sabe que la desviación típica en la población es de 15 mg/cm^3.

a) Obtén un intervalo de confianza, al 95 % para el nivel medio de glucosa en sangre de la población. **b)** ¿Cuánto vale el error máximo en el intervalo anterior? **c**) Qué ocurre con la amplitud del intervalo si el nivel de confianza es del 99 %?

Solución:

X nivel de glucosa en sangre

x = 105 mg/cm^3 $\quad 1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow P(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}})1-\frac{\alpha}{2} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

σ = 15 mg/cm^3

n = 100

a) $IC_{95\%}\,\mu = (\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (105 - 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}, 105 + 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}) = (102.06; 107.94)$

El intervalo de confianza, al 95 % para el nivel medio de glucosa en sangre de la población es de $\mathbf{(102.06; 107.94)}$

b) Error máximo cometido $z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.94\, mg/cm^3$

Error máximo cometido $\mathbf{2.94\, mg/cm^3}$

c) Si el nivel de confianza aumenta a 0.99 el nivel de significación α disminuye pasando de 0.05 a 0.01 por lo que la probabilidad de equivocarse es menor pero la amplitud de intervalo será mayor y por lo tanto la precisión del estudio sería menor.

$1-\alpha = 0.99 \Rightarrow\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$

$IC_{99\%}\mu = (105 - 2.575 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}, 105 + 2.575 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}) = (101.1375; 108.8625)$

Amplitud al 95% 5.88

Amplitud al 99 % $\mathbf{7.725}$

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Una bodega produce vinos blancos y tintos. La producción de ambos tipos de vino no debe superar los 90 millones de litros y la producción de vino blanco no debe superar el doble de la de vino tinto ni ser inferior a su mitad. También se sabe que para atender la demanda se deben producir al menos 45 millones de litros. La bodega comercializa el vino blanco a 8 € el litro y el tinto a 6 € el litro. a) Plantea y representa gráficamente el problema b) a cuánto ascienden los ingresos máximos y como se consiguen

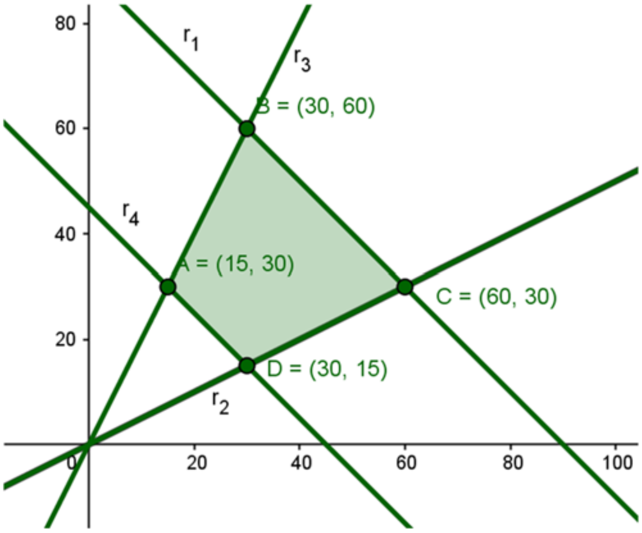
Solución:

x litros de vino blanco (en millones)

y litros de vino tinto (en millones)

maximizar $z = f(x, y) = 8x + 6y$ sujeto a:

$$\left.\begin{array}{r} r_1: x+y \le 90 \\ r_2: x \le 2y \\ r_3: x \ge \frac{y}{2} \\ r_4: x+y \ge 45 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} r_1: x+y \le 90 \\ r_2: x-2y \le 0 \\ r_3: 2x-y \ge 0 \\ r_4: x+y \ge 45 \\ r_{5.6}: x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\}$$



Calculamos los vértices de la región factible resolviendo los sistemas correspondientes

	$z = f(x, y) = 8x + 6y$
A(15,30)	f(15,30) = 300
B(30,60)	f(30,60) = 600
C(60,30)	f(60,30) = 660 ← ←←
D(30,15)	f(30,15) = 330

Los ingresos máximos se obtienen vendiendo **60** millones de litros de vino blanco y **30** millones de litros de vino tinto. Los ingresos ascienden a **660** millones de euros.

Problema B.2:

Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & 0 \le x \le 4 \\ 7 - x & 4 < x \le 7 \end{cases}$

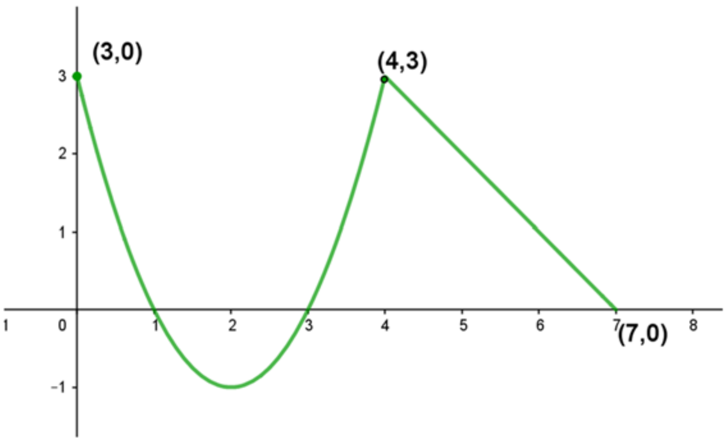
a) Representa la función estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos. ¿Para qué valores de x, $f(x) \ge 0$. b) Calcula el área del recinto limitado por los ejes y la parte de la función tal que $f(x) \ge 0$

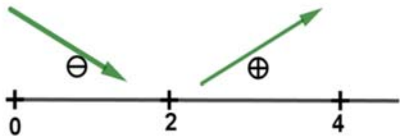
Solución:

a) Representar $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & 0 \le x \le 4 \\ 7 - x & 4 < x \le 7 \end{cases}$

En [0, 4]: Puntos de corte con eje OX (y = 0) $\quad x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 & (1, 0) \\ x = 3 & (3, 0) \end{matrix}$

Puntos de corte con eje OY (x = 0) ⇒ (0, 3)





$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Por ser continua en (0, 4) la función tiene un mínimo en x = 2, y = –1.

También puede razonarse teniendo en cuenta que es el vértice de una parábola convexa (a > 0) o con la derivada 1ª y 2ª.

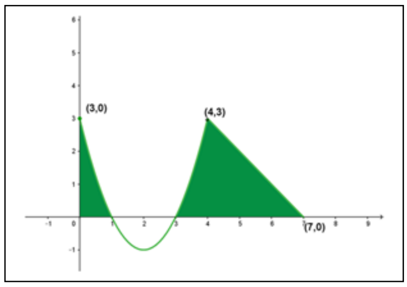
En [4, 7] $\quad y = 7 - x$

Puntos de corte con eje OX (y = 0), 7 - x = 0 ⇒ x = 7 ⇒ (7, 0)

Puntos de corte con el eje OY (x = 0) ⇒(0, 7)

Recta de pendiente negativa ⇒ decreciente

$f(x) \ge 0$ en [0,1] U [3,7]



b)

$$A = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3)\,dx + \int_4^7 (7 - x)\,dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x\right]_3^4 + \left[7x - \frac{x^2}{2}\right]_4^7 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{9}{2} = \boldsymbol{\frac{43}{6} u^2}$$

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema B.3:

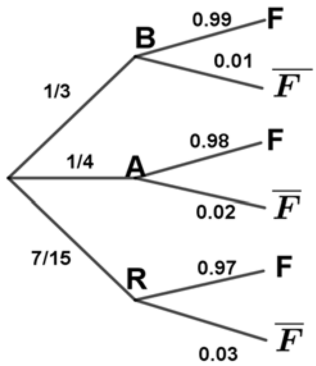
Para la construcción de un panel luminoso se dispone de un contenedor de 200 bombillas blancas, 150 bombillas azules y 250 rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es 0.01 si es blanca, 0.02 si es azul y el 0.03 si es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor: a) Calcula la probabilidad de que la bombilla no funcione. b) Sabiendo que la bombilla elegida funciona, calcula la probabilidad de que dicha bombilla no sea roja

Solución:

200 bombillas blancas $P(B)=\frac{200}{600}=\frac{1}{3}$ $\quad P(\bar{F}/B)=0.01$

150 bombillas azules $P(A)=\frac{150}{600}=\frac{1}{4}$ $\quad P(\bar{F}/A)=0.02$

250 bombillas rojas $P(R)=\frac{250}{600}=\frac{5}{12}$ $\quad P(\bar{F}/R)=0.03$



a) Probabilidad de que no funcione

$$P(\bar{F})=P(B)P(\bar{F}/B)+P(A)P(\bar{F}/A)+P(R)P(\bar{F}/R)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 0.01+\frac{1}{4}\cdot 0.02+\frac{5}{12}\cdot 0.03=0.0208$$

Probabilidad de que no funcione es igual a **0.0208**.

b) Probabilidad de que una bombilla no sea roja, sabiendo que la bombilla elegida funciona:

$$P(\bar{R}/F)=\frac{P(B\cap F)+P(A\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0.99+\frac{1}{4}\cdot 0.98}{1-0.0208}=\frac{0.575}{0.9792}=0.587\ .$$

$$\boldsymbol{P(\bar{R}/F)=0.587\ .}$$

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Problema B.4:

En una muestra aleatoria de n = 25 estudiantes de bachillerato, el 75 % afirman querer realizar estudios universitarios. **a)** Calcula un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes de bachillerato que quieren realizar estudios universitarios con un nivel de confianza del 90 %. **b)** Si se sabe que 8 de cada 10 estudiantes de bachillerato afirman querer realizar estudios universitarios y tomamos una muestra aleatoria a 100 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de estudiantes de la muestra que quieren realizar universitarios sea superior al 65 %?

Solución:

a) $\hat{p} = 0.75 \qquad 1 - \alpha = 0.90 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0.95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$

$$IC_{90\%}p = \left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}\right) = \left(0.75 - 1.645\sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{25}}, 0.75 + 1.645\sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{25}}\right) =$$

$$= (0.6075, 0.8925)$$

El intervalo de confianza para la proporción de estudiantes de bachillerato que quieren realizar estudios universitarios con un nivel de confianza del 90 % es de $(0.6075, 0.8925)$

b) p = 8/10 = 0.8

n = 100 $\quad \hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = N\left(0.8; \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}}\right) = N(0.8; 0.04) \Rightarrow Z = \frac{\hat{p} - 08}{0.04} \sim N(0, 1)$

$P(\hat{p} \geq 0.65) = P\left(z \geq \frac{0.65 - 0.8}{0.04}\right) = P(z \geq -3.75) = P(z \leq 3.75) = 0.9999$ es la probabilidad de que la proporción de estudiantes de la muestra que quieren realizar universitarios sea superior al 65 %.

La probabilidad de que la proporción de estudiantes de la muestra que quieren realizar universitarios sea superior al 65 % es del **0.9999.**

Autora: Dolores Vázquez Torrón
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

La Rioja

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018 – 2019
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA A:

A1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A1.1.– Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

(I) Calcula el determinante de A. **(0.5 puntos)**

(II) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A. **(0.5 puntos)**

(III) La matriz A es la matriz de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z). Resuélvelo en el caso en el que $a = 0$. **(1 punto)**

A1.2.– Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ x^2 + a & 1 \le x < 2 \\ b(-x+4) & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

(I) ¿Para qué valores de a y b es continua la función? **(0.5 puntos)**

(II) Utilizando los valores $a = 0$ y $b = 2$, esboza una representación gráfica de la función $f(x)$. **(1 punto)**

(III) Con los valores a y b del apartado (II), calcula el área limitada por el eje OX y la gráfica de la función. **(0.5 puntos)**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

A1.3.– El 65 % de los empleados de una empresa manejan un nuevo programa informático, de ellos, un 40 % además hablan inglés. Por otra parte, la cuarta parte de los que no manejan el nuevo programa también hablan inglés. Se elige un empleado al azar.

(I) Calcula la probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa. **(0.5 puntos)**

(II) Calcula la probabilidad de que hable inglés. **(0.5 puntos)**

(III) Si el empleado habla inglés, calcula la probabilidad de que maneje el nuevo programa. **(1 punto)**

A2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A2.1.– Alba, Blanca y Naia deben repartirse una herencia. Alba debe recibir la media de lo que reciban Blanca y Naia más 3.000 euros; Blanca debe recibir la media de lo que reciban Alba y Naia, y Naia debe recibir la media de lo que reciban Alba y Blanca menos 3.000 euros.

(I) ¿Cuánto dinero debe recibir Alba más que Blanca? **(1 punto)**

(II) Si la herencia fuese de 99.000 euros, ¿Cuánto dinero debe recibir cada una? **(1 punto)**

A2.2.– El efecto (e) de un medicamento viene dado por la parte positiva de la función $e(t) = 100t(12-t)$, en la que t es el tiempo, expresado en meses, transcurrido desde que se toma el medicamento.

(I) ¿Cuándo es máximo el efecto que produce el medicamento? **(1 punto)**

(II) ¿En qué periodos aumenta y disminuye el efecto? **(1 punto)**

A2.3.– Una cadena de supermercados compra naranjas en contenedores cada uno de los cuales contiene 400 bolsas cuyo peso medio es 6 kg con una desviación típica de 550 gr.

(I) Se toma al azar un contenedor, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de ese contenedor sea menor que 5 kg y 950 gr? **(1 punto)**

(II) Pedro no conoce el peso medio de las bolsas pero sabe que la desviación típica es 550 gr. Ha pesado todas las bolsas de un contenedor (400) y ha obtenido un peso medio de 6 kg y 30 gr. Con esos datos ha calculado para el peso medio de las bolsas un intervalo de confianza del 90 % ¿Cuál es el intervalo calculado por Pedro? **(1 punto)**

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018 – 2019
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA B:

B1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B1.1.– Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

(I) Calcula el determinante de A. **(0.5 puntos)**

(II) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A. **(0.5 puntos)**

(III) La matriz A es la matriz de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z). Resuélvelo en el caso en el que $a = 0$. **(1 punto)**

B1.2.– Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + a & 1 \leq x < 2 \\ b(-x+4) & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

(I) ¿Para qué valores de a y b es continua la función? **(0.5 puntos)**

(II) Utilizando los valores $a = 0$ y $b = 2$, esboza una representación gráfica de la función $f(x)$. **(1 punto)**

(III) Con los valores a y b del apartado (II), calcula el área limitada por el eje OX y la gráfica de la función. **(0.5 puntos)**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

B1.3.– El 65 % de los empleados de una empresa manejan un nuevo programa informático, de ellos, un 40 % además hablan inglés. Por otra parte, la cuarta parte de los que no manejan el nuevo programa también hablan inglés. Se elige un empleado al azar.

(I) Calcula la probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa. **(0.5 puntos)**

(II) Calcula la probabilidad de que hable inglés. **(0.5 puntos)**

(III) Si el empleado habla inglés, calcula la probabilidad de que maneje el nuevo programa. **(1 punto)**

B2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B2.1.– Las restricciones de una problema de programación lineal son las siguientes:

$$x - y \geq 0; \quad y + 2x \leq 9; \quad 2y + x \geq 3; \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

(I) Dibuja en el plano la región factible que represente estas restricciones. **(1 punto)**

(II) Los ingresos de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = 2y - 2x + 7$ sujeta a las restricciones anteriores. ¿Para qué valores de x e y obtiene la empresa los máximos ingresos? **(1 punto)**

B2.2.– Se considera la función

$$f(x) = \frac{a(x+1)}{(x-1)^2}$$

(I) Determina el valor de a para que la tangente en $x = 0$ sea paralela a la recta $y = x + 3$. **(1 punto)**

(II) Para $a = 1$, determina las asíntotas de la función y esboza una representación gráfica para ella. **(1 punto)**

B2.3.– Un balón de baloncesto debe pesar entre 567 y 650 gr. Se han fabricado los balones con los que se jugará en China a finales de verano la Copa del Mundo. El peso de los balones fabricados sigue una distribución normal de desviación típica 25 gr. Se distribuyen en cajones de 100 unidades.

(I) Si el peso medio de los balones fuese 605 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de los balones de un cajón superase los 603 gr? **(1 punto)**

(II) El peso medio de una muestra de 4 cajones (400 balones) es de 610 gr, determina un intervalo de confianza del 95 % para la media de la producción. **(1 punto)**

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018 – 2019
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

(1) Se sugiere un tipo de corrección positivo, es decir, partiendo de cero y sumando puntos por los aciertos que el alumno vaya obteniendo.

(2) Como excepción al apartado anterior, los errores muy graves, que muestren un desconocimiento profundo de propiedades y funciones básicas (errores repetidos en la manipulación de igualdades y desigualdades o en operaciones con fracciones, errores graves al desarrollar cuadrados o en la resolución de ecuaciones de segundo grado, etc.), penalizarán especialmente y pueden suponer un cero en el apartado en el que se hayan cometido.

(3) Se deberá valorar la exposición lógica y la coherencia de las respuestas, tanto en cuestiones teóricas como prácticas. Algunos ejemplos:

(a) Si al resolver un sistema de ecuaciones, el alumno comete un error **numérico**, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se prestará especial atención siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial.

(b) En la representación gráfica de funciones, se valorará la coherencia del dibujo con los datos obtenidos previamente por el alumno. (Vale aquí la misma excepción que en el párrafo anterior.)

(4) La puntuación máxima de cada pregunta figurará en su enunciado. En los casos en los que la pregunta contenga apartados, lo que aparecerá es el valor de cada uno de ellos.

(5) Si un alumno da una respuesta acertada a un problema escribiendo solo los resultados, sin aportar el desarrollo que le ha permitido obtener dicha solución, la puntuación en este apartado no podrá ser superior al 50 % de la nota máxima prevista. Como excepción, se será flexible en las respuestas a cuestiones de estadística y probabilidad.

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

SOLUCIONES PROPUESTA A

Problema A.1:

A1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A1.1.– Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

(I) Calcula el determinante de A. **(0.5 puntos)**

(II) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A. **(0.5 puntos)**

(III) La matriz A es la matriz de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z). Resuélvelo en el caso en el que $a = 0$. **(1 punto)**

Solución:

i. Calculamos el determinante de la matriz A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a - 2a + (a+1) - (2 - 1 + a^2(a+1)) = 1 - (1 + a^3 + a^2) = a^2(a+1)$$

$$\boldsymbol{|A| = a^2(a+1)}$$

ii. La matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero, es decir, si $a \neq 0$ o si $a \neq -1$.

Si $\boldsymbol{a \neq 0}$ o si $\boldsymbol{a \neq -1}$

iii. Para el caso en que $a = 0$, el sistema homogéneo queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Como para $a = 0$, el determinante es distinto de cero, el sistema homogéneo tiene solución distinta de la trivial.

De la segunda ecuación obtenemos z = -y. De la tercera, x = y. Luego la solución es:

$$\begin{cases} x = y = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

A1.2.– Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + a & 1 \leq x < 2 \\ b(-x+4) & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

(I) ¿Para qué valores de a y b es continua la función? **(0.5 puntos)**

(II) Utilizando los valores $a = 0$ y $b = 2$, esboza una representación gráfica de la función $f(x)$. **(1 punto)**

(III) Con los valores a y b del apartado (II), calcula el área limitada por el eje OX y la gráfica de la función. **(0.5 puntos)**

Solución:

i. La función está formada por funciones polinómicas y está definida a trozos. Su dominio es el intervalo cerrado: [0, 4]. Sólo puede dejar de ser continua en los puntos de unión de los trozos.

Para valores menores de $x = 1$ la función toma el valor 1. Para $x = 1$, $(1)^2 + a$. Para que sea continua en dicho punto debe ser, por tanto, $1 + a = 1$, luego debe ser $a = 0$.

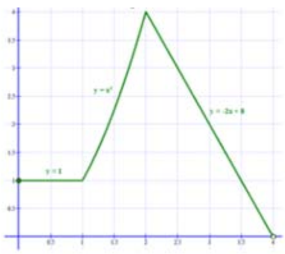
Para valores próximos a 2 pero menores que 2, debe ser $(2)^2 + a = 4 + a$.

Y para el valor $x = 2$, $b(-2 + 4) = 2b$. Luego $4 + a = 2b$.

Como ya hemos obtenido que $a = 0$, entonces $4 = 2b$, $b = 2$.

Para ***a* = 0** y ***b* = 2**, la función es continua en todo su dominio de definición.

ii. En [0, 1) es un segmento horizontal de $y = 1$, en [1, 2) es un trozo de la parábola $y = x^2$, y en [2, 4] es un segmento de la recta $y = -2x + 8$, de pendiente –2, y ordenada en el origen 8.



iii. El área pedida habrá que calcularla en los tres trozos en que está definida la función:

El primer trozo es un cuadrado de área 1. Toda la función está encima del eje de abscisas luego su área es positiva (no necesitamos escribir valores absolutos):

$$\text{Área} = 1 + \int_1^2 x^2 dx + \int_2^4 (-2x+8) dx = =$$

$$= 1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \left[\frac{-2x^2}{2} + 8x\right]\Big|_2^4 =$$

$$= 1 + \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + ((-16+32) - (-4+16)) \quad = 5 + \frac{7}{3} = \frac{22}{3}$$

Área = $\frac{22}{3}$ u^2.

A1.3.– El 65 % de los empleados de una empresa manejan un nuevo programa informático, de ellos, un 40 % además hablan inglés. Por otra parte, la cuarta parte de los que no manejan el nuevo programa también hablan inglés. Se elige un empleado al azar.

(I) Calcula la probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa. **(0.5 puntos)**

(II) Calcula la probabilidad de que hable inglés. **(0.5 puntos)**

(III) Si el empleado habla inglés, calcula la probabilidad de que maneje el nuevo programa. **(1 punto)**

Solución:

i. Llamamos PI al suceso manejar el nuevo programa informático, I al suceso hablar inglés. Los datos que nos dan son: $P(PI) = 0.65$; $P(I/PI) = 0.4$. $P(I/\overline{PI}) = 0.25$

Nos piden $P(I \cap PI)$, que sabemos que es igual a $P(PI) \cdot P(I/PI)$

$$P(I \cap PI) = P(PI) \cdot P(I/PI) = 0.65 \cdot 0.4 = 0.26.$$

La probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa es **0.26.**

ii. Para calcular la probabilidad de que hable inglés utilizamos el teorema de la probabilidad total. Debemos calcular $P(\overline{PI})$ para lo que usamos el teorema del suceso contrario: $P(\overline{PI}) = 1 - 0.65 = 0.35$.

$$P(I) = P(PI \cap I) + P(\overline{PI} \cap I) = P(PI) \cdot P(I/PI) + P(\overline{PI}) \cdot P(I/\overline{PI}) =$$

$$0.65 \cdot 0.4 + 0.35 \cdot 0.25 = 0.26 + 0.0875 = 0.3475.$$

La probabilidad de que hable inglés es de **0.3475**.

iii. Si sabemos que habla inglés y queremos calcular la probabilidad de que maneje el nuevo programa debemos calcular: $P(PI/I)$, para lo que usamos el teorema de Bayes:

$$P(PI/I) = \frac{P(PI \cap I)}{P(I)} = \frac{P(PI) \cdot P(I/PI)}{P(I)} = \frac{0.26}{0.3475} = 0.7482.$$

La probabilidad de que hable inglés sabiendo que maneja el nuevo programa es de **0.7482**.

Problema A.2:

A2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A2.1.– Alba, Blanca y Naia deben repartirse una herencia. Alba debe recibir la media de lo que reciban Blanca y Naia más 3.000 euros; Blanca debe recibir la media de lo que reciban Alba y Naia, y Naia debe recibir la media de lo que reciban Alba y Blanca menos 3.000 euros.

(I) ¿Cuánto dinero debe recibir Alba más que Blanca? **(1 punto)**

(II) Si la herencia fuese de 99.000 euros, ¿Cuánto dinero debe recibir cada una? **(1 punto)**

Solución:

i. Llamamos A al dinero que debe recibir Alba, B al que debe recibir Blanca, y N al que debe recibir Naia.

Nos dicen que $A = (B + N)/2 + 3\,000$; $B = (A + N)/2$; $N = (A + B)/2 - 3\,000$.

Planteamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 2A = B + N + 6000 \\ B = (A+N)/2 \\ 2N = A + B - 6000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2A - (A+N)/2 - N = 6000 \\ 2(A+N)/2 - A - N = 0 \\ 2N - A - (A+N)/2 = -6000 \end{cases}$$

Observamos que la segunda ecuación nos queda 0 = 0, luego nos quedan sólo dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 2A - (A+N)/2 - N = 6000 \\ 2N - A - (A+N)/2 = -6000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4A - (A+N) - 2N = 12000 \\ 4N - 2A - (A+N) = -12000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3A - 3N = 12000 \\ 3N - 3A = -12000 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A - N = 4000 \\ N - A = -4000 \end{cases}$$

Las dos ecuaciones son la misma. Dejamos todo en función de un parámetro: N.

$$\begin{cases} A = 4000 + N \\ B = (A+N)/2 = (4000 + N + N)/2 = 2000 + N \\ N = N \end{cases}$$

Alba recibe **4 000** euros más que Naia, y Blanca **2 000** euros más que Naia.

ii. Si la herencia fuese de 99 000 euros, sabemos que $A + B + N = 99\,000$. Entonces:

$$\begin{cases} A = 4\,000 + N \\ B = 2\,000 + N \\ A + B + N = 99\,000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 4\,000 + N \\ B = 2\,000 + N \\ 4\,000 + N + 2\,000 + N = 99000 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 4\,000 + N \\ B = 2\,000 + N \\ 6\,000 + 3N = 99\,000 \end{cases}$$

De donde $N = (99\,000 - 6\,000)/3 = 93\,000/3 = 31\,000$, y por tanto:

$A = 4\,000 + 31\,000 = 35\,000$, y $B = 2\,000 + 31\,000 = 33\,000$.

Alba recibe **35 000** euros, Blanca recibe **33 000** euros y Naia recibe **31 000** euros.

A2.2.– El efecto (e) de un medicamento viene dado por la parte positiva de la función $e(t) = 100t(12-t)$, en la que t es el tiempo, expresado en meses, transcurrido desde que se toma el medicamento.

(I) ¿Cuándo es máximo el efecto que produce el medicamento? **(1 punto)**

(II) ¿En qué periodos aumenta y disminuye el efecto? **(1 punto)**

Solución:

i. Para calcular cuando es máximo el efecto, calculamos la derivada de la función e igualamos a cero.

$$e(t) = 100t(12 - t) = 1200\,t - 100t^2 \to e'(t) = 1200 - 200\,t = 0 \to t = 1200/200 = 6.$$

Calculamos la derivada segunda:

$$e''(t) = -200 < 0$$

Luego la función alcanza un máximo relativo para $t = 6$, $e(6) = 3\,600$.

El efecto es máximo a los 6 meses.

ii. Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función con el signo de la derivada primera:

$e'(t) = 1200 - 200\,t \to t < 6$ entonces $e'(t) > 0$, y la función es creciente.

$e'(t) = 1200 - 200\,t \to t > 6$ entonces $e'(t) < 0$, y la función es decreciente.

El efecto aumenta antes de los 6 meses y disminuye después de los 6 meses.

A2.3.– Una cadena de supermercados compra naranjas en contenedores cada uno de los cuales contiene 400 bolsas cuyo peso medio es 6 kg con una desviación típica de 550 gr.

(I) Se toma al azar un contenedor, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de ese contenedor sea menor que 5 kg y 950 gr? **(1 punto)**

(II) Pedro no conoce el peso medio de las bolsas pero sabe que la desviación típica es 550 gr. Ha pesado todas las bolsas de un contenedor (400) y ha obtenido un peso medio de 6 kg y 30 gr. Con esos datos ha calculado para el peso medio de las bolsas un intervalo de confianza del 90 % ¿Cuál es el intervalo calculado por Pedro? **(1 punto)**

Solución:

i. Llamamos X al peso de una bolsa de naranjas. Nos dicen que la media vale 6 kg y la desviación típica 550 g = 0.55 kg. Suponemos que X se ajusta a una distribución normal: $N(6, 0.55)$.

El enunciado nos dice que n = 400. La distribución de las medias es:

$$\bar{X} = N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(6, \frac{0.55}{\sqrt{400}}) = N(6, \frac{0.55}{20}) = N(6, 0.0275)$$

Nos piden calcular: $P(\bar{X} < 5.95)$.

Tipificamos:

$$P(\bar{Z} < \frac{5.95-6}{0.0275}) = P(\bar{Z} < -1.818181) = 1 - P(\bar{Z} < 1.818181) = 1 - 0.9656 = 0.0344.$$

La probabilidad de que la media de los pesos de 400 bolsas sea menor que 5.95 es muy pequeña. Es de $\mathbf{0.0344}$.

ii. Ahora no se conoce la media poblacional, pero se ha calculado la media muestral, 6.03 kg. El intervalo de confianza al 90 % es de:

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

En el enunciado, $\bar{x} = 6.03$, $\sigma = 0.55$, n = 400. Calculamos $Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$1 - \alpha = 0.9 \to \alpha = 0.1 \to \alpha/2 = 0.05 \to 1 - \alpha/2 = 0.95 \to Z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1.64+1.65}{2} = 1.645.$$

$$\left(6.03 - 1.645 \cdot \frac{0.55}{\sqrt{400}}, \ 6.03 + 1.645 \cdot \frac{0.55}{\sqrt{400}}\right) = (6.03 - 1.645 \cdot 0.0275, \ 6.03 + 1.645 \cdot 0.0275)$$
$$= (6.03 - 0.045, \ 6.03 + 0.045) = (5.9847, \quad 6.0752)$$

El intervalo calculado es de: $(\mathbf{5.985}, \ \mathbf{6.075})$.

SOLUCIONES PROPUESTA B

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema B.1:

B1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B1.1.– Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

(I) Calcula el determinante de A. **(0.5 puntos)**

(II) ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A. **(0.5 puntos)**

(III) La matriz A es la matriz de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z). Resuélvelo en el caso en el que $a = 0$. **(1 punto)**

Solución: Igual en A.1.

i. Calculamos el determinante de la matriz A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a - 2a + (a+1) - (2 - 1 + a^2(a+1)) = 1 - (1 + a^3 + a^2) = a^2(a+1)$$

$$\boldsymbol{|A| = a^2(a+1)}$$

ii. La matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero, es decir, si $a \neq 0$ o si $a \neq -1$.

La matriz tiene inversa si $\boldsymbol{a \neq 0}$ o si $\boldsymbol{a \neq -1}$

iii. Para el caso en que $a = 0$, el sistema homogéneo queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Como para $a = 0$, el determinante es distinto de cero, el sistema homogéneo tiene solución distinta de la trivial.

De la segunda ecuación obtenemos $z = -y$. De la tercera, $x = y$. Luego la solución es:

$$\begin{cases} x = y = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \alpha} \\ \boldsymbol{y = \alpha} \\ \boldsymbol{z = -\alpha} \end{cases}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

B1.2.– Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ x^2 + a & 1 \le x < 2 \\ b(-x+4) & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

(I) ¿Para qué valores de a y b es continua la función? **(0.5 puntos)**

(II) Utilizando los valores $a = 0$ y $b = 2$, esboza una representación gráfica de la función $f(x)$. **(1 punto)**

(III) Con los valores a y b del apartado (II), calcula el área limitada por el eje OX y la gráfica de la función. **(0.5 puntos)**

Solución: Igual en A.2.

i. La función está formada por funciones polinómicas y está definida a trozos. Su dominio es el intervalo cerrado: [0, 4]. Sólo puede dejar de ser continua en los puntos de unión de los trozos.

Para valores menores de $x = 1$ la función toma el valor 1. Para $x = 1$, $(1)^2 + a$. Para que sea continua en dicho punto debe ser, por tanto, $1 + a = 1$, luego debe ser $a = 0$.

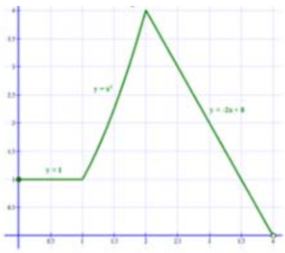
Para valores próximos a 2 pero menores que 2, debe ser $(2)^2 + a = 4 + a$.

Y para el valor $x = 2$, $b(-2 + 4) = 2b$. Luego $4 + a = 2b$.

Como ya hemos obtenido que $a = 0$, entonces $4 = 2b$, $b = 2$.

Para ***a* = 0** y ***b* = 2**, la función es continua en todo su dominio de definición.

ii. En [0, 1) es un segmento horizontal de $y = 1$, en [1, 2) es un trozo de la parábola $y = x^2$, y en [2, 4] es un segmento de la recta $y = -2x + 8$, de pendiente -2, y ordenada en el origen 8.



iii. El área pedida habrá que calcularla en los tres trozos en que está definida la función:

El primer trozo es un cuadrado de área 1. Toda la función está encima del eje de abscisas luego su área es positiva (no necesitamos escribir valores absolutos):

$$\text{Área} = 1 + \int_1^2 x^2\,dx + \int_2^4 (-2x+8)\,dx = =$$

$$= 1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \left[\frac{-2x^2}{2} + 8x\right]\Big|_2^4 =$$

$$= 1 + \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left((-16+32) - (-4+16)\right) \quad = 5 + \frac{7}{3} = \frac{22}{3}$$

Área = $\frac{22}{3}$ u².

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

B1.3.– El 65 % de los empleados de una empresa manejan un nuevo programa informático, de ellos, un 40 % además hablan inglés. Por otra parte, la cuarta parte de los que no manejan el nuevo programa también hablan inglés. Se elige un empleado al azar.

(I) Calcula la probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa. **(0.5 puntos)**

(II) Calcula la probabilidad de que hable inglés. **(0.5 puntos)**

(III) Si el empleado habla inglés, calcula la probabilidad de que maneje el nuevo programa. **(1 punto)**

Solución: Igual a A.3.

Solución:

i. Llamamos PI al suceso manejar el nuevo programa informático, I al suceso hablar inglés. Los datos que nos dan son: $P(PI) = 0.65$; $P(I/PI) = 0.4$. $P(I/\overline{PI}) = 0.25$

Nos piden $P(I \cap PI)$, que sabemos que es igual a $P(PI) \cdot P(I/PI)$

$$P(I \cap PI) = P(PI) \cdot P(I/PI) = 0.65 \cdot 0.4 = 0.26.$$

La probabilidad de que hable inglés y maneje el nuevo programa es **0.26.**

ii. Para calcular la probabilidad de que hable inglés utilizamos el teorema de la probabilidad total. Debemos calcular $P(\overline{PI})$ para lo que usamos el teorema del suceso contrario:

$$P(\overline{PI}) = 1 - 0.65 = 0.35.$$

$$P(I) = P(PI \cap I) + P(\overline{PI} \cap I) = P(PI) \cdot P(I/PI) + P(\overline{PI}) \cdot P(I/\overline{PI}) =$$

$$0.65 \cdot 0.4 + 0.35 \cdot 0.25 = 0.26 + 0.0875 = 0.3475.$$

La probabilidad de que hable inglés es de **0.3475**.

iii. Si sabemos que habla inglés y queremos calcular la probabilidad de que maneje el nuevo programa debemos calcular: $P(PI/I)$, para lo que usamos el teorema de Bayes:

$$P(PI/I) = \frac{P(PI \cap I)}{P(I)} = \frac{P(PI) \cdot P(I/PI)}{P(I)} = \frac{0.26}{0.3475} = 0.7482.$$

La probabilidad de que hable inglés sabiendo que maneja el nuevo programa es de **0.7482**.

Problema B.2:

B2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B2.1.– Las restricciones de una problema de programación lineal son las siguientes:

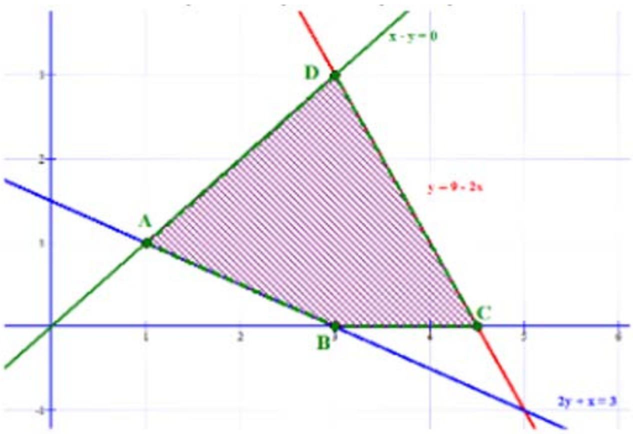
$$x - y \geq 0; \quad y + 2x \leq 9; \quad 2y + x \geq 3; \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

(I) Dibuja en el plano la región factible que represente estas restricciones. **(1 punto)**

(II) Los ingresos de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = 2y - 2x + 7$ sujeta a las restricciones anteriores. ¿Para qué valores de x e y obtiene la empresa los máximos ingresos? **(1 punto)**

Solución:

i. Las ecuaciones de las rectas son: $y = x$; $y + 2x = 9$; $2y + x = 3$; $x = 0$; $y = 0$. Calculamos los puntos de intersección: $A(1, 1)$; $B(3, 0)$; $C(9/2, 0)$; $D(3, 3)$; (0, 9); (0, 3/2); (0, 0); (5, –1). Analizamos que puntos cumplen las restricciones y dibujamos la región factible:



ii. Ingresos de la empresa: $f(x, y) = 2y - 2x + 7$. Calculamos los ingresos para los vértices de la región factible:

$A(1, 1) \to f(1, 1) = 2(1) - 2(1) + 7 = 7$

$B(3, 0) \to f(3, 0) = 2(0) - 2(3) + 7 = 1$

$C(9/2, 0) \to f(9/2, 0) = 2(0) - 2(9/2) + 7 = -2$

$D(3, 3) \to f(3, 3) = 2(3) - 2(3) + 7 = 7$

Obtenemos que los ingresos son máximos en los puntos $A(1, 1)$ y $D(3, 3)$, lo que significa que lo son para cualquier punto del segmento AD, es decir: (x, x); $1 \leq x \leq 3$.

Los ingresos son máximos en $\mathbf{A(1, 1), D(3, 3)}$ y en $\mathbf{\{(x, x);\ 1 \leq x \leq 3\}}$.

B2.2.– Se considera la función

$$f(x) = \frac{a(x+1)}{(x-1)^2}$$

(I) Determina el valor de a para que la tangente en $x = 0$ sea paralela a la recta $y = x + 3$. **(1 punto)**

(II) Para $a = 1$, determina las asíntotas de la función y esboza una representación gráfica para ella. **(1 punto)**

Solución:

i. Para que la tangente sea paralela a y = x + 3 en x = 0, debe ser la derivada primera en ese punto igual a 1.

$$f(x) = \frac{a(x+1)}{(x-1)^2} \to f'(x) = \frac{a(x-1)^2 - a(x+1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{a(x-1)-2a(x+1)}{(x-1)^3} = \frac{-ax-3a}{(x-1)^3} \to f'(0) = 1 = \frac{-3a}{-1} = 3a.$$

Luego a debe valer 1/3.

Para $\boldsymbol{a = 1/3}$ la tangente en x = 0 es paralela a $y = x + 3$.

ii. Para a = 1, la función es: $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$.

La función no está definida en x = 1, pero es continua en el resto de los puntos.

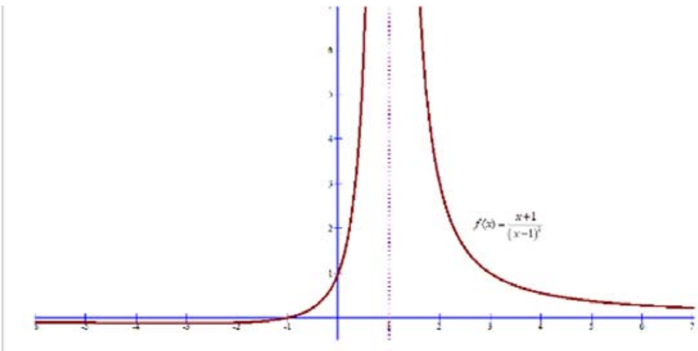
Puntos de corte con los ejes: Para x = 0, $f(0)$ = 1; (0, 1). Para y = 0, x = –1, (–1, 0).

Asíntotas y comportamiento en el infinito: Tiene una asíntota vertical (doble) para x = 1.

Cuando x tiende a infinito, la y tiende a 0, luego tiene una asíntota horizontal, y = 0.

Llevamos esta información a unos ejes coordenados y tenemos conocimiento suficiente para un primer esbozo de la gráfica.

Asíntota vertical: $\boldsymbol{x = 1}$; asíntota horizontal: $\boldsymbol{y = 0}$.



Como ya hemos calculado la primera derivada, aunque no es necesario, podemos hacer uso de ella:

$$f'(x) = \frac{-x-3}{(x-1)^3}$$

En x = –3, (–3, –2/16) = (–3, –1/8), tenemos un posible máximo o mínimo. Para x > 1, la derivada es negativa luego la función es decreciente, y lo mismo para x > –3. Entre –3 y 1 la función es creciente.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

B2.3.– Un balón de baloncesto debe pesar entre 567 y 650 gr. Se han fabricado los balones con los que se jugará en China a finales de verano la Copa del Mundo. El peso de los balones fabricados sigue una distribución normal de desviación típica 25 gr. Se distribuyen en cajones de 100 unidades.

(I) Si el peso medio de los balones fuese 605 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de los balones de un cajón superase los 603 gr? **(1 punto)**

(II) El peso medio de una muestra de 4 cajones (400 balones) es de 610 gr, determina un intervalo de confianza del 95 % para la media de la producción. **(1 punto)**

Solución:

i. Nos dice el enunciado que el peso de los balones sigue una distribución normal. Si $\mu = 605$, $\sigma = 25$, n = 100.

La distribución de las medias es:

$$\bar{X} = N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(605, \frac{25}{\sqrt{100}}) = N(605, \frac{25}{10}) = N(605, 2.5)$$

Nos piden calcular: $P(\bar{X} > 603)$.

Tipificamos:

$$P\left(\bar{Z} > \frac{603-605}{2.5}\right) = P(\bar{Z} > 0.8) = P(\bar{Z} < 0.8) = 0.7881.$$

La probabilidad de que el peso medio supere los 603 gr es de **0.79**.

ii. Ahora n = 400, $\bar{x} = 610$, no se conoce la media poblacional. El intervalo de confianza al 95 %.

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

En el enunciado, $\bar{x} = 610$, $\sigma = 25$, n = 400. Calculamos $Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \to \alpha = 0.05 \to \alpha/2 = 0.025 \to 1 - \alpha/2 = 0.975 \to Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$$

$$\left(610 - 1.96 \cdot \frac{25}{\sqrt{400}} ,\ 610 + 1.96 \cdot \frac{25}{\sqrt{400}}\right) = (610 - 2.45, 610 + 2.45) = (607.55, 612.45).$$

El intervalo de confianza es de $\mathbf{(607.55, 612.45)}$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018 – 2019
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA A:

A1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A1.1.– Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de goles que Alba. ¿Cuántos goles ha marcado cada una? **(2 puntos)**

A1.2.– Sea la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

(I) Determina la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$. **(0,5 puntos)**

(II) Determina sus asíntotas. **(1 punto)**

(III) Calcula el área que encierra el eje X, la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ (calculada en el primer apartado) y la recta $x = 2$. **(0,5 puntos)**

A1.3.– La probabilidad de que Alberto conteste a un mensaje de Whatsapp es 0.1. En los últimos 20 minutos ha recibido 3 mensajes.

(I) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste a los tres? **(0,5 puntos)**

(II) ¿Cuál es probabilidad de que conteste exactamente a uno? **(0,5 puntos)**

(III) ¿Cuál es probabilidad de que conteste al menos a uno? **(0,5 puntos)**

(IV) ¿Cuál es probabilidad de que no conteste a ninguno? **(0,5 puntos)**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

A2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A2.1.– Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(I) Calcula A^2 y A^3. **(0.5 puntos)**

(II) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15}. **(0.5 puntos)**

(III) ¿Existe alguna matriz X, (distinta de la matriz nula) que verifique $AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? **(1 punto)**

A2.2.– Sea la función

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2.$$

(I) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

(II) Calcula sus extremos relativos y esboza una representación gráfica. **(1 punto)**

A2.3.– Una máquina envasa café en bolsas siguiendo una distribución normal de 500 gr de peso medio y una desviación típica de 30 gr. Las bolsas se empaquetan en cajas de 100 unidades.

(I) Se toma al azar una caja de 100 bolsas, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de esa caja sea menor que 495 gr? **(1 punto)**

(II) Cristina no conoce el peso medio de las bolsas, aunque conoce la desviación típica (30 gr). Ha pesado un paquete de 100 bolsas y ha obtenido un peso medio de 505 gr; con estos datos ha calculado un intervalo de confianza del 95 % para la media. ¿Cuál es el intervalo determinado por Cristina? **(1 punto)**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018 – 2019
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El alumno contestará a los ejercicios de una de las dos propuestas (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a ejercicios de una propuesta y a ejercicios distintos de la otra. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

PROPUESTA B:

B1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B1.1.– Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de goles que Alba. ¿Cuántos goles ha marcado cada una? **(2 puntos)**

B1.2.– Sea la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

(I) Determina la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$. **(0,5 puntos)**

(II) Determina sus asíntotas. **(1 punto)**

(III) Calcula el área que encierra el eje X, la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ (calculada en el primer apartado) y la recta $x = 2$. **(0,5 puntos)**

B1.3.– La probabilidad de que Alberto conteste a un mensaje de Whatsapp es 0.1. En los últimos 20 minutos ha recibido 3 mensajes.

(I) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste a los tres? **(0,5 puntos)**

(II) ¿Cuál es probabilidad de que conteste exactamente a uno? **(0,5 puntos)**

(III) ¿Cuál es probabilidad de que conteste al menos a uno? **(0,5 puntos)**

(IV) ¿Cuál es probabilidad de que no conteste a ninguno? **(0,5 puntos)**

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

B2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B2.1.– Para fabricar coches y cunas de bebé disponemos de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio. Cada coche se venderá a 200 euros y cada cuna a 150 euros. Para fabricar un coche son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio y para fabricar una cuna 2 kg de acero y 2 kg de aluminio.

(I) Dibuja en el plano la región factible que represente las posibles cantidades de coches y cunas que podemos fabricar (respetando las restricciones del problema). **(1 punto)**

(II) Escribe la función que representa los ingresos que se obtienen por las ventas e indica el número de coches y de cunas que se deben fabricar para conseguir los máximos ingresos posibles. **(1 punto)**

B2.2.– Sea la función

$$f(x) = \frac{2x}{4 - x^2}.$$

(I) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

(II) Calcula sus asíntotas si las tiene y esboza una representación gráfica. **(1 punto)**

B2.3.– El peso de los estudiantes que ingresan en la Universidad sigue una distribución normal de desviación típica 15 kg.

(I) Si el peso medio fuese 70 kg, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 100 estudiantes superase los 72 kg? **(1 punto)**

(II) El peso medio de una muestra de 225 alumnos es de 72 kg, determina un intervalo de confianza del 95 % para el peso medio de los estudiantes que ingresan en la Universidad. **(1 punto)**

SOLUCIONES PROPUESTA A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

A1. Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A1.1.– Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de goles que Alba. ¿Cuántos goles ha marcado cada una? **(2 puntos)**

Solución:

Llamamos A al número de goles que ha marcado Alba, B a los que ha marcado Blanca y N a los que ha marcado Naia.

Con los datos que nos dan planteamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+B+N=65 \\ A=B+\dfrac{50B}{100} \\ N=\dfrac{A}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A+B+N=65 \\ A=B+\dfrac{B}{2}=\dfrac{3B}{2} \\ N=\dfrac{A}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A+B+N=65 \\ A=B+\dfrac{B}{2}=\dfrac{3B}{2} \\ N=\dfrac{A}{2}=\dfrac{3B}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{3B}{2}+B+\dfrac{3B}{4}=\dfrac{6B+4B+3B}{4}=\dfrac{13B}{4}=65 \\ A=\dfrac{3B}{2} \\ N=\dfrac{3B}{4} \end{cases} \rightarrow$$

Luego:

$$B=\frac{65(4)}{13}=20;\ A=\frac{3B}{2}=30;\ N=\frac{3B}{4}=15.$$

Alba ha marcado **30** goles, Blanca **20** goles y Naia **15** goles.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.1.2:

A1.2.– Sea la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

(I) Determina la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$. **(0,5 puntos)**

(II) Determina sus asíntotas.**(1 punto)**

(III) Calcula el área que encierra el eje X, la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ (calculada en el primer apartado) y la recta $x = 2$. **(0,5 puntos)**

Solución:

i. De la recta tangente podemos determinar la pendiente, calculando la derivada de la función en el punto de abscisa 1, y un punto, calculando la ordenada del punto de abscisa 1, en la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \to f(1) = 0 \to f'(x) = \frac{1(x+1)-(x-1)1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \to f'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(a) + m(x-a) \to y = 0 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

La recta tangente es: $\boldsymbol{y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}$**.**

ii. Asíntotas verticales: La función tiende a infinito cuando x se acerca a –1. $x = -1$ es una asíntota vertical, la única.

Estudiamos el comportamiento de la función en el infinito. Cuando x tiende a infinito, la función tiende a 1, luego $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Asíntota vertical: $\boldsymbol{x = -1}$. Asíntota horizontal: $\boldsymbol{y = 1}$.

iii. El área pedida es la de un triángulo rectángulo. La y vale 0 para x = 1. Para x = 2, $y = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

La base del triángulo mide 1, y la altura, $\frac{1}{2}$, luego el área es: $\frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

También podemos hacerlo con integrales:

$$\int_1^2 [\frac{x}{2} - \frac{1}{2}]dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\right]_1^2 = = \left(\frac{4}{4} - \frac{2}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Área = $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ **u^2.**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.1.3:

A1.3.– La probabilidad de que Alberto conteste a un mensaje de Whatsapp es 0.1. En los últimos 20 minutos ha recibido 3 mensajes.

(I) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste a los tres? **(0,5 puntos)**

(II) ¿Cuál es probabilidad de que conteste exactamente a uno? **(0,5 puntos)**

(III) ¿Cuál es probabilidad de que conteste al menos a uno? **(0,5 puntos)**

(IV) ¿Cuál es probabilidad de que no conteste a ninguno? **(0,5 puntos)**

Solución:

i. Llamamos W a contestar un mensaje de Whatsapp, y $\overline{W}$ a no contestar el mensaje. Sabemos que $P(W)$ = 0.1, y por el suceso contrario $P(\overline{W})$ = 0.9.

P(contestar a 3 mensajes) = $P(W) \cdot P(W) \cdot P(W)$ = 0.1 · 0.1 · 0.1 = 0.001.

La probabilidad de que conteste los 3 mensajes es $\mathbf{0.001}$.

ii. La probabilidad de que conteste exactamente a uno es:

P(exactamente a uno) = $P(W) \cdot P(\overline{W}) \cdot P(\overline{W}) + P(\overline{W}) \cdot P(W) \cdot P(\overline{W}) + P(\overline{W}) \cdot P(\overline{W}) \cdot P(W)$ =

0.1 · 0.9 · 0.9 + 0.9 · 0.1 · 0.9 + 0.9 · 0.9 · 0.1 = 0.081 + 0.081 + 0.081 = 0.243.

La probabilidad de que conteste exactamente a tres es de $\mathbf{0.243}$.

iii. Contestar al menos a uno, es el suceso contrario de no contestar a ninguno.

P(al menos uno) = 1 – P(ninguno) = 1 – $P(\overline{W}) \cdot P(\overline{W}) \cdot P(\overline{W})$ = 1 – 0.9 · 0.9 · 0.9 = 1 – 0.729 = 0.271.

La probabilidad de que conteste al menos a un mensaje es de $\mathbf{0.271}$.

iv. La probabilidad de que no conteste a ninguno, ya la hemos calculado:

P(ninguno) = $P(\overline{W}) \cdot P(\overline{W}) \cdot P(\overline{W})$ = 0.9 · 0.9 · 0.9 = 1 – 0.729.

La probabilidad de que no conteste a ninguno es $\mathbf{0.729}$.

Problema A.2:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

A2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

A2.1.– Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(I) Calcula A^2 y A^3. **(0.5 puntos)**

(II) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15}. **(0.5 puntos)**

(III) ¿Existe alguna matriz X, (distinta de la matriz nula) que verifique $AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? **(1 punto)**

Solución:

i. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \to A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \to A^3 = A^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

ii. Si seguimos multiplicando por la matriz A, volveremos a obtener lo mismo, luego:

$$A^{15} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

iii. Tendremos que resolver la ecuación: $AX=0 \to X = A^{-1}0 \to X = 0$. Pero la matriz A no tiene inversa, ya que: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$.

Llamamos a $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, e imponemos que:

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -2a-c & -2b-d \end{pmatrix}$$

Tenemos cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, pero dos de las ecuaciones coinciden con las otras dos, luego tenemos únicamente dos ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} 2a + c = 0 \\ 2b + d = 0 \end{cases} \to \begin{cases} c = -2a \\ d = -2b \end{cases}$$

Hay infinitas matrices X, de la forma: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix}$, que verifican que $AX=0$, como por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \dots$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{-2a} & \boldsymbol{-2b} \end{pmatrix}$$

Problema A.2.2:

A2.2.– Sea la función

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2.$$

(I) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)

(II) Calcula sus extremos relativos y esboza una representación gráfica. (1 punto)

Solución:

i. Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función calculamos su derivada primera:

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^2 \to f'(x) = \frac{3x^2}{2} - 6x = 3x(\frac{x}{2} - 2)$$

La derivada primera se anula si $x = 0$, o si $\frac{x}{2} - 2 = 0 \to x = 4$.

Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos: $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$, $(4, +\infty)$.

$$f'(-1) = 3(-1)(\frac{-1}{2} - 2) > 0$$

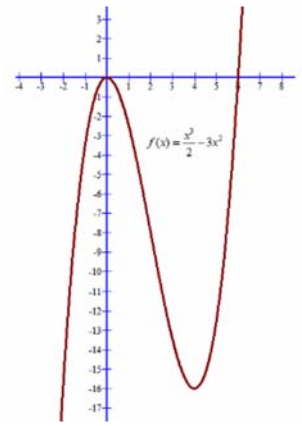
$$f'(2) = 3(2)(\frac{2}{2} - 2) < 0$$

$$f'(5) = 3(5)(\frac{5}{2} - 2) > 0$$

La función es **creciente** en el intervalo $(-\infty, 0)$, **decreciente** en $(0, 4)$, y **creciente** en $(4, +\infty)$.

ii. Al anularse la derivada primera ya sabemos que los posibles extremos relativos son los puntos de abscisa $x = 0$, y $x = 4$. Y con el estudio realizado del crecimiento y decrecimiento, también sabemos que en $x = 0$ hay un máximo y en $x = 4$, un mínimo. Por tanto:

En $(0, 0)$ hay un **máximo** relativo, y en $(4, -12)$ un **mínimo** relativo.



Problema A.2.3:

A2.3.– Una máquina envasa café en bolsas siguiendo una distribución normal de 500 gr de peso medio y una desviación típica de 30 gr. Las bolsas se empaquetan en cajas de 100 unidades.

(I) Se toma al azar una caja de 100 bolsas, ¿cuál es la probabilidad de que la media de los pesos de las bolsas de esa caja sea menor que 495 gr? **(1 punto)**

(II) Cristina no conoce el peso medio de las bolsas, aunque conoce la desviación típica (30 gr). Ha pesado un paquete de 100 bolsas y ha obtenido un peso medio de 505 gr; con estos datos ha calculado un intervalo de confianza del 95 % para la media. ¿Cuál es el intervalo determinado por Cristina? **(1 punto)**

Solución:

i. Nos dice el enunciado que se sigue una distribución normal. Si $\mu = 500$, $\sigma = 30$, n = 100.

La distribución de las medias es:

$$\bar{X} = N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(500, \frac{30}{\sqrt{100}}) = N(500, \frac{30}{10}) = N(500, 3)$$

Nos piden calcular: $P(\bar{X} < 495)$.

Tipificamos:

$$P\left(\bar{Z} < \frac{495 - 500}{3}\right) = P(\bar{Z} < -1.666) = P(\bar{Z} > -1.666) = 1 - P(\bar{Z} < 1.666)$$
$$= 1 - \frac{0.9515 + 0.9525}{2} = 1 - 0.952 = 0.048.$$

La probabilidad de que el peso medio sea menor que 495 gr es de $\mathbf{0.048}$.

ii. Ahora n = 400, $\bar{x} = 505$, $\sigma = 30$, no se conoce la media poblacional. Nos piden el intervalo de confianza al 95 %.

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Calculamos $Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.

$\left(505 - 1.96 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} , \ 505 + 1.96 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} \right) = (505 - 5.88, 505 + 5.88) = (499.12, 510.88)$.

El intervalo de confianza es de $\mathbf{(499.12, 510.88)}$.

SOLUCIONES PROPUESTA B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

B1. **Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación.**

B1.1.– Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de goles que Alba. ¿Cuántos goles ha marcado cada una? **(2 puntos)**

Solución: Igual que A.1.1.

Llamamos A al número de goles que ha marcado Alba, B a los que ha marcado Blanca y N a los que ha marcado Naia.

Con los datos que nos dan planteamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+B+N=65 \\ A=B+\dfrac{50B}{100} \\ N=\dfrac{A}{2} \end{cases} \to \begin{cases} A+B+N=65 \\ A=B+\dfrac{B}{2}=\dfrac{3B}{2} \\ N=\dfrac{A}{2} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} A+B+N=65 \\ A=B+\dfrac{B}{2}=\dfrac{3B}{2} \\ N=\dfrac{A}{2}=\dfrac{3B}{4} \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{3B}{2}+B+\dfrac{3B}{4}=\dfrac{6B+4B+3B}{4}=\dfrac{13B}{4}=65 \\ A=\dfrac{3B}{2} \\ N=\dfrac{3B}{4} \end{cases} \to$$

Luego:

$$B=\frac{65(4)}{13}=20;\ A=\frac{3B}{2}=30;\ N=\frac{3B}{4}=15.$$

Alba ha marcado **30** goles, Blanca **20** goles y Naia **15** goles.

Problema B.1.2:

B1.2.– Sea la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

(I) Determina la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$. **(0,5 puntos)**

(II) Determina sus asíntotas. **(1 punto)**

(III) Calcula el área que encierra el eje X, la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ (calculada en el primer apartado) y la recta $x = 2$. **(0,5 puntos)**

Solución: Igual que A.1.2.

i. De la recta tangente podemos determinar la pendiente, calculando la derivada de la función en el punto de abscisa 1, y un punto, calculando la ordenada del punto de abscisa 1, en la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \to f(1) = 0 \to f'(x) = \frac{1(x+1)-(x-1)1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \to f'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(a) + m(x-a) \to y = 0 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

La recta tangente es: $\boldsymbol{y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}$**.**

ii. Asíntotas verticales: La función tiende a infinito cuando x se acerca a –1. $x = -1$ es una asíntota vertical, la única.

Estudiamos el comportamiento de la función en el infinito. Cuando x tiende a infinito, la función tiende a 1, luego $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Asíntota vertical: $\boldsymbol{x = -1}$. Asíntota horizontal: $\boldsymbol{y = 1}$.

iii. El área pedida es la de un triángulo rectángulo. La y vale 0 para x = 1. Para x = 2, $y = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

La base del triángulo mide 1, y la altura, $\frac{1}{2}$, luego el área es: $\frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

También podemos hacerlo con integrales:

$$\int_1^2 [\frac{x}{2} - \frac{1}{2}]dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\right]_1^2 = = \left(\frac{4}{4} - \frac{2}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Área = $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ **u^2.**

Problema B.1.3:

B1.3.– La probabilidad de que Alberto conteste a un mensaje de Whatsapp es 0.1. En los últimos 20 minutos ha recibido 3 mensajes.

(I) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste a los tres? **(0,5 puntos)**

(II) ¿Cuál es probabilidad de que conteste exactamente a uno? **(0,5 puntos)**

(III) ¿Cuál es probabilidad de que conteste al menos a uno? **(0,5 puntos)**

(IV) ¿Cuál es probabilidad de que no conteste a ninguno? **(0,5 puntos)**

Solución: Igual que A.1.3.

i. Llamamos W a contestar un mensaje de Whatsapp, y $\overline{W}$ a no contestar el mensaje. Sabemos que $P(W)$ = 0.1, y por el suceso contrario $P(\overline{W})$ = 0.9.

P(contestar a 3 mensajes) = $P(W) \cdot P(W) \cdot P(W)$ = 0.1 · 0.1 · 0.1 = 0.001.

La probabilidad de que conteste los 3 mensajes es $\mathbf{0.001}$.

ii. La probabilidad de que conteste exactamente a uno es:

P(exactamente a uno) = $P(W) \cdot P(\overline{W}) \cdot P(\overline{W}) + P(\overline{W}) \cdot P(W) \cdot P(\overline{W}) + P(\overline{W}) \cdot P(\overline{W}) \cdot P(W)$ =

0.1 · 0.9 · 0.9 + 0.9 · 0.1 · 0.9 + 0.9 · 0.9 · 0.1 = 0.081 + 0.081 + 0.081 = 0.243.

La probabilidad de que conteste exactamente a tres es de $\mathbf{0.243}$.

iii. Contestar al menos a uno, es el suceso contrario de no contestar a ninguno.

P(al menos uno) = 1 – P(ninguno) = 1 – $P(\overline{W}) \cdot P(\overline{W}) \cdot P(\overline{W})$ = 1 – 0.9 · 0.9 · 0.9 = 1 – 0.729 = 0.271.

La probabilidad de que conteste al menos a un mensaje es de $\mathbf{0.271}$.

iv. La probabilidad de que no conteste a ninguno, ya la hemos calculado:

P(ninguno) = $P(\overline{W}) \cdot P(\overline{W}) \cdot P(\overline{W})$ = 0.9 · 0.9 · 0.9 = 1 – 0.729.

La probabilidad de que no conteste a ninguno es $\mathbf{0.729}$.

Problema B.2:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

B2. Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

B2.1.– Para fabricar coches y cunas de bebé disponemos de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio. Cada coche se venderá a 200 euros y cada cuna a 150 euros. Para fabricar un coche son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio y para fabricar una cuna 2 kg de acero y 2 kg de aluminio.

(I) Dibuja en el plano la región factible que represente las posibles cantidades de coches y cunas que podemos fabricar (respetando las restricciones del problema). **(1 punto)**

(II) Escribe la función que representa los ingresos que se obtienen por las ventas e indica el número de coches y de cunas que se deben fabricar para conseguir los máximos ingresos posibles. **(1 punto)**

Solución:

i. Llamamos x al número de coches de bebés que queremos fabricar, e y al número de cunas. Según el enunciado tenemos las siguientes restricciones: $\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{cases}$

Hallamos los puntos de intersección:

Con $x + 2y = 80$, si $x = 0$ entonces $y = 40$; Si $y = 0$, $x = 80$;

Con $3x + 2y = 120;\ x = 0 \to y = 60;\ y = 0 \to x = 40;$

$\begin{cases} x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 120 \end{cases} \to x = 20, y = 30;$

Los puntos de intersección que verifican las restricciones son: $A(0, 0)$; $B(40, 0)$; $C(20, 30)$; $D(0, 40)$.

La región factible:

ii. La función ingresos es: $I(x, y) = 200x + 150y$. Estudiamos cuándo son máximos:

$A(0, 0) \to I(0, 0) = 200(0) + 150(0) = 0$; $B(40, 0) \to I(40, 0) = 200(40) + 150(0) = 8000$;

$C(20, 30) \to I(20, 30) = 200(20) + 150(30) = 4000 + 4500 = 8500$; $D(0, 40) \to I(x, y) = 150(40) = 6000$;

Los máximos ingresos se obtienen en $C(20, 30)$ y es de 8500 euros.

Se deben fabricar **20** coches y **30** cunas para que se obtenga en máximo beneficio de **8500** euros.

Problema B.2.2:

B2.2.– Sea la función

$$f(x) = \frac{2x}{4 - x^2}.$$

(I) Estudia razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)

(II) Calcula sus asíntotas si las tiene y esboza una representación gráfica. (1 punto)

Solución:

i. Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función utilizamos la derivada primera:

$$f(x) = \frac{2x}{4-x^2} \to f'(x) = \frac{2(4-x^2) - 2x(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{8 - 2x^2 + 4x^2}{(4-x^2)^2} = \frac{8+2x^2}{(4-x^2)^2}$$

La derivada primera no se anula en ningún punto, y siempre tiene signo positivo. Por tanto, la función es siempre creciente.

La función es siempre **creciente**.

ii. El dominio de definición de la función es toda la recta real excepto en los puntos en que se anula el denominador, 2 y –2.

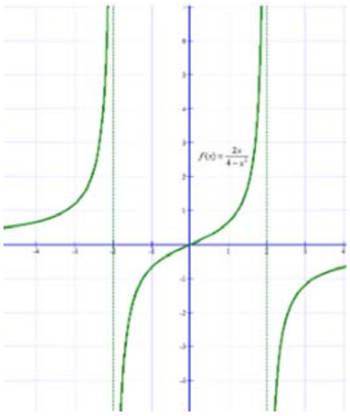
$$f(x) = \frac{2x}{4-x^2} = \frac{2x}{(2+x)(2-x)}$$

Tiene dos asíntotas verticales en x = 2 y en x = –2.

Estudiamos el comportamiento en el infinito: Cuando x tiende a infinito la función tiende a cero.

Hay una asíntota horizontal y = 0.

Puntos de corte con los ejes: Sólo corta a los ejes en (0, 0).



Asíntotas verticales: x = 2 y x = –2. Asíntota horizontal: y = 0.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2.3:

B2.3.– El peso de los estudiantes que ingresan en la Universidad sigue una distribución normal de desviación típica 15 kg.

(I) Si el peso medio fuese 70 kg, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 100 estudiantes superase los 72 kg? **(1 punto)**

(II) El peso medio de una muestra de 225 alumnos es de 72 kg, determina un intervalo de confianza del 95 % para el peso medio de los estudiantes que ingresan en la Universidad. **(1 punto)**

Solución:

i. Nos dice el enunciado que el peso de los estudiantes sigue una distribución normal de $\sigma = 15$. Si $\mu = 70$, n = 100. La distribución de las medias es:

$$\bar{X} = N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(70, \frac{15}{\sqrt{100}}) = N(70, \frac{15}{10}) = N(70{,}1.5)$$

Nos piden calcular: $P(\bar{X} > 72)$.

Tipificamos:

$$P\left(\bar{Z} > \frac{72-70}{1.5}\right) = P(\bar{Z} > 1.333) = 1 - P(\bar{Z} < 1.333) = 1 - 0.9082 = 0.0918.$$

La probabilidad de que el peso medio sea mayor de 72 kg es de $\mathbf{0.0918}$.

ii. Ahora n = 225, $\bar{x} = 72$, $\sigma = 15$, no se conoce la media poblacional. Nos piden el intervalo de confianza al 95 %.

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Calculamos $Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.

$$\left(72 - 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{225}} , \quad 72 + 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{225}}\right) = \left(72 - 1.96 \cdot \frac{15}{15} , \quad 72 + 1.96 \cdot \frac{15}{15}\right)$$
$$= (72 - 1.96, 72 + 1.96) = (70.04, 73.96).$$

El intervalo de confianza es de $\mathbf{(70.04, 73.96)}$.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

MADRID

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Textos Marea Verde

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las características siguientes: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, almacenamiento de datos alfanuméricos, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A-2B$ sea nulo.
b) Determínese si las matrices C y $(C^t\cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.
a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.
b) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
La derivada de una función real de variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$f'(x)=2x^2-4x-6$$

a) Obténgase la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0,3)$.
b) Determínense los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad ($\bigcup$) y convexidad ($\bigcap$) de esta función.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)=0'6$, $P(B)=0'8$ y $P(A\cap\overline{B})=0'1$.
a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B y determínese si los sucesos A y $\overline{B}$ son independientes. $\overline{B}$ denota el complementario del suceso B.
b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A o B.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.
a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99'2 % para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates.
b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro real m:

$$\left.\begin{array}{rcl} -x+y+z & = & 0 \\ x+my-z & = & 0 \\ x-y-mz & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) Determínense los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x=y=z=0$.
b) Resuélvase el sistema para $m=1$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\frac{8}{x^2+4}$$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.
b) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x=2$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

La función real de variable real, $f(x)$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases} e^x+k & \text{si } x\le 0, \\ 1-x^2 & \text{si } 0<x\le 3, \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x>3. \end{cases}$$

a) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de k.
b) Considerando $k=0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0'60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0'30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0'15. Seleccionado un niño al azar de esta región,
a) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.
b) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1'5$ kilogramos.
a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0'49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.
b) Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5'75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

Se consideran las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz A - $2B$ sea nulo.

b) Determínese si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

Solución

a) Se cumple que:

$$A-2\,B=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A-2\,B|=\begin{vmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\,k-4-24-1=2\,k-29=0 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{k=\frac{29}{2}}$$

b) $\boldsymbol{C}$ no es invertible al no ser cuadrada.

$$C^t \cdot C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ con: } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3\neq 0 \text{ por lo que:}$$

$\boldsymbol{C^t \cdot C}$ es invertible.

Tenemos que:

$$(C^t \cdot C)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{(C^t \cdot C)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}$$

Problema A.2:

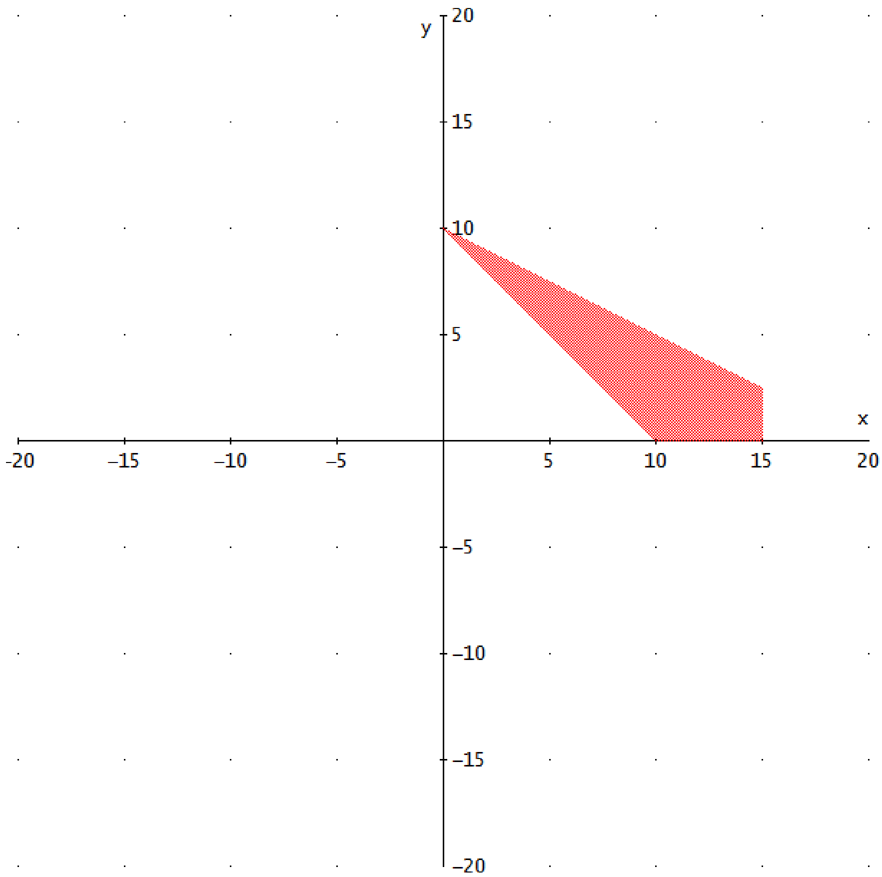
Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

b) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Solución

a) Si llamamos x_1 a la cantidad de helado que prepara y x_2 a la cantidad de horchata, las restricciones son $0 \leq x_1 \leq 15$, $x_1 + x_2 \geq 10$, $x_1 + 2\,x_2 \leq 20$, $x_2 \geq 0$. Representación:



El beneficio es $b(x_1, x_2) = 25\,x_1 + 12\,x_2$. Como el problema es lineal, el máximo se alcanza en uno de los vértices. Se cumple que $b(0,10) = 12 \times 10 = 120$, $b(10,0) = 25 \times 10 = 250$, $b(15,0) = 25 \times 15 = 375$. El otro vértice es el punto de corte entre $x_1 = 15$, $x_1 + 2\,x_2 = 20 \Rightarrow 15 + 2\,x_2 = 20 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}$, con $b\left(15, \frac{5}{2}\right) = 25 \times 15 + 12 \times \frac{5}{2} = 405$ €.

Beneficio máximo de **405** euros que tiene que preparar con **15** litros de helado y **2.5** litros de horchata.

Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.3:

La derivada de una función real de variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$\boldsymbol{f'(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 6}$$

a) Obténgase la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto (0, 3).

b) Determínense los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad (∪) y convexidad (∩) de esta función.

Solución

a) Se cumple que:

$f(x) = \int(2\,x^2 - 4\,x - 6)\;dx = 2\,\frac{x^3}{3} - 2\,x^2 - 6\,x + C \Rightarrow f(0) = 2\,\frac{0^3}{3} - 2\,0^2 - 0 + C = C = 3,$ por lo que

$$\boldsymbol{f(x) = 2\,\frac{x^3}{3} - 2\,x^2 - 6\,x + 3}$$

b) Tenemos que $f'(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 6 = 2\,(x^2 - 2\,x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{16}}{2} = 3, -1$, con $f'(x) = 2\,(x^2 - 2\,x - 3) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$, por lo que f es estrictamente creciente si $x < -1$, f es estrictamente decreciente si $-1 < x < 3$, que f es estrictamente creciente si $x > 3$ y entonces:

$\boldsymbol{f}$ tiene un máximo relativo en $\boldsymbol{-1}$ y un mínimo relativo en $\boldsymbol{3}$.

Se cumple que $f''(x) = 4\,x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, con $f''(x) = 4\,(x - 1) < 0 \Leftrightarrow x < 1$, por lo que

$\boldsymbol{f}$ es convexa si $\boldsymbol{x < 1}$ y $\boldsymbol{f}$ es cóncava si $\boldsymbol{x > 1}$

Problema A.4:

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)$ = 0.6, $P(B)$ = 0.8 y $P(A \cap \bar{B})$) = 0.1.

a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B y determínese si los sucesos A y B son independientes. $\bar{B}$ denota el complementario del suceso B.

b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A o B.

Solución

a) Se cumple que $P(A/\bar{B}) = \frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.1}{1-0.8} = \frac{1}{2}$.

Por otro lado,

$0.6 = P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.6 - 0.1 = 0.5 \neq P(A) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48$,

luego A y B no son independientes.

La probabilidad de que ocurra el suceso $\boldsymbol{A}$ si no ha ocurrido el suceso $\boldsymbol{B}$ es $\boldsymbol{P(A/\bar{B}) = \frac{1}{2}}$. $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no son independientes.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9$

La probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A o $\boldsymbol{B}$, es $\boldsymbol{P(A \cup B) = 0.9}$

Problema A.5:

El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media $\boldsymbol{\mu}$ euros y varianza 49 euros^2.

a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99.2 % para estimar el precio medio mensual, $\boldsymbol{\mu}$, de las clases de Pilates.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

Solución:

a) Se cumple que $X = precio$ sigue una $N(\mu, 49)$, por lo que $Y = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{1}{64}\sum_{i=1}^{64} X_i - \mu}{\frac{7}{8}} \sim N(0,1)$

Tenemos que $P(-z \le Y \le z) = P(Y \le z) - P(Y \le -z) = P(Y \le z) - P(Y \ge z) = P(Y \le z) - \big(1 - P(Y \le z)\big) = 2\,P(Y \le z) - 1 = 0.992 \Rightarrow P(Y \le z) = \frac{1.992}{2} = 0.996.$

Mirando en la tabla, obtenemos $z = 2.65$, por lo que el intervalo es:

$$\left[34 - 2.65\,\frac{7}{8},\ 34 + 2.65\frac{7}{8}\right] = [31.6813,\ 36.3188].$$

El intervalo de confianza es de $[\mathbf{31.6813},\ \mathbf{36.3188}]$

b) Como $2\,P(Y \le z) - 1 = 0.95 \Rightarrow P(Y \le z) = \frac{1.95}{2} = 0.975.$

Mirando en la tabla, obtenemos $z = 1.96$, por lo que el radio del intervalo es:

$1.96\frac{7}{\sqrt{n}} \le 3 \Rightarrow \sqrt{n} \ge \frac{13.72}{3} = 4.57 \Rightarrow n \ge (4.57)^2 = 20.88 \Rightarrow n = 21$ al ser n natural.

El tamaño muestral mínimo es $\boldsymbol{n} = \mathbf{21}$

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro real $\boldsymbol{m}$:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{-x+y+z=0} \\ \boldsymbol{x+m\,y-z=0} \\ \boldsymbol{x-y-m\,z=0} \end{array}\right\}$$

a) Determínense los valores del parámetro real $\boldsymbol{m}$ para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $\boldsymbol{x=y=}$ z = 0.

b) Resuélvase el sistema para $\boldsymbol{m}$ = 1.

Solución

a) Para que tenga infinitas soluciones ha de ser:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix} = m^2+1-1-m-1+m = m^2-1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

El sistema tiene soluciones distintas de la trivial, si $\boldsymbol{m = \pm 1}$

b) Para $\boldsymbol{m}$ = 1, el sistema queda $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$.

Sobra la tercera ecuación, ya que es igual a la primera.

Sumando las dos primeras, queda $2\,y = 0 \Rightarrow y = 0$.

Sustituyendo en la primera, $-x+0+z=0 \Rightarrow z = x$.

Luego las soluciones son:

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}),\ x \in \mathbb{R}$$

Problema B.2:

Se considera la función real de variable real: $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{8}}{\boldsymbol{x^2+4}}$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $\boldsymbol{f(x)}$ y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.

b) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $\boldsymbol{x}$ = 2.

Solución:

a) Se cumple que $f'(x) = \frac{´-16\,x}{(x^2+4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, con:

$f'(x) = \frac{´-16\,x}{(x^2+4)^2} < 0 \Leftrightarrow x > 0$ y $f'(x) = \frac{´-16\,x}{(x^2+4)^2} > 0 \Leftrightarrow x < 0$ (ya que el denominador es siempre positivo).

Por tanto

$\boldsymbol{f}$ es estrictamente **creciente** si $\boldsymbol{x < 0}$, y $\boldsymbol{f}$ es estrictamente **decreciente** si $\boldsymbol{x > 0}$.

Como f es continua (cociente de funciones continuas: funciones polinómicas, no se anula el denominador), no tiene asíntotas verticales.

Se cumple que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8}{x^2+4} = \frac{8}{\infty} = 0$, luego

$\boldsymbol{y = 0}$ **es asíntota vertical**.

b) Se cumple que $f(2) = \frac{8}{2^2+4} = 1$, $f'(2) = \frac{´-32}{(2^2+4)^2} = -\frac{1}{2}$, luego la recta pedida es $y = 1 - \frac{1}{2}\,(x-2)$

La recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $\boldsymbol{x}$ = 2 es $\boldsymbol{y = 1 - \frac{1}{2}\,(x-2)}$

Problema B.3:

La función real de variable real, $\boldsymbol{f(x)}$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k \; si \; x \le 0 \\ 1 - x^2 \; si \; 0 < x \le 3 \\ \dfrac{1}{x-3} \; si \; x > 3 \end{cases}$$

a) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de $\boldsymbol{k}$.

b) Considerando $\boldsymbol{k} = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $\boldsymbol{f(x)}$, el eje de abscisas y las rectas $\boldsymbol{x} = -\mathbf{1}$ y $\boldsymbol{x} = 1$.

Solución:

a) Se cumple que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (e^x + k\,) = e^0 + k = 1 + k,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1 - x^2\,) = 1 - 0^2 = 1,$$

por lo que f es continua en 0 si y sólo si: $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 + k = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 \Leftrightarrow k = 0$

Se cumple que

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{3-3} = \infty,$$

por lo que f no es continua en 3.

En los demás puntos f es continua al estar compuesta de exponenciales y funciones polinómicas, continuas, y no anularse el denominador.

La función **no** es continua en $\boldsymbol{x} = 3$, ni en $x = 0$ para $\boldsymbol{k}$ distinto de cero.

b) Se cumple que:

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} e^x\,dx + \int_{0}^{1} (1 - x^2)\,dx = [e^x]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - e^{-1} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{e} = \frac{5\,e - 3}{3\,e}$$

$$A = \frac{5\,e-3}{3\,e}\ \mathrm{u}^2$$

Problema B.4:

De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0.60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0.30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0.15. Seleccionado un niño al azar de esta región, a) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar. b) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

Solución

a) Se cumple que:

$$P(\{fracaso\}) = P(\{fracaso\} \cap \{juega\ más\ tiempo\}) + P(\{fracaso\} \cap \{no\ juega\ más\ tiempo\}) =$$

$$P(\{fracaso\}/\{juega\ más\ tiempo\}) \cdot P(\{juega\ más\ tiempo\}) + P(\{fracaso\}/\{no\ juega\ más\ tiempo\}) \cdot P(\{no\ juega\ más\ tiempo\})$$

$$= 0.3 \cdot 0.6 + 0.15 \cdot 0.4 = 0.18 + 0.6 = 0.78.$$

La probabilidad de que tenga fracaso escolar es de 0.78.

b) Se cumple que:

$$P(\{no\ juega\ más\ tiempo\}/\{fracaso\}) = \frac{P(\{fracaso\} \cap \{no\ juega\ más\ tiempo\})}{P(\{fracaso\})}$$

$$= \frac{P(\{fracaso\}/\{no\ juega\ más\ tiempo\})\, P(\{no\ juega\ más\ tiempo\})}{P(\{fracaso\})}$$

$$= \frac{0.15 \cdot 0.4}{0.78} = \frac{0.06}{0.78} = \frac{6}{780} = \frac{1}{130}.$$

Si tiene fracaso escolar, la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado es de $\frac{1}{130} = 0.00769$, menor de un 1 por ciento.

Problema B.5:

El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica σ = 105 kilogramos. a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95%. La amplitud de este intervalo resultó ser 0.49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra. b) Supóngase que μ = 6 kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5.75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

Solución

a) Como 2 $P(Y \leq z) - 1 = 0.95 \Rightarrow P(Y \leq z) = \frac{1.95}{2} = 0.975$.

Mirando en la tabla, obtenemos $z = 1.96$, por lo que el radio del intervalo es: $1.96\frac{105}{\sqrt{n}} = 0.49 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96\ 105}{0.49} = 420 \Rightarrow n = 420^2 = 176\,400$ mochilas.

El número de mochilas seleccionadas en la muestra es de $\mathbf{176\,400}$ mochilas

b) Se cumple que $X = peso$ sigue una $N(6,\ 105^2)$, por lo que $Y = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{1}{225}\sum_{i=1}^{225} X_i - 6}{\frac{105}{15}} = \frac{\frac{1}{225}\sum_{i=1}^{225} X_i - 6}{7} \sim N(0, 1)$

Tenemos que

$$P\left(\frac{1}{225}\sum_{i=1}^{225} X_i > 5.75\right) = P\left(\frac{\frac{1}{225}\sum_{i=1}^{225} X_i - 6}{7} > \frac{5.75 - 6}{7} = -0.035\right) = P(Y < 0.035) \approx 0.512.$$

La probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5.75 kilogramos es de $\mathbf{0.512}$.

uc3m Universidad Carlos III de Madrid

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las características siguientes: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, almacenamiento de datos alfanuméricos, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.
b) Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 8x$.
a) Determínese en qué puntos la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal.
b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 - 9} & \text{si} \quad x < 3, \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f.
b) Determínese si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de 2/5 hacían ejercicio regularmente y 2/3 siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de 9/25 hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio
a) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?
b) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.
a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.
b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.

a) Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensiones del estanque.
b) Si se desea que el estanque respetando esas características tenga el mayor ancho posible, determínense el largo del estanque y su coste.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

y la matriz B es tal que

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese A^{-1}.
b) Calcúlese B^{-1}.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.
b) Determínense los valores de x en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0'3$, $P(B \mid A) = 0'4$, $P(B \mid \overline{A}) = 0'6$. Calcúlese:

a) $P(A \mid B)$
b) $P(\overline{A} \mid \overline{B})$

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es $P = 0'22$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.
b) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 había faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.
b) Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

Solución

a) Se cumple que $|A| = \begin{vmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 4 - 2\,a - 4 = a^2 - 2\,a = a\,(a-2) = 0 \Leftrightarrow a = 0, a = 2$

Luego, $\boldsymbol{A}$ no tiene inversa $\Leftrightarrow \boldsymbol{a = 0, a = 2}$

b) Si $a = 3$, $|A| = 3\,(3-2) = 3$, con $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$, por lo que $adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(adj(A)\right)^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Entonces la solución es $X = A^{-1}\,B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3} \\ -\boldsymbol{\frac{2}{3}} \\ \boldsymbol{\frac{4}{3}} \end{pmatrix}$$

Problema A.2:

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 8x$.
a) Determínese en qué puntos la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal.
b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Solución

a) Por ser la tangente horizontal se cumple que se anula la derivada:

$$f'(x) = 6\,x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow\ x^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}},$$

luego los puntos pedidos son: $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-32}{3\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{32}{3\sqrt{3}}\right)$$

b) Se cumple que la función corta al eje de abscisas si:

$$f(x) = 2\,x^3 - 8\,x = x\,(2\,x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 2.$$

Como $f(1) = 2 - 8 = -6 < 0$, tenemos que $f(x) \le 0$ si $x \in [0, 2]$, por lo que el área pedida es:

$$A = \int_0^2 -(2\,x^3 - 8\,x)\,dx = \left[-2\frac{x^4}{4} + 8\,\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -8 + 16 = 8.$$

$$\boldsymbol{A = 8\ \mathrm{u}^2}$$

Problema A.3:

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-9} & \text{si} \quad x < 3, \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f.
b) Determínese si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

Solución

a) Estudio de la continuidad:

Si $x > 3$, f es continua (función polinómica).

Si $x < -3$, f es continua al ser cociente de polinomios, salvo si se anula el denominador:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3.$$

Estudiamos el límite en el punto de unión de las ramas.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{3^3}{3^2-9} = \frac{27}{-0} = -\infty$, luego f no es continua en 3.

$\boldsymbol{f}$ no es continua en $\mathbf{3}$.

b) Como $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ (apartado a), $x = 3$ es asíntota vertical.

Como en – 3 se anula el denominador y no el numerador, $x = -3$ es asíntota vertical

Como $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 - 4) = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$, f no tiene asíntota horizontal.

Como $m = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-4}{x} = +\infty$, f no tiene asíntota oblicua en $+\infty$.

Tenemos que:

$m = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-9}}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^3-9\,x} = \frac{1}{1} = 1$,

$n = \lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) - m\,x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-9} - x\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{9\,x}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{9}{x} = 0$, luego:

$y = x$ es asíntota oblicua en $-\infty$.

Asíntotas verticales: $\boldsymbol{x = 3}$ y $\boldsymbol{x = -3}$.

No tiene asíntota horizontal.

Tiene asíntota oblicua en $-\infty$: $\boldsymbol{y = x}$

Problema A.4:

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de 2/5 hacían ejercicio regularmente y 2/3 siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de 9/25 hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio

a) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?

b) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

Solución:

Como $P(\{hacer\ ejercicio\}/\{desayunar\}) = \frac{9}{25} \neq P(\{hacer\ ejercicio\}) = \frac{2}{5}$.

No es independiente que desayune con que haga ejercicio.

b) Se cumple que:

$P(\{no\ hacer\ ejercicio\} \cap \{no\ desayunar\}) = P((\{hacer\ ejercicio\} \cup \{desayunar\})^c) = 1 - P(\{hacer\ ejercicio\} \cup \{desayunar\}) = 1 - \big(P(\{hacer\ ejercicio\}) + P(\{desayunar\}) - P(\{hacer\ ejercicio\} \cap \{desayunar\})\big) = 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} - P(\{hacer\ ejercicio\} \cap \{desayunar\})\right)$

Tenemos que:

$$P(\{hacer\ ejercicio\} \cap \{desayunar\}) =$$
$$= P(\{hacer\ ejercicio\}/\{desayunar\})\, P(\{desayunar\}) = \frac{9}{25}\frac{2}{3} = \frac{6}{25},$$

por lo que

$P(\{no\ hacer\ ejercicio\} \cap \{no\ desayunar\}) = 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{6}{25}\right) = 1 - \frac{62}{75} = \frac{13}{75}$.

$$\boldsymbol{P(\{no\ hacer\ ejercicio\} \cap \{no\ desayunar\}) = \frac{13}{75}}$$

Problema A.5:

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.
b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

Solución:

a) Tenemos que $n = 15$, $\sigma = 25$. El intervalo de confianza de la media poblacional μ es:

$\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$, donde $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ cumple que:

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \left(1 - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right)$$

$$= 2\,P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - 1 = \frac{95}{100} = \frac{19}{20} \Rightarrow P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1+\frac{19}{20}}{2} = \frac{39}{40} = 0.975,$$

siendo $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$.

Mirando en la tabla, tenemos que $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.

La media muestral es $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{25} X_i}{25} = 560$, por lo que el intervalo pedido es:

$$\left[560 - 1.96\,\frac{25}{\sqrt{15}},\ 560 + 1.96\,\frac{25}{\sqrt{15}}\right] \approx\ [547.35, 572.65].$$

El intervalo pedido es aproximadamente: $[\mathbf{547.35},\ \mathbf{572.65}]$.

b) Tenemos que $n = 50$, $\sigma = 25$, $\mu = 560$. Entonces:

$$P(\bar{X} \geq 565) = P\left(\frac{\bar{X}-560}{\frac{25}{\sqrt{50}}} \geq \frac{565-560}{\frac{25}{\sqrt{50}}} = \sqrt{2}\right) = 1 - P\left(\frac{\bar{X}-560}{\frac{25}{\sqrt{50}}} \leq \sqrt{2} \approx 1.41\right),$$

siendo $\frac{\bar{X}-560}{\frac{25}{\sqrt{50}}} \sim N(0,1)$. Mirando en la tabla, tenemos que:

$$P(\bar{X} \geq 565) = 1 - P\left(\frac{\bar{X}-560}{\frac{25}{\sqrt{50}}} \leq 1.41\right) = 1 - 0.9207 = 0.0793$$

$$\boldsymbol{P(\bar{X} \geq 565) = 0.0793}$$

SOLUCIONES OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.

a) Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensiones del estanque.
b) Si se desea que el estanque respetando esas características tenga el mayor ancho posible, determínense el largo del estanque y su coste.

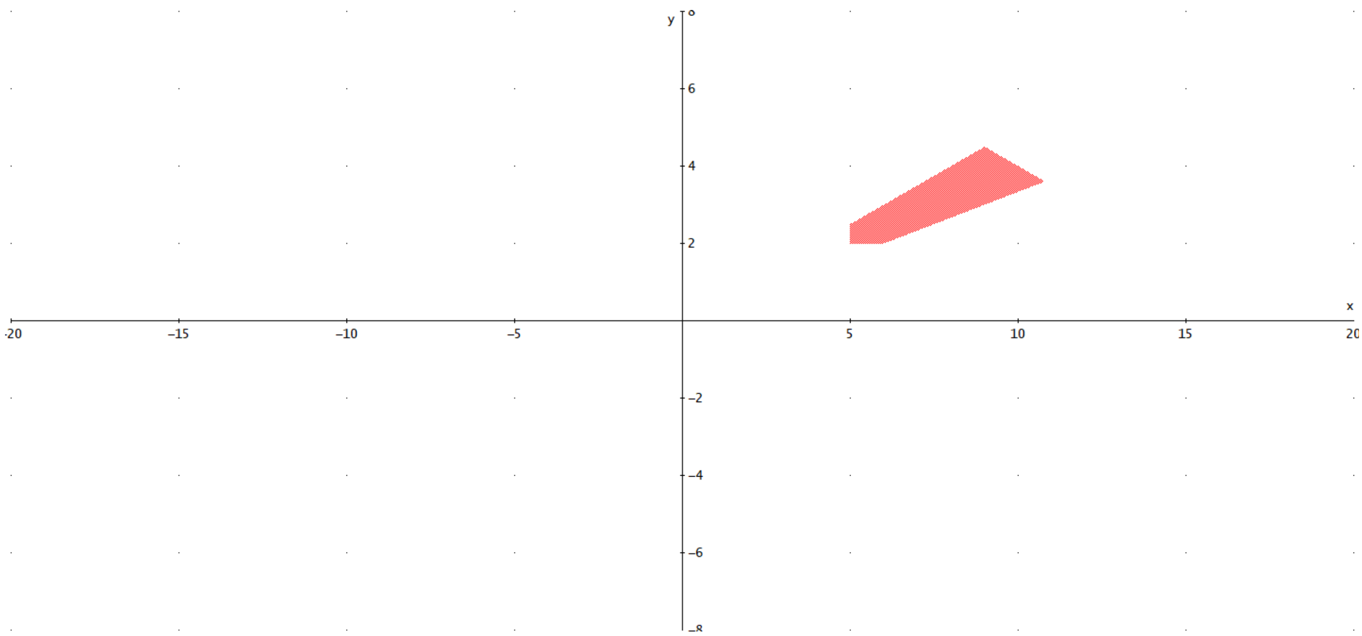
Solución:

a) Si llamamos x al número de metros de largo, y al número de metros de ancho, se cumple que $x \geq 5$, $y \geq 2$, $3\,y \geq x \geq 2\,y$ y como el coste total es $500\,x + 1000\,y$ y el presupuesto 9000, ha de ser:

$500\,x + 1000\,y \leq 9000 \Leftrightarrow x + 2\,y \leq 18$, luego la región es:

$$R = \{(x, y)/x \geq 5, y \geq 2{,}3\,y \geq x \geq 2\,y, x + 2\,y \leq 18\}.$$

Representación:



b) Hay que hallar el mínimo de y en R. Como y es lineal y las restricciones también, el máximo se alcanzará en algún vértice de R. Por el dibujo vemos que los vértices son

$$(5, 2),$$

$$\left.\begin{array}{r} x = 5 \\ x = 2\,y \end{array}\right\} \Rightarrow 5 = 2\,y \Rightarrow y = \tfrac{5}{2}\text{: } \left(5, \tfrac{5}{2}\right),$$

$$\left.\begin{array}{r} y = 2 \\ y = \frac{x}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{3} = 2 \Rightarrow x = 6\text{: } (6, 2),$$

$$\left.\begin{array}{r} x = 2\,y \\ x + 2\,y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\,y + 2\,y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}, x == 2\,\frac{9}{2} = 9\text{: } \left(9, \frac{9}{2}\right),$$

$$\left.\begin{array}{r} x = 3\,y \\ x + 2\,y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\,y + 2\,y = 5\,y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{5}, x = 2\,\frac{18}{5} = \frac{36}{5}: \left(\frac{36}{5}, \frac{18}{5}\right).$$

La máxima coordenada y de estos vértices es $\frac{9}{2}$ (se ve también en el dibujo), luego el mayor ancho es $\frac{9}{2}$, siendo el largo $x = 9$ y el coste $500\,x + 1000\,y = 9000$ (ya que el vértice que maximiza está en esta recta).

El ancho debe ser de $\mathbf{4.5}$ m, el largo de $\mathbf{9}$ m, y el coste de $\mathbf{9\,000}$ euros.

Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2:

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}2 & 8 & 10\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

y la matriz B es tal que

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & -3\end{pmatrix}$$

a) Calcúlese A^{-1}.
b) Calcúlese B^{-1}.

Solución:

a) Se cumple que $|A|=\begin{vmatrix}2 & 8 & 10\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 6\end{vmatrix}=12+64+60-40-12-96=-12$, con $A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{vmatrix}=0$, $A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 6\end{vmatrix}=-4$, $A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=6-4=2$, $A_{21}=-\begin{vmatrix}8 & 10\\ 3 & 6\end{vmatrix}=-18$, $A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 10\\ 4 & 6\end{vmatrix}=12-40=-28$, $A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 8\\ 4 & 3\end{vmatrix}=26$, $A_{31}=\begin{vmatrix}8 & 10\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6$, $A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 10\\ 2 & 2\end{vmatrix}=16$, $A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-14$, por lo que $adj(A)=\begin{pmatrix}0 & -4 & 2\\ -18 & -28 & 26\\ 6 & 16 & -14\end{pmatrix}$ y:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(adj(A)\right)^t=\frac{1}{-12}\begin{pmatrix}0 & -18 & 6\\ -4 & -28 & 16\\ 2 & 26 & -14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{13}{6} & \frac{7}{6}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{13}{6} & \frac{7}{6}\end{pmatrix}}$$

b) Se cumple que

$$(A\,B)^{-1}=B^{-1}\,A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 11 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 11 & 16 \end{pmatrix}$$

Problema B.3:

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.
a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.
b) Determínense los valores de x en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3.

Solución:

a) Se cumple que $f(1) = 1^3 + 1^2 - 5 + 3 = 0$, luego $(1, 0)$ es un punto de corte con el eje *X*. Probando por Ruffini, vemos que f se factoriza como $f(x) = (x-1)\,(x^2 + 2\,x - 3)$, luego las otras raíces son $x^2 + 2\,x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = 1, -3$, por lo que el otro punto de corte es $(-3, 0)$.

Si $x = 0$, entonces $y = 3$, luego otro punto de corte es (0, 3).

Puntos de corte: $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$, $(-\mathbf{3}, \mathbf{0})$ y **(0, 3)**

Se cumple que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 + x^2 - 5\,x + 3) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 + x^2 - 5\,x + 3) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x)} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{f(x)} = -\infty$$

b) La pendiente de la recta tangente viene dada por la derivada de la función, $f'(x) = 3\,x^2 + 2\,x - 5$ como deseamos que sea igual a 3, $3\,x^2 + 2\,x - 5 = 3 \Leftrightarrow 3\,x^2 + 2\,x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4+96}}{6} = \frac{-2\pm10}{6} = -2\ y\ \frac{4}{3}$, obtenemos: $x = -2$ y $x = 4/3$.

Los valores de $\boldsymbol{x}$ para que la pendiente de la recta tangente sea igual a 3, son $\boldsymbol{x = -2}$ y $\boldsymbol{x = 4/3}$.

Problema B.4:

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0'3$, $P(B/A) = 0'4$, $P\left(B/\overline{A}\right) = 0'6$. Calcúlese:

a) $P(A/B)$

b) $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) Se cumple que $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Tenemos que:

$P(B/A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B\cap A)}{0.3} = 0.4 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$,

$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B\cap\bar{A})}{0.7} = 0.6 \Rightarrow P(B \cap \bar{A}) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$, por lo que:

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = 0.12 + 0.42 = 0.54$ y $P(A/B) = \frac{0.12}{0.54} = \frac{12}{54} = \frac{2}{9}$

$$\boldsymbol{P(A/B) = \frac{2}{9}}$$

b) Se cumple que:

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(B)} = \frac{1-P(A\cup B)}{1-0.54} = \frac{1-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)}{0.46} = \frac{1-(0.3+0.54-0.12)}{0.46} = \frac{0.28}{0.46} = \frac{28}{46} = \frac{14}{23}$$

$$\boldsymbol{P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{14}{23}}$$

Problema B.5:

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.
a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es P = 0'22, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.
b) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 había faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95% para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

Solución:

a) El absentismo sigue una binomial con $p = 0.22$ (probabilidad de absentismo), por lo que:

$\sigma = \sqrt{p\,(1-p)} = \sqrt{0.22 \times 0.78}$. Si aproximamos por una $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se cumple que la media muestral $\bar{X}$ sigue una $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, siendo el intervalo de confianza de la media teórica μ:

$\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$, donde $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ cumple que:

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \ge z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \left(1 - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right)$$

$= 2\,P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - 1 = \frac{99}{100} \Rightarrow P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1+\frac{99}{100}}{2} = \frac{199}{200} = 0.995$, siendo $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$.

Mirando en la tabla, tenemos que $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.575$.

Entonces el error es como mucho el radio del intervalo: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 2.575 \frac{\sqrt{0.22\ 0.78}}{\sqrt{n}}$, y entonces: $2.575 \frac{\sqrt{0.22 \times 0.78}}{\sqrt{n}} \le \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \sqrt{n} \ge 2.575 \times 25\sqrt{0.22 \times 0.78} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \ge 2.575^2 \times 625 \times 0.22 \times 0.78 = 711.13 \ldots$ y entonces el tamaño mínimo es $n = 712$ al ser entero.

El tamaño mínimo es de **712** trabajadores.

b) Tenemos que $n = 1000$ $p = \frac{250}{1000} = \frac{1}{4}$ (probabilidad de absentismo), por lo que:

$\sigma = \sqrt{p\,(1-p)} = \sqrt{\frac{1}{4}\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. El intervalo de confianza de la media teórica μ es:

$\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$, donde $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ cumple que:

$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) -$
$P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \left(1 - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right) = 2\,P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - 1 = \frac{95}{100} =$
$\frac{19}{20} \Rightarrow P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1+\frac{19}{20}}{2} = \frac{39}{40} = 0.975$, siendo $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$.

Mirando en la tabla, tenemos que $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.

La media muestral $\bar{X}$ es $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i}{1000} = \frac{250}{1000} = \frac{1}{4} = p$, por lo que el intervalo pedido es:

$\left[\frac{1}{4} - 1.96\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{10\,\sqrt{10}},\ \frac{1}{4} + 1.96\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{10\,\sqrt{10}}\right] \approx\ [0.22,\ 0.28]$.

El intervalo de confianza es de $[\mathbf{0.22},\ \mathbf{0.28}]$.

Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

EBAU 2019

Comunidad autónoma de

Murcia

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES JUNIO 2019

OBSERVACIONES IMPORTANTES: *El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.*

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

a) Calcule A^{-1}. (1 punto)

b) Calcule el valor del parámetro **a** para que $B+C=A^{-1}$. (1 punto)

c) Calcule el valor del parámetro **a** para que $A+B+C=3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (1 punto)

CUESTIÓN A2. Una empresa, que vende un cierto artículo al precio unitario de 40 euros, tiene por función de coste, $C(x)=2x^2+4x+98$, donde x es el número de unidades producidas del artículo. Calcular el número de unidades que debe vender para que el beneficio de la empresa sea máximo. Obtener el beneficio (ingresos menos los costes) máximo obtenido. (2 puntos)

CUESTIÓN A3. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x+a & si \quad x<1\\ x^2-2 & si \quad 1\le x\le 3\\ x+b & si \quad x>3\end{cases}$

a) Determinar **a** y **b** para que la función sea continua en todo **R**.(1 punto)

b) Hallar $\int_1^3 f(x)\,dx$.(1 punto)

CUESTIÓN A4. En el coro universitario el 65% de sus componentes son mujeres. El 30% de las mujeres y el 25% de los hombres son bilingües. Si elegimos al azar a un componente del coro:

a) ¿Cuál es la probabilidad que sea bilingüe? (0,75 puntos)

b) Sabiendo que es bilingüe, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (0,75 puntos)

CUESTIÓN A5. El tiempo, en años, de renovación de un ordenador portátil se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica de 0,9 años. Si tomamos al azar a 900 usuarios, se obtiene una media muestral de 3,5 años. Hallar el intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de renovación de un ordenador portátil. (1,5 puntos)

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulce deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta. (3 puntos).

CUESTIÓN B2.

a) Sea la función $f(x)=ax^3+bx$, calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1,1)$ y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale -3. (1 punto)

b) Si en la función anterior $a=1$ y $b=-12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos. (1 punto)

CUESTIÓN B3. Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las rectas $y=6-2x$ y la parábola $y=-x^2+2x+3$. Calcular su área. (2 puntos)

CUESTIÓN B4. Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que P(A)=0,3, P(B)=0,2 y P(A/B)=0,5. Calcular $P(A\cap B)$ y $P(A\cup B)$. (1,5 puntos)

CUESTIÓN B5. El tiempo en minutos de conexión a Internet de los estudiantes de un centro de secundaria, sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Para poder estimar la media del tiempo de conexión, se construye un intervalo de confianza con un error menor o igual a 5 minutos, con un nivel de confianza del 95%. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar. (1,5 puntos)

UNIVERSIDAD DE MURCIA · Región de Murcia · Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES JUNIO 2019

CRITERIOS DE VALORACIÓN

CRITERIOS GENERALES

Cada error de cálculo trivial se penalizará con 0,1 puntos y cada error de cálculo no trivial con 0,2 puntos.
Los errores ortográficos graves se tendrán en cuenta en la calificación total del ejercicio.

CRITERIOS ESPECÍFICOS (OPCIÓN A)

CUESTIÓN A1 (3 puntos)
- Resolución correcta de cada apartado: 1 punto.

CUESTIÓN A2 (2 puntos)
- Resolución correcta: 2 puntos.

CUESTIÓN A3 (2 puntos)
- Resolución correcta de cada apartado: 1 punto.

CUESTIÓN A4 (1,5 puntos)
- Resolución correcta de cada apartado: 0,75 puntos.

CUESTIÓN A5 (1,5 puntos)
- Dar la expresión general del intervalo: 0,75 puntos.
- Sustituir bien los valores: 0,75 puntos.

CRITERIOS ESPECÍFICOS (OPCIÓN B)

CUESTIÓN B1 (3 puntos)
- Resolución correcta: 3 puntos.

CUESTIÓN B2 (2 puntos)
- Resolución correcta de cada apartado: 1 punto.

CUESTIÓN B3 (2 puntos)
- Resolución correcta: 2 puntos.

CUESTIÓN B4 (1,5 puntos)
- Resolución correcta: 1,5 puntos.

CUESTIÓN B5 (1,5 puntos)
- Resolución correcta: 1,5 puntos.

EBAU2019

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES JUNIO 2019

CORRESPONDENCIA CON EL PROGRAMA OFICIAL

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1: NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Calculo matricial y sistema de ecuaciones.

CUESTIÓN A2: ANÁLISIS. Optimización de funciones.

CUESTIÓN A3: ANÁLISIS. Continuidad e Integrales.

CUESTIÓN A4: ESTADÍSTICA y PROBABILIDAD. Probabilidad de sucesos.

CUESTIÓN A5: ESTADÍSTICA y PROBABILIDAD. Intervalos de confianza.

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1: NÚMEROS Y ÁLGEBRA. Programación Lineal.

CUESTIÓN B2: ANÁLISIS. Derivadas.

CUESTIÓN B3: ANÁLISIS. Representación gráfica e Integrales.

CUESTIÓN B4: ESTADÍSTICA y PROBABILIDAD. Probabilidades de sucesos.

CUESTIÓN B5: ESTADÍSTICA y PROBABILIDAD. Intervalos de confianza.

EBAU2019

SOLUCIONES OPCIÓN A

Cuestión A.1:

Sean las matrices: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

a) Calcule A^{-1}.

b) Calcule el valor del parámetro a para que $B + C = A^{-1}$.

c) Calcule el valor del parámetro a para que $A + B + C = 3\ I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) La inversa de la matriz A existe cuando el determinante de esta matriz sea distinto de 0.

Calculamos el determinante de la matriz A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1, \text{ distinto de cero, luego existe } A^{-1}$$

Como $(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj}(A)^t$, $(A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\operatorname{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Y, por tanto, se tiene que la matriz inversa es:

$$(A)^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{(A)^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$B + C = A^{-1}$; $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

luego $a - 1 = -1$, por tanto, $a = 0$.

$$\mathbf{a = 0}$$

$$A + B + C = 3\ I; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; de donde $a = 0$.

$$\boldsymbol{a = 0}$$

Cuestión A.2:

Una empresa, que vende un cierto artículo al precio unitario de 40 euros, tiene por función de coste, $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$, donde x es el número de unidades producidas del artículo. Calcular el número de unidades que debe vender para que el beneficio de la empresa sea máximo. Obtener el beneficio (ingresos menos los costes) máximo obtenido.

Solución:

Los ingresos obtenidos son $I(x) = 40x$.

Los beneficios serán $B(x) = I(x) – C(x) = 40x – (2x^2 + 4x + 98) = –2x^2 + 36x - 98$

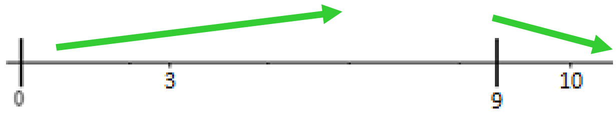
Vamos a estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función igualando su derivada a 0:

$$B'(x) = –4x + 36;$$

$$–4x + 36 = 0;$$

$$x = 9$$

Representamos este valor en la recta real y vemos qué ocurre con el crecimiento y decrecimiento de la función para los dos intervalos que surgen:



$B'(3) > 0$ $B'(10) < 0$

Por tanto, podemos afirmar que para $x = 9$ la función presenta un máximo relativo. Podemos verlo con el estudio de la segunda derivada de la función.

$$B''(x) = – 4 < 0$$

Luego en $\boldsymbol{x} = 9$ hay un máximo relativo.

Es decir, debe vender 9 unidades para que el beneficio sea máximo.

Sustituimos el valor 9 en la expresión de la función para obtener el beneficio máximo:

$B(9) = –2·9^2 + 36·9 – 98 = 64$

El beneficio máximo será de **64** euros.

Cuestión A.3:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+a & si \;\; x<1 \\ x^2-2 & si \;\; 1 \le x \le 3 \\ x+b & si \;\; x>3 \end{cases}$

a) Determinar $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para que la función sea continua en todo $\boldsymbol{R}$.

b) Hallar $\int_1^3 f(x)dx$.

Solución:

Para $x < 1$, $1 < x < 3$ y $x > 3$, $f(x)$ es continua por ser funciones polinómicas, debemos hallar a y b para que sea continua en x = 1 y x = 3 respectivamente.

Continuidad en x = 1

f(1) = $1^2 - 2$ = -1

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x+a) = 1+a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-2) = -1 \end{cases}$$

Para que exista el límite, los límites laterales han de ser iguales, por tanto,

$1 + a = -1$, de donde $a = -2$

Continuidad en $x = 3$

f(3) = $3^2 - 2$ = 7

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(x+b) = 3+b \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-2) = 7 \end{cases}$$

Para que exista el límite, los límites laterales han de ser iguales, por tanto,

3 + b = 7, de donde b = 4

Los valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ que hacen que la función sea continua en todo $\boldsymbol{R}$ son $\boldsymbol{a} = -2$ y $\boldsymbol{b} = 4$.

Entre 1 y 3 $\quad f(x) = x^2 - 2$, luego

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (x^2-2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 2\cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2\cdot 1\right) = \frac{14}{3}$$

$$\boldsymbol{\int_1^3 f(x)dx = \frac{14}{3}}$$

Cuestión A.4:

En el coro universitario el 65% de sus componentes son mujeres. El 30% de las mujeres y el 25% de los hombres son bilingües. Si elegimos al azar a un componente del coro:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea bilingüe?
b) Sabiendo que es bilingüe, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:

Nombramos los sucesos: M = Elegir mujer, H = Elegir hombre, B = Elegir bilingüe.

Los datos que nos dan son:

$$P(M) = 0.65, \quad P(H) = 0.35$$

$$P(M\cap B) = P(M)\cdot P(B/M) = 0.65 \cdot 0.30 = 0.195$$

$$P(H\cap B) = P(H)\cdot P(B/H) = 0.35\cdot 0.25 = 0.0875$$

Hacemos la tabla de contingencia:

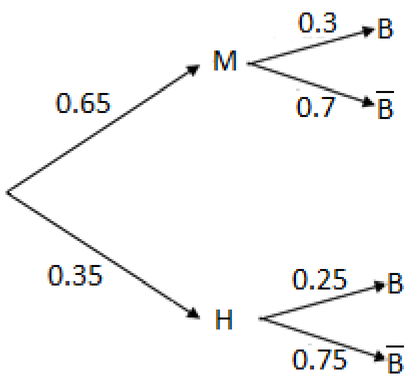
	Hombres (H)	Mujeres (M)	Total
Bilingües (B)	0.0875	0.195	0.2825
No bilingües	0.2625	0.455	0.7175
Total	0.35	0.65	1

a) $P(B)$ = 0.2825, es decir, un **28.25%** de probabilidad de que sea bilingüe

La probabilidad de que sea bilingüe es del **0.2825**.

b) $P(M/B) = \frac{P(M\cap B)}{P(B)} = \frac{0.195}{0.2825} = \mathbf{0.69}$, es decir hay una probabilidad del **69%** de que sea mujer si es bilingüe.

Sabiendo que es bilingüe, la probabilidad de que sea mujer es del **0.69**.



Utilizando un diagrama de árbol:

a) Mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(B) = P(M\cap B) + P(H\cap B) = P(M)\cdot P(B/M) + P(H)\cdot P(B/H) =$$

$$0.65 \cdot 0.30 + 0.35\cdot 0.25 = 0.195 + 0.0875 = \mathbf{0.2825}.$$

Mediante el teorema de Bayes: $P(M/B) = \frac{P(M\cap B)}{P(B)} = \frac{P(M)\cdot P(B/M)}{P(B)} = \frac{0.195}{0.2825} = \mathbf{0.69}$.

Cuestión A.5:

El tiempo, en años, de renovación de un ordenador portátil se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica de 0.9 años. Si tomamos al azar a 900 usuarios, se obtiene una media muestral de 3.5 años. Hallar el intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de renovación de un ordenador portátil.

Solución:

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Considerando X = tiempo de renovación del portátil

En el ejercicio, $\bar{x} = 3.5$, $\sigma = 0.9$, n = 900, y $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$, sustituyendo, tenemos

$$\left(3.5 - 1.96 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{900}}\ ,\ \ 3.5 + 1.96 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{900}}\right) = \ (3.441,\ \ 3.559)$$

Es decir, el tiempo medio de renovación de un portátil se encuentra entre **3.441** y **3.559** años con una confianza del 95%.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN B

Cuestión B.1:

En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesita 1/2 kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requiere 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿cuántos dulces deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta. (3 puntos).

Solución:

Se trata de un problema de programación lineal con dos variables.

Completemos la tabla:

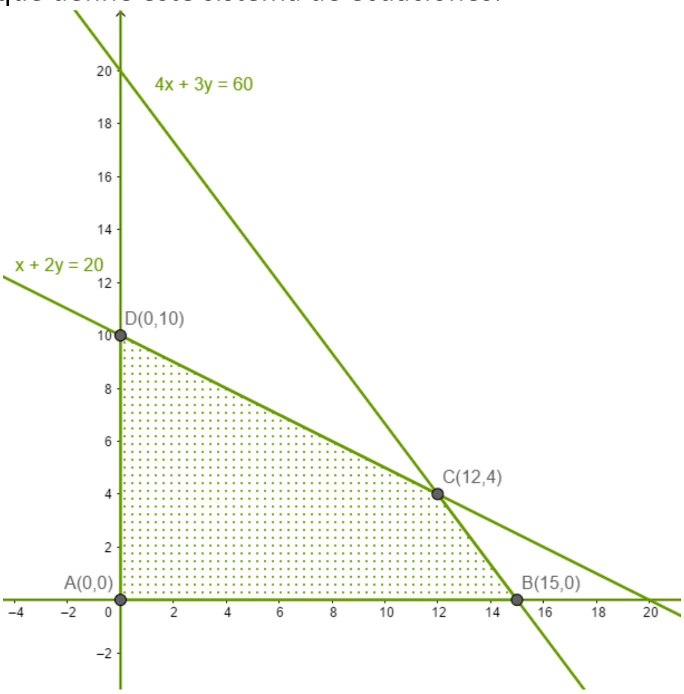
Tipo de dulce	Azúcar (kg)	Huevos	Precio (€)
A (x unidades)	1/2	8	15
B (y unidades)	1	6	12
¿De cuánto disponemos?	10	120	1

Si traducimos a ecuaciones dichas restricciones obtenemos este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0\,, \quad y \geq 0 \\ \frac{1}{2}x + y \leq 10 \\ 8x + 6y \leq 120 \end{cases} \quad \text{simplificando} \quad \begin{cases} x \geq 0\,, \quad y \geq 0 \\ x + 2y \leq 20 \\ 4x + 3y \leq 60 \end{cases}$$

Por otro lado, la **función objetivo** es la siguiente: $15x + 12y = I(x, y)$

Representamos la región que define este sistema de ecuaciones:



Para obtener los vértices resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$A)\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ A(0, 0)

B) $\begin{cases} 4x + 3y = 60 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ B(15, 0)

C) $\begin{cases} x + 2y = 20 \\ 4x + 3y = 60 \end{cases} \rightarrow$ C(12, 4)

$D)\ \begin{cases} x + 2y = 20 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow$ D(0, 10)

Los vértices de la región son: $A(0, 0)$, $B(15, 0)$, $C(12, 4)$ y $D(0, 10)$.

Calculemos para cada vértice el valor de los ingresos: $I(x, y) = 15x + 12\boldsymbol{y}$

- $I(0, 0) = 15 \cdot 0 + 12 \cdot 0 = 0$
- $I(15, 0) = 15 \cdot 15 + 12 \cdot 0 = 225$
- $I(12, 4) = 15 \cdot 12 + 12 \cdot 4 = 228$
- $I(0, 10) = 15 \cdot 0 + 12 \cdot 10 = 120$

Por tanto, para obtener el máximo ingreso deberá elaborar:

12 dulces del tipo ***A*** y **4** dulces del tipo ***B***.

Cuestión B.2:

a) Sea la función $f(x) = ax^3 + bx$, calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto (1, 1) y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale –3.
b) Si en la función anterior $a = 1$ y $b = –12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos.

Solución:

a) Como pasa por el punto (1, 1), $f(1) = 1$, luego, $1 = a·1^3 + b·1 = a + b$.

Si la pendiente es –3, $f'(1) = –3$, calculamos $f'(x) = 3ax^2 + b$, $f'(1) = 3·a·1^2 + b = –3$.

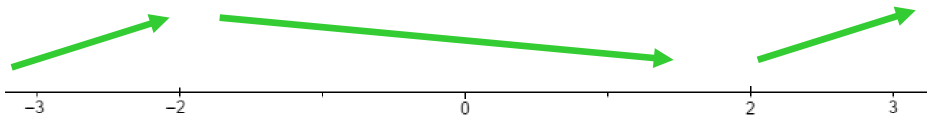
Tomando las dos ecuaciones $a + b = 1$

$3a + b = –3$ y resolviendo, tenemos, a **= –2 y** b **= 3**.

$\boldsymbol{a} = –2$ y $\boldsymbol{b} = 3$

b) Tenemos la función $f(x) = x^3 – 12x$, calculamos la función derivada:
$f'(x) = 3x^2 – 12$, igualamos a 0, $3x^2 – 12 = 0$, de donde, $x = –2$ y $x = 2$

Representamos en la recta real y estudiamos el signo de la derivada en los intervalos que resultan:



$f'(–3) = 3(–3)^2 – 12 > 0$ **creciente en (–∞, –2)**

$f'(0) = 3(0)^2 – 12 < 0$ **decreciente en (–2, 2)**

$f'(3) =3(3)^2 -12 > 0$ **creciente en (2, ∞)**

Por tanto, en $x = –2$ hay un **máximo relativo**, $(–2, f(–2)) =$ **(–2, 16)**

y un **mínimo relativo** en $x = 2$, $(2, f(2)) =$ **(2, -16).**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Cuestión B.3:

Representar gráficamente el recinto del plano limitado por:

la recta $y = 6 - 2x$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$. Calcular su área.

Solución:

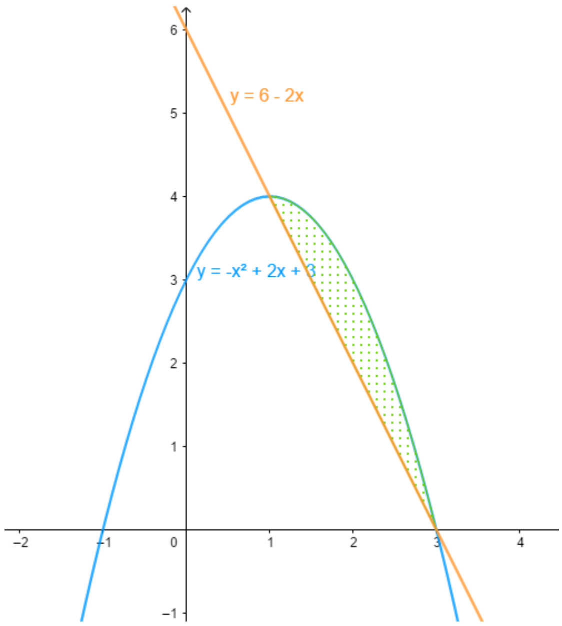
$y = 6 - 2x$: calculamos dos puntos, $x = 0$, $y = 6$, $(0, 6)$; $y = 0$, $x = 3$, $(3, 0)$.

$y = -x^2 + 2x + 3$: Vértice, $x = \frac{-2}{2\,(-1)} = 1$, $y = -1^2 + 2\cdot1 + 3 = 4$, $V(1, 4)$

Corte eje Y, $(0, 3)$

Cortes eje X, $-x^2 + 2x + 3 = 0$, $x = 1$, $x = 3$, $(1,0)$ y $(3, 0)$.

Representamos las dos gráficas:



Hallamos los puntos de intersección de las gráficas: $-x^2 + 2x + 3 = 6 - 2x$, simplificando: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Las soluciones son $x = 1$ y $x = 3$, por tanto, el área pedida es:

$$\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + 2\cdot 3^2 - 3\cdot 3\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1\right) = \frac{4}{3}.$$

Por tanto, el área pedida es $\frac{4}{3}\boldsymbol{u^2}$

Cuestión B.4:

Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)$ = 0.3, $P(B)$ = 0.2 y $P(A/B)$ = 0.5. Calcular $P(A\cap B)$ y $P(A\cup B)$.

Solución:

$\mathrm{P(A/B)} = \frac{\mathrm{P(A\cap B)}}{P(B)} = \frac{\mathrm{P(A\cap B)}}{0.2} = 0.5$, luego, $P(A\cap B)$ = 0.5 · 0.2 = **0.1**

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ = 0.3 + 0.2 – 0.1 = **0.4.**

P(A∩B)* = 0.1 y *P(A∪B)= 0.4

Cuestión B.5:

El tiempo en minutos de conexión a Internet de los estudiantes de un centro de secundaria, sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Para poder estimar la media del tiempo de conexión, se construye un intervalo de confianza con un error menor o igual a 5 minutos, con un nivel de confianza del 95%. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar.

Solución:

El error al calcular un intervalo de confianza viene dado por: $\mathrm{Z}_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}}$

En el ejercicio nos piden que el error sea menor o igual a 5, podemos igualar a la expresión y calcular n.

$\mathrm{Z}_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{\mathrm{n}}} = 5$, $\sigma = 10$, $\mathrm{Z}_{\frac{\propto}{2}}$ para un nivel de confianza del 95% es = 1.96.

Sustituyendo, tenemos $1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{\mathrm{n}}} = 5$, despejando n obtenemos n = 3.92^2 = 15.36.

Para asegurarnos el error menor o igual a 5 debemos tomar una muestra **16 estudiantes** o más.

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de ***16*** estudiantes.

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. SEPTIEMBRE 2019

OBSERVACIONES IMPORTANTES: *El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.*

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ ax-y-z=a-1 \\ 3x-2az=a-1 \end{array}\right\}$$ (**2,5 puntos**)

Resolverlo para a=0. (**0,5 puntos**).

CUESTIÓN A2. Determine el punto de la gráfica de la función $f(x)=-x^3+6x^2-7x+5$ en la que la pendiente de la recta tangente sea máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto? (**2 puntos**)

CUESTIÓN A3. Representar gráficamente la región limitada por las funciones $f(x)=9-x^2$ y $g(x)=x^2-9$. Calcular su área. (**2 puntos**)

CUESTIÓN A4. En un taller mecánico el 70% de los coches que se reparan son del modelo A y el resto de un modelo B. Después de 6 meses, el 95% de los coches del modelo A no vuelven al taller mientras que del modelo B solo no vuelven el 80%. Si elegimos un coche al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva al taller antes de 6 meses? (**0,75 puntos**)
b) Si se observa que antes de los seis meses vuelve al taller, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B? (**0,75 puntos**)

CUESTIÓN A5. Se sabe que la estatura de los individuos de Murcia es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 6 cm. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos y da una media de 176 cm. Obtenga un intervalo de confianza, con un 99% de confianza, para la media de la estatura de la población. (**1,5 puntos**)

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Un joven emprendedor quiere montar una empresa informática donde comercializará dos tipos de ordenadores. El tipo A dispondrá de 1 disco duro y 1 una unidad de memoria de pequeña capacidad, mientras que el tipo B tendrá 2 discos duros y su unidad de memoria será de alta capacidad. En total cuenta con 40 unidades de memoria de pequeña capacidad y 30 unidades de memoria de alta capacidad y 80 discos duros. Por cada ordenador del tipo A espera obtener un beneficio de 150 euros y del tipo B de 250 euros.

a) ¿Cuál es la mejor decisión sobre el número de ordenadores a montar de cada tipo? (**2,5 puntos**)

b) Con esta producción, ¿habría algún excedente en el material mencionado? (**0,5 puntos**)

CUESTIÓN B2. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. (**0,75 puntos**)

b) $f(x)=xe^{2x}$. (**0,75 puntos**)

CUESTIÓN B3. Dada la función $f(x)=2e^{x+1}$,

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $x=1$. (**1 punto**)

b) Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=1$. (**1 punto**)

CUESTIÓN B4. En un hospital de la región de Murcia se está probando una nueva terapia para dejar de fumar. De los pacientes que entran en este ensayo el 45% prueba la terapia y el resto no. Después de un año el 70% de los que siguieron la terapia y el 40% de los que no la siguieron han dejado de fumar. Se elige al azar a un paciente fumador de este hospital:

a) Calcule la probabilidad de que después de un año haya dejado de fumar. (**0,75 puntos**)

b) Si transcurrido un año el paciente sigue fumando, calcule la probabilidad de que haya seguido la nueva terapia. (**0,75 puntos**)

CUESTIÓN B5. En un estudio realizado por una empresa se ha obtenido que el intervalo de confianza de una variable, a un nivel de confianza del 95%, es: $(6{,}824 \quad 9{,}176)$. Hallar la media y el tamaño de la muestra para obtener dicho intervalo conociendo que la varianza de la distribución es de 9. Explique cada uno de los pasos realizados. (**2 puntos**)

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA SEPTIEMBRE

Cuestión A.1:

Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro $\boldsymbol{a}$:

$$\left.\begin{array}{r}2x+y-z=0\\ ax-y-z=a-1\\ 3x-2az=a-1\end{array}\right\}$$. Resolverlo para $\boldsymbol{a}$ = 0.

Solución:

Consideramos las matrices: $C=\begin{pmatrix}2&1&-1\\a&-1&-1\\3&0&-2a\end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\a&-1&-1&a-1\\3&0&-2a&a-1\end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante de C, $\begin{vmatrix}2&1&-1\\a&-1&-1\\3&0&-2a\end{vmatrix}=4a-3-3+2a^2=2a^2+4a-6$.

Hallamos los valores de a para los que el determinante vale 0:

$2a^2+4a-6=0$, $a^2+2a-3=0$, obtenemos a = –3 y a = 1.

Caso 1. Si a ∉ {–3, 1}, el sistema es Compatible Determinado pues el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, luego su rango es 3, igual al de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas.

Caso 2. Si a = –3, $\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=-1-1=\ -2\neq 0$, por tanto, rg(C) = 2.

Veamos el rango de la matriz A, $A=\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\-3&-1&-1&-4\\3&0&6&-4\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1&-1&0\\-1&-1&-4\\0&6&-4\end{vmatrix}=4+24+4=32\neq 0$, luego, rg(A) = 3, Sistema Incompatible

Caso 3. Si a = 1, $\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=-1-1=\ -2\neq 0$, por tanto rg(C) = 2

Veamos el rango de la matriz A, $A=\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\1&-1&-1&0\\3&0&-2&0\end{pmatrix}$ como la cuarta columna es de ceros, rg(A) = rg(C) = 2 < 3 = número de incógnitas, por tanto, el sistema es Compatible Indeterminado

Si $\boldsymbol{a}$ ∉ **{–3, 1}**	***rg(A) = rg(C)*** = 3 = número de incógnitas	**Compatible Determinado**
Si $\boldsymbol{a}$ **= –3**	***rg(C)*** = 2. ***rg(A)*** = 3	**Sistema Incompatible**
Si $\boldsymbol{a}$ **= 1**,	***rg(A) = rg(C)*** = 2 < 3 = número de incógnitas	**Compatible Indeterminado**

Resolvemos para a = 0, sustituimos en el sistema y nos queda:

$$\left.\begin{array}{r}2x+y-z=0\\ -y-z=-1\\ 3x=-1\end{array}\right\}$$ de donde x = –1/3, sumando 1ª y 2ª ecuación, -2/3 -2z = -1 , de donde

z = 1/6, de la 2ª ecuación, –y–1/6 = –1, luego y = 5/6.

La solución es: $\boldsymbol{x}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\quad \boldsymbol{y}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}},\quad \boldsymbol{z}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$.

Cuestión A.2:

Determine el punto de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$ en la que la pendiente de la recta tangente sea máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?

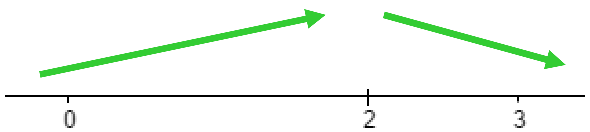
Solución:

La derivada de la función nos da la pendiente de la recta tangente en cada valor de x,

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 7$, como queremos hallar el máximo de esta función, derivamos de nuevo:

$f''(x) = -6x + 12$, igualamos a cero y resolvemos, $-6x + 12 = 0$, $x = 2$.

representamos en la recta real y estudiamos el signo:



$f''(0) = -6\cdot 0 + 12 = 12 > 0$, creciente

$f''(3) = -6\cdot 3 + 12 = -6 < 0$, decreciente, luego:

Para $\boldsymbol{x} = 2$ la pendiente es máxima

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto $x = a$ es:

$y = f(a) + f'(a)\cdot(x - a)$, $a = 2$, $f(2) = -2^3 + 6\cdot 2^2 - 7\cdot 2 + 5 = 7$, y $f'(2) = -3\cdot 2^2 + 12\cdot 2 - 7 = 5$, sustituyendo:

$$y = 7 + 5\cdot(x - 2),\ y = 5x - 3.$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $\boldsymbol{y = 5x - 3}$

Cuestión A.3:

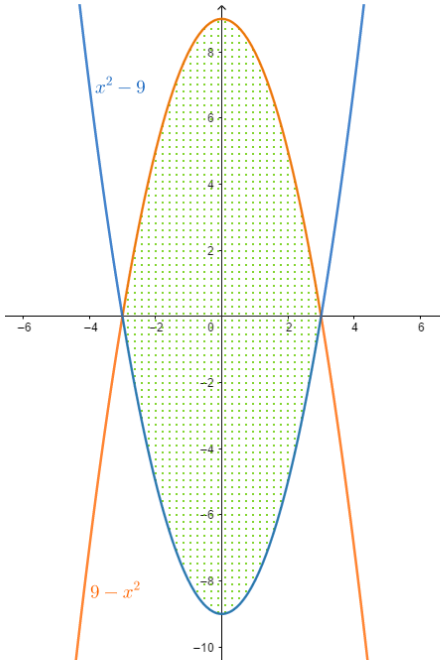
Representar gráficamente la región limitada por las funciones f(x) = 9 – x^2 y g(x) = x^2 – 9. Calcular su área.

Solución:

La gráfica de la función *f(x) = 9 – x*^{2} es una parábola abierta hacia abajo con vértice en (0, 9) y cortes con el eje X, (–3, 0) y (3, 0).

La gráfica de la función *g(x) = x*^{2} – 9 es una parábola abierta hacia arriba con vértice en (0, –9) y cortes con el eje X, (–3, 0) y (3, 0).

Por tanto, las gráficas de las funciones son:



El área pedida la calculamos con la integral definida:

$$\int_{-3}^{3}[(9-x^2)-(\,x^2-\ 9)]dx = \int_{-3}^{3}(18-2x^2)dx = \left[-\frac{2x^3}{3}+18x\right]_{-3}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{2\cdot 3^3}{3}+18\cdot 3\right)-\left(-\frac{2\cdot(-3)^3}{3}+18\cdot(-3)\right) = 72$$

El área pedida es de **72 u**^{2}

Cuestión A.4:

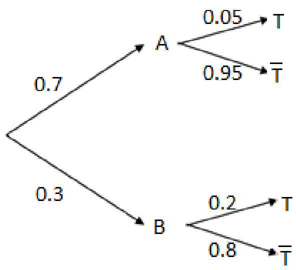
En un taller mecánico el 70% de los coches que se reparan son del modelo A y el resto de un modelo B. Después de 6 meses, el 95% de los coches del modelo A no vuelven al taller mientras que del modelo B solo no vuelven el 80%. Si elegimos un coche al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva al taller antes de 6 meses?
b) Si se observa que antes de los seis meses vuelve al taller, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

Solución:

Sean los sucesos, A = elegir coche del modelo A, B = elegir coche del modelo B, T = volver al taller.

Hacemos el diagrama de árbol:



a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(T) = P(A\cap T) + P(B\cap T) = P(A)\cdot P(T/A) + P(B)\cdot P(T/B) =$$

$$0.7 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.2 = \mathbf{0.095}.$$

La probabilidad de que vuelva al taller antes de 6 meses es del $\mathbf{0.095}$.

b) Por el teorema de Bayes: $P(B/T) = \frac{P(B\cap T)}{P(T)} = \frac{P(B)\cdot P(T/B)}{P(T)} = \frac{0.3\cdot 0.2}{0.095} = \mathbf{0.631}$

Si se observa que antes de los seis meses vuelve al taller, la probabilidad de que sea del modelo B, es del $\mathbf{0.631}$.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Cuestión A.5:

Se sabe que la estatura de los individuos de Murcia es una variable aleatoria sigue una distribución normal con desviación típica de 6cm. Se toma una muestra aleatoria de 225 individuos y da una media de 176 cm. Obtenga un intervalo de confianza, con un 99% de confianza, para la media de la estatura de la población.

Solución:

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right)$$

Considerando X = estatura de los individuos

En el ejercicio nos dicen que: $\bar{x} = 176$,$\sigma = 6$, n = 225, y $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$, sustituyendo, tenemos:

$$\left(176 - 2.58 \cdot \frac{6}{\sqrt{225}}\ ,\ \ 176 + 2.58 \cdot \frac{6}{\sqrt{225}}\ \right) = \ (174.97,\ \ 177.03)$$

Es decir, la estatura media de la población se encuentra entre **174.97** cm y **177.03** cm con una confianza del 99%

SOLUCIONES OPCIÓN B

Cuestión B.1:

Un joven emprendedor quiere montar una empresa informática donde comercializará dos tipos de ordenadores. El tipo A dispondrá de un disco duro y una unidad de memoria de pequeña capacidad, mientras que el tipo B tendrá 2 discos duros y su unidad de memoria será de alta capacidad. En total cuenta con 40 unidades de memoria de pequeña capacidad, 30 unidades de memoria de alta capacidad y 80 discos duros. Por cada ordenador del tipo A espera obtener un beneficio de 150 euros y del tipo B de 250 euros.

a) ¿Cuál es la mejor decisión sobre el número de ordenadores a montar de cada tipo?

b) Con esta producción, ¿habría algún excedente en el material mencionado?

Solución:

a) Se trata de un problema de programación lineal con dos variables.

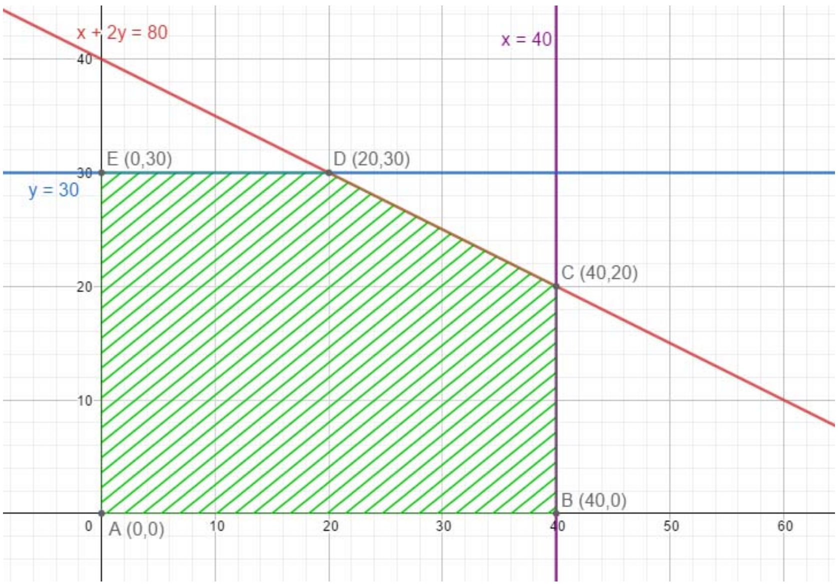
Completemos la tabla:

Tipo de ordenador	Memoria pequeña	Memoria alta	Disco duro	Beneficio (€)
A (x unidades)	1	0	1	150
B (y unidades)	0	1	2	250
¿De cuánto disponemos?	40	30	80	

Si traducimos a ecuaciones dichas **restricciones** obtenemos este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0\,, \quad y \geq 0 \\ x \leq 40, \quad y \leq 30 \\ x + 2y \leq 80 \end{cases}$$

Representamos la región que define este sistema de ecuaciones:



Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Para obtener los vértices resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

A) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ A(0, 0)

B) $\begin{cases} x = 40 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ B(40, 0)

C) $\begin{cases} x = 40 \\ x + 2y = 80 \end{cases} \rightarrow$ C(40, 20)

D) $\begin{cases} x + 2y = 80 \\ y = 30 \end{cases} \rightarrow$ D(20, 30)

E) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 30 \end{cases} \rightarrow$ E(0, 30)

Los **vértices** de la región son: $A(0, 0)$, $B(40, 0)$, $C(40, 20)$, $D(20, 30)$ y $E(0, 30)$

Por otra parte, la **función objetivo** es la siguiente: $150x + 250y = B(x, y)$.

Calculemos para cada vértice el valor de los ingresos: $B(x, y) = 150x + 250\boldsymbol{y}$**:**

- $B(0, 0) = 150 \cdot 0 + 250 \cdot 0 = 0$
- $B(40, 0) = 150 \cdot 40 + 250 \cdot 0 = 6000$
- $B(40, 20) = 150 \cdot 40 + 250 \cdot 20 = 11000$
- $B(20, 30) = 150 \cdot 20 + 250 \cdot 30 = 10500$
- $B(0, 30) = 150 \cdot 0 + 250 \cdot 30 = 7500$

Por tanto, la mejor decisión es fabricar **40** ordenadores del tipo A y **20** ordenadores del tipo B.

b) $X = 40$, $Y = 20$, Discos duros: $40 + 2 \cdot 20 = 80$, luego no hay excedente.

Memorias pequeña capacidad: $X = 40$, luego no hay excedente.

Memorias alta capacidad: $Y = 20$, luego hay un excedente de **10** memorias.

Hay un excedente de **10** memorias de alta capacidad.

Cuestión B.2:

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{ln\ x}{x^2}.$$

$$f(x) = xe^{2x}.$$

Solución:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\cdot \ln x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2xlnx}{\mathrm{x}^4} = \frac{x\cdot(1-2lnx)}{\mathrm{x}^4} = \boldsymbol{\frac{1-2lnx}{\mathrm{x}^3}}.$$

$$f'(x) = 1\cdot \mathrm{e}^{2\mathrm{x}} + x\cdot 2\mathrm{e}^{2\mathrm{x}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{x}}(1+2x).$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Cuestión B.3:

Dada la función $\boldsymbol{f(x) = 2e^{x+1}}$

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto x = 1.

b) Calcular el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 1.

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en $x = a$, es:

$y = f(a) + f'(a)\cdot(x - a)$,

en el problema, a = 1, $f(1) = 2e^{1+1} = 2e^2$,

$f'(x) = 2e^{x+1}$, $f'(1) = 2e^{1+1} = 2e^2$, sustituyendo, tenemos:

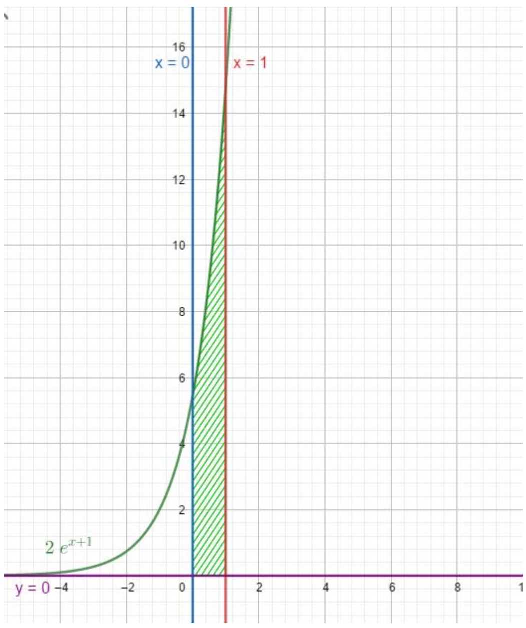
$y = 2e^2 + 2e^2(x-1) = 2e^2x$, $y = 2e^2x$.

Recta tangente: $\boldsymbol{y = 2e^2x}$.

La función exponencial no corta al eje de abscisas, por tanto, el área viene dada por la integral definida:

$$\int_0^1 2e^{x+1}dx = [2e^{x+1}]_0^1 = 2e^2 - 2e$$

Luego área = $\boldsymbol{(2e^2 - 2e)\ u^2}$



Cuestión B.4:

En un hospital de la región de Murcia se está probando una nueva terapia para dejar de fumar. De los pacientes que entran en este ensayo el 45% prueba la terapia y el resto no. Después de un año el 70% de los que siguieron la terapia y el 40% de los que no la siguieron han dejado de fumar. Se elige al azar un paciente fumador de este hospital.

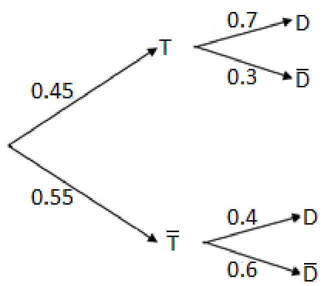
a) Calcule la probabilidad de que después de un año haya dejado de fumar.

b) Si transcurrido un año el paciente sigue fumando, calcule la probabilidad de que haya seguido la nueva terapia.

Solución:

Sea T el suceso un paciente prueba la terapia y D un paciente deja de fumar,

Hacemos el diagrama de árbol:



a) Por el teorema de la probabilidad total:

$P(D) = P(T)\cdot P(D/T) + P(\bar{\boldsymbol{T}})\cdot P(D/\bar{\boldsymbol{T}})$ = 0.45·0.70 + 0.55·0.40 = 0.535.

La probabilidad de que un paciente fumador haya dejado de fumar es de $P(D)$ = **0.535**.

b) Por el teorema de Bayes:

$$P(T/\bar{D}) = \frac{P(T)\cdot P(\bar{D}/T)}{P(\bar{D})},$$

como $P(D)$ = 0.535, $P(\bar{\boldsymbol{D}})$ = 0.465, luego

$$P(T/\bar{\boldsymbol{D}}) = \frac{P(T)\cdot P(\bar{D}/T)}{P(\bar{D})} = \frac{0.45\cdot 0.30}{0.465} = \mathbf{0.293}$$

La probabilidad de que un paciente que sigue fumando haya seguido la terapia es de $\boldsymbol{P(T/\bar{D}) = 0.293}$.

Cuestión B.5:

En un estudio realizado por una empresa se ha obtenido que el intervalo de confianza de una variable, a un nivel de confianza del 95%, es: (6.824, 9.176). Hallar la media y el tamaño de la muestra para obtener dicho intervalo conociendo que la varianza de la distribución es de 9. Explique cada uno de los pasos realizados.

Solución:

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Si sumamos los extremos obtenemos $2\bar{\boldsymbol{x}}$ = 6.824 + 9.176, de donde $\bar{\boldsymbol{x}}$ **= 8**

El valor de $\boldsymbol{Z}_{\frac{\propto}{2}}$ para un nivel de confianza del 95% es 1.96.

Como $\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Z}_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$ = 9.176, tenemos que:

8 + 1.96 $\frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$ = 9.176, despejando:

$\sqrt{\boldsymbol{n}}$ = 5, por tanto, $\boldsymbol{n}$ **= 25.**

La media vale: $\bar{\boldsymbol{x}}$ **= 8**, y el tamaño de la muestra: $\boldsymbol{n}$ **= 25**.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de:

Navarra

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

upna Universidad Pública de Navarra / Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad

CURSO: 2018 - 2019

ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B

Opción A

EJERCICIO 1:

Sea la expresión matricial $\mathbf{B}^t - \mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$, siendo **A** y **B** las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Despeje la matriz **X.** (1 punto)

ii) Calcule la matriz **X.** (2.5 puntos)

EJERCICIO 2:

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función $f(x) = -3x^2 + 30x + 20$, con $0 \le x \le 8$, donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

i) ¿Cuál es el beneficio si la empresa no gasta en publicidad? ¿Cuál es el beneficio si la empresa gasta 1000 euros en publicidad? (0.5 puntos)

ii) Determine el gasto en publicidad que produce el máximo beneficio. ¿Cuál es el máximo beneficio? (1 punto)

iii) Explique cómo aumenta o disminuye el beneficio en función del gasto en publicidad. (0.75 puntos)

iv) ¿Cuánto gasta la empresa en publicidad cuando el beneficio es mínimo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (0.75 puntos)

EJERCICIO 3:

Un centro tiene dos clases de bachillerato (A y B). La clase A tiene 40 estudiantes, de los cuales 10 estudian alemán. La clase B tiene 25 estudiantes, de los cuales 5 estudian alemán. Se seleccionan al azar dos estudiantes de la clase A y uno de B. Calcule:

i) La probabilidad de que ninguno de los tres estudie alemán. (1 punto)

ii) La probabilidad de que únicamente uno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)

iii) La probabilidad de que alguno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias)

Opción B

EJERCICIO 1:

Un agricultor quiere dedicar al menos 4 hectáreas al cultivo de dos productos (C1 y C2). El beneficio neto obtenido por cada hectárea cultivada es de 3000 € y 1500 €, respectivamente. Las necesidades por hectárea y temporada de horas de maquinaria y de kilos de abono son 20 horas y 100 kilos para el cultivo C1 y 10 horas y 300 kilos para el cultivo C2. Determine cuántas hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para que el beneficio total sea máximo, si dispone para esta temporada de 180 horas maquinaria y de 2400 kilos de abono.

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si además se desea que el número de hectáreas dedicadas al cultivo C2 sea no menor que el doble del número de hectáreas dedicadas al cultivo C1. (0.5 puntos)

EJERCICIO 2:

i) Calcule la derivada de la función $f(x) = cos^3(5x^2) + x\ln(1-2x)$ (1 punto)

ii) Calcule $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+1}}$ (1 punto)

iii) Calcule $\int_0^1 2xe^{3x^2}\,dx$ (1.5 puntos)

EJERCICIO 3:

En una muestra aleatoria entre estudiantes de bachillerato de una región, 150 afirmaron que participan en actividades de voluntariado y 350 afirmaron que no realizan ese tipo de actividades.

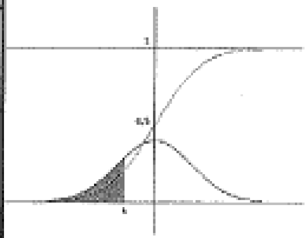
i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que no realizan actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 96%. (1.5 puntos)

ii) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que participan en actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 92%. (1.5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Tabla de la distribución normal estándar Z ~ N(0,1)

$$P(Z<k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\,dt$$



k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

Sea la expresión matricial $\mathbf{B}^t - \mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$, siendo **A** y **B** las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Despeje la matriz **X**. (1 punto)

ii) Calcule la matriz **X**. (2.5 puntos)

Solución:

i. $B^t - AX = B$; $B^t - B = AX$; Si la matriz A tiene inversa, podemos despejar X. La matriz A es cuadrada, así que calculamos su determinante:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{-1 \neq 0}$$

Y al ser distinto de cero, tiene inversa, por lo que: $X = A^{-1}(B^t - B)$.

$$\boldsymbol{X = A^{-1}(B^t - B)}$$

ii. Como $(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t$, $\qquad (A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

$$X = A^{-1}(B^t - B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Problema A.2:

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función $f(x) = -3x^2 + 30x + 20$, con $0 \leq x \leq 8$, donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

i) ¿Cuál es el beneficio si la empresa no gasta en publicidad? ¿Cuál es el beneficio si la empresa gasta 1000 euros en publicidad? (0.5 puntos)
ii) Determine el gasto en publicidad que produce el máximo beneficio. ¿Cuál es el máximo beneficio? (1 punto)
iii) Explique cómo aumenta o disminuye el beneficio en función del gasto en publicidad. (0.75 puntos)
iv) ¿Cuánto gasta la empresa en publicidad cuando el beneficio es mínimo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (0.75 puntos)

Solución:

i. $f(x) = -3x^2 + 30x + 20$. Si la empresa no gasta en publicidad, entonces $x = 0$, $f(0) = 20$, y el beneficio es de 20 000 euros.

Si gasta 1 000 euros en publicidad, entonces $x = 1$, y el beneficio es $f(1) = -3 + 30 + 20 = 47$, de 47 000 euros.

Si la empresa no gasta en publicidad el beneficio es de **20 000** euros. Y si gasta 1 000 euros, es de **47 000** euros.

ii. Para obtener el beneficio máximo, derivamos e igualamos a cero: $f'(x) = -6x + 30 = 0 \Rightarrow x = 5$, $f(5) = -3 \cdot 25 + 30 \cdot 5 + 20 = 95$, siendo el beneficio máximo de 95 000 euros.

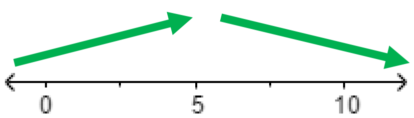
Comprobamos que en efecto es un máximo utilizando la derivada segunda: $f''(x) = -6 < 0$.

Luego es un máximo.

El beneficio máximo es de **95 000** euros, cuando el gasto en publicidad es de **5 000** euros

iii. La función beneficio es una parábola con coeficiente de a negativo, por lo que crece hasta su vértice, (5, 95), y luego decrece. El beneficio aumenta al gastar en publicidad hasta un gasto de 5 000 euros, y luego comienza a descender.

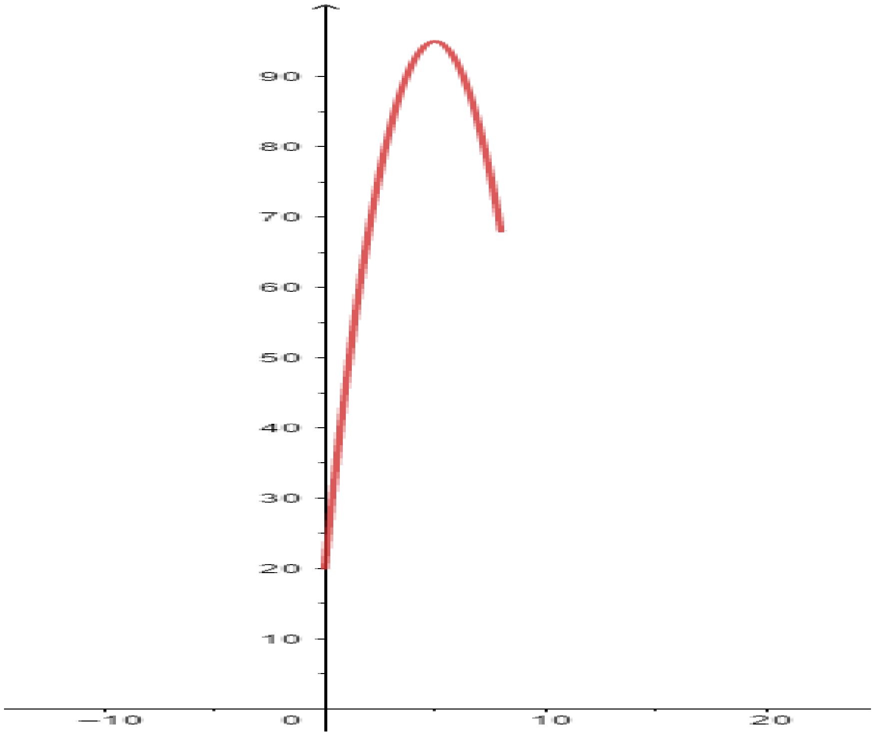
El beneficio crece hasta un gasto de ***5 000*** euros y decrece hasta el gasto de ***8000*** euros.



iv. La función está definida para $0 \leq x \leq 8$. Los valores mínimos deben estar en los extremos del intervalo de definición. Ya sabemos que $f(0) = 20$.

Calculamos $f(8)$ = –3·64 + 30·8 + 20 = 68 > 20, luego tenemos el mínimo beneficio si no hay gasto en publicidad.

El beneficio mínimo de **20 000** euros es para un gasto de **0** euros en publicidad.



Problema A.3:

Un centro tiene dos clases de bachillerato (A y B). La clase A tiene 40 estudiantes, de los cuales 10 estudian alemán. La clase B tiene 25 estudiantes, de los cuales 5 estudian alemán. Se seleccionan al azar dos estudiantes de la clase A y uno de B. Calcule:

i) La probabilidad de que ninguno de los tres estudie alemán. (1 punto)

ii) La probabilidad de que únicamente uno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)

iii) La probabilidad de que alguno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias)

Solución:

Sucesos: A_I = estudia alemán de la clase A (I), A_{II}= estudia alemán de la clase B (II)

i. $P(\text{Ninguno estudie alemán}) = P(\overline{A_I} \cap \overline{A_I} \cap \overline{A_{II}}) = P(\overline{A_I}) \cdot P(\overline{A_I}/\overline{A_I}) \cdot P(\overline{A_{II}}) =$

$$= \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} \cdot \frac{20}{25} = 0.44615.$$

La probabilidad de que ninguno estudie alemán es **0.446**.

ii. $P(\text{Únicamente uno estudie alemán}) = P(A_I \cap \overline{A_I} \cap \overline{A_{II}}) + P(\overline{A_I} \cap A_I \cap \overline{A_{II}}) + P(\overline{A_I} \cap \overline{A_I} \cap A_{II})$

$= P(A_I) \cdot P(\overline{A_I}/A_I) \cdot P(\overline{A_{II}}) + P(\overline{A_I}) \cdot P(A_I/\overline{A_I}) \cdot P(\overline{A_{II}}) + P(\overline{A_I}) \cdot P(\overline{A_I}/\overline{A_I}) \cdot P(A_{II}) =$

$$= \frac{10}{40} \cdot \frac{30}{39} \cdot \frac{20}{25} + \frac{30}{40} \cdot \frac{10}{39} \cdot \frac{20}{25} + \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} \cdot \frac{5}{25} = \frac{6000+6000+4350}{40 \cdot 39 \cdot 25} = \frac{16350}{39000} = 0.419.$$

La probabilidad de que únicamente uno estudie alemán es **0.419**.

iii. P(Alguno estudie alemán)= 1 – P(Ninguno estudie alemán) = 1 – 0.446 = 0.554.

La probabilidad de que alguno estudie alemán es **0.554**.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

Un agricultor quiere dedicar al menos 4 hectáreas al cultivo de dos productos (C1 y C2). El beneficio neto obtenido por cada hectárea cultivada es de 3000 € y 1500 €, respectivamente. Las necesidades por hectárea y temporada de horas de maquinaria y de kilos de abono son 20 horas y 100 kilos para el cultivo C1 y 10 horas y 300 kilos para el cultivo C2. Determine cuántas hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para que el beneficio total sea máximo, si dispone para esta temporada de 180 horas maquinaria y de 2400 kilos de abono.

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si además se desea que el número de hectáreas dedicadas al cultivo C2 sea no menor que el doble del número de hectáreas dedicadas al cultivo C1. (0.5 puntos)

Solución:

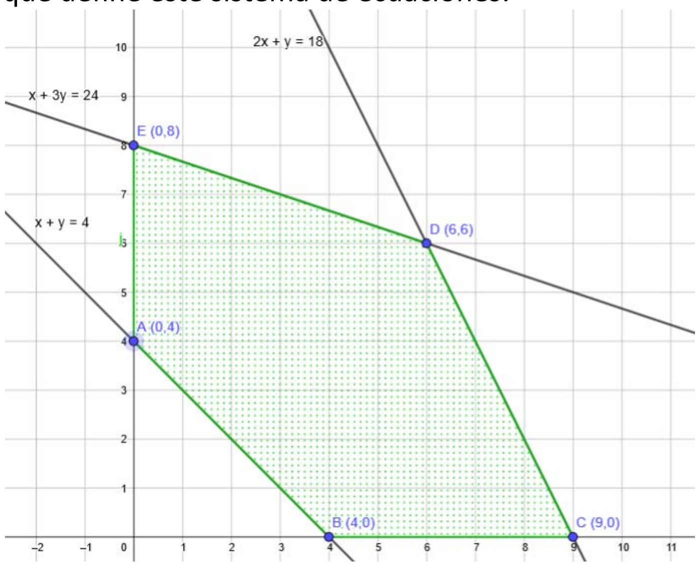
Se trata de un problema de programación lineal con dos variables. Llamamos $\boldsymbol{x}$ al número de hectáreas dedicadas al producto C1, e $\boldsymbol{y}$ al dedicado a C2.

Si traducimos los datos a restricciones obtenemos:

$$\begin{cases} x+y\geq 4,\ \ x\geq 0\ ,\ \ y\geq 0 \\ 20x+10y\leq 180 \\ 100x+300y\leq 2400 \end{cases} \quad \text{simplificando} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x+y\geq 4,\ \ x\geq 0\ ,\ \ y\geq 0} \\ \boldsymbol{2x+y\leq 18} \\ \boldsymbol{x+3y\leq 24} \end{cases}$$

Por otro lado, la **función objetivo** es la siguiente: $B(x, y) = 3000x + 1500y$

Representamos la región que define este sistema de ecuaciones:



Para obtener los vértices resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$A)\ \begin{cases} x+y=4 \\ x=0, y=4 \end{cases} \rightarrow \qquad \text{A}(0, 4)$

$\text{B})\ \begin{cases} x+y=4 \\ y=0, x\ =\ 4 \end{cases} \rightarrow \qquad \text{B}(4, 0)$

C) $\begin{cases} 2x + y = 18 \\ y = 0, x = 9 \end{cases} \rightarrow$ C(9, 0)

$D)$ $\begin{cases} 2x + y = 18 \\ x + 3y = 24 \end{cases} \rightarrow$ D(6, 6)

$E)$ $\begin{cases} x + 3y = 24 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow$ E(0, 8)

Los vértices de la región son: $A(0, 4)$, $B(4, 0)$, $C(9, 0)$, $D(6, 6)$ y $E(0, 8)$.

Calculemos para cada vértice el Beneficio: ***B(x, y) = 3000x + 1500y***

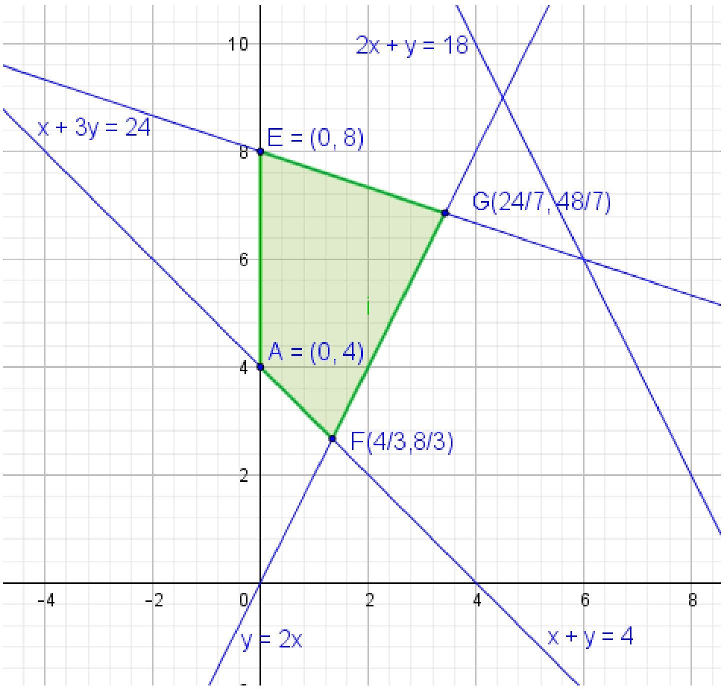
- $B(0, 4) = 1500 \cdot 4 = 6\,000$
- $B(4, 0) = 3000 \cdot 4 = 12\,000$
- $B(9, 0) = 3000 \cdot 9 = 27\,000$
- $B(6, 6) = 3000 \cdot 6 + 1500 \cdot 6 = 18000 + 9000 = 27\,000$
- $B(0, 8) = 1500 \cdot 8 = 12\,000$

Se obtiene el máximo beneficio en dos de los vértices: **C*(9, 0)*, D*(6, 6)***, lo que significa que el beneficio es máximo para cualquier punto del segmento ***CD***: (9, 0), (8, 2), (7, 4), (6, 6).

Por tanto, para obtener el máximo ingreso deberá elaborar:

9 hectáreas de C1, o ***6*** hectáreas de C1 y ***6*** hectáreas de C2, u otro punto del segmento ***CD***.

Añadimos la nueva restricción: $\boldsymbol{y \geq 2x}$



Se observa que la restricción $20x + 10y \leq 180$, número de horas, queda irrelevante.

Problema B.2:

i) Calcule la derivada de la función $f(x) = cos^3(5x^2) + x\ln(1-2x)$ (1 punto)

ii) Calcule $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+1}}$ (1 punto)

iii) Calcule $\int_0^1 2xe^{3x^2}\,dx$ (1.5 puntos)

Solución:

i. Derivada de: $f(x) = cos^3(5x^2) + xln(1-2x)$

$$f'(x) = 3\cos^2(5x^2)\cdot(-\text{sen}(5x^2))\cdot 10x + \ln(1-2x) + x\frac{1}{1-2x}\cdot(-2) =$$

$$-30x\cdot cos^2(5x^2)\cdot sen(5x^2) + ln(1-2x) - \frac{2x}{1-2x}.$$

$$\boldsymbol{f'(x) = -30x\cdot cos^2(5x^2)\cdot sen(5x^2) + ln(1-2x) - \frac{2x}{1-2x}.}$$

ii. Resolvemos la integral:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{8}\int 8x(4x^2+1)^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{1}{8}(4x^2+1)^{\frac{-1}{2}+1}\cdot 2 = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+1} + K.$$

$$\boldsymbol{\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+1} + K}$$

iii. Integral definida:

$$\int_0^1 2xe^{3x^2}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 6xe^{3x^2}dx = \frac{1}{3}\left[e^{3x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(e^3-1).$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 2xe^{3x^2}dx = \frac{1}{3}(e^3-1)}$$

Problema B.3:

En una muestra aleatoria entre estudiantes de bachillerato de una región, 150 afirmaron que participan en actividades de voluntariado y 350 afirmaron que no realizan ese tipo de actividades.

i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que no realizan actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 96%. (1.5 puntos)

ii) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que participan en actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 92%. (1.5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Solución:

El intervalo de confianza para un nivel de confianza de 96 % viene dado por la expresión:

$$\left(p - Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \qquad p + Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

En el ejercicio nos dicen que: n = 500, p = 350/500 = 0.7, $Z_{\frac{\propto}{2}} = 2.055$, sustituyendo, tenemos:

$$\left(0.7 - 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.7(1-0.3)}{500}},\ 0.7 + 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.7(1-0.3)}{500}}\right) = (0.658,\ \ 0.742).$$

Intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que NO realizan voluntariado al 96 %: $(\mathbf{0.658},\ \ \mathbf{0.742})$.

El intervalo de confianza para un nivel de confianza de 92 % viene dado por la expresión:

$$\left(p - Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \qquad p + Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

En el ejercicio nos dicen que: $\boldsymbol{n}$ = 500, $\boldsymbol{p}$ = 150/500 = 0.3.

Calculamos el nuevo $\boldsymbol{Z_{\frac{\propto}{2}}}$**,** y obtenemos: $\boldsymbol{Z_{\frac{\propto}{2}}} = \mathbf{1.75}$ sustituyendo, tenemos:

$$\left(0.3 - 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.7(1-0.3)}{500}}, \qquad 0.3 + 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.7(1-0.3)}{500}}\right) = (0.296,\ \ 0.335)$$

Intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que realizan voluntariado al 92 %: $(\mathbf{0.296},\ \ \mathbf{0.335})$.

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad

CURSO: 2018 - 2019

ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B

Opción A

EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes preguntas.

i) Calcule $A^2 - B^2$ (1 punto)

ii) Calcule $(A - B)(A + B)$ (1 punto)

iii) Calcule $C^{-1} C^t - I$ (1.5 puntos)

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24$, calcule:

i) Intervalos de concavidad y convexidad. Punto de inflexión. (2 puntos)

ii) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = -2$. (1.5 puntos)

EJERCICIO 3:

La duración de un tipo de batería para teléfonos móviles es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de tres meses. Se toma una muestra aleatoria de diez baterías y se miden las siguientes duraciones (en meses): 15.7, 7.2, 21.6, 19.4, 14.5, 17.3, 15.2, 23.4, 21.5 y 15.8

i) Construya un intervalo de confianza para la duración media de este tipo de baterías, con un nivel de confianza del 98%. (2 puntos)

ii) Determine cuál debe ser el tamaño de la muestra para que el error máximo se reduzca a la mitad. (1 punto)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Opción B

EJERCICIO 1:

Una empresa tiene dos plantas (P1 y P2) en las que produce bobinas de acero de tres anchuras (A1, A2, A3). La planta P1 tiene maquinaria capaz de fabricar cada hora 10 bobinas de anchura A1, 10 bobinas de anchura A2 y 20 bobinas de anchura A3. La planta P2 tiene capacidad para fabricar cada hora 10, 50 y 10 bobinas de cada tipo de anchura, respectivamente. El coste de operación por hora es de 70 euros en la planta P1 y de 120 euros en la planta P2. La empresa tiene que suministrar cada día al menos 180 bobinas de anchura A1, al menos 300 bobinas de anchura A2 y al menos 240 bobinas de anchura A3. ¿Cuántas horas diarias deberá trabajar cada planta para atender la demanda si se desea minimizar el coste total de operación?

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda de bobinas de anchura A1 se redujera a la mitad. (0.5 puntos)

EJERCICIO 2:

i) Dibuje el recinto comprendido entre las curvas $y = x^3 - 4x$, $y = -x$, y las rectas $x = 1$, $x = -1$. (1 punto)

ii) Calcule el área de dicho recinto. (2.5 puntos)

EJERCICIO 3:

Según un estudio reciente, el 80% de los jóvenes españoles entre 18 y 23 años estudia, el 40% tiene un contrato laboral y el 25% simultanea estudios y trabajo. Se selecciona un joven al azar.

i) Calcule la probabilidad de que únicamente estudie. (1 punto)

ii) Calcule la probabilidad de que no estudie ni trabaje. (1 punto)

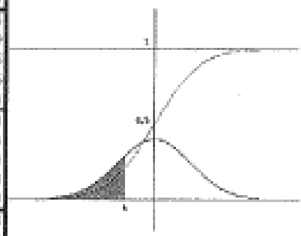
iii) Sabiendo que no estudia, calcule la probabilidad de que trabaje. (1 punto)

(Escriba las fórmulas necesarias)

Tabla de la distribución normal estándar Z ~ N(0,1)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3.4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3.3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3.2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3.1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3.0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2.9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2.8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2.7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2.6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2.5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2.4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2.3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2.2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2.1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2.0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1.9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1.8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1.7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1.6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1.5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1.4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1.3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1.2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1.1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1.0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0.9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0.8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0.7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0.6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0.5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0.4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0.3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0.2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0.1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0.0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

$$P(Z < k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\, dt$$



k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1.0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2.0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2.1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2.2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2.3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2.4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2.5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2.6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2.7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2.8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2.9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3.0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3.1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3.2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3.3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3.4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3.5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, responda a las siguientes preguntas.

i) Calcule $A^2 - B^2$ (1 punto)

ii) Calcule $(A-B)(A+B)$ (1 punto)

iii) Calcule $C^{-1}C^{t} - I$ (1.5 puntos)

Solución:

i. $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}20 & -10\\ -10 & 5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5 & -5\\ -5 & 10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15 & -5\\ -5 & -5\end{pmatrix}.$

$$\boldsymbol{A^2 - B^2 = \begin{pmatrix}15 & -5\\ -5 & -5\end{pmatrix}.}$$

ii. $(A-B)\cdot(A+B) = \left(\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right) =$

$\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15 & 0\\ -10 & -5\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{(A-B)\cdot(A+B) = \begin{pmatrix}15 & 0\\ -10 & -5\end{pmatrix}}$$

iii. C-1 Ct – I:

Calculamos C^{-1} y C^{t}:

$$C^{t} = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj(C)^t = (1/-2)\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$C^{-1}C^{t} - I = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -2\\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C^{-1}C^{t} - I = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}}$$

Problema A.2:

Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24$, calcule:

i) Intervalos de concavidad y convexidad. Punto de inflexión. (2 puntos)

ii) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = -2$. (1.5 puntos)

Solución:

i. Para estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión, calculamos la derivada segunda de la función:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 24 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$.

Igualamos a cero para determinar los posibles puntos de inflexión: $6x - 12 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 2}$.

Analizamos el signo de la derivada segunda:

En $(-\infty, 2)$ el signo es negativo. La función es cóncava ($\cap$).

En $(2, +\infty)$ es positivo, la función es convexa ($\cup$).

El punto $\boldsymbol{x = 2}$ es de inflexión: (2, 8).

La función es **cóncava** en $(-\infty, 2)$, **convexa** en $(2, +\infty)$, y tiene un **punto de inflexión**: $(2, 8)$.

ii. Cálculo de la recta tangente en $x = -2$.

La ecuación de la recta tangente en $\boldsymbol{x = a}$ es: $\boldsymbol{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$.

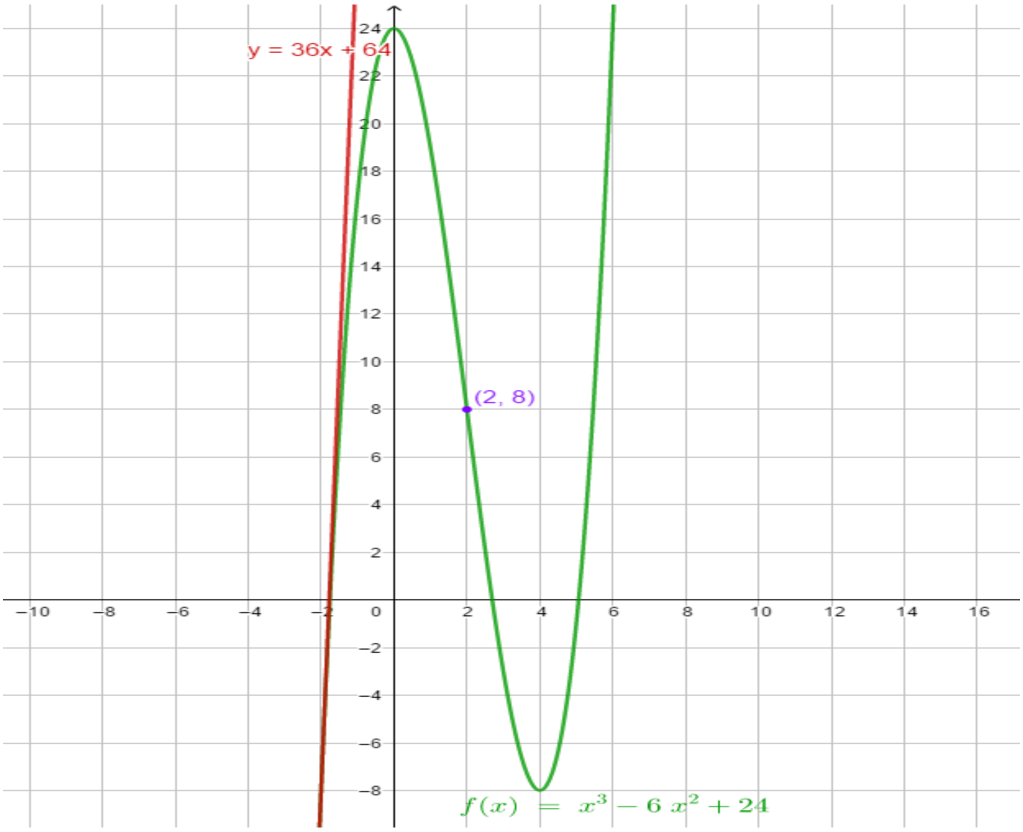
$f(-2) = (-2)^3 - 6(-2)^2 + 24 = -8 - 24 + 24 = -8 \Rightarrow$

Con la derivada primera obtenemos la pendiente de la recta:

$f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f'(-2) = 3(-2)^2 - 12(-2) = 12 + 24 = 36$.

La recta tangente es: $\boldsymbol{y = f(a) + f'(a)(x - a)} \Rightarrow y = -8 + 36(x - (-2)) = 36x + 64$.

La recta tangente es: $\boldsymbol{y = 36x + 64}$.


y = 36x + 64
(2, 8)
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 24$

Problema A.3:

La duración de un tipo de batería para teléfonos móviles es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de tres meses. Se toma una muestra aleatoria de diez baterías y se miden las siguientes duraciones (en meses): 15.7, 7.2, 21.6, 19.4, 14.5, 17.3, 15.2, 23.4, 21.5 y 15.8

i) Construya un intervalo de confianza para la duración media de este tipo de baterías, con un nivel de confianza del 98%. (2 puntos)

ii) Determine cuál debe ser el tamaño de la muestra para que el error máximo se reduzca a la mitad. (1 punto)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Solución:

i. Los datos son: X = duración baterías = $N(\mu, 3)$, n = 10.

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Calculamos la media muestral: $\bar{x} = \frac{15.7+7.2+21.6+19.4+14.5+17.3+15.2+23.4+21.5+15.8}{10} = 17.16.$

Con el nivel de confianza del 98 %, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.33$**,** sustituyendo, tenemos:

$$\left(17.16 - 2.33 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}\ ,\ \ 17.16 + 2.33 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}\ \right) = (14.95,\ \ 19.37).$$

La duración media de las baterías se encuentra entre **14.95** meses y **19.37** meses con una confianza del 98 %

ii. El error máximo viene dado por: $\text{Error} = \boldsymbol{Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$**.** En nuestro caso por:

$$\text{Error} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.21.$$

Debemos reducirlo a la mitad, es decir, a 1.105, por lo que el nuevo error debe ser:

$\text{Error} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.105$, siendo $2.33 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 1.105$, por lo que $\sqrt{n} = \frac{2.33 \cdot 3}{1.105} = 6.32$, y $n \sim 40.01$.

El número de baterías es entero, por lo que:

El número mínimo de baterías debe ser de **41** baterías.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

Una empresa tiene dos plantas (P1 y P2) en las que produce bobinas de acero de tres anchuras (A1, A2, A3). La planta P1 tiene maquinaria capaz de fabricar cada hora 10 bobinas de anchura A1, 10 bobinas de anchura A2 y 20 bobinas de anchura A3. La planta P2 tiene capacidad para fabricar cada hora 10, 50 y 10 bobinas de cada tipo de anchura, respectivamente. El coste de operación por hora es de 70 euros en la planta P1 y de 120 euros en la planta P2. La empresa tiene que suministrar cada día al menos 180 bobinas de anchura A1, al menos 300 bobinas de anchura A2 y al menos 240 bobinas de anchura A3. ¿Cuántas horas diarias deberá trabajar cada planta para atender la demanda si se desea minimizar el coste total de operación?

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda de bobinas de anchura A1 se redujera a la mitad. (0.5 puntos)

Solución:

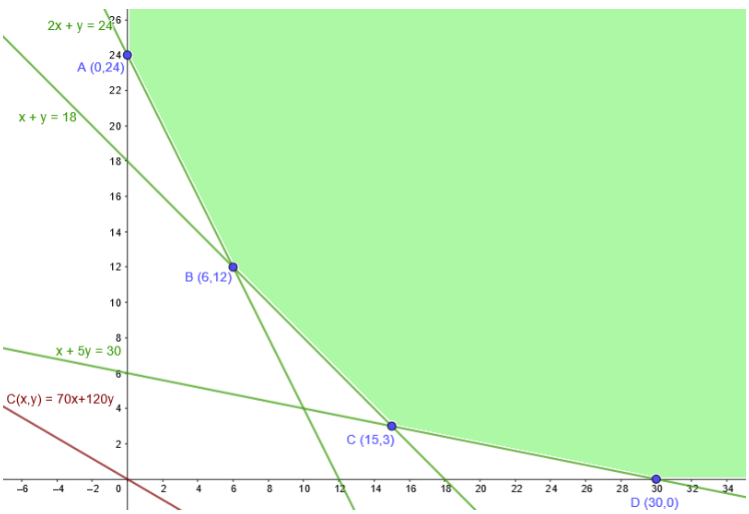
i) Se trata de un problema de programación lineal con dos variables. Llamamos x al número de horas diarias que trabaja P1, e y al de horas que trabaja P2.

Las bobinas de anchura A1 que se fabrican son: $10x + 10y$ y deben ser al menos 180. Las de anchura A2 son: $10x + 50y$, y al menos 300. Las de anchura A3: $20x + 10y$, al menos 240. Traducimos a inecuaciones las restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0\,,\ \ y \geq 0,\ \ 10x + 10y \geq 180 \\ \qquad\qquad 10x + 50y \geq 300 \\ \qquad\qquad 20x + 10y \geq 240 \end{cases} \quad \text{simplificando} \quad \begin{cases} x \geq 0\,,\ \ y \geq 0,\ \ x + y \geq 18 \\ \qquad\qquad x + 5y \geq 30 \\ \qquad\qquad 2x + y \geq 24 \end{cases}$$

Por otro lado, la **función objetivo** que debemos minimizar es la siguiente: $70x + 120y = Coste(x, y)$

ii) Representamos la región que define este sistema de ecuaciones. Dibujamos las rectas y dando valores determinamos la región factible. Por ejemplo, el punto (12, 12) verifica todas las desigualdades.



Para obtener los vértices resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$A)\ \begin{cases} x = 0 \\ 2x + y = 24 \end{cases} \rightarrow$ A(0, 24)

B) $\begin{cases} 2x + y = 24 \\ x + y = 18 \end{cases} \rightarrow$ B(6, 12)

C) $\begin{cases} x + y = 18 \\ x + 5y = 30 \end{cases} \rightarrow$ C(15, 3)

$D)\ \begin{cases} x + 5y = 30 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ D(30, 0)

Los vértices de la región son: $A(0, 24)$, $B(6, 12)$, $C(15, 3)$ y $D(30, 0)$.

Calculemos para cada vértice el coste de operación por hora: $\boldsymbol{C(x, y) = 70x + 120y}$

- $C(0, 24) = 70 \cdot 0 + 120 \cdot 24 = 8400$
- $C(6, 12) = 70 \cdot 6 + 120 \cdot 12 = 1860$
- $C(15, 3) = 70 \cdot 15 + 120 \cdot 3 = 1410$
- $C(30, 0) = 70 \cdot 30 + 120 \cdot 0 = 2100$

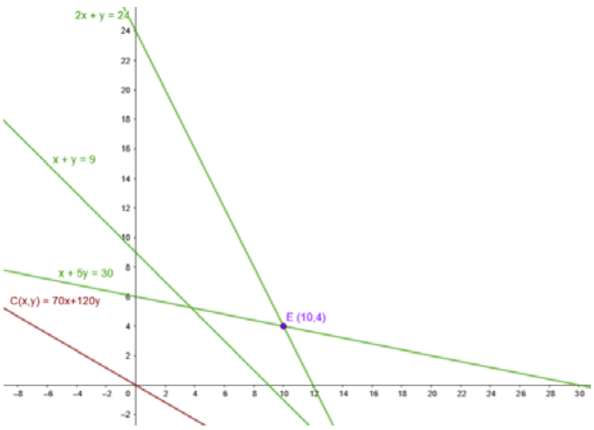
Por tanto, para obtener el mínimo coste deberá trabajar:

15 horas diarias la planta P1 y **3** horas diarias la planta P2.

iii)

Si la demanda de bobinas A1 se reduce a la mitad:

$$\begin{cases} x \geq 0\,,\ \ y \geq 0,\ \ 10x + 10y \geq 90 \\ 10x + 50y \geq 300 \\ 20x + 10y \geq 240 \end{cases} \quad \text{simplificando} \quad \begin{cases} x \geq 0\,,\ \ y \geq 0,\ \ x + y \geq 9 \\ x + 5y \geq 30 \\ 2x + y \geq 24 \end{cases}$$



La producción de bobinas del ancho A1 no influye en la minimización del gasto

Problema B.2:

i) Dibuje el recinto comprendido entre las curvas $y = x^3 - 4x$, $y = -x$, y las rectas $x = 1$, $x = -1$.

(1 punto)

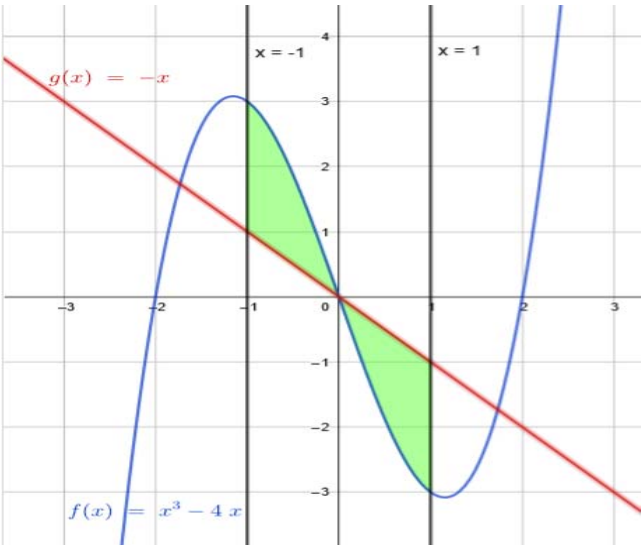
ii) Calcule el área de dicho recinto. (2.5 puntos)

Solución:

i. Buscamos los puntos de intersección: $y = x^3 - 4x$; $y = -x$. En el intervalo [–1, 1] sólo está en origen: (0, 0).

Para $x = -1$ corta a la curva en –1 + 4 = 3. Para $x = 1$ corta a la curva en 1 – 4 = –3.

Representamos las gráficas:



ii. El área pedida es:

$$\int_{-1}^{0}\left((x^3 - 4x) - (-x)\right)dx + \int_{0}^{1}\left((-x) - (x^3 - 4x)\right)dx = \int_{-1}^{0}(x^3 - 3x)dx + \int_{0}^{1}(-x^3 + 3x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{1} = 2\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}.$$

Por tanto, el área pedida es $\frac{5}{2}\boldsymbol{u}^2$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.3:

Según un estudio reciente, el 80% de los jóvenes españoles entre 18 y 23 años estudia, el 40% tiene un contrato laboral y el 25% simultanea estudios y trabajo. Se selecciona un joven al azar.

i) Calcule la probabilidad de que únicamente estudie. (1 punto)

ii) Calcule la probabilidad de que no estudie ni trabaje. (1 punto)

iii) Sabiendo que no estudia, calcule la probabilidad de que trabaje. (1 punto)

(Escriba las fórmulas necesarias)

Solución:

Nombramos los sucesos: E = Estudia, T = Trabaja, *no* E = No estudia, *no* T = No trabaja.

Los datos que nos dan son:

$$P(E) = 80\ \% = 0.8, \quad P(T) = 40\ \% = 0.4, \quad P(\overline{E}) = 0.2, \quad P(\overline{T}) = 0.6.$$

$$P(E \cap T) = 25\ \% = 0.25$$

Hacemos la tabla de contingencia:

	Estudia (E)	No estudia ($\overline{E}$)	Total
Trabaja (T)	0.25		0.4
No trabaja ($\overline{T}$)			0.6
Total	0.8	0.2	1

Completamos la tabla:

	Estudia (E)	No estudia ($\overline{E}$)	Total
Trabaja (T)	0.25	**0.15**	0.4
No trabaja ($\overline{T}$)	**0.55**	**0.05**	0.6
Total	0.8	0.2	1

i. Mirando en la tabla: $P(\text{únicamente estudie}) = P(E \cap \overline{T}) = 0.55$.

La probabilidad de que únicamente estudie es del 0.55.

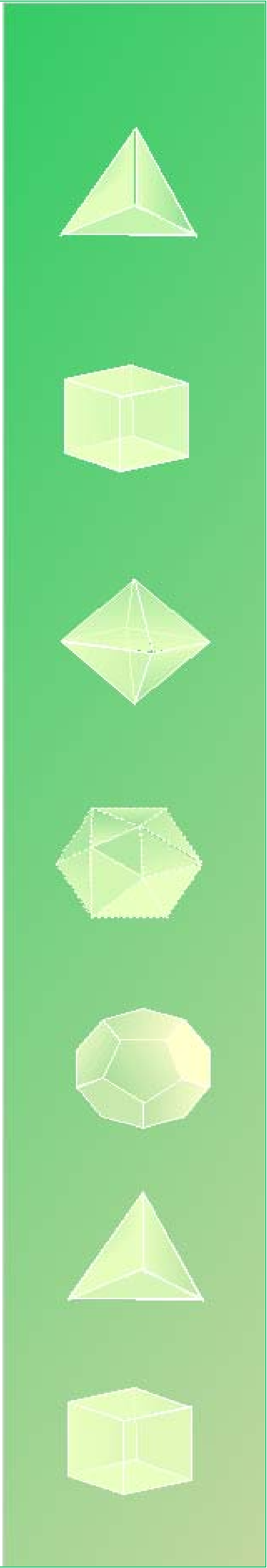
ii. Mirando en la tabla: $P(\text{ni estudie ni trabaje}) = P(\overline{E} \cap \overline{T}) = 0.05$.

La probabilidad de que ni estudie ni trabaje es 0.05.

iii. Probabilidad condicionada. Entre los que no estudian, calcular la probabilidad de que trabaje:

$P(\text{trabaje/no estudia}) = P(T \cap \overline{E})/P(\overline{E}) = 0.15/0.2 = 0.75$.

Sabiendo que no estudia, la probabilidad de que trabaje es 0.75.



Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma del

País Vasco

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: ALEX AGINAGALDE

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2019ko EKAINA	JUNIO 2019
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

Problema A.1:

(3 puntos) **Una pastelería fabrica dos tipos de tartas. La tarta tipo A se elabora con 1 kg de masa y 1.5 kg de chocolate, y se vende a 24 euros. La de tipo B se vende a 30 euros y se elabora con 1.5 kg de masa, 1 kg de chocolate, tal como aparece en la siguiente tabla:**

	Masa	Chocolate
A	1	1.5
B	1.5	1

Si la pastelería solo dispone de 300 kg de cada ingrediente, ¿cuántas tartas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo ingreso? Calcula el valor de dicho ingreso.

Problema A.2:

(3 puntos) **Se considera la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.**

a) **Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.**
b) **Determinar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión**
c) **Encontrar los puntos de corte con el eje OX. Realizar la representación grafica de la función.**
d) **Calcular el área del recinto finito delimitado por la curva y el eje abscisas OX.**

Problema A.3:

(2 puntos) **Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, y la probabilidad de la unión de ambos sucesos es $\frac{3}{4}$. Calcular:**

a) **La probabilidad de que ocurra el suceso A, condicionada a que se ha producido el suceso B.**
b) **La probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos.**
c) **La probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B.**
d) **La probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.**

Problema A.4:

(2 puntos) **En una población se toma una muestra aleatoria de 500 personas y se les pregunta si son aficionadas al deporte o no. De ellas 350 respondieron que si son aficionadas al deporte y el resto que no. Con esta información se pide:**

a) **Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.**
b) **Interpretar los resultados obtenidos.**

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2019ko EKAINA	JUNIO 2019
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN B

Problema B.1:

(3 puntos) **Sean las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

a) **Determina la matriz inversa de la matriz $I + B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.**

b) **Calcula las matrices X e Y que verifican que:**

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

Problema B.2: (3 puntos)

a) **Hallar la función polinómica de segundo grado cuyo gráfico pasa por el punto (0, 0) y tiene un máximo en el punto (1, 1)**

b) **Hallar el área del recinto finito delimitado por la curva obtenido y el eje de abscisas OX**

Problema B.3: (2 puntos)

a) **Se dispone de dos urnas diferentes: A y B. La urna A contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, mientras que la urna B contiene 10 bolas negras.**

b) **Se toma al azar una bola de cada una de las urnas al mismo tiempo y se intercambian (es decir, la bola extraída de la urna A se introduce en la urna B y la bola extraída de la urna B se introduce en la urna A). Si a continuación se extrae una bola de la urna A, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?**

Problema B.4:

(2 puntos) **En una determinada ciudad el gasto anual en transporte publico realizado por las familias sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.**

Se toma una muestra aleatoria de 100 familias, de las que se obtiene un gasto medio de 250 euros.

a) **Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con el nivel de confianza del 99 %.**

b) **¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?**

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

Una pastelería fabrica dos tipos de tartas. La tarta tipo A se elabora con 1 kg de masa y 1.5 kg de chocolate, y se vende a 24 euros. La de tipo B se vende a 30 euros y se elabora con 1.5 kg de masa, 1 kg de chocolate, tal como aparece en la siguiente tabla:

	Masa	Chocolate
A	1	1.5
B	1.5	1

Si la pastelería solo dispone de 300 kg de cada ingrediente, ¿cuántas tartas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo ingreso? Calcula el valor de dicho ingreso.

Solución:

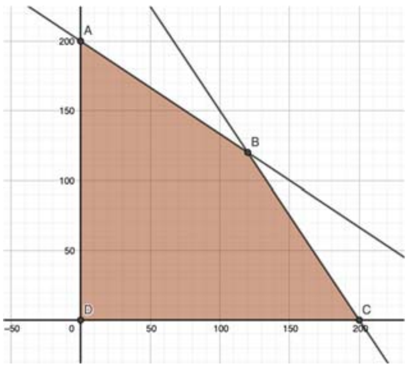
Se trata de un problema de programación lineal con dos variables.

Completemos la tabla:

Tipo de tarta	Masa (kg)	Chocolate (kg)	Precio (€)
A (x unidades)	1	1.5	24
B (y unidades)	1.5	1	30
¿De cuanto disponemos?	300	300	

Si traducimos a ecuaciones dichas restricciones obtenemos este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq \\ 1x + 1.5y \leq 300 \\ 1.5x + 1y \leq 300 \end{cases}$$



Por otro lado, la función objetivo es la siguiente: $f(x, y) = 24x + 30y$

Representamos la región que define es sistema de ecuaciones:

Si representamos la región perfectamente vemos que los vértices de la región son (0, 0), (0, 200), (120, 120) y (200, 0).

Pero en caso de no disponer de un dibujo adecuado tendríamos que resolver cuatro sistemas de ecuaciones:

1) $\begin{cases} y = 0 \\ 1.5x + y = 300 \end{cases} \Longrightarrow (200, 0)$

2) $\begin{cases} x = 0 \\ 1.5x + y = 300 \end{cases} \Longrightarrow (0, 200)$

3) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (0, 0)$

4) $\begin{cases} x + 1{,}5y = 300 \\ 1.5x + y = 300 \end{cases} \Longrightarrow (120, 120)$

Calculemos para cada vértice el valor de la ganancia:

- $f(0, 0) = 24 \cdot 0 + 30 \cdot 0 = 0$
- $f(200, 0) = 24 \cdot 200 + 30 \cdot 0 = 4800$
- $f(0, 200) = 24 \cdot 0 + 30 \cdot 200 = 6000$
- $f(120, 120) = 24 \cdot 120 + 30 \cdot 120 = 6480$

$$\boxed{Por\ tanto, la\ ganancia\ máxima\ se\ da\ en\ si\ se\ fabrican\ 120\ tartas\ de\ cada\ tipo.}$$

Problema A.2:

Se considera la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

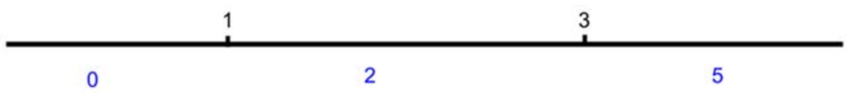
- **e) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.**
- **f) Determinar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión**
- **g) Encontrar los puntos de corte con el eje OX. Realizar la representación grafica de la función.**
- **h) Calcular el área del recinto finito delimitado por la curva y el eje abscisas OX.**

Solución:

a) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función tenemos que derivar la función e igualarla a 0:

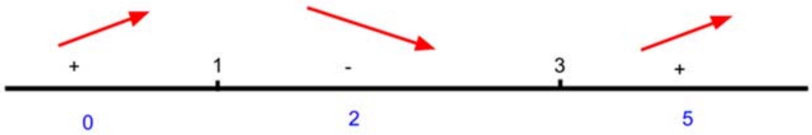
$$f'(x) = 0 = 3x^2 - 12x + 9$$

Resolviendo dicha ecuación obtenemos los valores críticos $x = 1$ y $x = 3$. Los sustituimos en la recta real y vemos que pasa con el crecimiento y decrecimiento para los tres intervalos que aparecen:



Estudiaremos lo que pasa en los puntos 0, 2 y 5 y podemos generalizar para los intervalos $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, +\infty)$.

- $f'(0) = 9 > 0$ por tanto es creciente en ese intervalo
- $f'(2) = -3 < 0$ por tanto es decreciente en ese intervalo
- $f'(5) = 74 < 0$ por tanto es decreciente en ese intervalo



$$\boxed{Por\ tanto\ la\ función\ es\ creciente\ en\ (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)\ y\ decreciente\ en\ (1, 3)}$$

b) Con la información del apartado (a) podemos afirmar que en el punto $x = 1$ hay un máximo y que en el punto $x = 3$ hay un mínimo. Aun así, veamos con el uso de la segunda derivada que es así.

$$f''(x) = 6x \quad - 12$$

Igualando a 0 la segunda derivada obtenemos el punto $x = 2$, un posible punto de inflexión. Veamos que signo toman los puntos críticos $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$ en la segunda derivada:

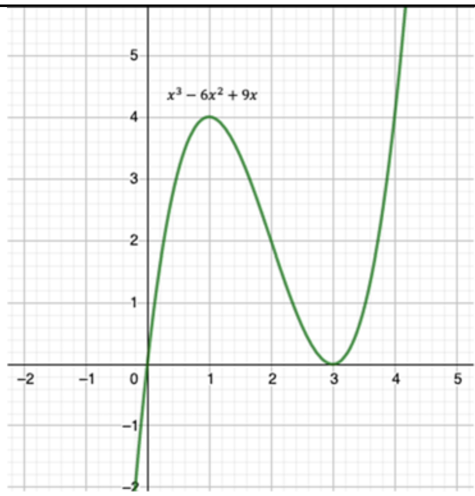
- $f''(1) = 6 - 12 = -6 \quad < 0$, es decir, hay un máximo en (1, 4)
- $f''(2) = 0$, es decir, hay un punto de inflexión en (2, 2) puesto que $f'''(2) = 6 \neq 0$
- $f''(3) = 18 - 12 = 6 \quad < 0$, es decir hay un mínimo en (3, 0)

Autor: ALEX AGINAGALDE
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

c) Los cortes con la recta OX se calculan cuando igualamos el valor de y a 0, es decir cuando calculamos $f(x) = 0$

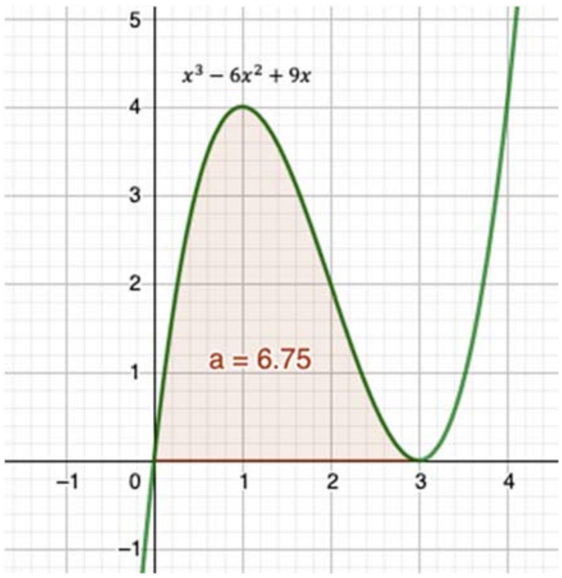
$$f(x) = 0 = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x \quad + 9) = x(x-3)^2 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\textit{Es decir la curva corta al eje OX en los puntos } (0,0) \textit{ y } (3,0)}$$



d) El área del recinto finito delimitado por la curva y el eje abscisas OX es el área que esta debajo de la curva y la recta $y = 0$, entre los puntos 0 y 3.

$$\boxed{A =} \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} + K\right]_0^3 = \boxed{\frac{27}{4}u^2}$$



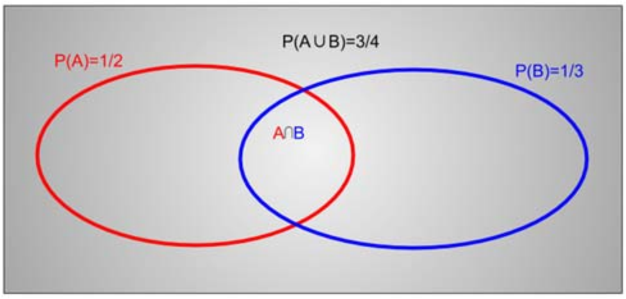
Problema A.3:

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, y la probabilidad de la unión de ambos sucesos es $\frac{3}{4}$. Calcular:

- **a) La probabilidad de que ocurra el suceso A, condicionada a que se ha producido el suceso B.**
- **b) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos.**
- **c) La probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B.**
- **d) La probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.**

Solución:

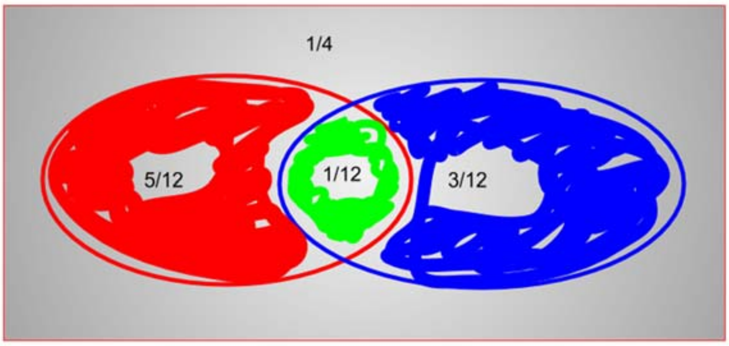
Con la información que disponemos realizamos un diagrama de Venn:



Con esta información podemos calcular el área de cada una de las zonas por separado.

- Si $P(A \cup B) = 3/4$ y $P(\Omega) = 1$, entonces, $P(\overline{A \cup B}) = 1/4$
- En $P(A) + P(B) = 1/2 + 1/3 = 5/6$ hemos contado dos veces $P(A \cap B)$, y como $P(A \cup B) = 3/4$, entonces: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - (A \cup B) = 5/6 - 3/4 = 1/12$

Haciendo unos pocos cálculos llegamos a este nuevo esquema:



Respondamos ahora a las preguntas planteadas:

a) La probabilidad de que ocurra el suceso A, condicionada a que se ha producido el suceso B.

$$\boxed{P(A|B) =} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/12}{1/3} \boxed{= 1/4}$$

b) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los sucesos.

$$\boxed{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1/4}$$

c) La probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B.

$$\boxed{P(A \cap \bar{B}) = 5/12}$$

d) La probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.

$$\boxed{P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)} = 5/12 + 3/12 = 8/12 \boxed{= 2/3}$$

Problema A.4:

En una población se toma una muestra aleatoria de 500 personas y se les pregunta si son aficionadas al deporte o no. De ellas 350 respondieron que si son aficionadas al deporte y el resto que no. Con esta información se pide:

c) Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.

d) Interpretar los resultados obtenidos.

Solución:

Se trata de un problema de probabilidad de una distribución muestral de proporciones.

Tenemos esta información:

- Tamaño de la muestra $n = 500$
- $\hat{p} = \frac{350}{500} = 0{,}7$ es la proporción de aficionados de la muestra.
- $\hat{q} = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$X: N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}) = N(0{,}7; 0{,}0205)$ tras normalizar, $z = \frac{x-\hat{p}}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$ tenemos $Z: N(0{,}1)$

a) Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.

Se nos pide que calculemos $P(-a \leq z \leq a) = 0{,}95$ o lo que es lo mismo $P(z \leq a) = 0{,}975 \implies a = 1{,}96$

De manera que $P(-1{,}96 \leq z \leq 1{,}96) = 0{,}95$

Des-tipificando, $P(-1{,}96 \leq \frac{x-\hat{p}}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}} \leq 1{,}96) = 0{,}95 \Leftrightarrow P(\hat{p} - 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \leq x \leq \hat{p} + 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}) = 0{,}95$

Por tanto el intervalo de aficionados al deporte con un 95 % de fiabilidad es:

$$(0{,}7 - 1{,}96 \cdot 0{,}0205; 0{,}7 + 1{,}96 \cdot 0{,}0205) = (0{,}65982; 0{,}74018) \approx (0{,}66; 0{,}74)$$

Es decir, el porcentaje de personas de la población aficionadas al deporte está entre el 66 % y el 74 % con un nivel de confianza del 95 %.

El error máximo para la proporción es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza, es decir: $1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1{,}96 \cdot 0{,}0205 = 0{,}04018 \approx 0{,}04$ esto es el $\boxed{4\ \%}$

b) Interpretar los resultados obtenidos

Se puede decir con un nivel de confianza del 95 %, que el porcentaje de la población que es aficionada al deporte en esa población es mayor que el 66% y menor que el 74 %, lo que supone un error máximo del 4%.

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

a) Determina la matriz inversa de la matriz $I + B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) Calcula las matrices X e Y que verifican que:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

Solución:

a) Se pide calcular $(I + B)^{-1}$

$$I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = D$$

$$\boxed{(I + B)^{-1}} = D^{-1} = \frac{1}{|D|}(Adj\ D)^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^t = \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}}$$

b) $\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases} \Rightarrow Y + BY = C \Rightarrow (I + B)Y = C \Rightarrow Y = (I + B)^{-1} \cdot C$

Por otro lado, $AX = Y = (I + B)^{-1} \cdot C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (I + B)^{-1} \cdot C = A^{-1} \cdot Y$

Realicemos los cálculos: $\boxed{Y =}\ (I + B)^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}}$

Para determinar el valor de X, tenemos que calcular A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\boxed{X =}\ A^{-1} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix} 5/2 & 11/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}}$

Problema B.2:

a) Hallar la función polinómica de segundo grado cuyo gráfico pasa por el punto (0, 0) y tiene un máximo en el punto (1, 1)

b) Hallar el área del recinto finito delimitado por la curva obtenido y el eje de abscisas OX

Solución:

a) Tenemos que encontrar un polinomio de segundo grado, es decir, un polinomio con esta forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Tenemos tres incógnitas $(a, b\ y\ c)$, por tanto necesitamos tres condiciones para que el sistema sea compatible determinado:

1. El gráfico pasa por (0, 0) es equivalente a decir que $f(0) = 0$
2. Tiene un máximo en (1, 1) es equivalente a decir que $f'(1) = 0$ y que además, $f(1) = 1$

- $f(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = c$
- $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 0 = 2a + b$
- $f(1) = 1 \Leftrightarrow 1 = a + b + c$

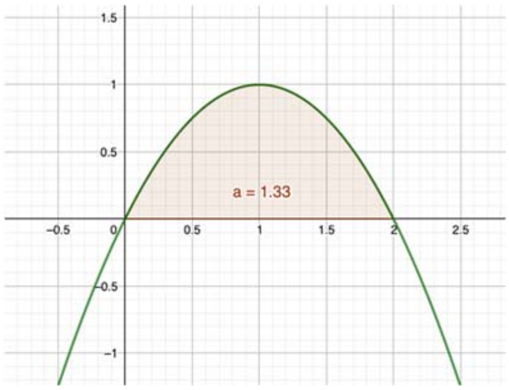
Resolviendo el sistema obtenemos que $a = -1$ y $b = 2$ además de $c = 0$.

Por tanto la función que buscamos es: $f(x) = -x^2 + 2x$

b) La curva es una parábola convexa por tanto corta el eje OX en dos puntos. Calculemos dichos puntos: $-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

La parábola queda por encima del eje OX (como se ve en el dibujo), por tanto el área pedida se calcula mediante la siguiente integral definida:

$$\boxed{A =} \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + k\right]_0^2 \boxed{= \frac{4}{3}u^2}$$



Problema B.3:

Se dispone de dos urnas diferentes: A y B. La urna A contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, mientras que la urna B contiene 10 bolas negras.

Se toma al azar una bola de cada una de las urnas al mismo tiempo y se intercambian (es decir, la bola extraída de la urna A se introduce en la urna B y la bola extraída de la urna B se introduce en la urna A). Si a continuación se extrae una bola de la urna A, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

Solución:

Solucionaremos el problema mediante un diagrama de árbol.

Nos interesa el estado de la caja A en la segunda sacada de bolas. Dicho estado dependerá de lo que se saque en la primera sacada de cada urna.

Si de la urna A se saca una bola negra, la situación no variara pues de la urna B se saca siempre una bola negra. Y por tanto en A habrá 3 blancas y 5 negras

Si de la urna A se saca una bola blanca, la situación varia, pues si sacamos de B una bola negra el numero de bolas negras en A aumenta: 2 blancas y 6 negras.

$N_A \equiv$ De A hemos sacado bola negra $P(N_A) = \frac{5}{8}$ → 3 blancas 5 negras → $P(N) = \frac{5}{8}$; $P(Z)$

$B_A \equiv$ De A hemos sacado bola blanca $P(B_A) = \frac{3}{8}$ → 2 blancas 6 negras → $P(N) = \frac{6}{8}$; $P(Z)$

$$P(sacar\ negra \text{ de A}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{6}{8} = \frac{43}{64} = 0.672 \text{ es decir, } 67.2\ \%$$

Problema B.4:

En una determinada ciudad el gasto anual en transporte publico realizado por las familias sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

Se toma una muestra aleatoria de 100 familias, de las que se obtiene un gasto medio de 250 euros.

a) Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con el nivel de confianza del 99 %.

b) ¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?

Solución:

Se trata de un problema de cálculo del intervalo de confianza de la media para una población con distribución normal conociendo el tamaño de la muestra ($n = 100$) y el gasto medio ($\bar{x} = 250$).

Disponemos de esta información:

- Media de la población μ
- Desviación típica $\sigma = 75$
- Media de la muestra $\bar{x} = 250$

$X: N(\bar{x}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(250; 7{,}5)$ tras normalizar, $z = \frac{x-\bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ tenemos $Z: N(0,1)$

a) Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con el nivel de confianza del 99 %.

Se nos pide que calculemos $P(-a \le z \le a) = 0.99$, es decir, $P(z \le a) = 0.995 \implies a = 2.575$

De manera que $P(-2.575 \le z \le 2.575) = 0.99$

Des-tipificando, $P\left(-2.575 \le \frac{x-\bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 2.575\right) = 0.99 \Leftrightarrow P\left(\bar{x} - 2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le x \le \bar{x} + 2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.99$

Por tanto el intervalo de aficionados al deporte con un 99 % de confianza es:

$$(250 - 2.575 \cdot 7.5; 250 - 2.575 \cdot 7.5) = \boxed{(230.6875, 269.3125)}$$

b) ¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?

El error máximo para un nivel de confianza del 99 % viene dado por: $2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y queremos encontrar el tamaño de la muestra para que sea como máximo 10 euros. Por tanto,

$$2.575\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 10 \Leftrightarrow 2.575\frac{75}{\sqrt{n}} \le 10 \Leftrightarrow 2.575\frac{75}{10} \le \sqrt{n} \Leftrightarrow (2.575\frac{75}{10})^2 \le n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 372.9726 \le n$$

Con un tamaño de 372 no llegamos a tener el 99 % y con un tamaño de 373 nos pasamos, por tanto el tamaño deseado es de $\boxed{373\ familias}$.

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2019ko UZTAILA | JULIO 2019

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II | MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

Problema A.1:

(3 puntos) **Sea la región definida por las inecuaciones:**

$$x + y - 1 \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 4 \quad ; \quad 0 \leq y \leq 2$$

Determinar los puntos de dicha región en los que la función $F(x, y) = 4x + 2y$ alcanza sus valores máximos y mínimos. Calcular los valores de la función en dichos puntos.

Problema A.2:

(3 puntos) **Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.**

a) **Encontrar los valores de los parámetros, a, b y c para que la función pase por el punto (0,0) y tenga un extremo relativo en el punto $(2, -4)$.**
b) **Determinar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función.**
c) **Calcular el área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas.**

Problema A.3:

(2 puntos) **En un instituto hay tres grupos de 1º de bachillerato con el mismo número de estudiantes. En el grupo A dos tercios de los/las estudiantes practican algún tipo de deporte, mientras que en los grupos B y C solo lo hacen la mitad de los/las estudiantes.**

Entre todo el alumnado se escoge una persona al azar, y resulta que no practica deporte. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha persona pertenezca al grupo A?

Problema A.4:

(3 puntos) **Tras realizar una prueba de cultura general entre los habitantes de cierta población, se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución normal, de media 68 y desviación típica 18.**

Se desea clasificar a los habitantes en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de cultura general excelente), de manera que el primer grupo abarque un 20 % de la población, el segundo un 65 % y el tercero el 15 % restante.

¿Cuáles son las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?

Autor: ALEX AGINAGALDE
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2019ko UZTAILA	JULIO 2019
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN B

Problema B.1:

(3 puntos) **Sean A y B las siguientes matrices:** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) **Hallar la matriz inversa de $A - B$**
b) **Hallar la matriz X tal que $X(A-B) = 2A - 3B$**

Problema B.2:

(3 puntos) **Sean las funciones $f(x) = x^4 - 4$ y $g(x) = 3x^2$**

a) **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones, así como los extremos relativos y los puntos de inflexión si los hubiera.**
b) **Representa gráficamente ambas funciones sobre el mismo eje de coordenadas.**
c) **Calcula el área de la región delimitada por ambas curvas.**

Problema B.3:

(2 puntos) **En una determinada población, la probabilidad de ser mujer y padecer diabetes es el 6 %, mientras que la de ser hombre y no padecer diabetes es el 37 %. En dicha población hay un 54 % de mujeres.**

Se elige una persona al azar.

a) **¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca diabetes?**
b) **Si la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que no padezca diabetes?**
c) **Si la persona elegida resulta tener diabetes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?**

Problema B.4:

(2 puntos) **La nota de Evaluación para el Acceso a la Universidad el alumnado que se ha preinscrito en la carrera A sigue una distribución normal de media 6.9 y desviación típica 0.6. Por otro lado, la nota de los/las alumnos/as que se han preinscrito en la carrera B sigue una distribución normal de media 7 y desviación típica 0.5.**

Si en ambos casos solo se puede admitir el 25 % del alumnado preinscrito, ¿cuál de las dos carreras requerirá una nota mínima más baja?

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

Sea la región definida por las inecuaciones:

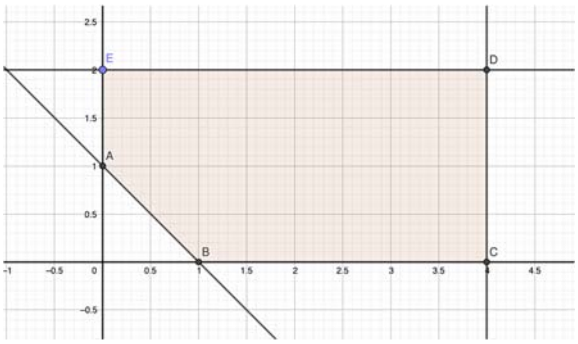
$$\boldsymbol{x + y - 1 \geq 0 \qquad ; \qquad 0 \leq x \leq 4 \qquad ; \qquad 0 \leq y \leq 2}$$

Determinar los puntos de dicha región en los que la función $F(x, y) = 4x + 2y$ alcanza sus valores máximos y mínimos. Calcular los valores de la función en dichos puntos.

Solución:

Tenemos esta información:

- Restricciones: $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$



Representamos cada restricción en el plano cartesiano:

En este caso conseguir los puntos de corte de cada zona es muy sencillo mirando al dibujo. Es decir, los puntos (0, 1), (1, 0), (4, 0), (4, 2) y (0, 2).

Como la función objetivo es $F(x, y) = 4x + 2y$, solamente nos queda sustituir cada punto en dicha función y ver donde es máximo y donde mínimo. Para ello realizaremos una tabla:

Punto	$F(x, y) = 4x + 2y$
(0, 1)	2
(1, 0)	4
(4, 0)	16
(4, 2)	20
(0, 2)	4

El valor máximo se da en el punto (4, 0) y es de 20; y el mínimo en el punto (0, 1), siendo de 2

Problema A.2:

Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) **Encontrar los valores de los parámetros, a, b y c para que la función pase por el punto (0, 0) y tenga un extremo relativo en el punto $(2, -4)$.**
b) **Determinar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función.**
c) **Calcular el área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas.**

Solución:

a) Necesitamos tres condiciones para encontrar los valores de los tres parámetros:

- Pasa por el punto (0, 0), es decir, $f(0) = 0 = c$
- En el punto $(2, -4)$ tiene un extremo relativo, es decir, $\begin{array}{l} f(2) = -4 = 8 + 4a + 2b + c \\ f'(2) = 0 = 3(2)^2 + 2a(2) + b \end{array}$

Planteemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{c} 0 = c \\ -4 = 8 + 4a + 2b + c \\ 0 = 12 + 4a + b \end{array}$$

Para resolverlo despejamos el valor de b en la ultima ecuación y la introducimos en la segunda, teniendo en cuenta que $c = 0$:

$$-4 = 8 + 4a + 2(-12 - 4a) \Leftrightarrow -4 = 8 + 4a - 24 - 8a \Leftrightarrow -4a = 12 \Leftrightarrow a = -3$$

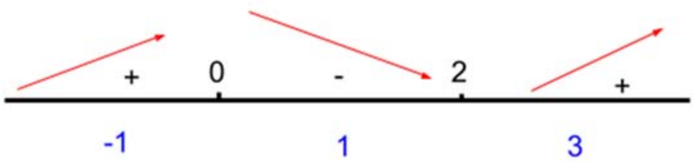
Por tanto, $a = -3$ y $b = 0$, teniendo la siguiente ecuación polinómica: $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2}$

b) Derivemos la función y la igualamos a 0: $f'(x) = 3x^2 - 6x \quad = 0 \Leftrightarrow 0 = 3x(x-2) \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}$

Representemos los valores en la recta real y veamos que pasa en cada intervalo:

Calcularemos lo que pasa en los puntos -1, 1 y 3 y así sabremos que ocurre en cada intervalo

- $f'(-1) = 3 + 6 > 0$, es creciente en $(-\infty, 0)$.
- $f'(1) = 3 - 6 < 0$, es decreciente en (0, 2).
- $f'(3) = 27 - 18 > 0$, es creciente en $(2, +\infty)$.



Por tanto, x = 0 es un máximo y x = 2 es un mínimo.

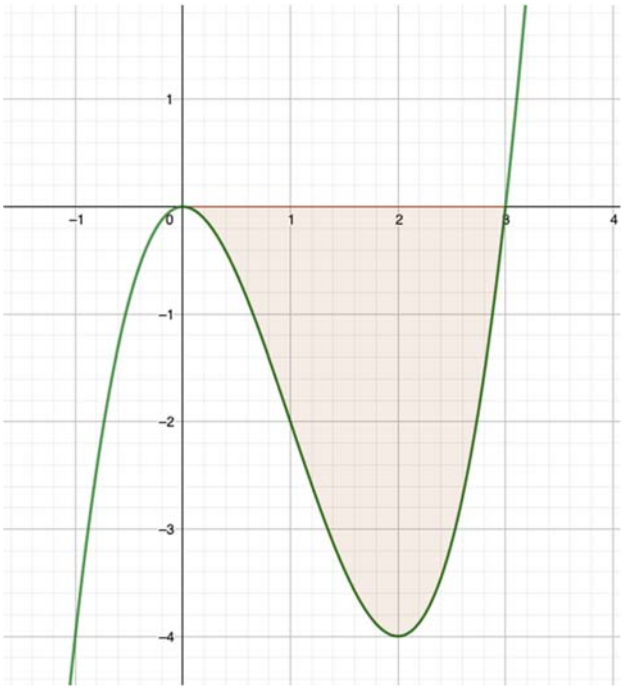
Comprobemos que es así, y además veamos si hay algún punto de inflexión. Para ello utilizaremos la segunda derivada de la función: $f''(x) = 6x \quad - 6 = 0 = 6(x-1)$

En x = 1 hay un punto de inflexión, puesto que la tercera derivada de la función siempre vale 6 un numero no nulo.

Además en $x = 0$ $f''(0) = -6 < 0$ es decir se confirma que hay un máximo; y en $x = 2$ $f''(2) = 6 > 0$ se confirma que hay un mínimo.

Máximo (0, 0)
Mínimo (2, –4)
Punto de inflexión (1, –2)

c) Para calcular la región definida por la función y el eje de abscisas dibujaremos la grafica de la función:



El eje de abscisas queda por encima de la curva, por tanto, tenemos que calcular la siguiente integral definida:

$$\boxed{A =} \int_0^3 [0 - (x^3 - 3x^2)]dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 + K\right]_0^3 \boxed{= \frac{27}{4}u^2}$$

Autor: ALEX AGINAGALDE
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

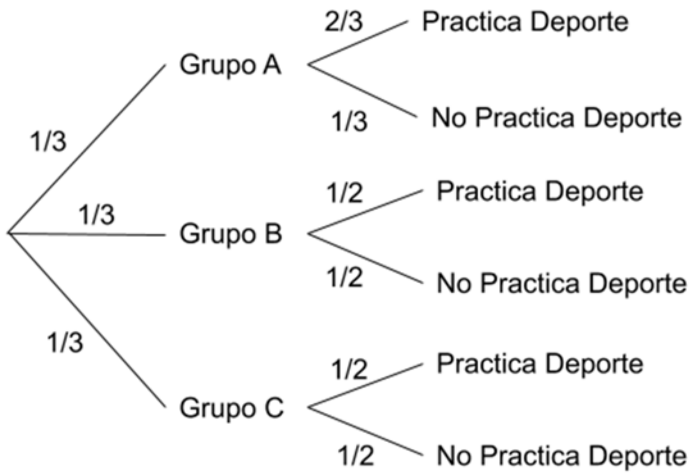
Problema A.3:

En un instituto hay tres grupos de 1º de bachillerato con el mismo número de estudiantes. En el grupo A dos tercios de los/las estudiantes practican algún tipo de deporte, mientras que en los grupos B y C solo lo hacen la mitad de los/las estudiantes.

Entre todo el alumnado se escoge una persona al azar, y resulta que no practica deporte. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha persona pertenezca al grupo A?

Solución:

Construiremos un diagrama de árbol y posteriormente responderemos la pregunta utilizando el teorema de Bayes:



$$\boxed{P(Grupo\ A|No\ practica\ deporte) =} \frac{P(Grupo\ A \cap No\ practica\ deporte)}{P(Practica\ deporte)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1/9}{4/9} \boxed{= \frac{1}{4}}$$

Problema A.4:

Tras realizar una prueba de cultura general entre los habitantes de cierta población, se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución normal, de media 68 y desviación típica 18.

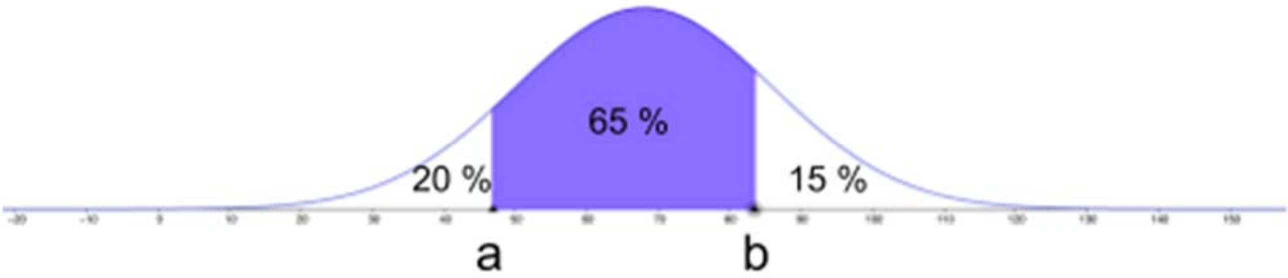
Se desea clasificar a los habitantes en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de cultura general excelente), de manera que el primer grupo abarque un 20 % de la población, el segundo un 65 % y el tercero el 15 % restante.

¿Cuáles son las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?

Solución:

$X: N(\mu, \sigma) = N(68; 18)$ tras normalizar, $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ tenemos $Z: N(0,1)$

Dividiremos la curva normal en tres partes:



- $P(x \leq a) = 0.2 \Leftrightarrow P\left(z \leq \frac{a-68}{18}\right) = 0.2 \Leftrightarrow P\left(z \geq -\frac{a-68}{18}\right) = 0.2 \Leftrightarrow P\left(z \leq -\frac{a-68}{18}\right) = 0.8 \Rightarrow$
$$\Rightarrow -\frac{a-68}{18} = 0.845 \Leftrightarrow a = 68 - 0.845 \cdot 18 = 52.79$$
- $P(x \geq b) = 0.15 \Leftrightarrow P\left(z \geq \frac{b-68}{18}\right) = 0.15 \Leftrightarrow P\left(z \leq \frac{b-68}{18}\right) = 0.85 \Rightarrow \frac{b-68}{18} = 1.0364 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow b = 68 + 1.0364 \cdot 18 = 86.6552$$

En definitiva hemos obtenido tanto a = 52.79 como b = 86.66

Por tanto, las personas que hayan obtenido menos que 52.79 puntos se clasificarán en el primer conjunto (20 % de los encuestados), las personas que hayan obtenido una puntuación entre 52.79 y 86.66 se clasificarán en el segundo conjunto (65 % de los encuestados), y las personas que hayan obtenido una puntuación mayor que 86.66 se clasificarán en el tercer conjunto (15 % de los encuestados).

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

Sean A y B las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar la matriz inversa de $A - B$

b) Hallar la matriz X tal que $X(A - B) = 2A - 3B$

Solución:

a) Calculemos $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A - B| = (2) - (1) = 1$

$$\boxed{(\mathrm{A}-\mathrm{B})^{-1} =} \frac{1}{|\mathrm{A}-\mathrm{B}|}(\mathrm{Adj}\ \mathrm{A}-\mathrm{B})^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t \boxed{= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

b) $X(A - B) = 2A - 3B \Leftrightarrow X = (2A - 3B)(A - B)^{-1}$

$$\boxed{X =} (2A - 3B)(A - B)^{-1} = \left(2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Problema B.2:

Sean las funciones $f(x) = x^4 - 4$ y $g(x) = 3x^2$

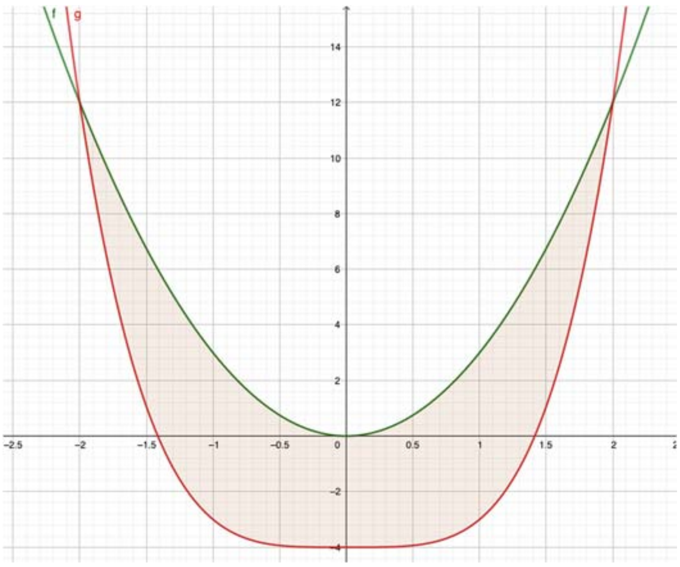
a) **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones, así como los extremos relativos y los puntos de inflexión si los hubiera.**
b) **Representa gráficamente ambas funciones sobre el mismo eje de coordenadas.**
c) **Calcula el área de la región delimitada por ambas curvas.**

Solución:

a) **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones, así como los extremos relativos y los puntos de inflexión si los hubiera.**

$f'(x) = 4x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0$ El intervalo $\boxed{(-\infty, 0) \text{ es decreciente}}$ puesto que para cualquier valor de ese intervalo la derivada siempre será negativa. El intervalo $\boxed{(0, +\infty) \text{ es creciente}}$ puesto que para cualquier valor de ese intervalo la derivada siempre será positiva. $x = 0$ es un posible máximo o mínimo $f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$ $f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$ $f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''(0) = 0$ $f'^{v}(x) = 24 \Rightarrow f'^{v}(0) = 24$ Por tanto, $\boxed{(0, -4) \text{ es un mínimo}}$, y no existe ningún punto de inflexión.	$g'(x) = 6x \quad = 0 \Longrightarrow x = 0$ El intervalo $\boxed{(-\infty, 0) \text{ es decreciente}}$ puesto que para cualquier valor de ese intervalo la derivada siempre será negativa. El intervalo $\boxed{(0, +\infty) \text{ es creciente}}$ puesto que para cualquier valor de ese intervalo la derivada siempre será positiva. $x = 0$ es un posible máximo o mínimo $g'(x) = 6x \Rightarrow g'(0) = 0$ $f''(x) = 6 \Rightarrow g''(0) = 6$ Por tanto, $\boxed{(0, 0) \text{ es un mínimo}}$, y no existe ningún punto de inflexión.

b) **Representa gráficamente ambas funciones sobre el mismo eje de coordenadas.**



Encontraremos los valores x donde las dos curvas se cortan, para ello resolveremos esta ecuación:

$$x^4 - 4 = 3x^2 \Longleftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Se trata de una ecuación bicuadrática, haremos el cambio de variable $t = x^2$

$$t^2 - 3t \quad - 4 = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} t = 4 \implies x = \pm 2 \\ t = -1 \quad \text{imposible} \end{matrix}$$

Por tanto las curvas se cortan en $x = 2$ y $x = -2$

c) Calcula el área de la región delimitada por ambas curvas.

Observando el dibujo vemos que la curva f esta por encima de la curva g en el intervalo $(-2,2)$. Además, vemos que el recinto es simétrico, por tanto podemos calcular el área para el intervalo $(0,2)$ y multiplicarlo por 2.

$$\boxed{A =} \int_{-2}^{2}(f-g)dx = 2\int_{0}^{2}(f-g)dx = 2\int_{0}^{2}(x^4-4-3x^2)dx = 2\left[\frac{x^5}{5}-4x-x^3+K\right]_0^2 \boxed{=\frac{96}{5}u^2}$$

Problema B.3:

En una determinada población, la probabilidad de ser mujer y padecer diabetes es el 6 %, mientras que la de ser hombre y no padecer diabetes es el 37 %. En dicha población hay un 54 % de mujeres.

Se elige una persona al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca diabetes?
b) Si la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que no padezca diabetes?
c) Si la persona elegida resulta tener diabetes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:

Construiremos una tabla de contingencia con toda la información que tenemos:

	Diabetes	No Diabetes	Total
Mujer	0.06	0.48	0.54
Hombre	0.09	0.37	0.46
Total	0.15	0.85	1

Los valores en verde los hemos completado nosotros.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca diabetes?

$$\boxed{P(Diabetes) = 0.15}$$

b) Si la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que no padezca diabetes?

$$\boxed{P(No\ Diabetes|Mujer) =} \frac{P(No\ diabetes\ \cap\ Mujer)}{P(Mujer)} = \frac{0.48}{0.54} \boxed{= 0.89}$$

c) Si la persona elegida resulta tener diabetes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

$$\boxed{P(Mujer|Diabetes) =} \frac{P(Diabetes\ \cap\ Mujer)}{P(Diabetes)} = \frac{0.06}{0.15} \boxed{= 0.4}$$

Problema B.4:

La nota de Evaluación para el Acceso a la Universidad el alumnado que se ha preinscrito en la carrera A sigue una distribución normal de media 6.9 y desviación típica 0.6. Por otro lado, la nota de los/las alumnos/as que se han preinscrito en la carrera B sigue una distribución normal de media 7 y desviación típica 0.5.

Si en ambos casos solo se puede admitir el 25 % del alumnado preinscrito, ¿cuál de las dos carreras requerirá una nota mínima más baja?

Solución:

Carrera A: $X: N(\mu, \sigma) = N(6.8; 0.6)$ tras normalizar, $z_1 = \frac{x-\mu}{\sigma}$ tenemos $Z_1: N(0,1)$

Carrera B: $X: N(\mu, \sigma) = N(7; 0.5)$ tras normalizar, $z_2 = \frac{x-\mu}{\sigma}$ tenemos $Z_2: N(0,1)$

Necesitamos calcular la nota de corte para que el 25 % del alumnado preinscrito acceda a la carrera, es decir, buscamos un valor a para la distribución X tal que $P(x > a) = 0.25$ y un valor b para la distribución Y tal que $P(y > b) = 0.25$

- Nota mínima para acceder a la carrera A:

$$P(x > a) = 0.25 \Leftrightarrow P(z_1 > \frac{a-6.8}{0.6}) = 0.25 \Leftrightarrow P(z_1 \leq \frac{a-6.8}{0.6}) = 0.75 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{a-6.8}{0.6} = 0.675 \Leftrightarrow a = 6.8 + 0.6 \cdot 0.675 = 7.205$$

- Nota mínima para acceder a la carrera B:

$$P(x > b) = 0.25 \Leftrightarrow P(z_2 > \frac{b-7}{0.5}) = 0.25 \Leftrightarrow P(z_2 \leq \frac{b-7}{0.5}) = 0.75 \Longrightarrow \frac{b-7}{0.5} = 0.675 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b = 67 + 0.5 \cdot 0.675 = 7.3375.$$

Por tanto, acceder a la carrera A requiere una nota más baja (7.205) frente a un 7.3375 de la carrera B

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Valencia

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Textos Marea Verde

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

Un inversor dispone de 9 000 € y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5 000 euros y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del 2.7 % y la del producto B del 6.3 %.

a) ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima?

b) ¿Cuál es esa rentabilidad máxima?

Problema A.2:

Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2}{2-x},$$

se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Problema A.3:

En una cierta ciudad, las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, de los cuales, las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30 % si consideramos el total de los hogares. Si se elige un hogar al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago?

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix}$

Se pide:

a) Calcular $(AB)^{-1}$

b) Calcular $(AB^t - A^tB)$

c) Resolver la ecuación: $B^tX+A^tB=A^t$

Siendo A^t y B^t las matrices traspuestas de A y B respectivamente.

Problema B.2:

En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t)=t^3-8t^2+15t$, donde t es el tiempo en años transcurridos.

a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas.

b) ¿En qué valor de t se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este?

c) ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta?

d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta.

Problema B.3:

Sabemos que el 5 % de los hombres y el 2 % de las mujeres que trabajan en una empresa tienen un salario mensual mayor que 5 000 euros. Se sabe también que el 30 % de los trabajadores de dicha empresa son mujeres.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5 000 euros.

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5 000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer?

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5 000 euros?

SOLUCIONES OPCIÓN A CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

Un inversor dispone de 9 000 € y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5 000 euros y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del 2.7 % y la del producto B del 6.3 %.

a) ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima?

b) ¿Cuál es esa rentabilidad máxima?

Solución:

Es un problema de programación lineal ya que tenemos dos productos financieros (A y B), un objetivo (maximizar la rentabilidad) y unas restricciones (la inversión en A ha de superar los 5000 € y debe ser el doble, al menos, que la inversión en B).

Variables de decisión: Nos interesa saber cuánto hay que invertir en A y en B por lo que las variables de decisión serán:

x - Dinero invertido en A.

y - Dinero invertido en B.

Función objetivo: Queremos maximizar la rentabilidad. Como la rentabilidad es de un 2.7 % por la cantidad invertida en A habremos ganado $0.027x$. La rentabilidad de B es un 6.3 % por la cantidad invertida habremos ganado $0.063y$. Sumando ambas cantidades tenemos que la función objetivo es:

$$R(x, y) = 0.027x + 0.063y$$

Restricciones: En principio nuestras variables no pueden ser negativas por lo que aplicaremos. ya que es posible: $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Como tenemos 9 000 € disponibles, la suma de ambas cantidades invertidas ha de ser menor o igual que 9 000: $x + y < 9\,000$.

Como la inversión en A ha de superar los 5 000 € la cantidad x ha de ser mayor que esa cantidad:

$$x > 5\,000.$$

Por último, como la cantidad A ha de ser el doble, al menos, que la cantidad en B tenemos que la cantidad x ha de ser mayor o igual que $2y$:

$$x \geq 2y$$

Región factible o solución. Vendrá dada por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \geq 0;\ y \geq 0$$

$$x + y < 9\,000$$

$$x > 5\,000$$

$$x \geq 2y$$

Las dos primeras inecuaciones nos informan que la representación será en el primer cuadrante. Para representar la tercera igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "y": $y = 9000 - x$.

Tabla de valores:

x	9000	4000	0
y	0	5000	9000

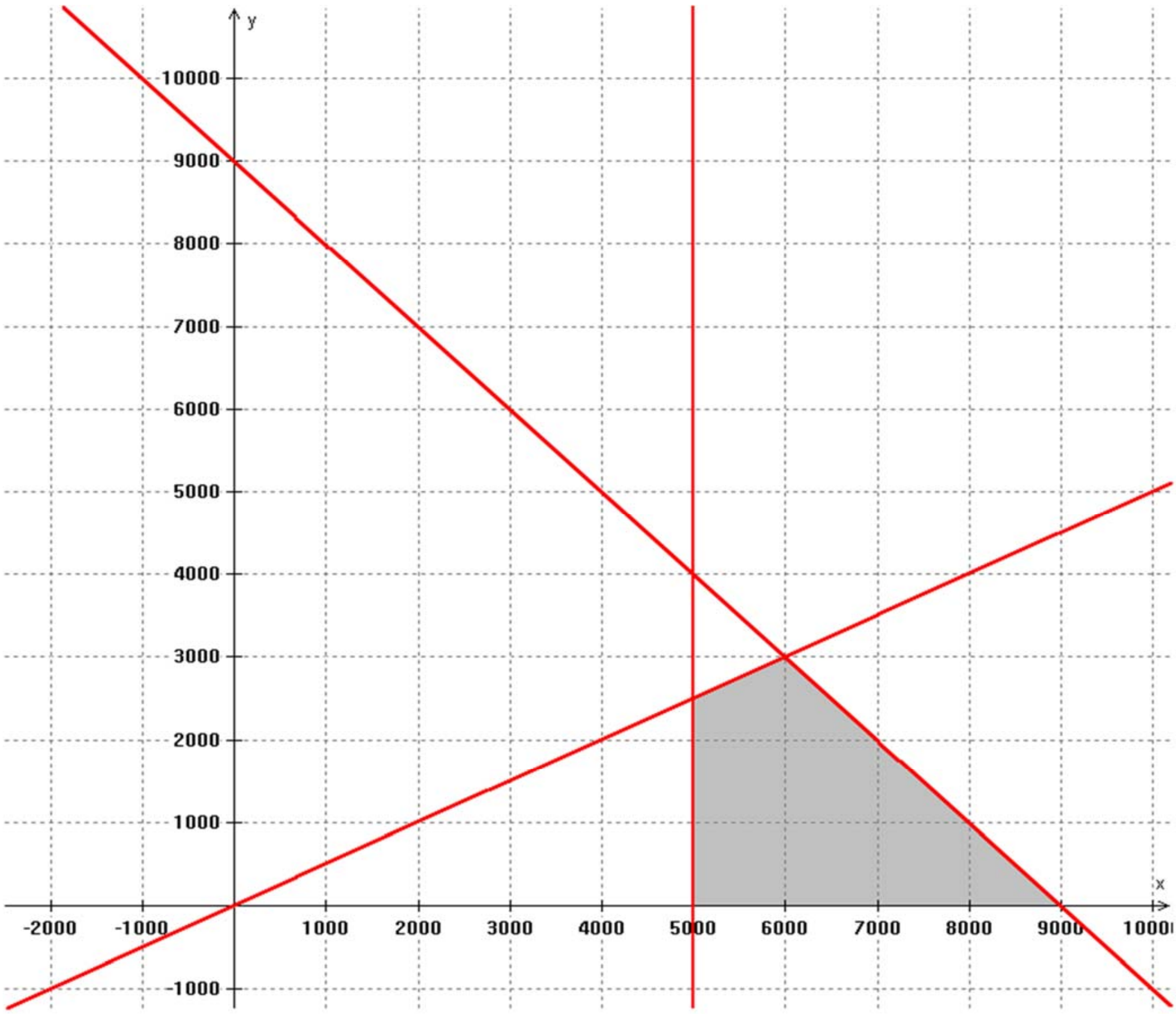
La cuarta es una línea vertical paralela al eje OY por el punto (5000, 0)

En la quinta quitamos la desigualdad y despejamos la "y": $y = x/2$.

Tabla de valores:

x	0	6000	9000
y	0	3000	4500

Después de representar cada recta tenemos que sustituir un valor para hallar la región factible, en el tercer caso podemos sustituir el (0, 0) y nos sale que la región se extiende hacia ese punto. En la cuarta nos sale lo contrario y en la quinta el (0, 0) no es válido por lo que utilizamos el (1 000, 0), por ejemplo y nos sale que no pertenece a la región solución, por lo que la representación queda:



La región tiene 4 vértices:

- El primero es el (5000, 0) que se ve a simple vista.
- El segundo es el (9000, 0) que también podemos ver en la representación.
- El tercero es el corte de $y = 9000 - x$ y $y = x/2$ por lo que igualamos ambas ecuaciones y despejamos la x:

  $$9000 - x = x/2 \rightarrow 18000 - 2x = x \rightarrow x = 6000.$$

  la otra componente la hallamos sustituyendo en cualquiera de las dos: $y = 3000$, por lo que el punto será (6000, 3000) (en la representación también se ve muy claro)
- El cuarto es el corte de $x = 5000$ y $y = x/2$ por lo que sustituimos ese valor en la recta y obtenemos $y = 2500$, por lo que el punto será (5000, 2500) (en la representación también se ve muy claro)

Los 4 vértices a estudiar son: (6000, 3000) (5000, 0) (9000, 0) y (5000, 2500).

La función objetivo era:

$$R(x, y) = 0.027x + 0.063y$$

sustituimos los vértices hallados:

$$R(6000, 3000) = 0.027 \cdot 6000 + 0.063 \cdot 3000 = 351 \text{ euros}$$

$$R(9000, 0) = 0.027 \cdot 9000 + 0.063 \cdot 0 = 243 \text{ euros}$$

$$R(5000, 0) = 0.027 \cdot 5000 + 0.063 \cdot 0 = 135 \text{ euros}$$

$$R(5000, 2500) = 0.027 \cdot 5000 + 0.063 \cdot 2500 = 292.5 \text{ euros}$$

Como buscamos la máxima rentabilidad tenemos que esta se da invirtiendo 6 000 € en el producto A y 3 000 € en el B y el beneficio es de 351 €.

Problema A.2:

Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2}{2-x},$$

se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función polinómica racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador: $2 - x = 0 \rightarrow x = 2$, por lo que no existe en ese punto.

El **dominio** es: $Dom\ f(x) = \Re - \{2\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x) = 0$:

$$f(x)=\frac{x^2}{2-x}=0$$

por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador: $x^2 = 0 \rightarrow x = 0$, por lo que el punto es el (0, 0)

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de $f(x)$ cuando $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$ por lo que se repite el punto (0, 0).

El único punto de corte con los ejes coordenados es (0, 0).

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2-x}=\infty$$

al no ser finito el límite NO tiene asíntota horizontal.

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos uno: $x = 2$, calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{2-x}=\left(\frac{4}{0}\right)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2}{2-x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2}{2-x}=-\infty\end{cases}$$

por lo que $x = 2$ es asíntota vertical.

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

No lo pide y no puntúa, pero podemos saber, por la estructura de la función, que tiene una **asíntota oblicua**. Su dibujo nos puede ser de utilidad para la representación gráfica.

La asíntota oblicua tiene por ecuación $y = mx + n$, con los coeficientes:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{2-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x-x^2} = -1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{2-x} - (-1)x\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{2-x} + x\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+2x-x^2}{2-x}\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x}{2-x}\right] = -2$$

Luego tiene una asíntota oblicua en $y = -x - 2$. NO lo pide pero la vamos a dibujar para facilitar la representación.

Asíntota vertical en $x = 2$; no tiene asíntota horizontal; pero sí hay una asíntota oblicua: $y = -x - 2$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

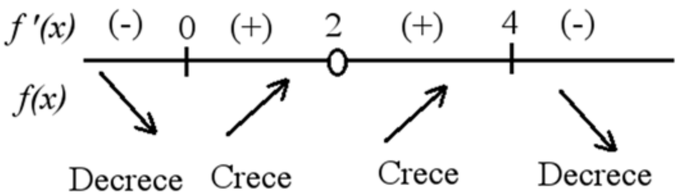
Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(2-x) - x^2\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} = 0$$

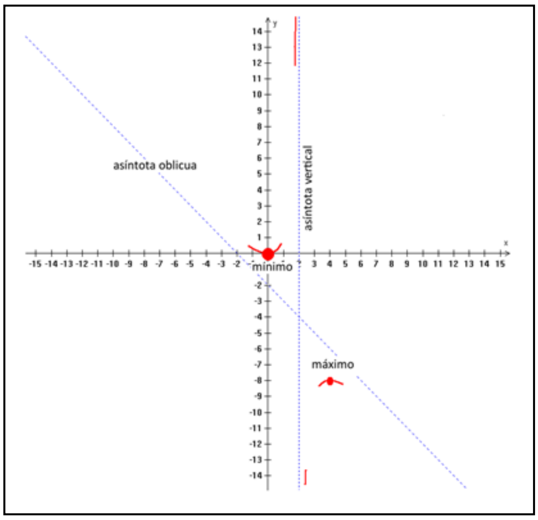
Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$4x - x^2 = 0 \rightarrow x(4 - x) = 0$, que tiene dos soluciones: $x = 0$ y $x = 4$.

Que son los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Con estos puntos y la discontinuidad del dominio $x = 2$, estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores considerados:



Por lo que tenemos que la función crece en]0, 2[U]2, 4[y decrece en]-∞, 0[U]4, +∞[



d) Los máximos y mínimos locales.

Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un mínimo en el punto $x = 0$ → (0, 0) y un máximo en el punto $x = 4$, que es el $f(4) = -8$,:

Mínimo: (0, 0); Máximo: (4, –8).

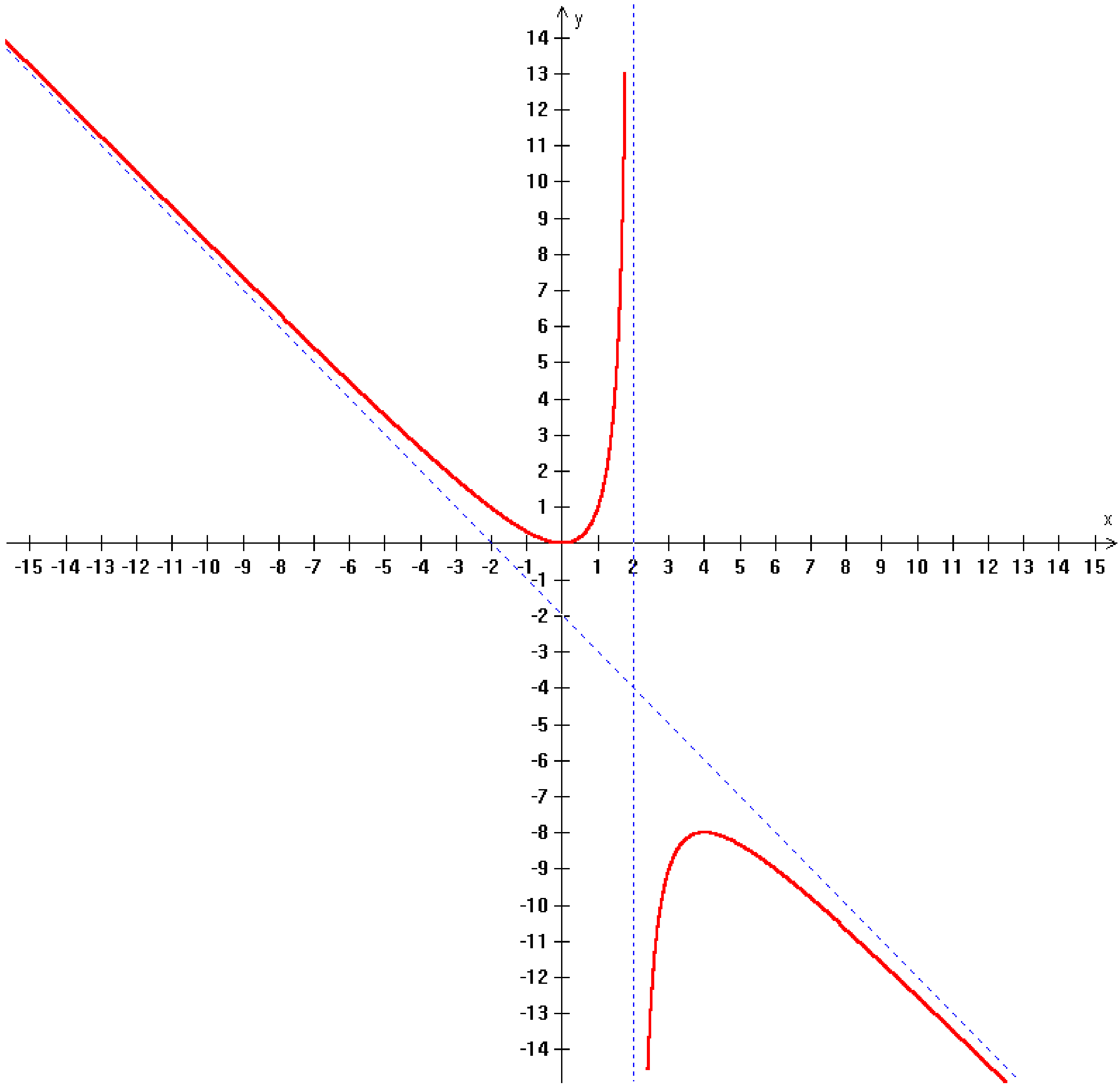
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Dibujamos el punto de corte (0, 0) que, además es mínimo, la asíntota vertical en $x = 2$ (con sus tendencias a infinito) y la asíntota oblicua en:

$y = -x - 2$, (no nos la piden).

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

La gráfica queda así:



Problema A.3:

En una cierta ciudad, las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, de los cuales, las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30 % si consideramos el total de los hogares. Si se elige un hogar al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago?

Solución:

Es un problema de probabilidad definimos los sucesos:

S → “El hogar tiene una Smart TV”

T → “Han contratado televisión de pago”

En el enunciado nos dan las siguientes probabilidades:

- Como las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV tenemos que $P(S)$ = 2/3 = 0.6667.
- Como de los hogares que tienen una Smart TV las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago: $P(T/S)$ = 3/8 = 0.375.
- Como si consideramos el total de hogares, han contratado algún servicio de televisión de pago el 30 % tenemos que: $P(T)$ = 3/10 = 0.3.

El problema se puede resolver por tabla de contingencias, por árbol, axiomática o diagrama de Venn. Como no tiene dos fases claramente diferenciadas lo más fácil es resolverlo por tabla de contingencias. Sólo hace falta resolverlo de una forma y los resultados han de ser iguales.

<u>Por tabla de contingencias</u>:

Elaboramos una tabla de doble entrada con los sucesos S y T y sus contrarios:

	S	$\bar{S}$	Total:
T			
$\bar{T}$			
Total:			1

Hay dos probabilidades que podemos poner directamente: $P(S)$ = 0.6667 y $P(T)$ = 0.3:

	S	$\bar{S}$	Total:
T			0.3
$\bar{T}$			
Total:	0.6667		1

La tercera probabilidad que tenemos es: $P(T/S)$ = 3/8 = 0.375 como $P(T/S)=\frac{P(T\cap S)}{P(S)}$

Sustituyendo valores: $0.375 = \frac{P(T\cap S)}{0.6667} \rightarrow P(T \cap S) = 0.375 \cdot 0.667 = 0.25$

Ponemos ese valor y completamos la tabla:

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

	S	$\bar{S}$	Total:
T	0.25	0.05	0.3
$\bar{T}$	0.4167	0.2833	0.7
Total:	0.6667	0.3333	1

Contestamos ahora a las cuestiones planteadas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago?

Nos piden (directamente de la tabla)

$$\boldsymbol{P(\bar{S} \cap T) = 0.05 \ \rightarrow 5\ \%}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago?

Nos piden

$$\boldsymbol{P(S/T) = \frac{P(T \cap S)}{P(T)} = \frac{0.25}{0.3} \cong 0.8333 \rightarrow} \textit{\textbf{83.33 \%}}$$

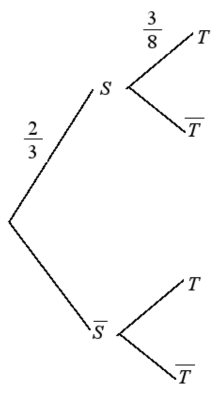
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago?

Nos piden

$$\boldsymbol{P(\bar{S}/\bar{T}) = \frac{P(\bar{T} \cap \bar{S})}{P(\bar{T})} = \frac{0.2833}{0.7} \cong 0.4047 \rightarrow} \textit{\textbf{40.47 \%}}$$

<u>Por diagrama de árbol</u>:

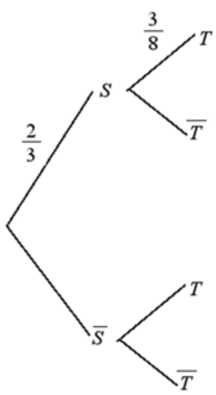
No hay unas fases claras pero podemos construir el árbol a partir de la probabilidad de tener o no Smart TV. Podemos situar los datos como ves en la figura:



Para completar el árbol procedemos de la siguiente manera: $P(\bar{S}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P(\bar{T}/S) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ $\quad P(S \cap T) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4} = 0.25$ $\quad P(S \cap \bar{T}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{12} \simeq 0.4167$

Los situamos en el árbol:



Ahora aplicamos el teorema de la probabilidad total para hallar las probabilidades que desconocemos:

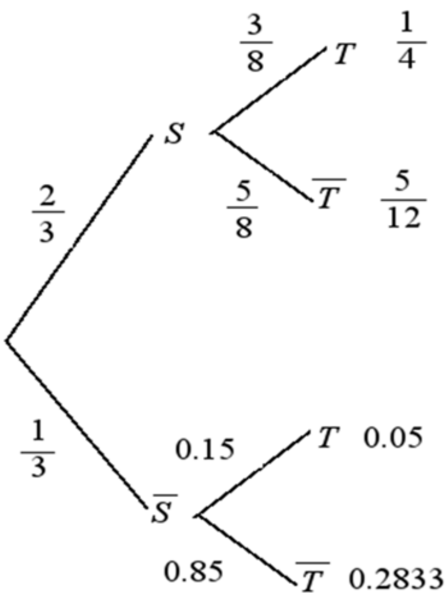
$P(T) = P(T \cap S) + P(T \cap \bar{S}) \rightarrow 0.3 = 0.25 + P(T \cap \bar{S}) \rightarrow P(T \cap \bar{S}) = 0.05$

Como

$P(T\cap \bar{S}) = P(\bar{S})\cdot P(T/\bar{S}) \rightarrow 0.05 = \frac{1}{3}\cdot P(T/\bar{S}) \rightarrow P(T/\bar{S}) = 0.15$

Por lo tanto: $P(\bar{T}/\bar{S}) = 1 - 0.15 = 0.85$

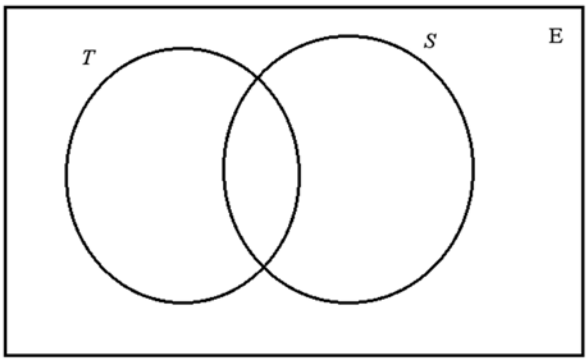
Con lo que el árbol completo es:



Una vez construido el árbol la resolución es igual que con tabla de contingencias.

Por diagrama de Venn:

Planteamos el diagrama como en la figura:



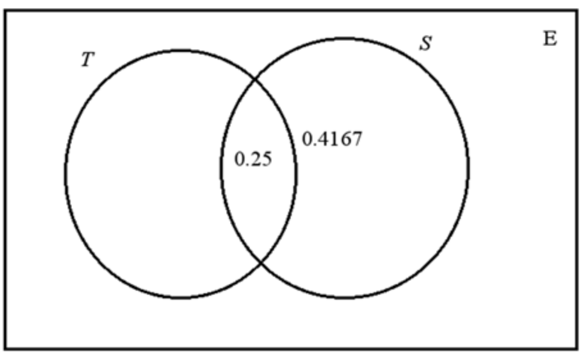
Como sabemos que $P(S)$ = 2/3, y además que $P(T/S)$ = 3/8, deducimos que:

$$P(S\cap T) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Hallamos también:

$$P(S-T) = P(S) - P(S\cap T) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} = 0.4167$$

y los situamos en el diagrama:



Como nos dan el dato $P(T)$ = 0.3 podemos deducir que:

$$P(T-S) = P(T) - P(T\cap S) = 0.3 - 0.25 = 0.05$$

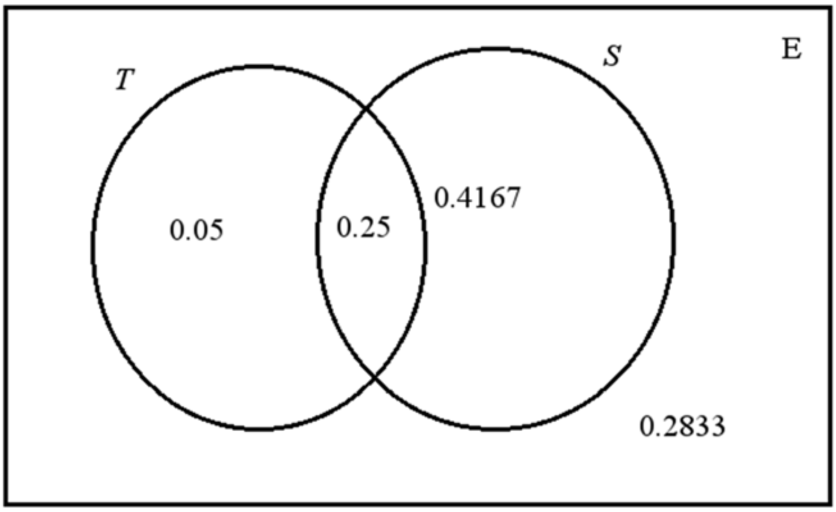
Con esto las probabilidades dentro de los círculos del diagrama son:

0.05 + 0.25 + 0.4167 = 0.7167

Por lo que por fuera tenemos que: 1 – 0.7167 =

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

0.2833, el diagrama completo queda:



Una vez construido el diagrama la resolución es igual que con tabla de contingencias.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago?

$$\boldsymbol{P(\overline{S} \cap T) = 0.05 \ \rightarrow 5\ \%}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago?

$$\boldsymbol{P(S/T) = \frac{P(T \cap S)}{P(T)} = \frac{0.25}{0.3} \cong 0.8333 \rightarrow 83.33\ \%}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago?

$$\boldsymbol{P(\overline{S}/\overline{T}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{S})}{P(\overline{T})} = \frac{0.2833}{0.7} \cong 0.4047 \rightarrow 40.47\ \%}$$

SOLUCIONES OPCIÓN B CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

Se pide:

a) Calcular $(AB)^{-1}$

b) Calcular $(AB^t - A^tB)$

c) Resolver la ecuación: $B^tX+A^tB=A^t$

Siendo A^t y B^t las matrices traspuestas de A y B respectivamente.

Solución:

a) Calcular $(AB)^{-1}$

Calculamos primero el producto de las matrices y después haremos su inversa:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

La inversa la podemos hacer por Gauss o determinantes (sólo de una forma):

Por determinantes:

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{|AB|}(Adj\ AB)^t$$

$|AB|=\begin{vmatrix}-1 & 8\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-4+8=4$. Tiene inversa

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -8 & -1\end{pmatrix}^t=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -8\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4}\end{pmatrix}$$

Si lo hacemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 8 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 8 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & -4 & -1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4}\end{pmatrix}$$

$F_2=F_2-F_1$ $\qquad$ $F_1=F_1+2F_2$ $\qquad$ $F_1=F_1/(-1)$ $\qquad$ $F_2=F_2/(-4)$

Hay que comprobar que lo hemos hecho bien (no es obligatorio):

$$\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Como da la identidad está bien calculada

$$(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4}\end{pmatrix}$$

b) Calcular $(AB^t - A^tB)$

Calculamos primero las traspuestas cambiando las filas por las columnas:

$A^t=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B^t=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

Realizamos la operación pedida:

$$AB^t - A^t B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

c) Resolver la ecuación $B^t X + A^t B = A^t$

Resolvemos primero con las letras:

$$B^t X + A^t B = A^t$$
$$B^t X = A^t - A^t B$$
$$(B^t)^{-1} B^t X = (B^t)^{-1} (A^t - A^t B)$$
$$X = (B^t)^{-1} (A^t - A^t B)$$

Hacemos las operaciones pedidas (las inversas y el producto A^tB lo tenemos del apartado anterior):

$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $A^t B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$A^t - A^t B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Calculamos la inversa de $B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $(B^t)^{-1} = \frac{1}{|B^t|} (Adj\, B^t)^t$

$|B^t| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2$

$(B^t)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Si lo hacemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow (B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_1 = 2F_1 + F_2$ $F_2 = F_2 - F_1$ $F_1 = F_1/2$ $F_2 = F_2/2$

Hay que comprobar que lo hemos hecho bien (no es obligatorio):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como da la identidad está bien calculada

Ahora sustituimos y calculamos el valor:

$$X = (B^t)^{-1} (A^t - A^t B) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{-17}{2} \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Problema B.2:

En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t)=t^3-8t^2+15t$, donde t es el tiempo en años transcurridos.

a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas.

b) ¿En qué valor de t se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este?

c) ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta?

d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta.

Solución:

a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas.

La función que nos dan representa los beneficios, por lo que para tener beneficios basta que esa función tenga signo positivo y para tener pérdidas deberá tener signo negativo.

Como se trata de un polinomio es continuo para saber los intervalos en los que es positivo y negativo vamos a hallar cuando vale cero y estudiaremos el signo de la función antes y después de esos valores.

$f(t)=t^3-8t^2+15t=0 \rightarrow t^3-8t^2+15t=t\cdot(t^2-8t+15)=0 \rightarrow t=0$ (primera solución)

$t^2-8t+15=0 \rightarrow$

$$t=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot1\cdot15}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{8\pm2}{2}=\begin{cases}\frac{8+2}{2}=5\\ \frac{8-2}{2}=3\end{cases}$$

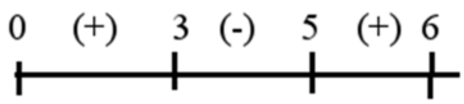
Por lo que tenemos tres valores $t = 0$, $t = 3$ y $t = 5$. Estudiamos el signo de la función en valores intermedios (no tomamos negativos porque se trata de los años transcurridos):

$f(1)=1^3-8\cdot1^2+15\cdot1=8>0$

$f(4)=4^3-8\cdot4^2+15\cdot4=-4<0$

$f(6)=6^3-8\cdot6^2+15\cdot6=18>0$

Con esto podemos elaborar un gráfico como el siguiente:



Y podemos concluir que tuvo beneficios en los periodos]0, 3[U]5, 6[y pérdidas en]3, 5[.

b) ¿En qué valor de t se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este?

Nos preguntan por un máximo absoluto. Como se trata de una función continua (es un polinomio) en un intervalo cerrado podemos afirmar que alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto en los máximos y mínimos relativos o en los extremos del intervalo de definición.

Para hallar los extremos relativos derivamos e igualamos a cero la derivada:

$$f'(t)=3t^2-16t+15=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$t=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4\cdot 3\cdot 15}}{2\cdot 3}=\frac{16\pm\sqrt{76}}{6}=\begin{cases}\dfrac{16+\sqrt{76}}{6}=4.119\\[2mm]\dfrac{16-\sqrt{76}}{6}=1.214\end{cases}$$

Para saber si son máximos o mínimos relativos calculamos la segunda derivada y sustituimos los valores:

$$f''(t)=6t-16$$

$f''(4.119)=6\cdot 4.119-16\simeq 8.71>0$ al ser positiva es un mínimo relativo.

$f''(1.214)=6\cdot 1.214-16\simeq -8.72<0$ al ser negativa es un máximo relativo.

Hallamos los valores en esos puntos y en los extremos del intervalo de definición:

$$f(0)=0^3-8\cdot 0^2+15\cdot 0=0$$

$$f(1.214)=1.214^3-8\cdot 1.214^2+15\cdot 1.214=8.20880$$

$$f(4.119)=4.119^3-8\cdot 4.119^2+15\cdot 4.119=-4.0607$$

$$f(6)=6^3-8\cdot 6^2+15\cdot 6=18$$

Por lo tanto, la función tiene su máximo absoluto en el valor t = 6 años y fue de 180 000 € (ya que la función viene dada en decenas de miles de €)

El máximo beneficio fue de 180 000 euros y se alcanzó a los 6 años.

c) ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta?

Por lo visto en el apartado anterior podemos concluir que el mínimo absoluto de la función está en el valor 4.119 años y que fue de 40 607 € de pérdidas (ya que el valor del beneficio es negativo)

La máxima pérdida fue de 40 607 euros a los 4.119 años.

d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta.

Como la función se trata de un polinomio, que es continuo, y observamos que, a partir de t = 6 siempre crece (rama parabólica) podemos concluir que no volvería a tener pérdidas (no puede volver a ser negativo). Podemos observar que la función presenta una rama parabólica que tiende a +∞:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(t^3-8t^2+15t\right)=+\infty$$

Problema B.3:

Sabemos que el 5 % de los hombres y el 2 % de las mujeres que trabajan en una empresa tienen un salario mensual mayor que 5 000 euros. Se sabe también que el 30 % de los trabajadores de dicha empresa son mujeres.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5 000 euros.

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5 000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer?

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5 000 euros?

Solución:

Es un problema de probabilidad definimos los sucesos:

H → "Hombre trabajador de la empresa"

M → "Mujer trabajadora de la empresa"

S → "Tener un salario mayor que 5 000 euros"

En el enunciado nos dan las siguientes probabilidades:

- Como el 5 % de los hombres tienen un salario mensual superior a 5 000 € tenemos que:

$$P(S/H) = 0.05$$

- Como el 2 % de las mujeres tienen un salario mensual superior a 5 000 € tenemos que:

$$P(S/M) = 0.02$$

- Como el 30 % de los trabajadores son mujeres tenemos que: $P(M) = 0.3$

El problema se puede resolver por tabla de contingencias o por árbol. Como no tiene dos fases claramente diferenciadas lo más fácil es resolverlo por tabla de contingencias. Sólo hace falta resolverlo de una forma y los resultados han de ser iguales.

Por tabla de contingencias:

Elaboramos una tabla de doble entrada con los sucesos H, M y S.

	H	M	Total:
S			
$\bar{S}$			
Total:			1

Hay una probabilidad que podemos poner directamente: $P(M) = 0.3$

	H	M	*Total:*
S			
$\bar{S}$			
Total:		0.3	1

Inmediatamente se deduce que $P(H) = 0.7$

Como el 5 % de los hombres cobra más de 5 000 € calculamos que:

$$P(H\cap S) = P(H) \cdot P(S/H) = 0.7 \cdot 0.05 = 0.035$$

Como el 2 % de las mujeres cobra más de 5000 € calculamos que:

$$P(M\cap S) = P(M) \cdot P(S/M) = 0.3 \cdot 0.02 = 0.006$$

Ponemos esos valores y completamos la tabla:

	H	M	Total:
S	0.035	0.006	0.041
$\bar{S}$	0.665	0.294	0.959
Total:	0.7	0.3	1

Contestamos ahora a las cuestiones planteadas:

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5 000 euros.

Nos piden $P(S) = 0.041 \rightarrow 4.1$ % (directamente de la tabla)

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer?

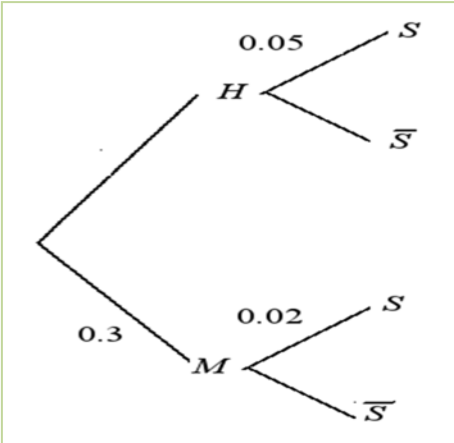
Nos piden $P(M/S) = \frac{P(M\cap S)}{P(S)} = \frac{0.006}{0.041} \cong 0.1463 \rightarrow 14.63\ \%$

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5000 euros?

Nos piden: $P(H\cap S) = P(H) \cdot P(S/H) = 0.7 \cdot 0.05 = 0.035 \rightarrow 3.5$ %

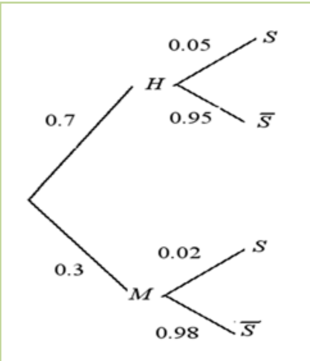
<u>Por diagrama de árbol</u>:

No hay unas fases claras, pero podemos construir el árbol a partir de la probabilidad de ser hombre o mujer y tener o no un salario superior a 5 000 euros. Podemos situar los datos como ves en la figura:



Para completar el árbol hemos de tener en cuenta que la suma de las probabilidades en cada nudo ha de ser 1:

Los situamos en el árbol:



Ahora multiplicando las probabilidades de las ramas tenemos los valores de las intersecciones:

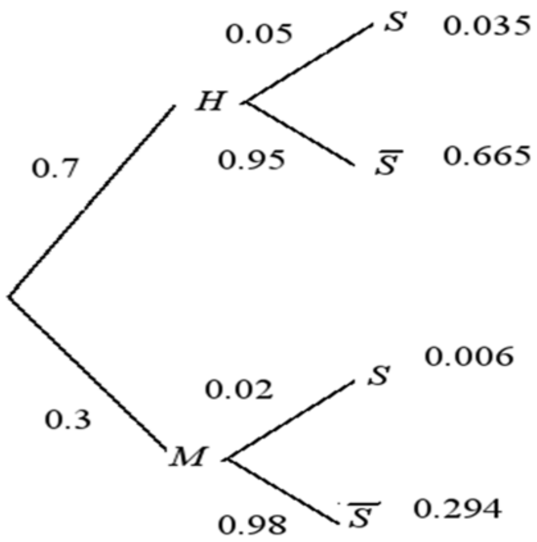
$$P(H\cap S) = P(H) \cdot P(S/H) = 0.7 \cdot 0.05 = 0.035$$

$$P(H\cap s) = P(H) \cdot P(s/H) = 0.7 \cdot 0.95 = 0.665$$

$$P(M\cap S) = P(M) \cdot P(S/M) = 0.3 \cdot 0.02 = 0.006$$

$$P(M\cap s) = P(M) \cdot P(s/M) = 0.3 \cdot 0.98 = 0.294$$

Con lo que el árbol completo es:



Respondemos a las cuestiones:

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5 000 euros.

Nos piden $P(S)$ por el teorema de la probabilidad total tenemos que:

$P(S) = P(S\cap H) + P(S\cap M) = P(H) \cdot P(S/H) + P(M) \cdot P(S/M) = 0.035 + 0.006 = 0.041$

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer?

Se trata de probabilidad a posteriori por lo que utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(M/S) = \frac{P(M\cap S)}{P(S)} = \frac{0.006}{0.041} \cong 0.1463 \to 14.63\%$$

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5 000 euros?

$P(H\cap S) = 0.035 \to 3.5\ \%$ directamente del diagrama)

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

Un taller fabrica dos productos A y B. La producción de una unidad del producto A requiere 30 minutos para montar las piezas que lo forman y 40 minutos para pintarlo y la producción de una unidad del producto B exige 40 minutos para montar las piezas y 30 minutos para pintarlo.

Cada día se puede destinar como máximo 10 horas para montar piezas y 11 horas, también como máximo, para pintar los productos producidos. Cada unidad del producto A se vende a 40 euros y cada unidad del producto B se vende a 35 euros.

¿Cuántas unidades se han de producir cada día de cada producto para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Problema A.2:

Dada la función, $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}$ se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Problema A.3:

Un modelo de coche se fabrica en tres versiones: Van, Urban y Suv. El 25 % de los coches son de motor híbrido. El 20 % son de tipo Van y el 40% de tipo Urban. El 15 % de los de tipo Van y el 40 % de los de tipo Urban son híbridos. Se elige un coche al azar. Calcula:

a) La probabilidad de que sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido.

b) La probabilidad de que sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido.

c) La probabilidad de que sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv.

d) La probabilidad de que no sea de tipo Van ni tampoco híbrido.

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A.

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Problema B.2:

Consideremos la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{ax^2}{x^2+1} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Calcula el valor de a para que la función $y = f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

d) Calcula $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$

Problema B.3:

Un estudiante acude a la universidad el 70 % de las veces con su propio vehículo, y el doble de veces en transporte público que andando. Llega tarde el 1 % de las veces que acude andando, el 3 % de las que lo hace en transporte público y el 6 % de las que lo hace con su propio vehículo. Se pide:

a) La probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente.

b) La probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde

c) La probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente.

SOLUCIONES OPCIÓN A CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Un taller fabrica dos productos A y B. La producción de una unidad del producto A requiere 30 minutos para montar las piezas que lo forman y 40 minutos para pintarlo y la producción de una unidad del producto B exige 40 minutos para montar las piezas y 30 minutos para pintarlo.

Cada día se puede destinar como máximo 10 horas para montar piezas y 11 horas, también como máximo, para pintar los productos producidos. Cada unidad del producto A se vende a 40 euros y cada unidad del producto B se vende a 35 euros.

¿Cuántas unidades se han de producir cada día de cada producto para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución:

Es un problema de programación lineal ya que tenemos dos productos (A y B), un objetivo (obtener el máximo ingreso) y unas restricciones (las horas máximas que podemos destinar a montaje y pintura de los productos).

Variables de decisión: Nos interesa saber cuántas unidades hay que producir cada día de A y B por lo que las variables de decisión serán:

x – Unidades que debemos producir de A.

y - Unidades que debemos producir de B.

Función objetivo: Queremos obtener ingresos máximos. Como por cada unidad de A obtenemos 40 euros con x unidades ganamos $40x$. Con cada unidad de B obtenemos 35 euros con las y unidades producidas que ganaremos $35y$. Sumando ambas cantidades tenemos que la función objetivo es:

$$I(x, y) = 40x + 35y$$

Restricciones: En principio nuestras variables no pueden ser negativas por lo que aplicaremos, ya que es posible: $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Como tenemos 10 horas para montar piezas y necesitamos 30 minutos para montar cada unidad de A tenemos que harán falta, para x unidades, $30x$ minutos de montaje. Para cada unidad de B hacen falta 40 minutos por lo que necesitamos, para y unidades, $40y$ minutos. Debemos de sumar ambas cantidades e imponer que ha de ser menor o igual al tiempo disponible. Sin embargo, es necesario expresar el tiempo disponible en minutos para unificar las unidades por lo que escribiremos 60·10 = 600 minutos. (También se pueden pasar los minutos a horas, pero salen decimales que complican la representación):

$$30x + 40y \leq 600$$

Como tenemos 11 horas para pintar productos y necesitamos 40 minutos para pintar cada unidad de A tenemos que harán falta, para x unidades, $40x$ minutos de pintura. Para cada unidad de B hacen falta 30 minutos por lo que necesitamos, para y unidades, $30y$ minutos. Debemos de sumar ambas cantidades e imponer que ha de ser menor o igual al tiempo disponible. Sin embargo, es necesario expresar el tiempo disponible en minutos para unificar las unidades por lo que escribiremos 60·11 = 660 minutos. (También se pueden pasar los minutos a horas, pero salen decimales que complican la representación):

$$40x + 30y \leq 660$$

Región factible o solución. Vendrá dada por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ 30x + 40y \leq 600 \\ 40x + 30y \leq 660 \end{cases}$$

Las dos primeras inecuaciones nos informan que la representación será en el primer cuadrante. Para representar la tercera igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "*y*":

$$y = \frac{600 - 30x}{40} = \frac{60 - 3x}{4}$$

Tabla de valores:

x	20	10	0
y	0	7.5	15

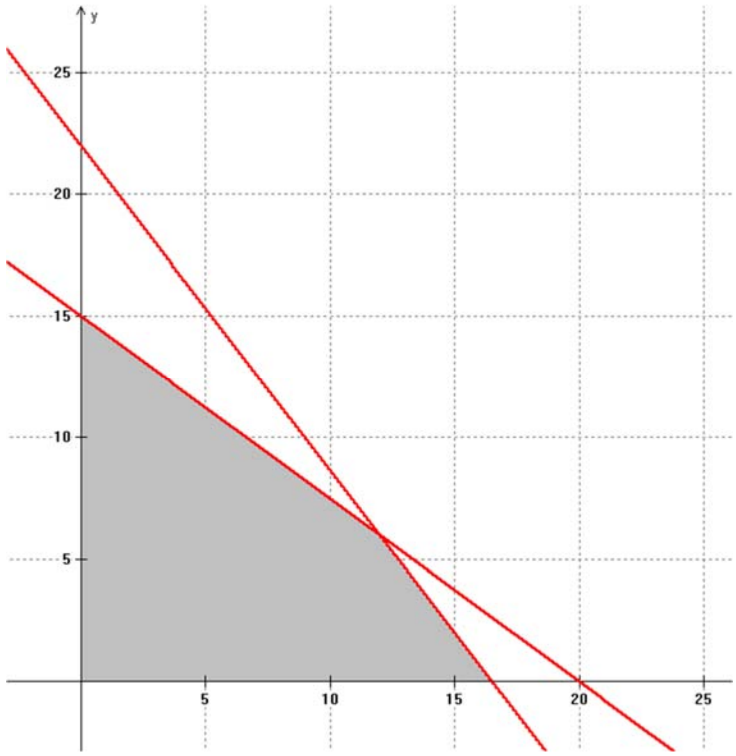
Para representar la cuarta igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "*y*":

$$y = \frac{660 - 40x}{30} = \frac{66 - 4x}{3}$$

Tabla de valores:

x	0	9	16.5
y	22	10	0

Después de representar cada recta tenemos que sustituir un valor para hallar la región factible, en la tercera y la cuarta podemos sustituir el (0, 0) y nos sale que la región se extiende hacia ese punto. Por lo que la representación queda:



La región tiene 4 vértices:

- El primero es el (0, 0) que se ve a simple vista.
- El segundo es el (0, 15) que también podemos ver en la representación.
- El tercero es el corte de $y=\frac{60-3x}{4}$ y $y=\frac{66-4x}{3}$ por lo que igualamos ambas ecuaciones y despejamos la x:

$$\frac{60-3x}{4}=\frac{66-4x}{3}$$

$$3\cdot(60-3x)=4\cdot(66-4x)$$

$$180-9x=264-16x$$

$$7x=84$$

$$x=12$$

  la otra componente la hallamos sustituyendo en cualquiera de las dos:

$$y=\frac{60-3\cdot 12}{4}=6$$

  por lo que el punto será (12, 6)

- El cuarto es el corte de $y=\frac{66-4x}{3}$ y el eje OX pero ese valor lo podemos deducir de la tabla: (16.5, 0)

Los 4 vértices a estudiar son: (0, 0) (0, 15) (12, 6) y (16.5, 0)

La función objetivo era:

$$I(x, y)=40x+35y$$

Sustituimos los vértices hallados:

$I(0,0)=40\cdot 0+35\cdot 0=0$ euros

$I(0,15)=40\cdot 0+35\cdot 15=525$ euros

$I(12,6)=40\cdot 12+35\cdot 6=690$ euros

$I(16.5,0)=40\cdot 16.5+35\cdot 0=660$ euros

Como buscamos el ingreso máximo tenemos que se da produciendo 12 unidades del producto A y 6 unidades de B y el ingreso máximo es de 690 €.

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.2:

Dada la función, $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}$ se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función polinómica racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$$x^2+x-2=0\rightarrow$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\begin{cases}\frac{-1+3}{2}=1\\ \frac{-1-3}{2}=-2\end{cases}$$

por lo que no existe en los puntos de abscisa 1 y –2.

El **dominio** es:

$$Dom\, f(x)=\mathbb{R}-\{-2,1\}$$

Los **puntos de corte con el eje** OX son los valores de x cuando $f(x)=0$, que por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$$x^2-2x-3=0\rightarrow$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\begin{cases}\frac{2+4}{2}=3\\ \frac{2-4}{2}=-1\end{cases}$$

Por lo que corta al eje OX en dos puntos: (3, 0) y (–1, 0).

El **punto de corte con el eje** OY es el valor de $f(x)$ cuando $x = 0$ →

$$f(0)=\frac{0^2-2\cdot0-3}{0^2+0-2}=\frac{3}{2}$$

por lo que corta en el punto (0, 3/2).

Los puntos de corte con los ejes son: (3, 0), (–1, 0) y (0, 3/2)

b) Las asíntotas horizontales y verticales.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=1$$

(por ser cociente de polinomios del mismo grado) la asíntota horizontal es $y = 1$.

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

No lo piden pero para guiarnos en la representación podemos ver si la gráfica tiende a la asíntota por encima o por debajo de ella en $-\infty$ y en $+\infty$. Para ello, sustituimos un valor de la función relativamente grande (no hace falta mucho) positivo y negativo y observamos si el resultado es algo mayor o menor que el valor de la asíntota:

$$f(100) = \frac{100^2 - 2\cdot 100 - 3}{100^2 + 100 - 2} = \frac{9797}{10098} \simeq 0.9701 < 1$$

luego en $+\infty$ va por debajo.

$$f(-100) = \frac{(-100)^2 + 2\cdot 100 - 3}{(-100)^2 - 100 - 2} = \frac{10197}{9898} \simeq 1.0302 > 1$$

luego en $-\infty$ va por encima.

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos dos: $x = -2$ y $x = 1$, calculamos los límites a esos puntos de la función:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = \left(\frac{5}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = -\infty \end{cases}$$

por lo que $x = -2$ es asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = \left(\frac{-4}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = -\infty \end{cases}$$

por lo que $x = 1$ es asíntota vertical.

Las asíntotas son: $y = 1$, $x = -2$ y $x = 1$.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x^2+x-2)-(x^2-2x-3)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{3x^2+2x+7}{(x^2+x-2)^2} = 0$$

Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$$3x^2 + 2x + 7 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 3\cdot 7}}{2\cdot 3} = \frac{-2\pm\sqrt{-80}}{6} = \nexists\, sol.\, \mathbb{R}$$

Como no hay soluciones reales eso quiere decir que no hay puntos críticos (no hay posibles máximos o mínimos). Por lo que el estudio de la monotonía hay que hacerlo con los puntos de discontinuidad del dominio $x = -2$ y $x = 1$, y estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores considerados:

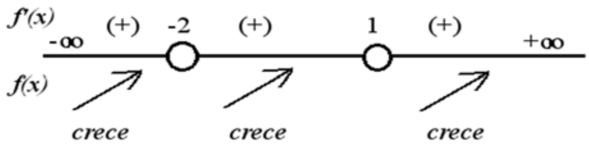
Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Los valores calculados han sido:

$$f'(-3)=\frac{3\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)+7}{((-3)^2-3-2)^2}=\frac{28}{16}>0$$

$$f'(0)=\frac{3\cdot(0)^2+2\cdot(0)+7}{(0^2+0-2)^2}=\frac{7}{4}>0$$

$$f'(2)=\frac{3\cdot(2)^2+2\cdot(2)+7}{((2)^2+2-2)^2}=\frac{23}{16}>0$$

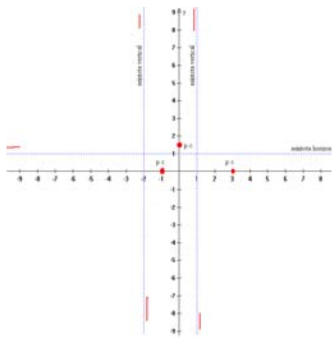


Por lo que tenemos que la función crece en:]–∞, -2[U]–2, 1[U]1, +∞[.

También podemos decir que la función crece en todo su dominio.

d) Los máximos y mínimos locales.

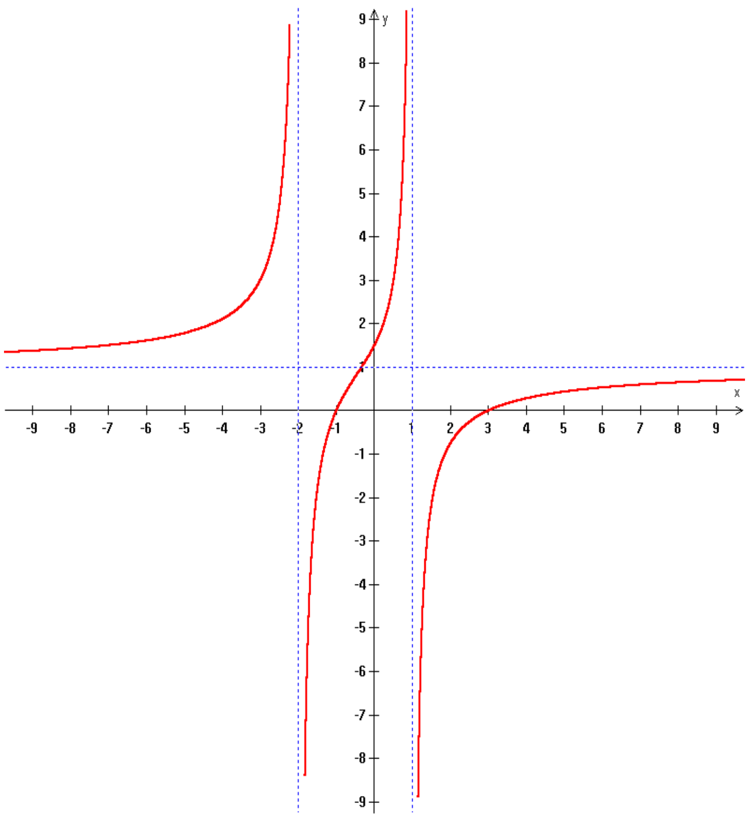
Por lo visto en el apartado anterior la función NO presenta ningún mínimo ni máximo local puesto que no tiene puntos críticos que hagan cero la primera derivada.



e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Dibujamos los puntos de corte (3, 0), (–1, 0) y (0, 3/2), las asíntotas verticales en x = –2 y x = 1 (con sus tendencias a infinito) y la asíntota horizontal en y = 1 con sus tendencias y obtenemos:

La gráfica queda así:



Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.3:

Un modelo de coche se fabrica en tres versiones: Van, Urban y Suv. El 25 % de los coches son de motor híbrido. El 20 % son de tipo Van y el 40 % de tipo Urban. El 15 % de los de tipo Van y el 40 % de los de tipo Urban son híbridos. Se elige un coche al azar. Calcula:

a) La probabilidad de que sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido.

b) La probabilidad de que sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido.

c) La probabilidad de que sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv.

d) La probabilidad de que no sea de tipo Van ni tampoco híbrido.

Solución:

Es un problema de probabilidad definimos los sucesos:

V → "Coche modelo de tipo Van"

U → "Coche modelo de tipo Urban"

S → "Coche modelo de tipo Suv"

H → "Coche con motor híbrido"

En el enunciado nos dan las siguientes probabilidades:

- Como el 25 % de los coches son de motor híbrido tenemos que: $P(H) = 0.25$
- Como el 20 % son de tipo Van: $P(V) = 0.2$
- Como el 40 % son de tipo Urban: $P(U) = 0.4$
- Como el 15 % de los de tipo Van son híbridos tenemos que: $P(H/V) = 0.15$
- Como el 40 % de los de tipo Urban son híbridos tenemos que: $P(H/U) = 0.4$

  Además tenemos unas cuantas probabilidades que se deducen casi inmediatamente:
- Como el 25 % son híbridos el 75 % no lo son: $P(\overline{H}) = 0.75$
- Si el 20 % son Van y el 40 % son Urban los de tipo Suv son: 1 - 0.2 - 0.4 = 0.4 por lo que: $P(S) = 0.4$

El problema se puede resolver fácilmente por tabla de contingencias o por árbol. Sólo hace falta resolverlo de una forma y los resultados han de ser iguales.

<u>Por tabla de contingencias</u>:

Elaboramos una tabla de doble entrada con los sucesos V, U,S y H y su contrario:

	V	U	S	Total:
H				
$\overline{H}$				
Total:				1

Todas las probabilidades totales las ponemos directamente:

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

	V	U	S	Total:
H				0.25
$\overline{H}$				0.75
Total:	0.2	0.4	0.4	1

Recordemos que las probabilidades de las casillas centrales son intersecciones y que los datos que tenemos son de probabilidades condicionadas por lo que tenemos que aplicar que:

$$P(V\cap H) = P(V) \cdot P(H/V) = 0.2 \cdot 0.15 = 0.03$$

$$P(U\cap H) = P(U) \cdot P(H/U) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16$$

Si completamos esas dos casillas podemos completar la tabla calculando las diferencias correspondientes:

	V	U	S	Total:
H	0.03	0.16		0.25
$\overline{H}$				0.75
Total:	0.2	0.4	0.4	1

Tenemos que:

$P(H\cap S) = 0.25 - 0.16 - 0.03 = 0.06$

$P(V\cap \overline{H}) = 0.2 - 0.03 = 0.17$

$P(U\cap \overline{H}) = 0.4 - 0.16 = 0.24$

$P(S\cap \overline{H}) = 0.75 - 0.17 - 0.24 = 0.34$

Ponemos esos valores y completamos la tabla:

	V	U	S	Total:
H	0.03	0.16	0.06	0.25
$\overline{H}$	0.17	0.24	0.34	0.75
Total:	0.2	0.4	0.4	1

Contestamos ahora a las cuestiones planteadas:

a) La probabilidad de que sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido.

Nos piden $P(U/H)$ aplicando la fórmula de Bayes tenemos que:

$$P(U/H) = \frac{P(U\cap H)}{P(H)} = \frac{0.16}{0.25} = 0.64 \to 64~\%$$

b) La probabilidad de que sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido.

Nos piden $P(V/\overline{H})$ aplicando la fórmula de Bayes tenemos que:

$$P(V/\overline{H}) = \frac{P(V \cap \overline{H})}{P(\overline{H})} = \frac{0.17}{0.75} \cong 0.2267 \rightarrow 22.67\ \%$$

c) La probabilidad de que sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv.

Nos piden $P(H/S)$ aplicando la fórmula de Bayes tenemos que:

$$P(H/S) = \frac{P(H \cap S)}{P(S)} = \frac{0.06}{0.4} = 0.15 \rightarrow 15\ \%$$

d) La probabilidad de que no sea de tipo Van ni tampoco híbrido.

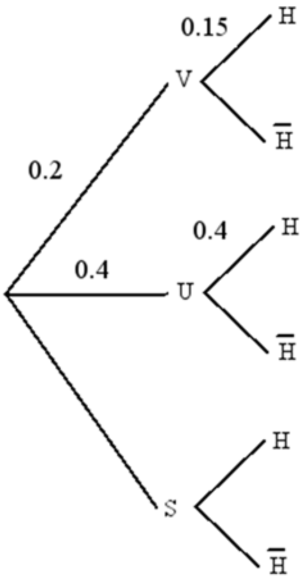
Nos piden $P(\overline{V} \cap \overline{H})$ que es un dato que no podemos leer directamente de la tabla pero que si tenemos en cuenta que el suceso $\overline{V} = U \cup S$ (es decir, si no es Van es porque es Urban o Suv) tenemos que:

$P(\overline{V} \cap \overline{H}) = P((U \cup S) \cap \overline{H}) = P(U \cap \overline{H}) + P(S \cap \overline{H}) = 0.24 + 0.34 = 0.58 \rightarrow 58\ \%$

$$P(\overline{V} \cap \overline{H}) = 0.58 \rightarrow 58\ \%$$

Por diagrama de árbol:

No hay unas fases claras pero podemos construir el árbol a partir de la probabilidad de ser un modelo u otro y, después que tenga o no motor híbrido. Podemos situar los datos como ves en la figura:



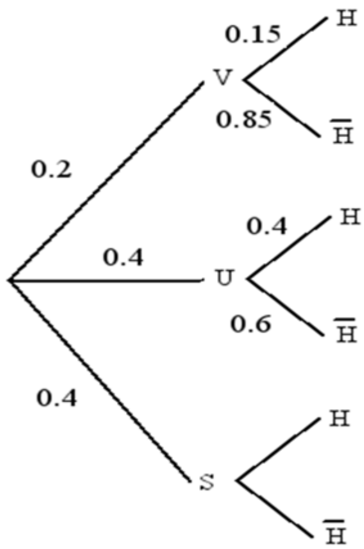
Para completar el árbol procedemos de la siguiente manera:

$P(S) = 1 - P(V) - P(U) = 1 - 0.2 - 0.4 = 0.4$

$P(\overline{H}/V) = 1 - 0.15 = 0.85$

$P(\overline{H}/U) = 1 - 0.4 = 0.6$

Las situamos en el árbol:

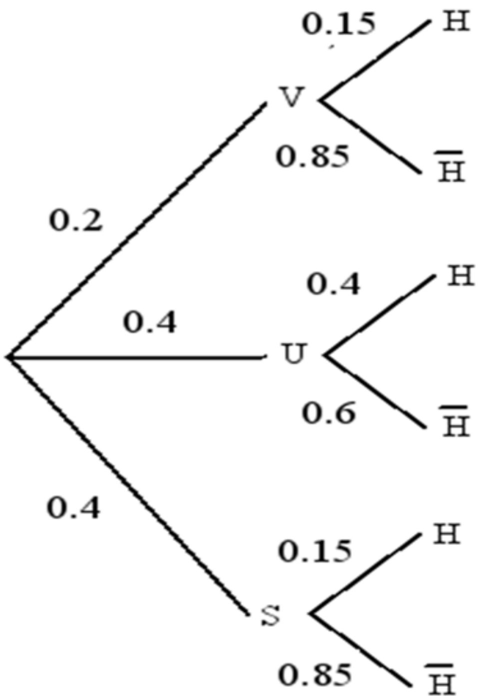


Ahora aplicamos el teorema de la probabilidad total para hallar las probabilidades que desconocemos:

$P(H) = P(H \cap V) + P(H \cap U) + P(H \cap S) \rightarrow$

$0.25 = 0.2 \cdot 0.15 + 0.4 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot P(H/S) \rightarrow$

$P(H/S) = (0.25 - 0.03 - 0.16)/0.4 = 0.15$



Por lo que: $P(\overline{H}/S)$ = 1 – 0.15 = 0.85

Con lo que el árbol completo es:

Una vez construido el árbol la resolución es igual que con tabla de contingencias.

SOLUCIONES OPCIÓN B CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A.

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Calcula el determinante de A.

El cálculo del determinante lo podemos hacer directamente (por la regla de Sarrus) o bien simplificar el cálculo aplicando propiedades de matrices y determinantes SOLO HAY QUE HACERLO DE UNA FORMA ya que el resultado es el mismo.

<u>Directamente por Sarrus</u>:

$$|A|=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}-\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}-\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{4}{27}+\frac{4}{27}+\frac{4}{27}+\frac{8}{27}+\frac{8}{27}-\frac{1}{27}=\frac{27}{27}=1$$

Con lo cual:

Solución a) $|A|=1$.

Aplicamos que se puede sacar un **factor común de una matriz** si es común a todos los elementos por lo que tenemos que:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora aplicamos que $|\alpha A|=\alpha^n|A|$ donde n es la dimensión de la matriz:

$$|A|=\left(\frac{1}{3}\right)^3\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\cdot(1\cdot2\cdot2+1\cdot(-2)\cdot(-2)+2\cdot2\cdot1-2\cdot2\cdot(-2)-2\cdot2\cdot(-2)-1\cdot1\cdot1)=1$$

El resultado es el mismo lógicamente pero no se manejan tantas fracciones.

También se puede aplicar que se puede sacar **factor común a una línea de un determinante** por lo que:

$$|A|=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\cdot27=1$$

(los factores salen de la 1ª, 2ª y 3ª fila)

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal.

Para comprobarlo hay que verificar dos cosas:

- Que tiene inversa.
- Que la inversa coincide con su traspuesta.

Para probar que tiene inversa hay que comprobar que su determinante no es cero: $\exists A^{-1}\Leftrightarrow|A|\neq0$

Pero en el apartado anterior hemos visto que $|A|=1\neq0$ por lo que $\exists A^{-1}$

Para ver si coincide con la traspuesta aplicamos la definición de inversa: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

Si al multiplicar la matriz A por su traspuesta sale la identidad tendremos que es ortogonal.

Calculamos la traspuesta:

$$A^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Para hacer los productos es mejor sacar factor común en ambas la fracción y después multiplicar:

$$A\cdot A^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1+4+4 & 2-4+2 & -2-2+4\\ 2-4+2 & 4+4+1 & -4+2+2\\ -2-2+4 & -4+2+2 & 4+1+4\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Si hacemos el producto conmutando las matrices sale lo mismo:

$$A^{t}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-2\\-2&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&2&1\\-2&1&2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1+4+4&-2+4-2&2+2-4\\-2+4-2&4+4+1&-4+2+2\\2+2-4&-4+2+2&4+1+4\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Por lo que $A^{t}=A^{-1}$ y la matriz A es ortogonal.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Se puede resolver fácilmente aplicando álgebra matricial:

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Como la matriz es ortogonal tenemos que su inversa coincide con su transpuesta.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=A^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\\\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

Luego la solución es: x = 1/3, y = 1/3, z = 5/3.

Problema B.2:

Consideremos la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & si \;\; x\leq 1 \\ \dfrac{ax^2}{x^2+1} & si \;\; x>1 \end{cases}$

a) Calcula el valor de a para que la función $y = f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

d) Calcula $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$

Solución:

a) Calcula el valor de a para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & si \;\; x\leq 1 \\ \dfrac{ax^2}{x^2+1} & si \;\; x>1 \end{cases}$ sea continua en todo su dominio.

La función es una función definida a trozos por lo que, para ser continua, lo han de ser cada uno de los trozos en su dominio de definición y además tiene que ser continua en el punto de cambio de uno a otro trozo.

- El primer trozo es continuo en su dominio de definición puesto que se trata de un polinomio que es continuo para todo número real.
- El segundo trozo es una función racional polinómica que no es continua cuando se anula el denominador de la fracción, pero $x^2+1\neq 0 \;\forall x\in \mathbb{R}$ por lo que es continuo también.

Queda por comprobar el punto de cambio: $x = 1$.

Para que una función sea continua en un punto x_0 se tienen que cumplir tres condiciones:

- Existe la función en el punto $\exists f(x_0)$
- Existen y coinciden los límites laterales de la función al punto $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
- Los dos valores anteriores coinciden.

Calculamos $f(1)=1^2-3\cdot 1+3=1$

Calculamos $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{ax^2}{x^2+1}=\dfrac{a\cdot 1^2}{1^2+1}=\dfrac{a}{2}$ y $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(x^2-3x+3)=1^2-3\cdot 1+3=1$

Para que coincidan los dos valores y así exista el límite tenemos que: $\dfrac{a}{2}=1\Rightarrow a=2$

Si sucede esto, tenemos que si $a = 2$, y que $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ es continua en ese punto y, como ya lo era en el resto, podemos concluir que es continua en todo su dominio, $\mathfrak{R}$.

b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Como sabemos que $a = 2$ la función la escribimos como: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & si \;\; x\leq 1 \\ \dfrac{2x^2}{x^2+1} & si \;\; x>1 \end{cases}$

Para calcular los intervalos hallamos la derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{4x\cdot(x^2+1)-2x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} & si \quad x>1 \end{cases} = \begin{cases} 2x-3 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Igualamos a cero la derivada: $2x - 3 = 0$. Luego $x = 3/2 > 1$, pero como el trozo está definido para $x\le 1$ no lo vamos a considerar.

En ese trozo el valor de la derivada será siempre negativo (decreciente): $f'(0)=-3<0$

Para el otro trozo sucede algo parecido. Vale cero en $x = 0 < 1$ luego tampoco hay que considerarlo.

En ese trozo el valor de la derivada será $f'(2)=\frac{8}{25}>0$ siempre positivo (creciente)

Por lo que los intervalos quedan decreciente en]–∞, 1[y creciente en]1, +∞[

c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

Como sabemos que $a = 2$ la función la escribimos como: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{2x^2}{x^2+1} & si \quad x>1 \end{cases}$

No tiene asíntotas verticales pues $x^2 + 1$ nunca se anula.

Las asíntotas horizontales se encuentran en el valor del límite cuando x tiende a +∞ y -∞

Hacemos primero el límite cuando x tiende a +∞. Tenemos que tomar el segundo trozo: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2$ (por ser cociente de polinomios del mismo grado) por lo que tiene una asíntota horizontal en $y = 2$ en +∞

Hacemos el límite cuando x tiende a –∞. Tenemos que tomar el primer trozo:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-3x+3)=+\infty$$

por lo que no tiene una asíntota horizontal en –∞

d) Calcula $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$

Como el intervalo de integración es [–2, 1] tenemos que calcular la integral del primer trozo.

Hacemos primero la integral indefinida: $\int (x^2-3x+3)\,dx=\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}+3x+C$

Ahora calculamos la definida:

$$\int_{-2}^{1}(x^2-3x+3)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-2}^{1}=\left(\frac{1^3}{3}-3\cdot\frac{1^2}{2}+3\cdot 1\right)-\left(\frac{(-2)^3}{3}-3\cdot\frac{(-2)^2}{2}+3\cdot(-2)\right)=\frac{11}{6}-\left(\frac{-44}{3}\right)=$$

16.5 u

La integral vale 16.5 u.

Problema B.3:

Un estudiante acude a la universidad el 70 % de las veces con su propio vehículo, y el doble de veces en transporte público que andando. Llega tarde el 1 % de las veces que acude andando, el 3 % de las que lo hace en transporte público y el 6 % de las que lo hace con su propio vehículo. Se pide:

a) La probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente.

b) La probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde

c) La probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente.

Solución:

Es un problema de probabilidad definimos los sucesos:

V → "Usa su propio vehículo"

T → "Usa transporte público"

A → "Acude andando"

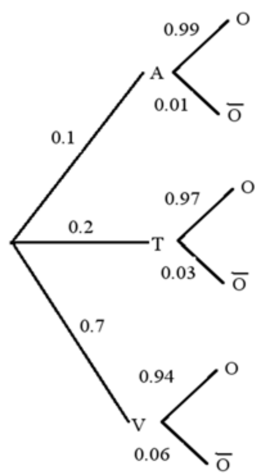
O → "Llega puntual (o'clock)"; $\bar{O}$ → "Llega tarde". $\bar{O}$ →

En el enunciado nos dan las siguientes probabilidades:

- Como acude el 70 % de las veces en su vehículo tenemos que: $P(V)$ = 0.7
- Como llega tarde el 1 % de las veces que va andando: $P(\bar{O}/A)$ = 0.01 $\bar{O}$
- Como llega tarde el 3 % de las veces que va en transporte público: $P(\bar{O}/T)$ = 0.03
- Como llega tarde el 6 % de las veces que va en su vehículo: $P(\bar{O}/V)$ = 0.06

  Además, tenemos unas cuantas probabilidades que se deducen casi inmediatamente:
- Como llega tarde el 1 % de las veces que va andando el 99 % llega puntual: $P(O/A)$ = 0.99
- Como llega tarde el 3 % de las veces que va en transporte público, el 97 % llega puntual: $P(O/T)$ = 0.97
- Como llega tarde el 6 % de las veces que va en su vehículo, el 94 % llega puntual: $P(O/V)$ = 0.94

Además, tenemos el dato de que acude el doble de veces en transporte público que andando. Como va el 70 % en su propio vehículo tenemos que, para esas dos formas de acudir, hay un 30 % de posibilidades. Al ser el doble el transporte público parece bastante evidente que serán un 10 % y un 20 % → $P(T)$ = 0.2 y $P(A)$ = 0.1



El problema se puede resolver fácilmente por árbol o por tabla de contingencias. Sólo hace falta resolverlo de una forma y los resultados han de ser iguales.

<u>Por diagrama de árbol</u>:

Podemos establecer dos fases: primero elige el medio de locomoción y luego llega o no tarde. Podemos situar los datos como ves en la figura:

Contestamos ahora a las cuestiones:

a) La probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente.
Nos preguntan por $P(O)$ aplicando el teorema de la probabilidad total:

$P(O)=P(A\cap O)+P(T\cap O)+P(V\cap O)=P(A)\cdot P(O/A)+P(T)\cdot P(O/T)+P(V)\cdot P(O/V)=$

= 0.1 · 0.99 + 0.2 · 0.97 + 0.7 · 0.94 = 0.951 → 95.1 %

b) La probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde.

Nos preguntan por $P(T/\bar{O})$ aplicando la fórmula de Bayes: $P(T/\bar{O}) = \frac{P(T\cap\bar{O})}{P(\bar{O})}$

Del diagrama tenemos que: $P(T\cap\bar{O})=P(T)\cdot P(\bar{O}/T)=$ $0.2 \cdot 0.03 = 0.006$

Por otro lado, tenemos que: $P(\bar{O})=1-P(O)=$ 1 – 0.951 = 0.049

Con lo cual: $P(T/\bar{O}) = \frac{P(T\cap\bar{O})}{P(\bar{O})}$ = 0.006/0.049 ≅ 0.1224 → 12.24 %

c) La probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente.

Nos piden $P(\bar{A}/O)$

Aplicamos la fórmula de Bayes: $P(\bar{A}/O) = \frac{P(\bar{A}\cap O)}{P(O)}$

Si no ha acudido andando ha tenido que hacerlo de alguno de los otros dos modos por lo que tenemos que sumar las probabilidades:

$$P(\bar{A} \cap O) = P(T \cap O) + P(V \cap O) = P(T)\cdot P(O/T) + P(V)\cdot P(O/V) = 0.2\cdot 0.97 + 0.7\cdot 0.94 = 0.852$$

Por lo que la probabilidad pedida es:

$P(\bar{A}/O) = \frac{P(\bar{A}\cap O)}{P(O)}$ = 0.852/0.951 ≅ 0.8959 → 89.59 %

Por tabla de contingencias:

Elaboramos una tabla de doble entrada con los sucesos A, T, V y O y su contrario:

	A	T	V	Total:
O				
$\bar{O}$				
Total:				1

Con los razonamientos que hemos hecho al principio situamos las probabilidades siguientes:

	A	T	V	Total:
O				
$\bar{O}$				
Total:	0.1	0.2	0.7	1

Recordemos que las probabilidades de las casillas centrales son intersecciones y que los datos que tenemos son de condicionadas por lo que tenemos que aplicar que:

$P(A\cap O)=P(A)P(O/A)=$ 0.1 · 0.99 = 0.099

$P(T\cap O)=P(T)P(O/T)=$ 0.2 · 0.97 = 0.194

$P(V \cap O) = P(V)\,P(O/V) =$ 0.7 · 0.94 = 0.658

Si completamos esas tres casillas podemos completar la tabla calculando las diferencias correspondientes y las sumas:

	A	*T*	*V*	Total:
O	*0.099*	*0.194*	*0.658*	
$\bar{O}$				
Total:	0.1	0.2	0.7	1

Tenemos que:

$P(O) = 0.099 + 0.194 + 0.658 = 0.951$

$P(V \cap \overline{H}) = 0.2 - 0.03 = 0.17$

$P(T \cap \overline{O}) =$ 0.2 – 0.194 = 0.006

$P(V \cap \overline{O}) =$ 0.7 – 0.658 = 0.042

Ponemos esos valores y completamos la tabla:

	A	*T*	*V*	Total:
O	*0.099*	*0.194*	*0.658*	0.951
$\bar{O}$	*0.001*	*0.006*	*0.042*	0.049
Total:	0.1	0.2	0.7	1

Contestamos ahora a las cuestiones planteadas de forma similar al árbol:

a) La probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente.

Nos preguntan por $P(O)$ que directamente de la tabla vemos que es $P(O)$ = 0.951 → 95.1 %

b) La probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde.

Nos preguntan por $P(T/\overline{O})$ aplicando la fórmula de Bayes: $P(T/\bar{O}) = \frac{P(T \cap \bar{O})}{P(\bar{O})}$

De la tabla tenemos que: $P(T \cap \overline{O}) =$ 0.006

Por otro lado, tenemos que: $P(\overline{O}) =$ 0.049

Con lo cual: $P(T/\bar{O}) = \frac{P(T \cap \bar{O})}{P(\bar{O})}$ = 0.006/0.049 ≅ 0.1224 → 12.24 %

c) La probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente.

Nos piden $P(\overline{A}/O)$

Aplicamos la fórmula de Bayes: $P(\bar{A}/O) = \frac{P(\bar{A} \cap O)}{P(O)}$

Si no ha acudido andando ha tenido que hacerlo de alguno de los otros dos modos por lo que tenemos que sumar las probabilidades: $P(\overline{A} \cap O) = P(T \cap O) + P(V \cap O) =$ 0.194 + 0.658 = 0.852.

Por lo que la probabilidad pedida es:

$$P(\bar{A}/O) = \frac{P(\bar{A} \cap O)}{P(O)} = 0.852/0.951 \cong 0.8959 \rightarrow 89.59\ \%$$

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Otras webs con problemas de Selectividad resueltos

En la web puedes encontrar muchos problemas resueltos de los propuestos en selectividad.

https://www.ebaumatematicas.com/

El objetivo de esta página web es ser una herramienta para dar fácil y rápido acceso a los exámenes EBAU de matemáticas II y matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II de todas las comunidades autónomas de España realizados los últimos años: 2017, 2018, 2019.

Aparecen los exámenes oficiales de la comisión organizadora de cada comunidad y dichos exámenes resueltos, a veces, de distintas maneras.

La resolución de los exámenes ha sido labor de Juan Antonio Martínez García, Juan Carlos Alonso Gianonatti, Germán Jesús Rubio Luna, Segundo Pérez, Julio García Galavis, Enrique Castaños García, Antonio Cascales Vicente, Jesus y José María Amorena Erdozáin..

Agradezco la generosa e importante aportación de cada uno de ellos.

Cuando la comisión organizadora de las pruebas EBAU ofrece la resolución o soluciones de las pruebas también se adjuntan esos archivos oficiales.

Tienen la intención de ser una web dinámica e ir creciendo poco a poco, y se agradecen aportaciones para corregir o añadir algún examen que falte en nuestra abundante oferta.

Solo aparecen los exámenes a partir del 2017, año en que se implantó la LOMCE y cambiaron los contenidos de las pruebas.

De distinta autores y de diferentes institutos, con enunciado y problemas resueltos de varios años.

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Con exámenes resueltos de Navarra

http://multiblog.educacion.navarra.es/jamorena/files/2019/09/Examen-ordinario-de-2019.pdf

Con exámenes resueltos de Andalucía

http://matestube.blogspot.com/2019/06/2-bachillerato-examen-matematicas-ii.html

Con exámenes resueltos de Andalucía

https://www.emestrada.org/2019-septiembre-examen-selectividad-matematicas-andalucia/

Con exámenes resueltos de Cataluña
http://universitats.gencat.cat/ca/pau/model_examens/

Autor: Isaac Musat. Problemas de la Comunidad de Madrid. Sólo enunciados, pero de muchos años. Organizados por materias.
http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
Del mismo autor. Problemas resueltos de Madrid y Valencia. Los del año 2019 a partir de la página 503.
http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

Centro aragonés de Tecnologías para la educación
http://catedu.es/matematicas_mundo/PAU/PAU.htm

Exámenes de Selectividad de Extremadura resueltos. De autor: Vicente González Valle. Organizados por materias: Análisis, Álgebra, Geometría y Probabilidad y Estadística
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf

Autor: Pedro Reina. Exámenes de selectividad resueltos de la Comunidad de Madrid hasta el año 2015
http://pedroreina.net/pau/

Página de Orientación Andújar con exámenes resueltos hasta el año 2011.
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/

Selectividad de la Comunidad de Madrid hasta el 2015
http://www.ejerciciosmatematicas.net/selectividad/

Autor: Segundo Pérez. Selectividad en la comunidad valenciana hasta el 2019
http://www.segundoperez.es/

Selectividad del País Vasco hasta el 2019.
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

Varias comunidades, varios exámenes resueltos
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/18008841a/helvia/aula/archivos/repositorio/0/117/html/selectividadmatematicas/index.html

Vídeos con las soluciones de exámenes
https://www.youtube.com/watch?v=DJFSsrvY1BM

Las universidades en ocasiones editan las soluciones de los problemas que se han propuesto.

SELECTIVIDAD

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

ÍNDICE