MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

Textos Marea Verde

A la vista de la polémica que ha suscitado el examen de Matemáticas II de Valencia ha surgido la idea de hacer dos libros nuevos de Textos Marea Verde, con los exámenes resueltos de 2019 de todas las comunidades autónomas.

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Ismael Montero Penido

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**
b) **Este examen consta de 8 ejercicios.**
c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos
d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0.25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados

Problema 1:

Considera la función f definida por $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ para $x\neq 1,-1$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. **(1.25 puntos)**
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. **(1.25 puntos)**

Problema 2:

Calcula $a>0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x)=xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x=a$ vale $\frac{1}{9}$. **(2.5 puntos)**

Problema 3:

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & m+2\\ 0 & 1 & m+1\\ m & 0 & 5\end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A según los valores de m. **(1.5 puntos)**
b) Para $m=2$, calcula la inversa de $2020A$. **(1 punto)**

Problema 4:

Siendo $a\neq 0$, considera las rectas

$$r\equiv x-1=y-2=\frac{z-1}{a} \qquad \text{y} \qquad s\equiv\frac{x-3}{-a}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a. **(1.25 puntos)**
b) Para $a=2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas. **(1.25 puntos)**

Problema 5:

Sea $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{sen\, x}{2-\cos x}$

a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(2 puntos)**
b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$. **(0.5 puntos)**

Problema 6:

Sea f la función dada por $f(x) = \frac{3x^2+4}{(x-2)^2}$ para $x \neq 2$.

a) Calcula $\int f(x)\, dx$. **(2 puntos)**
b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(3, 5)$. **(0.5 puntos)**

Problema 7:

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Discute el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a. **(1.25 puntos)**
b) Para $a = 0$, resuelve el sistema dado por $AX = B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$. **(1.25 puntos)**

Problema 8:

Se considera el punto $A(1, -2, 0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r. **(1.25 puntos)**
b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r. **(1.25 puntos)**

RESPUESTAS OPCIÓN A

Problema 1:

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ para $x \neq 1, -1$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. **(1.25 puntos)**
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. **(1.25 puntos)**

Solución:

a) Como $x \neq 1, -1$, se deduce que el dominio de la función es: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
Empezamos el estudio de las asíntotas:

Asíntota vertical *(Son rectas $x = a$ tal que $a \notin Dom(f)$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$)*

$\boxed{x = 1}$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \frac{-4}{0} = \infty$

Luego $f(x)$ tiene asíntota vertical en $x = 1$

Estudiamos el signo del infinito a la derecha y la izquierda de 1:

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$

$\boxed{x = -1}$

$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \frac{0}{0} = IND.$

Aplico la regla de L'Hôpital

$\lim_{x\to -1} \frac{2x-2}{2x} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow f(x)$ **no tiene** asíntota vertical en $x = -1$

Asíntota horizontal (Son rectas $y = b$ tal que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$)

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} = IND.$

Como el grado del polinomio del numerador es el mismo que el grado del polinomio del denominador *(grado 2)*, se deduce que $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = 1$.

Luego $y = 1$ es asíntota horizontal

Asíntota oblicua

No hay asíntota oblicua porque la función ya tiene asíntota horizontal por ambos lados.

b) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, primero derivo la función:

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{(x^2 - 1)^2}$$

Estudio el signo de $f'(x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+4x+2}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Este resultado no nos sirve pues $x = -1 \notin Dom(f)$

Por tanto:

Intervalos	$(-\infty, -\mathbf{1})$	$(-\mathbf{1}, \mathbf{1})$	$(\mathbf{1}, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$+$	$+$	$+$
	↗ Crece	↗ Crece	↗ Crece

Luego $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$

Problema 2:

Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{1}{9}$. **(2.5 puntos)**

Solución:

En el intervalo $(0, a)$ la función es positiva luego, el área determinada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ es:

$$A = \int_0^a xe^{3x}\ dx$$

Resolvemos usando el método por partes:

$$A = \int_0^a xe^{3x}\ dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{3x}dx & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{3}xe^{3x}\right]_0^a - \int_0^a \frac{1}{3}e^{3x}\,dx = \left[\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right]_0^a =$$

$$= \left(\frac{1}{3}ae^{3a} - \frac{1}{9}e^{3a}\right) - \left(-\frac{1}{9}\right) = e^{3a} \cdot \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{9}$$

Como el área tiene que valer $\frac{1}{9}$, igualamos el resultado a dicho valor:

$$e^{3a} \cdot \left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow e^{3a}\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}a - \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $\boldsymbol{a = \frac{1}{3}}$ para que el área valga $\frac{1}{9}\ u^2$

Problema 3:

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A según los valores de m. **(1.5 puntos)**
b) Para $m = 2$, calcula la inversa de $2020A$. **(1 punto)**

Solución:

a) Calculamos el determinante de la matriz e igualamos a 0 para ver qué valores de la m anula el determinante:
$|A| = 5 - m^2 - m - m^2 - 2m = -2m^2 - 3m + 5$

$-2m^2 - 3m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = 1, m = -\frac{5}{2}$

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -\frac{5}{2} \Rightarrow |A| \neq 0$. Por tanto, $rg(A) = 3$
- Si $m = 1$ o $m = -\frac{5}{2} \Rightarrow |A| = 0$. Por tanto, $rg(A) < 3$

  Como en ambos casos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, se deduce que $rg(A) = 2$

En resumen

$\boldsymbol{Si\ m \neq 1\ y\ m \neq -\frac{5}{2}}$	$\boldsymbol{rg(A) = 3}$
$\boldsymbol{Si\ m = 1\ o\ m = -\frac{5}{2}}$	$\boldsymbol{rg(A) = 2}$

b) Para $m = 2$, se tiene que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

La inversa de $2020A$ es:

$$(2020A)^{-1} = 2020^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2020}A^{-1}$$

Calculamos A^{-1}:

Recordemos que A^{-1} existe si $|A| \neq 0$ y además, para su cálculo, utilizaremos la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A^t)$$

Por el apartado a) sabemos que como $m \neq 1$ y $m \neq -\frac{5}{2}$ entonces $|A| \neq 0$, por tanto A^{-1}existe.

$|A| = -2(2)^2 - 3 \cdot 2 + 5 = -8 - 6 + 5 = -9$

Calculamos la traspuesta: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Calculamos los menores adjuntos:

$A^t_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5$

$A^t_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5$

$A^t_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -7$

$A^t_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 6$

$A^t_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$

$A^t_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3$

$A^t_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$A^t_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$$A^t_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Luego $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Así que $A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto $(2020A)^{-1} = \frac{1}{2020} \cdot \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{\frac{1}{18180}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Problema 4:

Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r \equiv x-1=y-2=\frac{z-1}{a} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \frac{x-3}{-a}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a. **(1.25 puntos)**
b) Para $a=2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas. **(1.25 puntos)**

Solución:

a) De la recta r obtenemos el punto $A(1,2,1)$ y el vector director $\overrightarrow{d_r}=(1,1,a)$
De la recta s obtenemos el punto $B(3,3,-1)$ y el vector director $\overrightarrow{d_s}=(-a,-1,2)$

Construyo el vector $\overrightarrow{AB}=(2,1,-2)$

Construyo las siguientes matrices:

$$M=\begin{pmatrix}\overrightarrow{d_r}\\ \overrightarrow{d_s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ -a & -1 & 2\end{pmatrix}$$
$$M^*=\begin{pmatrix}\overrightarrow{d_r}\\ \overrightarrow{d_s}\\ \overrightarrow{AB}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ -a & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Para ver la posición relativa de ambas rectas debemos de estudiar el rango de la matriz en función del parámetro a.

Calculo del determinante de M^*
$|M^*|=-a^2+4=0 \Leftrightarrow a=\pm 2$
Por tanto:

- Si $a \neq \pm 2$, se tiene que $rg(M^*)=3$ pues $|M^*| \neq 0$.
  Como $rg(M) \leq 2$, se deduce que $rg(M) \neq rg(M^*) \Rightarrow r\ y\ s\ se\ cruzan.$
- $Si\ a=2$, se tiene que $rg(M^*)<3$. Luego:
  $$M^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$$
  Como el menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-1+2=1 \neq 0$, se deduce que $rg(M)=rg(M^*)=2$
  Por tanto, $r\ y\ s\ son\ secantes\ en\ un\ punto.$
- $Si\ a=-2$, se tiene que $rg(M^*)<3$. Luego:
  $$M^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$$
  Como el menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-2=-3 \neq 0$, se deduce que $rg(M)=rg(M^*)=2$
  Por tanto, $r\ y\ s\ son\ secantes\ en\ un\ punto.$

Resumiendo

$\boldsymbol{Si\ a \neq -2\ y\ a \neq 2}$	$\boldsymbol{r\ y\ s\ se\ cruzan.}$
$\boldsymbol{Si\ a = -2\ o\ a = 2}$	$\boldsymbol{r\ y\ s\ se\ cortan\ en\ un\ punto.}$

b) Para $a = 2$ las paramétricas de las rectas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\beta \\ y = 3 - \beta \\ z = -1 + 2\beta \end{cases}$$

Para construir una recta t que pasa por el punto de corte y sea perpendicular a r y s, en primer lugar, hallaremos dicho punto de corte. Para ello, igualo las ecuaciones paramétricas y resuelvo el sistema para sacar los valores de $\lambda\ y\ \beta$

$$\begin{cases} 1+\lambda & = & 3-2\beta \\ 2+\lambda & = & 3-\beta \\ 1+2\lambda & = & -1+2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+2\beta & = & 2 \\ \lambda+\beta & = & 1 \\ 2\lambda-2\beta & = & -2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 0; \beta = 1$$

Por tanto, sustituyendo $\lambda = 0$ en r (o $\beta = 1$ en s), obtendremos las coordenadas del punto de corte: $P(1, 2, 1)$

Como la recta que queremos construir debe de ser perpendicular a las rectas r y s, el vector director de t, $\overrightarrow{d_t}$, debe de ser perpendicular a $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$. Para hallarlo, calculamos el producto vectorial de ambos vectores.

$$\overrightarrow{d_t} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k} = (4, -6, 1)$$

Por tanto, la recta que me piden, escrita en paramétrica, es:

$$\boldsymbol{t \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\mu \\ y = 2 - 6\mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}}$$

Problema 5:

Sea $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{sen\,x}{2-\cos x}$

a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(2 puntos)**
b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$. **(0.5 puntos)**

Solución:

a) Para ver los extremos absolutos de la función vamos a derivar $f(x)$ después estudiaremos el signo de la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2}$$

Estudio el signo de $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2cosx - 1}{(2-\cos x)^2} = 0 \Leftrightarrow 2cosx - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$
$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{3}$$

Intervalos	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$
Signo de $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	↗ Crece	↘ Decrece	↗ Crece

Como la función crece en $(0, \frac{\pi}{3})$ y en $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$ y decrece en $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$, los posibles máximos son $x = \frac{\pi}{3}$ y $x = 2\pi$. Veamos cuál de estos puntos es más alto:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{sen\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$f(2\pi) = \frac{sen\,(2\pi)}{2-\cos(2\pi)} = 0$$

Como $f\left(\frac{\pi}{3}\right) > f(2\pi)$, el **máximo absoluto** se da en el punto $\boldsymbol{P_1\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$

Los posibles mínimos son $x = 0$ y $x = \frac{5\pi}{3}$. Veamos cuál de ellos es el más bajo:

$$f(0) = \frac{sen\,0}{2-\cos 0} = 0$$
$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{2-\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) < f(0)$, el **mínimo absoluto** se da en el punto $\boldsymbol{P_2\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = \frac{\pi}{3}$ sigue la siguiente expresión:

$$y - f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

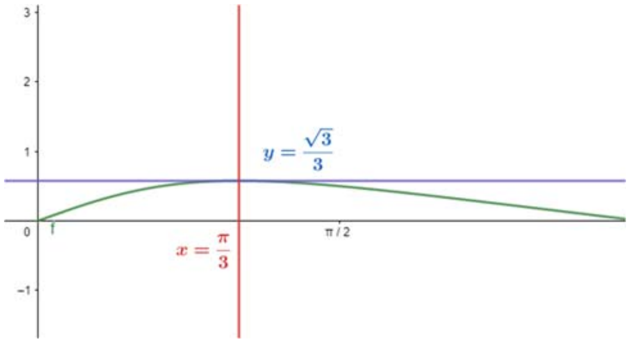
$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$

Sustituyendo: $y - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}$

La ecuación de la recta **tangente** a la gráfica en $x = \frac{\pi}{3}$ es $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

Como la ecuación de la recta normal a la gráfica en $x = \frac{\pi}{3}$ es una recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto y esta tangente es la recta horizontal $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$, la recta normal será una recta vertical de ecuación $x = \frac{\pi}{3}$



La ecuación de la recta **normal** a la gráfica es $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3}}$

Problema 6:

Sea f la función dada por $f(x) = \frac{3x^2+4}{(x-2)^2}$ para $x \neq 2$.

a) Calcula $\int f(x)\,dx$. **(2 puntos)**
b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(3,5)$. **(0.5 puntos)**

Solución:

a) $I = \int \frac{3x^2+4}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{3x^2+4}{x^2-4x+4}dx$

Al tratarse de una división de polinomios del mismo grado, vamos a dividir y a separar dicha función racional como "$cociente + \frac{resto}{divisor}$"

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 0x \quad + 4 & x^2 - 4x + 4 \\ \cline{2-2} -3x^2 + 12x - 12 & 3 \\ \cline{1-1} 12x \ - 8 & \end{array}$$

Por tanto, $I = \int 3\,dx + \int \frac{12x-8}{x^2-4x+4}\,dx = 3x + \underbrace{\int \frac{12x-8}{x^2-4x+4}\,dx}_{I_1}$

Resolvemos I_1 expresando la función racional en suma de fracciones simples:

$\frac{12x-8}{x^2-4x+4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} \Longrightarrow 12x - 8 = (x-2)\cdot A + B$

Hallo A y B:

$Si\ x = 2 \longrightarrow \boxed{16 = B}$

$Si\ x = 0 \longrightarrow -8 = -2 \cdot A + 16 \Rightarrow \boxed{A = 12}$

Luego $I_1 = \int \frac{12}{x-2}dx + \int \frac{16}{(x-2)^2}dx = 12 \cdot \ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + C,\ \ C \in \mathbb{R}$

Sustituyendo en I, tengo que:

$$\int \frac{3x^2+4}{(x-2)^2}dx = 3x + 12\ln|x-2| - \frac{\mathbf{16}}{\boldsymbol{x-2}} + \boldsymbol{C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

b) Sea $F(x) = 3x + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + C$. Aplicando la condición, se deduce que $F(3) = 5$.

$F(3) = 9 + 12 \cdot \ln 1 - 16 + C = 5 \ \Longrightarrow C = 12$

Luego,

$$F(x) = 3x + 12\ln|x-2| - \frac{\mathbf{16}}{\boldsymbol{x-2}} + \mathbf{12}$$

Problema 7:

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Discute el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a. **(1.25 puntos)**
b) Para $a = 0$, resuelve el sistema dado por $AX = B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$. **(1.25 puntos)**

Solución:

a) Escribimos el sistema equivalente a la ecuación matricial $AX = B$:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + z = 2a \\ 4x + y + 4z = 3a \end{cases}$$

Por tanto, la matriz ampliada del sistema es:

$$A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 2a \\ 4 & 1 & 4 & 3a \end{array}\right)$$

(donde A es la matriz de los coeficientes y B la matriz de los términos independientes)

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes para calcular el rango de A:

$|A| = 1 + 4 - 1 - 4 = 0 \Longrightarrow rg(A) < 3$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \boxed{rg(A) = 2}$

Calculamos el rango de A^* en función del parámetro a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2a \\ 4 & 1 & 3a \end{vmatrix} = a + 8a - 2a - 3a = 4a = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

- Si $a \neq 0 \Rightarrow \boxed{rg(A^*) = 3}$
- Si $a = 0 \Rightarrow \boxed{rg(A^*) = 2}$

Por el teorema de Rouché – Fröbenius:

- $Si\ a \neq 0 \Longrightarrow rg(A) \neq rg(A^*) \Longrightarrow Sistema\ incompatible$
- $Si\ a = 0 \Longrightarrow rg(A) = rg(A^*) = 2 < n \Longrightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado$
  (n es el número de incógnitas del sistema)

b) Si $a = 0$ sabemos que el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.
Resolvemos por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 4F_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Expreso el sistema de forma analítica:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Tomando como parámetro $z = t$ y sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos:
$x = -t$
Solución del sistema: $(-t, 0, t), \forall t \in \mathbb{R}$

Una solución para que $y + z = 4$, sustituyendo adecuadamente cada variable, obtenemos que $t = 4$

Por tanto, una solución para que $y + z = 4$ es: $\mathbf{(-4, 0, 4)}$

Problema 8:

Se considera el punto $A(1,-2,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r. **(1.25 puntos)**
b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r. **(1.25 puntos)**

Solución:

Antes de comenzar, vamos a pasar la recta r a paramétricas resolviendo el sistema.

Sea $z = t \xRightarrow[\text{en la 2º ecuación}]{\text{sustituyendo}} y = -2+3t$

De la primera ecuación obtenemos que $x = 2-3t$

Luego $r \equiv \begin{cases} x = 2-3t \\ y = -2+3t \\ z = t \end{cases}$ donde se deduce que un punto de r es $P(2,-2,0)$ y su vector director es $\overrightarrow{d_r} = (-3,3,1)$

a) Para construir el plano vamos a tomar el punto $A(1,-2,0)$ por el que pasa y al ser perpendicular a la recta r, el vector normal del plano, $\vec{n}$, coincide con el vector director de la recta $\overrightarrow{d_r}$

Luego $-3x+3y+z+D=0$

Sustituyo por el punto A para obtener D:

$-3-6+D=0 \Longrightarrow D=9$

Por tanto, el plano es:

$$\boldsymbol{\pi \equiv -3x+3y+z+9=0}$$

b) El plano que queremos construir estará definido por el punto $A(1,-2,0)$ y al contener a la recta, sus vectores directores serán $\overrightarrow{d_r} = (-3,3,1)$ y $\overrightarrow{AP} = (1,0,0)$
Calculamos la ecuación del plano:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -y+3z-2=0$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv -y+3z-2=0}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**
b) **Este examen consta de 8 ejercicios.**
c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos
d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0.25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados

Problema 1:

Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 6)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica. **(2.5 puntos)**

Problema 2:

Calcula $\int_0^{\pi} x \cdot sen^2(x)\, dx$. **(2.5 puntos)**

Problema 3:

Considero el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de m. **(1.5 puntos)**
b) Para $m = -2$, ¿existe alguna solución son $z = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

Problema 4:

Considera el plano $\pi \equiv x - y + az = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$

a) Halla a sabiendo que π es paralelo a r. **(1.5 puntos)**
b) Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$. **(1 punto)**

Problema 5:

Sea la función derivable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{2ax-4b} & si \quad x < 1 \\ 1 - x \cdot \ln x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

($\ln$ denota la función logaritmo neperiano)

a) Determina los valores de a y b. **(1.75 puntos)**
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$. **(0.75 puntos)**

Problema 6:

Considera las funciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 2$

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que determinan. **(1 punto)**
b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

Problema 7:

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de λ tales que $|A - \lambda I| = 0$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1.25 puntos)**
b) Para $\lambda = 1$, resuelve el sistema dado por $(A - \lambda I)X = \theta$. ¿Existe alguna solución tal que $z = 1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1.25 puntos)**

Problema 8:

Considera el plano $\pi \equiv x - y + z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$

a) Calcula la distancia entre r y π. **(1 punto)**
b) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r. **(1.5 puntos)**

Problema 1:

Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 6)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica. **(2.5 puntos)**

Solución:

Para estudiar la curvatura de la gráfica de f, calculamos la segunda derivada:

$f'(x) = e^x(x^2 - 5x + 6) + e^x(2x - 5) = e^x(x^2 - 3x + 1)$

$f''(x) = e^x(x^2 - 3x + 1) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 2)$

Estudiamos el signo de $f''(x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 2$

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de $f''(x)$	$+$	$-$	$+$
	$\cup$ convexa	$\cap$ cóncava	$\cup$ convexa

$f(x)$ es convexa en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$

$f(x)$ es cóncava en los intervalos $(-1, 2)$

Los puntos de inflexión se dan en $x = -1$ y $x = 2$. Veamos el valor de la función en ambos puntos.

$f(-1) = \frac{12}{e}$

$f(2) = 0$

Por tanto, los puntos de inflexión de $f(x)$ son $\boldsymbol{P_1\left(-1, \frac{12}{e}\right)}$ y $\boldsymbol{P_2(2, 0)}$

Problema 2:

Calcula $\int_0^\pi x \cdot sen^2(x)\,dx$. **(2.5 puntos)**

Solución:

Sabemos por trigonometría que $sen^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, por tanto:

$$\int_0^\pi x \cdot sen^2 x\,dx = \int_0^\pi x \cdot \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi x \cdot \cos(2x)\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\pi x \cdot \cos(2x)\,dx}_{I}$$

Resolvemos I usando el método por partes:

$$I = \int_0^\pi x \cdot \cos(2x)\,dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos(2x) & v = \frac{1}{2}sen(2x) \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{2}xsen\,(2x)\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi sen(2x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}xsen\,(2x)\right]_0^\pi + \left[\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^\pi = \left[\frac{1}{2}x \cdot sen(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^\pi$$

Luego, sustituyendo en la integral principal obtenemos:

$$\int_0^\pi x \cdot sen^2(2x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \cdot sen\,(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^\pi =$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}sen\,(2\pi) - \frac{1}{4}\cos(2\pi)\right) - \left(-\frac{1}{4}\cos(0)\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

Por tanto,

$$\int_0^\pi x \cdot sen^2(2x)\,dx = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}$$

Autor: Ismael Montero Penido
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 3:

Considero el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de m. **(1.5 puntos)**
b) Para $m = -2$, ¿existe alguna solución son $z = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

Solución:

a) Expresamos el sistema en forma analítica

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ mx + 4y - 2z = 2m \\ (m+2)y - 3z = 1 \end{cases}$$

La matriz ampliada del sistema es:

$$A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ m & 4 & -2 & 2m \\ 0 & m+2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Donde A es la matriz de los coeficientes y B es la matriz de los términos independientes.

Calculo el determinante de A e igualo 0

$|A| = -12 + m^2 + 2m + 2m + 4 - 6m = m^2 - 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 4$ y $m = -2$

Usando el teorema de Rouché – Fröbenius:

- Si $m \neq 4; -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*) = n \Longrightarrow$ S. compatible determinado (n es el número de incógnitas)
- Si $m = 4 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow rg(A) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

  - Calculamos el rango de A:
    Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 8 = 12 \neq 0 \Longrightarrow rg\ (A) = 2$
  - Calculamos el rango de A^*
    Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 48 - 48 + 8 = 12 \neq 0 \Longrightarrow rg\ (A^*) = 3$

  Como $rg(A) \neq rg(A^*) \Longrightarrow$ S. incompatible.

- Si $m = -2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow rg(A) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

- Calculamos el rango de A
  Como el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow rg\ (A) = 2$

- Calculamos el rango de A^*
  Como el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, pues las dos primeras filas son proporcionales, luego $rg(A^*) = 2$

Como $rg(A) = rg(A^*) < n \Longrightarrow$ S. compatible indeterminado.
(n es el número de incógnitas)

Resumiendo

$Si\ a \neq -2\ y\ a \neq 4$	*Sistema compatible determinado*
$Si\ a = 4$	*Sistema incompatible*
$Si\ a = -2$	*Sistema compatible indeterminado*

b) Para $m = -2$ la forma analítica del sistema es:
$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ \quad -3z = 1 \end{cases} \Longrightarrow z = -\frac{1}{3}$

Tomamos $y = \lambda$
De la 1ª ecuación: $x - 2y - \frac{1}{3} = 2 \Longrightarrow x = \frac{7}{3} + 2\lambda$

Luego, la solución del sistema es: $\left(\frac{7}{3} + 2\lambda, \lambda, -\frac{1}{3}\right), \forall\lambda \in \mathbb{R}$

No hay solución para $z = 0$, pues z es una constante fija que vale siempre $-\frac{1}{3}$

Problema 4:

Considera el plano $\pi \equiv x - y + az = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$

a) Halla a sabiendo que π es paralelo a r. **(1.5 puntos)**
b) Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1,2,3)$. **(1 punto)**

Solución:

a) Para que π y r sean paralelos, el vector director de r y el vector normal de π tienen que ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe de ser 0.

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (1,-1,a)$

El vector director de la recta r viene definido por el producto vectorial de los dos vectores normales de los dos planos que la definen:

$$\overrightarrow{d_r} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k} = (5,8,1)$$

Luego $r \parallel \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{d_r} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n} = 0$
$\overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n} = (5,8,1) \cdot (1,-1,a) = 5 - 8 + a = 0 \Leftrightarrow a = 3$

$$r \parallel \pi \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 3}$$

b) Como el plano, π', que queremos construir es perpendicular a r, el vector normal de este coincide con el vector director de r. Luego $\overrightarrow{n'} = \overrightarrow{d_r}$
Por tanto,

$5x + 8y + z + D = 0$

Sustituyo el punto $P(1,2,3)$ en la ecuación para obtener D

$5 + 16 + 3 + D = 0 \Leftrightarrow D = -24$

Por tanto, $\boldsymbol{\pi' \equiv 5x + 8y + z - 24 = 0}$

Problema 5:

Sea la función derivable $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{2ax-4b} & si \quad x < 1 \\ 1 - x \cdot \ln x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

($\ln$ denota la función logaritmo neperiano)

a) Determina los valores de a y b. **(1.75 puntos)**
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$. **(0.75 puntos)**

Solución:

a) Como f es derivable en $\mathbb{R} \Longrightarrow f$ es continua en $\mathbb{R}$

- Calculamos la continuidad en el punto de ruptura $x = 1$
$f(1) = 1 - 1 \cdot \ln 1 = 1$

$\lim_{x \to 1^+} (1 - x ln\, x) = 1$

$\lim_{x \to 1^-} e^{2ax-4b} = e^{2a-4b}$
Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ debe de cumplirse que $e^{2a-4b} = 1$
$e^{2a-4b} = 1 \Leftrightarrow 2a - 4b = 0 \Leftrightarrow 2a = 4b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}a$

- Derivamos la función: $f'^{(x)} = \begin{cases} 2a \cdot e^{2ax-4b} & si \quad x < 1 \\ -\ln x - 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$
Calculamos la derivabilidad en el punto de ruptura $x = 1$
$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} (-\ln x - 1) = -1$
$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} 2a \cdot e^{2ax-4b} = 2a \cdot e^{2a-4b}$
Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$ debe de cumplirse que $2a \cdot e^{2a-4b} = -1$
$2a \cdot e^{2a-4b} = -1 \overset{e^{2a-4b}=1}{\Longleftrightarrow} 2a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$
Como $b = \frac{1}{2}a \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$

Para que $f(x)$ sea derivable $\boldsymbol{a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}}$

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 2$ es:

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

Calculamos $f(2)$ y $f'(2)$:
$f(2) = 1 - 2\ln 2$
$f'(2) = -\ln 2 - 1$
Sustituyendo en la ecuación obtenemos:
$y = (-\ln 2 - 1)(x - 2) + 1 - 2\ln 2 \Leftrightarrow y = (-\ln 2 - 1)x + 2\ln 2 + 2 + 1 - 2\ln 2$

Luego la ecuación de la recta tangente es: $\boldsymbol{y = (-\ln 2 - 1)x + 3}$

Problema 6:

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 2$

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que determinan. **(1 punto)**
b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

Solución:

a) La función f la puedo expresar como: $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Calculo los puntos de corte de $f(x)$ con $g(x)$

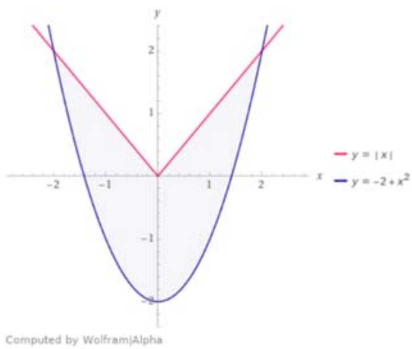
- Para $x < 0$
  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x = x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ y $x = 1$
  (descartamos $x = 1$ por no pertenecer al conjunto de todas las $x < 0$)
  Luego el punto de corte de $f(x)$ con $g(x)$ para $x < 0$ es $P_1(-2, 2)$
- Para $x \geq 0$
  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ y $x = 2$
  (descartamos $x = -1$ por no pertenecer al conjunto de todas las $x \geq 0$)
  Luego el punto de corte de $f(x)$ con $g(x)$ para $x \geq 0$ es $P_2(2, 2)$

Por tanto, los puntos de corte de las gráficas f y g son: $\boldsymbol{P_1(-2, 2)}$ y $\boldsymbol{P_2(2, 2)}$

Para dibujar el recinto limitado por ambas funciones, sabemos que f son dos rectas que son la bisectriz del I cuadrante y II cuadrante; y además, pasa por los puntos $P_1(-2, 2)$ y $P_2(2, 2)$

De la gráfica de $g(x)$ se sabe que tiene su vértice en $V(0, 2)$ y corta al eje OX en los puntos $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

Por tanto, el recinto que determinan se puede observar en la siguiente representación gráfica:



b) El área del recinto es: $A = \int_{-2}^{2} \left(f(x) - g(x)\right) dx$

Pero simetría del dibujo, el área se puede expresar como:

$$A = 2 \cdot \int_0^2 [x - (x^2 - 2)]\, dx = 2 \cdot \int_0^2 -x^2 + x + 2\, dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 =$$
$$= 2 \cdot \left[\left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) - (0)\right] = \frac{20}{3} u^2$$

Por tanto, $\boldsymbol{A = \frac{20}{3} u^2}$

Problema 7:

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de λ tales que $|A - \lambda I| = 0$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1.25 puntos)**

b) Para $\lambda = 1$, resuelve el sistema dado por $(A - \lambda I)X = \theta$. ¿Existe alguna solución tal que $z = 1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1.25 puntos)**

Solución:

a) Calculamos $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = -\lambda \cdot (1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - \lambda - 2) \Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = 2$$

Luego $|A - \lambda I| = 0$ si $\boldsymbol{\lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = 2}$

b) Para $\lambda = 1$ se obtiene que $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto, el sistema dado por $(A - \lambda I) \cdot X = 0$ se puede expresar como: $\begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

De donde obtenemos que $y = z = 0$ y $x = t$

Luego la solución del sistema viene dada por $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}), \forall \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$

No hay solución para $z = 1$, pues z es una constante fija que vale siempre 0

Problema 8:

Considera el plano $\pi \equiv x - y + z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$

a) Calcula la distancia entre r y π. **(1 punto)**
b) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r. **(1.5 puntos)**

Solución:

a) Para hallar la distancia entre r y π voy a tomar un punto de la recta r y calcular la distancia de ese punto al plano.
Sea $A(0,-1,-2) \in r$, se tiene que $d(r,\pi) = d(A,\pi)$

$$d(A,\pi) = \frac{|0-(-1)+(-2)-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,u$$

Por tanto, $\boldsymbol{d(r,\pi) = \sqrt{3}\,u}$

b) Sea π'el plano que nos piden construir se deduce lo siguiente:

Como π' es perpendicular a π, el vector normal de π es el vector director de π'
Por tanto, $\overrightarrow{d_1} = (1,-1,1)$

Como π' contiene a r, tendrá al punto $A(0,-1,-2)$ y como vector director el mismo que el de la recta r, es decir, $\overrightarrow{d_2} = (2,1,-1)$

La ecuación general del plano π' es:

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z+2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3y + 3z + 9 = 0 \overset{:3}{\Leftrightarrow} y + z + 3 = 0$$

Por tanto, $\boldsymbol{\pi' \equiv y + z + 3 = 0}$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

Aragón

Autora: Milagros Latasa Asso

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas.

El estudiante debe indicar claramente en la primera página del tríptico, cuáles han sido las preguntas elegidas.

(Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar). Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.

TIEMPO: 1 hora y 30 minutos.

Problema 1:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + (m+1)z = 2 \\ x + (m-1)y + 2z = 1 \\ 2x + my + z = -1 \end{cases}$$

Discuta el sistema según los valores de $m \in \mathbb{R}$

Problema 2:

Dadas las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

a) *(1 punto)* Calcule, si es posible $(\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{t}})^{-\mathbf{1}}$.

b) *(1 punto)* Compruebe que $\boldsymbol{C}^{\mathbf{3}} = \boldsymbol{I}$, donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad y calcule $\boldsymbol{C}^{\mathbf{16}}$

Problema 3:

Resuelva el siguiente sistema matricial $\begin{cases} \boldsymbol{X} - \mathbf{2}\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{X} + \mathbf{3}\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{6} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{14} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \end{pmatrix} \end{cases}$

Problema 4:

Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

a) *(1, 25 puntos)*Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $(0,0,1)$

b) *(0,75 puntos)*Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{u} \times \vec{v}$. Sabiendo que $\vec{u} \times \vec{v} = (-1,1,1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

Problema 5:

Calcule el siguiente límite $\lim\limits_{x \to 0^+} \left((1 + x - senx)^{1/x^3} \right)$

Problema 6:

Se considera la siguiente función $f(x) = \frac{x^2}{1-e^{-x}}$. Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas, cuándo existan.

Problema 7:

Se considera la siguiente función $f(x) = ln(2x + 1)$

a) *(1,25 puntos)* Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) *(0,75 puntos)* Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$

Problema 8:

Calcule la siguiente integral $\int(\sqrt{x}.\ ln^2 x)dx$.

Problema 9:

Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12%, mientras la de que una mujer lo esté es del 16%. Además, la probabilidad de ser varón es del 64% y la de ser mujer del 36%

a) *(0,75 puntos)* Hemos conectado por redes sociales con una persona, ¿Cuál es la probabilidad de que esté en paro y sea mujer?

b) *(0,75 puntos)* Si se elige al azar una persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?

c) *(0,5 puntos)* Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro, ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Nota informativa: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizadas con personas en disposición de trabajar.

Problema 10:

De los estudiantes universitarios, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente.

a) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que lo definen pero sin hacer los cálculos finales).

b) *(1 punto)* ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

SOLUCIONES DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema 1:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + (m+1)z = 2 \\ x + (m-1)y + 2z = 1 \\ 2x + my + z = -1 \end{cases}$$

Discuta el sistema según los valores de $m \in \mathbb{R}$

Solución

Escribamos las matrices de coeficientes y ampliada del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix} \qquad A{:}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m-1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix} = m - 1 + 4 + (m^2 + m) - (2m^2 - 2) - 2m - 1 = -m^2 + 4$$

$$Det\ A = -m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \quad m = -2 \ \ o \quad m = -2.$$

- Si $m \neq -2, 2$ $\Longrightarrow DetA \neq 0 \Rightarrow rgA = rg\ A{:}B = 3$ ya que $Det\ A$ es un menor de orden 3 (máximo posible) tanto de A como de $A{:}B$ y este rango común coincide con el número de incógnitas $\underbrace{\Rightarrow}_{T.Rouché-Fröbenius}$ El sistema es compatible determinado

- Si $m = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad rgA \neq 3 \text{ . El menor de } A: \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \ rgA = 2$$

$$A{:}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ El menor } M_{234} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rg\ A{:}B = 3$$

Luego $rgA = 2 \neq rg\ A{:}B = 3$ $\underbrace{\Rightarrow}_{T.\ de\ Rouché-Fröbenius}$ El sistema es incompatible

- Si $m = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad rgA \neq 3 \text{ . El menor de } A: \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \ rgA = 2$$

$$A{:}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{F2'=F2-F1 \\ F3'=F3-2F1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F3''=F3'-5F2'} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz $A{:}B$ solo tiene dos vectores fila linealmente independientes $\Rightarrow rg\ A{:}B = 2$

Luego: $rgA = 2 = rg\ A{:}B <$ nº de incógnitas $\underbrace{\Rightarrow}_{T.\ Rouché-Fröbenius}$ El sistema es compatible indeterminado

Problema 2:

Dadas las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

a) *(1 punto)* Calcule, si es posible $(\boldsymbol{A}\,.\,\boldsymbol{B^t})^{-1}$.

b) *(1 punto)* Compruebe que $\boldsymbol{C^3} = \boldsymbol{I}$, donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad y calcule $\boldsymbol{C^{16}}$

Solución

a) $A \in \mathcal{M}_{2x3}(\mathbb{R})$ $\quad B^t \in \mathcal{M}_{3x2}(\mathbb{R})$ ⇒es posible calcular $A\,.\,B^t$ y es una matriz cuadrada de orden 2 con elementos reales

$$A\,.\,B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Det(A\,.\,B^t) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists (A\,.\,B^t)^{-1} \qquad Adj(A\,.\,B^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A\,.\,B^t)^{-1} = \frac{1}{Det\,(A\,.\,B^t)}\left(Adj(A\,.\,B^t)\right)^t = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{(A\,.\,B^t)^{-1}} \;\; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} & -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \end{pmatrix}$$

b) $\mathbf{C^2} = C\,.\,C = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{C^3} = C^2\,.\,C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\mathbf{C^{16}} = \mathbf{C^{15}}.C = (C^3)^5.C = C^3.C^3.C^3.C^3.C^3.C = I.I.I.I.I.C = C = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C^3} = \boldsymbol{I};\; \mathbf{C^{16}} = \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Problema 3:

Resuelva el siguiente sistema matricial $\begin{cases} X-2Y=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} X-2Y=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \underbrace{\sim}_{Multiplicando\ por -2\ \ Ec1} \begin{cases} -2X+4Y=\begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Sumando ahora estas dos ecuaciones:

$$7Y=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Y=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De la primera ecuación de partida:

$$X=2Y+\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La solución es $X=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 4:

Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

a) *(1, 25 puntos)* Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $(0,0,1)$

b) *(0,75 puntos)* Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{u}\times\vec{v}$. Sabiendo que $\vec{u}\times\vec{v}=(-1,1,1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

Solución:

a) r viene dada como intersección de dos planos⇒ cualquier plano que contenga a r pertenecerá al haz que determinan ambos:

$$\mathcal{H} \equiv \begin{cases} \pi_\alpha: x+z-1+\alpha(2x+y-3)=0 \ \ \alpha\in\mathbb{R} \\ \pi_2: 2x+y-3=0 \end{cases}$$

El plano buscado no es π_2 ya que $(0,0,1)\notin\pi_2$

$$(0,0,1)\in\pi_\alpha \Rightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}/0+1-1+\alpha(2.0+0-3)=0 \Rightarrow \alpha=0$$

La solución es entonces

$$\pi_0: \boldsymbol{x+z-1=0}$$

b) El volumen del paralelepípedo que determinan $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{u}\times\vec{v}$ es su producto mixto

$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{u}\times\vec{v}] = [\vec{v},\ \vec{u}\times\vec{v},\ \vec{u}] = [\vec{u}\times\vec{v},\ \vec{u},\ \vec{v}] = (\vec{u}\times\vec{v}).(\vec{u}\times\vec{v}) = (-1,1,1).(-1,1,1) = 3$

Teniendo en cuenta que el producto mixto de tres vectores no varía si se rotan éstos y que se define como el producto escalar del primero de ellos por el vectorial de los otros dos.

$$Volumen\ del\ paralelepípedo: \boldsymbol{3\ u^2}$$

Problema 5:

Calcule el siguiente límite $\lim_{x\to 0^+}\left((1+x-senx)^{1/x^3}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 0^+}\left((1+x-senx)^{1/x^3}\right) = 1^\infty = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\cdot((1+x-senx)-1)} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{x-senx}{x^3}} = e^{\frac{0}{0}} =$$

$$\underbrace{=}_{L'Hôpital} e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1-cosx}{3x^2}} = e^{\frac{0}{0}} \underbrace{=}_{L'Hôpital} e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{senx}{6x}} = e^{\frac{0}{0}} \underbrace{=}_{L'Hôpital} e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{cosx}{6}} = e^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{e}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left((1+x-senx)^{1/x^3}\right) = e^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\boldsymbol{e}}$$

Problema 6:

Se considera la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - e^{-x}}$$

Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas, cuando existan.

Solución

$Dom\, f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}/e^{-x} = 1\} = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}/-x = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$

Calculemos los límites laterales en 0 para estudiar si $x = 0$ es asíntota vertical (sería la única posible):

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{1 - e^{-x}} = \frac{0}{0} \underbrace{=}_{L'H\hat{o}pital} \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{-e^{-x}} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{1 - e^{-x}} = \frac{0}{0} \underbrace{=}_{L'H\hat{o}pital} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{-e^{-x}} = \frac{0}{-1} = 0$$

No hay asíntota vertical. En $x = 0$ hay una discontinuidad evitable.

Veamos ahora si hay asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{1 - e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} \underbrace{=}_{L'H\hat{o}pital} \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \frac{\infty}{-\infty} \underbrace{=}_{L'H\hat{o}pital} \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow$$

$\boldsymbol{y = 0}$ es una asíntota horizontal si $x \to -\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1-e^{-x}} = \frac{\infty}{1} = \infty \Rightarrow$ no hay asíntota horizontal si $x \to \infty$

Puede haber una asíntota oblicua si $\boldsymbol{x} \to \infty$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{1-e^{-x}} : x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-e^{-x}} = \frac{\infty}{1} = \infty.$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

Problema 7:

Se considera la siguiente función $f(x) = ln(2x+1)$

a) *(1,25 puntos)* Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) *(0,75 puntos)* Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$

Solución

a) $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R}/2x+1>0\}$ = $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$

f es continua y derivable en su dominio. Estudiamos su crecimiento mediante el signo de f'

$f'(x) = \frac{2}{2x+1}$ $\quad f'(x) > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2},\infty\right) \Longrightarrow f$ es estrictamente creciente en $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$

No existe más que este intervalo de crecimiento.

f es estrictamente **creciente** en $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$

b) Si $x = \frac{1}{2}$: $\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = ln2 \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1+1} = 1$

El punto de tangencia es $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, ln2\right)$ y, según la interpretación geométrica de la derivada, la pendiente de la recta tangente en este punto es $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

La recta tangente tiene por ecuación: $y - ln2 = 1\left(x-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = x + \frac{2ln2-1}{2} \Leftrightarrow y = x + \frac{ln4-1}{2}$

$$\boldsymbol{y = x + \frac{ln4-1}{2}}$$

Problema 8:

Calcule la siguiente integral $\int\left(\sqrt{x}.\ ln^2x\right)dx$.

Solución

Utilizamos el método de integración por partes $\int udv = uv - \int vdu$

I	$u = ln^2x$	$du = \frac{2\ lnx\ dx}{x}$
	$v = \int \sqrt{x}\ dx = \int x^{1/2}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}$	$dv = \sqrt{x}dx$

$$I = \int\left(\sqrt{x}.\ ln^2x\right)dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}ln^2x - \frac{2}{3}.2\underbrace{\int\sqrt{x^3}\ .\ \frac{lnx}{x}dx}_{I_1} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3}ln^2x - \frac{4}{3}\underbrace{\int x\sqrt{x}\ .\ \frac{lnx}{x}dx}_{I_1} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}ln^2x - \frac{4}{3}\underbrace{\int\sqrt{x}\ .\ lnx\ dx}_{I_1}$$

I_1	$u = lnx$	$du = \frac{dx}{x}$
	$v = \int \sqrt{x}\ dx = \int x^{1/2}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}$	$dv = \sqrt{x}dx$

$$I = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}ln^2x - \frac{4}{3}\underbrace{\int\sqrt{x}\ .\ lnx\ dx}_{I_1} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}ln^2x - \frac{4}{3}\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}lnx - \frac{2}{3}\int\frac{\sqrt{x^3}dx}{x}\right] =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3}ln^2x - \frac{8\sqrt{x^3}}{9}lnx + \frac{8}{9}\int x\sqrt{x}\ .\frac{dx}{x} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}ln^2x - \frac{8\sqrt{x^3}}{9}lnx + \frac{8}{9}\int\sqrt{x}\ \ dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3}ln^2x - \frac{8\sqrt{x^3}}{9}lnx + \frac{8}{9}\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C =$$

$$\boldsymbol{\frac{2\sqrt{x^3}}{3}ln^2x - \frac{8\sqrt{x^3}}{9}lnx + \frac{16}{27}\sqrt{x^3} + C}$$

Problema 9:

Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12 %, mientras la de que una mujer lo esté es del 16 %. Además, la probabilidad de ser varón es del 64 % y la de ser mujer del 36 %

a) Hemos conectado por redes sociales con una persona, ¿Cuál es la probabilidad de que esté en paro y sea mujer?

b) Si se elige al azar una persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?

c) Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro, ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Nota informativa: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizadas con personas en disposición de trabajar.

Solución

Sean los sucesos: A_1= "la persona elegida es hombre" A_2= "la persona elegida es mujer"
B= "la persona elegida está en paro"

a) $P(B \cap A_2) = P(A_2) \cdot P(B/A_2) = \frac{36}{100} \cdot \frac{16}{100} = 0.0576$

La probabilidad de que esté en paro y sea mujer es del **0.0576**.

b) $.P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) = \frac{64}{100} \cdot \frac{12}{100} + \frac{36}{100} \cdot \frac{16}{100}$ = 0.0768 + 0.0576 = 0.1344

La probabilidad de que una persona esté en paro es del **0.1344**

c) $P(A_2/B) = \frac{P(B \cap A_2)}{P(B)} = \frac{P(A_2) \cdot P(B/A_2)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)} = \frac{0.0576}{0.1344} = 0.4286$

Una persona nos ha confesado estar en paro, la probabilidad de que sea mujer es del 0.4286,

Problema 10:

De los estudiantes universitarios, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente.

a) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que lo definen pero sin hacer los cálculos finales).

b) *(1 punto)* ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

Solución

El experimento aleatorio *"seleccionar un estudiante universitario al azar y observar si abandona sus estudios"* es una prueba de Bernoulli.

Sea *"éxito"* = *"el estudiante elegido al azar abandona sus estudios"* $p = \frac{1}{5}$

Se repite 5 veces este experimento. Las pruebas son independientes.

Entonces la variable aleatoria X = *"nº de éxitos"* = *"número de estudiantes universitarios que abandonan sus estudios",* es una variable binomial

$$X = B\left(5, \frac{1}{5}\right) \text{ con función de probabilidad } P(X = k) = \binom{5}{k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$$

a) $P(\text{“uno o ningún estudiante abandone sus estudios”}) = P(X = 1) + P(X = 0) =$

$$= \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 + \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{256}{625} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1024}{3125} = \frac{1280 + 1024}{3125} = \frac{2304}{3125}$$

$$P(\text{“uno o ningún estudiante abandone sus estudios”}) = \frac{2304}{3125} = \mathbf{0.7373}$$

b) $P(\text{“ ningún estudiante abandone sus estudios”}) = P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{1\,024}{3\,125} = 0.3277$

$P(\text{“todos los estudiantes abandonen sus estudios”}) = P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{3\,125} = 0.00032$

Es más probable que ningún estudiante abandone sus estudios

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas.
El estudiante debe indicar claramente en la primera página del tríptico, cuáles han sido las preguntas elegidas.
(Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar). Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
TIEMPO: 1 hora y 30 minutos.

Problema 1:

Dados las matrices $A = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix} = y\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ siendo a un número real cualquiera

a) (1,25 puntos) Discuta el sistema $AX = B$ según los valores del parámetro a.

b) (0,75 puntos) Resuelva el sistema cuando $a = 1$

Problema 2:

Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las tres mascarillas es de 0,90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.

Problema 3:

Resuelva la ecuación matricial $XA + XA^t = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Problema 4:

Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano

$$\pi: 2x - y + 3z - 1 = 0$$

Problema 5:

Calcule el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{2/tg(x)}$

Problema 6:

Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base $\boldsymbol{y}$ metros y altura $\boldsymbol{x}$ metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo)

Su superficie se desea que sea de $\mathbf{4} + \boldsymbol{\pi}\, m^2$. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de modo que se cumpla este requisito.

Problema 7:

Dada la siguiente función $f(x) = \frac{-x^2}{2} + 2ln(x+1)$

a) *(0,25 puntos)* Calcule el dominio de f .

b) *(1,75 puntos)* Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento

Problema 8:

Calcule la siguiente integral $\int x^3 e^{x^2} dx$

Problema 9:

En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudientes de 2º de bachuller de un centro acerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80% disponía de ordenador, el 15% disponía de móvil y el 10% disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro

a) *(1,25 puntos)* Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos)

b) *(1,75 puntos)* Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusise de ninguno de los dispositivos mencionados.

Problema 10:

Un estudiante universitario de matemáticas ha comprobado que el tiempo que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) *(0,75 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?
b) *(0,75 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?
c) *(0,5 puntos)* El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a la clase?

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valore de $P(Z \le k)$ para una distribución $N(0,1)$. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

Problema 1:

Dados las matrices $A = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix} y\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ siendo a un número real cualquiera

a) Discuta el sistema $AX = B$ según los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema cuando $a = 1$

Solución

a) Compararemos los rangos de las matrices del sistema

$A = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ de coeficientes y $A{:}B = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & a & 2 & a \end{pmatrix}$ ampliada

$$Det\ A = \begin{vmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} a-3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -a(-2a+2)$$

$$Det\ A = -a(-2a+2) = 0 \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad o \quad a = 1$$

- Si $a \neq 0,\ 1$ $\Longrightarrow DetA \neq 0 \Rightarrow rgA = rg\ A{:}B = 3$ ya que $Det\ A$ es un menor de orden 3 (máximo posible) tanto de A como de $A{:}B$ y este rango común coincide con el número de incógnitas $\underbrace{\Rightarrow}_{T.Rouché-Fröbenius}$ El sistema es compatible determinado

- Si $a = 0$ $rgA \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A{:}B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

El menor de A y $A{:}B$: $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \quad rgA = 2$ y $rg\ A{:}B \geq 2$

La segunda columna de $A{:}B$ es el vector cero$\Rightarrow$ los menores de $A{:}B$ *(los subíndices denotan las columnas que los definen)* $M_{123} = M_{124} = M_{234} = 0$ y el único de orden 3 que no la contiene es

$$M_{134} = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4 + 4 - 4 - 0 - 6 = -2 \neq 0 \Rightarrow rg\ A{:}B = 3$$

$rgA = 2 \neq rg\ A{:}B = 3$ $\underbrace{\Rightarrow}_{T.\ de\ Rouché-Fröbenius}$ El sistema es incompatible

Si $a = 1$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad rgA \neq 3$. El menor de A : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \quad rgA = 2$

$$A{:}B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F1 \leftrightarrow F3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{F2'=F2+F1 \\ F3'=F3-2F1}}$$

$$\underbrace{\sim}_{\substack{F2'=F2+F1 \\ F3'=F3-2F1}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F3''=F3'+2F2'} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tanto A como $A{:}B$ tienen solo dos vectores fila linealmente independientes, luego:

$rgA = rg\ A{:}B = 2 <$nº incógnitas $\underbrace{\Rightarrow}_{T.\ de\ Rouché-Fröbenius}$ El sistema es compatible indeterminado

Si $a \neq 0,\ 1$ → El sistema es compatible determinado. Si $a = 0$ → El sistema es incompatible. Si $a = 1$ → El sistema es compatible indeterminado

b) Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Por la forma de estudiar el rango de la matriz $A{:}B$, tenemos en el último paso del apartado anterior, los coeficientes y términos independientes de un sistema triangular equivalente a $AX = B$:

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Las infinitas soluciones las obtenemos fijando el valor de $z = \alpha$:

$$\begin{cases} x = -1 + 2\alpha \\ y = 0 \qquad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$$

Problema 2:

Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las tres mascarillas es de 0.90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.

Solución:

Sean: x = "precio de una mascarilla quirúrgica desechable" y = ""precio de una mascarilla higiénica" z = "precio de una mascarilla quirúrgica reutilizable"

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 0{,}90 \\ 30x + 20y + 10z = 56 \\ 20x \qquad + \quad 25z = 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 0.90 \\ 30x + 20y + 10z = 56 \\ 20x \qquad + \quad 25z = 31 \end{cases} \underbrace{\sim}_{E1' = 30E1} \begin{cases} 10x + 10y + 10z = 27 \\ 30x + 20y + 10z = 56 \\ 20x \qquad + \quad 25z = 31 \end{cases}$$

Utilizamos la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\det A = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 30 & 20 & 10 \\ 20 & 0 & 25 \end{vmatrix} = 10.10.5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 500(10 + 4 + 0 - 8 - 0 - 15) = -4500 \neq 0$$

Utilizamos la regla de Cramer para encontrar la solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 27 & 10 & 10 \\ 56 & 20 & 10 \\ 31 & 0 & 25 \end{vmatrix}}{Det\ A} = \frac{-3600}{-4500} = 0.80 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 27 & 10 \\ 30 & 56 & 10 \\ 20 & 31 & 25 \end{vmatrix}}{Det\ A} = \frac{-5850}{-4500} = 1.3 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 10 & 27 \\ 30 & 20 & 56 \\ 20 & 0 & 31 \end{vmatrix}}{Det\ A} = \frac{-2700}{-4500} = 0.60$$

Cada mascarilla quirúrgica desechable tiene un precio de **0.80 €,** cada mascarilla higiénica **1.30 €** y cada mascarilla quirúrgica reutilizable **0.60 €**.

Problema 3:

Resuelva la ecuación matricial $XA + XA^t = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución

$$XA + XA^t = B \Leftrightarrow X(A + A^t) = B \underbrace{\Longrightarrow}_{Si\ \exists(A+A^t)^{-1}} X(A + A^t)(A + A^t)^{-1} = B(A + A^t)^{-1} \underbrace{\Longrightarrow}_{Si\ \exists(A+A^t)^{-1}}$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{Si\ \exists(A+A^t)^{-1}} X.I = B(A + A^t)^{-1} \underbrace{\Longrightarrow}_{Si\ \exists(A+A^t)^{-1}} X = B(A + A^t)^{-1}$$

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A + A^t| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \exists(A + A^t)^{-1}$$

$$Adj\ (A + A^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A + A^t)^{-1} = \frac{1}{Det(A+A^t)} (Adj\ (A + A^t))^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = B(A + A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Problema 4:

Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano

$$\pi: 2x - y + 3z - 1 = 0$$

Solución

Sea π_1 el plano buscado. Cualquier punto de r es también un punto del mismo:

Para $z = 0$:

$\begin{cases} 3x + y + 1 \quad = 0 \\ -2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x - 1 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow P\ (1, -4, 0)$ es un punto de $r \cap \pi_1$

El vector $\vec{n} = (2, -1, 3)$ asociado al plano π es una dirección de π_1 así como el vector director de la recta r : $\vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (3, -5, 1)$

π_1 está determinado por el punto P y estas dos direcciones:

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x - 1 & y + 4 & z \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1: 14(x - 1) + 7(y + 4) - 7z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_1: 2(x - 1) + (y + 4) - z = 0 \Rightarrow \pi_1: 2x + y - z + 2 = 0$$

π_1: $\mathbf{2x + y - z + 2 = 0}$ es la ecuación general del plano buscado

Problema 5:

Calcule el siguiente límite: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{2}{tgx}\cdot((1+x)-1)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{2x}{tgx}} = e^{\frac{0}{0}} \underbrace{=}_{L'Hôpital} e^{\lim_{x\to 0}\frac{2}{1+tg^2x}} = e^2$$

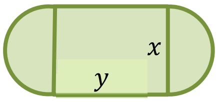
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/tg(x)} = \boldsymbol{e^2}$$

Problema 6:

Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base $\boldsymbol{y}$ metros y altura $\boldsymbol{x}$ metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo)

Su superficie se desea que sea de $\boldsymbol{4+\pi}\ m^2$. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de modo que se cumpla este requisito.

Solución



La función que debe ser mínima es $L(x) = 2x + 2y + 2\pi\frac{x}{2} = (2+\pi)x + 2y$

El área del recinto = $xy + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 4 + \pi$

Podemos obtener y en función de x: $y = \frac{1}{x}\left(4 + \pi - \frac{\pi x^2}{4}\right) = \frac{16+4\pi-\pi x^2}{4x}$

Sustituyendo

$$L(x) = (2+\pi)x + 2\frac{16+4\pi-\pi x^2}{4x} = \frac{2x(2+\pi)x+16+4\pi-\pi x^2}{2x} = \frac{(\pi+4)x^2+4(\pi+4)}{2x} = (\pi+4)\frac{x^2+4}{2x}$$

Calculemos las derivadas primera y segunda de L(existen en $\mathbb{R}-\{0\}$)

$$L'(x) = (\pi+4)\frac{4x^2-2(x^2+4)}{4x^2} = (\pi+4)\frac{2x^2-8}{4x^2} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}-\{0\}$$

$$L''(x) = (\pi+4)\frac{16x^3-(2x^2-8)8x}{16x^4} = (\pi+4)\frac{64x}{16x^4} = (\pi+4)\frac{64}{16x^3} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}-\{0\}$$

Determinemos los posibles valores críticos:

$$L'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \qquad L''(2) = (\pi+4)\frac{32}{16\,.2^3} > 0$$

Luego, si $x = 2$ la función L es mínima y en este caso $y = \frac{16+4\pi-\pi 2^2}{4.2} = 2$

Tanto x como y deben medir 2 m

El gasto de pintura es mínimo si tanto x como y miden $\boldsymbol{2\ m}$

Problema 7:

Dada la siguiente función $f(x) = \frac{-x^2}{2} + 2ln(x+1)$

a) Calcule el dominio de f .

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento

Solución

a) $Dom\ f = \{x \in \mathbb{R}/x+1>0\} = (-1,\infty)$

$$Dom\ f = (-1,\infty)$$

b) La función es derivable en su dominio y además

$$f'(x) = \frac{-2x}{2} + \frac{2}{x+1} = -x + \frac{2}{x+1} = \frac{-x^2-x+2}{x+1}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2} = \frac{1\pm 3}{-2} = \begin{cases} -2 \notin Domf \\ 1 \end{cases}$$

	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
$Signo\ f'$	+	0	-
$Monotonía\ de\ f$	*Creciente*	*Máximo relativo*	*Decreciente*

La función f es **creciente** en $(-\mathbf{1},\mathbf{1})$ y **decreciente** en $(\mathbf{1},\infty)$

El punto $\left(\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{+\ln 4}\right)$ es un **máximo** relativo.

Problema 8:

Calcule la siguiente integral $\int x^3 e^{x^2} dx$

Solución

Utilizamos el método de integración por partes $\int u dv = uv - \int v du$

I	$u = x^2$	$du = 2xdx$
	$v = \int x e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} = *$	$dv = x e^{x^2} dx$

$$I = x^2 \frac{e^{x^2}}{2} - \int 2x \frac{e^{x^2}}{2} dx = x^2 \frac{e^{x^2}}{2} - \int x\, e^{x^2} dx \underbrace{=}_{*} x^2 \frac{e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + C$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 1) + C$$

Problema 9:

En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudientes de 2º de bachiller de un centro acerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80 % disponía de ordenador, el 15 % disponía de móvil y el 10 % disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro

a) Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos)

b) Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusise de ninguno de los dispositivos mencionados.

Solución

a) Sean los sucesos: A = “el alumno dispone de ordenador”

B = “el alumno dispone de móvil”

$P(\text{“}\textit{el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos}\text{”}) = P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{80}{100} + \frac{15}{100} - \frac{10}{100} = \frac{85}{100} = 0.85$$

$P(\text{“el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos”}) = 0.85.$

b) $P(\text{“}\textit{el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos}\text{”}) = P(A^c \cap B^c)$

Por las leyes de Morgan y las propiedades de la probabilidad:

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.85 = 0.15$$

$P(\text{“el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos”}) = 0.15.$

Problema 10:

Un estudiante universitario de matemáticas ha comprobado que el tiempo que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?

c) El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a la clase?

Solución

Sea X la variable que representa el tiempo empleado por el estudiante en llegar desde su casa a la universidad. $X = N(30, 5)$

a) P (“*tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad*”) = $P(X < 40)$

Para poder calcular esta probabilidad, normalizamos X:

$$P(X < 40) = P\left(\frac{X-30}{5} < \frac{40-30}{5}\right) = P(Z < 2) = 0.9772$$

P (“tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad”) = **0.9772**

b) P (“*tarde de que tarde entre 20 y 40 minutos*”) = $P(20 \le X \le 40)$

$$P(20 \le X \le 40) = P\left(\frac{20-30}{5} \le \frac{X-30}{5} \le \frac{40-30}{5}\right) = P(-2 \le Z \le 2) =$$

$$= P(Z \le 2) - P(Z \le -2) = P(Z \le 2) - \big(1 - P(Z < 2)\big) = 2P(Z \le 2) - 1$$

$$P(20 \le X \le 40) = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$

P (“tarde de que tarde entre 20 y 40 minutos”) = **0.9544**.

c) P (“*llegue tarde a clase*”) = $P(X > 40)$

$$P(X > 40) = 1 - P(X \le 40) \underbrace{=}_{P(X=40)=0} 1 - P(X < 40) \underbrace{=}_{a)} 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$P(X > 40) = 0.0228$$

P (“llegue tarde a clase”) = **0.0228**.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? (1.25 puntos)

b) Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente, un 50 %, un 80 % y un 75 % de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo. (1.25 puntos)

Bloque 1.B Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Discute el rango de A según los valores de $m \in \mathbb{R}$. (1 punto)

b) ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A \cdot X = B$? (0.5 puntos)

c) Calcula la matriz X del apartado anterior para $m = 0$. (1 punto)

Bloque 2.A Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

a) Halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y, si existen, los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión. (1 punto)

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Esboza una gráfica de la función. (1 punto)

c) Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$. (0.5 puntos)

Bloque 2.B Sea la función $f(x) = 4 - x^2$

a) Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área. (1 punto)

b) La gráfica de la función $g(x) = 3x^2$ divide D en tres partes D_1, D_2 y D_3. Haz un dibujo de los tres recintos. (0.75 puntos)

c) Calcula el área del recinto D_2 que contiene al punto $P(0, 1)$. (0.75 puntos)

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

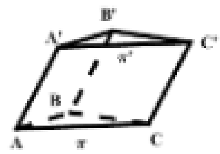
Bloque 3.A Dados el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

a) Calcula un vector director de la recta r. (0.75 puntos)

b) La ecuación del plano π que contiene al punto A y a la recta r. (0.75 puntos)

c) La ecuación de la recta s contenida en π que pasa por A y es perpendicular a r. (1 punto)

Bloque 3.B Sea el prisma triangular(triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1,0,0)$, $B'(-1,2,2)$, $C(0,3,0)$ y $C'(0,4,2)$. Y los planos π, al que pertenecen los puntos A,B,C y π', al que pertenecen los puntos A',B',C'. Calcula:



a) Las coordenadas de los puntos restantes: A', B. (0.75 puntos)

b) La distancia entre los planos π y π'. (0.75 puntos)

c) El volumen del prisma triangular. (1 punto)

Bloque 4.A En un espacio muestral se tienen dos sucesos: A y B. Se conocen las siguientes probabilidades:
$P(A \cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ y $P(\overline{A}) = 0.2$ ($\overline{A}$ suceso contrario). Calcula:

a) $P(B/A)$. (1 punto)

b) $P(B)$. (1 punto)

c) ¿Son los sucesos independientes? (0.5 puntos)

Bloque 4.B Los 5 defensas, 3 medios y 2 delanteros de un equipo de fútbol se entrenan lanzando penaltis a su portero. Los defensas marcan gol la mitad de las veces, los medios las 2/3 partes de las veces y los delanteros las 3/4 partes de las veces.

a) Se elige un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que meta el penalti? (1.25 puntos)

b) Se supone que la probabilidad del apartado anterior es del 60 %. El equipo realiza en una semana 600 lanzamientos. En cada lanzamiento se elige un jugador al azar y regresa al grupo pudiendo ser elegido nuevamente. Calcula la probabilidad de que como mucho se metan 400 goles aproximando la distribución por una normal. (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(3.25) = 0.9994$, $F(3.2917) = 0.9995$, $F(3.3333) = 0.9996$, $F(3.375) = 0.9996$, $F(3.4167) = 0.9997$)

Bloque 1.A.

Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora?

b) Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente, un 50 %, un 80 % y un 75 % de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo.

Solución:

a) Sean x: "precio del libro", y: "precio de la calculadora", z: "precio del estuche". Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(y+z)+y+z=57 \\ x=2(y+z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y+3z=57 \\ x=2(y+z) \end{cases}$$

Sistema lineal de dos ecuaciones y tres incógnitas. Sistema compatible indeterminado.

Resolvemos por sustitución.

$$\begin{cases} y+z=\dfrac{57}{3}=19 \\ x=2\cdot 19=38 \end{cases}$$

Sí, es posible determinar el precio del libro, que es de **38 €.**

No es posible determinar el precio de la calculadora. Sólo podemos estimar que el precio de la calculadora + estuche son 19 €.

b) Planteamos el nuevo sistema

$$\begin{cases} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \\ 0.5\,x+0.8y+0.75z=34 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y+z=19 \\ x=2(y+z) \\ 19+0.8(19-z)+0.75z=34 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y+z=19 \\ x=2(y+z) \\ 0.05z=0.2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=38 \\ y=15 \\ z=4 \end{cases}$$

Los precios iniciales de cada uno de los artículos son:

$x=\mathbf{38}$ **€** del libro, $y=\mathbf{15}$ **€** de la calculadora, $z=\mathbf{4}$ **€** del estuche

Bloque 1.B.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Discute el rango de A según los valores de $x \in R$.

$b)$ ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible resolver la ecuación $A \cdot X = B$?

$c)$ Calcula la matriz X del apartado anterior para $m = 0$.

Solución:

a) Calculamos el determinante de la matriz A

$$A=\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3m^2 + 3m + 2 - [3m + 3 + 2m^2] = m^2 - 1$$

- Si $m^2 - 1 \neq 0$, entonces $R(A) = 3$, es decir, $R(A) = 3\ si\ m \neq 1\ y\ m \neq -1$.
- Si $m = 1$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces $|1| \neq 0$, $R(A) > 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, $R(A) \geq 2\ puesto\ que\ |A| = 0$ entonces $R(A) = 2$.

- Si $m = -1$

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces $|3| \neq 0$, $R(A) \geq 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, $R(A) \geq 2\ por\ tanto\ R(A) = 2$.

$R(A) = 3\ si\ m \neq 1\ y\ m \neq -1$. Y si $m = 1$ o $m = -1$ entonces $R(A) = 2$.

b) Para que sea posible $A \cdot X = B$, X debe tener 3 filas para que se pueda multiplicar (filas x columnas), y para que el resultado sea 2 columnas X debe tener 2 columnas.

X debe ser una matriz de 3 filas y 2 columnas

c) Para $m = 0$, $A \cdot X = B$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $|A| = 0^2 - 1 = 1$ por tanto, existe A^{-1}. Entonces

$$A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1} \cdot B;\ A^{-1}(A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = I \cdot X = X;\ X = A^{-1} \cdot B$$

Siendo A^{-1} matriz inversa de A.

- Si $m = 0$.

$$A=\begin{pmatrix}0&1&3\\1&0&2\\1&0&3\end{pmatrix}\rightarrow A^t=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\3&2&3\end{pmatrix}\rightarrow Ad(A^t)=\begin{pmatrix}0&-3&2\\-1&-3&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

Siendo I matriz unidad 3x3.

$$A^{-1}=\frac{I}{|A|}Adj(A^t)$$

$$X=\begin{pmatrix}0&3&-2\\1&3&-3\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2\\1&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-4\\8&-4\\-2&2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}5&-4\\8&-4\\-2&2\end{pmatrix}$$

Bloque 2.A.

Sea la función $f: R \to R, f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

$a)$ Halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y, si existen, los máximos y mínimos y los puntos de inflexión.

$b)$ Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Esboza una gráfica de la función.

$c)$ Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) *La función* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ es un polinomio y por tanto es continua en $\mathbb{R}$, así como sus funciones derivadas primera y segunda

$$f(x) = x(x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$f'(x) = 0 \to x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \to x_1 = 3, x_2 = 1$$

$$f''(x) = 3(2x - 4)$$

$$f''(1) = -6 < 0 \; es\ un\ máximo\ relativo$$

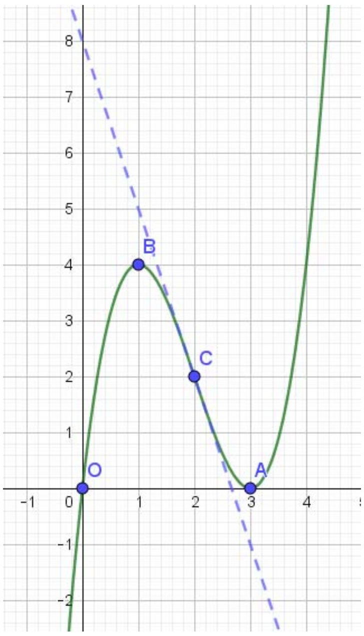
$$f''(3) = 6 > 0 \; es\ un\ mínimo\ relativo$$

$$f''(2) = 0 \; es\ un\ punto\ de\ inflexión$$

Los puntos de corte son:

- Para OX: *y = 0, x = 0, x = 3*
- Para OY: *x = 0, y = 0, O(0, 0), P(0, 3)*

Puntos de corte: A(3, 0); O(0, 0); Máximo relativo: B(1, 4).
Mínimo relativo: A(3, 0). Punto de inflexión: C(2, 2).



b) Estudiamos el signo de la derivada primera.

Signo de *f'*.

$$f'(0) = 9 > 0, f'(2) = -3 < 0; f'(4) > 0$$

- Si $x < 1, f' > 0, f$ es creciente.
- Si $1 < x < 3, f' > 0, f$ es decreciente.
- Si $x > 3, f' > 0, f$ es creciente.

Por tanto, tiene un máximo relativo en $\left(1, f(1)\right) = (1, 4)$.

Tiene un mínimo relativo en $\left(3, f(3)\right) = (3, 0)$.

- Si $x = 2, f''(x) = 3(2\text{x} - 4); f''(x) = 0$.
- Si $x < 2, f''(x) < 0, f$ es convexa, curva debajo de la tangente.

- Si $x > 2$, $f''(x) > 0$, f es cóncava, curva encima de la tangente.

Por tanto, tiene un punto de inflexión en $\left(2, f(2)\right) = (2, 2)$.

c) Calculo la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

$$tg\ en\ x = 2 \begin{cases} pasa\ por\ \left(2, f(2)\right) = (2{,}2) \\ pendiente\ f'(2) = 3(4 - 8 + 3) = -3 \end{cases}$$

$$tg: y - 2 = -3(x - 2) \rightarrow y = -3x + 8$$

$$y = -3x + 8$$

Bloque 2.B.

Sea la función $f(x) = 4 - x^2$.

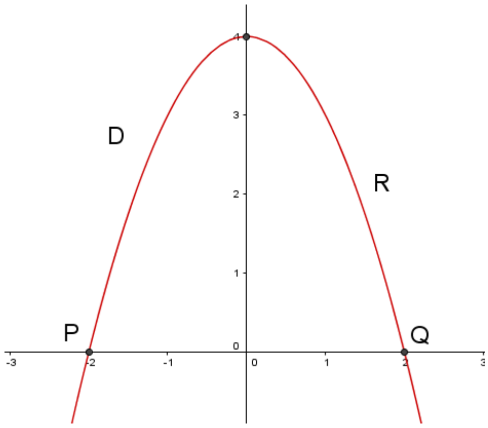
$a)$ Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área.

$b)$ La gráfica de la función $g(x) = 3x^2$ divide D en tres partes, D_1, D_2 y D_3. Haz un dibujo de los tres recintos.

$c)$ Calcula el área del recinto D_2 que contiene al punto $P(0, 1)$.

Solución:

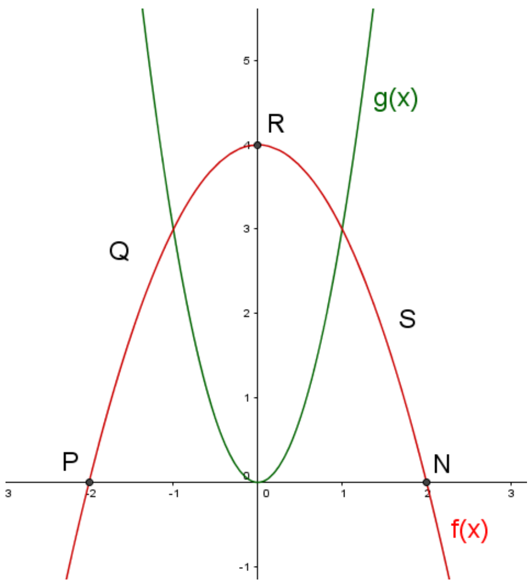
a) $f(x) = 4 - x^2, es$ una parábola de eje vertical, ramas hacia abajo, vértice en (0, 4), simetría en eje Y, corte con OX en $y = 0, x = \pm 2, x = -2$.



$$D = PRQ = Área\ D = 2 \cdot Área\ ORQ = 2\int_0^2 f(x)dx = 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}u^2$$

$$Área = \frac{32}{3}u^2 \cong 10.67\ u^2$$

b) La gráfica de la función $g(x) = 3x^2$ es otra parábola



Parábola eje vertical, ramas hacia arriba, y vértice en (0, 0), simétrica en eje Y.

$$Cortes \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = 3x^2 \\ 4 = 4x^2 \end{cases} \rightarrow x = \pm 1$$

$$D_1 = POQ, \quad D_2 = QOSR, \quad D_3 = ONS$$

c) $P(0, 1)$ pertenece a D_2.

$$\acute{A}rea = \int_{-1}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)dx =^{(1)} 2\int_{0}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)dx = 2 \cdot \int_{0}^{1} (4 - x^2 - 3x^2)dx =$$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{1} (4 - 4x^2)dx = 2\left(4x - 4 \cdot \frac{x^3}{3}\right)_{0}^{1} = 2 \cdot \left(4 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{1}{3}\right) = \left(4 - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{3}u^2$$

(1) porque ambas son simétricas eje Y.

$$\acute{A}rea = \frac{16}{3}u^2 = 5.33\, u^2$$

Bloque 3.A.

Dados el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r: \begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$:

$a)$ Calcula el vector director de la recta r.

$b)$ La ecuación del plano π que contiene al punto A y a la recta r.

$c)$ La ecuación de la recta s contenida en π que pasa por A y es perpendicular a r.

Solución:

a) Llamamos $y=\lambda$

$$r\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$$

$$El\ vector\ de\ dirección\ es\!: \overrightarrow{V_r}=(1,-1,1) \text{ o } (-1,1,-1)$$

b) Para que el plano contenga a la recta debe contener a los vectores formados con puntos de la recta.

$$\pi: contiene\ A(2,1,1), y\ r \iff contiene\ a\ A(2,1,1), P(0,2,-2), Q(1,1,-1)$$

$$\iff \overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AP}+s\overrightarrow{AQ},\ Ecuación\ paramétrica$$

$$\overrightarrow{AP}=(0-2,2-1,-2-1), \overrightarrow{AQ}=(-1,0,-2)$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & -3 & -2 \end{vmatrix}=0 \iff -2(x-2)-1(y-1)+1(z-1)=0$$

$$\mathbf{2x+y-z-4=0}\ \ ecuación\ general$$

c) La recta s está contenida en *π*, pasa por *A,* es perpendicular a *r.*

$\overrightarrow{V_S}$ deber ser perpendicular a *r* y perpendicular a $\overrightarrow{V_\pi}$ (rectos directamente de π) por tanto,

$$\overrightarrow{V_S}=\overrightarrow{V_R}\wedge\overrightarrow{V_\pi}\ producto\ vectorial$$

$$\overrightarrow{V_S}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(0,-3,-3)$$

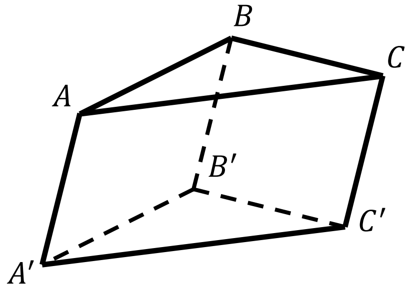
$$\overrightarrow{A_x}=t(0,-3,-3) \rightarrow (x-2,y-1,z-1)=t(0,-3,-3)$$

Su vector de dirección es $(0,-3,-3)$ o bien: $(0,1,1)$ y pasa por $A(2,1,1)$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases} \text{ ecuación paramétrica Ecuación implícita:} \begin{cases} x=2 \\ y-z=0 \end{cases}$$

Bloque 3.B.

Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura adjunta, con $A(1,0,0), B'(-1,2,2), C(0,3,0)$ y $C'(0,4,2)$. Y los planos π, al que pertenecen los puntos A, B y C y π' al que pertenecen los puntos A', B' y C'. Calcula:



$a)$ Las coordenadas de los puntos restantes: A' y B.

$b)$ La distancia entre los planos π y π'.

$c)$ El volumen del prisma triangular.

Solución:

$a)$ $A(1,0,0), A'(a,b,c), B(r,s,t), B'(-1,2,2), C(0,3,0)$ y $C'(0,4,2)$

Si el triángulo ABC es igual y paralelo a $A'B'C'$ entonces

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \rightarrow (a-1, b-0, c-0) = (0,1,2) \Rightarrow a = 1, b = 1, c = 2$$

Las coordenadas del punto A' son A' *(1, 1, 2)*.

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} \rightarrow (-1-r, 2-s, 2-t) = (0,1,2) \Rightarrow r = -1, s = 1, t = 0$$

Las coordenadas del punto B son B *(−1, 1, 0)*.

$$A'\ (1, 1, 2).\ B\ (-1, 1, 0).$$

b) Los planos π y π′ son paralelos.

$$d = (\pi, \pi') = d(B', \pi) = \frac{\pi\ (B')}{\sqrt{1}} = \frac{2}{\sqrt{1}} = 2u^2$$

$$\pi - \overrightarrow{AX} = t\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y-0 & 1 & 3 \\ z-0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -7(z-0) = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$d = (\pi, \pi') = 2\ u$$

$$c)\ V(prisma) = (Área\ de\ la\ base\ ABC) \cdot Altura = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5\ u^3$$

$$Área\ del\ triángulo\ ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot d(C, recta\ AB) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-5) = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + (-s)^2} = \frac{5}{2}u^2$$

Para calcular el volumen se toma la mitad del paralelepípedo

$$V = \frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-2) + 0 - [-12] = \frac{10}{2}u^3 = 5\ u^3$$

$$V = \mathbf{5\ u^3}$$

Bloque 4.A.

En un espacio muestral se tienen dos sucesos A y B. Se conocen las siguientes probabilidades: $P(A\cap B)=0.3$; $P(A/B)=P(B/A)\ y\ P(\overline{A})=0.2$. Calcula:

$a)$ $P(B/A)$.

$b)$ $P(B)$.

$c)$ ¿Son los sucesos independientes?

Solución:

Se conocen las siguientes probabilidades: $P(A\cap B)=0.3$; $P(B|A)=P(A|B)$; $P\ (\overline{A})=0.2$

a) Cálculo de $P(B|A)$.

Por definición de probabilidad condicionada:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.3}{0.8}=\frac{3}{8}$$

Si $P\ (\overline{A})=0.2$, $P(A)=1-P\ (\overline{A})=0.8$

$$\boldsymbol{P(B|A)=\frac{3}{8}}.$$

b) $P(B)$

$$P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)\Rightarrow 0.3=\frac{3}{8}\cdot P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{0.3}{0.8}=\frac{3}{8}=0.8$$

$$P(B)=\mathbf{0.8}$$

c) ¿Son los sucesos independientes?

Dos sucesos son independientes si: Si $P(A|B)=P(A)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$P(A)=0.8$; $P(B)=0.8$

$$P(A)\cdot P(B)=0.8\cdot 0.8=0.64\neq 0.3=P(A\cap B)$$

Los sucesos NO son independientes.

Bloque 4.B.

Los 5 defensas, 3 medios y 2 delanteros de un equipo de fútbol se entrenan lanzando penaltis a su portero. Los defensas marcan gol la mitad de las veces, los medios 2/3 de las veces y los delanteros 3/4 de las veces.

a) Se elige un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que meta el penalti?

b) Se supone que la probabilidad del apartado anterior es del 60 %. El equipo realiza en una semana 600 lanzamientos. En cada lanzamiento se elige un jugador al azar y regresa al grupo pudiendo ser elegido nuevamente. Calcula la probabilidad de que como mucho se metan 400 goles aproximando la distribución por una normal.

Solución:

a) Sean los sucesos:

- *A: ser defensa*
- *B: ser medio*
- *C: ser delantero*
- *G: meter gol*
- *NG: no meter gol*

$$P(A) = \frac{1}{2}\ P(B) = \frac{3}{10}\ P(C) = \frac{2}{10};\ P(G|A) = \frac{1}{2}, P(G|B) = \frac{2}{3}, P(G|C) = \frac{3}{4}$$

$$P(M|N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)}\ definición\ de\ probabiliad\ condicionada$$

$$G = G \cap A + G \cap B + G \cap C\ \Rightarrow P(G)$$

$$P(G) = P(G \cap A) + P(G \cap B) + P(G \cap C) = P(G|A) \cdot P(A) + P(G|B) \cdot P(B) + P(G|C) \cdot P(C) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{3}{20} = \frac{12}{20} = 0.6$$

La probabilidad de que meta el penalti es **0.6**.

b) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características: $p = P(A) = 0.6;\ q = P(\overline{A}) = 0.4;\ n = 600.$

Transformamos la distribución binomial en normal: $\mu = n \cdot p = 600 \cdot 0.6 = 360.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{600 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = \sqrt{144} = 12.$ Tipificando la variable: $X \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-400}{12}.$

Consideramos la corrección de Yates:

$$P = P(X \leq 400) = P(X < 400.5) = P\left(Z < \frac{400.5 - 360}{12}\right) = P\left(Z < \frac{40.5}{12}\right) = P(Z < 3.375) = 0.9996.$$

La probabilidad de que como mucho se metan 400 goles es **0.9996**

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rcrl} x & + & y & = a \\ (2-a)x & + & 2y & = 1 \\ ax & & & = a \end{array}\right. \qquad a \in \mathbb{R}$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a. (1.5 puntos)

b) Resuélvelo cuando sea posible. (1 punto)

Bloque 1.B Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}$

a) Calcula su determinante aplicando sus propiedades y estudia cuándo es invertible la matriz. (1.5 puntos)

b) Para $x = 1$, calcula su inversa. (1 punto)

Bloque 2.A Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$

a) Estudia y calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1.25 puntos)

b) Halla, si existen: máximos y mínimos relativos y calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0.75 puntos)

c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

Bloque 2.B Calcula:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x\,e^x}{x^2 - 2\cos(x) + 2}$ (1.25 puntos)

b) Una primitiva de la función $f(x) = x\cos(x) - e^{-x}$ cuya gráfica pase por el punto $(0, 3)$. (1.25 puntos)

Universidad de Oviedo
Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad
2019-2020

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

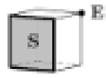
Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

Bloque 3.A Sean $A(2,1,0)$, $B(5,5,0)$ y $C(2,1,5)$ tres vértices de la cara S de un cubo (cuadrados iguales) y $E(-2,4,0)$ un vértice de la cara opuesta. Se pide:

a) El cuarto vértice D de la cara S. (1 punto)

b) La ecuación del plano π que contiene la cara opuesta de S. (1 punto)

c) ¿Cuál es el vértice de la cara S adyacente a E? (0.5 puntos)



Bloque 3.B Dados dos planos $\begin{cases} \pi \;:\; x+y-2z=3 \\ \pi' \;:\; x-z=5 \end{cases}$. Sea P un punto de π cuya proyección ortogonal sobre π' es el punto $A(5,1,0)$

a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r que une P y A. (1.5 puntos)

b) Calcula el punto P. (1 punto)

Bloque 4.A En un curso de un instituto hay tres clases: la clase A con 50 alumnos, la clase B con 30 y la clase C con 20. Cada clase tiene un profesor distinto de matemáticas. Con el profesor de la clase A aprueban el 40 % de los alumnos, con el de la clase B el 50 % y con el de la clase C el 75 % de los alumnos. Se coge al azar un alumno del curso. Calcula:

a) La probabilidad de que el alumno haya aprobado matemáticas. (1.25 puntos)

b) Sabiendo que ha aprobado, cuál es la probabilidad de que sea de la clase B. (1.25 puntos)

Bloque 4.B En una pumarada la producción en kilogramos de cada manzano sigue una distribución normal de media $\mu = 50$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

a) La proporción de árboles que dan entre 30 y 60 kilogramos. (1.25 puntos)

b) El número de kilogramos por árbol a los que no llegan o igualan el 60 % de los árboles. (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(2) = 0.9772$, $F(1) = 0.8413$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.2533) = 0.6$, $F(0.5244) = 0.7$, $F(0.8416) = 0.8$)

Bloque 1.A.

Dado el sistema $\begin{cases} x+y=a \\ (2-a)x+2y=1 \\ ax=a \end{cases}, a \in R.$

$a)$ Estudia la compatibilidad según los valores de a.

$b)$ Resuélvelo cuando sea posible.

Solución:

a) Para estudiar su compatibilidad según los valores de a resolvemos el sistema por sustitución.

$$\begin{cases} x+y=a \\ (2-a)x+2y=1 \\ ax=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=a-x \\ (2-a)x+2(a-x)=1 \\ ax=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=ax \\ -ax=1-2a \\ ax=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=a-x \\ x=\dfrac{1-2a}{-a} \\ ax=a \end{cases}$$

- Si $a \neq 0$, para que exista solución del sistema.

$$\begin{cases} - \\ x=1 \end{cases} \quad x=\frac{1-2a}{-a} \to \frac{1-2a}{-a}=1 \quad \to \begin{cases} a=1 \end{cases} \begin{cases} x+y=1 \\ - \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow y=0$$

Sistema compatible determinado.

- Si $a=0$,

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=1 \\ 0\cdot x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Sistema incompatible.

Si $a \neq 0$, Sistema compatible determinado. Si $a=0$, Sistema incompatible.

b) *Resuélvelo cuando sea posible.*

- Si $a=1$,

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Para cualquier $a \neq 0$: $ax=a \to x=1.\ x+y=a \to y=a-x$

$$x=1; y=a-x$$

Bloque 1.B.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{pmatrix}$ $x \in R$:

$a)$ Calcula su determinante aplicando sus propiedades y estudia cuando es invertible la matriz.

$b)$ Para $x = 1$, calcula su inversa.

Solución:

a) Calcula su determinante aplicando sus propiedades y estudia cuándo es invertible la matriz.

$|A| = |B|$ El determinante de una matriz no varía si a una fila (o columna) se le suma una combinación lineal de las demás.

$A = \left(\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{array}\right) \Rightarrow B |A| = |B|$ El determinante de una matriz no varía si a una fila (o columna) se le suma una combinación lineal de las demás.

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 - C_1 & C_3 - C_1 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} x+1 & 0 & -3 \\ x & 0 & 2-2x \\ x & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un determinante es la suma de los elementos de una línea por sus adjuntos. Desarrollando por la segunda columna.

$$|\mathrm{B}| = 0 \cdot \mathrm{Adj} + 0 \cdot \mathrm{Adj} + (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ x & 2(1-x) \end{vmatrix} = 2(1-x^2) + 3x = -2x^2 + 3x + 2 = |A|$$

Si $-2x^2 + 3x + 2 \neq 0$ existe A^{-1}.

Si $-2x^2 + 3x + 2 = 0$ no existe.

$-2x^2 + 3x + 2 = 0$ entonces $x_1 = \frac{1}{1}$ y $x_2 = 2$. Por tanto,

$$\exists\ A^{-1} \text{ si y sólo sí, } x_1 \neq \frac{1}{1} \text{ y } x_2 \neq 2$$

b) Si $\mathrm{x} = 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - |A| = 2 + 2 + 0 - [-1 + 2 + 0] = 3; A^{-1} = Adj(A^t) \cdot \frac{1}{|A|}$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Bloque 2.A.

Dada la función $f(x)=\frac{2x^3+1}{x^2}$.

$a)$ Estudia y calcula su dominio de definición y sus asíntotas.

$b)$ Halla, si existen: máximos y mínimos relativos y calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$c)$ Haz un esbozo de su gráfica.

Solución:

a) La función$f(x)=\frac{2x^3+1}{x^2}=2x+\frac{1}{x^2}$ es una función racional, cociente de dos polinomios, por tanto, existe es continua y derivable menos cuando el denominador sea 0.

$$D(t)=\{x|\ x\in\mathbb{R}\ \ y\ \ x\neq 0\}$$

Asíntotas:

- Horizontales, para $y=k$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+1}{x^2}=\ +\infty$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+1}{x^2}=\ -\infty$; No existen.

- Verticales, para $x=k$.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=+\infty$$

Por tanto, $\boldsymbol{x}=0$, es una asíntota vertical.

- Oblicuas, para $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}2+\frac{1}{x^3}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(2x+\frac{1}{x^2}-2x\right)=0$$

Por tanto, $\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{x}$ es una asíntota oblicua

$\boldsymbol{x}=0$ es una asíntota vertical. $\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{x}$ es una asíntota oblicua

b) Halla, si existen: máximos y mínimos relativos y calcula sus intervalos de crecimiento y decreciente.

$$f(x)=2x+\frac{1}{x^2}\to f'(x)=2+\frac{-2x}{x^4}=2-\frac{2}{x^3}=\frac{2(x^3-1)}{x^3}$$

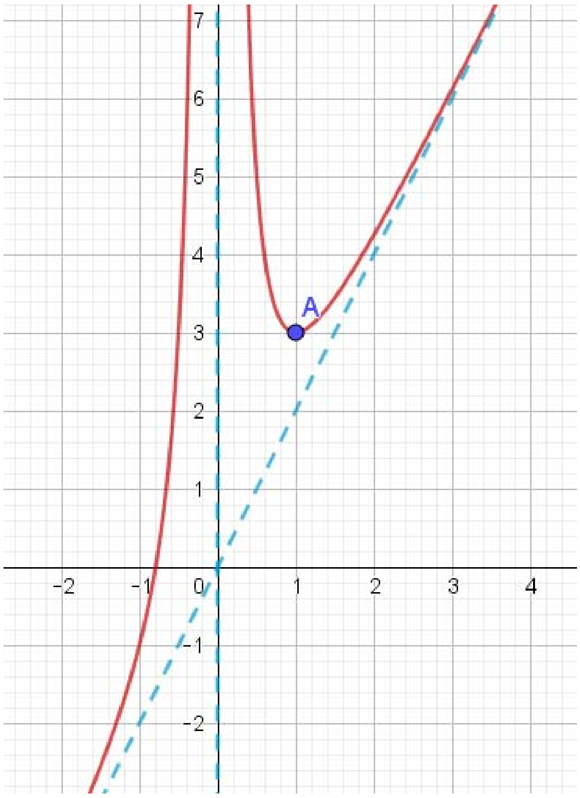
- Si $x=1$, $f'(x)=2-\frac{2}{x^3}=0$. Miramos los intervalos: $(-\infty,0),(0,1)\ y\ (1,+\infty)$
- Si $x<0$, $x^3<0$, $f'(x)>0$, la función es creciente.
- Si $0<x<1$, $0<x^3<1$, $\frac{2}{x^3}>2$, $f'(x)<0$, la función es decreciente
- Si $x>1$, $f'(x)>0$, la función es creciente $(1,+\infty)$.
- En $A(1,3)$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, luego es un mínimo relativo.

$x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ creciente; $x \in (0, 1)$ decreciente. $A(1, 3)$ mínimo

c) Haz un esbozo de su gráfica.

Los cortes con los ejes son:

- Para $x = 0$, no existe.
- Para $y = 0$, $x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$



Autor: Andrés García Mirantes
www.apuntesmareaverde.org.es

Bloque 2.B.

Calcula:

$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{sen\,x-x\cdot e^x}{x^2-2\cdot cos\,x+2}$.

$b)$ Una primitiva de la función $f(x)=x\cdot cos\,x-e^{-x}$ cuya gráfica pase por el punto $P(0,3)$.

Solución:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x\,e^x}{x^2-2\,cos(x)+2}=\frac{0-0}{0-2\cdot 1+2}=\frac{0}{0}\ Indeterminación$

Como está formada por funciones trigonométricas, polinómicas y exponenciales, son funciones continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$, por lo que es aplicable la Regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-x\,e^x}{x^2-2\,cos(x)+2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-(e^x+xe^x)}{2x-2\big(-sen(x)\big)+0}=\frac{1-1-0}{0+2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

Aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-(e^x+xe^x)}{2x-2\big(-sen(x)\big)+0}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)-e^x-e^x-x\,e^x}{2+2\,cos(x)}=\frac{0-1-1-0}{2+2}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x-x\cdot e^x}{x^2-2\cdot cos\,x+2}=\frac{-1}{2}$$

a) *Una primitiva de la función $f(x)=x\,cos(x)-e^{-x}$ Cuya gráfica pase por el punto (0, 3).*

$$F(x)=\int(x\cos(x)-e^{-x})dx=\int x\cos(x)\,dx-\int e^{-x}dx=\int x\cos(x)\,dx=$$

$$=x\,sen(x)-\int sen(x)\,dx=x\,sen(x)+\cos(x)+k$$

Integramos por partes

$$\left.\begin{matrix}x=t\\ \cos(x)\,dx=dg\end{matrix}\right|\Rightarrow\left.\begin{matrix}dx=dt\\ sen(x)=g\end{matrix}\right|$$

$$\int f\,dg=f\cdot g-\int g\,dt$$

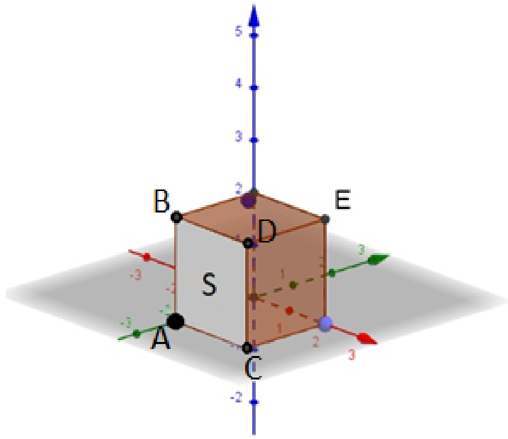
$$\int e^{-x}dx=-e^{-x}+k\ \rightarrow F(x)=x\,sen(x)+\cos(x)+e^{-x}+k$$

$$F(3)=0$$

$$F(0)=0+1+1+k=3\ \rightarrow k=1$$

$$F(x)=x\,sen(x)+\cos(x)+e^{-x}+1$$

Bloque 3.A.



Sean $A(2,1,0), B(5,5,0)$ y $C(2,1,5)$ tres vértices de la cara S de un cubo (cuadrados iguales) y $E(-2,4,0)$ un vértice de la cara opuesta. Se pide:

$a)$ El cuarto vértice D de la cara S.

$b)$ La ecuación del plano π que contiene la cara opuesta de S.

$c)$ ¿Cuál es el vértice de la cara S adyacente a E?

Solución:

Siendo los vértices $A(2,1,0), B(5,5,0)$ y $C(2,1,5)$

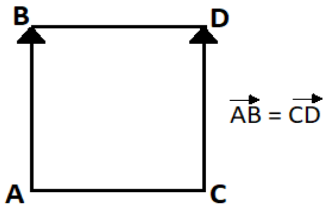
a) El cuarto vértice D de la cara S.

A, B, C, D son vértices de un cuadrado, pero no sabemos en qué orden. Calculamos módulos.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = 5 \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2+0^2+5^2} = 5 \rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = \sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{?^2+?^2+?^2} =$$

Luego *B*, es consecutivo de *A* y *C*.



El cuadrado es *ABDC*, es decir, $(3,4,0) = (x-2, y-1, z-5)$, con lo cual *D(5, 5, 5).*

***D*(5, 5, 5).**

b) La ecuación del plano π que contiene la cara opuesta de S.

El plano π es paralelo a *ABC* y pasa por $E(-2,4,0)$; por tanto, sus vectores directores serán $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$.

Siendo $|\overrightarrow{AB}| = (3{,}4{,}0)$, $|\overrightarrow{AC}| = (0{,}0{,}5)$.

$$\pi = \begin{vmatrix} x-(-2) & 3 & 0 \\ y-4 & 4 & 0 \\ z-0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 5[4(x+2)-3(y-4)] = 0 \rightarrow 4x-3y+20=0$$

$$\mathbf{4x-3y+20=0}$$

c) Cuál es el vértice de la cara S adyacente a E?

Si se designan los vértices como en la figura adjunta, sería el vértice $C(2,1,5)$.

$$\boldsymbol{C(2,1,5)}$$

Bloque 3.B.

Dados dos planos: $\begin{cases}\pi \equiv x+y-2z=3\\ \pi' \equiv x-z=5\end{cases}$. Sea P un punto de π cuya proyección ortogonal sobre π' es el punto $A(5,1,0)$.

$a)$ Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r que une $P\ y\ A$.

$b)$ Calcula el punto P.

Solución:

Sean $M: x+y-2z=3$, sea $M': x-z=5$, A (5, 1, 0)

La recta r será la recta que pase por A y sea perpendicular a M', por tanto, $\overrightarrow{V_r}$ será el vector director de M': $\overrightarrow{V_r}=(1,0,-1)$

La ecuación resultante de r es $\overrightarrow{AX}=t\overrightarrow{V_{M'}}$

$$(x-5,y-1,z-0)=t(1,0,-1)\to x-5=t, y-1=0, z-0=-t$$

Eliminando t nos queda

$$x-5=-z, y-1\ \to$$

$$r\ \begin{cases}x+z=5\\ \quad y=1\end{cases}$$

b) Calcula el punto P.

P es la intersección de M y r. Será la solución del sistema:

$$\begin{cases}x+y-2z=3\\ x+z=5\\ y=1\end{cases}\to\begin{cases}5-z+1-2z=3\\ x+z=5\\ y=1\end{cases}\to\begin{cases}-3z=3\\ x+z=5\\ y=1\end{cases}\to\begin{cases}z=1\\ y=1\\ x=4\end{cases}$$

Entonces el punto es P ***(4, 1, 1)***.

P ***(4, 1, 1)***.

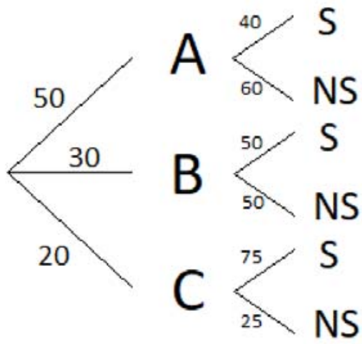
Bloque 4.A.

En un curso de un instituto hay tres clases: la clase A con 50 alumnos, la clase B con 30 y la clase C con 20. Cada clase tiene un profesor distinto de matemáticas. Con el profesor de la clase A aprueban el 40 % de los alumnos, con el de la clase B el 50 % y con el de la clase C el 75 % de los alumnos. Se coge al azar un alumno del curso. Calcula:

$a)$ La probabilidad de que el alumno haya aprobado matemáticas.

$b)$ Sabiendo que ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B?

Solución:



Sean los sucesos:

- A: "ser de la clase A"
- B: "ser de la clase B"
- C: "ser de la clase C"
- S: "aprobar matemáticas"
- NS: "no aprobar matemáticas"

$$P(A) = \frac{50}{100} \to P(B) = \frac{30}{100} \to P(C) = \frac{20}{100} \to P(S|A) = \frac{40}{100}$$

a) La probabilidad de que el alumno haya aprobado matemáticas.

$$P(S|B) = \frac{50}{100} \to P(S|C) = \frac{75}{100} \to$$

La probabilidad total es:

$$S = S \cap A + S \cap B + S \cap C$$

Según la definición de probabilidad condicionada: $P(R|N) = \frac{P(R\cap N)}{P(N)}$

Por tanto,

$$P(S) = P(S|A) \cdot P(A) + P(S|B) \cdot P(B) + P(S|C) \cdot P(C) =$$

$$= \frac{40}{100} \cdot \frac{50}{100} + \frac{50}{100} \cdot \frac{30}{100} + \frac{75}{100} \cdot \frac{20}{100} = \frac{20 + 15 + 15}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$P(S) = \frac{1}{2} = \mathbf{0.5}$$

b) *Nos piden ahora:* $P(B|S) = \frac{P(S\cap B)}{P(S)} = \frac{P(S|B)\cdot P(B)}{P(S)} = \frac{\frac{50}{100}\cdot\frac{30}{100}}{\frac{50}{100}} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}.$

Sabiendo que ha aprobado, la probabilidad de que sea de la clase B es **3/10**.

Bloque 4.B.

En una pumarada la producción en kilogramos de cada manzano sigue una distribución normal de media $\mu = 50$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

$a)$ La proporción de árboles que dan entre 30 y 60 kilogramos.

$b)$ El número de kilogramos por árbol a los que no llegan o igualan el 60 % de los árboles.

Solución:

$a)$ Nos dice que: $\mu = 50$; $\sigma = 10$.

La proporción de árboles sigue una distribución normal:

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(50, 10)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-50}{10}$.

$$P = P(30 \le X \le 60) = P\left(\frac{30-50}{10} \le Z \le \frac{60-50}{10}\right) = P\left(\frac{20}{10} \le Z \le \frac{-10}{10}\right) = P(2 \le Z \le -1) =$$

$P(Z \le 2) - [1 - P(Z \le 1)] = P(Z \le 2) - 1 + P(Z \le 1) = 0.9772 - 1 + 0.8413 = 1.8185 - 1 = 0.8185.$

La proporción de árboles que dan entre 30 y 60 kilogramos es del **81.85 %**

$b)$ Se debe hallar γ tal que: $P = P(X \le \gamma) = 0.60 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{\gamma-50}{10}\right) = 0.60$.

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0, 1)$ a 0.60 le corresponde, aproximadamente, 0.253:

$\frac{\gamma-50}{10} = 0.253$; $\gamma - 50 = 2.53$; $\gamma = 50 + 2.53 = 52.53$.

El 60 % de los manzanos no superan una producción de **52.53** kilogramos.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

BALEARES

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2020

Model 2

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les dues opcions, A i B, proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritza l'ús de les que puguin emmagatzemar o transmetre informació.

OPCIÓ A

1. Donat el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x+y=1, \\ ax+z=0, \\ x+(1+a)y+az=a+1, \end{cases}$$

determina el paràmetre a, i resol sempre que es pugui, de manera que el sistema:

(a) tengui solució única, (4 punts)

(b) tengui infinites solucions, (4 punts)

(c) no tengui solució. (2 punts)

2. Considera la funció $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donada per

$$y=f(x)=x^3-3x.$$

(a) Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció al punt d'abscissa $x=-1$. (2 punts)

(b) Fes un esbós de la gràfica de $y=f(x)$ i calcula: els punts de tall amb els eixos, els extrems relatius i el comportament de la funció a l'infinit. (4 punts)

(c) Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció donada i la recta $y=2$.(4 punts)

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2020

Model 2. **Opció A.** Segueix.

3. Considera el punt $P = (2, -1, 1)$ i la recta r donada per

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{array}\right\} (r)$$

   (a) Calcula l'expressió de l'equació contínua de la recta r. (2 punts)
   (b) Calcula l'equació del pla, Π, perpendicular a la recta r que passa pel punt P.(2 punts)
   (c) Calcula el punt, Q, d'intersecció del pla Π amb la recta r. (3 punts)
   (d) De totes les rectes que passen pel punt $P = (2, -1, 1)$, calcula aquella que talla perpendicularment a la recta r. (3 punts)

4. El nombre d'hores de vida d'un cert bacteri (tipus A) es distribueix segons una normal de mitjana 110 hores i desviació típica de 0,75 hores. Calcula la probabilitat que, escollint a l'atzar un bacteri:

   (a) el seu nombre d'hores de vida sobrepassi les 112,25 hores. (4 punts)
   (b) el seu nombre d'hores de vida sigui inferior a 109,25 hores. (4 punts)

   D'un altre bacteri (tipus B) se sap que el nombre d'hores de vida es distribueix segons una normal de mitjana 110 hores, però es desconeix la seva desviació típica. Experimentalment s'ha comprovat que la probabilitat que un bacteri tipus B visqui més de 125 hores és 0,1587. Calcula la desviació típica de la distribució del nombre d'hores de vida dels bacteris tipus B. (2 punts)

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2020

Model 2

OPCIÓ B

1. Una empresa té tres mines: **A**, **B** i **C**, i en cada una, el mineral extret conté els elements químics: níquel (Ni), coure (Cu) i ferro (Fe), en diferent concentració. Les concentracions són:

   - Mina **A**: Ni (1%), Cu (2%), Fe (3%),
   - Mina **B**: Ni (2%), Cu (5%), Fe (7%),
   - Mina **C**: Ni (1%), Cu (3%), Fe (1%).

   Per obtenir 7 tones de níquel, 18 de coure i 16 de ferro en total, quantes tones de mineral s'han d'extreure de cada mina?

   (a) Planteja un sistema d'equacions que interpreti l'enunciat. (4 punts)

   (b) Classifica el sistema. (2 punts)

   (c) Resol el sistema. (4 punts)

2. Considera la funció $f(x) = \frac{3}{x^2-x}$.

   (a) Calcula el seu domini i els intervals de creixement i decreixement. (3 punts)

   (b) Calcula una primitiva qualsevol de $f(x)$. (4 punts)

   (c) Calcula l'àrea delimitada per la gràfica de la funció $y = f(x)$, l'eix OX i les rectes $x = 2$ i $x = 3$. (3 punts)

3. Donada la recta r i el pla π

$$(r)\quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}, \qquad (\pi)\quad 3x - my + z = 1,$$

   es demana si existeix algun valor del paràmetre m per al qual

   (a) el pla i la recta són paral·lels. (4 punts)

   (b) o bé, el pla conté la recta. (3 punts)

   (c) o bé, el pla i la recta es tallen exactament en un punt. (3 punts)

   En cada cas, si existeix, cacula'l.

Model 2. **Opció B**. Segueix.

4. Una empresa de fabricació d'impressores té dos centres de producció, la fàbrica europea (E) i la fàbrica asiàtica (A). L'1 % de les impressores de la fàbrica E i el 3% de les impressores de la fàbrica A es produeixen amb un defecte. El mercat d'un determinat país s'abasteix d'impressores procedents de la fàbrica E en un 80%, mentre que la resta prové de la fàbrica A.

   (a) Quina és la probabilitat que una impressora d'aquest país tingui el defecte?(4 punts)

   (b) Si el país té, aproximadament, dos milions d'impressores fabricades per aquesta empresa, quantes tindran el defecte? (2 punts)

   (c) Si s'escull a l'atzar una impressora d'aquest país i resulta ser una impressora defectuosa, quina és la probabilitat que provingui de la fàbrica E? (4 punts)

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2020

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9088	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$

Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 1:

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ ax+z=0 \\ x+(1+a)y+az=a+1 \end{array}\right\}$, determina el parámetro a, y resuelve siempre que se pueda, de manera que el sistema:

a) Tenga solución única. b) Tenga infinitas soluciones. c) No tenga solución.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a+1 & a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+1 & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a+1 & a \end{vmatrix}=1-(a+1)-a^2=1-a-1-a^2=0;$$

$$a^2+a=0;\ \ a(a+1)=0 \Rightarrow a_1=0, a_2=-1.$$

a)

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{c} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

:

Se resuelve para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ por el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+1 & a & a+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_2 \to F_2 - aF_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & 1 & -a \\ 0 & a & a & a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_2 \to -\frac{1}{a}F_2 \\ F_3 \to \frac{1}{a}F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/a & 1 \\ 0 & 0 & (a+1)/a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{a+1}{a}z=0 \Rightarrow z=0;\ \ y=1;\ \ x=0.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{c} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow Solución: x=0; y=1; z=0.}$$

$b)$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2=C_4\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{matrix} a=0\\ a=-1\end{matrix}\right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve para $a=0$ y $a=-1$, en cuyos casos el sistema es compatible indeterminado.

Para $a=0$ el sistema resulta: $\left.\begin{matrix} x+y=1\\ z=0\\ x+y=1\end{matrix}\right\}$, equivalente a $\left.\begin{matrix} x+y=1\\ z=0\end{matrix}\right\}$.

$$\underline{Para\ a=0 \Rightarrow Solución: x=\lambda;\ y=1-\lambda;\ z=0, \forall a \in R.}$$

Para $a=0$ el sistema resulta: $\left.\begin{matrix} x+y=1\\ -x+z=0\\ x-z=0\end{matrix}\right\}$, equivalente a $\left.\begin{matrix} x+y=1\\ x-z=0\end{matrix}\right\}$.

$$\underline{Para\ a=-1 \Rightarrow Solución: x=\lambda;\ y=1-\lambda;\ z=\lambda, \forall a \in R.}$$

$c)$

$$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ \forall a \in R.}$$

Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 2:

2º) Considera la función $f: R \rightarrow R$ dada por $y = f(x) = x^3 - 3x$:

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Hacer un esbozo de la gráfica de $y = f(x)$ y calcula: los puntos de corte con los ejes, los extremos relativos y el comportamiento de la función al infinito.

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $y = f(x)$ y la recta $y = 2$.

Solución:

a)

El punto de tangencia es el siguiente:

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow P(-1, 2)$.

La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada en ese punto.

$f'(x) = 3x^2 - 3$. $\qquad m = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 3 = 3 - 3 = 0$.

La fórmula de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$y - 2 = 0 \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow \underline{Recta\ tangente: t \equiv y - 2 = 0}$.

b)

Los cortes con los ejes de la función $f(x) = x^3 - 3x$ son los siguientes:

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow O(0, 0)$.

$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0;\ \ x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -\sqrt{3};$

$x_3 = \sqrt{3} \Rightarrow O(0, 0), A(-\sqrt{3}, 0)\ y\ B(\sqrt{3}, 0)$.

Por tratarse de una función polinómica tiende a infinito, positivo o negativo, en los valores extremos de su dominio, que es R.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x) = -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x) = +\infty$.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada;

si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = 3x^2 - 3. \qquad f''(x) = 6x.$$

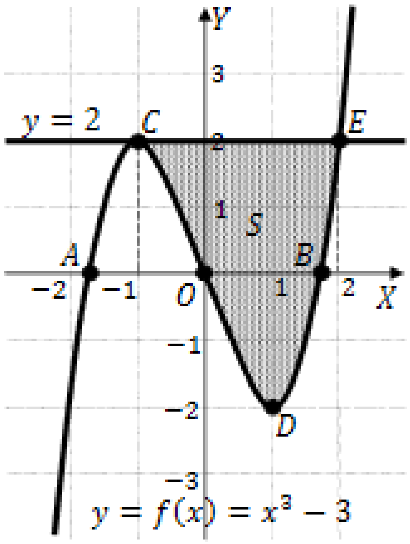
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0;\ \ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow Máximo: C(-1, 2).$$

Por simetría con respecto al origen, por ser $f(-x) = -f(x)$: $Mínimo: D(1, -2)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que indica la figura adjunta.



c)

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{2} [2 - (x^3 - 3x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x + 2)\, dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^4}{4} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2\right) - \left[-\frac{(-1)^4}{4} + \frac{3 \cdot (-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1)\right] =$$

$$= -4 + 6 + 4 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = 8 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{32+1-6}{4} = \frac{27}{4}.$$

$$\underline{S = \frac{27}{4}\ u^2 = 6{,}75\ u^2.}$$

Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 3:

3º) Considera el punto $P(2,-1,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-3y+4z-1=0 \\ x+2y-3z-2=0 \end{cases}$:

a) Calcula la expresión de la ecuación continua de la recta r.

b) Calcula la ecuación del plano π, perpendicular a r, y que pasa por el punto P.

c) Calcula el punto Q, intersección del plano π y la recta r.

d) De todas las rectas que pasan por el punto $P(2,-1,1)$, calcula aquella que corta perpendicularmente a la recta r.

Solución:

a)

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x-3y+4z-1=0 \\ x+2y-3z-2=0 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda \Rightarrow \left.\begin{aligned} -3y+4z=1-2\lambda \\ 2y-3z=2-\lambda \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} -6y+8z=2-4\lambda \\ 6y-9z=6-3\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow z=-8+7\lambda;\;\; 2y+24-21\lambda=2-\lambda;$$

$$2y=-22+20\lambda;\;\; y=-11+10\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-11+10\lambda. \\ z=-8+7\lambda \end{cases}$$

$$\underline{r \equiv \frac{x}{1}=\frac{y+11}{10}=\frac{z+8}{7}.}$$

b)

El haz de planos, β, perpendiculares a la recta r, tienen la siguiente expresión general: $\beta \equiv x+10y+7z+D=0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π pedido, que contiene al punto P es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{aligned} \beta \equiv x+10y+7z+D=0 \\ P(2,-1,1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2+10\cdot(-1)+7\cdot 1+D=0;$$

$$2-10+7+D=0;\;\; D=1 \;\Rightarrow\; \underline{\pi \equiv x+10y+7z+1=0}.$$

c)

$$\left.\begin{aligned} \beta \equiv x+10y+7z+1=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-11+10\lambda \\ z=-8+7\lambda \end{cases} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\lambda+10\cdot(-11+10\lambda)+7\cdot(-8+7\lambda)+1=0;$$

$\lambda - 110 + 100\lambda - 56 + 49\lambda + 1 = 0;\ \ 150\lambda = 165;\ \ 10\lambda = 11 \Rightarrow \lambda = \frac{11}{10}.$

$$Q \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{11}{10} \\ y = -11 + 10 \cdot \frac{11}{10} = 0 \\ z = -8 + 7 \cdot \frac{11}{10} = \frac{-80+77}{10} = -\frac{3}{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Q\left(\frac{11}{10}, 0, -\frac{3}{10}\right)}.$$

d)

Sea s la recta pedida.

Por ser la recta r perpendicular al plano π, es perpendicular a todas las infinitas rectas contenidas en el plano π, o lo que es lo mismo: el ejercicio tiene infinitas soluciones, que son todas las infinitas rectas contenidas en π que pasan por $P(2, -1, 1)$.

Un punto de $\pi \equiv x + 10y + 7z + 1 = 0$ podía ser, por ejemplo, el punto hallado $Q\left(\frac{11}{10}, 0, -\frac{3}{10}\right)$, pero tomamos otro punto más cómodo: $M(0, 2, -3) \in \pi$.

Los puntos M y P determinan el vector $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v_s} = (2, -3, 4)$.

$$\underline{s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{4}}.$$

Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 4:

4º) El número de horas de vida de una bacteria (tipo A) se distribuye según una normal de media 110 horas y desviación típica 0,75 horas. Calcula la probabilidad que, escogida al azar una bacteria:

a) El número de horas de vida sobrepase las 112,25 horas.

b) Su número de horas de vida sea inferior a 109,25 horas.

c) De otra bacteria se sabe que el número de horas de vida se distribuye según una normal de media 110 horas, pero se desconoce la desviación típica. Experimentalmente se ha comprobado que la probabilidad que una bacteria tipo B viva más de 125 horas es 0,1587. Calcula la desviación típica de la distribución del número de horas de vida de las bacterias tipo B.

Solución:

a)

$Datos:\ \mu = 110;\ \ \sigma = 0{,}75.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(110;\ 0{,}75).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-110}{0{,}75}$.

$P = P(X > 112{,}25) = P\left(Z > \frac{112{,}25-110}{0{,}75}\right) = P\left(Z > \frac{2{,}25}{0{,}75}\right) = P(Z > 3) =$

$= 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0{,}9987 = \underline{0{,}0013}.$

b)

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(110;\ 0{,}75).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-110}{0{,}75}$.

$P = P(X < 109{,}25) = P\left(Z > \frac{109{,}25-110}{0{,}75}\right) = P\left(Z > \frac{-0{,}75}{0{,}75}\right) = P(Z < -1) =$

$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = \underline{0{,}1587}.$

c)

$Datos:\ \mu = 110;\ \ ¿\sigma?;\ \ P(X > 125) = 0{,}1587.$

$P = P(X > 125) = P\left(Z > \frac{125-110}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{15}{\sigma}\right) = 0{,}1587;$

$1 - P\left(Z \leq \frac{15}{\sigma}\right) = 0{,}1587;\ \ P\left(Z \leq \frac{15}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, a 0,8413 le corresponde 1,00 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{15}{\sigma} = 1 \Rightarrow \underline{\sigma = 15}.$

****

Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 1:

1º) Una empresa tiene tres minas: A, B y C, y en cada una, el mineral extraídos contiene los minerales:

Mina A: níquel, 1 %, cobre, 2 %, Hierro, 3 %.
Mina B: níquel, 2 %, cobre, 5 %, Hierro, 7 %.
Mina C: níquel, 1 %, cobre, 3 %, Hierro, 1 %.

Para obtener 7 Tm de níquel, 18 Tm de cobre y 16 Tm de hierro en total, ¿cuántas Tm de mineral se han de extraer de cada mina?

a) Plantea un sistema de ecuaciones que interprete el enunciado.

b) Clasifica el sistema. c) Resuelve el sistema.

Solución:

----

a)

Sean x, y, z las toneladas de mineral que se extraen de las minas A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}01x + 0{,}02y + 0{,}01z = 7 \\ 0{,}02x + 0{,}05y + 0{,}03z = 18 \\ 0{,}03x + 0{,}07y + 0{,}01z = 16 \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 700 \\ 2x + 5y + 3z = 1.800 \\ 3x + 7y + z = 1.600 \end{array}\right\}}.$$

b)

La matriz de coeficientes es: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 14 + 18 - 15 - 21 - 4 = 37 - 40 = -3 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ M = 3.$

El rango de la matriz ampliada es como máximo 3 (por tener tres filas) y como la matriz de coeficientes es una submatriz de la matriz ampliada, el rango de la matriz ampliada es 3.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

c)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}700 & 2 & 1\\ 1.800 & 5 & 3\\ 1.600 & 7 & 1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{100\cdot\begin{vmatrix}7 & 2 & 1\\ 18 & 5 & 3\\ 16 & 7 & 1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{100\cdot(35+126+96-80-147-36)}{-3}=$$

$$=\frac{100\cdot(257-263)}{-3}=\frac{100\cdot(-6)}{-3}=200.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 700 & 1\\ 2 & 1.800 & 3\\ 3 & 1.600 & 1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{100\cdot\begin{vmatrix}1 & 7 & 1\\ 2 & 18 & 3\\ 3 & 16 & 1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{100\cdot(18+32+63-54-48-14)}{-3}=$$

$$=\frac{100\cdot(113-116)}{-3}=\frac{100\cdot(-3)}{-3}=100.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 700\\ 2 & 5 & 1.800\\ 3 & 7 & 1.600\end{vmatrix}}{-3}=\frac{100\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\ 2 & 5 & 18\\ 3 & 7 & 16\end{vmatrix}}{-3}=\frac{100\cdot(80+98+108-105-126-64)}{-3}=$$

$$=\frac{100\cdot(286-295)}{-3}=\frac{100\cdot(-9)}{-3}=300.$$

$\underline{Se\ extraen\ 200\ toneladas\ de\ la\ mina\ A,\ 100\ de\ la\ B\ y\ 300\ de\ la\ C.}$

Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 2:

2º) Considera la función $f(x)=\frac{3}{x^2-x}$.

a) Calcula el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcula una primitiva de $f(x)$.

c) Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $y=f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=2$ y $x=3$.

Solución:

a)

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales que anulan el denominador.

$$x^2-x=0;\;\; x(x-1)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=1.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R-\{0,1\}}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{0-3\cdot(2x-1)}{(x^2-x)^2}=\frac{3-6x}{(x^2-x)^2}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{3-6x}{(x^2-x)^2}=0 \Rightarrow 3-6x=0;\;\; 1-2x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

La raíz de la primera derivada divide al dominio de la función en dos intervalos en los cuales la derivada primera es positiva o negativa:

$$x<\frac{1}{2} \Rightarrow f'(x)>0;\;\; x>\frac{1}{2} \Rightarrow f'(x)<0.$$

Teniendo en cuenta que $(x^2-x)^2>0, \forall x \in D(f)$ y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x)>0 \Rightarrow x \in (-\infty,0) \cup \left(0,\frac{1}{2}\right)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x)<0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2},1\right) \cup (1,+\infty)}.$$

b)

$$F(x)=\int f(x)\cdot dx=\int \frac{3}{x^2-x}\cdot dx.$$

$$\frac{3}{x^2-x}=\frac{x-2}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{Ax-A+Bx}{x(x-1)}=\frac{(A+B)x-A}{x^2-x} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A+B=0 \\ -A=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=3 \end{cases}.$$

$$F(x) = \int \frac{3}{x^2 - x} \cdot dx = \int \left(\frac{-3}{x} + \frac{3}{x-1} \right) \cdot dx = -3L|x| + 3L|x-1| + C.$$

$$\underline{F(x) = \int \frac{3}{x^2 - x} \cdot dx = 3 \cdot L \left| 1 - \frac{1}{x} \right| + C.}$$

c)

En el intervalo $(2, 3)$ todas las ordenadas de la función $f(x)$ son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_2^3 f(x) \cdot dx = \int_2^3 \frac{3}{x^2 - x} \cdot dx = \left[3 \cdot L \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right]_2^3 = 3 \cdot \left[L \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right]_2^3 =$$

$$= 3 \cdot \left[L\left(1 - \frac{1}{3}\right) - L\left(1 - \frac{1}{2}\right) \right] = 3 \cdot \left(L\frac{2}{3} - L\frac{1}{2} \right) = 3 \cdot (L2 - L3 - L1 + L2) =$$

$$= 3 \cdot (2L2 - L3 - 0) = 3 \cdot (L4 - L3).$$

$$\underline{S = 3 \cdot (L4 - L3)\ u^2 \cong 0{,}863\ u^2.}$$

****

Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 3:

3º) Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi \equiv 3x - my + z = 1$, se pide, si existe, algún valor del parámetro m para el cual:

a) El plano y la recta son paralelos. *b*) El plano contiene a la recta.

c) El plano y la recta se cortan en un punto.

En cada caso, si existen, calcularlos.

Solución:

a)

El plano y la recta son paralelos cuando el vector normal del plano y el vector director de la recta son perpendiculares, es decir: su producto escalar es cero.

Un vector director de la recta es $\overrightarrow{v_r} = (2, 3, -1)$ y un vector normal del plano es $\vec{n} = (3, -m, 1)$.

$$(2, 3, -1) \cdot (3, -m, 1) = 0; \;\; 6 - 3m - 1 = 0; \;\; 3m = 5 \Rightarrow \underline{m = \tfrac{5}{3}}.$$

El plano resulta: $\pi \equiv 3x - \frac{5}{3}y + z = 1 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 9x - 5y + 3z - 3 = 0}$.

b), *c*)

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x - 3 = 2y + 2 \\ -x + 1 = 2z + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ x + 2z = -3 \end{array}\right.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} 3x - my + z = 1 \\ 3x - 2y = 5 \\ x + 2z = -3 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -m & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 3 & -m & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \to Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \to Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \to Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -m & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 6m = 0;\ \ 6m = 10 \Rightarrow m = \tfrac{3}{5}.$$

$$\underline{Para\ m \neq \tfrac{5}{3} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.}$$

El punto de corte es la solución del sistema que forman: $\left.\begin{array}{r} 3x - my + z = 1 \\ 3x - 2y = 5 \\ x + 2z = -3 \end{array}\right\}$.

Se resuelve por el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 3 & -m & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & -m & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -6 & 14 \\ 0 & -m & -5 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_2 \to -\tfrac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & -m & -5 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + mF_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 3m-5 & 10-7m \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3m-5)z = 10 - 7m \Rightarrow z = \tfrac{10-7m}{3m-5}.$$

$$x + 2z = -3;\ \ x = -3 - 2z = -3 + \tfrac{-20+14m}{3m-5} = \tfrac{-9m+15-20+14m}{3m-5} = \tfrac{5m-5}{3m-5}.$$

$$y + 3z = -7;\ \ y = -7 - 3z = -7 + \tfrac{-30+21m}{3m-5} = \tfrac{-21m+35-30+21m}{3m-5} = \tfrac{5}{3m-5}.$$

$$\underline{Solución{:}\ x = \frac{5m-5}{3m-5};\ y = \frac{5}{3m-5};\ z = \frac{10-7m}{3m-5}.\ \ \left(m \neq \frac{3}{5}\right)}$$

$$Para\ m = \tfrac{3}{5} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 3 & -5/3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -5/3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 18 - \tfrac{25}{3} - 15 = 3 - \tfrac{25}{3} = -\tfrac{16}{3} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ m = \frac{5}{3} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ paralelos}$$

Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 4:

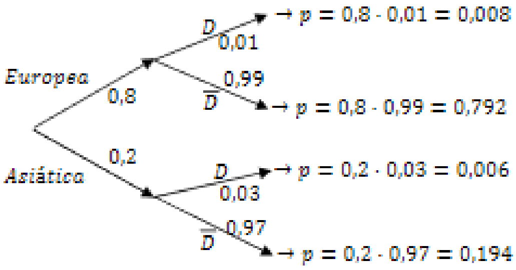
4º) Una empresa de fabricación de impresoras tiene dos centros de producción, la fábrica europea E y la fábrica asiática A. El 1 % de las impresoras de la fábrica E y el 3 % de las impresoras de la fábrica A se producen defectos. El mercado de un determinado país se abastece de impresoras procedentes de la fábrica E en un 80 %, mientras que el resto procede de la fábrica A.

a) ¿Cuál es la probabilidad que una impresora de ese país tenga defectos?

b) Si el país tiene, aproximadamente, dos millones de impresoras fabricadas por esta empresa, ¿cuántas tendrán defectos?

c) Si se escoge al azar una impresora de este país y resulta ser defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica E?

Solución:



a)

$$P = P(D) = P(E \cap D) + P(A \cap D) = P(E) \cdot P(D/E) + P(A) \cdot P(D/A) =$$

$$= 0{,}8 \cdot 0{,}01 + 0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}008 + 0{,}006 = \underline{0{,}014}.$$

b)

$$n = N \cdot p = 2.000.000 \cdot 0{,}014 = 28.000.$$

$\underline{\textit{Se espera que haya 28.000 impresoras con defectos en ese país.}}$

c)

$$P = P(E/D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{P(E) \cdot P(D/E)}{P(D)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}01}{0{,}014} = \frac{0{,}008}{0{,}014} = \underline{0{,}5714}.$$

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2020

Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les dues opcions, A i B, proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritza l'ús de les que puguin emmagatzemar o transmetre informació.

OPCIÓ A

1. Donada l'equació matricial

$$M \cdot X + N = P,$$

on X és la matriu incògnita i

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Per a quins valors del paràmetre a existeix la matriu inversa de M? (1 punt)

(b) Calcula la matriu inversa de M. (3 punts)

(c) Per a $a = 2$, resol l'equació matricial, si és possible. (3 punts)

(d) Per als valors de a per als quals existeix la matriu inversa de M, resol l'equació matricial. (3 punts)

2. Considera la funció

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)}.$$

(a) Determina: el domini, els intervals de creixement i decreixement, les coordenades dels màxims i mínims i el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. (2 punts)

(b) Fes un esbós de la gràfica. (1 punt)

(c) Obté els valors de A i B per als quals (3 punts)

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}.$$

(d) Calcula l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes d'equacions $x = -2$ i $x = 2$. (4 punts)

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2020

Model 3. **Opció A**. Segueix.

3. Donades les rectes

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{array}{rr}15x+12y-14z= & -17,\\ 8x-y-5z= & 23,\end{array}\right. \qquad (\mathrm{II})\left\{\begin{array}{rr}9x+5y-2z= & 5,\\ 24x-2y-13z= & 67.\end{array}\right.$$

(a) Calcula un vector posició i un vector director de cada una. (4 punts)

(b) Calcula l'equació vectorial de cada una. (2 punts)

(c) Calcula el rang de la matriu formada pels dos vectors directors i el vector diferència, o vector resta, dels dos vectors posició obtinguts. (2 punts)

(d) De l'anterior rang, dedueix la posició relativa d'ambdues rectes. (2 punts)

4. Tenim tres urnes, la primera conté 2 bolles blaves; la segona, 1 bolla blava i 1 de vermella; la tercera, 2 bolles vermelles. Fem l'experiment aleatori

"Triam una urna a l'atzar i extraiem una bolla"

Suposa que totes les urnes tenen la mateixa probabilitat de ser escollides.

(a) Calcula la probabilitat del succés R = "bolla extreta vermella" (5 punts).

(b) Si la bolla extreta resulta que és vermella, quina és la probabilitat que l'urna escollida hagi estat la tercera? (5 punts).

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2020

Model 3

OPCIÓ B

1. Donades les matrius A i B,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   (a) calcula $A \cdot B$ i $(A \cdot B)^t$, on la "t" indica matriu transposada. (4 punts)
   (b) és possible calcular B^2? Si ho és, calcula-la. (1 punt)
   (c) per als diferents valors de x, calcula el rang de la matriu A. (5 punts)

2. En un aquari, l'estudi de l'evolució de la població de peixos s'ha modelat segons la funció $t \to P(t)$,

$$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t},$$

   on la variable t, que és un nombre real major o igual que zero, mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000 i $P(t)$ indica nombre d'individus, en milers, en l'instant de temps t. Segons el model, calcula:

   (a) La població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000 i la població que hi haurà a la fi de l'any 2020. (1 punt)
   (b) La mida de la població (en nombre d'individus) a llarg termini. (3 punts)
   (c) L'any en el qual s'arriba a la població mínima i quants individus hi haurà. (4 punts)
   (d) Fes un esbós de la gràfica de l'evolució poblacional $t \to P(t)$. (2 punts)

3. Donats els plans

   (I) $3x - ay + 2z - (a-1) = 0$, **(II)** $2x - 5y + 3z - 1 = 0$, **(III)** $x + 3y - (a-1)z = 0$,

   (a) Demostra que, per a qualsevol valor del paràmetre a, no n'hi ha cap parell que siguin paral·lels. (4 punts)
   (b) Estudia la seva posició relativa, segons els diferents valors del paràmetre a. (6 punts)

4. El pes d'un grup de persones segueix una distribució normal de mitjana 54,3 kg i desviació típica de 6,5 kg.

   (a) Quin és el percentatge de persones amb pes superior a 57 kg? (3 punts)
   (b) Quin percentatge de persones pesen entre 50 i 57 kg? (4 punts)
   (c) Si s'escull una persona a l'atzar que està dins del 70% de les persones que menys pesen, com a màxim, quants quilos hauria de pesar? (3 punts)

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2020

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$

Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 1:

1º) Dada la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$, siendo las matrices $M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

a) ¿Para que valores del parámetro a existe la matriz inversa de M?

b) Calcula la matriz inversa de M.

c) Para $a = 2$, resuelve la ecuación matricial, si es posible.

d) Para los valores de a para los que existe la matriz inversa de M, resuelve la ecuación matricial.

Solución:

a)

Una matriz en invertible cuando su determinante es distinto de cero:

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & a \\ a & a \end{vmatrix} = -a - a^2 = 0;\ -a(1+a) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = -1.$$

$$\underline{La\ matriz\ M\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{-1, 0\}}.$$

b)

$$M^t = M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}. \qquad Adj.\ de\ M^t = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -1 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{Adj. de\ M^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -1 \end{pmatrix}}{-a-a^2} \Rightarrow \underline{M^{-1} = \frac{1}{a+a^2} \cdot \begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \forall a \in R - \{-1, 0\}}.$$

c)

Para $a = 2$ es $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $M^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$M \cdot X + N = P;\ \ M \cdot X = P - N;\ \ M^{-1} \cdot M \cdot X = M^{-1} \cdot (P - N);$

$I \cdot X = M^{-1} \cdot (P - N) \Rightarrow \underline{X = M^{-1} \cdot (P - N)}.$

$$P - N = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X = M^{-1} \cdot (P - N) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

d)

$$X = M^{-1} \cdot (P - N) = \frac{1}{a + a^2} \cdot \begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a + a^2} \cdot \begin{pmatrix} -2a & -2a \\ 2a & 2a \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \frac{2}{1 + a} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 2:

2º) Considera la función $f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$:

a) Determina: el domino, los periodos de crecimiento y decrecimiento, las coordenadas de los máximos y mínimos y $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.

b) Haz un esbozo de la gráfica de $f(x)$.

c) Obtén los valores de A y B para los cuales $f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$.

d) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función, por el eje OX y por las rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$.

Solución:

a)

El dominio de una función racional es R, excepto los valores que anulan el denominador.

$$(x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 3 \;\Rightarrow\; \underline{D(f) \Rightarrow R - \{-3, 3\}}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x^2-9}. \qquad f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-9)^2}.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, -3) \cup (-3, 0)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(0, 3) \cup (3, +\infty)}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2-9)^2} = 0;\; -2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

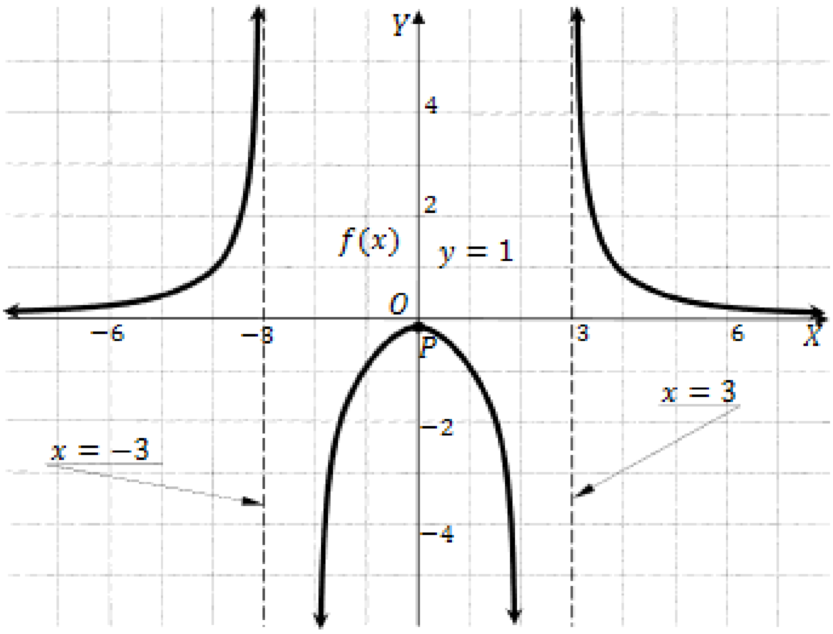
Teniendo en cuenta los periodos de crecimiento y decrecimiento, la función tiene un máximo relativo para $x = 0$.

$$f(0) = \frac{1}{(0-3)(0+3)} = \frac{1}{-9} \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: P\left(0, -\frac{1}{9}\right)}.$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2-9} = \underline{0}.$$

b)

Con los datos obtenidos en el apartado anterior puede hacerse una representación aproximada de la función que es la que aparece en la figura siguiente.



c)

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}.$$

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx-3B}{(x-3)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A-3B)}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ 3A-3B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3A+3B=0 \\ 3A-3B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 6A = 1 \Rightarrow \underline{A = \frac{1}{6}};\ \frac{1}{6} + B = 0 \Rightarrow \underline{B = -\frac{1}{6}}.$$

La función resulta $f(x) = \frac{-\frac{1}{6}}{x-3} + \frac{\frac{1}{6}}{x+3} = -\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right).$

d)

Teniendo en cuenta los apartados anteriores, por ejemplo, que en el intervalo $(-2, 2)$ todas las ordenadas de la función son negativas y también que la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas por ser $f(-x) = f(x)$, el área pedida es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^2 f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 -\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right) \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \int_2^0 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left[L|x-3| - L|x+3|\right]_2^0 = \frac{1}{3}\{[L|0-3| - L|0+3|] - [L|2-3| - L|2+3|]\} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (L3 - L3 - L1 + L5) \Rightarrow \underline{S = \frac{1}{3} \cdot L5\ u^2 \cong 0{,}54\ u^2}.$$

Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 3:

3º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases}$:

a) Calcula un vector de posición y un vector director de cada una de las rectas.

b) Calcula la ecuación vectorial de cada una de las rectas.

c) Calcula el rango de la matriz formada por los dos vectores directores de las rectas y el vector diferencia, o vector resta, de los dos vectores de posición obtenidos.

d) Del rango obtenido en el apartado anterior, deduce la posición relativa de las rectas.

Solución:

a)

Un vector director de una recta dada por dos ecuaciones implícitas es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\overrightarrow{v'_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 15 & 12 & -14 \\ 8 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -60i - 112j - 5k - 96k - 14i + 75j =$$

$$= -74i - 37j - 101k = -37 \cdot (2i + j + 3k) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r} = (2, 1, 3)}.$$

Un punto de r lo obtenemos fijando un valor a una de las variables, por ejemplo:

$$z = 1 \Rightarrow \begin{rcases} 15x + 12y = -17 + 14 \\ 8x - y = 23 + 5 \end{rcases} \begin{rcases} 15x + 12y = -3 \\ 8x - y = 28 \end{rcases} \begin{rcases} 15x + 12y = -3 \\ 96x - 12y = 276 \end{rcases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 111x = 273;\ \ 37x = 91 \Rightarrow x = 3. \qquad 8 \cdot 3 - y = 28;\ \ y = 24 - 28 = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P(3, -4, 1)}.$$

$$\overrightarrow{v'_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 9 & 5 & -2 \\ 24 & -2 & -13 \end{vmatrix} = -65i - 48j - 18k - 120k - 4i + 117j =$$

$$= -69i + 69j - 138k = -69 \cdot (i - j + 2k) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_s} = (1, -1, 2)}.$$

Un punto de s lo obtenemos fijando un valor a una de las variables, por ejemplo:

$$z = 1 \Rightarrow \begin{rcases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{rcases} \begin{rcases} 9x + 5y = 7 \\ 24x - 2y = 80 \end{rcases} \begin{rcases} 9x + 5y = 7 \\ 12x - y = 40 \end{rcases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{rcases} 9x + 5y = 7 \\ 60x - 5y = 200 \end{rcases} \Rightarrow 69x = 207;\ \ x = 3;\ \ 27 + 5y = 7;\ \ 5y = -20;\ \ y = -4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{Q(1,-4,3)}.$

b)

La ecuación vectorial de una recta es $r \equiv (x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot \overrightarrow{v_r}$.

$$\underline{r \equiv (x,y,z) = (3,-4,1) + \lambda \cdot (2,1,3)}.$$

$$\underline{s \equiv (x,y,z) = (1,-4,3) + \mu \cdot (1,-1,2)}.$$

c)

$\vec{w} = \overrightarrow{v_r} - \overrightarrow{v_r} = (2,1,3) - (1,-1,2) = (1,2,1).$

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2+6+2+3-8-1 = 9-9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 2}.$$

d)

Por ser $Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 2$ las rectas r y s están contenidas en un mismo plano, lo que significa que se cortan o son paralelas. Como quiera que los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes, por no ser proporcionales sus componentes, por lo cual:

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ en\ un\ punto}.$$

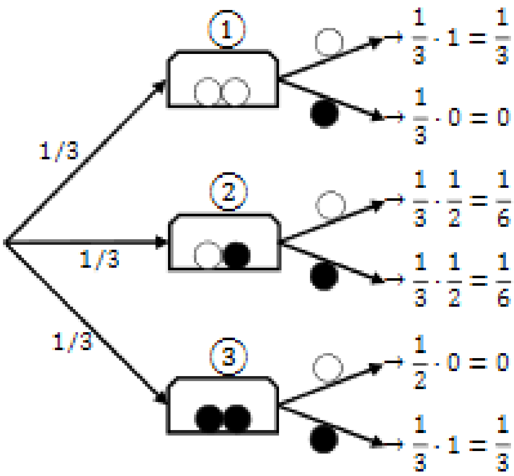
Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 4:

4º) Se tienen tres urnas, la primera con dos bolas blancas; la segunda con una bola blanca y otra negra; la tercera con 2 bolas negras. Hacemos el experimento aleatorio: "se elige una urna al azar y se extrae una bola"; se supone que las tres urnas tienen la misma probabilidad de ser elegidas.

a) Calcule la probabilidad del suceso "extraer bola negra".

b) Si la bola extraída resulta que es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la tercera?

Solución:



a)

$$P = P(N) = P(U1) \cdot P(N/U1) + P(U2) \cdot P(N/U2) + P(U3) \cdot P(N/U3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \underline{\frac{1}{2} = 0{,}5}.$$

b)

$$P = P(U3/N) = \frac{P(U3 \cap N)}{P(N)} = \frac{P(U3) \cdot P(N/U3)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = \underline{\frac{2}{3} = 0{,}6667}.$$

Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 1:

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula $A \cdot B$ y $(A \cdot B)^t$, donde la "t" indica la matriz traspuesta.

b) ¿Es posible calcular B^2? Si lo es, calcúlala.

c) Para los diferentes valores de x, calcula el rango de la matriz A.

Solución:

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2+x & 7 \\ 12 & 14 \\ 18 & 21 \end{pmatrix}}.$$

$$(A \cdot B)^t = \underline{\begin{pmatrix} 2+x & 12 & 18 \\ 7 & 14 & 21 \end{pmatrix}}.$$

b)

Para que el producto de matrices sea posible es necesario que el número de columnas de la matriz multiplicando sea igual al número de filas de la matriz multiplicador siendo las dimensiones de la matriz producto el número de filas de la primera y el número de columnas de la segunda: $X_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}$.

Siendo las dimensiones de las matrices a multiplicar $B_{(3,2)} \cdot B_{(3,2)}$ no es posible.

De otra forma: para que una matriz pueda multiplicarse por sí misma es necesario que sea cuadrada.

$$\underline{No\ es\ posible\ obtener\ B^2}.$$

c)

Se calcula el rango de la matriz A por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 0 & 0 & 8-2x \\ 0 & 0 & 12-3x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to \frac{1}{2}F_2 \\ F_3 \to \frac{1}{3}F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 0 & 0 & 4-x \\ 0 & 0 & 4-x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 0 & 0 & 4-x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \underline{Para\ x = 4 \to Rang\ A = 1} \\ \underline{Para\ x \neq 4 \to Rang\ A = 2} \end{cases}.$$

Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 2:

2º) En un acuario, el estudio de la evolución de la población de peces se ha modelado según la función $t \to P(t)$, siendo $P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$, con la variable t, que es un número real mayor o igual que cero, muestra el número de años transcurridos desde el primero de enero del año 2.000 y $P(t)$ indica el numero de individuos, en miles, en el instante de tiempo t. Según el modelo, calcula:

a) La población que había el primero de enero del año 2.000 y la población que habrá al final del año 2.020.

b) La media de la población (en número de individuos) a largo plazo.

c) El año que se llega a la población mínima y cuántos individuos habrá.

d) Haz un esbozo de la gráfica de la evolución poblacional $t \to P(t)$.

Solución:

a)

$$Año\ 2.000 \Rightarrow t = 0 \to P(0) = \sqrt{0+1} - \sqrt{0} = 1 - 0 = 1.$$

$$Año\ 2.020 \Rightarrow t = 20 \to P(20) = \sqrt{20+1} - \sqrt{20} = \sqrt{21} - \sqrt{20} \cong$$

$$= 4{,}5826 - 4{,}4721 = 0{,}1105.$$

$\underline{Al\ principio\ de\ 2.000\ había\ 1.000\ personas\ y\ al\ final\ de\ 2.020\ habrá\ 110.}$

b)

$$N = \lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t+1} - \sqrt{t}\right) = \infty - \infty \Rightarrow Indeterminado \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{(\sqrt{t+1}-\sqrt{t})(\sqrt{t+1}+\sqrt{t})}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\sqrt{t+1})^2-(\sqrt{t})^2}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t+1-t}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{\infty+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$\underline{Con\ el\ paso\ del\ tiempo\ tienden\ a\ desaparecer\ los\ peces\ del\ acuario.}$

c)

Para que una función tenga un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$P'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{t}-\sqrt{t+1}}{\sqrt{t^2+t}}. \qquad P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{t}-\sqrt{t+1}}{\sqrt{t^2+t}} = 0;$$

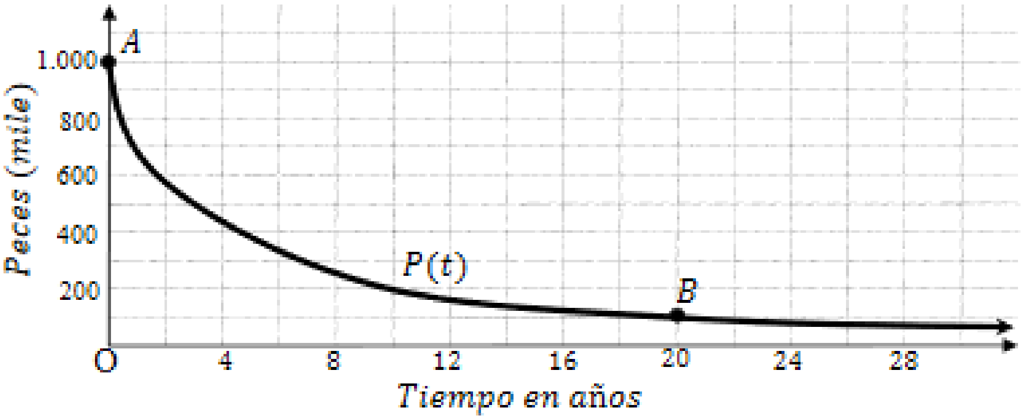
$$\sqrt{t} - \sqrt{t+1} = 0;\ \ \sqrt{t} = \sqrt{t+1} \Rightarrow t = t+1 \Rightarrow t \notin R.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ máximos\ ni\ mínimos\ relativos.}$

La expresión $\sqrt{t}-\sqrt{t+1}<0, \forall t \geq 0$, por lo cual la función es monótona decreciente en su dominio, que es $[0,+\infty)$.

$d)$

De los apartados anteriores se deduce la gráfica de la función, que es, aproximadamente, la que indica la figura siguiente.



Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 3:

3º) Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x - ay + 2z - (a-1) = 0$; $\pi_2 \equiv 2x - 5y + 3z = 1$ y $\pi_3 \equiv x + 3y - (a-1)z = 0$:

a) Demuestra que, para cualquier valor del parámetro a, no existen planos paralelos.

b) Estudia su posición relativa, según los diferentes valores del parámetro a.

Solución:

a) b)

Los tres planos determinan las siguientes matrices de coeficientes y ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 1-a \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} 3 & -a & 2 & a-1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1-a & 0 \end{pmatrix}.$$

Según que los rangos de estas matrices, la posición relativa de los planos son las siguientes:

1º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ *Los planos se cortan en un punto.*

2º. -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ *Los planos son secantes dos a dos.*

3º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ *Los planos se cortan en una recta.*

4º. -- $Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ *Los planos son paralelos.*

5º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow$ *Los planos son coincidentes.*

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 1-a \end{vmatrix} = -15(1-a) + 12 - 3a + 10 - 27 + 2a(1-a) =$$

$$= -15 + 15a - 5 - 3a + 2a - 2a^2 = -2a^2 + 14a - 20 = 0;\ \ a^2 - 7a + 10 = 0;$$

$$a = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = 5.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 2 \\ a \neq 5 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.}$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 5 - 9 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.}$$

$$Para\ a = 5 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 24 - 5 + 20 - 9 = 30 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a = 5 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Planos\ secantes\ dos\ a\ dos.}$$

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ \forall a \in r\ no\ existen\ planos\ paralelos.}$$

Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 4:

4º) El peso de un grupo de personas sigue una distribución normal de media 54,3 kg y desviación típica de 6,5 kg.

a) ¿Cuál es el porcentaje de personas con un peso superior a 57 kg?

b) ¿Qué porcentaje de personas pesan entre 50 y 57 kg?

c) Si se escoge al azar una persona de ese grupo que está dentro del 70 % de las personas de menor peso, como máximo, ¿cuántos kg puede pesar?

Solución:

$Datos:\ \mu = 54{,}3;\ \ \sigma = 6{,}5.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(54{,}3;\ 6{,}5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-54{,}3}{6{,}5}$.

a)

$$P = P(X > 57) = P\left(Z > \frac{57-54{,}3}{6{,}5}\right) = P\left(Z > \frac{2{,}7}{6{,}5}\right) = P(Z > 0{,}415) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0{,}415) = 1 - \frac{0{,}6628+0{,}6591}{2} 1 - \frac{1{,}3219}{2} = 1 - 0{,}6610 = \underline{0{,}3390}.$$

b)

$$P = P(50 < X < 57) = P\left(\frac{50-54{,}3}{6{,}5} \leq Z \leq \frac{57-54{,}3}{6{,}5}\right) = P\left(\frac{-4{,}3}{6{,}5} \leq Z \leq \frac{2{,}7}{6{,}5}\right) =$$

$$= P(-0{,}662 \leq Z \leq 0{,}415) = P(Z \leq 0{,}415) - [1 - P(Z \leq 0{,}662)] =$$

$$= P(Z \leq 0{,}415) - 1 + P(Z \leq 0{,}662) = 0{,}6610 - 1 + 0{,}7456 = 1{,}4066 - 1 =$$

$$= \underline{0{,}4066}.$$

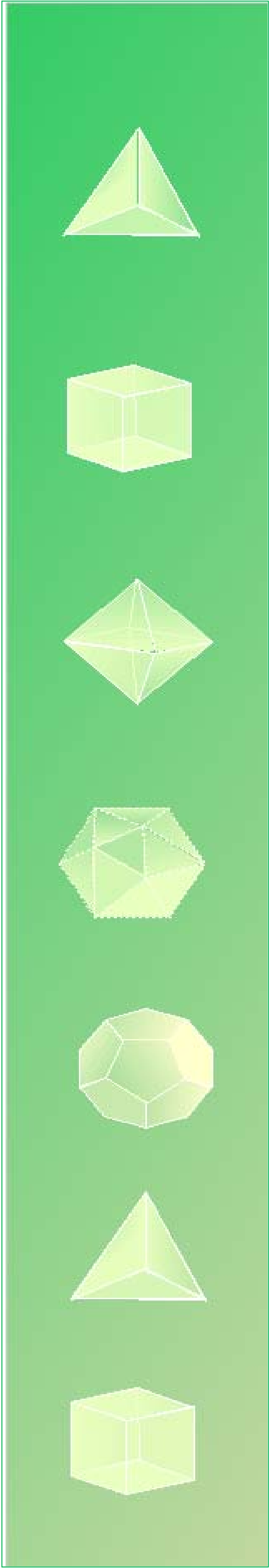
c)

$$P(\overline{X} - a) = 0{,}7 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{X-54{,}3}{6{,}5}\right) = 0{,}7.$$

Buscando en la tabla $N(0,1)$ a la inversa, a 0,7000 le corresponde de forma aproximada 0,523:

$$\frac{a-54{,}3}{6{,}5} = 0{,}523;\ \ a - 54{,}3 \cong 3{,}40 \Rightarrow a = 3{,}40 + 54{,}3 = 57{,}70.$$

$$\underline{Puede\ pesar,\ como\ máximo,\ 57{,}70\ kilogramos}.$$



MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

CANARIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

1. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$, donde *ln* denota el logaritmo neperiano. Resuelva justificadamente los siguientes apartados:

a. Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función *f(x)*. 1.25 ptos

b. Calcule el valor de la integral: $\int_1^e f(x)dx$ 1.25 ptos

Problema A.2:

2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

a. Halle los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa. 1 pto

b. Tomando el valor k = −1 en la matriz A, calcule la matriz X que verifica que: $A\cdot X = 24\cdot I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3. 1.5 ptos

Problema A.3:

3. Dadas las rectas siguientes $r:\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=2 \\ y+5=0 \end{cases}$

a. Estudie la posición relativa de r y s. 1.5 ptos

b. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r, y que contiene el punto A (11,−2.5). 1 pto

Problema A.4:

4. El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.

a. ¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento? 1.5 ptos

b. ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso? 1.5 ptos

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

1. Sean las funciones $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b$ y $g(x) = -2x^3 + c$.

a. Calcule los valores a, b y c de manera que las gráficas de *f(x)* y *g(x)* cumplan las dos condiciones siguientes:

- Se corten en el punto P(1,1). 1.5 ptos
- En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

Dar las expresiones de las funciones resultantes.

b. Suponiendo a = b = 1 en f*(x)*, halle las asíntotas de la función: $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^3 - 1}$ 1 pto

Problema B.2:

2. Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes.

Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto?

Problema B.3:

3. Consideremos la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$, y el plano $\pi_1 \equiv x - y + 3z = 12$

a. Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π_1. 1.25 ptos

b. Sabiendo que la recta r corta el plano π_1, averigüe el punto de intersección. 1.25 ptos

Problema B.4:

4. Se sabe que el 8 % de los análisis de comprobación del níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.

a. Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3 %. Justifique si es cierto. 1.25 ptos

b. Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3 %. Justifique si es cierto. 0.75 ptos

c. Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8. 0.5 ptos

RESPUESTAS OPCIÓN A

Problema A.1:

Consideremos la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ *, donde ln denota el logaritmo neperiano. Resuelva justificadamente los siguientes apartados:*

a. *Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función f(x).*

b. Calcule el valor de la integral: $\displaystyle\int_1^e f(x)dx$

Soluciones:

Dominio: la función logarítmica existe cuando el argumento del logaritmo es positivo, por lo tanto debe ser $x > 0$. Además, el denominador de la función racional debe ser distinto de cero. En este caso $x^2 \neq 0$. Se concluye que $Dom f = (0, +\infty)$.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento: se halla la derivada de f:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(\ln x)\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{x-2x\cdot\ln x}{x^4}=\frac{x\cdot(1-2\ln x)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

Igualando a cero la derivada:

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-2\ln x}{x^3}=0\Rightarrow 1-2\ln x=0\Rightarrow 1=2\ln x\Rightarrow\ln x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{1/2}$$

$$f\left(e^{1/2}\right)=\frac{\ln\left(e^{1/2}\right)}{\left(e^{1/2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}$$

Se estudia el signo de la derivada en los intervalos determinados por el valor obtenido:

Intervalos	$(0, e^{1/2})$	$(e^{1/2}, +\infty)$
Signo de f ‘	+	-
Crecimiento/decrecimiento	Creciente	Decreciente

Extremos relativos: El punto $\left(e^{1/2},\dfrac{1}{2e}\right)$ es un máximo.

Otra forma: *mediante la derivada segunda se puede determinar si el punto es un máximo o un mínimo.*

$$f''(x)=\frac{-2\cdot\frac{1}{x}\cdot x^3-(1-2\ln x)\cdot 3x^2}{\left(x^3\right)^2}=\frac{-2x^2-(1-2\ln x)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{x^2(-2-3+6\ln x)}{x^6}=\frac{6\ln x-5}{x^4}$$

$$f''(e^{1/2})=\frac{6\ln(e^{1/2})-5}{(e^{1/2})^4}=\frac{3-5}{e^2}=-\frac{2}{e^2}<0$$

Como la derivada segunda en este punto es negativa, se trata de un máximo.

Domf **= (0, + ∞). Creciente en (0, $e^{1/2}$) y decreciente en ($e^{1/2}$, + ∞).**

El punto ($e^{1/2}$, 1/(2e)) es un máximo.

b) $\int_1^e f(x)dx$

Calculamos la integral indefinida mediante la integración por partes:

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int vdu \qquad \text{siendo} \begin{cases} u=\ln x;\, du=\frac{1}{x}dx \\ dv=\frac{dx}{x^2};\, v=-\frac{1}{x}\end{cases}$$

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\ln x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$$

Por la regla de Barrow $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ siendo $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$.

La integral definida es:

$$\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_1^e=-\frac{\ln e}{e}-\frac{1}{e}-\left(-\frac{\ln 1}{1}-\frac{1}{1}\right)=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=\frac{e-2}{e}$$

$$\boldsymbol{\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{e-2}{e}}$$

Problema A.2:

2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

a. Halle los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa.

b. Tomando el valor $k = -1$ en la matriz A, calcule la matriz X que verifica que: $A\cdot X = 24\cdot I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3.

Soluciones:

a) La matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{vmatrix}=k(k-1)(k-3)-k(k-1)-k(k-1)=k(k-1)[k-3-1-1]=k(k-1)(k-5)$$

La matriz A tiene inversa si $\boldsymbol{k \neq 0}$**,** $\boldsymbol{k \neq 1}$ **y** $\boldsymbol{k \neq 5}$**.**

b) Si $k = -1$ $\quad A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

$$A\cdot X=24\cdot I_3 \Rightarrow X=A^{-1}\cdot(24\cdot I_3)=24\cdot A^{-1}\cdot I_3=24\cdot A^{-1}$$

Se calcula la matriz inversa de A, si existe:

$$|A|=k(k-1)(k-5)=-1\cdot(-1-1)\cdot(-1-5)=-12$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=8-(-2)=10\ ;\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}=-(0-2)=2\ ;\ A_{13}=\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0-2=-2$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-(0-1)=1\ ;\ A_{22}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}=4-(-1)=5\ ;\ A_{23}=-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-(-1-0)=1$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=0-(-2)=2\ ;\ A_{32}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-(2-0)=-2;\ A_{33}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=2-0=2$$

$$\mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{Adj}(A))^t=\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X=24\cdot A^{-1}=24\cdot\frac{1}{|A|}\cdot(\mathrm{Adj}(A))^t=24\cdot\frac{1}{-12}\cdot\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Problema A.3:

3. Dadas las rectas siguientes $r:\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=2 \\ y+5=0 \end{cases}$

a. Estudie la posición relativa de r y s.

b. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r, y que contiene el punto A (11,−2.5).

Soluciones:

a) Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \\ x=2 \\ y=-5 \end{array}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow Rang(A)=3$$

$$\left|A^*\right|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-7-10-2\cdot(-1)=-15\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang(A^*)=4$$

$$Rang(A)=3\neq Rang(A^*)=4$$

El sistema es incompatible, por lo tanto las rectas r y s **se cruzan**.

Otra forma:

Punto de la recta r: $y=0\Rightarrow\begin{cases} x=7 \\ x-z=4\Rightarrow 7-z=4\Rightarrow z=3 \end{cases}$ $\qquad P(7,0,3)$

Vector director de la recta r:

$$\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k} \qquad \vec{u}=(2,-1,1)$$

Punto de la recta s: $x=2; y=-5; z=0$ $\qquad Q(2,-5,0)$

Vector director de la recta s: $\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\vec{k} \qquad \vec{v}=(0,0,1)$

$$\overrightarrow{PQ}=(-5,-5,-3)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 5+10=15\neq 0 \Rightarrow \text{los vectores } \vec{u}, \vec{v} \text{ y } \overrightarrow{PQ} \text{ son linealmente independientes.}$$

Las rectas se cruzan.

b) Como el plano debe ser perpendicular a la recta r, el vector director de r es el vector normal al plano π que hay que hallar.

$$\vec{u}=(2,-1,1);\ \pi \equiv 2x-y+z+D=0$$

Como el plano contiene el punto A (11,−2.5):

$$2x-y+z+D=0 \Rightarrow 2\cdot 11-(-2)+5+D=0 \Rightarrow D=-29$$

El plano perpendicular a la recta r que contiene el punto A (11,−2.5) es $\pi \equiv 2x-y+z-29=0$

2x – y + z = 29

Problema A.4:

El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.

a. *¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1 000 horas de funcionamiento?*

b. *¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1 000 y 2 000 horas de uso?*

Soluciones:

a) X = "Tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta"

$$X \sim N(1500, 200)$$

$$P(X < 1000) = P\left(Z < \frac{1000 - 1500}{200}\right) = P(Z < -2.5) = P(Z > -2.5) = 1 - P(Z < 2.5) =$$
$$= 1 - 0.9938 = 0.0062$$

Antes de 1 000 horas de funcionamiento fallarán el **0.62 %** de las impresoras.

b. ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1 000 y 2 000 horas de uso?

$$P(1000 < X < 2000) = P\left(\frac{1000 - 1500}{200} < Z < \frac{2000 - 1500}{200}\right) = P(-2.5 < Z < 2.5) =$$
$$= P(Z < 2.5) - P(Z < -2.5) = 0.9938 - 0.0062 = 0.9876$$

El **98.76 %** de las impresoras tendrán su primera avería cuando hayan transcurrido entre 1 000 y 2 000 horas.

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Sean las funciones f(x) = 2x⁴ + ax² + b y g(x) = – 2x³ + c.

a. *Calcule los valores a, b y c de manera que las gráficas de f(x) y g(x) cumplan las dos condiciones siguientes:*

- Se corten en el punto P(1, 1).

- En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

Dar las expresiones de las funciones resultantes.

b. *Suponiendo a = b = 1 en f(x), halle las asíntotas de la función:* $h(x)=\dfrac{f(x)}{x^3-1}$

Soluciones:

a) Si las gráficas se cortan en $P(1, 1)$, entonces $f(1) = 1$ y $g(1) = 1$:

$$f(1)=1 \Rightarrow 2\cdot 1^4 + a\cdot 1^2 + b = 1 \Rightarrow a+b=-1$$

$$g(1)=1 \Rightarrow -2\cdot 1^3 + c = 1 \Rightarrow c = 3$$

En $P(1, 1)$ coinciden las pendientes de las rectas tangentes, es decir, $f'(1) = g'(1)$

$$f'(x)=8x^3+2ax \quad ; \quad g'(x)=-6x^2$$

$$f'(1)=g'(1) \Rightarrow 8\cdot 1^3 + 2a\cdot 1 = -6\cdot 1^2 \Rightarrow 8+2a=-6 \Rightarrow 2a=-14 \Rightarrow a=-7$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=-1 \\ a=-7 \end{array}\right\} \Rightarrow -7+b=-1 \Rightarrow b=6$$

Las funciones son: $f(x)=2x^4-7x^2+6$ y $g(x)=-2x^3+3$

a = –7, b = 6; c = 3.

b) Si $a = b = 1$: $h(x)=\dfrac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}$

Asíntotas verticales:

Se iguala a cero el denominador: $x^3-1=0 \Rightarrow x=1$ Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1} = \frac{4}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Asíntota vertical: $x = 1$

Asíntotas horizontales:

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, los límites cuando x tiende a ±∞ son ±∞.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}=+\infty$$

No hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas:

$$y=mx+n$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^2+1}{x^4-x}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[h(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^2+1-2x^4+2x}{x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^3-1}=0$$

La asíntota oblicua es $y = 2x$.

Asíntota vertical: ***x* = *1***; La asíntota oblicua es ***y* = *2x***.

Problema B.2:

Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes.

Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto?

Soluciones:

x = número de cajas de bombones (2 kg de chocolate y 6 litros de leche para cada una)

y = número de tabletas de chocolate (4 kg de chocolate y 4 litros de leche para cada una)

z = número de paquetes de chocolate (1 kg de chocolate y 4 litros de leche para cada una)

Se fabricarán 12 unidades $x+y+z=12$

24 Kg de chocolate en total $2x+4y+z=24$

60 litros de leche $6x+4y+4z=60 \Rightarrow 3x+2y+2z=30$

Se resuelve el sistema por el **método de Gauss:**

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 3x+2y+2z=30 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 1 & 24 \\ 3 & 2 & 2 & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3\to F_3-3F_1]{F_2\to F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3\to 2F_3+F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2y-z=0 \\ -3z=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{-12}{-3}=4$$

$$2y-z=0 \Rightarrow 2y-4=0 \Rightarrow y=\frac{4}{2}=2$$

$$x+y+z=12 \Rightarrow x+2+4=12 \Rightarrow x=12-6=6$$

Deben fabricarse **6** cajas de bombones, **2** tabletas de chocolate y **4** paquetes de chocolate en polvo.

Otra forma: utilizando el **método de Cramer**

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 3x+2y+2z=30 \end{array}\right\} \ \mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad |\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=8+4+3-12-2-4=-3$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 24 & 4 & 1 \\ 30 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{96+48+30-120-24-48}{-3}=\frac{-18}{-3}=6$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 24 & 1 \\ 3 & 30 & 2 \end{vmatrix}}{|\mathrm{A}|}=\frac{48+60+36-72-30-48}{-3}=\frac{-6}{-3}=2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & 4 & 24 \\ 3 & 2 & 30 \end{vmatrix}}{|\mathrm{A}|}=\frac{120+48+72-144-48-60}{-3}=\frac{-12}{-3}=4$$

Problema B.3:

Consideremos la recta $r:\begin{cases}2x-y=5\\3x-4z=-1\end{cases}$ *, y el plano* $\pi_1 \equiv x-y+3z=12$

a. *Calcule la ecuación del plano π₂ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π₁.*

b. *Sabiendo que la recta r corta el plano π₁, averigüe el punto de intersección.*

Soluciones:

a) Punto de la recta r: $x=0\ \begin{cases}2x-y=5\\3x-4z=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\cdot 0-y=5\\3\cdot 0-4z=-1\end{cases} \Rightarrow y=-5; z=\dfrac{1}{4}$

$$P\left(0,-5,\frac{1}{4}\right)$$

Vector director de la recta r: $\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & -4\end{vmatrix}=4\vec{i}+8\vec{j}+3\vec{k} \qquad \vec{u}=(4,8,3)$

Como r está contenida en el plano π_2, el punto P está en dicho plano y uno de sus vectores directores es el vector director de la recta r.

Vector normal a π_1: $\vec{w}=(1,-1,3)$

Como el plano π_2 es perpendicular a π_1, este vector es uno de los vectores directores del plano π_2.

La ecuación general del plano π_2 es:

$$\begin{vmatrix}x-0 & y+5 & z-\frac{1}{4}\\ 4 & 8 & 3\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=0 \Rightarrow x\cdot\begin{vmatrix}8 & 3\\ -1 & 3\end{vmatrix}-(y+5)\cdot\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}+\left(z-\frac{1}{4}\right)\cdot\begin{vmatrix}4 & 8\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27x-9y-45-12z+3=0\Rightarrow 27x-9y-12z-42=0\Rightarrow \pi_2\equiv 9x-3y-4z-14=0$$

9x – 3y – 4 z = 14

b) Se resuelve el sistema

$$\left.\begin{array}{l}x-y+3z=12\\2x-y=5\\3x-4z=-1\end{array}\right\} \quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 12\\ 2 & -1 & 0 & 5\\ 3 & 0 & -4 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-3F_1]{F_2\to F_2-2F_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 12\\ 0 & 1 & -6 & -19\\ 0 & 3 & -13 & -37\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3\to F_3-3F_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 12\\ 0 & 1 & -6 & -19\\ 0 & 0 & 5 & 20\end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l}x-y+3z=12\\y-6z=-19\\5z=20\end{array}\right\}\Rightarrow z=\frac{20}{5}=4$$

$$y-6z=-19\Rightarrow y-24=-19\Rightarrow y=5$$

$$x-y+3z=12\Rightarrow x-5+12=12\Rightarrow x=5$$

El punto de intersección es (5, 5, 4)

Otra forma: se expresa la recta r en forma paramétrica y se sustituye en el plano π_1.

$$P\left(0,-5,\frac{1}{4}\right) \qquad \vec{u}=(4,8,3) \qquad r:\begin{cases} x=4\lambda \\ y=-5+8\lambda \\ z=\frac{1}{4}+3\lambda \end{cases}$$

$$\pi_1 \equiv x-y+3z=12 \Rightarrow 4\lambda-(-5+8\lambda)+3\cdot\left(\frac{1}{4}+3\lambda\right)=12 \Rightarrow 4\lambda+5-8\lambda+\frac{3}{4}+9\lambda=12$$

$$5\lambda=7-\frac{3}{4} \Rightarrow 5\lambda=\frac{25}{4} \Rightarrow \lambda=\frac{5}{4}$$

Sustituyendo el valor obtenido en la recta r se obtiene el punto (5, 5, 4):

$$x=4\cdot\frac{5}{4}=5 \qquad y=-5+8\cdot\frac{5}{4}=5 \qquad z=\frac{1}{4}+3\cdot\frac{5}{4}=4$$

Problema B.4:

Se sabe que el 8 % de los análisis de comprobación del níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.

***a.** Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3 %. Justifique si es cierto.*

***b.** Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3 %. Justifique si es cierto*

***c**. Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8.*

Soluciones:

a) Los análisis de comprobación de níquel son independientes

X = "número de análisis erróneos"

la variable X sigue una distribución binomial. $X \sim B(10, 0.08)$

n = 10 (número de análisis realizados)

Éxito: el análisis es erróneo p = 0.08 (probabilidad de que un análisis se erróneo) $q = 1 - p$ = 0.92

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{10}{k} \cdot 0.08^k \cdot 0.92^{n-k}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$$
$$1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0.08^0 \cdot 0.92^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.08^1 \cdot 0.92^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.08^2 \cdot 0.92^8\right] =$$
$$= 1 - \left[\frac{10!}{0! \cdot 10!} \cdot 0.92^{10} + \frac{10!}{1! \cdot 9!} \cdot 0.08 \cdot 0.92^9 + \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot 0.08^2 \cdot 0.92^8\right] = 0.0401$$

La afirmación no es cierta, la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es superior al 3 %, es **4.01 %**

b)
$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot p^3 \cdot q^7 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot 0.08^3 \cdot 0.92^7 = 0.0343$$

La afirmación no es cierta, la probabilidad de que exactamente 3 análisis sean erróneos es superior al 3 %, concretamente **3. 43 %.**

c) q = probabilidad de que el análisis sea correcto.

$$n \cdot q = 100 \cdot 0.92 = 92$$

Es falso, el número esperado de análisis correctos es **92**.

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

1. Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a. Calcule: $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$ 1.25 ptos

b. Halle las asíntotas de la función: $f(x)=\dfrac{x^3+5x^2}{x^2-1}$ 1.25 ptos

Problema A.2:

2. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&9\\10&-3&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&2&0\\1&3&9\\10&-3&4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1&0\\-3&-1\\6&0\end{pmatrix}$

Se plantea la siguiente ecuación matricial: $X\cdot A - C^t = X\cdot B$

a. Justifique razonadamente cuál es la dimensión de la matriz X. 0.5 ptos

b. Halle la matriz X que cumple la ecuación. 2 ptos

Problema A.3:

3. Dada la recta $r:\begin{cases}x=-2\lambda\\y=2+\lambda\\z=2+\lambda\end{cases}$, y dado el plano $\pi_1 \equiv x-3y+5z=2$

a. ¿Cuál es la posición relativa de la recta r y el plano π? 1.25 ptos

b. Calcular el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π. 1.25 ptos

Problema A.4:

4. Si una bombilla fluorescente presenta un 90 % de posibilidades de tener una vida útil de al menos 800 horas, seleccionando 20 bombillas fluorescentes de este tipo, justificar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

a. Al seleccionar exactamente 18 bombillas fluorescentes, más del 30 % tienen una vida útil de al menos 800 horas. 1 pto

b. La probabilidad de que dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas es menor que 0,7. 1 pto

c. El valor esperado de bombillas con una vida útil de al menos 800 horas si se toma una muestra de 100 bombillas fluorescentes es igual a 10. 0.5 ptos

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

1. Halle los valores de a y b para que la recta de ecuación *y = 6x + a* sea tangente a la curva $f(x)=\dfrac{bx-1}{bx+1}$ en el punto de abscisa x = 0.

Escriba las funciones que se obtienen. 2.5 ptos

Problema B.2:

2. Sea el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} kx+2y+6z=0 \\ 2x+ky+4z=2 \\ 2x+ky+6z=k-2 \end{array}\right\}$

a. Discuta el sistema según los valores del parámetro k. 1.75 ptos

b. Resuelva el sistema para *k* = 0. 0.75 ptos

Problema B.3:

3. Consideremos el punto A(1,2,1), y la recta $r:\begin{cases} x+y=5 \\ 3y+z=14 \end{cases}$

a. Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta r. 1.5 ptos

b. Consideremos P (1,4,2), un punto de la recta r. Y sea s la recta determinada por los puntos A y P. Calcule el ángulo que forman las rectas r y s. 1 pto

Problema B.4:

4. Mi despertador no funciona muy bien, pues el 20 % de las veces no suena. Cuando suena, llego tarde a clase el 20 % de las veces; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es 0,9.

a. Represente el diagrama de árbol del problema. 0.5 ptos

b. Justifique si el porcentaje de veces que llego tarde a clase y ha sonado el despertador es mayor que el 20 %. 0.75 ptos

c. Justifique si la probabilidad de que no llegue tarde a clase es menor que 0,5. 0.75 ptos

d. Si un día llego tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador? 0.5 ptos

RESPUESTAS OPCIÓN A

Problema A.1:

Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a. *Calcule:* $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$

b. *Halle las asíntotas de la función:* $f(x)=\dfrac{x^3+5x^2}{x^2-1}$

Soluciones:

a) Calculamos la integral indefinida mediante la integración por partes:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int vdu \qquad \text{siendo} \begin{cases} u = x; du = dx \\ dv = \cos xdx; v = senx \end{cases}$$

$$\int x\cos xdx = xsenx - \int senxdx = xsenx + \cos x + C$$

Por la regla de Barrow $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ siendo $F(x)$ una función primitiva de $f(x)$.

La integral definida es:

$$\int_0^{\pi/2} x\cos xdx = [xsenx+\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-(0\cdot sen0+\cos 0)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot 1+0-1=\frac{\pi-2}{2}$$

b) Asíntotas verticales:

Se iguala a cero el denominador: $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$ Calculamos los límites laterales

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}=\frac{6}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}=\frac{6}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}=\frac{4}{0^+}=+\infty \qquad \lim_{x\to -1^+}\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

Asíntotas verticales: $x = 1; x = -1$

Asíntotas horizontales:

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, los límites cuando x tiende a ±∞ son ±∞.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}=+\infty$$

No hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas:

$y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x^2}{x^3-x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+5x^2}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5x^2-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x}{x^2-1}=5$$

Asíntotas verticales: $x=1$; $x=-1$. La asíntota oblicua es $y=x+5$.

Problema A.2:

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 9\\ 10 & -3 & 5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 9\\ 10 & -3 & 4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -3 & -1\\ 6 & 0\end{pmatrix}$

Se plantea la siguiente ecuación matricial: X·A – C^t = X·B

a. *Justifique razonadamente cuál es la dimensión de la matriz X.*

b. *Halle la matriz X que cumple la ecuación.*

Soluciones:

a) Las operaciones indicadas en la ecuación deben ser posibles. Como la dimensión de la matriz C es 3x2 (3 filas y 2 columnas), su traspuesta será 2x3. El producto XA debe tener también dimensión 2x3 (2 filas y 3 columnas). Por lo tanto, X debe tener 2 filas.

La dimensión de la matriz A es 3x3 (3 filas y 3 columnas). Para poder multiplicar X por A el número de columnas de X tiene que ser igual al número de filas de A. De aquí se deduce que el número de columnas de X debe ser 3.

La dimensión de X es, entonces, 2x3.

b) $$X\cdot A-X\cdot B=C^t\Rightarrow X\cdot(A-B)=C^t\Rightarrow X=C^t\cdot(A-B)^{-1}$$

Se calcula la matriz inversa de $M=A-B$, si existe:

$$M=A-B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 9\\ 10 & -3 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 9\\ 10 & -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$M_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1 \quad ; \quad M_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0 \quad ; \quad M_{13}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$M_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0 \quad ; \quad M_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1 \quad ; \quad M_{23}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1 \quad ; \quad M_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0 \quad ; \quad M_{33}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1$$

$$\mathrm{Adj}(M)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (\mathrm{Adj}(M))^t=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$M^{-1}=\frac{1}{|M|}\cdot(\mathrm{Adj}(M))^t=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=C^t\cdot M^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 6\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Otra forma:

$$X \cdot M = C^t \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & x_1 + x_3 \\ -x_4 & -x_5 & x_4 + x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-x_1 = -1 \Rightarrow x_1 = 1 \qquad -x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$$

$$-x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = 3 \qquad -x_5 = -1 \Rightarrow x_5 = 1$$

$$x_1 + x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = 6 - x_1 \Rightarrow x_3 = 5 \qquad x_4 + x_6 = 0 \Rightarrow x_6 = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Problema A.3:

Dada la recta $r:\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$ *, y dado el plano* $\pi_1 \equiv x-3y+5z=2$

a. *¿Cuál es la posición relativa de la recta r y el plano π?*

b. Calcular el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Soluciones:

a) Se sustituye la recta en el plano:

$$x-3y+5z=2 \Rightarrow -2\lambda-3(2+\lambda)+5(2+\lambda)=2 \Rightarrow -2\lambda-6-3\lambda+10+5\lambda=2 \Rightarrow 0\cdot\lambda=-2$$

La ecuación no tiene solución, por lo tanto, la recta y el plano no tienen puntos en común, es decir, son paralelos.

La recta y el plano son **paralelos**

Otra forma:

Vector director de r: $\vec{u}=(-2,1,1)$

Vector normal al plano π: $\vec{n}=(1,-3,5)$

Hallamos el producto escalar de los vectores: $\vec{u}\cdot\vec{n}=(-2,1,1)\cdot(1,-3,5)=-2\cdot1+1\cdot(-3)+1\cdot5=0$

Los vectores son perpendiculares, por lo que la recta puede estar contenida en el plano o ser paralela a él.

Se elige un punto de r y se comprueba si pertenece al plano:

$$\lambda=0 \Rightarrow x=0,\ y=2,\ z=2 \qquad P(0,2,2)$$
$$x-3y+5z=2 \Rightarrow 0-3\cdot2+5\cdot2=2 \Rightarrow 4\neq2$$

El punto no pertenece al plano, por tanto la recta r y el plano π son paralelos.

b) El plano viene determinado por un punto de la recta r y dos vectores directores, que son el vector director de la recta r y el vector normal al plano π, ya que los planos deben ser perpendiculares.

Punto de r: $P(0,2,2)$ Vector director de r: $\vec{u}=(-2,1,1)$ Vector normal al plano π: $\vec{n}=(1,-3,5)$

La ecuación general del plano π' es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}-(y-2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+(z-2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8x-(y-2)\cdot(-11)+(z-2)\cdot5=0 \Rightarrow 8x+11y-22+5z-10=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \pi'\equiv 8x+11y+5z-32=0$$

8x + 11y + 5z = 32

Problema A.4:

Si una bombilla fluorescente presenta un 90 % de posibilidades de tener una vida útil de al menos 800 horas, seleccionando 20 bombillas fluorescentes de este tipo, justificar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

a. *Al seleccionar exactamente 18 bombillas fluorescentes, más del 30 % tienen una vida útil de al menos 800 horas.*

b. *La probabilidad de que dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas es menor que 0.7.*

c. *El valor esperado de bombillas con una vida útil de al menos 800 horas si se toma una muestra de 100 bombillas fluorescentes es igual a 10.*

Soluciones:

a) X = "número de bombillas que tienen una vida útil de al menos 800 horas"

La variable X sigue una distribución binomial. $X \sim B(20, 0.9)$

n = 20 (número de bombillas analizadas)

Éxito: la bombilla tiene una vida útil de al menos 800 horas p = 0.9 $q = 1 - p$ = 0.1

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{10}{k} \cdot 0.08^k \cdot 0.92^{n-k}$$

$$P(X = 18) = \binom{20}{18} \cdot 0.9^{18} \cdot 0.1^2 = \frac{20!}{18! \cdot 2!} \cdot 0.9^{18} \cdot 0.1^2 = 0.2852$$

La afirmación no es cierta, la probabilidad de que exactamente 18 bombillas tengan una vida útil de más de 800 horas es del **28.52 %,** inferior al 30 %.

b) Si dos bombillas o menos no duran al menos 800 horas significa que hay 18 bombillas o más que sí duran al menos 800 horas.

$$P(X \geq 18) = P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) =$$

$$= \binom{20}{18} \cdot 0.9^{18} \cdot 0.1^2 + \binom{20}{19} \cdot 0.9^{19} \cdot 0.1^1 + \binom{20}{20} \cdot 0.9^{20} \cdot 0.1^0 =$$

$$= \frac{20!}{18! \cdot 2!} \cdot 0.9^{18} + \frac{20!}{19! \cdot 1!} \cdot 0.9^{19} \cdot 0.1 + \frac{20!}{20! \cdot 0!} \cdot 0.9^{20} = 0.6769$$

La afirmación es cierta, la probabilidad de que dos bombillas o menos no tengan una duración de al menos 800 horas es 0.6769, menor que 0.7.

c)

$$n \cdot p = 100 \cdot 0.9 = 90$$

La afirmación no es cierta, se espera que 90 bombillas tengan una vida útil de al menos 800 horas.

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Halle los valores de a y b para que la recta de ecuación y = 6x + a sea tangente a la curva $f(x)=\dfrac{bx-1}{bx+1}$ *en el punto de abscisa x = 0.*

Escriba las funciones que se obtienen.

Solución:

Como la recta es tangente a la función f en x = 0, su pendiente coincide con la derivada de f en dicho punto, es decir

$$f'(0)=6 \qquad f'(x)=\frac{b\cdot(bx+1)-(bx-1)\cdot b}{(bx+1)^2}=\frac{b^2x+b-b^2x+b}{(bx+1)^2}=\frac{2b}{(bx+1)^2}$$

$$f'(0)=6\Rightarrow\frac{2b}{(b\cdot 0+1)^2}=6\Rightarrow 2b=6\Rightarrow b=3$$

$$f(x)=\frac{3x-1}{3x+1}$$

Por otro lado, la recta y la función f coinciden en el punto de abscisa x = 0, por tanto

$$f(0)=6\cdot 0+a\Rightarrow\frac{3\cdot 0-1}{3\cdot 0+1}=a\Rightarrow a=-1 \qquad y=6x-1$$

a =–1; b = 3.

Las funciones que se obtienen son $f(x)=\dfrac{3x-1}{3x+1}$ $\quad y=6x-1$

Problema B.2:

Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} kx+2y+6z=0 \\ 2x+ky+4z=2 \\ 2x+ky+6z=k-2 \end{array}\right\}$$

a. *Discuta el sistema según los valores del parámetro k.*

b. *Resuelva el sistema para k = 0.*

Solución:

Se estudia el rango de la matriz A y el de la matriz ampliada A^*.

$$\left.\begin{array}{l} kx+2y+6z=0 \\ 2x+ky+4z=2 \\ 2x+ky+6z=k-2 \end{array}\right\} \mathrm{A}=\begin{pmatrix} k & 2 & 6 \\ 2 & k & 4 \\ 2 & k & 6 \end{pmatrix} \quad \mathrm{A}^*=\begin{pmatrix} k & 2 & 6 & 0 \\ 2 & k & 4 & 2 \\ 2 & k & 6 & k-2 \end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} k & 2 & 6 \\ 2 & k & 4 \\ 2 & k & 6 \end{vmatrix}=6k^2+12k+16-12k-4k^2-24=2k^2-8$$

$$|\mathrm{A}|=0 \Rightarrow 2k^2-8=0 \Rightarrow k=\pm 2$$

- Si $k \neq \pm 2$ Rango(A) = Rango(A^*) = 3. El sistema es compatible determinado (tiene una única solución).

- Si $k = 2$ Rango(A) = Rango(A^*) = 2. En este caso el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}^*=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A^* es 2 porque la primera fila y la última son iguales.

$$|\mathrm{A}|=0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=8-12=-4\neq 0$$

- Si $k = -2$ Rango(A) = 2 ≠ Rango(A^*) = 3. En este caso el sistema es incompatible (no tiene solución).

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}^*=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{A}|=0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=8+12=20\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix}=-32-24-24-48=-128\neq 0$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} 2y+6z=0 \\ 2x+4z=2 \\ 2x+6z=-2 \end{array}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad |A|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-8$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-16-24}{-8}=\frac{-40}{-8}=5$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-24-24}{-8}=\frac{-48}{-8}=6$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{8+8}{-8}=\frac{16}{-8}=-2$$

Solución del sistema: $x = 5$, $y = 6$, $z = -2$

Problema B.3:

Consideremos el punto A(1,2,1), y la recta $r:\begin{cases} x+y=5 \\ 3y+z=14 \end{cases}$

a. *Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta r.*

b. *Consideremos P (1,4,2), un punto de la recta r. Y sea s la recta determinada por los puntos A y P. Calcule el ángulo que forman las rectas r y s.*

Solución:

a) Como la recta r es perpendicular al plano π, el vector director de r será el vector normal a π.

Vector director de la recta r: $\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k} \qquad \vec{u}=(1,-1,3)$

Plano: $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow x-y+3z+D=0$

El punto $A($1, 2, 1) pertenece al plano, por lo que sustituyendo en π las coordenadas de A obtenemos el valor de D.

$$x-y+3z+D=0 \Rightarrow 1-2+3\cdot 1+D=0 \Rightarrow D=-2$$

$$\pi \equiv x-y+3z-2=0$$

La ecuación general del plano es: $x-y+3z=2$

Vector director de la recta r: $\vec{w}=\overrightarrow{AP}=(1-1,\ 4-2,\ 2-1)=(0,2,1)$

b) Ángulo que forman los vectores directores de r y s:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|}=\frac{(1,-1,3)\cdot(0,2,1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+1^2}}=\frac{0-2+3}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{55}}$$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{55}}\right)=82.25^{\circ}$$

El ángulo α que forman las rectas r y s es 82.25°.

Problema B.4:

Mi despertador no funciona muy bien, pues el 20 % de las veces no suena. Cuando suena, llego tarde a clase el 20 % de las veces; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es 0.9.

a. *Represente el diagrama de árbol del problema.*

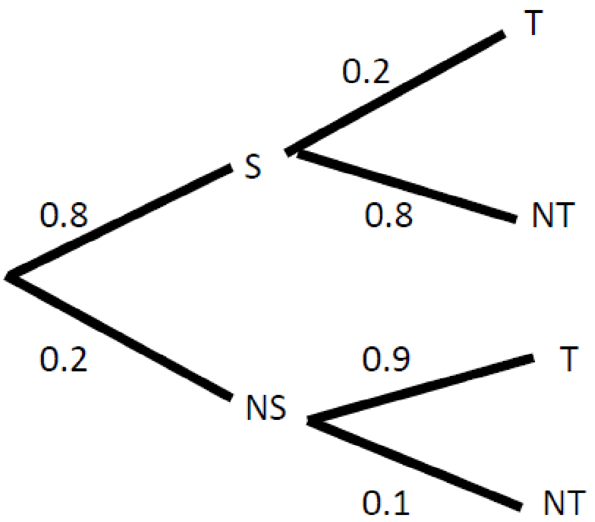
b. *Justifique si el porcentaje de veces que llego tarde a clase y ha sonado el despertador es mayor que el 20 %.*

c. *Justifique si la probabilidad de que no llegue tarde a clase es menor que 0.5.*

d. *Si un día llego tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador.*

Solución:

a) Se definen los sucesos S = "el despertador suena" y T = "llegar tarde a clase" y sus contrarios NS = "el despertador no suena" y NT = "no llegar tarde a clase"



b) $P(T \cap S) = P(S) \cdot P(T/S) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$

La afirmación no es cierta, la probabilidad de que llegue tarde a clase y suene el despertador es del 16 %, inferior al 20 %.

c) $P(NT) = P(S) \cdot P(NT/S) + P(NS) \cdot P(NT/NS) = 0.8 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.64 + 0.02 = 0.66$

La afirmación no es cierta, la probabilidad de que no llegue tarde a clase es superior a 0.5.

d)
$$P(S/T) = \frac{P(S \cap T)}{P(T)} = \frac{P(S) \cdot P(T/S)}{1 - P(NT)} = \frac{0.8 \cdot 0.2}{1 - 0.66} = \frac{0.16}{0.34} = 0.4706$$

La probabilidad de que, habiendo llegado tarde a clase, haya sonado el despertador, es 0.4706.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2020

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escoger solo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realiza más de cuatro ejercicios solo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación $AXA^t = B$ en donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y A^t denota traspuesta de A.

1) [0.5 PUNTOS] Despeja la matriz X en la igualdad dada.

2) [0.5 PUNTOS] Comprueba que A es invertible y calcula su inversa.

3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

4) [1 PUNTO] Calcula X.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS] Considera la función $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera

2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

3) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.

4) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se emite un rayo láser desde el punto $P = (1, 2, 8)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (1, 2, -3)$. El plano $-x - y + 3z = -8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.

2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de rayo y lámina.

3) [1 PUNTO] Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]
Un determinado test rápido para anticuerpos de COVID-19 consigue detectar concentraciones iguales o superiores a 10 U, en donde U son unidades de concentración de anticuerpos. De esta forma, concentraciones iguales o superiores a 10 U dan un resultado positivo, mientras que concentraciones inferiores a 10 U dan un resultado negativo en el test. Suponemos que la concentración de anticuerpos sigue una distribución normal con media 20 U y desviación típica 5 U y que todas las personas que han pasado la enfermedad han desarrollado anticuerpos.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que una persona que ha pasado la enfermedad de negativo en el test.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula qué concentraciones debería detectar el test para que la probabilidad calculada en el apartado anterior fuese del 1%.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]
En un juego de mesa se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes, respectivamente. El rival ha gastado 41 diamantes. Sabemos que tiene el doble de submarinos que de tanques, y que el número de submarinos más el de aviones es 10.

1) [1 PUNTO] Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.

2) [0.5 PUNTOS] Clasifica el sistema.

3) [1 PUNTO] Resuelve el sistema.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]
Considera la función $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$.

1) [1 PUNTO] Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

2) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva de $f(x)$.

3) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 2$, y el eje OX de abscisas.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]
Considera los puntos $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 3, -4)$, $C = (4, 3, 2)$.

1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

2) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano que contiene los tres puntos.

3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]
En un concurso de televisión el premio consiste en lanzar de forma independiente un dado cúbico y una moneda (suponemos que ambos son perfectos). Por cada punto obtenido con el dado sumamos 100 € (si sacamos un 1 ganamos 100 €, si sacamos un 2 ganamos 200 €, etc.) y si en la moneda sale "Cara" sumamos 300 € adicionales.

1) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de ganar exactamente 400 €.

2) [0.5 PUNTOS] Calcula la probabilidad de ganar 400 € si sabemos que ha salido "Cara" en la moneda.

3) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que haya salido "Cara" sabiendo que hemos ganado 400 €.

Ejercicio 1:

Considera la ecuación $AXA^t = B$ en donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y A^t denota la traspuesta de A.

$a)$ Despeja la matriz X en la igualdad dada.

$b)$ Comprueba que A es invertible y calcula su inversa.

$c)$ Comprueba que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

$d)$ Calcula X.

Solución:

$a)$ $A \cdot X \cdot A^t = B$; Si la matriz A tiene inversa, entonces:

$\rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^t \cdot (A^t)^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot (A^t)^{-1} \rightarrow I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot B \cdot (A^t)^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B \cdot (A^t)^{-1}}$.

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot (A^t)^{-1}$$

$b)$ Sabemos que una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Luego } A \text{ es invertible}$$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. $A^{-1} = \frac{Adj. de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$c)$ $(A^{-1})^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $|A^t| = |A| = -2$. $(A^t)^t = A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Adj. de\ (A^t)^t = Adj. de\ A$

$(A^t)^{-1} = \frac{Adj. de\ (A^t)^t}{|A^t|} = \frac{Adj. de\ A}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow \underline{(A^t)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

$(A^t)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Por tanto: } (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

$d)$ Sustituimos los valores obtenidos en la ecuación del apartado a)

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot (A^t)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2:

Considera la función $f(x) = \frac{sen\,x}{x}$.

$a)$ Calcula la derivada primera.

$b)$ Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

$c)$ Calcula las asíntotas.

$d)$ Calcula $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Solución:

$a)$ Derivamos: $f'(x) = \frac{cos\,x \cdot x - sen\,x \cdot 1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x \cdot cos\,x - sen\,x}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{x \cdot cos\,x - sen\,x}{x^2}$$

$b)$ La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto, por tanto:

$$m = f'(\pi) = \frac{\pi \cdot cos\,\pi - sen\,\pi}{\pi^2} = \frac{\pi \cdot (-1) - 0}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi} \Rightarrow.$$

$$m = -\frac{1}{\pi}$$

$c)$ Asíntotas horizontales: Calculamos el límite cuando x tiende a más o menos infinito.

$k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{sen\,x}{x} = 0$ ya que el seno está acotado y el denominador tiende a infinito.

Asíntota horizontal: $\boldsymbol{y = 0}$

Asíntotas verticales: La única asíntota vertical posible es para $x = 0$, pues se anula el denominador, pero resulta $sen\,0 = 0$, por lo cual, para determinar si $x = 0$ es asíntota se debe resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\,x}{x} = \frac{sen\,0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{cos\,x}{1} = \frac{1}{1} = 1 \neq \infty.$$

No hay asíntota vertical. Tampoco puede haber asíntota oblicua ya que hay asíntota horizontal.

$d)$ Ya lo hemos calculado:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Ejercicio 3:

Se emite un rayo láser desde el punto $P(1,2,8)$ en la dirección del vector $\vec{v}=(1,2,-3)$. El plano $\pi \equiv -x-y+3z=-8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

$a)$ Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.

$b)$ Determina la posición relativa del rayo y la lámina.

$c)$ Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

Solución:

$a)$ Es la recta que pasa por el punto $P(1,2,8)$ y tiene de vector de dirección: $\vec{v}=(1,2,-3)$. Su ecuación continua es:

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-8}{-3}$$

$b)$ Hallamos las ecuaciones implícitas de la recta, y resolvemos el sistema determinado por la recta y el plano:

$$r \equiv \left.\begin{array}{r} 2x-2=y-2 \\ -3x+6=z-8 \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \left\{\begin{array}{l} 2x-y=0 \\ 3x+z=14 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ 3x+z=14 \\ x+y-3z=8 \end{array}\right\}..$$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 14 \\ 1 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -1-2-9=-12 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M=3.$$

El sistema es compatible y determinado, por tanto, la recta y el plano se cortan en un punto:

$$La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes$$

$c)$ El plano pedido debe tener como vector ortogonal el vector de dirección de la recta:

$$x+2y-3z+D=0$$

Imponemos que pase por el origen de coordenadas, luego $D=0$. El plano pedido es:

$$\boldsymbol{x+2y-3z=0}$$

Ejercicio 4:

Un determinado test rápido para anticuerpos de COVID-19 consigue detectar concentraciones iguales o superiores a 10 u, en donde u son unidades de concentración de anticuerpos. De esta forma, concentraciones iguales o superiores a 10 u dan un resultado positivo, mientras que concentraciones inferiores a 10 u dan un resultado negativo en el test. Suponemos que la concentración de anticuerpos sigue una distribución normal con media 20 u y desviación típica 5 u y que todas las personas que han pasado la enfermedad han desarrollado anticuerpos.

$a)$ Calcula la probabilidad de que una persona que ha pasado la enfermedad de negativo en el test.

$b)$ Calcula qué concentraciones debería detectar el test para que la probabilidad calculada en el apartado anterior fuese del 1 %.

Solución:

$a)$ Sabemos que: $\mu = 20;\ \ \sigma = 5.\ X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(20, 5)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-20}{5}$.

Como el resultado es negativo para concentraciones inferiores a 10, calculamos:

$P = P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10-20}{5}\right) = P\left(Z < \frac{-10}{5}\right) = P(Z < -2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$

La probabilidad de que una persona que ha pasado la enfermedad de negativo en el test es de **0.0228**.

$b)$ Nos piden que: $P = P(X < y) = 1\ \% = 0.01.$

$P = P\left(Z < \frac{y-20}{5}\right) = 0.01.$

No es posible buscar en $N(0, 1)$.

Se hace lo siguiente:

$P\left(Z < \frac{y-20}{5}\right) = P\left(Z > -\frac{y-20}{5}\right) = 1 - P\left(Z \le -\frac{y-20}{5}\right) = 0.01 \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(Z \le -\frac{y-20}{5}\right) = 1 - 0.01 = 0.99.$

Buscando en la tabla $N(0, 1)$ de forma inversa, a 0.00 le corresponde 2.33, aproximadamente:

$-\frac{y-20}{5} = 2.33;\ -y + 20 = 11.65;\ \ y = 20 - 11.65 = 8.35.$

La concentración de $\mathbf{8.35\ u}$ tienen una probabilidad del 1 %

Ejercicio 5:

En un juego de mesa se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes, respectivamente. El rival ha gastado 41 diamantes. Sabemos que tiene el doble de submarinos que de tanques, y que el número de submarinos más el de aviones es 10.

$a)$ Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.

$b)$ Clasifica el sistema.

$c)$ Resuelve el sistema.

Solución:

$a)$ Llamamos x, y, z al número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales es el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + 5z &= 41 \\ y &= 2x \\ y + z &= 10 \end{aligned}\right\}.$$

$b)$ La matriz de coeficientes es: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos su rango:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 10 - 6 = 3 \neq 0 \Rightarrow$$

Por lo que su rango es 3, igual al de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

Es un sistema compatible y determinado.

$c)$ Resolvemos por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 41 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 10 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-41+50}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 41 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{100-82}{3} = \frac{18}{3} = 6.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 41 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-10+82-60}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

El rival tiene **3** tanques, **6** submarinos y **4** aviones.

Ejercicio 6:

Considera la función $f(x) = \frac{2}{x^2}$.

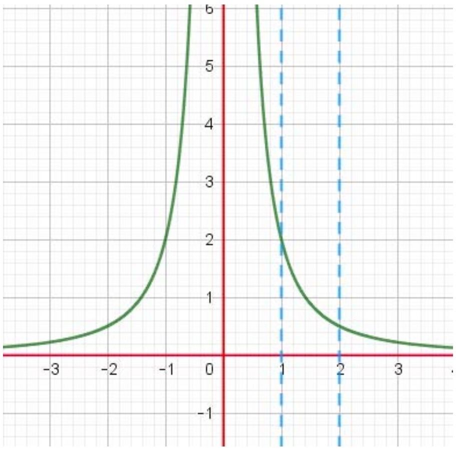
$a)$ Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

$b)$ Halla una primitiva de $f(x)$.

$c)$ Calcula el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 2$ y el eje de abscisas.

Solución:

Como es una función racional cuyo denominador se anula en $x = 0$, el dominio es toda la recta real excepto ese punto.



$$D(f) \Rightarrow R - \{0\}$$

Por tanto, la recta $x = 0$, es una asíntota vertical.

Para determinar la asíntota horizontal, si existe, calculamos el límite cuando x tiende a más infinito o menos infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

Por tanto, la recta $y = 0$, es una asíntota horizontal. No puede haber asíntotas oblicuas.

Asíntota vertical: $\boldsymbol{x = 0}$. Asíntota horizontal: $\boldsymbol{y = 0}$.

Es una función par, de eje de simetría el eje de ordenadas. Es siempre positiva. Creciente desde menos infinito a 0, y decreciente desde 0 a más infinito. No tiene ni máximos ni mínimos relativos.

$b)$ $F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \frac{2}{x^2} \cdot dx = 2 \cdot \int x^{-2} \cdot dx = 2 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{2}{x} + C$

$$F(x) = -\frac{2}{x} + C$$

$c)$ $Área = \int_1^2 f(x) \cdot dx = [F(x)]_1^2 = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^2 = \left[\frac{2}{x}\right]_2^1 = \frac{2}{1} - \frac{2}{2} \Rightarrow Área = 1\,u^2.$

$$Área = 1\,u^2$$

Ejercicio 7:

Considera los puntos $A(1,2,1), B(2,3,-4), C(4,3,2)$.

$a)$ Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

$b)$ Halla la ecuación del plano π que contiene los tres puntos.

$c)$ Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

Solución:

$a)$ Los puntos A y B.determinan el vector $\overrightarrow{AB} = [B - A] = (1,1,-5)$.

Escribimos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $A(1,2,1)$, y tiene de vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (1,1,-5)$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - 5\lambda \end{cases}$$

$b)$ Calculamos otro vector de orientación del plano: $\overrightarrow{AC} = [C - A] = (3,1,1)$. Y ya tenemos un punto: $A(1,2,1)$, y dos vectores de orientación del plano: $\overrightarrow{AB} = (1,1,-5)$ y $\overrightarrow{AC} = (3,1,1)$.

Escribimos la ecuación general del plano π que contiene los puntos A, B y C:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6(x-1) - 16(y-2) - 2(z-1) = 0;$$

$3(x-1) - 8(y-2) - (z-1) = 0 = 3x - 3 - 8y + 16 - z + 1.$

$$\boldsymbol{\pi \equiv 3x - 8y - z + 14 = 0}$$

$c)$ El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan. Ya tenemos determinados los vectores:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |i - 15j + k - 3k + 5i - j| =$$

$= \frac{1}{2} \cdot |6i - 16j - 2k| = |3i - 8j - k| = \sqrt{3^2 + (-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 64 + 1} = \sqrt{74}.$

$$S_{ABC} = \sqrt{74}\, u^2 \cong 8.6\, u^2$$

Ejercicio 8:

En un concurso de televisión el premio consiste en lanzar de forma independiente un dado cúbico y una moneda (suponemos que ambos perfectos). Por cada punto obtenido con el dado sumamos 100 euros (si sacamos un 1 ganamos 100 euros, si sacamos un 2 ganamos 200 euros, etc.) y si en la moneda sale cara sumamos 300 euros adicionales.

$a)$ Calcula la probabilidad de ganar exactamente 400 euros.

$b)$ Calcula la probabilidad de ganar 400 euros si sabemos que ha salido cara en la moneda.

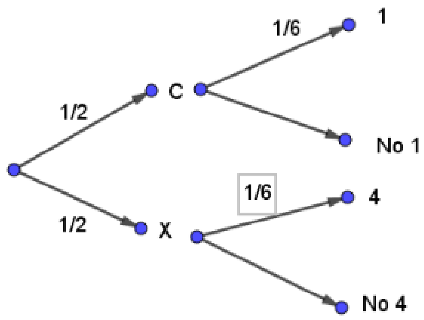
$c)$ Calcula la probabilidad de que haya salido cara sabiendo que hemos ganado 400 euros.

Solución:

$a)$ Para ganar exactamente 400 euros, podemos sacar cara y un 1, o sacar cruz y un 4. Por lo que la probabilidad de ganar es:

$$P = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

La probabilidad de ganar exactamente 400 euros es $\mathbf{\frac{1}{6}}$



$b)$ Nos piden ahora una probabilidad condicionada: $P(ganar\ 400/C)$

$$P(ganar400/C) = \frac{P(ganar\ 400 \cap C)}{P(C)} = \frac{1/12}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

La probabilidad de ganar 400 euros si sabemos que ha salido cara en la moneda es $\mathbf{\frac{1}{6}}$

$c)$ Nos piden ahora otra probabilidad condicionada: $P(C/ganar\ 400)$

$$P(C/ganar\ 400) = \frac{P(ganar\ 400 \cap C)}{P(ganar400)} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{2}$$

La probabilidad de que haya salido cara sabiendo que hemos ganado 400 euros es $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – SEPTIEMBRE 2020

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escoger solo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realiza más de cuatro ejercicios solo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+(1-t)y &= t \\ (1+t)x-3y &= -t \end{cases}$ dependiente del parámetro t.

1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de t el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro t si es necesario.

2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x)=\dfrac{1-\cos(x)}{x}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera

2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=\pi$.

3) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x\to 0} f(x)$.

4) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A=(2,1,5)$, $B=(3,4,1)$ y la recta $r=\begin{cases} x &= 3-\lambda \\ y &= 4-3\lambda \\ z &= 1-4\lambda \end{cases}$

1) [0.5 PUNTOS] Se emite un rayo láser desde el punto A. Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser para que impacte en el punto B.

2) [1 PUNTO] Calcula la ecuación de una recta que pase por B y sea perpendicular al rayo y a la recta r.

3) [1 PUNTO] Calcula la ecuación del plano que contiene al rayo y a la recta r.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]
Un tenista juega el 20% de sus partidos en tierra batida y el resto en otras superficies. Jugando en tierra batida gana el 90% de sus partidos, pero en otras superficies, solo consigue ganar el 40% de los partidos.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que gane un partido concreto, sin que sepamos en qué superficie juega.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que haya jugado un partido concreto en tierra batida sabiendo que ha ganado dicho partido.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]
Considera la ecuación matricial $AX - X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, en donde a es un parámetro real.

1) [1 PUNTO] Despeja la matriz X de la ecuación anterior.

2) [0.5 PUNTOS] Halla los valores de a para los que no es posible calcular X.

3) [1 PUNTO] Calcula X para $a = 1$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]
Considera la función $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leq \pi/2 \\ \dfrac{2}{x} + a & \text{si } x > \pi/2 \end{cases}$, siendo a un parámetro real.

1) [0.5 PUNTOS] Halla a para que $f(x)$ sea continua.

2) [0.5 PUNTOS] Calcula $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

3) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva de $f(x)$ para $x \leq \pi/2$.

4) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = \pi/2$, y el eje OX de abscisas.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]
Considera los puntos $A = (1, 3, 1)$, $B = (4, 1, -2)$, $C = (3, 5, 2)$, $D = (1, 1, 3)$.

1) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano, Π, que contiene los puntos A, B, C.

2) [0.5 PUNTOS] Comprueba si el punto D está contenido en el plano Π.

3) [1 PUNTO] Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]
En la Unión Europea hay aproximadamente 250 millones de hombres adultos, de los cuales 12 millones miden más de 190cm. En Holanda hay aproximadamente 7 millones de hombres adultos, cuya altura sigue una distribución normal con media 184 cm y desviación típica 7 cm.

Supongamos que elegimos un hombre adulto al azar de toda la Unión Europea.

1) [0.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm.

2) [0.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que sea holandés.

3) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm sabiendo que es holandés.

4) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que sea holandés sabiendo que mide más de 190 cm.

Ejercicio 1:

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+(1-t)y=t \\ (1+t)x-3y=-t \end{cases}$ dependiente del parámetro t.

$a)$ Determina para qué valores del parámetro t el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro t si es necesario.

$b)$ Determina para qué valores del parámetro t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

$c)$ Determina para qué valores del parámetro t el sistema no tiene solución.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1-t \\ 1+t & -3 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1-t & 1 \\ 1+t & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema tiene solución única cuando los rangos de las matrices de coeficientes son iguales e igual al número de incógnitas. En el caso que nos ocupa, este rango tiene que ser dos.

$\begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ 1+t & -3 \end{vmatrix}=-3-(1+t)(1-t)=0=3+1-t^2=4-t^2 \to\ t^2=4 \Rightarrow t_1=-2, t_2=2.$

El sistema es compatible y determinado, tiene solución única, $\forall t \in R-\{-2,2\}$

Resolvemos por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ 1+t & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-3+1-t}{4-t^2}=\frac{-2-t}{(2+t)(2-t)}=\frac{-(2+t)}{(2+t)(2-t)}=\frac{-1}{2-t}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+t & -1 \end{vmatrix}}{(2+t)(2-t)}=\frac{-1-1-t}{(2+t)(2-t)}=\frac{-2-t}{(2+t)(2-t)}=\frac{-(2+t)}{(2+t)(2-t)}=\frac{-1}{2-t}.$$

$$x=y=\frac{1}{t-2}, \forall t \in R-\{-2,2\}$$

$b)$ Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado) cuando los rangos de las matrices de coeficientes son iguales y menores que el número de incógnitas. En el caso que nos ocupa, este rango tiene que ser menor que dos.

Para $t=-2 \to M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y su rango es 1, igual al rango de M, luego el sistema es compatible e indeterminado.

El sistema es: $\left.\begin{matrix} x+3y=-2 \\ -x-3y=2 \end{matrix}\right\}$, equivalente a $x+3y=-2 \to x=-2-3\lambda$.

$$x=-2-3\lambda, y=\lambda, \forall \lambda \in R$$

$c)$ Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema no tiene soluciones (incompatible) cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son distintos. En el caso que nos ocupa tiene que ser que el rango de la matriz de los coeficientes $M=1$ y el rango de la matriz ampliada sea igual a 2.

Para $t=2$, $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$; $M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ de rango 1 y 2 respectivamente, luego el sistema es incompatible.

Ejercicio 2:

Considera la función $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$.

$a)$ Calcula la derivada primera.

$b)$ Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

$c)$ Calcula $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$d)$ Calcula las asíntotas.

Solución:

a) Derivamos: $f'(x) = \frac{sen\, x\cdot x-(1-\cos x)\cdot 1}{x^2} = \frac{x\cdot sen\, x-1+cox}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{x\cdot sen\, x - 1 + cox}{x^2}$$

$b)$ La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto es igual al valor de su primera derivada en ese punto.

$$m = f'(\pi) = \frac{\pi \cdot sen\, \pi - 1 + \cos \pi}{\pi^2} = \frac{\pi \cdot 0 - 1 + (-1)}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2}$$

$$\boldsymbol{m = -\frac{2}{\pi^2}}$$

$c)$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ Indeterminado. Usamos la regla de L'Höpital

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0+sen\, x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$$

$d)$ Podría parecer que hay una asíntota vertical para $x = 0$. Pero no, pues al calcular el límite vemos que en ese punto la función no tiene a infinito, sino a cero.

Calculamos la asíntota horizontal, calculando el límite cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

El numerador está acotado, y el denominador tiene a infinito, luego la función tiende a cero.

Asíntota horizontal: $\boldsymbol{y = 0}$.

No hay asíntota oblicua.

Ejercicio 3:

Considera los puntos $A(2,1,5), B(3,4,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = 4-3\lambda \\ z = 1-4\lambda \end{cases}$.

$a)$ Se emite un rayo láser desde el punto A. Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser para que impacte en el punto B.

$b)$ Calcula la ecuación de una recta t que pase por B y sea perpendicular al rayo y a la recta r.

$c)$ Calcula la ecuación del plano π que contiene al rayo y a la recta r.

Solución:

$a)$ Queremos obtener la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos. Tomamos como punto en B, y como vector de dirección el:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(3,4,1)-(2,1,5)] = (1,3,-4) \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (1,3,-4)$.

Su ecuación continua es:

$$rayo: \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{-4}$$

$b)$ Buscamos el vector director de la recta t que es es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto escalar de los vectores directores de las rectas $r\ y\ rayo$, que son los siguientes: $\overrightarrow{v_r} = (1,3,4)\ y\ \overrightarrow{v_{rayo}} = (1,3,-4)$.

$$\overrightarrow{v_t'} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -12i + 4j + 3k - 3k - 12i + 4j = -24i + 8j \to \overrightarrow{v_t} = (3,-1,0).$$

La recta t pedida que pasa por $B(3,4,1)$ y de vector $\overrightarrow{v_t} = (3,-1,0)$es:

$$t \equiv \begin{cases} x = 3+3\lambda \\ y = 4-\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

$c)$ Si plano β que contiene al rayo y a la recta r tiene como vectores de oreintación a los vectores $\overrightarrow{v_r} = (1,3,4)\ y\ \overrightarrow{v_{rayo}} = (1,3,-4)$ y contiene al punto $B(3,4,1) \in r$:

$$\beta(B;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 = -24(x-3) + 4(y-4) \to 3x - y - 5 = 0;$$

$$\mathbf{3x - y - 5 = 0}$$

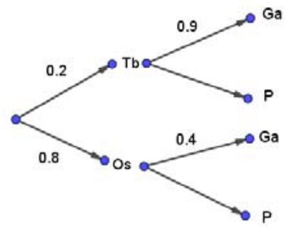
Ejercicio 4:

Un tenista juega el 20 % de sus partidos en tierra batida y el resto en otras superficies. Jugando en tierra batida gana el 90 % de sus partidos, pero en otras superficies, solo consigue ganar el 40 % de los partidos.

a) Calcula la probabilidad de que gane un partido concreto, sin que sepamos en qué superficie juega.

b) Calcula la probabilidad de que haya jugado un partido concreto en tierra batida sabiendo que ha ganado dicho partido.

Solución:



a) Llamamos al suceso tierra batida: Tb; Al suceso otras superficies: Os; Al suceso Gana: Ga, y al suceso pierde: P.

$P(Ga) = P(Tb \cap Ga) + P(Os \cap Ga) = P(Tb) \cdot P(Ga/Tb) + P(Os) \cdot P(Ga/Os) = 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.4 = 0.18 + 0.32 = 0.5$

La probabilidad de que gane un partido concreto es **0.5**.

b) Nos piden una probabilidad condicionada: $P(Tb/Ga)$

$$P(Tb/Ga) = \frac{P(Tb \cap Ga)}{P(Ga)} = \frac{P(Tb) \cdot P(Ga/Tb)}{P(Ga)} = \frac{0.2 \cdot 0.9}{0.5} = \frac{0.18}{0.5} = 0.36.$$

La probabilidad de que haya jugado un partido concreto en tierra batida sabiendo que ha ganado dicho partido es **0.36**.

Ejercicio 5:

Considera la ecuación matricial $AX - X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, en donde a es un parámetro real.

a) Despeja la matriz X de la ecuación anterior.

b) Halla los valores de a para los que no es posible calcular X.

c) Calcula X para $a = 1$.

Solución:

a) Nos dan la ecuación: $AX - X = B = AX - I \cdot X = (A - I) \cdot X$;

Si existe la matriz inversa de $(A - I)$ multiplicamos por ella:

$(A - I)^{-1} \cdot (A - I) \cdot X = (A - I)^{-1} \cdot B \rightarrow X = (A - I)^{-1} \cdot B$.

$$\boldsymbol{X = (A - I)^{-1} \cdot B}$$

b) Ya hemos comentado que no se puede, si no existe la matriz inversa de $(A - I)$. Para que exista debe ser su determinante distinto de cero.

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow |A - I| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix} = a - 1 + 1 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

No es posible despejar $\boldsymbol{X}$ cuando $\boldsymbol{a = 0}$.

c) Para $a = 1$ es $A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A-I)^t}{|A-I|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A - I)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6:

Considera la función $f(x) = \begin{cases} sen\,x & si \;\; x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{x} + a & si \;\; x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$, siendo a un parámetro real.

$a)$ Halla a para que $f(x)$ sea continua.

$b)$ Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

$c)$ Calcula el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ y el eje OX de abscisas.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua para $x < \frac{\pi}{2}$ pues es la función seno, continua en toda la recta real. Y es continua para $x > \frac{\pi}{2}$, pues la función racional $g(x) = \frac{2}{x} + a$ sólo no es continua para $x = 0 < \frac{\pi}{2}$. Como es una función definida a trozos cabe la duda de si es continua en el punto de unión: $x = \frac{\pi}{2}$.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(sen\ \frac{\pi}{2}\right) = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{x} + a\right) = \frac{4}{\pi} + a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \frac{4}{\pi} + a = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{4}{\pi} + a;\ \ a = 1 - \frac{4}{\pi} \Rightarrow$$

Si $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\pi - 4}}{\boldsymbol{\pi}}$, la función es continua en toda la recta real.

$b)$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{x} + a\right) = 0 + a \Rightarrow$

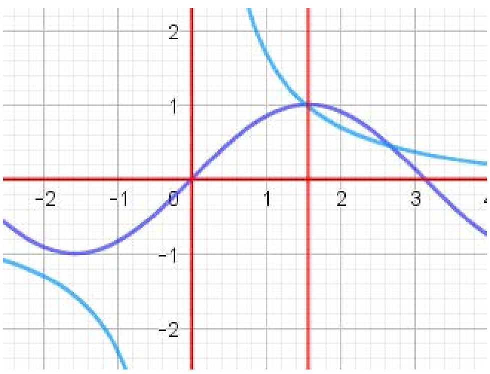
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \boldsymbol{a}$$

$c)$ En el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la función es $f(x) = sen\ x$.

$$Área = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ x \cdot dx = [-cos\ x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= cos\ 0 - cos\ \frac{\pi}{2} = 1$$

$$Área = \boldsymbol{1}\ u^2$$



Autor: Andrés García Mirantes

Ejercicio 7:

Considera los puntos $A(1,3,1), B(4,1,-2), C(3,5,2)\ y\ D(1,1,3)$.

$a)$ Halla la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

$b)$ Comprueba si el punto D está contenido en el plano π.

$c)$ Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$.

Solución:

$a)$ Tres puntos determinan un plano. Buscamos dos vectores de orientación de dicho plano:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(4,1,-2) - (1,3,1)] = (3,-2,-3).$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(3,5,2) - (1,3,1)] = (2,2,1).$$

Sustituimos esos vectores en la ecuación general del plano π y usamos uno de los puntos, el A:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to 4(x-1) - 9(y-3) + 10(z-1) \to$$

$$4x - 4 - 9y + 27 + 10z - 10 = 0 \to\ 4x - 9y + 10z + 13 = 0;$$

$$\pi \equiv 4x - 9y + 10z + 13 = 0$$

$b)$ Para que el punto $D(1,1,3)$ esté contenido en el plano, debe verificar su ecuación:

$$4\cdot 1 - 9\cdot 1 + 10\cdot 3 + 13 = 47 - 9\ \neq 0$$

No la verifica, luego:

El punto $D(1,1,3)$ NO está contenido en el plano

$c)$ Hallamos el producto escalar de dichos vectores:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(3,\ -2,\ -3)\cdot(2,\ 2,\ 1)}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+1^2}}$$

$$= \frac{6\ -\ 4\ -\ 3}{\sqrt{9+4+9}\cdot\sqrt{4+4+1}} = \frac{-1}{\sqrt{22}\cdot\sqrt{9}} = \frac{-1}{\sqrt{198}} = -0.0711 \Rightarrow \alpha = arc\ cos\,(-0.0711) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\alpha = 94^\circ\ 04'\ 31''}$$

Ejercicio 8:

En la Unión Europea hay aproximadamente 250 millones de hombres adultos, de los cuales 12 millones miden más de 190 cm. En Holanda hay aproximadamente 7 millones de hombres adultos, cuya altura sigue una distribución normal con media 184 cm y desviación típica 7 cm. Supongamos que elegimos un hombre adulto al azar de toda la Unión Europea.

$a)$ Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm.

$b)$ Calcula la probabilidad de que sea holandés.

$c)$ Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm sabiendo que es holandés.

$d)$ Calcula la probabilidad de que sea holandés sabiendo que mide más de 190 cm.

Solución:

$a)$ En toda la Unión Europea hay 250 millones de hombres adultos de los que 12 millones miden más de 190 cm, por lo que: $P = \frac{12}{250} = 0.048.$

La probabilidad de que mida más de 190 cm es de **0.048**.

$b)$ En la Unión Europea hay 7 millones de holandeses, luego $P = \frac{7}{250} = 0.028.$

La probabilidad de que sea holandés es de **0.028**.

$c)$ En Holanda la altura sigue una distribución normal de: $\mu = 184;\ \ \sigma = 7.$

$X \rightarrow N(\mu, \sigma) = N(184, 7).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-184}{7}.$

Calculamos la probabilidad de que mida más de 190 cm:

$$P = P(X > 190) = P\left(Z > \frac{190-184}{7}\right) = P\left(Z > \frac{6}{7}\right) = P(Z > 0.857) = 1 - P(Z \leq 0.857)$$
$$\cong 1 - 0.8043 = 0.1957.$$

La probabilidad de que mida más de 190 cm sabiendo que es holandés es de **0.1957**.

$d)$ Nos piden ahora una probabilidad condicionada, de la que ya conocemos todo lo que debemos usar:

$P(>190|Ho) = 0.1957$ por el apartado c)

La probabilidad de que sea holandés, $P(Ho) = 0.028$ por el apartado b)

La probabilidad de que mida más de 190, $P(>190) = 0.048$ por el apartado a). Por tanto:

$$P = P(Ho| > 190) = \frac{P(>190 \cap Ho)}{P(>190)} = \frac{P(Ho) \cdot P(>190|Ho)}{P(>190)} = \frac{0.028 \cdot 0.1957}{0.048} = \frac{0.0055}{0.048} = 0.1146.$$

La probabilidad de que sea holandés sabiendo que mide más de 190 cm es de **0.1146**.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

CASTILLA LA MANCHA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

Ejercicio 1:

a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

Ejercicio 2:

a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} ax & -ay & -z & = a \\ ax & -ay & & = a \\ ax & +2y & -z & = 1 \end{array} \right. .$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Ejercicio 3:

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \\ \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xe^{-x}}{1 + 2x - cos(x^2)}$.

Ejercicio 4:

Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 5:

a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$.

b) **[1,25 puntos]** Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.

Ejercicio 6:

Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 + \lambda - \mu \\ y & = & -\lambda + \mu \\ z & = & -2 + 2\lambda \end{array} \right.$.

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

b) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3, -3, 2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

Ejercicio 7:

Dados el plano $\pi \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 + \mu \\ y & = & 1 + \lambda + a\mu \\ z & = & 1 + 2\lambda - \mu \end{array} \right.$ y la recta $s \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 - b \\ z & = & -3 \end{array} \right.$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π.

b) **[1 punto]** Si $a = 0$ y $b = 3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1, -1, -8)$ es paralela al plano π y perpendicular a la recta s.

Ejercicio 8:

a) En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en el caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,

a.1) [**0,5 puntos**] ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

a.2) [**0,75 puntos**] Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,

b.1) [**0,5 puntos**] ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

b.2) [**0,75 puntos**] ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

n	k \ p	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.49	0.50
9	0	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0272	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1206	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2376	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2017	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.0994	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0326	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0069	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

RESPUESTA.

a) Calculamos el determinante de A

$$\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \text{, } F'_4 = -F_3 + F_4 \text{, } \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{, desarrollando por la 4ª fila,}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} =, desarrollando\ por\ la\ 3ª\ fila, = -a \cdot \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = -a \cdot (a^2 + a - 2)$$

Igualamos a 0 y resolvemos $-a \cdot (a^2 + a - 2) = 0$, $a = 0$, $a = 1$, $a = -2$

Para los valores $\boldsymbol{a = 0}$, $\boldsymbol{a = 1\ y\ a = -2}$ la matriz A no tiene inversa

b) $C \cdot D = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix}$

$D \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y & 3+z \\ x-y & 1-z \end{pmatrix}$, igualando elemento a elemento,

$$\begin{cases} 3x+1 = 3x+y \\ x-1 = 3+z \\ 3y+z = x-y \\ y-z = 1-z \end{cases} \text{ agrupando, } \begin{cases} y = 1 \\ x - z = 4 \\ x - 4y - z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ sustituyendo el valor de y } \begin{cases} y = 1 \\ x - z = 4 \\ x - z = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

haciendo z = λ, $\begin{cases} x = \lambda + 4 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$ nos queda la matriz $C = \begin{pmatrix} \lambda + 4 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

Para cualquier valor real de $\boldsymbol{\lambda}$ las matrices C y D conmutan

Ejercicio 2:

a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax & -ay & -z & = & a \\ ax & -ay & & = & a \\ ax & +2y & -z & = & 1 \end{cases}.$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

RESPUESTA.

a) Escribimos la matriz de coeficientes C y la ampliada A

$C = \begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & -a & -1 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calculamos el determinante de C,

$|C| = \begin{vmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 - 2a,\ -a^2 - 2a = 0$, obtenemos $a = 0\ y\ a = -2$.

Para $\boldsymbol{a = 0}$, sustituimos, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, r(C) = 2; como $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, r(A)= 2 < 3 = nº incógnitas.

Para $\boldsymbol{a = -2}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

r(C) = 2; y $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, por tanto, r(A)=3.

En resumen,

Si $\boldsymbol{a \neq 0}$ y $\boldsymbol{a \neq -2}$	$\boldsymbol{rg(C) = rg(A) = 3}$	**Compatible Determinado (Única solución)**
Si $\boldsymbol{a = -2}$	$\boldsymbol{rg(C) = 2 \neq rg(A) = 3}$	**Incompatible (No hay solución)**
Si $\boldsymbol{a = 1}$	$\boldsymbol{rg(C) = rg(A) = 2}$	**Compatible Indeterminado (Infinitas sol.)**

b) Para $a = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{matrix} F'_2 = -F_1 + F_2 \\ F'_3 = -F_1 + F_3 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Tenemos $\begin{cases} 2x - 2y - z = 2 \\ z = 0 \\ 4y \quad = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{-1}{4} \\ z = 0 \end{cases}$

$$\boldsymbol{x = \frac{3}{4},\quad y = -\frac{1}{4},\quad z = 0}$$

Ejercicio 3:

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x<2\\ \cos(\pi x) & \text{si} \quad 2\le x\le 3\\ \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si} \quad x>3\end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{-x}}{1+2x-cos(x^2)}$.

RESPUESTA.

a) Comenzamos estudiando la **continuidad** de la función $\boldsymbol{f}$ en todo $\mathbb{R}$.

- Para $x<2$, la función f es continua ya que tenemos una función racional, cuyo denominador no se anula donde está definida.
- Para $2<x<3$, la función f es continua ya que es una trigonométrica, continua en $\mathbb{R}$
- Para $x>3$ la función f es continua ya que es una racional, cuyo denominador no se anula donde está definida y el numerador es una función logarítmica continua para x>2
- Para $x=2$, utilizamos la definición de continuidad en un punto.

  Primero calculamos el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y para ello tenemos que tomar límites laterales, ya que por la izquierda del 2 tenemos una función y por la derecha del 2 tenemos otra función.

  $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{3}{x-2}=-\infty$, por tanto, f es discontinua en x = 2.
- Para x=3 igual que anteriormente

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} cos(\pi x)=-1}$$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\ln(x-2)}{3-x}=\frac{0}{0}$, indeterminación, aplicamos la regla de L`Hôpital

$\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\ln(x-2)}{3-x}=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\frac{1}{x-2}}{-1}=-1$ como los límites laterales son iguales a -1 y, además

f(3)= $cos(3\pi)$=-1, f es continua en x=3.

f es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$, en x=2 discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto infinito

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot e^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)}=\frac{0}{0}$, indeterminación, aplicamos la regla de L`Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot e^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot e^{-x}-x\cdot e^{-x}}{2+2xsen(x^2)}=\frac{1}{2}$$

Luego, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot e^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)}=\frac{1}{2}}$

Ejercicio 4:

Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

RESPUESTA.

a) Calculamos la derivada de f, $f'^{(x)} = \frac{(2x-2)\cdot(x^2+1)-2x\cdot(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3-2x^2+2x-2-2x^3+4x^2-2x}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$, igualamos a 0, por tanto, $2x^2 - 2 = 0$, obtenemos x = 1 y x = -1

Calculamos la segunda derivada $f''(x) = \frac{4x\cdot(x^2+1)^2-2\cdot 2x\cdot(x^2+1)\cdot(2x^2-2)}{(x^2+1)^4}$

simplificando $(x^2 + 1)$ en numerador y denominador

$f''(x) = \frac{4x\cdot(x^2+1)-2\cdot 2x\cdot(2x^2-2)}{(x^2+1)^3} = \frac{-4x^3+12x}{(x^2+1)^3}$ sustituyendo los valores que anulan la derivada

$f''(1) > 0$, luego en x = 1 f tiene un mínimo relativo, (1, 0)

$f''(-1) < 0$, luego en x=-1 f tiene un máximo relativo, (-1, 2)

Máximo relativo (-1, 2), Mínimo relativo (1,0)

b) Ecuación recta tangente: y = f(a) +f'(a)·(x-a), para a=0, f(0)=1, f'(0)=-2, de donde

y = 1 -2·(x-0), $y = 1 - 2x$

Ecuación recta normal: y = f(a) -1/f'(a) · (x-a), de donde

y = 1 +1/2 ·(x-0), $y = 1 + \frac{x}{2}$

Recta tangente: $y = 1 - 2x$ Recta normal: $y = 1 + \frac{x}{2}$

Ejercicio 5:

a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$.

b) **[1,25 puntos]** Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.

RESPUESTA

a) $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$, $\quad x^2 - 2x + 1 = 0$, $\quad x = 1$ doble, luego

$\frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$ de donde, $\;3x - 2 = A\,(x-1) + B$ dando a x los valores, 1 y 0

Si x=1, 3-2 = B, B = 1; si x = 0, - 2 = -A + B luego, A = 3 sustituyendo,

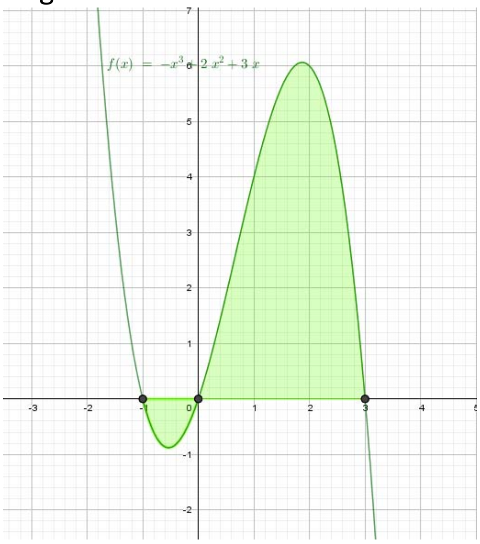
$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \;=\; 3ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx = 3ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

b) Calculamos los cortes con el eje X

$-x^3 + 2x^2 + 3x = 0$ obtenemos, x =0, x= -1, x = 3

La gráfica de la función es



Luego el área pedida será:

$$A = \left|\int_{-1}^{0}(-x^3 + 2x^2 + 3x)dx\right| + \int_{0}^{3}(-x^3 + 2x^2 + 3x)dx =$$

$$= \left|\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} =$$

$$= \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6} \text{ u.a.}$$

El área pedida es 71/6 u.a.

Ejercicio 6:

Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$.

a) [**1 punto**] Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

b) [**1,5 puntos**] Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3, -3, 2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

RESPUESTA

a) Calculamos los vectores normales a los planos: $\overrightarrow{\boldsymbol{n_{\pi_1}}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$

$$\overrightarrow{n_{\pi_2}} = (1, -1, 2) \wedge (-1, 1, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -2, 0)$$

$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|(2,1,1)\cdot(-2,-2,0)|}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{4+4+0}} = \frac{|-6|}{\sqrt{48}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, luego el ángulo es de 30°, $\frac{\pi}{6}$ radianes.

El ángulo es de 30°, $\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$ radianes

b) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes:

Para x=0, y=0, z=2; x=0, z=0, y=2; y=0, z=0, x=1; luego los puntos son:

A(0, 0, 2), B(0, 2, 0) y C(1, 0, 0) que junto al punto dado P(3, -3, 2),

formamos los vectores:

$$\overrightarrow{AP} = (3, -3, 0) \qquad \overrightarrow{BP} = (3, -5, 2) \qquad \overrightarrow{CP} = (2, -3, 2)$$

Por tanto, el volumen es

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-6| = 1\ u^3.$$

$$\boldsymbol{V = 1u^3}$$

Ejercicio 7:

Dados el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = -1+\mu \\ y = 1+\lambda+a\mu \\ z = 1+2\lambda-\mu \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x-2y = 1-b \\ z = -3 \end{cases}$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π.

b) **[1 punto]** Si $a=0$ y $b=3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1,-1,-8)$ es paralela al plano π y perpendicular a la recta s.

RESPUESTA

a) Para que la recta esté contenida en el plano el sistema formado por la ecuación implícita del plano y las 2 ecuaciones implícitas de la recta ha de ser compatible indeterminado.

Calculamos la ecuación implícita del plano, $\begin{vmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ y-1 & 1 & a \\ z-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $(-2a-1)x+2y-z = 2+2a$

Tenemos el sistema: $\begin{cases} (-2a-1)x+2y-z = 2+2a \\ x \quad -2y \quad = 1-b \\ z = -3 \end{cases}$, el determinante de la matriz de coeficientes ha de ser 0, ya que $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, $\begin{vmatrix} -2a-1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4a \to 4a = 0 \to a = 0.$

Para que el rango de la matriz ampliada también sea 2, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = b \to b = 0$

Los valores son, a = 0 y b = 0

b) Para a = 0 la ecuación del plano π es : $-x+2y-z=2$

Para b = 3 las ecuaciones de la recta son: x – 2y = – 2 , z = – 3

Como la recta r pedida ha de ser paralela al plano π, debe estar contenida en un plano paralelo a éste y que contenga al punto P dado

$\pi' \equiv -x+2y-z = K$, y pasa por P(1, -1, -8), luego, $-1+2(-1)-(-8) = K \to$ K = 5, de donde $\pi' \equiv -x+2y-z = 5$

Como la recta r pedida ha de ser perpendicular a la recta s, debe estar contenida en un plano perpendicular a ésta y que contenga al punto P dado

Calculamos el vector director de la recta s

$(1,-2,0) \wedge (0,0,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2i - j \to \vec{v_s} = (-2,-1,0)$ luego la ecuación de un plano perpendicular a la recta será $\pi'' \equiv -2x-y = K$ como debe pasar por el punto P(1, -1, -8),

$-2\cdot 1-(-1) = K \to K = -1$ de donde, $\pi'' \equiv -2x-y = -1$

La recta r pedida viene dada por la intersección de los 2 planos, es decir,

Sus ecuaciones implícitas son: $r \equiv \begin{cases} -x+2y-z = 5 \\ -2x-y = -1 \end{cases}$

$$\boldsymbol{r \equiv \quad -x+2y-z = 5, \quad -2x-y = -1}$$

Ejercicio 8:

a) En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en el caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,

a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

n	k \ p	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.49	0.50
9	0	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0272	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1206	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2376	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2017	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.0994	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0326	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0069	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020

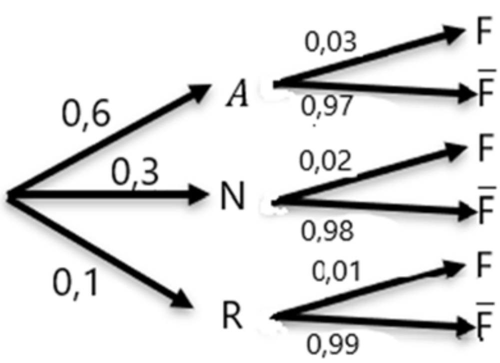
RESPUESTA

a) Para resolver los dos apartados, vamos a realizar un diagrama de árbol, pero antes tenemos que escribir una leyenda:

A: código amarillo F: falsa alarma

N: código naranja $\bar{F}$: no falsa alarma

R: código rojo



a.1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(F) = P(A \cap F) + P(N \cap F) + P(R \cap F) =$$

$$= P(A) \cdot P(F/A) + P(N) \cdot P(F/N) + P(R) \cdot P(F/R) = 0{,}6 \cdot 0{,}03 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}1 \cdot 0{,}01 = 0{,}25$$

P(F) = 0,25

a.2) El suceso que sea código naranja o rojo es el contrario del suceso el código es amarillo

Luego P(N∪R/$\bar{F}$) = 1 – P(A/$\bar{F}$) aplicando el Teorema de Bayes = $1-\frac{P(A)\cdot P(\bar{F}/A)}{P(\bar{F})}$

P($\bar{F}$) = 1 – P(F) = 1 – 0,25 = 0, 975, $1-\frac{P(A)\cdot P(\bar{F}/A)}{P(\bar{F})}=1-\frac{0{,}6\cdot 0{,}97}{0{,}975}=1-0{,}597=0{,}403$

P(N∪R/$\bar{F}$) = 0,403

b) P(N) = 0,3 y 9 avisos. Se trata de una distribución Binomial donde n=9 y p=0,3 B(9, 0,3)

b.1) P(x ≤ 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2), mirando la tabla k=0 k=1 k=2 y p=0,3,

P(x ≤ 2) = 0,4040 + 0,1556 + 0,2668 = 0,4628

P(x ≤ 2) = 0,4628

b.2) Si todos los avisos son amarillos o naranjas es porque ninguno es rojo.

Consideramos P(R)=0,1 p=0,1 y tenemos una Binomial B(9, 0,1)

Queremos calcular ninguno rojo, es decir, P(x = 0) = 0,3874, mirando en la tabla k=0 y p=0,1

Probabilidad **de todos amarillos o naranjas = 0,3874**

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE **SEPTIEMBRE**

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

Ejercicio 1:

1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-2\\0&-1&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX+I_3=BC$, donde I_3 es la matriz identidad.

Ejercicio 2:

2. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +2y & +az & = & a\\ x & +ay & +2z & = & a\\ -x & +y & +z & = & 1\end{cases}.$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a=2$, si es posible.

Ejercicio 3:

3. *a*) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}(2x)}\right)$.

b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}2^{(x-1)} & \text{si} \quad x\le 1\\ x-2 & \text{si} \quad 1<x<2\\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases},$$

donde ln es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x=1$ y en $x=2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

Ejercicio 4:

4. *a*) [**1,5 puntos**] Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

   b) [**1 punto**] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Ejercicio 5:

5. *a*) [**1,25 punto**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{-dx}{1+e^x}$.
   (Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

   b) [**1,25 puntos**] Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

Ejercicio 6:

6. Sean el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y - 2 & = & 0 \\ y - z - 2 & = & 0 \end{array} \right.$.

   a) [**1 punto**] Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π.

   b) [**1,5 puntos**] Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π, y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

Ejercicio 7:

7. Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y & = & 4 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$, $\quad s \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1, 0, 2)$.

   a) [**1,25 puntos**] Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.

   b) [**1,25 puntos**] Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s.

Ejercicio 8:

8. *a*) El 70 % de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25 % entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 5 % más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98 % de los menores de 34 años, el 40 % de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 10 % de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluídos)?

   b) El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

a	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-2\\0&-1&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\quad\text{y}\quad C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}$$

a) [**1 punto**] Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) [**1,5 puntos**] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX+I_3=BC$, donde I_3 es la matriz identidad.

RESPUESTA

a) $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$, $|A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&-2\\0&-1&0\end{vmatrix}=-1$, luego existe la inversa,

$A^t=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$, $\qquad Adj(A^t)=\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\0&0&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$, de donde

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\0&0&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}}$$

b) $A\cdot X+I_3=B\cdot C\ \rightarrow\ A\cdot X=B\cdot C-I_3\ \rightarrow\ X=A^{-1}(B\cdot C-I_3)$

$$X=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}5&1&-3\\-2&0&2\\-1&1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&1&-3\\-2&-1&2\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{4}&\mathbf{3}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-2}\\\mathbf{3}&\mathbf{2}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2:

2. *a)* **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +2y & +az & = & a \\ x & +ay & +2z & = & a \\ -x & +y & +z & = & 1 \end{cases}.$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

RESPUESTA

a) Escribimos la matriz de coeficientes C y la ampliada A

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & a \\ 1 & a & 2 & a \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculamos el determinante de C,

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 8 \rightarrow a^2 + 2a - 8 = 0$, obtenemos $a = 2$ y $a = -4$.

Para $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$ sustituimos, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

La 1ª y 2ª filas son iguales luego, r(C) = 2= r(A)= 2 < 3 = nº incógnitas.

Para $\boldsymbol{a} = \mathbf{-4}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ → r(C) = 2; y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$, por tanto, r(A)=3.

En resumen,

Si $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{2}$ y $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{-4}$	$\boldsymbol{rg(C) = rg(A) = 3}$	Compatible Determinado (Única solución)
Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{-4}$	$\boldsymbol{rg(C) = 2 \neq rg(A) = 3}$	Incompatible (No hay solución)
Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$,	$\boldsymbol{rg(C) = rg(A) = 2}$	Compatible Indeterminado (Infinitas sol.)

b) Para a=2 el sistema que nos queda, suprimiendo la 1ª ecuación es:

$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + 2z = 2} \\ \boldsymbol{-x + y + z = 1} \end{cases}$ haciendo $\boldsymbol{z = \mu}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y = 2 - 2\mu} \\ \boldsymbol{-x + y = 1 - \mu} \end{cases}$ sumando las ecuaciones

$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y = 2 - 2\mu} \\ \boldsymbol{3y = 3 - 3\mu} \end{cases}$ de donde, $\boldsymbol{y = 1 - \mu}$, sustituyendo, $\boldsymbol{x = 0}$

$$\mathbf{x = 0, \quad y = 1 - \mu, \quad z = \mu}$$

Ejercicio 3:

3. *a)* **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}\right)$.

b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si} \quad x\le 1 \\ x-2 & \text{si} \quad 1<x<2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases},$$

donde ln es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x=1$ y en $x=2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

RESPUESTA

a) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(2x)}\right)=\infty-\infty$, indeterminación, operamos,

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{sen(2x)-x}{x\cdot sen(2x)}\right)=\frac{0}{0}$, indeterminación, aplicamos regla de L'Hôpital,

derivamos numerador y denominador,

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2cos(2x)-1}{1\cdot sen(2x)+x\cdot 2cos\,(2x)}\right)=\frac{2-1}{0+0}=\frac{1}{0}=\infty$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\text{sen}(2\text{x})}\right)=\infty$$

b) En **x = 1**, f(1) = 2^{1-1} = 1

$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 2^{x-1}=1\\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-2)=-1\end{cases}$ como los límites laterales son distintos $\nexists \lim_{x\to 1} f(x)$,

en x = 1 f presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

En **x = 2** , f(2) = 2-2 = 0

$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x-2)=0\\ \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\ln(x-1)=0\end{cases}\rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=0$

Como $\lim_{x\to 2} f(x)=0=f(2)$ f es continua en x = 2.

En x = 1 f presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito y en x = 2 es continua

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

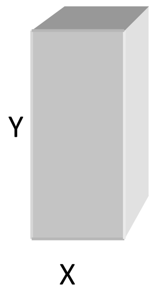
Ejercicio 4:

4. *a*) [**1,5 puntos**] Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

b) [**1 punto**] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

RESPUESTA

a)



$V = x^2 \cdot y$, $x^2 \cdot y = 108$, despejando y, $y = \frac{108}{x^2}$

$S = x^2 + 4xy$, sustituyendo, $S = x^2 + 4x\frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}$

Llamando $f(x) = x^2 + \frac{432}{x}$ deseamos calcular el mínimo, si existe.

Calculamos la derivada $f'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}$ igualamos a 0

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0, \quad 2x = \frac{432}{x^2}, \quad 2x^3 = 432, \quad x^3 = 216, \quad x = 6.$$

Calculamos la segunda derivada $f''(x) = 2 + \frac{864}{x^3}$ de donde

$f''(6) > 0$, por tanto, es un mínimo, $y = \frac{108}{6^2} = 3$

Las dimensiones han de ser 6 dm de lado de la base y 3 dm de alto

b) Ecuación recta tangente: y = f(a) +f'(a)·(x-a),

$$f(x) = x^2 + x - 1, \qquad f'(x) = 2x + 1$$

para a=1, f(1)=1, f'(1)=3, de donde

y = 1 + 3·(x–1) , y = 1 + 3x – 3 , y = 3x – 2

Recta tangente: $y = 3x - 2$

Ejercicio 5:

5. *a*) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-dx}{1+e^x}$.

   (Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

   b) **[1,25 puntos]** Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

RESPUESTA

a) Hacemos $e^x = t$, $e^x dx = dt$, $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$, sustituyendo,

$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{1+t} = \int \frac{dt}{t\cdot(1+t)}$, es una integral de una función racional con grado del numerador menor que el grado del denominador, descomponemos en fracciones simples,

$\frac{1}{t\cdot(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}$, de donde, 1 = A·(1+t) + B·t, sustituyendo t por las raíces

t = 0 → 1 = A; t = -1 → 1 = -B → B = -1 , luego,

$\int \frac{dt}{t\cdot(1+t)} = \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{-1}{1+t} dt = ln|t| - ln|1+t| + C$ deshaciendo el cambio,

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = ln|e^x| - ln|1+e^x| + C = ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{1+\mathrm{e^x}} = ln\left|\frac{\mathrm{e^x}}{1+\mathrm{e^x}}\right| + \mathrm{C}$$

b) Calculamos donde se cortan las gráficas, $-x^2 + 2x + 4 = x + 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

Obtenemos x = -1 y x = 2, por tanto, el área será

$$\int_{-1}^{2} \left((-x^2 + 2x + 4) - (x + 2)\right) dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1)\right) = \frac{9}{2} = 4,5\ u.a.$$

El área pedida es 4,5 u.a.

Ejercicio 6:

6. Sean el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 &= 0 \\ y - z - 2 &= 0 \end{cases}$.

a) [**1 punto**] Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π.

b) [**1,5 puntos**] Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π, y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

RESPUESTA

a) Dado un punto P(x_0 , y_0 , z_0) y un plano $\boldsymbol{\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0}$ la distancia es

$$\boldsymbol{d(P,\pi) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} u.}$$

$$\mathbf{d(P, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{3} u.}$$

b) Calculamos el punto intersección de la recta y el plano resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones implícitas $\begin{cases} x - 2y &= 2 \\ y - z &= 2 \\ x + 2y - z &= 4 \end{cases}$, hacemos F'$_3$ = −F$_1$ + F$_3$ $\begin{cases} x - 2y &= 2 \\ y - z &= 2 \\ 4y - z &= 2 \end{cases}$,

hacemos F''$_3$ = −F$_2$ + F'$_3$ $\begin{cases} x - 2y &= 2 \\ y - z &= 2 \\ 3y &= 0 \end{cases}$, resolviendo, y = 0 , z = -2 , x = 2, tenemos A(2, 0, -2)

El área del triángulo definido por los 3 puntos es: $\boldsymbol{\text{á}rea = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\|(-1,\ -1,\ 4) \wedge (-2,\ 1,\ 3)\|}{2}}$

$$\boldsymbol{(-1, -1,\ 4) \wedge (-2,\ 1,\ 3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -7i + 5j - 3k \rightarrow (-7, 5, -3)}$$

$$\boldsymbol{\text{á}rea = \frac{\|(-7,\ 5,\ -3)\|}{2} = \frac{\sqrt{(-7)^2 + 5^2 + (-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{83}}{2}\ u.a.}$$

$$\mathbf{\text{área} = \frac{\sqrt{83}}{2}\ u.a}$$

Ejercicio 7:

7. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y &= 4 \\ z &= 0 \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1,0,2)$.

   a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.

   b) **[1,25 puntos]** Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s.

RESPUESTA

a) Tomamos un punto de r, damos valores a x = 0 y z = 0, de donde, y = -2, A(0, -2, 0)

y otro punto de s, B(0, -2, 1), hacemos el vector $\overrightarrow{AB} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, calculamos el vector director de r,

$$\vec{V}_r = (2,-2,0) \wedge (0,0,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2i - 2j = (-2,-2,0) = (1,1,0),$$

Calculamos el determinante formado por los vectores, $\overrightarrow{AB}$, $\vec{V}_r$ y $\vec{V}_s$ para ver su dependencia o independencia $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, los 3 vectores son independientes, por tanto, las rectas se cruzan.

Las rectas r y s se cruzan

b) Para que el plano sea paralelo a las 2 rectas, tomamos sus vectores directores, que junto al punto P va a quedar determinado,

P(-1, 0, 2), $\vec{V}_r = (1,1,0)$, $\vec{V}_s = (0\ 0\ ,1)$, de donde,

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad x + 1 - 2z + 4 - 3z + 6 - y = x - y - 5z + 11 = 0$$

La ecuación del plano es x – y – 5z +11 = 0

Ejercicio 8:

8. *a*) El 70 % de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25 % entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 5 % más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98 % de los menores de 34 años, el 40 % de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 10 % de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

a.2) **[0,75 puntos]** Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluídos)?

b) El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

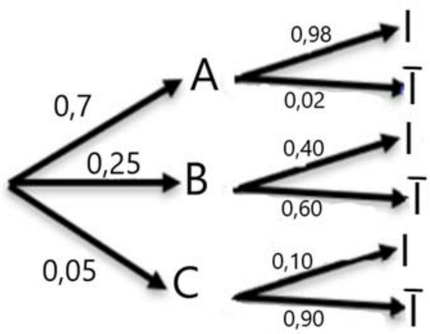
RESPUESTA

a) Para resolver los dos apartados, vamos a realizar un diagrama de árbol, pero antes tenemos que escribir una leyenda:

A: menos de 34 años   I: acceden

B: entre 34 y 54 años $\bar{I}$: no acceden

C: más de 54 años



a.1) $P(\bar{I}) = P(A)\cdot P(\bar{I}/A) + P(B)\cdot P(\bar{I}/B) + P(C)\cdot P(\bar{I}/C) =$
$= 0{,}7\cdot 0{,}02 + 0{,}25\cdot 0{,}6 + 0{,}05\cdot 0{,}9 = 0{,}79$

La probabilidad de no acceder a diario es $P(\bar{I}) = 0,79$

a.2) $\mathrm{P(B/I)} = \frac{\mathrm{P(B)\cdot P(I/B)}}{\mathrm{P(I)}}$, como P(I) = $1 - \mathrm{P}(\bar{\mathrm{I}}) = 1 - 0{,}79 = 0{,}21$ entonces

$\mathrm{P(B/I)} = \frac{0{,}25\cdot 0{,}40}{0{,}21} = 0{,}13$

La probabilidad de pertenecer al grupo de entre 34 y 54 cuando accede es $\mathbf{P(B/I) = 0,13}$

b) El tiempo que un usuario pasa conectado a la red es una variable aleatoria, X, que sigue una distribución normal, $X \to N(53, 10)$

b.1) P(X > 30) = , tipificando,

$$= P\left(Z > \frac{30-53}{10}\right) = P(Z > -2{,}3) = P(Z < 2{,}3) = \text{, mirando en la tabla, } = 0{,}9893$$

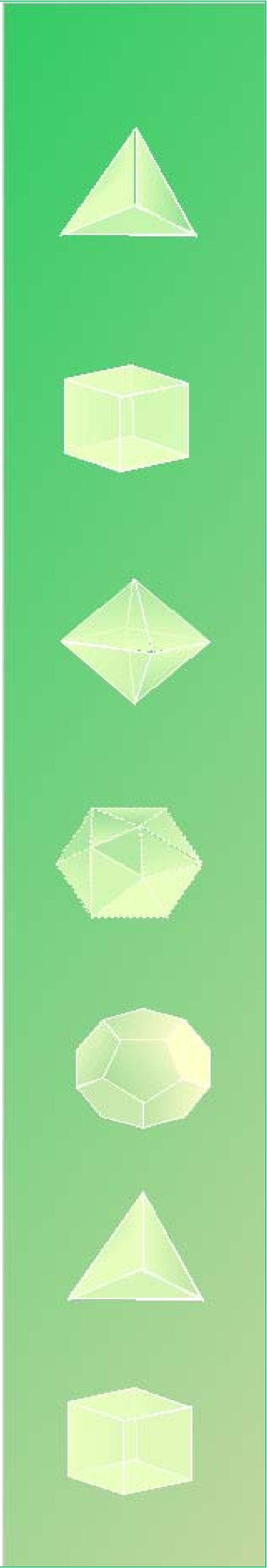
La probabilidad de que se conecte más de 30 minutos es 0,9893

b.2) $P(40 < X < 67) = tipificando = P\left(\frac{40-53}{10} < Z < \frac{67-53}{10}\right) = P(-1{,}3 < Z < 1{,}4) =$

$$= P(Z < 1{,}4) - P(Z < -1{,}3) = P(Z < 1{,}4) - [1 - P(Z < 1{,}3)] =$$

Mirando en la tabla $= 09192 - 1 + 0{,}9032 = 0{,}8224$

El 82,24% de usuarios se conecta entre 40 y 67 minutos



MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

CASTILLA Y LEÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz Yañez-Barnuevo

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3

El alumno deberá escoger libremente CINCO problemas completos de los DIEZ propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x-y+az=0 \\ x-z=0 \\ 2x+ay-2z=0 \end{cases}$

a) Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro real a. **(1,2 puntos)**

b) Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro $a=-1$. **(0,8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix}$.

a) Indique para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1}. **(0,5 puntos)**

b) Si $a=4$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

encuentre la matriz X que verifica que $B+XA=C$. **(1,5 puntos)**

E3.- (Geometría)

Sea el plano $\pi \equiv x-2y+2z+1=0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ z+1=0 \end{cases}$ y el punto A=(1, 3, -1).

Hallar la ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

(2 puntos)

E4.- (Geometría)

Dados el punto A(1,2,4) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$,

a) Hallar un punto B de la recta r de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano $\pi \equiv\ x+2z=0$. **(1,5 puntos)**

b) Hallar un vector (a,b,c) perpendicular a $(1,0,-1)$ y $(2,1,0)$. **(0,5 puntos)**

MATEMÁTICAS II-Propuesta_3/2020. Página **1** de **3**

E5.- (Análisis)

Representar gráficamente la función $f(x) = xe^x$, calculando previamente sus extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y sus asíntotas.

(2 puntos)

E6.- (Análisis)

Demuestre que la ecuación $x^3 - 12x = -2$ tiene una solución en el intervalo $[-2,2]$ y pruebe además que esa solución es única. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos x - x}{e^x + sen\, x - 1}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen\, x + \cos x) dx$ **(1 punto)**

E8.- (Análisis)

a) Calcule los puntos de corte de las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$. **(0,5 puntos)**

b) Sabiendo que en el intervalo $[1,2]$ se verifica que $g(x) \geq f(x)$ calcular el área del recinto limitado por la gráfica de ambas funciones en dicho intervalo. **(1,5 puntos)**

E9.- (Probabilidad y estadística)

El peso de los alumnos de 2º de bachillerato de un instituto de León, sigue una distribución normal, de media 75 kg y de desviación típica 5. Si se elige al azar un alumno, calcular la probabilidad de que:

a) Tenga un peso entre 70 y 80 kg. **(1 punto)**

b) Tenga un peso superior a 85 kg. **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

La probabilidad de que a un puerto llegue un barco de tonelaje bajo, medio o alto es 0,6, 0,3 y 0,1, respectivamente. La probabilidad de que necesite mantenimiento en el puerto es 0,25 para los barcos de bajo tonelaje, 0,4 para los de tonelaje medio y 0,6 para los de tonelaje alto.

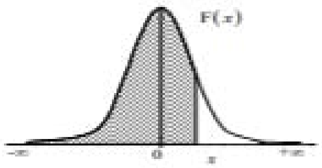
a) Si llega un barco a puerto, calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento. **(1 punto)**

b) Si un barco ha necesitado mantenimiento, calcule la probabilidad de que sea de tonelaje medio. **(1 punto)**

MATEMÁTICAS II-Propuesta_3/2020. Página **2** de **3**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

MATEMÁTICAS II-Propuesta_3/2020. Página 3 de 3

Ejercicio E1:

Se considera el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x - y + az = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + ay - 2z = 0 \end{cases}$.

$a)$ Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro a.

$b)$ Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro $a = -1$.

Solución:

a) Primero se pone el sistema de ecuaciones de forma matricial $A \cdot X = v$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y después se estudia la inversa de A. Es un sistema homogéneo. Empezamos por calcular el determinante de A e igualarlo a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = a^2 + a = a(a+1) = 0$$

Resolviendo la ecuación se deduce que el determinante será cero cuando $a = -1$ o cuando $a = 0$. Se presentan dos casos:

1. $a = -1$ o $a = 0$ → El sistema es compatible indeterminado porque el rango de la matriz es menor de tres, el número de incógnitas.

2. $a \neq -1$ y $a \neq 0$ → El sistema es determinado porque el rango de la matriz es tres. Pero la única solución, es la solución trivial: $x = y = z = 0$

Si $a = -1$ o $a = 0$ existen infinitas soluciones. Si $a \neq -1$ y $a \neq 0$ sólo existe la solución trivial: $x = y = z = 0$

b) Para $a = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y - x = 0 \\ x = z \\ 2x - y - 2x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ x = z \\ -y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

Tiene infinitas soluciones distintas de la trivial.

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Ejercicio E2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix}$:

a) Indique para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Si $a = 4, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, encuentre la matriz X que verifica la siguiente ecuación:

$B + X \cdot A = C$.

Solución:

a) La condición para que sea invertible es $|A| \neq 0$, calculando el determinante e igualando a cero se obtiene:

$\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{vmatrix} = (a+1)\cdot(a-3) - 1\cdot(a-3) = (a-3)\cdot a = 0.$

Resolviendo para a, se obtiene $a = 0$ y $a = 3$, de manera que es invertible para $a \neq 0$ y $a \neq 3$.

Existe la matriz inversa A^{-1} para $a \neq 0$ y $a \neq 3$

b) Calculamos la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

Resolviendo la ecuación matricial $B + X \cdot A = C$, resulta:

$B + X \cdot A = C \to X \cdot A = C - B \to X = (C - B) \cdot A^{-1}$, y en forma matricial:

$$X = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 1.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 1.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix},$$

que es el resultado solicitado.

$$X = \begin{pmatrix} -0.5 & 1.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio E3:

Sean el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ y $A(1, 3, -1)$. Halla la ecuación del plano β que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

Solución:

La recta perpendicular al plano π está definida por el vector normal al plano $v_1 = (1, -2, 2)$, que será uno de los vectores de orientación del plano.

El otro vector de orientación del plano debe coincidir con el vector director de la recta r para que el plano resultante final sea paralelo. Para hallar el vector de r, se puede utilizar el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen, así:

$$v_2 = (1, -1, 0) \times (0,0,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = -1i - 1j + 0k = (-1, -1, 0).$$

Otra forma, puede ser escribir la ecuación paramétrica de la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = 1 \end{cases}$$

La recta r pasa por el punto (0, 0, 1) y tiene como vector director (1, 1, 0), que es igual que el anterior, pero de signo opuesto, y define la misma recta. Se usará el primer resultado.

El plano perpendicular a π, paralelo a r, y que pasa por A, está definida como:

$$\pi\left(P; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{PQ}\right) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 3 & z + 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 = -2(y - 3) - 3(z + 1) + 2(x - 1)$$
$$= -2y + 6 - 3z - 3 + 2x - 2$$

Y la solución final para el plano solicitado es:

$$\pi \equiv 2x - 2y - 3z + 1 = 0$$

Se comprueba que pasa por el punto A:

$2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) + 1 = 0$

Ejercicio E4:

Dados el punto $A(1,2,4)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$:

$a)$ Halla un punto Bde la recta r de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano de ecuación

$\pi \equiv x + 2z = 0$

$b)$ Halla un vector $\vec{w} = (a,b,c)$ perpendicular a $\vec{u} = (1,0,-1)$ y $\vec{v} = (2,1,0)$.

Solución:

a) Primero encontramos el plano paralelo a π que pase por el punto $A(1,2,4)$. Como tenemos el vector normal $(1,0,2)$ y el punto $A(1,2,4)$, el plano que buscamos será:

$$\rho \equiv (x-1) + 2\cdot(z-4) = x + 2z - 9 = 0.$$

Ahora, el punto buscado será la intersección de la recta r con el plano ρ. Para resolver, hallamos la expresión de la recta en forma implícita:

$$\begin{cases} x-1 = 2y-2 \\ z-1 = 2y-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y = -1 \\ z-2y = -1 \end{cases},$$

y planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2z = 9 \\ x-2y = -1 \\ z-2y = -1 \end{cases}$$

Su solución nos da el punto buscado $B(3,2,3)$.

$$B(3,2,3)$$

b) El producto vectorial de $\vec{u} = (1,0,-1)$ y $\vec{v} = (2,1,0)$ resulta perpendicular a ambos, por lo tanto,

$$\vec{w} = (1,\ 0,\ -1) \times (2,1,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\cdot i - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\cdot j + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot k = 1i - 2j + k = (1,-2,1),$$

por tanto, la solución es $\vec{w} = (1,-2,1)$

$$\vec{w} = (1,-2,1)$$

Comprobación:

Calculamos los productos escalares

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = (1,0,-1)\cdot(1,-2,1) = 1+0-1 = 0$$
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = (2,1,0)\cdot(1,-2,1) = 2-2+0 = 0$$

Como valen cero, los vectores son ortogonales

Ejercicio E5:

Representar gráficamente la función $f(x) = x \cdot e^x$, calculando previamente sus extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y sus asíntotas.

Solución:

Lo primero es calcular la derivada de la función e igualar a cero:

$f'(x) = x \cdot e^x + e^x = e^x(x+1) = 0$.

Resolviendo la ecuación se obtiene un valor, $x = -1$, ya que e^x es siempre distinto de cero, que corresponde a la abscisa de posibles máximos o mínimos.

Derivando por segunda vez, se obtiene:

$f''(x) = x \cdot e^x + 2e^x = e^x(x+2)$,

y sustituyendo para las abscisas obtenidas resulta:

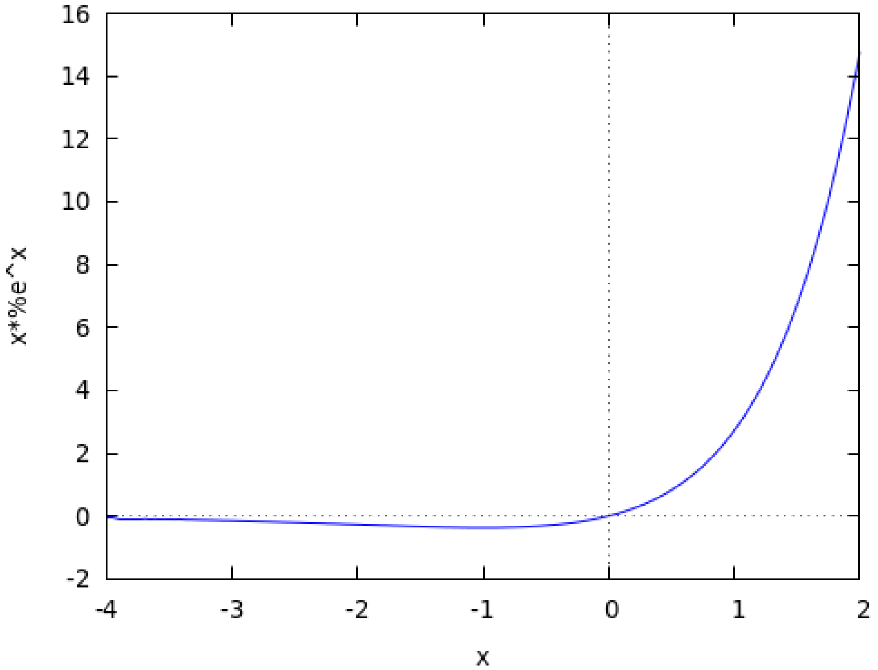
$f''(-1) = e^{-1} > 0 \rightarrow$ mínimo en $x = -1$, de ordenada $f(-1) = -e^{-1} = \frac{-1}{e}$. Como hay un mínimo global en $x = -1$, la función es decreciente para $x < -1$ y la función es creciente para $x > -1$.

Mínimo: $\left(-1, \frac{-1}{e}\right)$. Creciente: $x \in (-1, +\infty)$. Decreciente: $x \in (-\infty, -1)$

Por ser exponencial, crece a ritmo exponencial para números positivos y tiende a cero para números negativos, así que tendrá una asíntota que tiende a cero hacia a la izquierda de -1, y un comportamiento exponencial a la derecha, pasando por el punto (0,0), ya que $f(0) = 0$.

Igualando a cero la derivada segunda hay un punto de inflexión para $x = -2$; $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$. Concavidad: $x \in (-\infty, -2)$. Convexidad (∪): $x \in (-2, +\infty)$

El gráfico es el siguiente:



Ejercicio E6:

Demuestre que la ecuación $x^3 - 12x = -2$ tiene una solución en el intervalo $[-2, 2]$ y pruebe además que esa solución es única.

Solución:

Pondremos la ecuación en forma de función para observar cuando se cumple la ecuación propuesta:

$$f(x) = x^3 - 12x + 2$$

Teorema de Bolzano: "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

Es una función continua en toda la recta real pues es una función polinómica.

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 2 = -8 + 24 + 2 > 0$$

$$f(2) = (2)^3 - 12(2) + 2 = 8 - 24 + 2 < 0$$

Tiene distinto signo en los extremos del intervalo, luego por el teorema de Bolzano sabemos que se anula en algún punto del interior del intervalo:

$x^3 - 12x + 2 = 0 \rightarrow x^3 - 12x = -2$ en algún punto del intervalo $[-2, 2]$

Podemos analizar el resto de raíces del polinomio:

Lo primero es calcular la derivada de la función e igualar a cero:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

Resolviendo la ecuación se obtienen dos valores, $[x = 2, x = -2]$, que corresponden a las abscisas que tienen máximos o mínimos.

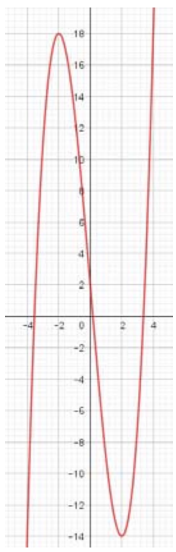
Derivando por segunda vez, se obtiene $f''(x) = 6x$, y sustituyendo para las abscisas obtenidas resulta:

1. $f''(2) = 12 > 0$, Positivo → mínimo en $x = 2$.

2. $f''(-2) = -12 < 0$. Negativo → máximo en $x = -2$.

Como hay un máximo en $x = -2$, la función es creciente si $x < -2$ y decreciente si $x > -2$.

Como hay un mínimo en $x = 2$, la función es decreciente si $x < 2$ y creciente si $x > 2$.



Por ser de tercer orden, hay tres intervalos con la misma tendencia y dos cambios en la tendencia, que coinciden con el máximo y mínimo relativos. Las tendencias son, por orden de abscisas:

$(-\infty, -2)$ creciente; $(-2, 2)$ decreciente; $(2, +\infty)$ creciente.

Como no hay más cambios en la función, y el valor de $f(x)$ cambia de signo, obligatoriamente hay una única raíz en el intervalo $[-2, 2]$.

Como $f(2) = -14$ es negativa y creciente, tiene que haber una raíz fuera del intervalo por la derecha, en $(2, +\infty)$. Al ser $f(-2) = 18$ positiva y creciente, tiene que haber otra raíz a la izquierda de -2, en $(-\infty, -2)$. Como el polinomio de tercer grado tiene un máximo de tres raíces, y dos están fuera del intervalo $[-2, 2]$, se puede asegurar que la raíz es única en ese intervalo.

Ejercicio E7:

$a)$ Calcular: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - cos\,x - x}{e^x + sen\,x - 1}$.

$b)$ Calcular: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(sen\,x + cos\,x)\cdot dx$.

Solución:

a) Primero hallamos el límite en cero como se anula el numerador y el denominador, indeterminado.

Usando la regla de *L'Hôpital* resulta

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - cos\,x - x}{e^x + sen\,x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + sen(x) - 1}{e^x + \cos(x)} = \frac{e^0 + sen(0) - 1}{e^0 + \cos(0)} = \frac{1+0-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0..$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - cos\,x - x}{e^x + sen\,x - 1} = 0$$

b) Calculando la integral indefinida para la función resulta:

- $F(x) = sin(x) - cos(x)$

Ahora sustituyendo los valores para la integral definida:

$\left[sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - [sin(0) - cos(0)] = [1-0] - [0-1] = +2$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(sen\,x + cos\,x)\cdot dx = 2$$

Ejercicio E8:

$a)$ Calcule los puntos de corte de las gráficas $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$.

$b)$ Sabiendo que en el intervalo $[1, 2]$ se verifica que $g(x) \geq f(x)$ calcular el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones en dicho intervalo.

Solución:

$a)$ Resolvemos la ecuación: $f(x) = g(x) \ \to \frac{2}{x} = 3 - x;\ \ 2 = 3x - x^2;\ \ x^2 - 3x + 2 = 0;$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \to x = 1; x = 2 \to\ f(1) = 2;\ f(2) = 1:$$

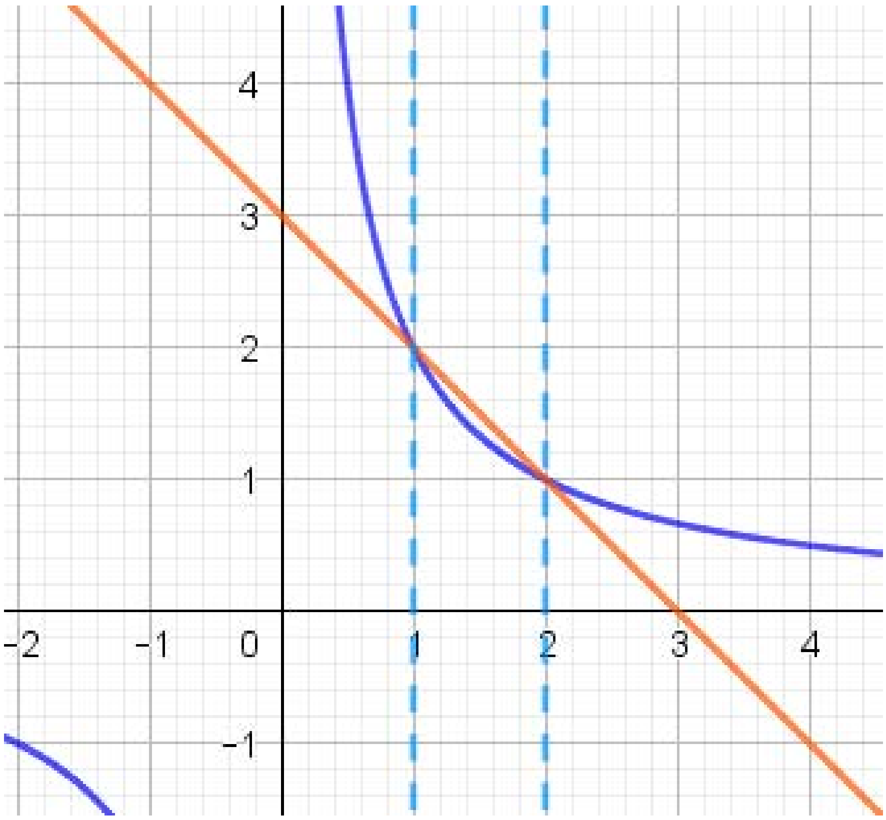
Los puntos de corte son $(1, 2)$ y $(2, 1)$

$b)$ El área pedida es la integral definida:

$$Área = \int_1^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) \cdot dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2Lx\right]_1^2 =$$

$\left(3 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 2L2\right) - \left(3 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - 2L1\right) = 6 - 2 - 2L2 - 3 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2} - 2L2 = 0.1137.$

$$Área = \left(\frac{3}{2} - 2L2\right) u^2 = \mathbf{0.1137}\ \boldsymbol{u^2}$$



Autor: Jorge Muñoz Yañez-Barnuevo
www.apuntesmareaverde.org.es

Ejercicio E9:

El peso de los alumnos de 2º de bachillerato de un instituto de León, sigue una distribución normal, de media 75 kg y desviación típica 5. Si se elige al azar un alumno, calcular la probabilidad de que:

a) Tenga un peso entre 70 y 80 kg.

b) Tenga un peso superior a 85 kg.

Solución:

Nos dicen que es una distribución normal de media $\mu = 75$ y desviación típica $\sigma = 5$.

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(75;\ 5)$.

Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-75}{5}$.

a) $P(70 \leq X \leq 80) = P\left(\frac{70-75}{5} \leq Z \leq \frac{80-75}{5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z < 1) - [1 - P(Z < 1)] = 2 \cdot P(Z < 1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 1.6826 - 1 = 0.6826$.

Buscando en la tabla se obtiene $P(Z < 1) = 0.8413$, que hemos sustituido.

Si se elige al azar un alumno, la probabilidad de que tenga un peso entre 70 y 80 kg es de **0.6826**.

b) $P(X > 85) = P\left(Z > \frac{85-75}{5}\right) = P\left(Z > \frac{10}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$.

Ahora buscando en la tabla, se obtiene $P(Z < 2) = 0.9772$, que hemos sustituido.

Si se elige al azar un alumno, la probabilidad de que tenga un peso superior a 85 kg es de **0.0228**.

Ejercicio E10:

La probabilidad de que a un puerto llegue un barco de tonelaje bajo, medio o alto es 0.6, 0.3 y 0.1, respectivamente. La probabilidad de que necesite mantenimiento en el puerto es de 0.25 para los barcos de bajo tonelaje, 0.4 para los de tonelaje medio y 0.6 para los de tonelaje alto.

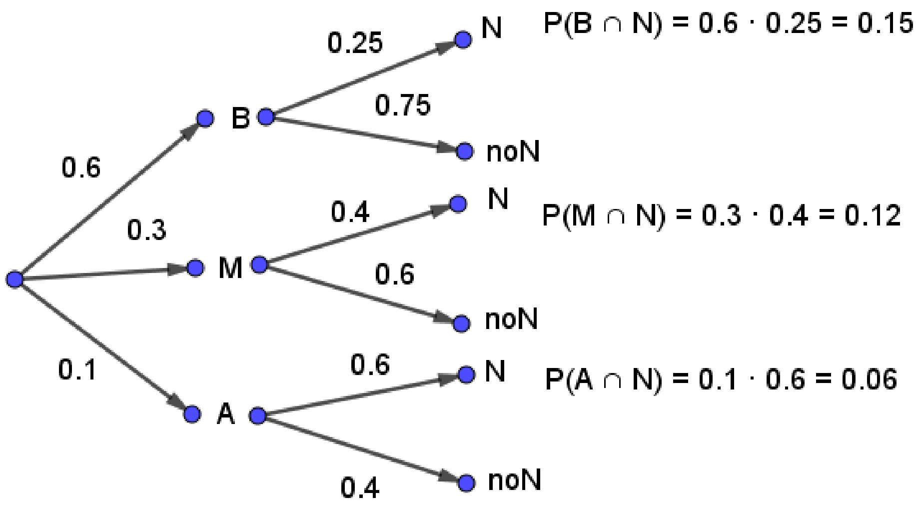
a) Si llega un barco a puerto, calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento.

b) Si un barco ha necesitado mantenimiento, calcule la probabilidad de que sea de tonelaje medio.

Solución:

Llamamos B al suceso de que el barco sea de tonelaje bajo, M que lo sea, medio, y A que lo sea alto. Llamamos N al suceso de que necesite mantenimiento, y noN a que no lo necesite.

Confeccionamos un diagrama de árbol con los datos del problema:



a) $P(N) = P(B \cap N) + P(M \cap N) + P(A \cap N) = 0.6 \cdot 0.25 + 0.3 \cdot 0.40 + 0.1 \cdot 0.60 = 0.15 + 0.12 + 0.06 = 0.33.$

Si llega un barco a puerto, la probabilidad de que necesite mantenimiento es **0.33.**

b) Ahora nos piden la probabilidad condicionada: $P(M/N)$. Sabemos que: $P(M/N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)}$. En el apartado anterior ya hemos calculado $P(N) = 0.33$.

$$P(M/N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.33} = \frac{0.120}{0.33} = 0.3636.$$

Si un barco ha necesitado mantenimiento, la probabilidad de que sea de tonelaje medio es de **0.3636**.

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 3**

El alumno deberá escoger libremente CINCO problemas completos de los DIEZ propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda=1$. **(0,8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$

a) Encontrar los valores de m y n para que se verifique:

$A^2 = A^t$ $\quad (A^t \equiv la\ traspuesta\ de\ A)$. **(1,2 puntos)**

b) ¿ Para qué valores de m y n la matriz A no es invertible ? **(0,8 puntos)**

E3.- (Geometría)

Dados el punto P (2,1,1) y la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$,

a) Hallar la recta paralela a r que pase por P. **(0,8 puntos)**

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r. **(1,2 puntos)**

E4.- (Geometría)

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,2,3)$ y es paralela a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$. **(1 punto)**

b) Calcular el punto simétrico del $(1,2,3)$ respecto del plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$. **(1 punto)**

MATEMÁTICAS II-Propuesta_1/2020. Página **1** de **3**

E5.- (Análisis)

Determinar la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, conociendo que tiene un punto de inflexión en $x = 1$ y que la recta tangente a su gráfica en el punto $(-1, 0)$ es el eje de abscisas. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Demostrar que la ecuación $x^4 + 3x = 1 + sen\, x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0,\ 2]$. Probar que la solución es única. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{2x-1}}{1-x}$. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x) = \frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}$, hallar la función primitiva suya $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$. **(1 punto)**

E8.- (Análisis)

a) Dada la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1,3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. **(1 punto)**

E9.- (Probabilidad y estadística)

El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en Kg (kilogramos) por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 y desviación típica 5.

a) ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 Kg de azúcar al año? **(1 punto)**

b) ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 Kg? **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

Los estudiantes, que comienzan los estudios de Medicina, en el conjunto formado por las comunidades autónomas de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50% de Andalucía, un 15% de Baleares y un 35% provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15% de Andalucía, 10% de Baleares y 5% de Castilla y León

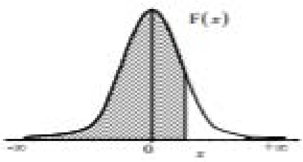
a) Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina. **(1 punto)**

b) Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León? **(1 punto)**

MATEMÁTICAS II-Propuesta_1/2020. Página 2 de 3

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

MATEMÁTICAS II-Propuesta_1/2020. Página 3 de 3

Ejercicio E1:

$a)$ Discutir el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$, según los valores del parámetro λ.

$b)$ Resolverlo para $\lambda = 1$.

Solución:

$a)$ Escribimos las matrices de los coeficientes y la ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 - \lambda - 1 = 0;\ \ \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.$$

Si $\lambda \neq 0$ o $\lambda \neq 1$ el rango de la matriz M es 3, igual al rango de la matriz ampliada, e igual al número de incógnitas, luego el sistema es compatible y determinado.

Si $\lambda = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 2 = 1 \neq 0.$ El rango de la matriz ampliada es 3, mientras que el de la matriz de los coeficientes es 2, luego el sistema es incompatible.

Si $\lambda = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Su rango es 2, igual al de la matriz de los coeficientes luego el sistema es compatible indeterminado.

Si $\lambda \neq 0$ o $\lambda \neq 1$ el sistema es compatible y determinado. Si $\lambda = 0$ el sistema es incompatible. Si $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

$b)$ Ya hemos visto que para $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado, y es resulta $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$.

Tiene dos ecuaciones iguales, luego es equivalente a $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$. Hacemos $y = \lambda$; y despejamos x y z: $x = 1 - \lambda$; $z = 1$.

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}, \forall \lambda \in R$$

Ejercicio E2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$:

$a)$ Encontrar los valores de m y n para que se verifique: $A^2 = A^t$, siendo la matriz traspuesta de A.

$b)$ ¿Para qué valores de m y n la matriz A es invertible?

Solución:

$a)$ Calculamos A^2 y lo igualamos con A^t.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m+mn & n^2 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m+mn & n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix} \Rightarrow 1 = 1; 0 = m; m + mn = 0; n^2 = n \to m = 0; n^2 = n$$

$$m = 0; n = 1; n = 0.$$

$b)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{vmatrix} = n.$$

La matriz A es invertible para todo valor de m, y si n es distinto de cero.

Ejercicio E3:

Dado el punto $P(2,1,1)$ la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$:

$a)$ Hallar la recta s paralela a r y que pase por P.

$b)$ Hallar la ecuación del plano π que pasa por el punto P y contiene a la recta r.

Solución:

$a)$ De la recta s, pedida, conocemos su vector de dirección por ser paralela a r: $\overrightarrow{v_s} = (1,-1,-3)$. Y conocemos un punto, que nos dan. Luego podemos escribir su ecuación continua:

$$s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$$

$b)$ Del plano π pedido conocemos el punto $P(2,1,1)$ que nos dan. Como contiene a la recta r conocemos también el punto: $Q(2,3,4)$, y un vector de orientación: $\overrightarrow{v_s} = (1,-1,-3)$. Calculaos el otro vector de orientación:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(2,3,4) - (2,1,1)] = (0,2,3).$$

Y escribimos la ecuación del plano:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{PQ}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 = -3(x-2) + 2(z-1) + 6(x-2) - 3(y-1) =$$

$3(x-2) - 3(y-1) + 2(z-1) = 0;\ \ 3x - 6 - 3y + 3 + 2z - 2 = 0.$

$$\pi \equiv 3x - 3y + 2z - 5 = 0$$

Ejercicio E4:

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,2,3)$ y es paralela a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$.

b) Calcular el punto A', simétrico de $A(1,2,3)$ respecto del plano π de ecuación general $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0$.

Solución:

a) Buscamos las ecuaciones paramétricas de r:

$$r \equiv \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y=1+\lambda \\ x+y=3-\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=4;\ \ x=2 \to 2+y=3-\lambda;\ \ y=1-\lambda$$

$$\to r \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=1-\lambda. \\ z=\lambda \end{cases}$$

Con lo que obtenemos un punto y un vector director de r que son $P(2,1,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(0,-1,1)$.

La recta pedida s contiene al punto $A(1,2,3)$ y, por ser paralela a r, tiene por vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente del vector director de la recta r: $\overrightarrow{v_s}=(0,-1,1)$. Su ecuación continua es:

$$s \equiv \frac{x-2}{0}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$$

b) La recta t que pasa por A y es perpendicular a π tiene como vector director al vector normal del plano $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0$: $\vec{n}=(3,2,1) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=2+2\lambda. \\ z=3+\lambda \end{cases}$

El punto M, intersección del plano π con la recta t se obtiene resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv 3x+2y+z+4=0 \\ t \equiv \begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3(1+3\lambda)+2(2+2\lambda)+(3+\lambda)+4=0; \to$$

$3+9\lambda+4+4\lambda+3+\lambda+4=0;\ \ \to 14+14\lambda=0; \to 1+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow M(-2,0,2)$.

Para obtener el simétrico tiene que cumplirse que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MA'}$.

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=[(-2,0,2)-(1,2,3)]=(-3,-2,-1).$$

$$\overrightarrow{MA'}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OM}=[(x,y,z)-(-2,0,2)]=(x+2,y,z-2).$$

$$(-3,-2,-1)=(x+2,y,z-2) \Rightarrow \left.\begin{cases} x+2=-3 \to x=-5 \\ y=-2 \\ z-2=-1 \to z=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow A'(-5,-2,1)$$

$$A'(-5,-2,1)$$

Ejercicio E5:

Determinar la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, conociendo que tiene un punto de inflexión en $x = 1$ y que la recta tangente a su gráfica en el punto $P(-1, 0)$ es el eje de abscisas.

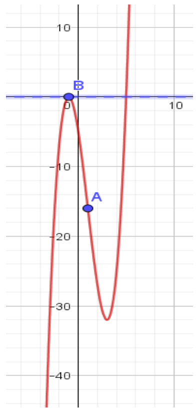
Solución:

Sabemos que:

Por contener al punto $P(-1, 0) \Rightarrow f(-1) = 0$:

$f(-1) = (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0 = -1 + a - b + c = 0 \Rightarrow \Rightarrow a - b + c = 1.$ (1)

Por tener un punto de inflexión para $x = 1 \Rightarrow f''(1) = 0$:



$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f''(x) = 6x + 2a \rightarrow \quad f''(1) = 6 \cdot 1 + 2a = 0;\ \ 3 + a = 0$

$$a = -3$$

Sustituyendo este valor en (1):

$-3 - b + c = 1 \rightarrow \quad b - c = -4.$ (2)

La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

El eje de abscisas es la recta de pendiente cero: $y = 0 \Rightarrow m = 0$.

Para $a = -3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + b \rightarrow f'(-1) = m = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 6 + b = 0;\ \ 3 + 6 + b = 0$

$$b = -9$$

Sustituyendo en (2): $-9 - c = -4 \Rightarrow c = -5$

$$c = -5$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$$

Ejercicio E6:

Demuestre que la ecuación $x^4 + 3x = 1 + sen\,x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2]$. Probar que la solución es única.

Solución:

Demostrar lo pedido es equivalente a demostrar que la función $f(x) = x^4 + 3x - 1 - sen\,x = 0$ tiene una solución única.

La función $f(x)$ está formada por suma de funciones polinómicas y la función seno, por lo que es continua y derivable en toda la recta real.

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

Aplicamos a $f(x)$ el teorema de Bolzano en cualquier intervalo cerrado en el que alcance distinto signo en los extremos, por ejemplo, $[0, 2]$:

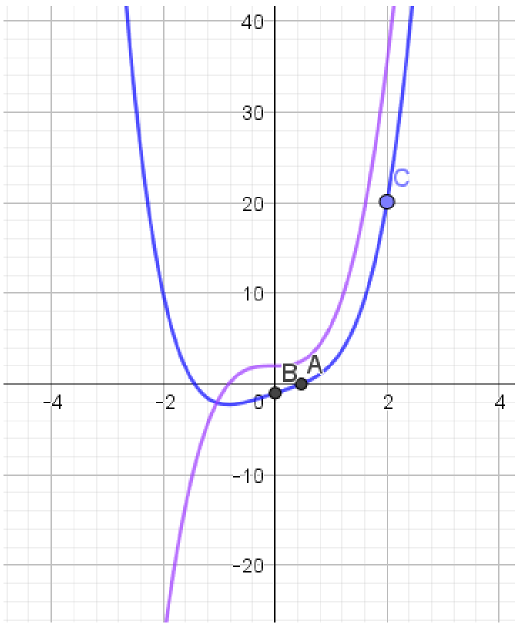
$$\left.\begin{array}{r} f(0) = 0^4 + 3 \cdot 0 - 1 - sen\,0 = -1 < 0 \\ f(2) = 2^4 + 3 \cdot 2 - 1 - sen\,2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in [0, 2] \Rightarrow f(c) = 0.$$

Ya se ha probado que la función tiene una raíz $x = c \in [0, 2]$; ahora se debe demostrar que este valor es único.

$f'(x) = 4x^3 + 3 - cos\,x > 0, \forall x \in [0, 2]$, lo cual significa que la función es monótona creciente lo que implica que sólo puede tener una raíz.

La función dada viene en azul. Observamos como, en efecto, en $x = 0$, B, toma un valor negativo, y en $x = 2$, C toma un valor positivo. La función es continua y creciente en (0, 2), luego existe un valor, A, para el que se anula.

La función derivada, en malva, observamos que es creciente, y que en el intervalo (0, 2) es positiva, luego en ese intervalo la función dada es creciente.



Ejercicio E7:

$a)$ Calcular: $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x}$.

$b)$ Dada la función $f(x)=\frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}$, hallar la función primitiva suya $F(x)$ que verifique $F(0)=3$.

Solución:

$a)$ Para $x=1$ se anula tanto el numerador como el denominador, luego para quitar la indeterminación multiplicamos por el conjugado:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1})(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1})}{(1-x)(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1})}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x-1}\right)^2}{(1-x)(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+1-(2x-1)}{(1-x)\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+1-2x+1}{(1-x)\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2\quad (*)}{(1-x)\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}$$

$(*)$ $x^2-3x+2=0;\;\; x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\Rightarrow x_1=1, x_2=2\Rightarrow x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

Dividimos numerador y denominador por $x-1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{-(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1})}=-\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x-1}}==-\frac{1-2}{\sqrt{1^2-1+1}+\sqrt{2\cdot 1-1}}=-\frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x}=\frac{1}{2}$$

También puede hacerse utilizando L'Höpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x}=\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}-\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{-1}=\frac{\frac{2\cdot 1-1}{2\sqrt{1^2-1+1}}-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1-1}}}{-1}=-\left(\frac{1}{2\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{1}}\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

$b)$ Es una integral inmediata de tipo logaritmo:

$$F(x)=\int\frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x^2+e^{-x}=t \\ (2x-e^{-x})\cdot dx=dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int\frac{1}{t}\cdot dt=Lt+C\Rightarrow\Rightarrow F(x)=L(2x-e^{-x})+C.$$

$$F(0)=3\Rightarrow L(2\cdot 0-e^{-0})+C=3;\;\; L(2-1)+C=3;\;\; L1+C=3; 0+3=C\Rightarrow \boldsymbol{C}=\mathbf{3}.$$

$$F(x)=L(2x-e^{-x})+3$$

Autor: Jorge Muñoz Yañez-Barnuevo
www.apuntesmareaverde.org.es

Ejercicio E8:

a) Dada la función $f(x)=\frac{Lx}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Dada la función $f(x)=x^2-2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1,3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=3$.

Solución:

a) La función logaritmo sólo está definida para los valores positivos, por lo que el dominio de la función es $D(f)=(0,+\infty)$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-Lx\cdot 1}{1}=1-Lx \rightarrow Le=1.$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

Si $x\in(e,+\infty)$ entonces $f'(x)>0$ y la función es creciente. Si $x\in(0,e)$ entonces $f'(x)<0$ y la función es decreciente.

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada, o cuando cambia su crecimiento:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 1-Lx=0 \Rightarrow Lx=1 \Rightarrow x=e.$$

Como para $x=e$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, tiene un máximo relativo.

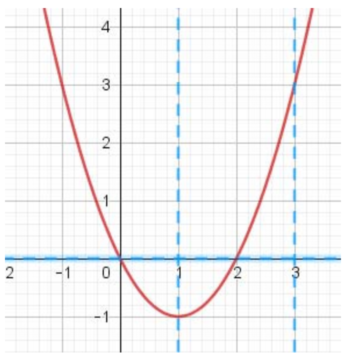
Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$f(e)=\frac{Le}{e}=\frac{1}{e}\Rightarrow P\left(e,\frac{1}{e}\right)$ es un máximo relativo

$P\left(e,\frac{1}{e}\right)$ es un máximo relativo

b) La función $f(x)=x^2-2x$ es una parábola convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2; su vértice es el siguiente: $f'(x)=2x-2$. $f'(x)=0\Rightarrow 2x-2=0;\ x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow V(1,-1)$.

Entre 1 y 2, el área es negativa, entre 2 y 3, es positiva. Luego:



$$\text{Área}=\int_2^1 x^2-2x\cdot dx+\int_2^3 x^2-2x\cdot dx==\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]_2^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]_2^3$$

$$=\left(\frac{1^3}{3}-1^2\right)+\left(\frac{3^3}{3}-3^2\right)-2\cdot\left(\frac{2^3}{3}-2^2\right)$$

$$=\frac{1}{3}-1+9-9-2\cdot\left(\frac{8}{3}-4\right)=$$

$$\frac{1}{3}-1-\frac{16}{3}+8=7-\frac{15}{3}=7-5=2.$$

$\text{Área}=2u^2$

Ejercicio E9:

El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en kg por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 kg y desviación típica 5.

a) ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 kg de azúcar al año?

b) ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 kg?

Solución:

a) Nos dicen que: $\mu = 15;\ \ \sigma = 5$. $X: N(\mu;\ \sigma) = N(15;\ 5)$. Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-15}{5}$.

$P = P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10-15}{5}\right) = P\left(Z < \frac{-5}{5}\right) = P(Z < -1) = 1 - P(Z \le 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$.

El porcentaje de personas que consumen menos de 10 kg de azúcar al año es del **15.87 %**

b) $P = P(X > 25) = P\left(Z > \frac{25-15}{5}\right) = P\left(Z > \frac{10}{2}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$.

El porcentaje de personas cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 kg es del **2.28 %**

Ejercicio E10:

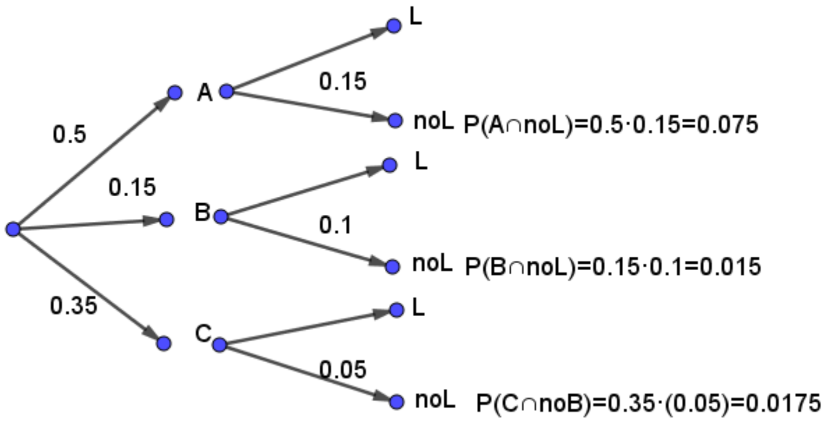
Los estudiantes, que comienzan los estudios en Medicina, en el conjunto formado por las comunidades de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50 % de Andalucía, un 15 % de Baleares y un 35 % provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15 % de Andalucía, 10 % de Baleares y 5 % de Castilla y León.

a) Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina.

b) Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León?

Solución:

Llamamos A al suceso ser de Andalucía, B a ser de Baleares y C a ser de Castilla León. Llamamos L al suceso conseguir el título, y $\bar{L}$ a no conseguirlo. Llevamos los datos a un diagrama de árbol.



a) La probabilidad de no obtener el título es $P = P(\bar{L}) = P(A \cap \bar{L}) + P(B \cap \bar{L}) + P(C \cap \bar{L}) =$

$= P(A) \cdot P(\bar{L}/A) + P(B) \cdot P(\bar{L}/B) + P(CL) \cdot P(\bar{L}/CL) = 0.50 \cdot 0.15 + 0.15 \cdot 0.10 + 0.35 \cdot 0.05 =$
$0.0750 + 0.0150 + 0.0175 = 0.1075$

La probabilidad de no conseguir el título de Licenciado en Medicina es del **0.1075**.

b) Ahora queremos valorar dos probabilidades condicionadas: $P(A/\bar{L})$ y $P(C/\bar{L})$

$$P_1 = P(A/\bar{L}) = \frac{P(A \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{L}/A)}{P(\bar{L})} = \frac{0.50 \cdot 0.15}{0.1075} = \frac{0.0750}{0.1075} = 0.6977.$$

$$P_2 = P(C/\bar{L}) = \frac{P(C \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{P(C) \cdot P(\bar{L}/C)}{P(\bar{L})} = \frac{0.35 \cdot 0.05}{0.1075} = \frac{0.0175}{0.1075} = 0.1628.$$

Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, es mucho más probable que provenga de Andalucía que de Castilla y León

MATEMÁTICAS II

Selectivitat 2020

Comunitat autònoma de

CATALUNYA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jaime Carrascosa Orozco

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 1

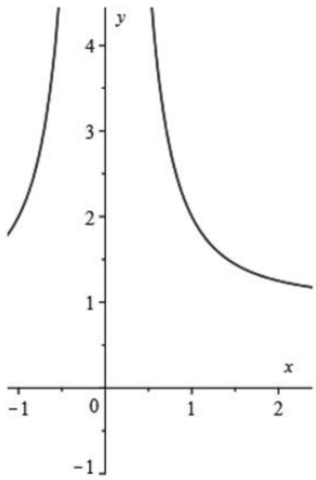
Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Tracem la recta tangent a la funció $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+1$ per un punt $P=(a, f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.



a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció de a, ve donada per la funció

$$g(a)=\frac{(a^2+3)^2}{4a}.$$

[1,25 punts]

b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.
[1,25 punts]

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} 5x+y+4z=19 \\ kx+2y+8z=28 \\ 5x+y-kz=23+k \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
[1,25 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k=0$.
[1,25 punts]

3. ***a***) Calculeu l'equació general del pla π que passa pel punt (8, 8, 8) i té com a vectors directors $\boldsymbol{u} = (1, 2, -3)$ i $\boldsymbol{v} = (-1, 0, 3)$.
[1,25 punts]

b) Determineu el valor del paràmetre a perquè el punt $(1, -5, a)$ pertanyi al pla π i calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per aquest punt i és perpendicular al pla π.
[1,25 punts]

4. Considereu la funció $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x}$, en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els valors de a i b de manera que la funció $f(x)$ tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 2$.
[2,5 punts]

5. Sigui la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que satisfà l'equació $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I} - 3\boldsymbol{X}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2.
[1,25 punts]

b) Comproveu que la matriu $\boldsymbol{X}$ és invertible i calculeu-ne la matriu inversa.
[1,25 punts]

6. Considereu la funció $f(x) = x^3$.

a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.
[1,25 punts]

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

CONVOCATÒRIA ORDINÀRIA DE JUNY

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

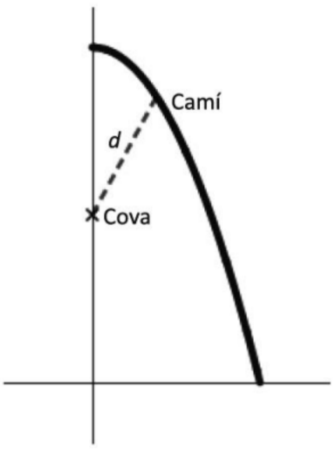
Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Sigui $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Determineu el rang de la matriu $\boldsymbol{A}$ en funció del paràmetre a.
[1,25 punts]

b) Comproveu que $\det(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A})=0$.
[1,25 punts]

2. S'han trobat unes pintures rupestres en una cova situada en una zona molt pedregosa. Hi ha un camí que voreja parcialment la cova format per l'arc de corba $y=4-x^2$ d'extrems $(0, 4)$ i $(2, 0)$. La cova està situada en el punt de coordenades $(0, 2)$, tal com es mostra en la figura, i es vol habilitar un accés rectilini d des del camí a la cova que sigui el més curt possible.



a) Identifiqueu a la gràfica de la figura les coordenades de la cova i del punt del camí des d'on es vol habilitar l'accés. Comproveu que la funció $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}$ calcula la distància des de cada punt del camí a la cova.
[1,25 punts]

b) Calculeu les coordenades del punt del camí que queda més a prop de la cova i digueu quina serà la longitud de l'accés d.
[1,25 punts]

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1,25 punts]

b) Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.
[1,25 punts]

4. Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$, en què ln indica el logaritme neperià, definida per a $x > 0$.

a) Calculeu les coordenades del punt de la corba $y = f(x)$ en què la recta tangent a la corba en aquest punt és horitzontal. Estudieu si aquest punt és un extrem relatiu i classifiqueu-lo.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'àrea del recinte delimitat per la corba $y = f(x)$, les rectes verticals $x = 1$ i $x = \mathrm{e}$ i l'eix de les abscisses.
[1,25 punts]

5. Considereu la recta r d'equació $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ i la recta s que passa pel punt $P = (2, -5, 1)$ i que té per vector director $(-1, 0, -1)$.

a) Estudieu la posició relativa de les rectes r i s.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'equació general del pla que és paral·lel a la recta r i conté la recta s.
[1,25 punts]

6. Una empresa de ceràmica vol posar a la venda una rajola quadrada de 20 cm de costat pintada a dos colors, de manera que la superfície de cada color sigui la mateixa i que si es posen les rajoles l'una al costat de l'altra es vegi un dibuix continu (figura 1).

Figura 1

Figura 2

Per a fer-ho, l'empresa utilitza en cada rajola la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ enquadrada entre els punts de coordenades (0, 0), (0, 2), (2, 0) i (2, 2), tal com es mostra en la figura 2, i fa servir com a unitat de mesura el decímetre.

a) Justifiqueu que, efectivament, aquesta funció permet ajuntar les rajoles de manera contínua i derivable.

[1,25 punts]

b) Justifiqueu que aquesta funció divideix el quadrat esmentat en dues parts que tenen la mateixa superfície.

[1,25 punts]

SÈRIE 1

CONVOCATÒRIA ORDINÀRIA DE JUNY

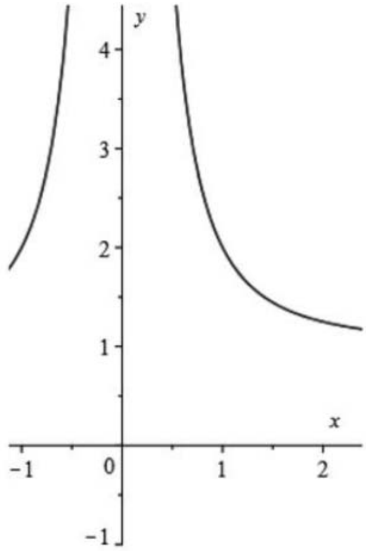
Problema A.1:

1. Tracem la recta tangent a la funció $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+1$ per un punt $P=(a,\ f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.

a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció de a, ve donada per la funció

$$g(a)=\frac{(a^2+3)^2}{4a}.$$

[1,25 punts]

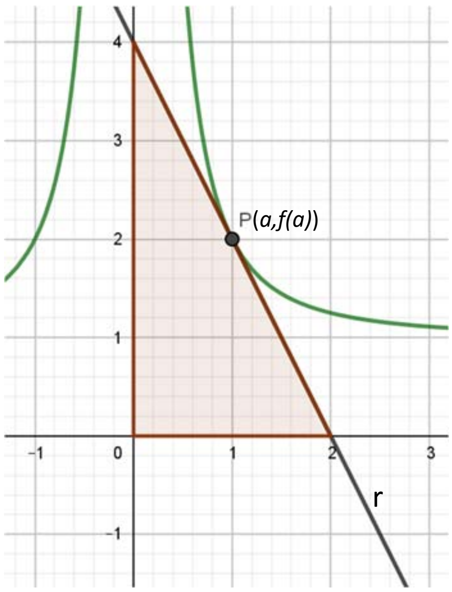


b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.

[1,25 punts]

Solució:

a) Al següent dibuix ens podem fer una idea de la situació i del que ens estan demanant:



Per trobar l'àrea del triangle necessitem la seva base i la seva altura, que són respectivament el punt de tall de la recta r (la recta tangent a la funció en *(a,f(a))*) amb OX i amb OY.

Primer trobarem l'equació de la recta tangent a la funció en *(a,f(a))* i després buscarem els punts de tall amb els eixos per poder fer l'àrea del triangle:

i) Equació de la recta tangent a la funció en *(a,f(a))*:

L'equació explícita d'una recta qualsevol, ve donada per l'expressió: $y=mx+n$ on m és el pendent de la recta, com que la recta que busquem és tangent a la funció $f(x)$ en $(a,f(a))$, el seu pendent serà la derivada de la funció en a, es a dir $f'(a)$.

Calculem $f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$, llavors: $m=f'(a)=-\dfrac{2}{a^3}$

De moment tenim que l'equació de la recta serà: $y=-\dfrac{2}{a^3}x+n$, ara, per trobar el valor de *n*, fem servir el fet de que la recta passa pel punt $\left(a,f(a)\right)=(a,\ \dfrac{1}{a^2}+1)$, és a dir, canviem la *x* i la *y* per les coordenades del punt i aïllant la *n* trobem el seu valor:

$$\frac{1}{a^2}+1=-\frac{2}{a^3}a+n \longrightarrow \frac{1}{a^2}+1=-\frac{2}{a^2}+n \longrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{2}{a^2}+1=n \longrightarrow \frac{3}{a^2}+1=n$$

Amb el que tenim que l'equació de la recta tangent a la funció en $(a, f(a))$ és: $\boldsymbol{y=-\frac{2}{a^3}x+\frac{3}{a^2}+1}$

(També podríem haver trobat l'equació de la recta tangent amb la fórmula de l'equació punt-pendent: $y-y_0=m(x-x_0)$, on $(x_0,y_0)=\big(a,f(a)\big)$ i $m=f'(a)$).

ii) Ara busquem els punts de tall de la recta amb els eixos de coordenades:

- Tall amb OX (y = 0):

$$0=-\frac{2}{a^3}x+\frac{3}{a^2}+1 \longrightarrow \frac{2}{a^3}x=\frac{3}{a^2}+1 \longrightarrow 2x=\frac{3a^3}{a^2}+a^3 \longrightarrow 2x=3a+a^3 \longrightarrow \boldsymbol{x=\frac{3a+a^3}{2}}$$

- Tall amb OY (x = 0):

El tall amb l'eix de la *y* és el valor de *n* de l'equació explícita de la recta, llavors $\boldsymbol{y=\frac{3}{a^2}+1}$

iii) Busquem l'expressió de l'àrea del triangle:

$$\boldsymbol{g(a)}=\frac{\overbrace{\frac{3a+a^3}{2}}^{\text{Base}}\cdot\overbrace{\left(\frac{3}{a^2}+1\right)}^{\text{Altura}}}{2}=\frac{\frac{a\cdot(3+a^2)}{2}\cdot\left(\frac{3}{a^2}+\frac{a^2}{a^2}\right)}{2}=\frac{\frac{a\cdot(3+a^2)}{2}\cdot\frac{3+a^2}{a^2}}{2}=\frac{\frac{a\cdot(3+a^2)^2}{2a^2}}{2}=\frac{\frac{(3+a^2)^2}{2a}}{2}=\boldsymbol{\frac{(3+a^2)^2}{4a}}$$

L'àrea del triangle serà: $\boldsymbol{g(a)=\frac{(3+a^2)^2}{4a}}$ amb $\boldsymbol{a>0}$.

b) El que ens demana l'apartat "b" és que trobem el valor de *a* pel que la funció $g(a)$ té un mínim i el valor de $g(a)$ per a aquest valor de *a*.

El mínim de $g(a)$ és un dels punts singulars de $g(a)$, de manera que per trobar-lo buscarem els punts singulars de $g(a)$ i després mirarem quin d'ells és un mínim; com que els punts singulars de $g(a)$ es troben als valors de *a* que anul·len la derivada, per trobar-los calcularem la derivada i la igualarem a zero:

i) Càlcul de la derivada de $\boldsymbol{g(a)=\frac{(3+a^2)^2}{4a}}$:

$$g'(a)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2(3+a^2)\cdot 2a\cdot a-1\cdot(3+a^2)^2}{a^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4a^2(3+a^2)-(9+6a^2+a^4)}{a^2}=\frac{12a^2+4a^4-9-6a^2-a^4}{4a^2}$$

$$=\frac{3a^4+6a^2-9}{4a^2}=\frac{3(a^4+2a^2-3)}{4a^2}$$

ii) Busquem els punts singulars igualant la derivada a zero:

$$\frac{3(a^4+2a^2-3)}{4a^2} = 0 \longleftrightarrow a^4 + 2a^2 - 3 = 0 \overset{*}{\longleftrightarrow} \left(a^2+3\right)\left(a^2-1\right) = 0.$$

Igualant els factors a zero:

- $a^2 + 3 = 0 \longrightarrow a = \pm\sqrt{-3}$ $\nexists$ Solució.
- $a^2 - 1 = 0 \longrightarrow a = \pm\sqrt{1} = \pm 1$, tenim 2 solucions 1 i -1.

Com que $g(a)$ només està definida per a valors positius de a descartem la solució $a = -1$ i l'única solució que ens queda és $\boldsymbol{a = 1}$.

***** La descomposició de $a^4 + 2a^2 - 3$, l'hem fet buscant 2 números que sumats facin 2 i multiplicats facin –3, també es podria haver fet fent servir Ruffini o podríem haver resolt l'equació biquadrada amb el canvi de variable $a^2 = t$.

iii) Comprovem que en $\boldsymbol{a = 1}$, $\boldsymbol{g(a)}$ té un mínim:

Ho farem estudiant la monotonia de la funció, fent un estudi del signe de $g'(a)$ (que només depèn de l'expressió $a^4 + 2a^2 - 3$):

Com que dins del seu domini ($a > 0$) la funció $g'(a)$ és continua i només s'anul·la quan $a = 1$ hem de mirar el signe de la funció als intervals: $(0, 1)$ i $(1, +\infty)$:

- $a = 0.5 \longrightarrow 0.5^4 + 2 \cdot 0.5^2 - 3 = 0.0625 + 0.5 - 3 = -2.4375.$ Llavors, si $a \in (0, 1)$ $g'(a) < 0.$
  Llavors a l'interval $(0, 1)$, $g(a)$ és decreixent.
- $a = 1.5 \longrightarrow 1.5^4 + 2 \cdot 1.5^2 - 3 = 5.0625 + 4.5 - 3 = 6.5625.$ Llavors, si $a \in (1, +\infty)$ $g'(a) > 0.$
  Llavors a l'interval $(1, +\infty)$, $g(a)$ és creixent.

x	1	2 3 4
$g'(a)$	$-$	$+$
$g(a)$	↘	↗

Amb el que podem afirmar que quan $a = 1$, $g(a)$ té un mínim absolut.

El punt P, serà: $\left(a, f(a)\right) = \left(a, \frac{1}{a^2} + 1\right) = \left(1, \frac{1}{1^2} + 1\right) = (1, 2)$

iv) Calculem el valor del mínim:

$$g(1) = \frac{\left(3+1^2\right)^2}{4 \cdot 1} = 4.$$

L'àrea del triangle serà mínima quan P = (1, 2) i tindrà un valor de 4 u².

Problema A.2:

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} 5x+y+4z=19 \\ kx+2y+8z=28 \\ 5x+y-kz=23+k \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.

[1,25 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k=0$.

[1,25 punts]

Solució apartat a)

Anomenem $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ k & 2 & 8\\ 5 & 1 & -k\end{pmatrix}$ a la matriu del sistema i $\bar{A}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4 & 19\\ k & 2 & 8 & 28\\ 5 & 1 & -k & 23+k\end{pmatrix}$ a la matriu ampliada del sistema.

Discutirem el sistema aplicant el Teorema de Rouché-Fröbenius, que compara el rang de la matriu del sistema amb el rang de la matriu ampliada.

i) Rang de la matriu del sistema segons els valors del paràmetre *k*:

Si el determinant de la matriu és diferent de zero, voldrà dir que les tres files i columnes de la matriu són linealment independents i per tant el rang de la matriu serà 3. Si el determinant queda igual a zero, voldrà dir que al menys una de les files o columnes de la matriu és combinació lineal de les altres i el rang de la matriu serà més petit que tres. Mirem per a quins valors de *k* s'anul·la el determinant de la matriu:

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & 1 & 4\\ k & 2 & 8\\ 5 & 1 & -k\end{vmatrix}=-10k+4k+40-(40+40-k^2)=k^2-6k-40$$

$$|A|=0 \longleftrightarrow k^2-6k-40=0 \overset{*}{\longleftrightarrow} (x-10)(x+4)=0 \longrightarrow \begin{cases} x-10=0 \longrightarrow x=10 \\ x+4=0 \longrightarrow x=-4 \end{cases}$$

***** La descomposició de $k^2-6k-40$ l'hem fet buscant 2 números que sumats facin –6 i multiplicats facin –40. També podríem haver resolt l'equació amb la fórmula de Bhaskara o un altre mètode.
Llavors:

- Si $k\in\mathbb{R}\backslash\{-4,10\}$ (Si *k* és un nombre real excepte –4 i 10), el determinant de la matriu serà diferent de zero i per tant el rang de la matriu serà 3.
- Si $k=-4$, $|A|=0$ i per tant rg(*A*) < 3, anem a veure quin és el rang de la matriu *A* quan canviem la *k* per –4:

  $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ -4 & 2 & 8\\ 5 & 1 & 4\end{pmatrix}$ si fem $\begin{vmatrix}5 & 1\\ -4 & 2\end{vmatrix}=10+4=14\neq 0$, llavors podem dir que rg(*A*) = 2.
- Si $k=10$, $|A|=0$ i per tant rg(*A*) < 3, anem a veure quin és el rang de la matriu *A* quan canviem la *k* per 10:

  $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ 10 & 2 & 8\\ 5 & 1 & -10\end{pmatrix}$ si fem $\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & -10\end{vmatrix}=-20-8=-28\neq 0$, llavors podem dir que rg(*A*) = 2.

ii) Rang de la matriu ampliada del sistema segons els valors del paràmetre *k*:

- Si $k \in \mathbb{R}\backslash\{-4, 10\}$, com que la matriu $\bar{A}$ és d'ordre 3x4, rg($\bar{A}$) ≤ 3, com que la matriu $A \subset \bar{A}$, rg($\bar{A}$) ≥ 3; per tant rg($\bar{A}$) = 3.

- Si $k = -4$, anem a veure quin és el rang de la matriu $\bar{A}$:

  Per fer-ho farem servir el mètode de Gauss.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ -4 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & 4 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1-F_3]{4F_1+5F_2} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 14 & 56 & 216 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{rg}(\bar{A}) = 2.$$

- Si $k = 10$, anem a veure quin és el rang de la matriu $\bar{A}$:

  Per fer-ho farem servir el mètode de Gauss.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 10 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -10 & 33 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1-F_3]{2F_1-F_2} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2\leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{rg}(\bar{A}) = 3.$$

iii) Discussió del sistema amb el Tª de Rouché-Fröbenius:

- Si $k \in \mathbb{R}\backslash\{-4,10\}$, tenim que $rg(A) = rg(\bar{A}) = nº\ d'incògnites \xrightarrow{Tª\ de\ Rouché} SCD$.
- Si $k = -4$, tenim que $rg(A) = rg(\bar{A}) = 2 < 3 = nº\ d'incògnites \xrightarrow{Tª\ de\ Rouché} SCI$ amb 1 grau de llibertat.
- Si $k = 10$, tenim que $rg(A) \neq rg(\bar{A}) \xrightarrow{Tª\ de\ Rouché} SI$.

- **Si $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}\backslash\{-4, 10\}$, el sistema és compatible determinat.**
- **Si $\boldsymbol{k = -4}$, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.**
- **Si $\boldsymbol{k = 10}$, el sistema és incompatible.**

Solució apartat b)

Si k = 0, estem en el cas $k \in \mathbb{R}\backslash\{-4, 10\}$ i tindrem un SCD, per resoldre'l farem servir el mètode de Gauss:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & 0 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1-F_3]{} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 2 & 8 & 28 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow 4z = -4 \longrightarrow z = -1.$$

Substituint z a la 2a fila: $2y - 8 = 28 \longrightarrow 2y = 28 + 8 \longrightarrow 2y = 36 \longrightarrow y = 18.$

Substituint *y* i z a la 1a fila: $5x + 18 - 4 = 19 \longrightarrow 5x + 14 = 19 \longrightarrow 5x = 19 - 14 \longrightarrow$

$5x = 5 \longrightarrow x = 1.$

La solució del sistema quan $\boldsymbol{k = 0}$, és $\boldsymbol{(1, 18, -1)}$.

Problema A.3:

3. ***a)*** Calculeu l'equació general del pla π que passa pel punt (8, 8, 8) i té com a vectors directors $\boldsymbol{u} = (1, 2, -3)$ i $\boldsymbol{v} = (-1, 0, 3)$.

[1,25 punts]

b) Determineu el valor del paràmetre a perquè el punt $(1, -5, a)$ pertanyi al pla π i calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per aquest punt i és perpendicular al pla π.

[1,25 punts]

Solució apartat a)

L'equació general d'un pla és de la forma $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, on el vector format pels coeficients de *x, y,* i *z* és perpendicular al pla, és a dir $(A, B, C) \perp \pi$.

Com que $u = (1, 2, -3)\ i\ v = (-1, 0, 3)$, són vectors directors del pla, el seu producte vectorial, serà un vector perpendicular al pla:

$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6i + 3j - (-2k + 3j) = 6i + 2k \longrightarrow u \times v = (6, 0, 2)$, dividint entre 2, continuarem tenint un vector perpendicular al pla: $(3, 0, 1)$.

De moment tenim que l'equació del pla que ens demanen, serà: $3x + z + D = 0$, per trobar el valor de *D*, fem servir que $(8, 8, 8)$ és un punt del pla i per tant satisfà l'equació del pla:

$3 \cdot 8 + 8 + D = 0 \longrightarrow 32 + D = 0 \longrightarrow D = -32$, llavors l'equació del pla que ens demanen és:

$\pi: 3x + z - 32 = 0.$

(També la podríem haver trobat igualant a zero el determinant $\begin{vmatrix} x-8 & y-8 & z-8 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ ja que si (*x, y, z*) és un punt del pla, (*x – 8, y – 8, z – 8*) és un vector del pla i com que tres vectors d'un mateix pla són sempre linealment dependents, el determinant de la matriu que formen donarà zero).

L'equació del pla és $\boldsymbol{\pi: 3x + z - 32 = 0}$.

Solució apartat b)

Si $(1, -5, a) \in \pi$, ha de satisfer l'equació del pla: $3 \cdot 1 + a - 32 = 0 \longrightarrow a - 29 = 0 \longrightarrow a = 29.$

Com que la recta que ens demanen és perpendicular al pla, el seu vector director també ho serà, llavors podem fer servir com a vector director de la recta el vector: $(3, 0, 1)$, i com que ha de passar pel punt $(1, -5, 29)$ ja podem escriure l'equació paramètrica de la recta:

L'equació paramètrica d'una recta amb vector director (v_1, v_2, v_3) i que passa pel punt (p_1, p_2, p_3) ve donada per l'expressió: $r: \begin{cases} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 \end{cases}$ en el nostre cas: $r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -5 \\ z = 29 + \lambda \end{cases}$

L'equació paramètrica de la recta demanada és $\boldsymbol{r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -5 \\ z = 29 + \lambda \end{cases}}$

Problema A.4:

4. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x}$, en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els valors de a i b de manera que la funció $f(x)$ tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica d'abscissa $x=2$.
[2,5 punts]

Solució:

- Si la recta $y = mx + n$, és una asímptota obliqua de la funció $f(x) \longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$.

Llavors, en el nostre cas: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{ax^2+b}{x}}{x} = 1 \longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2+b}{x^2} = 1 \longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \left(a + \frac{b}{x^2}\right) = 1 \longrightarrow a = 1.$

- Si una funció $f(x)$ té un mínim en el punt d'abscissa $x = 2 \longrightarrow f'(2) = 0$.

En el nostre cas: $f(x) = \frac{x^2+b}{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{2x\cdot x-(x^2+b)}{x^2} = \frac{x^2-b}{x^2}$ llavors:

$\frac{2^2-b}{2^2} = 0 \longrightarrow 4 - b = 0 \longrightarrow b = 4.$

Comprovem que $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ té un mínim en el punt d'abscissa $x = 2$. (Nosaltres el que sabem és que la derivada val zero i això no ens garanteix que la funció tingui un mínim, podria tenir un màxim o un punt d'inflexió i en aquests casos el problema no tindria solució). Per fer-ho estudiarem el signe de la derivada:

$f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2} \longrightarrow f'(x) = 0 \longleftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \longleftrightarrow x^2 - 4 = 0 \longleftrightarrow x^2 = 4 \longleftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \longrightarrow$
$x = -2$ ó $x = 2$.

A més a més la derivada té una discontinuïtat en $x = 0$ ja que s'anul·la el denominador, llavors per estudiar el signe de la derivada hauríem de considerar els intervals $(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2)\ i\ (2, +\infty)$, com que només ens interessa saber què passa en $x = 2$, només cal que mirem el signe en $(0, 2)\ i\ (2, +\infty)$.

Si $x = 1, f'(1) = \frac{1^2-4}{1^2} = -3 < 0 \longrightarrow f'(x) < 0\ si\ x \in (0, 2) \longrightarrow f(x)$ és decreixent en $(0, 2)$.

Si $x = 3, f'(3) = \frac{3^2-4}{3^2} = \frac{5}{9} > 0 \longrightarrow f'(x) > 0\ si\ x \in (2, +\infty) \longrightarrow f(x)$ és creixent en $(2, +\infty)$.

Ara sí que podem afirmar que $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ té un mínim en el punt d'abscissa $x = 2$.

La funció tindrà una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en $x = 2$ quan:

$$\boldsymbol{a = 1\ \ i\ \ b = 4}$$

Problema A.5:

5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = I - 3X$, en què I és la matriu identitat d'ordre 2.
[1,25 punts]

b) Comproveu que la matriu X és invertible i calculeu-ne la matriu inversa.
[1,25 punts]

Solució apartat a)

$AX = I - 3X \longrightarrow AX + 3X = I \longrightarrow (A + 3I)X = I \longrightarrow (A + 3I)^{-1}(A + 3I)X = (A + 3I)^{-1}I$

$\longrightarrow X = (A + 3I)^{-1}$

$A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; ara calculem la seva inversa:

1r. Calculem el determinant: $|A + 3I| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1.$

2n. Fem la transposada: $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3r. Fem la matriu dels adjunts: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

4t. Dividim entre el determinant: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = (A + 3I)^{-1} = X$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}}$$

Solució apartat b)

Per comprovar que X és invertible hem de veure que el seu determinant és diferent de zero:

$|X| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \neq 0$ llavors X és invertible.

Com que a l'apartat anterior hem vist que: $X = (A + 3I)^{-1} \longrightarrow X^{-1} = ((A + 3I)^{-1})^{-1} = A + 3I$

$\longrightarrow X^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{X^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}$$

Problema A.6:

6. Considereu la funció $f(x) = x^3$.

a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.

[1,25 punts]

b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.

[1,25 punts]

Solució apartat a)

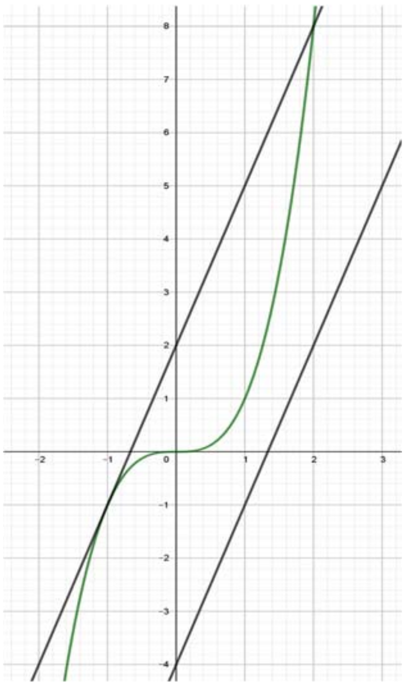
Si dues rectes són paral·leles per força tenen el mateix pendent, la recta $3x - y = 4$ es pot reescriure com $y = 3x - 4$ on es veu que el seu pendent (el coeficient de la x) és 3. Llavors el que volem és veure en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = x^3$ té pendent 3. Com que el pendent de la recta tangent a $y = f(x)$ en un punt $(a, f(a))$, és igual a $f'(a)$; el que ens estan demanant és: per a quins valors negatius de *x* (negatius perquè el punt ha de ser del tercer quadrant) $(x^3)' = 3$?

$(x^3)' = 3x^2 \longrightarrow 3x^2 = 3 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow x = \pm\sqrt{1} \longrightarrow x = -1$ ó $x = 1$. Com que només volem el resultat negatiu: $x = -1$.

El punt que ens demanen serà: $\left(-1, f(-1)\right) = (-1, (-1)^3) = (-1, -1)$

L'equació de la recta que té pendent 3 i que passa pel punt $(-1, -1)$ serà:

Pendent 3 $\longrightarrow y = 3x + n \xrightarrow[passa\ per\ (-1,-1)]{} -1 = 3 \cdot (-1) + n \longrightarrow n = 2 \longrightarrow y = 3x + 2$



El punt en el que la recta tangent a *y=f(x)* és paral·lela a 3*x* – *y* = 4, és (–1, –1) i l'equació de la recta és: *y* = 3*x* + 2.

Solució apartat b)

1r. Trobem els punts de tall de la corba i la recta:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x + 2 \end{cases} \longrightarrow x^3 = 3x + 2 \longrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \xrightarrow[*Ruffini]{} (x+1)^2(x-2) = 0 \longrightarrow$$

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \longrightarrow x = -1 \longrightarrow y = (-1)^3 = -1 \\ x - 2 = 0 \longrightarrow x = 2 \longrightarrow y = 2^3 = 8 \end{cases}$$; els punts de tall són: $(-1,-1)\ i\ (2,8)$.

∗Ruffini:

	1	0	-3	-2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	0
-1		-1	2	
	1	-2	0	

Com es pot veure al dibuix de l'apartat *a*) la recta $y = 3x + 2$ va sempre per sobre de la corba $y = x^3$ de manera que l'àrea demanada ve donada per la solució de la següent integral definida:

$$A = \int_{-1}^{2}[(3x+2) - x^3]dx = \int_{-1}^{2}(-x^3 + 3x + 2)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} =$$

$$\left(-\frac{2^4}{4} + \frac{3\cdot 2^2}{2} + 2\cdot 2\right) - \left(-\frac{(-1)^4}{4} + \frac{3(-1)^2}{2} + 2(-1)\right) = (-4 + 6 + 4) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2\right) =$$

$$6 - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{4}$$

L'àrea entre la corba i la recta és $\frac{27}{4}$ u²

CONVOCATÒRIA ORDINARIA DE JUNY

SÈRIE 3

Problema B.1:

1. Sigui $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Determineu el rang de la matriu $\boldsymbol{A}$ en funció del paràmetre a.
[1,25 punts]

b) Comproveu que $\det(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}) = 0$.
[1,25 punts]

Solució apartat a)

Si el determinant de la matriu és diferent de zero, voldrà dir que les tres files i columnes de la matriu són linealment independents i per tant el rang de la matriu serà 3. Si el determinant queda igual a zero, voldrà dir que al menys una de les files o columnes de la matriu és combinació lineal de les altres i el rang de la matriu serà més petit que tres. Mirem per a quins valors de *a* s'anul·la el determinant de la matriu:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2a - a = a - 1 \longrightarrow |A| = 0 \longleftrightarrow a - 1 = 0 \longleftrightarrow a = 1.$$

- Si $a \neq 1$, $|A| \neq 0 \longrightarrow rg(A) = 3.$
- Si $a = 1$, $|A| = 0 \longrightarrow rg(A) < 3.$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ si fem $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \longrightarrow rg(A) = 2.$

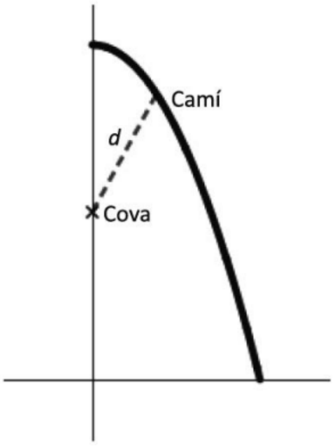
Si $\boldsymbol{a \neq 1}$, $\boldsymbol{rg(A) = 3}$ i si $\boldsymbol{a = 1}$, $\boldsymbol{rg(A) = 2}$

Solució apartat b)

$A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 4 \\ 0 & a+1 & 2 \\ a & 0 & a+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 2 & 2a & 6 \\ 1 & a & 3 \\ a & a & a+2 \end{pmatrix}$, com que la primera fila és el doble de la segona, és segur que $|A^2 + A| = 0$.

Problema B.2:

2. S'han trobat unes pintures rupestres en una cova situada en una zona molt pedregosa. Hi ha un camí que voreja parcialment la cova format per l'arc de corba $y = 4 - x^2$ d'extrems (0, 4) i (2, 0). La cova està situada en el punt de coordenades (0, 2), tal com es mostra en la figura, i es vol habilitar un accés rectilini *d* des del camí a la cova que sigui el més curt possible.



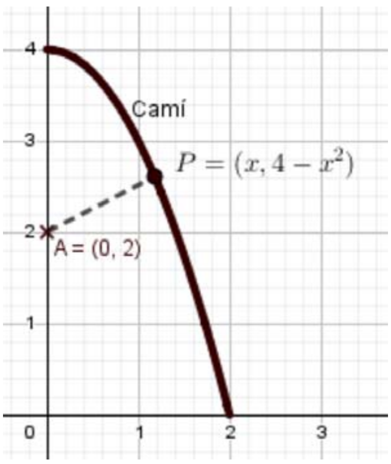
a) Identifiqueu a la gràfica de la figura les coordenades de la cova i del punt del camí des d'on es vol habilitar l'accés. Comproveu que la funció $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ calcula la distància des de cada punt del camí a la cova.

[1,25 punts]

b) Calculeu les coordenades del punt del camí que queda més a prop de la cova i digueu quina serà la longitud de l'accés *d*.

[1,25 punts]

Solució apartat a)



La distància entre 2 punts ve donada per la longitud del vector que els uneix, en el nostre cas:

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-0)^2 + (4 - x^2 - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2} =$$

$$\sqrt{x^2 + 4 - 4x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}.$$

Llavors $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \quad 0 \le x \le 2$, ens dona la distància de cada punt del camí a la cova.

Solució apartat b)

El que ens demana l'apartat *b* és que trobem el valor de *x* pel que la funció $f(x)$ té un mínim i el valor de $f(x)$ per a aquest valor de *x* (*).

El mínim de $f(x)$ és un dels punts singulars de $f(x)$, de manera que per trobar-lo buscarem els punts singulars de $f(x)$ i després mirarem quin d'ells és un mínim; com que els punts singulars de $f(x)$ es troben als valors de *x* que anul·len la derivada, per trobar-los calcularem la derivada i la igualarem a zero:

- $f'(x) = \dfrac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = \dfrac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}$
- $f'(x) = 0 \longleftrightarrow \dfrac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = 0 \longleftrightarrow 2x^3 - 3x = 0 \longleftrightarrow x(2x^2 - 3) = 0 \longrightarrow$

$\begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3 = 0 \longrightarrow 2x^2 = 3 \longrightarrow x^2 = \frac{3}{2} \longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$ Amb el que tenim 3 solucions de l'equació $f'(x) = 0$, que són: $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, 0 i $\sqrt{\frac{3}{2}}$; la solució $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ la descartem ja que $0 \le x \le 2$.

- Per identificar a quin dels altres dos valors tenim el mínim demanat, estudiarem el signe de $f'(x)$.

  Com que l'expressió $\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ sempre dona valors positius, el signe de $f'(x)$ només dependrà de $2x^3 - 3x$:

  - $x = -1 \longrightarrow 2(-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 1 > 0 \longrightarrow f'(x) > 0$ quan $x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \longrightarrow f(x)$ és creixent quan $x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right)$.
  - $x = 1 \longrightarrow 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 = -1 < 0 \longrightarrow$ $f'(x) < 0$ quan $x \in \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ $\longrightarrow f(x)$ és decreixent quan $x \in \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.
  - $x = 2 \longrightarrow 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 = 10 > 0 \longrightarrow$ $f'(x) > 0$ quan $x \in \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$ $\longrightarrow f(x)$ és creixent quan $x \in \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$.

  Amb el que podem afirmar que a l'interval $[0, 2]$ la funció $f(x)$ té un mínim absolut quan $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

- Les coordenades del punt seran: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ 4 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ 4 - \frac{3}{2}\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{5}{2}\right)$

- La longitud de l'accés serà: $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^4 - 3\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + 4} = \sqrt{\frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4} =$

  $\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4} =$

  $\sqrt{-\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ u.

(*) Com que la funció $g(x) = \sqrt{x}$ és una funció creixent, la funció $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ assoleix els màxims i els mínims en els mateixos valors de x que la funció $h(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ (sempre i quan $x^4 - 3x^2 + 4 \ge 0$, com és el cas), llavors podríem haver fet el problema buscant els punts singulars de $h(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ en lloc dels de $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$. (La resolució se simplifica, sobretot a l'hora de comprovar quin dels punts singulars és el mínim, fent servir el criteri de la segona derivada).

El punt del camí demanat és: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ i la distància del punt a la cova és: $\frac{\sqrt{14}}{2}$ u.

Problema B.3:

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} ax+y=a \\ x+ay+z=5 \\ x+2y+z=5 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1,25 punts]

b) Resoleu el sistema per al cas $a=2$.
[1,25 punts]

Solució apartat a)

Discutirem el sistema aplicant el Teorema de Rouché-Fröbenius, que compara el rang de la matriu del sistema amb el rang de la matriu ampliada.

i) Rang de la matriu del sistema segons els valors del paràmetre *a*:

Si el determinant de la matriu és diferent de zero, voldrà dir que les tres files i columnes de la matriu són linealment independents i per tant el rang de la matriu serà 3. Si el determinant queda igual a zero, voldrà dir que al menys una de les files o columnes de la matriu és combinació lineal de les altres i el rang de la matriu serà més petit que tres. Mirem per a quins valors de *a* s'anul·la el determinant de la matriu:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = a^2+1-(2a+1) = a^2-2a.$$

$$|A|=0 \longleftrightarrow a^2-2a=0 \longleftrightarrow a(a-2)=0 \longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a-2=0 \longrightarrow a=2 \end{cases}$$

Llavors:

- Si $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,2\}$ (Si *a* és un nombre real excepte 0 i 2), el determinant de la matriu serà diferent de zero i per tant el rang de la matriu serà 3.
- Si $a=0$, $|A|=0$ i per tant rg(*A*) < 3, anem a veure quin és el rang de la matriu *A* quan canviem la *a* per 0:
  $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ si fem $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-1=-1 \neq 0$, llavors podem dir que rg(*A*) = 2.
- Si $k=2$, $|A|=0$ i per tant rg(*A*) < 3, anem a veure quin és el rang de la matriu *A* quan canviem la *a* per 2:
  $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ si fem $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1=3 \neq 0$, llavors podem dir que rg(*A*) = 2.

ii) Rang de la matriu ampliada del sistema segons els valors del paràmetre *k*:

- Si $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,2\}$, com que la matriu $\bar{A}$ és d'ordre 3 x 4, rg($\bar{A}$) ≤ 3, com que la matriu $A \subset \bar{A}$, rg($\bar{A}$) ≥ 3; per tant rg($\bar{A}$) = 3.

- Si $a = 0$, anem a veure quin és el rang de la matriu $\bar{A}$:

  Per fer-ho farem servir el mètode de Gauss.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_1 - F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = 2F_2 + F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Llavors: rg($\bar{A}$) = 2.

- Si $a = 2$, anem a veure quin és el rang de la matriu $\bar{A}$:

  Per fer-ho farem servir el mètode de Gauss.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Com\ que \\ F_2 = F_3}]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_1 - 2F_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{rg}(\bar{A}) = 2.$$

iii) Discussió del sistema amb el Tª de Rouché-Fröbenius:

- Si $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,2\}$, tenim que $rg(A) = rg(\bar{A}) = nº\ d'incògnites \xrightarrow{Tª\ de\ Rouché} SCD$.
- Si $a = 0$, tenim que $rg(A) = rg(\bar{A}) = 2 < 3 = nº\ d'incògnites \xrightarrow{Tª\ de\ Rouché} SCI$ amb 1 grau de llibertat.
- Si $a = 2$, tenim que $rg(A) = rg(\bar{A}) = 2 < 3 = nº\ d'incògnites \xrightarrow{Tª\ de\ Rouché} SCI$ amb 1 grau de llibertat.

- **Si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}, \mathbf{2}\}$, el sistema és compatible determinat.**
- **Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.**
- **Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.**

Solució apartat b)

Quan $a = 2$, el sistema queda: $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$

Per l'apartat anterior sabem que la matriu ampliada del sistema després d'aplicar Gauss queda:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ llavors el sistema d'equacions inicial és equivalent al sistema d'equacions:

$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -3y - 2z = -8 \end{cases}$, fem $z = t$ i aïllem la y de la segona equació: $-3y - 2t = -8 \longrightarrow -3y = 2t - 8$

$y = \frac{2t-8}{-3} = \frac{8-2t}{3}$. Substituïm y a la primera equació i aïllem la x: $2x + \frac{8-2t}{3} = 2 \longrightarrow$

$6x + 8 - 2t = 6 \longrightarrow 6x = 2t + 6 - 8 \longrightarrow x = \frac{2t-2}{6} \longrightarrow x = \frac{t-1}{3}$.

La solució del sistema en el cas $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$ és: $\left(\frac{t-1}{3}, \frac{8-2t}{3}, \text{t}\right)$ $\boldsymbol{amb\ t} \in \mathbb{R}$

Problema B.4:

4. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\ln(x)$, en què ln indica el logaritme neperià, definida per a $x>0$.

a) Calculeu les coordenades del punt de la corba $y=f(x)$ en què la recta tangent a la corba en aquest punt és horitzontal. Estudieu si aquest punt és un extrem relatiu i classifiqueu-lo.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'àrea del recinte delimitat per la corba $y=f(x)$, les rectes verticals $x=1$ i $x=\mathrm{e}$ i l'eix de les abscisses.
[1,25 punts]

Solució apartat a)

Als punts de la corba on la tangent a $y=f(x)$ és horitzontal, $f'(x)=0$. Llavors calculem $f'(x)$ i mirem per a quins valors de x $f'(x)=0$:

- $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cdot\ln(x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}\cdot\ln(x)+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(1-\ln(x))$
- $f'(x)=0\longrightarrow\frac{1}{x^2}(1-\ln(x))=0\longrightarrow 1-\ln(x)=0\longrightarrow\ln(x)=1\longrightarrow x=e.$
- Les coordenades del punt demanat seran: $\left(e,f(e)\right)=\left(e,\ \frac{1}{e}\cdot\ln(e)\right)=\left(e,\ \frac{1}{e}\right).$

Per saber si quan $x=e$ $f(x)$ té un extrem relatiu i saber de quin tipus és, estudiarem el signe de la derivada als intervals $(0,e)$ i $(e,+\infty)$:

- Si $x=1\longrightarrow f'(1)=\frac{1}{1^2}(1-\ln(1))=1(1-0)=1>0\longrightarrow$ $Si\ x\in(0,e), f'(x)>0$ llavors $si\ x\in(0,e), f(x)$ és creixent.
- Si $x=e^2\longrightarrow f'(e^2)=\frac{1}{e^4}(1-\ln(e^2))=\frac{1}{e^4}(1-2)=-\frac{1}{e^4}<0\longrightarrow Si\ x\in(e,+\infty), f'(x)<0$ llavors $si\ x\in(e,+\infty), f(x)$ és decreixent.

Ara podem dir que quan $x=e$, $f(x)$ té un màxim relatiu.

Les coordenades del punt demanat són: $\left(e,\ \frac{1}{e}\right)$ i és un màxim relatiu.

Solució apartat b)

Com que $f(x)>0$ quan $x\in(1,e)$ l'àrea demanada és la solució de la següent integral definida:

$$\int_1^e\frac{1}{x}\cdot\ln(x)\,dx=\left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e=\frac{\ln^2(e)}{2}-\frac{\ln^2(1)}{2}=\frac{1}{2}u^2$$

L'àrea demanada és $\frac{1}{2}\ u^2$.

Problema B.5:

5. Considereu la recta r d'equació $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$ i la recta s que passa pel punt $P=(2,-5,1)$ i que té per vector director $(-1,0,-1)$.

a) Estudieu la posició relativa de les rectes r i s.
[1,25 punts]

b) Calculeu l'equació general del pla que és paral·lel a la recta r i conté la recta s.
[1,25 punts]

Solució apartat a)

Un vector director de r és $\vec{v}=(2,-2,1)$ i un punt de r és $Q=(1,3,0)$.

Un vector director de s és $\vec{u}=(-1,0,-1)$ i un punt de s és $P=(2,-5,1)$.

- Com que els vectors no són proporcionals $\left(\frac{-1}{2}\neq\frac{0}{-2}\neq\frac{-1}{1}\right)$ les rectes no poden ser ni paral·leles ni coincidents. Ens queden les possibilitats que siguin secants o que es creuin.

- Si són secants, també són coplanàries, llavors qualsevol vector que vagi d'un punt d'una de les rectes a un punt de l'altra recta, estarà al mateix pla on es troben les rectes, de manera que serà combinació lineal dels vectors directors de les rectes, llavors al fer el rang de la matriu formada pels vectors $\overrightarrow{PQ},\vec{v}\ i\ \vec{u}$ ens quedarà rang 2.

- Si es creuen, un vector que vagi d'un punt d'una de les rectes a un punt de l'altra recta i els vectors directors de les rectes, seran linealment independents, de manera que al fer el rang de la matriu formada pels vectors $\overrightarrow{PQ},\vec{v}\ i\ \vec{u}$ ens quedarà rang 3.

$\overrightarrow{PQ}=(1,3,0)-(2,-5,1)=(-1,8,-1)\longrightarrow\begin{vmatrix}-1 & 8 & -1\\ 2 & -2 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-2-8—2-16=8\neq 0$ Amb el que el rang de la matriu formada per $\overrightarrow{PQ},\vec{v}\ i\ \vec{u}$ és 3 i les rectes es creuen.

(També podríem haver trobat les equacions cartesianes de les rectes i estudiar el rang del sistema que formen les equacions juntes, ens quedaria que el rang de la matriu del sistema és 3 i el de la matriu ampliada és 4 el que implica que les rectes es creuen).

Les rectes es creuen.

Solució apartat b)

El vector perpendicular al pla que ens demanen és perpendicular als vectors directors de les rectes, de manera que el podem trobar fent: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \left(2\vec{k} - 2\vec{\jmath}\right) = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k} = (2, 1, -2)$$

Llavors el pla demanat serà de la forma: $\pi: 2x + y - 2z + D = 0$, com que conté a la recta s passarà pel punt $(2, -5, 1)$, de manera que: $2 \cdot 2 - 5 - 2 + D = 0 \longrightarrow D = 3$ i el pla demanat és:

$$\pi: 2x + y - 2z + 3 = 0$$

(També podríem haver trobat l'equació del pla amb la fórmula: $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$; en aquest cas: $\begin{vmatrix} x - 2 & y + 5 & z - 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow 2x + y - 2z + 3 = 0$).

L'equació del pla demanat és: $\mathbf{2x + y - 2z + 3 = 0}$.

Problema B.6:

6. Una empresa de ceràmica vol posar a la venda una rajola quadrada de 20 cm de costat pintada a dos colors, de manera que la superfície de cada color sigui la mateixa i que si es posen les rajoles l'una al costat de l'altra es vegi un dibuix continu (figura 1).

Figura 1

Figura 2

Per a fer-ho, l'empresa utilitza en cada rajola la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ enquadrada entre els punts de coordenades (0, 0), (0, 2), (2, 0) i (2, 2), tal com es mostra en la figura 2, i fa servir com a unitat de mesura el decímetre.

a) Justifiqueu que, efectivament, aquesta funció permet ajuntar les rajoles de manera contínua i derivable.

[1,25 punts]

b) Justifiqueu que aquesta funció divideix el quadrat esmentat en dues parts que tenen la mateixa superfície.

[1,25 punts]

Solució apartat a)

- Continuïtat: Com que les funcions polinòmiques són contínues en $\mathbb{R}$, el que hem de veure és que a l'interval $[0,2]$ $f(x)$ comença i acaba al mateix valor:
$\begin{cases} f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 8 - 12 + 4 + 1 = 1 \end{cases} \longrightarrow f(0) = f(2)$ les rajoles **s'ajunten de manera contínua.**
- Derivabilitat: Com que les funcions polinòmiques són derivables en $\mathbb{R}$, i de derivada contínua, el que hem de veure és que al punt on s'ajunten les rajoles el pendent amb el que s'arriba $(f'(2))$, és el mateix pendent amb el que se surt $(f'(0))$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \longrightarrow \begin{cases} f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 2 = 2 \\ f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 = 12 - 12 + 2 = 2 \end{cases} \longrightarrow f'(0) = f'(2)$$

Les rajoles s'ajunten de manera derivable.

Solució apartat b)

L'àrea fosca és l'àrea entre la funció i l'eix OX des de $x = 0$ fins a $x = 2$, llavors vindrà donada per la següent integral definida:

$$\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + x\right]_0^2 = \left[\left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 + 2\right) - \left(\frac{0^4}{4} - 0^3 + 0^2 + 0\right)\right] =$$

$$= 4 - 8 + 4 + 2 = 2\ dm^2$$

Com que la rajola té àrea = $2\ dm \times 2\ dm = 4\ dm^2$ **queda provat que:**

La funció divideix la rajola en dues parts amb la mateixa superfície.

(També es podria haver justificat veient que la funció és simètrica respecte el centre de la rajola, per exemple comprovant que $f(1 - x) = 2 - f(1 + x), x \in [0, 1]$).

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

Extremadura

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2019-2020

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. El estudiante ha de elegir 5 preguntas.

Observación importante: En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar** las respuestas.

PREGUNTAS

1. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Estudie los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la matriz tiene inversa. (1 punto)

b) Calcule la inversa para $k = 1$. (1 punto)

2. Discuta en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: (2 puntos)

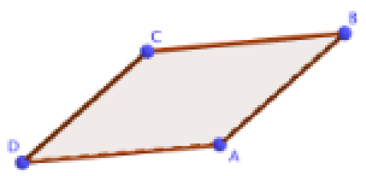
$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & \lambda y & - & z & = 1 \\ -\lambda x & + & y & & & = \lambda \\ & & (\lambda+3)\,y & - & 2z & = 4 \end{array}\right\}$$

3. Sean el plano Π de ecuación $2x + y - z - 2 = 0$ y la recta r dada por $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-1}{3}$.

a) Estudie la posición relativa de la recta respecto del plano. (1 punto)

b) Calcule la distancia de la recta al plano. (1 punto)

4. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,3,-2)$, $B(4,3,1)$ y $C(1,0,1)$ como podemos observar en la siguiente representación:



a) Calcule el cuarto vértice D. (1 punto)

b) Calcule el área del paralelogramo. (1 punto)

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2019-2020

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

5. a) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x) = e^x\,(x^2 - x + 1)$. (1 punto)

b) Justifique si existe algún valor de x tal que $f(x) = 2$. (1 punto)

6. Considere la función $f(x)$, donde $a \in \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) Calcule el valor de a para que la función sea continua. (1 punto)

b) Calcule la ecuación de la recta tangente en $x = 1$. (1 punto)

7. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 1$ y $g(x) = -x + 1$, se pide:

a) Represente de forma aproximada la región delimitada por las dos curvas. (0,5 puntos)

b) Calcule el área de dicha región. (1,5 puntos)

8. Resuelva la integral (2 puntos)

$$\int \frac{-x+7}{x^2+x-2}\,dx.$$

9. Una librería compra lotes de material escolar a tres empresas A, B y C. A la empresa A le compra el 40 % de los lotes, a B el 25 % y a C el resto. De la empresa A le viene defectuoso el 1 % de los lotes, de B el 2 % y de C el 3 %. Elegido un lote al azar, se pide:

a) Calcule la probabilidad de que sea defectuoso. (1 punto)

b) Si sabemos que no es defectuoso, calcule la probabilidad de que lo haya fabricado la empresa B. (1 puntos)

10. Se ha hecho un estudio de un famoso jugador de baloncesto de la ACB y se sabe que tiene una probabilidad de encestar un triple del 60 %. Si realiza 8 tiros a canasta

a) Calcule la probabilidad de que enceste 5 triples. (0,75 puntos)

b) Calcule la probabilidad de que enceste al menos 2. (0,75 puntos)

c) Determine la media y la desviación típica de la distribución. (0,5 puntos)

SOLUCIONES CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2020

Pregunta 1:

1. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Estudie los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la matriz tiene inversa.

b) Calcule la inversa para $k = 1$.

Solución:

a)

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = k - 2k - 1 + k^2 + 1 - 2 = k^2 - k - 2 = 0;$$

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow k_1 = -1, k_2 = 2.$$

$\underline{La\ matriz\ M\ es\ inverible\ \forall k \in R - \{-1, 2\}}.$

b)

Para $k = 1$ la matriz es $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. $|M| = -2$.

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ M^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow \underline{M^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Pregunta 2:

2. Discuta en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & \lambda y & - & z & = 1 \\ -\lambda x & + & y & & & = \lambda \\ & & (\lambda+3)\, y & - & 2z & = 4 \end{array}\right\}$$

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda+3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + \lambda(\lambda+3) - 2\lambda^2 = -2 + \lambda^2 + 3\lambda - 2\lambda^2 =$$

$$= -\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0;\ \ \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0;\ \ \lambda = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \lambda \neq 1 \\ \lambda \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 4 - 2 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$Para\ \lambda = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{2F_1 + F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Pregunta 3:

3. Sean el plano Π de ecuación $2x + y - z - 2 = 0$ y la recta r dada por $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3}$.

a) Estudie la posición relativa de la recta respecto del plano. (1 punto)

b) Calcule la distancia de la recta al plano. (1 punto)

Solución:

3º) Sean el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3}$.

a) Estudie la posición relativa de la recta con respecto al plano.

b) Calcule la distancia de la recta al plano.

----

a)

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x = y - 2 \\ x = z - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = -1 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 2 \\ x + y = 2 \\ x - z = -1 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ *La recta está contenida en el plano.*

$2 \rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ *La recta es paralela al plano.*

$3 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ *La recta y el plano son secantes.*

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 2 + 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$\underline{Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos.}$

b)

La distancia entre r y π cuando son paralelos es la misma que la distancia de un punto de la recta r al plano π. Un punto de r es $A(0, 2, 1)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

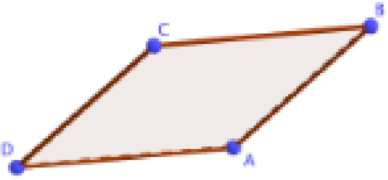
Aplicando la fórmula al punto $A(0, 2, 1)$ y al plano $\pi \equiv 2x + y - z - 2 = 0$:

$$d(r, \pi) = d(A, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 - 1 - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{6}\ unidades}.$$

****

Pregunta 4:

4. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,3,-2)$, $B(4,3,1)$ y $C(1,0,1)$ como podemos observar en la siguiente representación:



a) Calcule el cuarto vértice D. (1 punto)

b) Calcule el área del paralelogramo. (1 punto)

Solución:

a)

Sea el punto $D(x,y,z)$. Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son iguales.

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(4,3,1) - (1,3,-2)] = (3,0,3)$.

$\overrightarrow{DC} = [C - D] = [(1,0,1) - (x,y,z)] = (1-x,-y,1-z)$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (3,0,3) = (1-x,-y,1-z) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 1-x=3 \to x=-2 \\ -y=0 \to y=0 \\ 1-z=3 \to z=-2 \end{matrix}\right\}.$$

$$\underline{D \equiv (-2,0,-2)}.$$

b)

El área de un paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S = |\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}| = |[A-D] \times [C-D]| =$$

$$= |[(1,3,-2) - (-2,0,-2)] \times [(1,0,1) - (-2,0,-2)]| = |(3,3,0) \times (3,0,3)| =$$

$$= \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right\| = |9i - 9k - 9j| = 9 \cdot |i - j - k| = 9 \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} =$$

$$= 9 \cdot \sqrt{1+1+1} \Rightarrow \underline{S = 9\sqrt{3}\, u^2}.$$

****

Pregunta 5:

5. a) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$. (1 punto)

b) Justifique si existe algún valor de x tal que $f(x) = 2$. (1 punto)

Solución:

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = e^x(x^2 - x + 1) + e^x(2x - 1) = e^x(x^2 + x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(x^2 + x) = 0;\ x^2 + x = 0;\ x(x + 1) = 9 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0.$$

Por ser $f(x)$ continua en su dominio, las raíces de su primera derivada dividen su dominio en los intervalos $(-\infty, -1), (-1, 0)$ y $(0, +\infty)$, en los cuales la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, +\infty)$ es $f'(1) = 2e > 0$.

De lo expuesto anteriormente se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, -1) \cup (0, +\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-1, 0).}$$

b)

$$f(x) = 2 \Rightarrow e^x(x^2 - x + 1) = 2.$$

Se considera la función $g(x) = f(x) - 2 = e^x(x^2 - x + 1) - 2$, que es continua en R, por ser la suma de una constante y el producto de una función exponencial por una función polinómica.

Demostrar que existe un valor real de x para el cual $f(x) = 2$ es equivalente a demostrar que $g(x) = 0$.

El teorema de Bolzano dice que "si $g(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$".

Aplicando el teorema de Bolzano a $g(x)$, por ejemplo, en el intervalo $(0, 1)$:

$$g(0) = e^0(0^2 - 0 + 1) - 2 = 1 \cdot 1 - 2 = -1 < 0.$$

Pregunta 6:

6. Considere la función $f(x)$, donde $a \in \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) Calcule el valor de a para que la función sea continua.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

Solución:

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x} = \frac{1-e^0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{1} = -e^0 = -1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = a \Rightarrow \underline{a = -1}.$$

b)

$f(1) = \frac{1-e^1}{1} = 1 - e \Rightarrow$ Punto de tangencia $\Rightarrow P(1, 1-e)$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-e^x \cdot x - (1-e^x)\cdot 1}{x^2} = \frac{-e^x \cdot x - 1 + e^x}{x^2} = \frac{e^x(1-x)-1}{x^2} & si \ \ x \neq 0 \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}.$$

$$m = f'(1) = \frac{e^1(1-1)-1}{1^2} = \frac{-1}{1} = -1.$$

La expresión de una recta conocidos un punto y la pendiente viene dada por la expresión $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(1, 1-e)$ y $m = -1$:

$$y - (1-e) = -1 \cdot (x-1); \quad y - 1 + e = -x + 1.$$

$$\underline{Recta\ tangente{:}\ t \equiv x + y + (e-2) = 0}.$$

Pregunta 7:

7. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 1$ y $g(x) = -x + 1$, se pide:

a) Represente de forma aproximada la región delimitada por las dos curvas.

b) Calcule el área de dicha región.

Solución:

La función $f(x) = x^2 - 4x + 1$ es una parábola convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2. Su vértice es el siguiente:

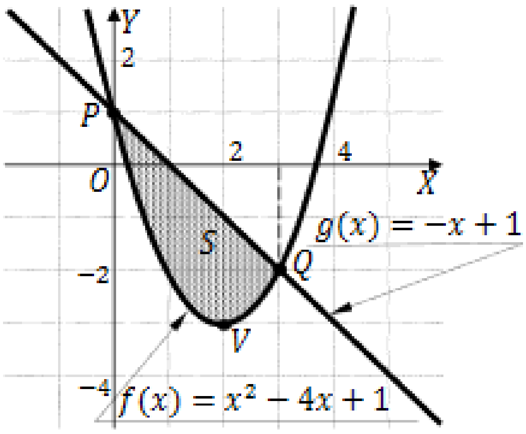
$$f'(x) = 2x - 4. \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0; \;\; x = 2.$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3 \Rightarrow V(2, -3).$$

Los puntos de corte de la parábola y la recta se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 4x + 1 = -x + 1;\; x^2 - 3x = 0;\; x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to P(0,1) \\ x_2 = 3 \to Q(3,-2) \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.



Por ser todas las ordenadas de la recta mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola en el intervalo $(0, 3)$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^3 [g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 [(-x + 1) - (x^2 - 4x + 1)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 3x) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2}\right) - 0 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{-18+27}{2} =$$

$$= \underline{\frac{9}{2}\, u^2 = 4{,}5\, u^2}.$$

Pregunta 8:

8. Resuelva la integral

$$\int \frac{-x+7}{x^2+x-2}\,dx.$$

Solución:

$$x^2+x-2=0;\;\; x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow x_1=-2, x_2=1.$$

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1).$$

$$\frac{-x+7}{x^2+x-2}=\frac{M}{x+2}+\frac{N}{x-1}=\frac{Mx-M+Nx+2N}{(x+2)(x-1)}=\frac{(M+N)x+(-M+2N)}{x^2+x-2}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=-1 \\ -M+2N=7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3N=6;\; N=2 \Rightarrow M+2=-1 \Rightarrow M=-3.$$

$$A=\int \frac{-x+7}{x^2+x-2}\cdot dx=\int\left(\frac{M}{x+2}+\frac{N}{x-1}\right)\cdot dx=\int\left(\frac{-3}{x+3}+\frac{2}{x-1}\right)\cdot dx=$$

$$=-3\cdot L|x+2|+2\cdot L|x-1|+C.$$

$$\underline{\int \frac{5}{x^2+2x-3}\cdot dx=2L|x-1|-3L|x+2|+C.}$$

****

Pregunta 9:

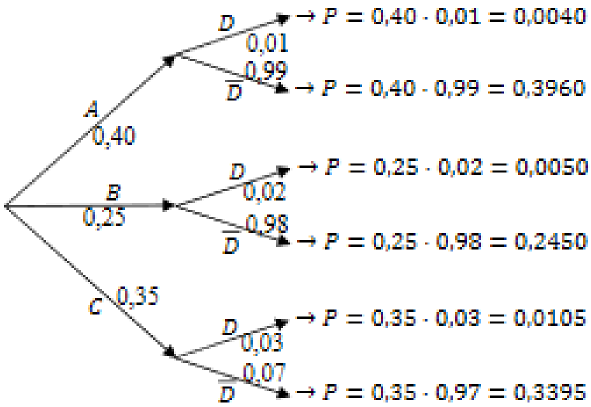
9. Una librería compra lotes de material escolar a tres empresas A, B y C. A la empresa A le compra el 40 % de los lotes, a B el 25 % y a C el resto. De la empresa A le viene defectuoso el 1 % de los lotes, de B el 2 % y de C el 3 %. Elegido un lote al azar, se pide:

a) Calcule la probabilidad de que sea defectuoso. (1 punto)

b) Si sabemos que no es defectuoso, calcule la probabilidad de que lo haya fabricado la empresa B. (1 puntos)

Solución:

a)



$$P = P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= 0{,}40 \cdot 0{,}01 + 0{,}25 \cdot 0{,}02 + 0{,}35 \cdot 0{,}03 = 0{,}0040 + 0{,}0050 + 0{,}0105 = \underline{0{,}0195}.$$

b)

$$P = (B/\overline{D}) = \frac{P(B \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(C) \cdot P(\overline{E}/C)}{1 - P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(\overline{D}/B)}{1 - P(D)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}98}{1 - 0{,}0195} = \frac{0{,}2450}{0{,}9805} = \underline{0{,}2499}.$$

Pregunta 10:

10. Se ha hecho un estudio de un famoso jugador de baloncesto de la ACB y se sabe que tiene una probabilidad de encestar un triple del 60 %. Si realiza 8 tiros a canasta

a) Calcule la probabilidad de que enceste 5 triples. (0,75 puntos)

b) Calcule la probabilidad de que enceste al menos 2. (0,75 puntos)

c) Determine la media y la desviación típica de la distribución. (0,5 puntos)

Solución:

a)

Se trata de una distribución binomial con $p = 0{,}6$ y $q = 0{,}4$.

Aplicando la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial, que es la siguiente: $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$$P = \binom{8}{5} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 = \frac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3! \cdot 5!} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 =$$

$$= 56 \cdot 0{,}07776 \cdot 0{,}064 = \underline{0{,}2787}.$$

b)

El suceso contrario a "encestar al menos 2" es "la unidad menos la probabilidad de no encestar ninguna vez más la probabilidad de encestar una vez", por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^7\right] =$$

$$= 1 - (1 \cdot 1 \cdot 0{,}4^8 + 8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^7) = 1 - (0{,}000262 + 4{,}8 \cdot 0{,}001638) =$$

$$= 1 - (0{,}000262 + 0{,}007864) = 1 - 0{,}008126 = \underline{0{,}9918}.$$

c)

La media y la desviación típica en una distribución binomial vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\mu = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}6 \Rightarrow \underline{\mu = 4{,}8}.$$

$$\rho = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{1{,}92} \Rightarrow \underline{\rho = 1{,}3856}.$$

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2019-2020

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min.

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. El estudiante ha de elegir 5 preguntas.

Observación importante: En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar** las respuestas.

PREGUNTAS

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Calcule los productos de matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$? (1 punto)

   b) Compruebe si es cierta la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + B^2$. (1 punto)

2. a) Estudie en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: (1,25 puntos)

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & & & + & \lambda z & = 1 \\ x & + & y & + & \lambda z & = 1 \\ \lambda x & - & y & + & z & = 1 \end{array}\right\}$$

   b) Resuelve el sistema (si es posible) para $\lambda = 1$. (0,75 puntos)

3. Sean los vectores $\vec{u} = (4, 3, \alpha)$, $\vec{v} = (\alpha, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2\alpha, 1, \alpha)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$).

   a) Determine los valores de α para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes. (1 punto)

   b) Para el valor $\alpha = 1$ exprese $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (1 punto)

4. Dados el plano Π_1 determinado por los puntos $(0, 1, 1)$, $(2, 0, 2)$ y $(1, 2, 6)$ y el plano Π_2 dado por la ecuación $x - y + z = 3$. Calcule una recta que sea paralela a los dos planos y que no esté contenida en ninguno de ellos. (2 puntos)

5. Sea la función $f(x) = \dfrac{4x}{1+x^2}$.

   a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x)$. (1,5 puntos)

   b) Con los datos obtenidos en el apartado anterior, represente de forma aproximada la gráfica de la función $f(x)$. (0,5 puntos)

6. Calcule los valores de a y b sabiendo que la siguiente función $f(x)$ es derivable en todo su dominio: (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ -2 + \ln(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2019-2020

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min.

7. Sean las funciones $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = -3$.

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$. (0,5 puntos)

b) Calcule el área de la región anterior. (1,5 puntos)

8. Calcule la integral (2 puntos)

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}\,dx.$$

9. Se realizaron dos debates electorales, uno el lunes y otro el martes. Se hizo una encuesta a 1.500 personas para estimar la audiencia, de las cuales: 1.100 personas vieron el debate del lunes, 1.000 vieron el debate del martes y 300 no vieron ninguno. Eligiendo al azar a uno de los encuestados:

a) Calcule la probabilidad de que viera los dos debates. (1 punto)

b) Si vio el debate del lunes, calcule la probabilidad de que viera el del martes. (1 punto)

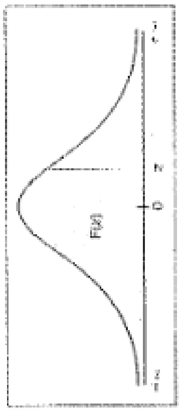
10. El radio de un pistón se distribuye según una distribución normal de media 5 cm y desviación típica de 0,01 cm.

a) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio mayor que 5,01 cm. (1 punto)

b) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio entre 4,98 y 5 cm. (1 punto)

Tabla de distribución normal $N(0,1)$

$F(z) = P(Z \le z)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2020

Pregunta 1:

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Calcule los productos de matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$?

   b) Compruebe si es cierta la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

Solución:

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}.$$

$$\underline{\text{Como se observa, no se cumple que } A \cdot B = B \cdot A.}$$

b)

$$(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\text{Como se observa, no se cumple que } (A+B)^2 = A^2 + B^2.}$$

Pregunta 2:

2. a) Estudie en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: (1,25 puntos)

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & & & + & \lambda z & = 1 \\ x & + & y & + & \lambda z & = 1 \\ \lambda x & - & y & + & z & = 1 \end{array}\right\}$$

b) Resuelve el sistema (si es posible) para $\lambda = 1$. (0,75 puntos)

Solución:

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda - \lambda^2 + \lambda = 0;\ \ -\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \lambda \neq -1 \\ \lambda = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ \lambda = -1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$$

$$Para\ \lambda = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_3 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ \lambda = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Para $\lambda = 1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

Despreciando la tercera ecuación y haciendo $z = \lambda$:

$$\underline{Solución: x = 1 - \lambda;\ \ y = 0;\ \ z = \lambda, \forall \lambda \in R.}$$

Pregunta 3:

3. Sean los vectores $\vec{u} = (4, 3, \alpha)$, $\vec{v} = (\alpha, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2\alpha, 1, \alpha)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$).

   a) Determine los valores de α para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

   b) Para el valor $\alpha = 1$ exprese $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución:

a)

Para que los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes es necesario que el determinante que forman tenga rango tres, es decir, que sea distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & a \\ a & 1 & 0 \\ 2a & 1 & a \end{vmatrix} = 4a + a^2 - 2a^2 - 3a^2 = 0;\ 4a - 4a^2 = 0;\ \ 4a(1-a) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 1.$

$\underline{\textit{Los vectores } \vec{u}, \vec{v} \textit{ y } \vec{w} \textit{ son linealmente independientes } \forall a \in R - \{0, 1\}}.$

b)

Para $a = 1$ los vectores son $\vec{u} = (4, 3, 1), \vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2, 1, 1)$.

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4\alpha + \beta = 2 \\ 3\alpha + \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = -2 \Rightarrow \underline{\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}}.$$

. . . .

Pregunta 4:

4. Dados el plano Π_1 determinado por los puntos $(0,1,1)$, $(2,0,2)$ y $(1,2,6)$ y el plano Π_2 dado por la ecuación $x-y+z=3$. Calcule una recta que sea paralela a los dos planos y que no esté contenida en ninguno de ellos. (2 puntos)

Solución:

Los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,0,2)$ y $C(1,2,6)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(2,0,2)-(0,1,1)]=(2,-1,1)$.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=[(2,0,2)-(1,2,6)]=(1,-2,-4)$.

$$\pi(A;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\begin{vmatrix}x & y-1 & z-1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -4\end{vmatrix}=0;$$

$4x+(y-1)-4(z-1)+(z-1)+2x+8(y-1)=0;$

$6x+9(y-1)-3(z-1)=0;\;\; 2x+3(y-1)-(z-1)=0;$

$2x+3y-3-z+1=0 \Rightarrow \underline{\pi_1\equiv 2x+3y-z-2=0}$.

Los planos π_1 y π_2 determinan la recta $r'\equiv\begin{cases}2x+3y-z-2=0\\ x-y+z-3=0\end{cases}$.

Un vector director de r' es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1}=(2,3,-1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(1,-1,1)$.

$$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=3i-j-2k-3k-i-2j=2i-3j-5k\Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_{r'}}=(2,-3,-5)$.

Las infinitas rectas que son solución del ejercicio tienen como vector director al vector hallado $\overrightarrow{v_{r'}}=(2,-3,-5)$; considerando un punto que no pertenezca a ninguno de los dos planos dados, por ejemplo el origen, una recta solución es la siguiente:

$$\underline{r\equiv\begin{cases}x=2\lambda\\ y=-3\lambda\\ z=-5\lambda\end{cases}}.$$

Pregunta 5:

5. Sea la función $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x)$. (1,5 puntos)

b) Con los datos obtenidos en el apartado anterior, represente de forma aproximada la gráfica de la función $f(x)$. (0,5 puntos)

Solución:

a)

Por ser $1 + x^2 \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

$\underline{El\ eje\ de\ abscisas\ (y = 0)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función}$.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito; son los valores que anulan el denominador.

$1 + x^2 = 0 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow \underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ asíntotas\ verticales}$.

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, con $m \neq 0, m \neq \infty$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x+x^3} = 0.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ asíntotas\ oblicuas}$.

También se sabe que no tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

Una función es simétrica con respecto al eje Y cuando $f(-x) = f(x)$ y es simétrica con respecto al origen cuando $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = \frac{-4x}{1+(-x)^2} = -\frac{4x}{1+x^2} = -f(x).$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ simétrica\ con\ respecto\ al\ origen}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{4+4x^2-8x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=0;\ 1-x^2=0\Rightarrow x_1=-1, x_2=1.$$

Como quiera que $(1+x^2)^2>0, \forall x\in R$, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea la expresión $1-x^2$.

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x)>0\Rightarrow x\epsilon(-1,1).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x)<0\Rightarrow x\epsilon(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).}$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\frac{-8x\cdot(1+x^2)^2-4(1-x^2)\cdot[2\cdot(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}=\frac{-8x\cdot(1+x^2)-16x\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^3}=$$

$$=\frac{-8x-8x^3-16x+16x^3}{(1+x^2)^3}=\frac{8x^3-24x}{(1+x^2)^3}=\frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

$$f''(-1)=\frac{-8+24}{2^3}>0\Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x=-1.$$

$$f(-1)=\frac{-4}{1+1}=-\frac{4}{2}=-2\Rightarrow \underline{Mínimo: P(-1,-2).}$$

$$f''(1)=\frac{8-24}{2^3}<0\Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x=1.$$

$$f(1)=\frac{4}{1+1}=\frac{4}{2}=2\Rightarrow \underline{Máximo: Q(1,2).}$$

También se obtiene el máximo teniendo en cuenta la simetría con respecto al origen de la función.

Aunque no se piden, se obtienen a continuación los puntos de inflexión de la función.

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}=0;\ 8x(x^2-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\sqrt{3}\\x_2=0\\x_3=\sqrt{3}\end{cases}.$$

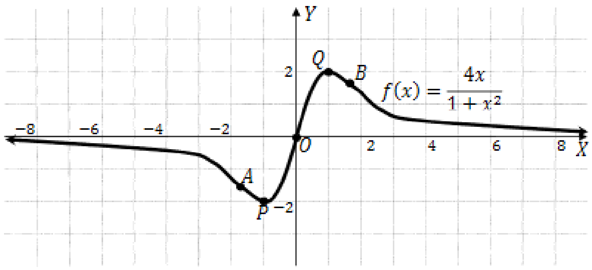
$$f(-\sqrt{3})=\frac{-4\sqrt{3}}{1+(-\sqrt{3})^2}=\frac{-4\sqrt{3}}{1+3}=-\sqrt{3}\Rightarrow Punto\ de\ inflexión: A(-\sqrt{3},-\sqrt{3}).$$

$$f(0)=\frac{4\cdot 0}{1+0}=0\Rightarrow Punto\ de\ inflexión: O(0,0).$$

$$f(\sqrt{3})=\frac{4\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2}=\frac{4\sqrt{3}}{1+3}=\sqrt{3}\Rightarrow Punto\ de\ inflexión: B(\sqrt{3},\sqrt{3}).$$

b)

Con los datos obtenidos y teniendo en cuenta que la función pasa por el origen de coordenadas, puede hacerse un esbozo de la gráfica de $f(x)$, que es el siguiente:



Pregunta 6:

6. Calcule los valores de a y b sabiendo que la siguiente función $f(x)$ es derivable en todo su dominio: (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ -2 + \ln(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Solución:

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1}(2x^2 + ax + b) = 2 + a + b = f(1) \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1}(-2 + Lx) = -2 + L1 = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 2 + a + b = -2 \Rightarrow a + b = -4. \quad (1)$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de a y b.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + a & si\ x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = \begin{cases} 4 + a & si\ x \leq 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 4 + a = 1 \Rightarrow a = -3.$$

Sustituyendo el valor de a en (1): $-3 + b = -4 \Rightarrow b = -1$.

<u>*La función $f(x)$ es derivable en $x = 1$ para $a = -3$ y $b = -1$.*</u>

Pregunta 7:

7. Sean las funciones $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = -3$.

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

b) Calcule el área de la región anterior.

Solución:

a)

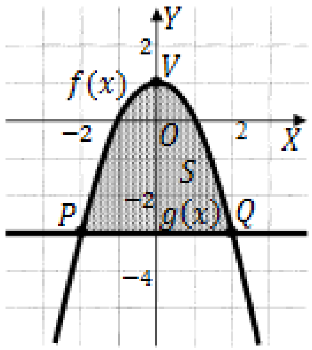
La función $f(x) = 1 - x^2$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2 y su vértice es siguiente:

$$f'(x) = -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Vértice: V(0, 1).$$

Los puntos de corte de ambas funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 - x^2 = -3;\ \ x^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \Rightarrow P(-2, -3) \\ x_2 = 2 \Rightarrow Q(2, -3) \end{cases}.$$



La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta.

b)

Teniendo en cuenta que ambas funciones son simétricas con respecto al eje de ordenadas y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2\int_0^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx = 2\int_0^2 (1 - x^2 + 3) \cdot dx = 2\int_0^2 (-x^2 + 4) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_0^2 = 2 \cdot \left[\left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2\right) - 0\right] = -\frac{16}{3} + 16 = \frac{-16+48}{3} = \frac{32}{3}.$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \cdot 3\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3 \cdot (-1)\right] =$$

$$= -9 + 9 + 9 - \frac{1}{3} - 1 + 3 = 11 - \frac{1}{3} = \frac{33-1}{3} = \underline{\frac{32}{3}\, u^2 \cong 10{,}67\, u^2 = S}.$$

Pregunta 8:

8. Calcule la integral

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}\, dx.$$

Solución:

$J = \int \frac{3x}{x^2-x-2} \cdot dx.$

$x^2 - x - 2 = 0;\;\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2.$

$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2).$

$\frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{M}{x+1} + \frac{N}{x-2} = \frac{Mx-2M+Nx+N}{(x+1)(x-2)} = \frac{(M+N)x+(-2M+N)}{x^2-x-2} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=3 \\ -2M+N=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r} 2M+2N=6 \\ -2M+N=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3N = 6;\;\; N = 2;\;\; M + 2 = 3 \Rightarrow M = 1.$

$J = \int \frac{3x}{x^2-x-2} \cdot dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}\right) \cdot dx = L|x+1| + 2 \cdot L|x-2| + C.$

$$\underline{J = \int \frac{3x}{x^2-x-2} \cdot dx = L[[x+1] \cdot (x-2)^2] + C.}$$

Textos Marea Verde

Pregunta 9:

9. Se realizaron dos debates electorales, uno el lunes y otro el martes. Se hizo una encuesta a 1.500 personas para estimar la audiencia, de las cuales: 1.100 personas vieron el debate del lunes, 1.000 vieron el debate del martes y 300 no vieron ninguno. Eligiendo al azar a uno de los encuestados:

   a) Calcule la probabilidad de que viera los dos debates. (1 punto)

   b) Si vio el debate del lunes, calcule la probabilidad de que viera el del martes. (1 punto)

Solución:

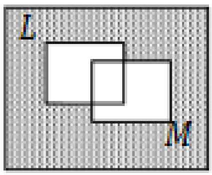
$$Datos: P(L) = \frac{1.100}{1.500} = \frac{11}{15};\ \ P(M) = \frac{1.000}{1.500} = \frac{2}{3};\ \ P(\overline{L} \cap \overline{M}) = \frac{300}{1.500} = \frac{1}{5}.$$

a)

$$P(\overline{L} \cap \overline{M}) = 1 - P(L \cup M) \Rightarrow P(L \cup M) = 1 - P(\overline{L} \cap \overline{M}).$$

$$P(L \cup M) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

$$P(L \cap M) = P(L) + P(M) - P(L \cup M) =$$



$P(\overline{L} \cap \overline{M}) = 1 - P(L \cup M)$

$$= \frac{11}{15} + \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{11+10-12}{15} = \frac{9}{15} = \underline{\frac{3}{5} = 0{,}6}.$$

b)

$$P = P(M/L) = \frac{P(L \cap M)}{P(L)} = \frac{\frac{9}{15}}{\frac{11}{15}} = \underline{\frac{9}{11} = 0{,}8182}.$$

Pregunta 10:

10. El radio de un pistón se distribuye según una distribución normal de media 5 cm y desviación típica de 0,01 cm.

a) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio mayor que 5,01 cm. (1 punto)
b) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio entre 4,98 y 5 cm. (1 punto)

Solución:

a)

$Datos: \ \mu = 5; \ \ \sigma = 0{,}01.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(5;\ 0{,}01).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-5}{0{,}01}.$

$$P = P(X > 5{,}01) = P\left(Z > \frac{5{,}01-5}{0{,}01}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}01}{0{,}01}\right) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = \underline{0{,}1587}.$$

b)

$$P = P(4{,}98 < X < 5) = P\left(\frac{4{,}98-5}{0{,}01} < Z < \frac{5-5}{0{,}01}\right) = P\left(\frac{-0{,}02}{0{,}01} < Z < \frac{0}{0{,}01}\right) =$$

$$= P(-2 < Z < 0) = P(Z < 0) - [1 - P(Z \leq 2)] =$$

$$= P(Z < 0) - 1 + P(Z \leq 2) = 0{,}5 - 1 + 0{,}9772 = 1{,}4772 - 1 = \underline{0{,}4772}.$$

MATEMÁTICAS II
Selectividad 2020
Comunidad autónoma de
GALICIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Paula Orta

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CiUG	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: **ORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

Problema 1. Números y Álgebra:

Sean A y B las dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular A^2-B^2. (Advertencia: en este caso, $A^2-B^2\neq(A+B)(A-B)$.)

b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA+(A+B)^T=2I+XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de A + B.

Problema 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + z = 0, \\ x + my = 0. \end{cases}$

Problema 3. Análisis:

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}}$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)=x(\ln x-1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función f.

Problema 4. Análisis:

a) Calcule los valores de b y c para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & si \quad x\le 0\\ x^2+bx+c & si \quad x>0\end{cases}$ *sea, primero continua y luego derivable en x = 0.*

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x-1)dx$.

Problema 5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos A(3,0,-1), B(4,1,1) y C(7,1,5).

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano

$\pi: 4x+2y-3z-15=0$ y que pasa por el punto P(-1,-2,2).

Problema 6. Geometría:

Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$ y $s:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Problema 7. Estadística y Probabilidad:

Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se les administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con placebo. Sabiendo que se curaron el 80% de los que tomaron el medicamento, ¿Cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomara el placebo o no se curara?

Problema 8. Estadística y Probabilidad:

En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcule la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

SOLUCIONES

Problema 1. Números y Álgebra:

Sean A y B las dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix}0&-4\\4&-2\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular A^2-B^2. (Advertencia: en este caso, $A^2-B^2\neq(A+B)(A-B)$.)

b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA+(A+B)^T=2I+XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de A + B.

Solución:

a)

$$(A+B)+(A-B)=A+B+A-B=2A \Rightarrow 2A=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-4\\4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\4&-2\end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}$$

$$(A+B)-(A-B)=A+B-A+B=2B \Rightarrow 2B=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-4\\4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8\\-4&2\end{pmatrix} \Rightarrow B=\begin{pmatrix}1&4\\-2&1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad B^2=\begin{pmatrix}1&4\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&4\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&8\\-4&-7\end{pmatrix}$$

Por tanto, $$A^2-B^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7&8\\-4&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-8\\4&8\end{pmatrix}$$

b)

$$XA+(A+B)^T=2I+XB \Rightarrow XA-XB=2I-(A+B)^T \Rightarrow X(A-B)=2I-(A+B)^T \Rightarrow X(A-B)\cdot(A-B)^{-1}=\left[2I-(A+B)^T\right]\cdot(A-B)^{-1}$$

Por tanto, $$X=\left[2I-(A+B)^T\right]\cdot(A-B)^{-1}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^T=\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix} \qquad A-B=\begin{pmatrix}0&-4\\4&-2\end{pmatrix} \Rightarrow (A-B)^{-1}=\frac{\left[ad(A-B)\right]^T}{|A-B|}$$

$|A-B|=\begin{vmatrix}0&-4\\4&-2\end{vmatrix}=16\neq0$; por tanto, tiene inversa.

$$ad(A-B)=\begin{pmatrix}-2&-4\\4&0\end{pmatrix} \Rightarrow \left[ad(A-B)\right]^T=\begin{pmatrix}-2&4\\-4&0\end{pmatrix} \Rightarrow (A-B)^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2&4\\-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{8}&\frac{1}{4}\\\frac{-1}{4}&0\end{pmatrix}$$

$$2I-(A+B)^T=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-4&2\end{pmatrix}$$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix}0&0\\-4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{-1}{8}&\frac{1}{4}\\\frac{-1}{4}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$

Problema 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx+y=2m,\\ x+z=0,\\ x+my=0.\end{cases}$

Solución:

$A=\begin{pmatrix}m&1&0\\1&0&1\\1&m&0\end{pmatrix}$ matriz de coeficientes $\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}m&1&0&2m\\1&0&1&0\\1&m&0&0\end{array}\right)$ matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq0\Rightarrow rg(A)\geq2$$

$$\begin{vmatrix}m&1&0\\1&0&1\\1&m&0\end{vmatrix}=1-m^2 \qquad 1-m^2=0\Leftrightarrow m^2-1=0\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow m=\pm1$$

$\bullet Si \quad m\neq1 \quad y \quad m\neq-1 \quad\Rightarrow\quad rg(A)=3=rg(\overline{A})$

$\bullet Si \quad m=1 \quad\Rightarrow\quad rg(A)=2 \qquad \begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-2\neq0\Rightarrow rg(\overline{A})=3$

$\bullet Si \quad m=-1 \quad\Rightarrow\quad rg(A)=2 \qquad \begin{vmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\-1&0&0\end{vmatrix}=-2\neq0\Rightarrow rg(\overline{A})=3$

DISCUSIÓN:

$\bullet Si \quad m\neq1 \quad y \quad m\neq-1 \quad\Rightarrow\quad rg(A)=rg(\overline{A})=3=n^{\circ}$ de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado ($\exists^1$ Solución)

$\bullet Si \quad m=1 \quad o \quad m=-1 \quad\Rightarrow\quad rg(A)\neq rg(\overline{A}) \quad\Rightarrow$ Sistema Incompatible (No Existe Solución)

Problema 3. Análisis:

a) Calcule $\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}}$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)=x(\ln x-1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función f.

Solución:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{1+2x-e^{2x}} \underset{\frac{0}{0}(L'Hôpital)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x\cdot sen x}{2-2e^{2x}} \underset{\frac{0}{0}(L'Hôpital)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2sen^2 x-2\cos^2 x}{-4e^{2x}}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

b) $f(x)=x(\ln x-1)\Rightarrow Domf=(0,+\infty)$

$$f'(x)=\ln x-1+x\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=\ln x-1+1\Rightarrow f'(x)=\ln x$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$$

0 ↘ 1 ↗

f *crece en* $(1,+\infty)$

f *decrece en* $(0,1)$

f tiene un mínimo en (1,-1)

Problema 4. Análisis:

a) Calcule los valores de b y c para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & si \quad x\le 0 \\ x^2+bx+c & si \quad x>0\end{cases}$ *sea, primero continua y luego derivable en x = 0.*

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x-1)dx$.

Solución:

a)

Continuidad:

f *continua en* $x=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=e^0=1 \\ \lim_{x\to 0^-} e^{2x}=e^0=1 \\ \lim_{x\to 0^+}(x^2+bx+c)=c \end{array}\right\}\Rightarrow f \quad continua \quad en \quad x=0\Leftrightarrow c=1; b\in\mathbb{R}$$

Derivabilidad:

Para que sea derivable, tiene que ser continua, por lo que c =1.

$$f(x)=\begin{cases} e^{2x} & si \quad x\le 0 \\ x^2+bx+1 & si \quad x>0 \end{cases}$$ función continua.

$$f'(x)=\begin{cases} 2e^{2x} & si \quad x<0 \\ 2x+b & si \quad x>0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} f'(0^-)&=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} 2e^{2x}=2 \\ f'(0^+)&=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+b)=b \end{aligned}$$

Por tanto, f es derivable en x = 0 si y solamente si b = 2 y c = 1.

b) Primero calculo una primitiva aplicando la fórmula de integración por partes.

$$u=\ln x-1 \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \qquad \int x(\ln x-1)dx=(\ln x-1)\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2(\ln x-1)-\frac{1}{2}\int xdx=$$

$$dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2} \qquad =\frac{1}{2}x^2(\ln x-1)-\frac{1}{4}x^2+C=\frac{1}{2}x^2(\ln x-\frac{3}{2})+C$$

Por tanto:

$$\int_1^2 x(\ln x-1)dx=\left.\frac{1}{2}x^2(\ln x-\frac{3}{2})\right]_1^2=\frac{1}{2}\cdot 4(\ln 2-\frac{3}{2})-\frac{1}{2}(\ln 1-\frac{3}{2})=2(\ln 2-\frac{3}{2})+\frac{3}{4}=2\ln 2-\frac{9}{4}=\ln 4-\frac{9}{4}\approx -0.8637$$

Problema 5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos A(3,0,-1), B(4,1,1) y C(7,1,5).

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano

$\pi: 4x+2y-3z-15=0$ y que pasa por el punto P(-1,-2,2).

Solución:

a) A(3,0,-1); B(4,1,1); C(7,1,5)

$\overrightarrow{AB}=(1,1,2)$ y $\overrightarrow{AC}=(4,1,6)$ son vectores directores del plano pedido. Por tanto,

$$\pi:\begin{vmatrix} 1 & 4 & x-3 \\ 1 & 1 & y \\ 2 & 6 & z+1 \end{vmatrix}=0; (x-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0; 4(x-3)+2y-3(z+1)=0; 4x-12+2y-3z-15=0$$

La ecuación implícita del plano pedido es $\pi: 4x+2y-3z-15=0$

b) Por ser la recta y el plano perpendiculares, el vector normal al plano, es un vector director de la recta, $\overline{d_r}=(4,2,-3)$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas de r son:

$$r:\begin{cases} x=-1+4\lambda \\ y=-2+2\lambda & \lambda\in\mathbb{R} \\ z=2-3\lambda \end{cases}$$

Problema 6. Geometría:

Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Solución:

$$r: \begin{cases} P(3,0,-1) \in r \\ \overrightarrow{d_r} = (2,-1,-2) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(0,-3,-2) \in s \\ \overrightarrow{d_s} = (1,4,3) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas o se cortan en un punto o se cruzan en el espacio.

$$\overrightarrow{PQ} = (-3,-3,-1) \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -8+6+9-24+18-1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{d_r} \quad \overrightarrow{d_s} \quad \overrightarrow{PQ} \quad \textit{coplanarios}$$

Por tanto, las rectas se cortan en un punto.

Para calcular el punto de corte, utilizo las ecuaciones paramétricas de las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 3+2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1-2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -3+4\mu \\ z = -2+3\mu \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3+2\lambda = \mu \\ -\lambda = -3+4\mu \end{array} \right\} \Rightarrow -\lambda = -3+4(3+2\lambda) \Rightarrow -\lambda = -3+12+8\lambda \Rightarrow -9\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = -1$$

Por lo que sustituyendo en las ecuaciones paramétricas, obtenemos el punto de corte de las rectas:

$$r \cap s = A(1,1,1)$$

Problema 7. Estadística y probabilidad:

Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se les administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con placebo. Sabiendo que se curaron el 80% de los que tomaron el medicamento, ¿Cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomara el placebo o no se curara?

Solución:

Sea M ="tomar el medicamento"; el suceso contrario será $\overline{M}$ ="tomar placebo".

P(M) = 0.6 y P($\overline{M}$) = 0.4

Sea C="curarse"; P(C/M) = 0.8

$\overline{M} \cup \overline{C} = \overline{M \cap C}$ (Leyes De Morgan); Por tanto:

$$P\left(\overline{M} \cup \overline{C}\right) = P\left(\overline{M \cap C}\right) = 1 - P\left(M \cap C\right) = 1 - P(M) \cdot P(C/M) = 1 - 0.6 \cdot 0.8 = 0.52$$

Problema 8. Estadística y Probabilidad:

En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcule la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

Solución:

$X \in N(20, 4)$

$$P(16 \le X \le 26) = P\left(\frac{16-20}{4} \le \frac{X-20}{4} \le \frac{26-20}{4}\right) = P(-1 \le Z \le 1.5) = P(Z \le 1.5) - P(Z \le -1) =$$

$$= P(Z \le 1.5) - P(Z > 1) = P(Z \le 1.5) - [1 - P(Z \le 1)] = 0.9332 - 1 + 0.8413 = 0.7745$$

Por tanto, la probabilidad pedida es 0.7745

CiUG	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

Problema 1. Números y Álgebra:

Para la ecuación matricial $A^2X + AB = B$, se pide:

a) Despejar X suponiendo que A(y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4 x 4 y B tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Problema 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} (m+3)x - m^2y = 3m \\ (m+3)x + my = 3m+6 \end{cases}$

Problema 3. Análisis:

Determine los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a-\cos x}{x} & si \quad x<0 \\ bx & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable.

Problema 4. Análisis:

a) Calcule el área de la región encerrada por el eje X y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x+1 & si \quad x<0 \\ (x-1)^2 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$

Problema 5. Geometría:

Sean r la recta de vector director $\overrightarrow{d_r}(1,0,3)$ que pasa por P(1,0,0) y $\pi: -2x+y+z=0$. Se pide la posición relativa de r y π. En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

Problema 6. Geometría:

a) Calcule k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ y $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por P(1,0,0) y contiene a $r: x-1 = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3}$

Problema 7. Estadística y Probabilidad:

El 57% de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83% aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80%. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el

Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

Problema 8. Estadística y Probabilidad:

a) En una determinada población de árboles, el 20% tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.

b) Si X sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \leq 18) = 0.6915$, ¿Cuál es la desviación típica?

SOLUCIONES

Problema 1. Números y Álgebra:

Para la ecuación matricial $A^2 X + AB = B$, se pide:

a) Despejar X suponiendo que A(y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4 x 4 y B tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}$

Solución:

a) $A^2X+AB=B \Rightarrow A^2X=B-AB \Rightarrow (A^2)^{-1}\cdot A^2X=(A^2)^{-1}\cdot(B-AB)$

Por tanto, $\boxed{X=(A^2)^{-1}\cdot(B-AB)}$

Si A es una matriz 4x4 y B tiene tres columnas, para que se pueda realizar la multiplicación AB, B será una matriz de dimensión 4x3 (4 filas y 3 columnas), y X será también una matriz de dimensión 4x3 (4 filas y 3 columnas).

b)

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\-3&0&10\end{pmatrix}$$

$$|A^2|=\begin{vmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\-3&0&10\end{vmatrix}=10-9=1 \qquad Ad(A^2)=\begin{pmatrix}10&0&3\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix} \qquad \left[Ad\left(A^2\right)\right]^T=\begin{pmatrix}10&0&3\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left(A^2\right)^{-1}=\frac{\left[Ad\left(A^2\right)\right]^T}{|A^2|}=\begin{pmatrix}10&0&3\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix} \qquad A\cdot B=A\cdot(-A)=-A^2=\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&-1&0\\3&0&-10\end{pmatrix}$$

$$B-AB=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&-1&0\\3&0&-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&7\end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} (m+3)x - m^2 y = 3m \\ (m+3)x + my = 3m+6 \end{cases}$

Solución:

$A = \begin{pmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{pmatrix}$ matriz de coeficientes. $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m \\ m+3 & m & 3m+6 \end{array}\right)$ Matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m \end{vmatrix} = m(m+3) + m^2(m+3) = (m+3)(m^2+m) = m(m+3)(m+1)$$

$$m(m+3)(m+1) = 0 \Leftrightarrow m = 0; m = -3; m = -1$$

$$Si \quad m \neq 0 \quad y \quad m \neq -3 \quad y \quad m \neq -1 \quad \Rightarrow \quad rg(A) = 2 = rg(\overline{A})$$

Si m = 0

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 1$ $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \Rightarrow rg(\overline{A}) = 2$

Si m = -3

$A = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 1$ $\begin{vmatrix} -9 & -9 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(\overline{A}) = 1$

Si m = -1

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 1$ $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 6 = 12 \neq 0 \Rightarrow rg(\overline{A}) = 2$

DISCUSIÓN:

$Si \quad m \neq 0 \quad y \quad m \neq -3 \quad y \quad m \neq -1 \Rightarrow rg(A) = rg(\overline{A}) = 2 = n^o \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ *Sistema Compatible Determinado* ($\exists$ *Solución*)

$Si \quad m = 0 \quad o \quad m = -1 \Rightarrow rg(A) \neq rg(\overline{A}) \Rightarrow$ *Sistema Incompatible (no tiene Solución)*

$Si \quad m = -3 \Rightarrow rg(A) = rg(\overline{A}) = 1 < n^o \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ *Sistema Compatible Indeterminado (infinitas Soluciones)*

Problema 3. Análisis:

Determine los valores de a y b que hacen que la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a-\cos x}{x} & si \quad x<0\\ bx & si \quad x\geq 0\end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable.

Solución:

La función es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ para cualquier valor de a y b.

Veamos que ocurre en x = 0.

Continuidad: $f \quad continua \quad en \quad x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

f(0) =0

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a-\cos x}{x}$ Para que este límite sea finito a = 1; Por tanto:

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & si \quad x<0\\ bx \quad si \quad x\geq 0\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{senx}{1}=\lim\limits_{x\to 0^-}senx=0$ (Aplicando L'Hôpital)

$\lim\limits_{x\to 0^+}bx=0$

Por tanto,

$$f \quad continua \quad en \quad x=0 \Leftrightarrow a=1 \quad y \quad b\in\mathbb{R}$$

Derivabilidad: Para que f sea derivable en x = 0, tiene que ser continua, por tanto a = 1.

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & si \quad x<0\\ bx \quad si \quad x\geq 0\end{cases}$ función continua.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xsenx-1+\cos x}{x^2} & si \quad x<0\\ b \quad si \quad x>0\end{cases}$$

$$f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{xsenx-1+\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{senx+x\cos x-senx}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$ (L'Hôpital)

$$f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}b=b$$

Por tanto, f es derivable en x = 0 si y solo si a = 1 y b = ½.

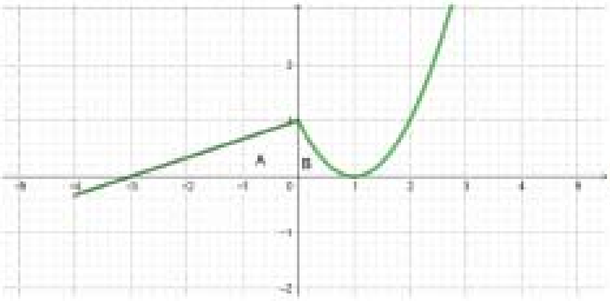
Problema 4. Análisis:

a) Calcule el área de la región encerrada por el eje X y la gráfica de $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x+1 & si \quad x<0\\ (x-1)^2 & si \quad x\geq 0\end{cases}$

b) Calcule $\int x\sqrt{x^2-1}dx$

Solución:

a)



Divido el área en dos zonas:

La zona A es un triángulo, por lo que $A_A = \frac{3}{2}u^2$

$$A_B = \int_0^1 (x-1)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = (\frac{1}{3} - 1 + 1) - 0 = \frac{1}{3}u^2$$

$$A = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}u^2 = 1.8\overline{3}u^2$$

b) Hacemos un cambio de variable:

$$x^2 - 1 = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{x^2 - 1}$$
$$2xdx = 2tdt \Rightarrow xdx = tdt$$

$$\int x\sqrt{x^2 - 1}dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$$

Deshago el cambio:

$$\int x\sqrt{x^2 - 1}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 - 1)^3} + C$$

Problema 5. Geometría:

Sean r la recta de vector director $\overrightarrow{d_r}(1,0,3)$ que pasa por P(1,0,0) y $\pi : -2x + y + z = 0$. Se pide la posición relativa de r y π. En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

Solución:

$\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = (1,0,3) \cdot (-2,1,1) = -2 + 3 = 1 \neq 0$; es decir, el vector director de la recta y el vector normal del plano no son perpendiculares, por tanto:

la recta y el plano se cortan en un punto

Para calcular el punto de corte, utilizo las ecuaciones paramétricas de la recta:

$r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=0 \\ z=3\lambda \end{cases}$ y sustituyo en la ecuación del plano: $-2(1+\lambda)+0+3\lambda=0 \Rightarrow -2-2\lambda+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2$

Por tanto, el punto de corte de recta y plano es: $r \cap \pi = A(3,0,6)$

Problema 6. Geometría:

a) Calcule k sabiendo que los vectores $\vec{u}(2,0,0)$, $\vec{v}(0,k,1)$ y $\vec{w}(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por P(1,0,0) y contiene a $r: x-1=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$

Solución:

a) Al ser los tres vectores coplanarios, son linealmente dependientes, por lo que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4k-4=0 \Leftrightarrow k=1$$ Por tanto, k =1

b)

$$\pi: \begin{cases} P(1,00) \in \pi \\ r \subset \pi; r: x-1=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+1}{3} \begin{cases} \vec{d_r}=(1,-4,3) \\ Q(1,0,-1) \end{cases} \end{cases}$$

$\vec{d_r}=(1,-4,3)$ *y* $\overrightarrow{PQ}(0,0,-1)$ *son vectores directores de* π; por tanto:

$$\pi: \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ -4 & 0 & y \\ 3 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)+y=0 \Leftrightarrow 4x-4+y=0$$

Por lo que el plano pedido es:

$$\pi: 4x+y-4=0$$

Problema 7. Estadística y Probabilidad:

El 57% de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83% aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80%. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

Solución:

Sea RU ="ser natural del Reino Unido" y H = "aprobar con honores",

P(RU) =0.57; P(H/RU) = 0.83; P(H) = 0.8

$$P\left(\overline{RU}/H\right)=\frac{P\left(\overline{RU}\cap H\right)}{P(H)}=\frac{P(H)-P(RU\cap H)}{P(H)}=\frac{P(H)-P(RU)\cdot P(H/RU)}{P(H)}=\frac{0.8-0.57\cdot 0.83}{0.8}=0.408625$$

Por tanto, la probabilidad pedida es 0.408625.

Problema 8. Estadística y Probabilidad:

a) En una determinada población de árboles, el 20% tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.

b) Si X sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \le 18) = 0.6915$, ¿Cuál es la desviación típica?

Solución:

a) p = 0.2; q = 0.8; n = 40. $X \in B(40, 0.2)$

$$P(X=4)=\binom{40}{4}\cdot(0.2)^4\cdot(0.8)^{36}=\frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot(0.2)^4\cdot(0.8)^{36}=0.0475$$

Por tanto, la probabilidad pedida es 0.0475.

b) $X \in N(15,\sigma)$ $P(X \le 18) = 0.6915$

$$P(X\le 18)=P\left(\frac{X-15}{\sigma}\le\frac{18-15}{\sigma}\right)=P\left(Z\le\frac{3}{\sigma}\right)=0.6915\Rightarrow\frac{3}{\sigma}=0.5\Rightarrow\sigma=\frac{3}{0.5}=6$$

Por tanto, la desviación típica es 6.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para Acceso a la Universidad
Curso Académico 2019–2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.– (2 puntos)

a) Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\operatorname{sen} x\cos x}{1+\operatorname{sen} x\cos x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$.

b) Determinar el valor de la constante real a para que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\operatorname{tg}\left(\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\sqrt{x}-2\right)}{x^2-16+ax}=\frac{1}{32}.$$

2.– (2 puntos) Determinar los valores de los parámetros reales a y b para que las funciones $f(x)=ax^2+b$ y $g(x)=x^2+x+a$, sean tangentes en el punto de abcisa $x=-1$. Para los valores obtenidos de a y b, calcular la recta tangente a las curvas en $x=-1$.

3.– (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las rectas $x=-2$, $x=2$, el eje OX y la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0,\\ x, & x\geq 0.\end{cases}$$

4.– (2 puntos) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

a) Hallar α y β de tal forma que $A^2 = \alpha A + \beta I$, siendo I la matriz identidad.

b) Calcular A^5 utilizando la anterior identidad.

5.– (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ay + (a+1)z = a, \\ ax + z = a, \\ x + az = -a. \end{cases}$$

a) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a.

b) Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a = 2$.

6.– (2 puntos) Sean A y B las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar X e Y, matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3X - 5Y = A, \\ -X + 2Y = B. \end{cases}$$

b) Calcular si existen las matrices inversas de X e Y.

7.– (2 puntos) Determinar en función del parámetro real a, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{cases} (a-1)x & + & y & - & z & = & a, \\ (a+1)x & + & (2a+1)y & + & z & = & -a, \\ ax & + & ay & + & z & = & -a. \end{cases}$$

8.– (2 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

a) Hallar un vector $\vec{w}$ de módulo uno, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

b) Calcular el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

9.– (2 puntos) En una clase de primero de primaria el 50 % de los niños practica natación, el 20 % practica baloncesto y el 5 % ambos deportes.

a) Calcular la probabilidad de que un niño elegido al azar no practique ni natación ni baloncesto.

b) Calcular la probabilidad de que un niño practique natación si juega al baloncesto.

10.– (2 puntos) Se sabe que dos poblaciones distintas X e Y se distribuyen según una Normal de media 25. Además $P(X \geq 27) = P(Y \geq 30) = 0{,}1587$. Calcular sus respectivas varianzas.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	Evaluación de Bachillerato para Acceso a la Universidad Curso Académico 2019–2020 ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES

(1) Como norma general se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

(2) Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

(3) Si un alumno da una respuesta acertada a un ejercicio escribiendo sólo los resultados, sin el desarrollo lógico de cómo los ha obtenido, la puntuación en este apartado no podrá ser superior al 10 % de la nota máxima prevista.

(4) La puntuación de cada ejercicio es de dos puntos y está señalada en la copia del examen que se entrega al alumno. Si algún ejercicio tiene subapartados, se deberá distribuir razonadamente el número de puntos entre los mismos.

(5) La calificación será la suma de las puntuaciones obtenidas en los cinco primeros ejercicios contestados.

SOLUCIONES CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2020

Problema 1:

1º) $a)$ Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-sen\,x\cdot cos\,x}{1+sen\,x\cdot cos\,x}\right)^{\frac{1}{sen\,x}}$.

$b)$ Determinar el valor de la constante real a para que se satisfaga la siguiente desigualdad:

$$\lim_{x\to 4}\frac{tg\left[\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\cdot\sqrt{x}-2\right]}{x^2-16+ax}=\frac{1}{32}.$$

Solución:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-sen\,x\cdot cos\,x}{1+sen\,x\cdot cos\,x}\right)^{\frac{1}{sen\,x}}=\left(\frac{1-sen\,0\cdot cos\,0}{1+sen\,0\cdot cos\,0}\right)^{\frac{1}{sen\,0}}=\left(\frac{1-0}{1+0}\right)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-sen\,x\cdot cos\,x}{1+sen\,x\cdot cos\,x}\right)^{\frac{1}{sen\,x}};\ \ LA=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sen\,x}\cdot L\frac{1-sen\,x\cdot cos\,x}{1+sen\,x\cdot cos\,x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{L\left(1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2x\right)-L\left(1+\frac{1}{2}\cdot sen\,2x\right)}{sen\,x}=\frac{L\left(1-\frac{1}{2}\cdot sen\,0\right)-L\left(1+\frac{1}{2}\cdot sen\,0\right)}{sen\,x}=\frac{L1-L1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\cos 2x}{1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2x}-\frac{\cos 2x}{1+\frac{1}{2}\cdot sen\,2x}}{cos\,x}=\lim_{x\to 0}\cos 2x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2x}-\frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot sen\,2x}}{cos\,x}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2x-1+\frac{1}{2}\cdot sen\,2x}{\left(1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2x\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot sen\,2x\right)}}{cos\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{cos\,x\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot sen^2 2x\right)}=\frac{-2}{cos\,0\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot sen^2 0\right)}=\frac{-2}{1\cdot 1}=-2.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-sen\,x\cdot cos\,x}{1+sen\,x\cdot cos\,x}\right)^{\frac{1}{sen\,x}}=e^{-2}=\boldsymbol{\frac{1}{e^2}}$$

$b)$

$$\lim_{x\to 4}\frac{tg\left[\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\cdot\sqrt{x}-2\right]}{x^2-16+ax}=\frac{1}{32};\ \ \frac{tg\left(\frac{\pi+8}{8}\cdot\sqrt{4}-2\right)}{4^2-16+a\cdot 4}=\frac{1}{32};\ \ \frac{tg\left(\frac{\pi+8}{4}-2\right)}{4a}=\frac{1}{32};\ \ \frac{tg\,\frac{\pi+8-8}{4}}{4a}=\frac{1}{32};$$

$$\frac{tg\,\frac{\pi}{4}}{a}=\frac{1}{8};\ \ \frac{1}{a}=\frac{1}{8}\ \Rightarrow\ \underline{a=8}.$$

$$\boldsymbol{a=8}$$

Problema 2:

2º) Determinar los valores de los parámetros reales a y b para que las funciones $f(x) = ax^2 + b$ y $g(x) = x^2 + x + a$, sean tangentes en el punto de abscisa $x = -1$. Para los valores obtenidos de a y b, calcular la recta tangente a las curvas en $x = -1$.

Solución:

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto: $f'(-1) = g'(-1)$.

$f'(x) = 2ax \ \Rightarrow \ f'(-1) = -2a.$

$g'(x) = 2x + 1 \ \Rightarrow \ g'(-1) = -2 + 1 = -1.$

$f'(-1) = g'(-1) \Rightarrow -2a = -1 \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{2}}.$

Las funciones resultan $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + b$ y $g(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$.

En el punto de corte tiene que cumplirse que $f(-1) = g(-1)$:

$f(-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + b = \frac{1}{2} + b.$

$g(-1) = (-1)^2 - 1 + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

$f(-1) = g(-1) \Rightarrow \frac{1}{2} + b = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \underline{b = 0}.$

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}; \ \ b = 0}$$

El punto de tangencia es $P\left(-1, \ \frac{1}{2}\right)$ y la pendiente $m = g'(-1) = -1$.

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$y - \frac{1}{2} = -1 \cdot (x + 1) = -x - 1; \ \ 2y - 1 = -2x - 2.$

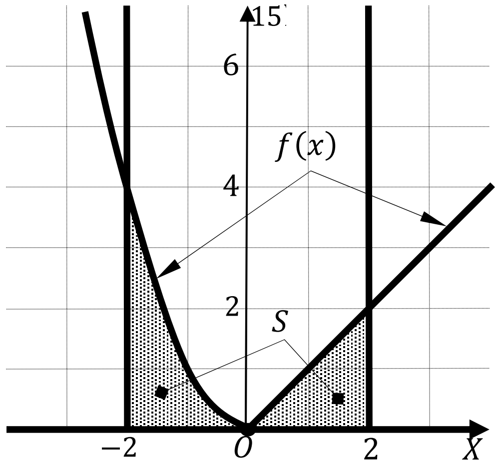
$$Recta\ tangente: \boldsymbol{t \equiv 2x + 2y + 1 = 0}$$

Problema 3:

3º) Calcular el área del recinto limitado por la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, las rectas $x = -2, x = 2$ y el eje OX.

Solución:

La representación gráfica de la función, aproximada, se expresa en la figurea adjunta.



La superficie a calcular es la siguiente:

$S = \int_{-2}^{0} x^2 \cdot dx + \int_{0}^{2} x \cdot dx =$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = 0 - \left[\frac{(-2)^3}{3}\right] + \frac{2^2}{2} - 0 =$

$= \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$

$$\boldsymbol{S = \frac{14}{3}\, u^2 \cong 4.67\, u^2}$$

Problema 4:

4º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}, m \in R \setminus \{0\}$.

$a)$ Hallar α y β de tal forma que $A^2 = \alpha A + \beta I$, siendo I la matriz identidad.

$b)$ Calcula A^5 utilizando la igualdad anterior.

Solución:

$a)$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \alpha A + \beta I \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ ma & 0 & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+\beta & 0 & 0 \\ 0 & 2a+\beta & 0 \\ ma & 0 & 2a+\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{a = 4}. \quad 4 = 8 + \beta; \ \underline{\beta = -4}.$$

$$\boldsymbol{a = 4; \ \beta = -4.}$$

$b)$

$$A^5 = A^2 \cdot A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 32m & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 80m & 0 & 32 \end{pmatrix}}.$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 80m & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

Problema 5:

5º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{aligned} ay+(a+1)z=a \\ ax+z=a \\ x+az=-a \end{aligned}\right\}$:

a) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a.

b) Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a=2$.

Solución:

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 0 & a & a+1 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a & -a \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}=a-a^3=0;\ \ a(1-a^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a_1=0 \\ a_2=-1 \\ a_3=1 \end{cases}.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{matrix} a\neq 0 \\ a\neq -1 \\ a\neq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=-F_3\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{matrix} a=0 \\ a=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1+1=2\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Se resuelve el sistema para los diferentes casos compatibles.

$Para\ a\neq 0, a\neq -1, a\neq 1$ se resuelve por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a+1 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -a \\ a & 0 & 1 & a \\ 0 & a & a+1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 - aF_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & a+a^2 \\ 0 & a & a+1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow (1-a^2)z = a + a^2;$$

$z = \frac{a+a^2}{1-a^2} = \frac{a(1+a)}{(1+a)(1-a)} = \frac{a}{1-a}$.

$ay + (a+1)z = a;\ \ ay = a - (1+a) \cdot \frac{a}{1-a} = \frac{a-a^2-a-a^2}{1-a} = \frac{-2a^2}{1-a} \Rightarrow y = \frac{-2a}{1-a}$.

$x + az = -a;\ \ x = -a - az = -a - \frac{a^2}{1-a} = \frac{-a+a^2-a^2}{1-a} = \frac{-a}{1-a}$.

$\underline{Solución: x = \frac{-a}{1-a}, y = \frac{-2a}{1-a}, z = \frac{a}{1-a}, \forall a \in R - \{-1, 0, 1\}.}$

$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\underline{Solución: x = 0, y = \lambda, z = 0, \forall \lambda \in R.}$

$Para\ a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -y = -1;\ \ y = 1.$

$x - z = 1 \Rightarrow z = \lambda;\ \ x = 1 + \lambda.$

$\underline{Solución: x = 1 + \lambda, y = 1, z = \lambda, \forall \lambda \in R.}$

$\forall a \in R - \{-1, 0, 1\}, Sistema\ compatible\ determinado: x = \frac{-a}{1-a}, y = \frac{-2a}{1-a}, z = \frac{a}{1-a}. Para\ a = 0,$ sistema compatible indeterminado: $x = 1 + \lambda, y = 1, z = \lambda, \forall \lambda \in R. Para\ a = -1$, sistema compatible indeterminado: $x = 1 + \lambda, y = 1, z = \lambda, \forall \lambda \in R. Para\ a = 1$, sistema incompatible.

$b)$

Para $a = 2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\quad |M| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 8 = -6.$

$M^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\quad Adj.de\ M^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}}{-6} \Rightarrow \underline{M^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}}.$

$$M^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Problema 6:

6º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Hallar X e Y, matrices soluciones del sistema de ecuaciones: $\left.\begin{matrix} 3X - 5Y = A \\ -X + 2Y = B \end{matrix}\right\}$.

$b)$ Calcular, si existen, las matrices inversas de X e Y.

Solución:

$a)$

$$\left.\begin{matrix} 3X - 5Y = A \\ -X + 2Y = B \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 6X - 10Y = 2A \\ -5X + 10Y = 5B \end{matrix}\right\} \Rightarrow X = 2A + 5B.$$

$$X = 2 \cdot \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & 10 \\ 20 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & -10 \\ -20 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{matrix} 3X - 5Y = A \\ -X + 2Y = B \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3X - 5Y = A \\ -3X + 6Y = 3B \end{matrix}\right\} \Rightarrow Y = A + 3B.$$

$$Y = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\ Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$b)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|X| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{X\ no\ es\ invertible.}$$

$$|Y| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{Y\ no\ es\ invertible.}$$

No existen. No son invertibles.

Problema 7:

7º) Determinar, en función del parámetro real a, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{cases}\pi_1 \equiv (a-1)x + y - z = a \\ \pi_2 \equiv (a+1)x + (2a+1)y + z = -a. \\ \pi_3 \equiv ax + ay + z = -a\end{cases}$$

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema que determinan los tres planos son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ a+1 & 2a+1 & 1 \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 & a \\ a+1 & 2a+1 & 1 & -a \\ a & a & 1 & -a \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de estas matrices, la posición relativa de los planos son las siguientes:

1º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.$

2º. -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos.$

3º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.$

4º. -- $Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ son\ paralelos.$

5º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow Los\ planos\ son\ coincidentes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ a+1 & 2a+1 & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-1)(2a+1) - a(a+1) + a + a(2a+1) - a(a-1) - (a+1) =$$

$$= 2a^2 + a - 2a - 1 - a^2 - a + a + 2a^2 + a - a^2 + a - a - 1 = 2a^2 - 2 = 0;$$

$$2(a^2-1) = 0;\ \ a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 1.$$

$$Si \begin{Bmatrix} a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.$$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = -C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$Si \begin{Bmatrix} a = -1 \\ a = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.$$

Por diferenciar los casos, las rectas que determinan son las siguientes:

$$a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y - z = -1 \end{cases}.$$

$$a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} y - z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}.$$

Problema 8:

8º) Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)\ y\ \vec{v} = (0, 1, 1)$.

$a)$ Hallar un vector $\vec{w}$ de módulo uno, que sea perpendicular a $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.

$b)$ Calcular el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.

Solución:

$a)$

Un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente de su producto vectorial:

$$\overrightarrow{w'} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i + k - 3i - j = -i - j + k = (-1, -1, 1).$$

Para obtener un vector unitario linealmente dependiente de $\overrightarrow{w'}$ basta con dividir sus componentes por su módulo:

$$\left|\overrightarrow{w'}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}.$$

$$\underline{\overrightarrow{w_1} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ y\ \overrightarrow{w_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)}.$$

$b)$

El área del paralelogramo determinado por dos vectores es el módulo de su producto vectorial:

$$\underline{Area = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{3}\ u^2}.$$

Problema 9:

9º) En una clase de primero de primaria el 50 % de los niños practica natación, el 20 % practica baloncesto y el 5 % ambos deportes.

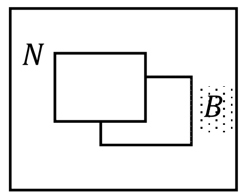
a) Calcular la probabilidad de que un niño elegido al azar no practique natación ni baloncesto.

b) Calcular la probabilidad de que un niño practique natación si juega al baloncesto.

Solución:

$$Datos: P(N) = 0.50;\ \ P(B) = 0.20;\ \ P(N \cap B) = 0.05.$$

a)



$\overline{N} \cap \overline{B} = 1 - (N \cup B)$

$$P = P(\overline{N} \cap \overline{B}) = 1 - P(N \cup B) =$$

$$= 1 - [P(N) + P(B) - P(N \cap B)] = 1 - (0.5 + 0.2 - 0.05) =$$

$$= 1 - (0.70 - 0.5) = 1 - 0.65 = \underline{0.35}.$$

La probabilidad de que un niño elegido al azar no practique natación ni baloncesto es **0.35**.

b)

$$P(N|B) = \frac{P(N \cap B)}{P(B)} = \frac{0,05}{0,20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = \underline{0.25}.$$

La probabilidad de que un niño practique natación si juega al baloncesto es **0.25**.

Problema 10:

10º) Se sabe que dos poblaciones distintas, X e Y, se distribuyen según una Normal de media 25. Además $P(X \geq 27) = P(Y \geq 30) = 0.1587$. Calcular sus respectivas varianzas.

Solución:

$Datos$: $\mu = 25$; σ.

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(25, \sigma)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-25}{\sigma}$.

Para $P(X \geq 27) = 0.1587$.

$P = P(X \geq 27) = 0.1587 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{27-25}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{2}{\sigma}\right) = 0.1587;$

$1 - P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 0.1587;\ \ P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 1 - 0.1587;\ \ P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 08413.$

Buscando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, a 0.8413 le corresponde 1, por lo cual:

$\frac{2}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 2 \Rightarrow \underline{\sigma^2 = 4}.$

Para $P(Y \geq 30) = 0.1587$.

$P = P(Y \geq 30) = 0.1587 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{30-25}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{5}{\sigma}\right) = 0.1587;$

$1 - P\left(Z < \frac{5}{\sigma}\right) = 0.1587;\ \ P\left(Z < \frac{5}{\sigma}\right) = 1 - 0.1587;\ \ P\left(Z < \frac{5}{\sigma}\right) = 0.8413.$

$\frac{5}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 5 \Rightarrow \underline{\sigma^2 = 25}.$

$$\boldsymbol{\sigma_X^2 = 4:\ \ \sigma_Y^2 = 25}$$

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para Acceso a la Universidad
Curso Académico 2019–2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.– (2 puntos) Calcular los valores de los parámetros reales a y b para que la función: $f(x)=\begin{cases} a(x^2-9)+\dfrac{bx}{3}-b, & x<3,\\ \ln(b(x-2)), & x\geq 3, \end{cases}$ sea derivable.

2.– (2 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas de la función

$$f(x)=\frac{x+3}{(x+2)^2}.$$

Calcular la recta tangente en su punto de inflexión.

3.– (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las funciones f y g, siendo éstas:

$$f(x)=\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}-2, \qquad g(x)=(x-2)^2-1,$$

y las rectas $x=3$, $x=5$.

4.– (2 puntos) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (a-1)x + y + 3az = 1,\\ ax + ay - z = a,\\ (a-1)x + y + (a-1)z = -2a+1. \end{cases}$$

5.– (2 puntos) Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix}.$$

6.– (2 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbb{R}.$$

Hallar A^{-1} y A^{10}.

7– (2 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + 3y - 4z + 9 = 0, \\ -x - 2y + z + 1 = 0, \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + 3y + z + 1 = 0$.

8.– (2 puntos) Dadas las rectas r y s:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 4x - 2y + 2z = 10, \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3},$$

y el plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$. Hallar la posición relativa entre

a) las rectas r y s,

b) el plano π y la recta s.

9.– (2 puntos) La estancia vacacional de una familia en un hotel sigue una distribución Normal, de media 15 días y desviación típica 4 días.

a) Calcular la probabilidad de que la estancia de una familia sea inferior a 10 días.

b) Calcular la probabilidad de que la estancia esté comprendida entre 11 y 19 días.

10.– (2 puntos) En una clase de 35 alumnos, asisten 30 de ellos. Se sabe que aprueban todas las asignaturas el 80 % de los alumnos que asisten a clase y el 10 % de los que no asisten. Se elige un alumno al azar.

a) Calcular el procentaje de alumnos que aprueba la asignatura.

b) Sabiendo que el alumno ha suspendido, calcular la probabilidad de que un alumno haya asistido a clase.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para Acceso a la Universidad
Curso Académico 2019–2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES

(1) Como norma general se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

(2) Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

(3) Si un alumno da una respuesta acertada a un ejercicio escribiendo sólo los resultados, sin el desarrollo lógico de cómo los ha obtenido, la puntuación en este apartado no podrá ser superior al 10 % de la nota máxima prevista.

(4) La puntuación de cada ejercicio es de dos puntos y está señalada en la copia del examen que se entrega al alumno. Si algún ejercicio tiene subapartados, se deberá distribuir razonadamente el número de puntos entre los mismos.

(5) La calificación será la suma de las puntuaciones obtenidas en los cinco primeros ejercicios contestados.

SOLUCIONES CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE 2020

Problema 1:

1º) Calcular los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea derivable, siendo

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2-9)+\frac{bx}{3}-b. \ x<3 \\ L[b(x-2)], \ x \geq 3 \end{cases}.$$

Solución:

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=3$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=3 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \left[a(x^2-9)+\frac{bx}{3}-b\right] = 0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} L[b(x-2)] = Lb = f(3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \Rightarrow 0 = Lb \Rightarrow \underline{b=1}.$$

La función resulta: $f(x) = \begin{cases} a(x^2-9)+\frac{x}{3}-1. \ x<3 \\ L(x-2), \ x \geq 3 \end{cases}.$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=3$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando el correspondiente valor de a.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax+\frac{1}{3} \ \ si\ x<3 \\ \frac{1}{x-2} \ \ \ si\ \ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow x=3 \ \Rightarrow f'(3) = \begin{cases} 6a+\frac{1}{3} \ \ si\ \ x<3 \\ 1 \ \ si\ \ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ f'(3^-) = f'(3^+) \Rightarrow 6a+\frac{1}{3} = 1; \ \ 18a+1=3; \ \ 18a=2; \ \ 9a=1 \Rightarrow \underline{a=\frac{1}{9}}.$$

La función es derivable para $\boldsymbol{a=\frac{1}{9}}$ y $\boldsymbol{b=1}$.

Problema 2:

2º) Determinar el dominio y las asíntotas de la función $f(x)=\frac{x+3}{(x+2)^2}$. Calcular la recta tangente en su punto de inflexión.

Solución:

Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$(x+2)^2=0 \Rightarrow x+2=0;\ \ x=-2 \ \Rightarrow \ \underline{D(f) \Rightarrow R-\{-2\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{(x+2)^2}=0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ y=0\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$(x+2)^2=0;\ \ x=-2 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x=-2\ es\ asíntota\ vertical}.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales}.$$

Asíntota vertical: $\boldsymbol{x=-2}$. Asíntota horizontal: $\boldsymbol{y=0}$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada en ese punto:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+2)^2-(x+3)\cdot[2\cdot(x+2)\cdot 1]}{(x+2)^4}=\frac{(x+2)-2\cdot(x+3)}{(x+2)^3}=\frac{x+2-2x-6}{(x+2)^3}=\frac{-x-4}{(x+2)^3}.$$

$$f''(x)=\frac{(-1)\cdot(x+2)^3-(-x-4)\cdot[3\cdot(x+2)^2\cdot 1]}{(x+2)^6}=\frac{-(x+2)-3\cdot(-x-4)}{(x+2)^4}=\frac{-x-2+3x+12}{(x+2)^4}=\frac{2x+10}{(x+2)^4}=\frac{2\cdot(x+5)}{(x+2)^4}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{2\cdot(x+5)}{(x+2)^4}=0;\ \ 2\cdot(x+5)=0;\ \ x+5=0 \Rightarrow x=-5.$$

$$f(-5)=\frac{-5+3}{(-5+2)^2}=\frac{-2}{(-3)^2}=-\frac{2}{9} \Rightarrow \text{Punto de tangencia: } P\left(-5,-\frac{2}{9}\right).$$

El valor de la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$m=f'(-5)=\frac{-(-5)-4}{(-5+2)^3}=\frac{5-4}{(-3)^3}=-\frac{1}{27}.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $P\left(-5,-\frac{2}{9}\right)$ con $m=-\frac{1}{27}$ es:

$$y+\frac{2}{9}=-\frac{1}{27}\cdot(x+5);\ \ 27y+6=-x-5$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ pedida\ es\ t\equiv \boldsymbol{x+27y+11=0}}.$$

Problema 3:

3º) Calcular el área del recinto limitado por las funciones $f(x)=\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}-2$ y $g(x)=(x-2)^2-1$ y las rectas $x=3, x=5$.

Solución:

Los puntos de corte de las dos funciones (parábolas) tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$f(x)=g(x) \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}-2=(x-2)^2-1;\ \ x^2+3x-18=9(x-2)^2-9;$

$x^2+3x-9=9\cdot(x^2-4x+4)=9x^2-36x+36;\ \ 8x^2-39x+45=0;$

$x=\frac{39\pm\sqrt{1.521-1.440}}{16}=\frac{39\pm\sqrt{81}}{16}=\frac{39\pm 9}{16} \Rightarrow x_1=\frac{30}{16}=\frac{15}{8}, x_2=\frac{48}{16}=3.$

$g\left(\frac{15}{8}\right)=\left(\frac{15}{8}-2\right)^2-1=\left(-\frac{1}{8}\right)^2-1=\frac{1}{64}-1=-\frac{63}{64} \Rightarrow A\left(\frac{15}{8},-\frac{63}{64}\right).$

(Este punto no se marca en el gráfico por estar muy próximo a V_2)

$g(3)=(3-2)^2-1=1^2-1=1-1=0 \Rightarrow B(3,0).$

Las dos funciones son parábolas convexas (∪) por ser positivos sus correspondientes coeficientes de x^2 cuyos vértices (mínimos) son los siguientes:

$f'(x)=\frac{2}{9}x+\frac{1}{3}.$ $\qquad f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2}{9}x+\frac{1}{3}=0;\ \ 2x+3=0;\ \ x=-\frac{3}{2}.$

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{9}+\frac{-\frac{3}{2}}{3}-2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2=\frac{1-2-8}{4}=-\frac{9}{4} \Rightarrow V_1\left(-\frac{3}{2},-\frac{9}{4}\right).$

$g'(x)=2\cdot(x-2).\ \ g'(x)=0 \Rightarrow 2\cdot(x-2)=0;\ \ x-2=0;\ \ x=2.$

$g(2)=(2-2)^2-1=-1 \Rightarrow V_2(2,-1).$

$f(3)=g(x)=0 \Rightarrow B(3,0).$

$f(5)=\frac{5^2}{9}+\frac{5}{3}-2=\frac{25+15-18}{9}=\frac{22}{9} \Rightarrow C\left(5,\ \frac{22}{9}\right) \approx C(5,\ 2.44).$

Los puntos de corte con el eje X de la parábola $f(x)$ son los siguientes:

$f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}-2=0;\ \ x^2+3x-18=0;\ x=\frac{-3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{81}}{2}=$

$=\frac{-3\pm 9}{2} \Rightarrow\Rightarrow x_1=-6;\ \ P(-6,0), x_2=3 \Rightarrow B(3,0).$

Los puntos de corte con el eje X de la parábola $g(x)$ son los siguientes:

$g(x)=(x-2)^2-1=x^2-4x+4-1=x^2-4x+3.$

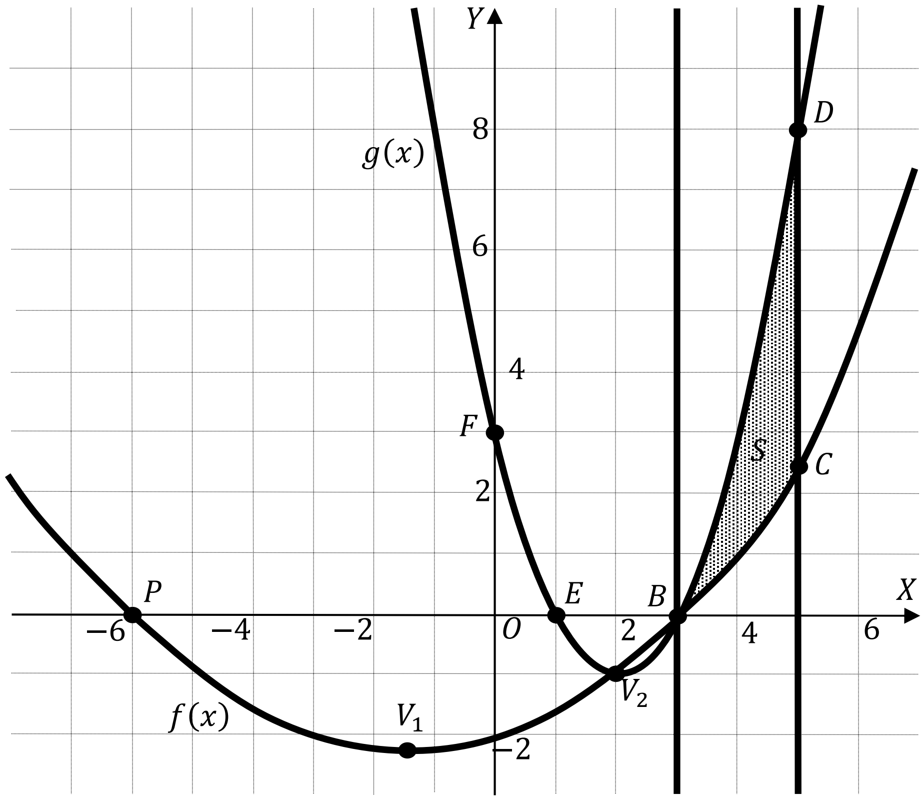
$x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow x_1=1;\ \ E(1,0), x_2=3 \Rightarrow B(3,0).$

El punto de corte con el eje Y de la parábola $g(x)$ es el siguiente:

$g(0)=(0-2)^2-1=4-1=3 \Rightarrow F(0,3).$

$g(5)=(5-2)^2-1=9-1=8 \Rightarrow D(5,8).$

La representación gráfica de la situación, con los datos obtenidos, es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta.



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_3^5 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_3^5 \left[(x^2 - 4x + 3) - \left(\frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} - 2\right)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_3^5 \left(\frac{8}{9}x^2 - \frac{13}{3}x + 5\right) \cdot dx = \left[\frac{8x^3}{27} - \frac{13x^2}{6} + 5x\right]_3^5 =$$

$$= \left(\frac{8 \cdot 5^3}{27} - \frac{13 \cdot 5^2}{6} + 5 \cdot 5\right) - \left(\frac{8 \cdot 3^3}{27} - \frac{13 \cdot 3^2}{6} + 5 \cdot 3\right) = \frac{1\,000}{27} - \frac{325}{6} + 25 - 8 + \frac{39}{2} - 15 =$$

$$= 2 + \frac{1\,000}{27} - \frac{325}{6} + \frac{39}{2} = \frac{108 + 2\,000 - 2\,925 + 1\,053}{54} = \frac{236}{54} = \frac{118}{27}\ u^2 \cong 4.37\ u^2 = S.$$

$$\boldsymbol{Área = \frac{118}{27}\ u^2 \cong 4.37\ u^2}$$

Problema 4:

4º) Discutir y resolver el sistema $\begin{cases}(a-1)x+y+3az=1\\ ax+ay-z=a\\ (a-1)x+y+(a-1)z=-2a+1\end{cases}$ según el valor del parámetro a.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}a-1 & 1 & 3a\\ a & a & -1\\ a-1 & 1 & a-1\end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix}a-1 & 1 & 3a & 1\\ a & a & -1 & a\\ a-1 & 1 & a-1 & -2a+1\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix}a-1 & 1 & 3a\\ a & a & -1\\ a-1 & 1 & a-1\end{vmatrix}=$$

$$=a(a-1)^2+3a^2-(a-1)-3a^2(a-1)+(a-1)-a(a-1)=$$

$$=a(a^2-2a+1)+3a^2-3a^3+3a^2-a^2+a=$$

$$=a^3-2a^2+a-3a^3+5a^2+a=-2a^3+3a^2+2a=-a(2a^2-3a-2)=0;$$

$$a_1=0;\ \ 2a^2-3a-2=0;\ \ a=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{3\pm5}{4}\Rightarrow a_2=-\frac{1}{2}, a_3=2.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix}a\neq 0\\ a\neq -\frac{1}{2}\\ a\neq 2\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \{C_2=C_4\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=0\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

$Para\ a=-\frac{1}{2}\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$ A efectos de rango, la matriz M' equivale a la matriz $M''=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -3 & 2\\ -1 & -1 & -2 & -1\\ -3 & 2 & -3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M''\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}-3 & 2 & 2\\ -1 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 4\end{vmatrix}=12-4+6-6-6+8=10\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ a=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 6 & 1\\ 2 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 6 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=6+2+12+1-2+36=55\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para \begin{Bmatrix} a = -\frac{1}{2} \\ a = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

$$Para \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq -\frac{1}{2} \\ a \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado.$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow\ Sistema\ Competible\ Indeterminado.\ Para \begin{Bmatrix} a = -\frac{1}{2} \\ a = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow\ Sistema\ incompatible$$

Se resuelve en primer lugar para $a \neq 0, a \neq -\frac{1}{2}\ y\ a \neq 2$:

$$\left.\begin{matrix} (a-1)x + y + 3az = 1 \\ ax + ay - z = a \\ (a-1)x + y + (a-1)z = -2a+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \\ F_2 \rightarrow \frac{1}{a}F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} (a-1)x + y + 3az = 1 \\ x + y - \frac{1}{a}z = 1 \\ -(2a+1)z = -2a \end{matrix}\right\} \Rightarrow z = \frac{2a}{2a+1}.$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} (a-1)x + y = 1 - 3az \\ x + y = 1 + \frac{1}{a}z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 - F_2\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (a-2)x = -3az - \frac{1}{a}z \\ x + y = 1 + \frac{1}{a}z \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(a-2)x = -3a^2z - z = -(3a^2+1)z \Rightarrow x = \frac{-(3a^2+1)}{a(a-2)} \cdot \frac{2a}{2a+1} = \frac{-2(3a^2+1)}{a(a-2)(2a+1)}.$$

$$y = 1 + \frac{1}{a}z - x = 1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{2a}{2a+1} + \frac{2(3a^2+1)}{a(a-2)(2a+1)} = \frac{a(a-2)(2a+1) + 2a(a-2) + 2(3a^2+1)}{a(a-2)(2a+1)} =$$

$$= \frac{a(2a^2+a-4a-2) + 2a^2 - 4a + 6a^2 + 2}{a(a-2)(2a+1)} = \frac{a(2a^2-3a-2) + 8a^2 - 4a + 2}{a(a-2)(2a+1)} = \frac{2a^3 - 3a^2 - 2a + 8a^2 - 4a + 2}{a(a-2)(2a+1)} =$$

$$= \frac{2a^3 + 5a^2 - 6a + 2}{a(a-2)(2a+1)} = y.$$

$$Solución: x = \frac{-2(3a^2+1)}{a(a-2)(2a+1)};\ \ y = \frac{2a^3+5a^2-6a+2}{a(a-2)(2a+1)};\ \ z = \frac{2a}{2a+1}, \forall a \in R - \left\{0, -\frac{1}{2}, 2\right\}.$$

Resolvemos ahora para $a = 0$; el sistema resulta $\begin{cases} -x + y = 1 \\ -z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente a $\left.\begin{matrix} x + y = 1 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$. Haciendo $y = \lambda$:

$$Solución: Para\ a = 0\ \rightarrow x = 1 - \lambda;\ \ y = \lambda;\ \ z = 0,\ \forall \lambda \in R.$$

Problema 5:

5º) Calcular el siguiente determinante: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix}$.

Solución:

Restando a cada fila la anterior multiplicada por x:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x & t-x \\ 0 & y^2-xy & z^2-xz & t^2-xt \\ 0 & y^3-xy^2 & z^3-xz^2 & t^3-xt^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y-x & z-x & t-x \\ y^2-xy & z^2-xz & t^2-xt \\ y^3-xy^2 & z^3-xz^2 & t^3-xt^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x & t-x \\ y(y-x) & z(z-x) & t(t-x) \\ y^2(y-x) & z^2(z-x) & t^2(t-x) \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(t-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^2 & z^2 & t^2 \end{vmatrix} = D. \qquad (*)$$

Restando en el determinante a cada fila la anterior multiplicada por y:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-y & t-y \\ 0 & z^2-yz & t^2-yt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-y & t-y \\ z^2-yz & t^2-yt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-y & t-y \\ z(z-y) & t(t-y) \end{vmatrix} =$$

$$= (z-y)(t-y) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z & t \end{vmatrix} = (z-y)(t-y)(t-z).$$

Sustituyendo el valor hallado en la expresión (*):

$$\underline{\boldsymbol{D = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z).}}$$

Problema 6:

6º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, m \in R$. Hallar A^{-1} y A^{10}.

Solución:

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - mF_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -m & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2m & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2m & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3m & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

....

$$\underline{A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10m & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10m & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Problema 7:

7º) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x+3y-4z+9=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+3y+z+1=0$.

Solución:

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \left.\begin{array}{r} x+3y-4z+9=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y=-9+4\lambda \\ -x-2y=-1-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y=-10+3\lambda;$$

$$x=-2y+1+\lambda=20-6\lambda-1+\lambda=21-5\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=21-5\lambda \\ y=-10+3\lambda. \\ z=\lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de r son $P(21,-10,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(-5,3,1)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n}=(1,3,1)$.

La expresión general del plano β pedido es la siguiente:

$$\beta(P;\ \overrightarrow{v_r},\vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x-21 & y+10 & z \\ -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$3(x-21)+(y+10)-15z-3z-3(x-21)+5(y+10)=0;$$

$$6(y+10)-18z=0;\ \ (y+10)-3z=0.$$

$$\underline{\boldsymbol{\beta \equiv y-3z+10=0.}}$$

Problema 8:

8º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 4x-2y+2z=10 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$ y el plano de ecuación:

$\pi \equiv x+y-z+6=0$. Hallar la posición relativa entre:

$a)$ Las rectas r y s.

$b)$ El plano π y la recta s.

Solución:

$a)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=1+\lambda \\ 2x-y=5-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=6;\ \ x=2;$$

$$y = 1+\lambda-x = 1+\lambda-2 = -1+\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=3 \\ y=-1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(3,-1,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(-3,-2,1)$ y $\overrightarrow{v_s}=(1,2,3)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = [B-A] = [(-3,-1,1)-(3,-2,0)] = (-6,1,1)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-18+12-1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3 \Rightarrow \ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$

$b)$ La expresión de la recta $s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$ por unas ecuaciones continuas es las siguiente: $\left.\begin{array}{r} 2x+6=y+2 \\ 3x+9=z-1 \end{array}\right\} \Rightarrow s \equiv \left.\begin{array}{r} 2x-y=-4 \\ 3x-z=-10 \end{array}\right\}$.

La recta s y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x-y=-4 \\ 3x-z=-10 \\ x+y-z=-6 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & -4\\ 3 & 0 & -1 & -10\\ 1 & 1 & -1 & -6\end{pmatrix}$.

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \to Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \to Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \to Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} \Rightarrow 1+2-3=0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$M'=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & -4\\ 3 & 0 & -1 & -10\\ 1 & 1 & -1 & -6\end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -6\\ 3 & 0 & -1 & -10\\ 2 & -1 & 0 & -4\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}F_2 \to F_2 - 3F_1\\ F_3 \to F_3 - 2F_1\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -6\\ 0 & -3 & 2 & 8\\ 0 & -3 & 2 & 8\end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$$

$$La\ recta\ s\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi$$

Problema 9:

9º) La estancia vacacional de una familia en un hotel sigue una distribución Normal, de media 15 días y desviación típica 4 días.

a) Calcular la probabilidad de que la estancia de una familia sea inferior a 10 días.

b) Calcular la probabilidad de que la estancia esté comprendida entre 11 y 19 días.

Solución:

$Datos: \ \mu = 15; \ \ \sigma = 4.$

a)

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(15, 4).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-15}{4}.$

$P = P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10-15}{4}\right) = P\left(Z < \frac{-5}{4}\right) = P(Z < -1.25) =$

$= 1 - P(Z \leq 1.25) = 1 - 0.8944 = \underline{0.1056}.$

La probabilidad de que la estancia de una familia sea inferior a 10 días es $\mathbf{0.1056}$

b)

$P = P(11 \leq X \leq 19) = P\left(\frac{11-15}{4} \leq Z \leq \frac{19-15}{4}\right) = P\left(\frac{-4}{4} \leq Z \leq \frac{4}{4}\right) =$

$= P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z < 1) - [1 - P(Z < 1)] = P(Z < 1) - 1 + P(Z < 1) =$

$= 2 \cdot P(Z < 1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 1.6826 - 1 = \underline{0.6826}.$

La probabilidad de que la estancia esté comprendida entre 11 y 19 días es $\mathbf{0.6826}$

Problema 10:

10º). En una clase de 35 alumnos asisten 30 de ellos. Se sabe que aprueban una determinada asignatura el 80 % de los alumnos que asisten a clase y el 10 % de los que no asisten. Se elige un alumno al azar.

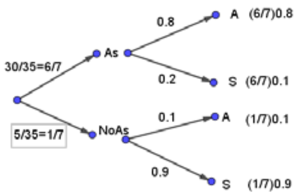
a) Calcular el porcentaje de alumnos que aprueban dicha asignatura.
b) Sabiendo que el alumno ha suspendido, calcular la probabilidad de que haya asistido a clase.

Solución:

Llamamos As al suceso asistir a clase, $NoAs$ al suceso, no asistir. Llamamos Ap al suceso aprobar la asignatura, y S al suceso haber suspendido.

Nos dan los siguientes datos: $P(As)$ = 30/35; $P(A/As)$ = 80/100; $P(A/NoAs)$ = 10/100.

Los llevamos a un diagrama de árbol:



a) Para calcular los alumnos que aprueban debemos recorrer dos ramas del árbol, y tenemos:

$$P(A) = P(As) \cdot P(A/As) + P(NoAs) \cdot P(A/NoAs) = \left(\frac{6}{7}\right) \cdot (0.8) + \left(\frac{1}{7}\right) \cdot (0.1) = \frac{4.8 + 0.1}{7} = \frac{4.9}{7}$$
$$= 0.7$$

Aprueban esa asignatura el **70 %** del alumnado.

b) Nos piden ahora $P(As/S)$. Sabemos que:

$$P\left(\frac{As}{S}\right) = \frac{P(As \cap S)}{P(S)} = \frac{\left(\frac{1}{7}\right) \cdot 0.2}{\left(\frac{6}{7}\right) \cdot 0.2 + \left(\frac{1}{7}\right) \cdot 0.9} = \frac{\frac{0.2}{7}}{\frac{1.2+0.9}{7}} = \frac{0.2}{2.1} = 0.5714.$$

Sabiendo que el alumno ha suspendido, la probabilidad de que haya asistido a clase es de **0.57**.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2019-2020**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+z=a+1 \\ -ax+y-z=2a \\ -y+z=a \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a=0$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones $f(x)=x^3+3x^2-1$ y $g(x)=6x$, se pide:

a) (0.5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1,10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.
b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ con pendiente mínima.
c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases} x-y=2 \\ 3x-z=-1 \end{cases}$, $\quad s\equiv\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$,

se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.
b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2,-1,5)$.
c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.
b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.
c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.

b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.

c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $P(-3, 1, 2)$ y $Q(-1, 0, 1)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π.

b) (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.

c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.25$ y $P(A \cap B) = 0.125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0.5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

b) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?

c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).

d) (0.75 puntos) Calcular $P(B|A)$.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

a) Cálculo correcto de los valores a estudiar: 0.5 puntos. Estudio correcto de cada caso: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes.

A.2.

a) Identificar el teorema a utilizar: 0.25 puntos. Escribir y comprobar las hipótesis: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Calcular el valor de los parámetros de la recta tangente: 0.5 puntos. Escribir la ecuación de la recta tangente: 0.25 puntos.
c) Calcular primitiva: 0.75 puntos. Aplicar regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica el concepto de derivada, así como teoremas relacionados, a la resolucion de problemas. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

A.4.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Por identificar la binomial: 0.5 puntos. Por escribir los parámetros correctos: 0.25 puntos. Resultado: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

B.1.

0.5 puntos por plantear correctamente cada ecuación, 1 punto por la resolución correcta del sistema.

Estándares de aprendizaje evaluados: Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situacion de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

B.2.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Estudio de la derivada: 0.5 puntos. Aplicación al análisis del crecimiento: 0.5 puntos.
c) Planteamiento de la continuidad: 0.25 puntos. Cálculos para la continuidad: 0.25 puntos. Planteamiento sobre derivabilidad: 0.25 puntos. Resolución sobre recta tangente: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas y representa a función en torno de puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.

B.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

B.4.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
En los dos apartados anteriores no se debe considerar correcta una respuesta de Sí o No, si no va acompañada de algún tipo de justificación.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
d) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.

RESPUESTAS OPCIÓN A

Problema A.1:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a

$$\left.\begin{array}{l} x+a\,y+z=a+1 \\ -a\,x+y-z=2\,a \\ -y+z=a \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resolver el sistema para $a=0$.

Solución

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/UvoHnpmFQkI

a) Si llamamos A a la matriz de coeficientes, se cumple que:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1+a-1+a^2=a^2+a=a\ (a+1)=0 \Leftrightarrow a=0,\ a=-1$$

Entonces si $a\neq 0,\ -1,\ |A|\neq 0$ y el sistema es compatible determinado. Si $a=0$, como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, tenemos que $rg(A)=2$. Por otro lado, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$ ($F_3=-F_2$), por lo que $rg\left(A^*\right)=2$ y el sistema es compatible indeterminado.

Si $a=-1$, como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, tenemos que $rg(A)=2$. Por otro lado:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-1-1-2-1\neq 0$, por lo que $rg\left(A^*\right)=3$ y el sistema es incompatible.

b) Para $a=0$, como las dos primeras filas son independientes (apartado a), el sistema queda $\left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ y-z=0 \end{array}\right\}$. Si $z=\alpha$, tenemos que $\left.\begin{array}{l} x+\alpha=1 \\ y-\alpha=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=1-\alpha, y=\alpha$, por lo que la solución es: $(1-\alpha,\alpha,\alpha)$, con $\alpha\in\mathbb{R}$.

Si $a\neq 0, a\neq -1$, el sistema es compatible determinado. Si $a=-1$, el sistema es incompatible.

Si $a=0$, el sistema es compatible indeterminado, de solución: $(1-\alpha,\alpha,\alpha)$, con $\alpha\in\mathbb{R}$.

Problema A.2:

Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

a) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.

c) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$

Solución

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/PqoWet9AiGY

a) Si consideramos la función continua (polinomio) $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$, tenemos que $h(1) = 1^3 + 3\,1^2 - 6 - 1 = -3 < 0$, $h(10) = 10^3 + 3\,10^2 - 60 - 1 > 0$, por lo que por el teorema de Bolzano, existe un $x_0 \in (1, 10)$ tal que $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$ y en x_0 las dos funciones toman el mismo valor.

b) La pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ es $f'(x) = 3x^2 + 6x$, luego hay que hallar el mínimo de esta función. Se cumple que $f''(x) = 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Como la función es una parábola con las ramas hacia arriba, en este punto crítico tiene el mínimo absoluto. Entonces la mínima pendiente es $f'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) = -3$ y la recta pedida es:

$$y = f(-1) - 3(x+1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 - 3(x+1) = 1 - 3x - 3 = -2 - 3x$$

$$\boldsymbol{y = -2 - 3x}$$

c) Se cumple que:

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\, dx = \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x}\, dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x}{2} - \frac{1}{6x}\right) dx = \frac{1}{6}\int_1^2 x^2\, dx + \frac{1}{2}\int_1^2 x\, dx - \frac{1}{6}\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - \frac{1}{6}\left[\ln x\right]_1^2 = \frac{1}{6}\left[\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] - \frac{1}{6}\left[\ln 2 - \ln 1\right] = \frac{7}{18} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6}\ln 2 = \frac{41}{36} - \frac{1}{6}\ln 2$$

$$\boldsymbol{\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\, dx = \frac{41}{36} - \frac{1}{6}\ln 2}$$

Problema A.3:

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, se pide:

$a)$ Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

$b)$ Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.

$c)$ Encontrar la ecuación del plano π paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be/OQDV6pBP99Y

a) *r* se puede expresar como $r \equiv \left. \begin{matrix} y = x - 2 \\ z = 3\,x + 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x = \lambda,\ y = \lambda - 2,\ z = 3\,\lambda + 1$, por lo que pasa por:

$P_r = (0,\ -2,\ 1)$ y tiene como vector director $v_r = (1,\ 1,\ 3)$.

s pasa por $P_s = (-1,\ -4,\ 0)$ y tiene como vector director $v_s = (2,\ -1,\ 1)$.

Entonces $P_rP_s = (-1,\ -4,\ 0) - (0,\ -2,\ 1) = (-1,\ -2,\ -1)$, por lo que:

$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 12 + 1 + 2 - 3 + 2 = -11 \neq 0$ y *r* y *s* se cruzan.

Las rectas se cruzan.

b) Como es perpendicular a *r*, el plano es $x + y + 3\,z = C$.

Como pasa por (2, −1, 5), $2 - 1 + 3 \times 5 = 16 = C$, por lo que el plano pedido es $x + y + 3\,z = 16$

$$\boldsymbol{x + y + 3\,z = 16}$$

c) Como el plano es paralelo a *r*, un vector director es $v_r = (1,\ 1,\ 3)$, y como contiene a *s*, el otro vector director es $v_s = (2,\ -1,\ 1)$ y pasa por $P_s = (-1,\ -4,\ 0)$, por lo que el plano pedido es:

$(x,\ y,\ z) = (-1,\ -4,\ 0) + \lambda\ (1,\ 1,\ 3) + \mu\ (2,\ -1,\ 1) = (-1 + \lambda + 2\,\mu,\ -4 + \lambda - \mu,\ 3\,\lambda + \mu)$

$$\boldsymbol{4x + 5y - 3z + 24 = 0}$$

Problema A.4:

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30 %. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40 %, en el tercero del 50 % y en el cuarto del 60 %. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

b) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

c) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan el 85 % de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/YBTkGMOWli8

a) Se cumple que:

$$P(\{\text{acierte antes del cuarto disparo}\}) =$$
$$= P(\{\text{acierte en el primer disparo}\}) + P(\{\text{acierte en el segundo disparo}\}) +$$
$$+P(\{\text{acierte en el tercer disparo}\}) = P(\{\text{acierte en el primer disparo}\}) +$$
$$+P(\{\text{falle el primer disparo}\} \cap \{\text{acierte el segundo disparo}\}) +$$
$$+P(\{\text{falle el primer disparo}\} \cap \{\text{falle el segundo disparo}\} \cap \{\text{acierte el tercer disparo}\}) =$$
$$= \frac{3}{10} + \frac{7}{10}\frac{2}{5} + \frac{7}{10}\frac{3}{5}\frac{1}{2} = \frac{79}{100} = 0.79.$$

La probabilidad de que el globo haya explotado es $\frac{79}{100} = \mathbf{0.79}$

b) Se cumple que: $P(\{\text{no acierte en los cuatro disparos}\}) =$

$$= P(\{\text{falle en el primer disparo}\} \cap \ldots \cap \{\text{falle en el cuarto disparo}\}) =$$
$$= P(\{\text{falle en el primer disparo}\})P(\{\text{falle en el segundo disparo}\}/\{\text{ha fallado en el primer disparo}\})\ldots$$
$$P(\{\text{falle en el cuarto disparo}\}/\{\text{ha fallado en los tres primeros disparos}\})$$
$$= \frac{7}{10}\frac{6}{10}\frac{5}{10}\frac{4}{10} = \frac{7}{10}\frac{3}{5}\frac{1}{2}\frac{2}{5} = \frac{21}{250} = 0.084$$

La probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo es $\frac{21}{250} = \mathbf{0.084}$

c) Se cumple que: $P(\{\text{exploten 6 globos}\}) = P(\{\text{6 arqueros acierten y 4 fallen}\}) =$

$$= \binom{10}{6} P(\{\text{el primero acierte}\} \cap \ldots \cap \{\text{el sexto acierte}\} \cap \{\text{el séptimo falle}\} \cap \ldots \cap \{\text{el décimo falle}\})$$
$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!}\left(\frac{17}{20}\right)^6 \left(\frac{3}{20}\right)^4 = \frac{210 \times 81 \times 17^6}{20^{10}} = 0.0400957.$$

(En la penúltima igualdad hemos utilizado que los sucesos son independientes)

La probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo es

$$\frac{\mathbf{10 \times 9 \times 8 \times 7}}{\mathbf{4!}}\left(\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{20}}\right)^{\mathbf{6}} \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}}\right)^{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{210 \times 81 \times 17^6}}{\mathbf{20^{10}}} = \mathbf{0.0400957}$$

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13 740 toneladas de doradas y 23 440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7 400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/QDXJKu6827E

Si llamamos x al precio del kilo de la dorada, y al precio del kilo de la lubina (en euros), tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} x = y + 0.11 \\ 13740000x + 23440000y + 63600000 = 275800000 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = y + 0.11 \\ 1374\, x + 2344\, y + 6360 = 27580 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = y + 0.11 \\ 687\, x + 1172\, y + 3180 = 13790 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = y + 0.11 \\ 687\, x + 1172\, y = 10610 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 687\,(y + 0.11) + 1172\, y = 687\, y + 75.57 + 1172\, y =$$

$$= 1859\, y + 75.57 = 10610 \Rightarrow y = \frac{10610 - 75.57}{1859} = \frac{10534.43}{1859} \approx 5.67\ €$$

Entonces $x = y + 0.11 \approx 5.67 + 0.11 = 5.78\ €$

Por otro lado, como se vendieron 7 400 toneladas de rodaballo por un valor de 63.6 millones de euros, el precio por kilo de rodaballo es

$$\frac{63600000}{7400000} = \frac{636}{74} = \frac{318}{37} \approx 8.59\ €$$

El precio de venta del kilo de dorada fue de **5.78** euros, el de kilo de la lubina de **5.67** euros y el kilo de rodaballo fue de **8.59** euros.

Problema B.2:

Sea la función $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & si\ \ x\le 1\\ (x-1)^3 & si\ \ x>1\end{cases}$:

$a)$ Estudie su continuidad en $[-4,4]$.

$b)$ Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4,4]$.

$c)$ Determine si la función $g(x)=f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x=1$.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be/ID6rZo5mr5Q

a) La función $f(x)$ está definida a trozos por dos funciones polinómicas, continuas y derivables en toda la recta real. El único problema está en $x=1$, punto de cambio de rama. Se cumple que:

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-1)^2=(1-1)^2=0=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)^3=(1-1)^3$, por lo que $\lim_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$ y $f(x)$ es continua en 1. Por tanto:

$f(x)$ es continua en $[-4,4]$

b) El único problema vuelve a estar en $x=1$, punto de cambio de rama. Si $x<1$, tenemos que $f'(x)=2\ (x-1)$, por lo que, al ser $f(x)$ continua en $[-4,\ 4]$, tenemos que $f'_-(1)=2\ (1-1)=0$. Si $x>1$, tenemos que $f'(x)=3\ (x-1)^2$, por lo que, al ser $f(x)$ continua en $[-4,\ 4]$, tenemos que $f'_+(1)=3\ (1-1)^2=0$, por lo que $f'(1)=f'_-(1)=f'_+(1)=0$ y $f(x)$ es derivable en 1, siendo además $x_0=1$ punto crítico de $f(x)$. Por tanto, $f(x)$ es derivable en $(-4,\ 4)$.

Si $x<1$, tenemos que $f'(x)=2\ (x-1)<0$ y $f(x)$ es estrictamente decreciente, si $x>1$, tenemos que $f'(x)=3\ (x-1)^2>0$ y $f(x)$ es estrictamente creciente. En $x=1$ hay un mínimo relativo.

$f(x)$ es derivable en $[-4,4]$, estrictamente decreciente para $x<1$ y estrictamente creciente para $x>1$.

c) Se cumple que $g(1)=f'(1)=0$ (apartado b), por lo que g está definida en 1. Entonces:

$$g(x)=f'(x)=\begin{cases}2\ (x-1) & \text{si } x\le 1\\ 3\ (x-1)^2 & \text{si } x>1\end{cases}.$$

De nuevo es una función definida a trozos por dos funciones polinómicas. El único problema para la continuidad está en $x=1$, punto de cambio de rama. Se cumple que:

$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-} 2\ (x-1)=2\ (1-1)=0=\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+} 3\ (x-1)^2=3\ (1-1)^2$, por lo que:

$\lim_{x\to 1} g(x)=0=g(1)$ y $g(x)$ es continua en 1.

Si $x<1$, tenemos que $g'(x)=2$, por lo que, al ser $g(x)$ continua en 1, tenemos que $g'_-(1)=2$.

Si $x>1$, tenemos que $g'(x)=6\ (x-1)$, por lo que, al ser $g(x)$ continua en 1, tenemos que:

$g'_+(1)=6\ (1-1)=0$, por lo que $2=g'_-(1)\ne g'_+(1)=0$ y $g(x)$ no es derivable en 1.

La función $g(x)=f'(x)$ está definida y es continua, pero no es derivable en 1.

Problema B.3:

Dados los puntos $P(-3,1,2)$ y $Q(-1,0,1)$ y el plano $\pi \equiv x+2y-3z=4$, se pide:

$a)$ Hallar la proyección de Q sobre π.

$b)$ Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.

$c)$ Escribir la ecuación del plano β perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be/GyyXBReLhSI

a) La recta perpendicular a π que pasa por Q tiene como vector director el vector característico de π: $(1,\ 2,\ -3)$, luego es $(x,\ y,\ z)=(-1,\ 0,\ 1)+\lambda\ (1,\ 2,\ -3)=(-1+\lambda,\ 2\ \lambda,\ 1-3\ \lambda)$.

La proyección de Q sobre $\boldsymbol{\pi}$ es la intersección de esta recta con π:

$x+2\ y-3\ z=-1+\lambda+2\ (2\ \lambda)-3(1-3\ \lambda)=14\ \lambda-4=4 \Leftrightarrow \lambda=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$, luego la proyección pedida es:

$$\left(-1+\frac{4}{7},\ \frac{8}{7},\ 1-3\ \frac{4}{7}\right)=\left(-\frac{3}{7},\ \frac{8}{7},\ -\frac{5}{7}\right)$$

b) Al ser paralelo a π, será $x+2\ y-3\ z=C$. Para que pase por P: $-3+2-3\times 2=-7=C$.

Entonces el plano pedido es $x+2\ y-3\ z=-7$

c) El plano será $A\ x+B\ y+C\ z=D$. Como es perpendicular a π, los vectores característicos son perpendiculares y $(A,\ B,\ C)\circ(1,\ 2,\ -3)=A+2\ B-3\ C=0$. Como contiene a P y Q:

$A\ (-3)+B+C\ 2=-3\ A+B+2\ C=D$, $A\ (-1)+C=-A+C=D$, por lo que tenemos el sistema:

$\left.\begin{array}{l} A+2\ B-3\ C=0 \\ -3\ A+B+2\ C=D \\ -A+C=D \end{array}\right\}$. Despejando en la última ecuación:

$$C=A+D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+2\ B-3\ (A+D)=-2\ A+2\ B-3\ D=0 \\ -3\ A+B+2\ (A+D)=-A+B+2\ D=D \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\ A+2\ B=3\ D \\ -A+B=-D \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -A+B=-D=\frac{3\ D}{2} \Rightarrow D=0,\ B=A,\ C=A+D=A$$

Entonces el plano pedido es $A\ x+A\ y+A\ z=0 \Leftrightarrow x+y+z=0$

Problema B.4:

Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.5; P(B) = 0.25; P(A \cap B) = 0.125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

$a)$ Con C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

$b)$ ¿Son A y B independientes?

$c)$ Calcular la probabilidad $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

$d)$ Calcular $P(\overline{B}/A)$.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be/GyLjgzoJnmw

a) Se cumple que:

$P((A\cup B)\cap C) = P((A\cap C)\cup(B\cap C)) = P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C) = 0+0-0=0$ (ya que C es incompatible con A y con B, luego $P(A\cap C) = P(B\cap C) = 0$ y:

$A\cap B\cap C \subset A\cap C \Rightarrow P(A\cap B\cap C) = 0$), por lo que C y $A \cup B$ son incompatibles.

Los sucesos C y $A \cup B$ son incompatibles

b) Se cumple que $P(A\cap B) = 0.125 = P(A)\ P(B) = 0.5\times 0.25$, luego los sucesos son independientes.

Los sucesos A y B son independientes

c) Se cumple que:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P\left((A\cup B)^c\right) = 1 - P(A\cup B) = 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A\cap B)\right) = 1 - (0.5 + 0.25 - 0.125) = 0.375$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.375$$

d) Se cumple que:

$$P(\overline{B}/A) = \frac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A\cap B)}{0.5} = \frac{0.5 - 0.125}{0.5} = \frac{0.375}{0.5} = \frac{375}{500} = \frac{75}{100} = 0.75$$

$$P(\bar{B}/A) = 0.75$$

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

a) $|A| = a^2 + a \Rightarrow a = 0$ y $a = -1$
Si a no es ni 0 ni $-1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado
Si $a = -1 \Rightarrow$ Sistema incompatible
Si $a = 0 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) $x + z = 1$, $y - z = 0 \Rightarrow$ Solución: $(1 - t, t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$

A.2.

a) Sea $h(x) = f(x) - g(x)$. Dado que $h(x)$ es polinómica es continua y como $h(1)h(10) < 0$, aplicando el $\boxed{\text{teorema de Bolzano}}$, tenemos que $\exists c \in (1, 10)$ tal que $h(c) = 0$, luego $f(c) = g(c)$.
b) La pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = c$ es $m = 3c^2 + 6c$, que tomará un valor extremo cuando $m'(c) = 6c + 6 = 0$. En $c = -1$ la pendiente toma valor mínimo de -3. Luego la ecuacion de la recta tangente es $\boxed{y = -3(x + 1) + 1}$.
c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - \ln x\right]_1^2 = \boxed{\frac{41}{36} - \frac{\ln 2}{6} \approx 1.023364}$.

A.3.

a) El vector director de la recta r es $\overrightarrow{d_r}(1, 1, 3)$ y un punto de la misma $P_r(2, 0, 7)$. El vector director de la recta s es $\overrightarrow{d_s}(2, -1, 1)$ y un punto de la misma $P_s(-1, -4, 0)$. Calculamos el vector $\overrightarrow{P_rP_s} = (-3, -4, -7)$. Puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & -7 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$, deducimos que r y s se cruzan.
b) $\vec{n} = (1, 1, 3) \Rightarrow \pi : x + y + 3z + k = 0$. $P \in \pi \Rightarrow 2 - 1 + 15 + k = 0 \Rightarrow k = -16$. Por lo tanto, la ecuación del plano buscado es $\pi : x + y + 3z = 16$.
c) El vector normal al plano π que se busca es $\vec{n} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = (4, 5, -3)$. Además $P_s(-1, -4, 0) \in \pi \Rightarrow$ el plano buscado es $\pi : 4x + 5y - 3z + 24 = 0$.

A.4.

a) Denotamos por A_j la probabilidad de acertar en el lanzamiento j, y por F_j la probabilidad de fallar en ese lanzamiento.

$$P(A_1) + P(F_1 \cap A_2) + P(F_1 \cap F_2 \cap A_3) = 0.3 + 0.7 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.79.$$

b) $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) = 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.084$.
c) Tenemos 10 pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito $p = 0.85$ de manera que

$$P(\text{6 aciertos}) = \binom{10}{6} 0.85^6 \cdot 0.15^4 \approx 0.0400957.$$

B.1.

Si llamamos x, y, z a los precios del kilo de cada uno de los pescados anteriores en 2016, con los datos del enunciado se plantea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 13740000x + 23440000y + 7400000z &= 275800000 \\ x &= y + 0.11 \\ 7400000z &= 63600000 \end{cases}$$

La solución de este sistema, redondeando a dos decimales es $x = 5.78$ euros/kilo de dorada, $y = 5.67$ euros/kilo de lubina y $z = 8.59$ euros/kilo de rodaballo.

B.2.

a) La función es continua si $x \neq 1$ por coincidir en valores con polinomios. Como $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(0)$, es continua en $[-4, 4]$.
b) La derivada viene dada por $2(x-1)$ o por $3(x-1)^2$ respectivamente a izquierda y derecha de 1, por lo que al ser $\lim_{x\to 1^-} 2(x-1) = \lim_{x\to 1^-} 3(x-1)^2$ resulta existir $f'(x)$ en $[-4, 4]$, ser nula en 1, negativa a su izquierda y positiva a su derecha. Por tanto, f es decreciente en $[-4, 1)$ y creciente en $(1, 4]$.
c) Hemos visto que las derivadas laterales de f en $x = 1$ coinciden, por lo que $g(x) = f'(x)$ es continua en 1. Puesto que $g(x) = 2(x-1)$ para $x < 1$, y $g(x) = 3(x-1)^2$ si $x > 1$, la derivada de g es es 2 si $x < 1$ y $6(x-1)$ si $x > 1$. Por lo tanto $g'(1)$ no existe al ser $g'(1^-) \neq g'(1^+)$.

B.3.

a) El vector normal al plano π es $\vec{u} = (1, 2, -3)$. La proyección de Q sobre π es $\{Q + \lambda\vec{u}\} \cap \pi$, de modo que λ se obtiene como solución de $(\lambda - 1) + 2(2\lambda) - 3(1 - 3\lambda) = 4$, es decir, $\lambda = \frac{4}{7}$ y la proyección es el punto $\left(\frac{-3}{7}, \frac{8}{7}, \frac{-5}{7}\right)$
b) El plano buscado tiene ecuación $x + 2y - 3z + D = 0$. Puesto que contiene a P, $-3 + 2 - 6 + D = 0$, por lo que $D = 7$ y la solución es $x + 2y - 3z + 7 = 0$
c) El vector normal al plano buscado es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\overrightarrow{PQ}$. Por tanto, es paralelo a $\vec{u} \times \overrightarrow{PQ} = (1, 2, -3) \times (2, -1, -1) = (-5, -5, -5)$, de modo que la ecuación del plano buscado es de la forma $x + y + z + D' = 0$. La condición de que el plano contenga al punto Q implica que $-1 + 1 + D' = 0$, por lo que la solución es $x + y + z = 0$.

B.4.

a) Son incompatibles.

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) = \phi \cap \phi = \phi.$$

b) Son independientes porque

$$0.125 = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.25.$$

c)

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 0.375.$$

d)

$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = 0.75.$$

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2019-2020**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA
EXTRAORDINARIA
DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1,1,1,1)$ y $(1,2,3,4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

a) (0.5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.
b) (0.5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.
c) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
d) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
e) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.
b) (1.25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.
c) (0.75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(3,3,0)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{0}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.
b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r.
c) (0.75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.
b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.
c) (0.5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 puntos) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

b) (0.5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25\,t\,e^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

a) (0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

b) (0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

c) (1.25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante t, $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que $P(X) = 0.4$ y que $P(X \cap \overline{Y}) = 0.08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

a) (1 punto) Calcular $P(Y)$.

b) (0.5 puntos) Calcular $P(X \cup Y)$.

c) (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

En cada apartado, por dar el ejemplo 0.25 puntos; por la justificación de que cada ejemplo cumple el enunciado, 0.25 puntos.

Estándares evaluables: Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.

A.2.

a) Por cada valor obtenido: 0.25 puntos.
b) Por el estudio de la continuidad: 0.5 puntos. Por el estudio de la derivabilidad: 0.5 puntos. Por caracterizar el extremo: 0.25 puntos.
c) Por cada asíntota: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como teoremas relacionados, a la resolución de problemas.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Encontrar una solución correcta: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

A.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

B.1.

!a Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente.

B.2.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo de límite: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo del instante: 0.25 puntos. Cálculo del máximo: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculo de la primitiva: 0.5 puntos. Aplicación de la regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como teoremas relacionados, a la resolucion de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

B.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Si se determina el vértice D: 0.5 puntos (repartidos entre planteamiento: 0.25 y resultado: 0.25). Si se determina el área: 0.5 puntos (repartidos entre planteamiento: 0.25 y resultado: 0.25).
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas.

B.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) 0.5 puntos por identificar la binomial; 0.5 puntos por el resultado.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

RESPUESTAS OPCIÓN A

Problema A.1:

Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3, 4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición, justificándolo apropiadamente:

$a)$ La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.
$b)$ Las tres filas de A son linealmente independientes.
$c)$ A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
$d)$ A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
$e)$ A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

Solución: Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be/OkSjXFjUihU

a) Podemos tomar *A* de manera que la tercera fila sea la suma de las dos primeras: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}$

b) Variamos ligeramente la matriz *A* del apartado anterior cambiando el 4 de la tercera fila por un 5: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&5&5\end{pmatrix}$. Vemos que hay un menor de orden 3 no nulo en *A*, por lo que las 3 filas son l. i.:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&5\end{vmatrix}=10+6+3-4-9-5=19-18=1\neq 0$$

c) La matriz del apartado anterior corresponde a un sistema cuya matriz de coeficientes tiene determinante no nulo, luego es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

d) La matriz del apartado a) tiene la tercera fila combinación lineal de las 2 primeras, luego $rg\left(A\right)\leq 2$

Tenemos que $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$, por lo que $rg\left(A\right)=2$. Como el menor está dentro de la matriz de coeficientes del sistema asociado a *A* el rango de dicha matriz de coeficientes es 2, menor que el número de incógnitas (3), luego la matriz del apartado a) corresponde a un sistema compatible indeterminado.

e) Variamos ligeramente la matriz *A* del apartado a) cambiando el 5 por un 6: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&6\end{pmatrix}$.

Vemos que hay un menor de orden 3 no nulo en *A*, por lo que $rg\left(A\right)=3$:

$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&6\end{vmatrix}=12+6+3-4-9-6=15-13=2\neq 0$. La matriz de coeficientes del sistema asociado a *A* es la misma del apartado anterior, luego tiene rango 2, y entonces el sistema asociado a *A* es incompatible.

Problema A.2:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & si\ \ x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

$a)$ Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.

$b)$ Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.

$c)$ Estudiar sus asíntotas.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be/eEPwmBTpgwY

a) Se cumple que $f(0)=\frac{0-1}{0^2-1}=1$, por lo que $(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(1)=\frac{1^2+1}{4}=\frac{1}{2}$

b) Tenemos que:

$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{(x-1)\ (x+1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}=\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+1}{4\ x}=\frac{1^2+1}{4}=\frac{1}{2}$, por lo que $\lim_{x\to1} f(x)=\frac{1}{2}=f(1)=\frac{1^2+1}{4}=\frac{1}{2}$ y $f(x)$ es continua en 1.

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{x-1}{x^2-1}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{2\ x-2-x^2+1}{2\ (x-1)^2\ (x+1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{-x^2+2\ x-1}{2\ (x-1)^2\ (x+1)}=$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)^2}{2\ (x-1)^2\ (x+1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{-1}{2\ (x+1)}=-\frac{1}{4}$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{x^2+1}{4\ x}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+1-2x}{4\ x\ (x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)^2}{4\ x\ (x-1)}=$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{4\ x}=\frac{1-1}{4}=0$$

Como $f'_-(1)=-\frac{1}{4}\neq f'_+(1)=0$, $f(x)$ no es derivable en 1.

Si $x<1$, $f'(x)=\frac{x^2-1-(x-1)\ 2\ x}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-2\ x-1}{(x^2-1)^2}=-\frac{(x+1)^2}{(x^2-1)^2}<0$, luego $f(x)$ es estrictamente decreciente.

Si $x>1$, $f'(x)=\frac{2\ x\ 4\ x-(x^2+1)\ 4}{16\ x^2}=\frac{4\ x^2-4}{16\ x^2}=\frac{(x-1)\ (x+1)}{4\ x^2}>0$, luego $f(x)$ es estrictamente creciente.

Como además $f(x)$ es continua en 1, $f(x)$ **tiene un mínimo relativo en 1**

c) Tenemos que:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$, luego $y=0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ en $-\infty$ y $f(x)$ no tiene asíntota oblicua en $-\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$, luego $f(x)$ no tiene asíntota horizontal en ∞

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{4x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$,

$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - \frac{1}{4}x \right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{4x} - \frac{1}{4}x \right) = \frac{1}{4} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \frac{1}{4} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, luego $y = \frac{1}{4}x$ es una asíntota oblicua de $f(x)$ en ∞

Tenemos que:

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to-1^-} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to-1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-0} = -\infty$, por lo que $x=-1$ es una asíntota vertical de $f(x)$

Asíntotas: $y = \frac{1}{4}x$ es una asíntota oblicua**.** $x=-1$ es una asíntota vertical**.**

Problema A.3:

Dado el punto $P(3,3,0)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$, se pide:

$a)$ Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

$b)$ Calcular el punto simétrico de P con respecto a r.

$c)$ Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be//tfld94oli44

a) Como contiene a $\boldsymbol{r}$, contiene al punto de $\boldsymbol{r}$: $Q=(2,\ 0,\ -1)$ (lo que acompaña a $x,\ y,\ z$) y a su vector director: $\bar{v}_1=(-1,\ 1,\ 0)$, siendo su otro vector director

$\bar{v}_2 = PQ = (2,\ 0,\ -1)-(3,\ 3,\ 0)=(-1,\ -3,\ -1)$ Por tanto, la ecuación del plano es:

$$(x,\ y,\ z)=P+\lambda\ \bar{v}_1+\mu\ \bar{v}_2=(3,\ 3,\ 0)+\lambda\ (-1,\ 1,\ 0)+\mu\ (-1,\ -3,\ -1)=(3-\lambda-\mu,\ 3+\lambda-3\ \mu,\ \mu)$$

$$\boldsymbol{(x,y,z)=(3,3,0)+\lambda\,(-1,1,0)+\mu\,(-1,-3,-1)}$$

b) Un plano perpendicular a *r* que pasa por $\boldsymbol{P}$ tendrá como vector característico $\bar{v}_1=(-1,\ 1,\ 0)$ (vector director de *r*), luego será $-x+y=C$ y para que pase por P ha de ser $-x+y=0 \Rightarrow y=x$, luego su intersección con *r* cumplirá que $y=x=2-x \Rightarrow x=y=1$, $z+1=0 \Rightarrow z=-1$, por lo que será $(1,\ 1,\ -1)$

Entonces el simétrico $(x,\ y,\ z)$ de $\boldsymbol{P}$ con respecto a $\boldsymbol{r}$ ha de cumplir que:

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\left((x,y,z)+(3,3,0)\right)=\left(\frac{x+3}{2},\frac{y+3}{2},\frac{z}{2}\right)=(1,1,-1)\Rightarrow\frac{x+3}{2}=1,\frac{y+3}{2}=1,\frac{z}{2}=-1\Rightarrow x=y=-1,z=-2}$$

Por tanto, el punto simétrico es: $\boldsymbol{(-1,-1,-2)}$

c) Si tomamos como *A* la proyección ortogonal de *P* sobre r hallada en el apartado anterior, sabemos que *AP* es perpendicular a *r*, por lo que el triángulo *ABP* será rectángulo y con ángulo recto en *A* para cualquier punto *B* de *r*.

Elegimos entonces un punto genérico de *r*: $B=(2,\ 0,\ -1)+\lambda(-1,\ 1,\ 0)=(2-\lambda,\ \lambda,\ -1)$, por lo que:

$AP=(3,\ 3,\ 0)-(1,\ 1,\ -1)=(2,\ 2,\ 1)$, $AB=(2-\lambda,\ \lambda,\ -1)-(1,\ 1,\ -1)=(1-\lambda,\ \lambda-1,\ 0)$ y:

$$\acute{a}rea=\frac{1}{2}\,\|AB\|\,\|AP\|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2+1}\sqrt{(1-\lambda)^2+(\lambda-1)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\,|\lambda-1|=\frac{3}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow|\lambda-1|=1$$
$$\Leftrightarrow\lambda-1=\pm1\Leftrightarrow\lambda=2, o\ \lambda=0$$

$A=\boldsymbol{(1,1,-1)}$. Esto proporciona dos valores para B:

$B=(2-2,2,-1)=\boldsymbol{(0,2,-1)}$, $B=(2-0,0,-1)=\boldsymbol{(2,0,-1)}$.

Problema A.4:

Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas blancas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas blancas y 3 negras y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ellas dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja

b) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra

c) Sabiendo que la primera bola es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://www.youtube.com/watch?v=UNaAmHB5BJc

a) $P(\{\text{extraer roja en la primera}\}) = P(\{\text{elegir urna A}\} \cap \{\text{extraer roja}\}) + P(\{\text{elegir urna B}\} \cap \{\text{extraer roja}\}) =$

$= P(\{\text{elegir urna A}\})P(\{\text{extraer roja}\}/\{\text{elegir urna A}\}) + P(\{\text{elegir urna B}\})P(\{\text{extraer roja}\}/\{\text{elegir urna B}\})$

$$= \frac{1}{3}\frac{4}{6} + \frac{1}{3}\frac{3}{6} = \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18}$$

La probabilidad de que la primera bola extraída sea roja es $\mathbf{\frac{7}{18}}$

b) $P(\{\text{extraer roja en la primera}\} \cap \{\text{extraer negra en la segunda}\}) =$
$= P(\{\text{extraer roja en la primera}\} \cap \{\text{extraer negra en la segunda}\} \cap \{\text{elegir urna A}\}) +$
$P(\{\text{extraer roja en la primera}\} \cap \{\text{extraer negra en la segunda}\} \cap \{\text{elegir urna B}\}) =$
$= P(\{\text{extraer roja en la primera}\} \cap \{\text{extraer negra en la segunda}\}/\{\text{elegir urna A}\})P(\{\text{elegir urna A}\}) +$
$P(\{\text{extraer roja en la primera}\} \cap \{\text{extraer negra en la segunda}\}/\{\text{elegir urna B}\})P(\{\text{elegir urna B}\}) =$
$= \frac{4}{6}\frac{2}{5}\frac{1}{3} + \frac{3}{6}\frac{3}{5}\frac{1}{3} = \frac{4}{45} + \frac{1}{10} = \frac{17}{90}$

(ya que en la urna A quedarían 5 bolas de las que 2 son negras y en la urna B quedarían 5 bolas de las que 3 son negras)

La probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra es $\mathbf{\frac{17}{90}}$

c) Utilizando la información de los apartados anteriores, tenemos que:

$P(\{\text{extraer negra en la segunda}\}/\{\text{extraer roja en la primera}\}) =$

$$= \frac{P(\{\text{extraer roja en la primera}\} \cap \{\text{extraer negra en la segunda}\})}{P(\{\text{extraer roja en la primera}\})} = \frac{\frac{17}{90}}{\frac{7}{18}} = \frac{17}{35}$$

Sabiendo que la primera bola es roja, la probabilidad de que la segunda sea negra es $\mathbf{\frac{17}{35}}$

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

$a)$ Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

$b)$ Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.

$c)$ Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be/uByp3Ut7b0s

a) Ya que $|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 2 = 1 \neq 0$, entonces *A* tiene inversa. Tenemos que:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2+1) = -3$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$,

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $\boldsymbol{A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1}$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$, por lo que:

$adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj(A)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

b) Se cumple que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, por lo que:

$$C = A^2 - 2\,I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) Se cumple que $|\boldsymbol{D}| = |\boldsymbol{A\,B\,B^t}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B\,B^t}| = |\boldsymbol{B\,B^t}|$, ya que $|A| = 1$ (apartado a). Tenemos que:

$\boldsymbol{B\,B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$, por lo que $|B\,B^t| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 - 4 = 0$

$$\boldsymbol{|D| = 0}$$

Problema B.2:

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-\frac{t^2}{4}}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

$a)$ Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

$b)$ Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

$c)$ La energía total generada por la pila hasta el instante t, $E(t)$ se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

Solución: Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo https://youtu.be/Pb2F9NAuVKI

a) Hay que hallar $\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} 25\ t\ e^{-\frac{t^2}{4}} = 25\ \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{\frac{t^2}{4}}} = 25\ \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\frac{2\ t}{4} e^{\frac{t^2}{4}}} = 25\ \frac{1}{\infty} = 0$, luego la potencia tiende a 0 (en la tercera igualdad hemos aplicado *L'Hôpital* puesto que es una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$)

La potencia generada tiende a cero

b) Se cumple que:

$$P'(t) = 25\ e^{-\frac{t^2}{4}} + 25\ t\ e^{-\frac{t^2}{4}} \left(-\frac{2\ t}{4}\right) = 25\ e^{-\frac{t^2}{4}} \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) = \frac{25}{2}\ e^{-\frac{t^2}{4}} \left(2 - t^2\right) = 0 \Leftrightarrow 2 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 2 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$$

(Ya que $t > 0$), con $P'(t) = \frac{25}{2}\ e^{-\frac{t^2}{4}} \left(2 - t^2\right) > 0 \Leftrightarrow 2 - t^2 > 0 \Leftrightarrow t^2 < 2 \Leftrightarrow 0 < t < \sqrt{2}$, por lo que $P(t)$ es estrictamente creciente si $0 < t < \sqrt{2}$, $P(t)$ es estrictamente decreciente si $t > \sqrt{2}$ y $P(t)$ tiene el máximo absoluto en $t = \sqrt{2}$, siendo dicha potencia máxima:

$$P\left(\sqrt{2}\right) = 25\ \sqrt{2}\ e^{-\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{4}} = 25\ \sqrt{2}\ e^{-\frac{1}{2}} = 25\ \sqrt{\frac{2}{e}}$$

Para $t = \sqrt{2}$ se alcanza la potencia máxima, que es de $P\left(\sqrt{2}\right) = 25\ \sqrt{\frac{2}{e}}$ = 21.444

c) Como $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$, se cumple que $E(t) = \int_0^t P(t)\ dt$, por lo que hay que hallar:

$$E(2) = \int_0^2 P(t)\ dt = \int_0^2 25\ t\ e^{-\frac{t^2}{4}}\ dt = 25\ \int_0^2 t\ e^{-\frac{t^2}{4}}\ dt = -50\ \int_0^2 -\frac{t}{2}\ e^{-\frac{t^2}{4}}\ dt = -50\ \left[e^{-\frac{t^2}{4}}\right]_0^2$$

$$= -50\ \left[e^{-\frac{2^2}{4}} - e^{-\frac{0^2}{4}}\right] = 50\ \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 50\ \frac{e-1}{e} = 31.606$$

La energía producida por la pila es $50\ \frac{e-1}{e} = 31.606$

Problema B.3:

Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices $A(1,0,-1)$, $B(2,1,0)$ y $C(4,3,-2)$, se pide:

$a)$ Calcular una ecuación de la recta r que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC

$b)$ Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

$c)$ Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución: Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo https://youtu.be/ahwHNlcQUBw

a) El punto medio del segmento AC es:

$$\frac{1}{2}\ (A+C)=\frac{1}{2}\ \big((1,\ 0,\ -1)+(4,\ 3,\ -2)\big)=\frac{1}{2}\ (5,\ 3,\ -3)=\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right).$$

Como es perpendicular al vector $AC=C-A=(4,\ 3,\ -2)-(1,\ 0,\ -1)=(3,\ 3,\ -1)$ y a:

$BC=C-B=(4,\ 3,\ -2)-(2,\ 1,\ 0)=(2,\ 2,\ -2)$, su vector director $(a,\ b,\ c)$ cumple:

$$\left.\begin{array}{l}(a,\ b,\ c)\circ(3,\ 3,\ -1)=3\ a+3\ b-c=0\\ (a,\ b,\ c)\circ(2,\ 2,\ -2)=2\ a+2\ b-2\ c=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}(a,\ b,\ c)\circ(3,\ 3,\ -1)=3\ a+3\ b-c=0\\ (a,\ b,\ c)\circ(2,\ 2,\ -2)=a+b-c=0\end{array}\right\}.$$

Dando el valor $a=1$, tenemos $\left.\begin{array}{l}3+3\ b-c=0\\ 1+b-c=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3\ b-c=-3\\ b-c=-1\end{array}\right\}\Rightarrow 2\ b=-2\Rightarrow b=-1$, por lo que:

$c=b+1=-1+1=0$ y un vector director es $(1,\ -1,\ 0)$, siendo la recta pedida:

$$\textbf{Recta } r\text{: } (x,y,z)=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)+\lambda\,(1,-1,0)$$

b) El vector que une *B*, *C* es $C-B=(4,\ 3,\ -2)-(2,\ 1,\ 0)=(2,\ 2,\ -2)$.

Al ser paralelogramo, es el mismo que une *A* y *D*, luego:

$$D=A+(C-B)=(1,\ 0,\ -1)+(2,\ 2,\ -2)=(3,\ 2,\ -3)$$

El vector que une *B*, *A* es $A-B=(1,\ 0,\ -1)-(2,\ 1,\ 0)=(-1,\ -1,\ -1)$, por lo que:

$$\boldsymbol{Área}=\|(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\|=\|(\mathbf{2},\mathbf{2},-\mathbf{2})\times(-\mathbf{1},-\mathbf{1},-\mathbf{1})\|=\left\|\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ 2 & 2 & -2\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}\right\|=\|-4\,\boldsymbol{i}+4\,\boldsymbol{j}\|$$

$$=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{D}=(3,2,-3);\ \text{Á}\boldsymbol{rea}=4\sqrt{2}$$

c) Se cumple que $\cos\alpha=\dfrac{AB\circ AC}{\|AB\|\ \|AC\|}=\dfrac{(1,\ 1,\ 1)\circ(3,\ 3,\ -1)}{\|(1,\ 1,\ 1)\|\ \|(3,\ 3,\ 1)\|}=\dfrac{3+3-1}{\sqrt{3}\ \sqrt{3^2+3^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}\ \sqrt{19}}$

$$\boldsymbol{\cos\alpha}=\frac{5}{\sqrt{3}\sqrt{19}}$$

Problema B.4:

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que $P(X) = 0{,}4$ y que $P(X \cap \overline{Y}) = 0{,}08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

a) Calcular $P(Y)$.

b) Calcular $P(X \cup Y)$.

c) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo https://youtu.be/KY16wgel438

a) B(n, p) = B(8, 0.6)

Se cumple que:

$$0.4 = P(X) = P(X \cap Y) + P(X \cap \overline{Y}) = P(X \cap Y) + 0.08 \Rightarrow P(X \cap Y) = 0.4 - 0.08 = 0.32\,.$$

Como *X*, *Y* son independientes, $0.32 = P(X \cap Y) = P(X)\ P(Y) = 0.4\ P(Y) \Rightarrow P(Y) = \dfrac{0.32}{0.4} = \dfrac{4}{5} = 0.8$

$$\boldsymbol{P(Y) = \frac{4}{5} = 0.8}$$

b) Se cumple que:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = 0.4 + 0.8 - 0.32 = 0.88\,.$$

$$\boldsymbol{P(X \cup Y) = 0.88}$$

c) Como $P(\{\text{éxito}\}) = P(\overline{X}) = 0.6$, $P(\{\text{fracaso}\}) = P(X) = 0.4$, será:

$$1 - P(\{\text{tener éxito 0 veces ó 1 vez}\}) = 1 - \left(P(\{\text{tener éxito 0 veces}\}) + P(\{\text{tener éxito 1 vez}\})\right) =$$

$$= 1 - \left(P(\{\text{tener éxito 0 veces}\}) + P(\{\text{tener éxito sólo en la repetición 1}\}) + \ldots + P(\{\text{tener éxito sólo en la 8}\})\right) =$$

$$= 1 - (0.4)^8 - 8\ (0.4)^7\ \ 0.6$$

La probabilidad de haber obtenido éxito dos veces es: **0.9915**

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

MURCIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2020 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + a^2y - z = 3-a \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o inversibles) y calcule sus matrices inversas.

b) **[1,5 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

3: **[2,5 p.]** De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 4 metros, determine las dimensiones de aquel cuya área es máxima. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

4: a) **[2 p.]** Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ y la recta vertical $x = 1$.

5: Se llama **mediana** de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

a) **[1,5 p.]** Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo de vértices $A = (-1,2,3)$, $B = (3,-4,1)$ y $C = (1,-4,5)$.

b) **[1 p.]** Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

El examen continúa por detrás

6: Considere la recta r y el plano π dados por las siguientes ecuaciones:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0} \qquad \text{y} \qquad \pi: x - 2y - z = 4.$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

b) **[0,5 p.]** En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso contrario, calcule la distancia entre la recta y el plano.

c) **[1 p.]** Determine el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

7: Una urna tiene 2 bolas blancas y 3 bolas rojas. Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que se obtienen al repetir nueve veces el siguiente experimento: se saca una bola de la urna y, después de anotar el color, se devuelve la bola a la urna.

a) **[1 p.]** ¿Qué tipo de distribución sigue dicha variable aleatoria y cuáles son sus parámetros?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que el número de bolas anotado sea menor o igual que 4?

8: En una determinada población, el 40 % de los individuos lee diariamente la prensa y el 75 % ve diariamente las noticias en la televisión. Además, el 25 % de los individuos lee la prensa y ve las noticias en la televisión diariamente.

a) **[0,5 p.]** ¿Son independientes los sucesos "leer diariamente la prensa" y "ver diariamente las noticias en la televisión"?

b) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo lea la prensa diariamente pero no vea las noticias en la televisión?

c) **[1 p.]** Si un individuo lee la prensa diariamente, ¿cuál es la probabilidad de que también vea las noticias en la televisión?

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II

EBAU2020 - **JULIO**

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

OBSERVACIONES GENERALES:

El corrector deberá ajustarse a los criterios de evaluación establecidos en este documento y en la reunión correspondiente. En ningún caso se podrá puntuar por encima de la valoración indicada en cada apartado. Se procurará que, en lo posible, los errores en un apartado no afecten a otros apartados.

Los errores simples de cálculo restarán 0,25 puntos. Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar puntuación 0 en ese apartado. Si un error simple ha llevado a un problema más sencillo se disminuirá la puntuación.

Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución serán valoradas con 0 puntos.

Se valorará el correcto uso del vocabulario y de la notación. El alumno puede elegir el método que considere más oportuno para la resolución de una cuestión pero, si esto demuestra la falta de comprensión de conocimientos básicos, la puntuación final puede ser menor que la indicada para dicha cuestión.

OBSERVACIONES PARTICULARES:

CUESTIÓN 1: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene solución única (SCD) para todo valor de a distinto de 1 y de -1 **[0,5 p.]**. Cálculo correcto de esa solución única cuando $a = 0$ **[0,5 p.]**.
Apartado b) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene infinitas soluciones (SCI) cuando $a = -1$ **[0,5 p.]**. Cálculo correcto de dicha solución dependiente de un parámetro **[0,5 p.]**.
Apartado c) Justificación correcta y razonada de que el sistema no tiene solución (SI) cuando $a = 1$ **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 2: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación de que A y B son matrices regulares **[0,5 p.]**. Cálculo correcto de sus matrices inversas **[0,5 p.]**.
Apartado b) Expresión correcta de X en términos A^{-1}, B^{-1} y $A^t - 3B$ **[0,5 p.]**. Cálculo correcto de la solución numérica **[1 p.]**.

CUESTIÓN 3: [2,5 p.] Cálculo correcto de la función a maximizar en función de una variable **[0,5 p.]**.
Cálculo correcto de la derivada de la función a maximizar **[0,5 p.]**.
Cálculo correcto del único punto crítico de la función a maximizar (y candidato a ser máximo) $x = 2\sqrt{2}$ **[0,25 p.]**.
Justificación de que se trata de un punto de máximo **[0,5 p.]**.
Cálculo de la dimensiones del triángulo: cateto$_1$ = cateto$_2$ = $2\sqrt{2}$ e hipotenusa = 4 **[0,5 p.]**.
Cálculo correcto del área máxima = $4u^2$ **[0,25 p.]**.

UNIVERSIDAD DE MURCIA Región de Murcia Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2020 - **JULIO**

CUESTIÓN 4: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida **[2 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto del área, estudiando el signo de la función $f(x)$ y aplicando la regla de Barrow **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 5: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto de las medianas: **[0,5 p.]** cada una de las tres medianas. Total **[1,5 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto del punto de corte de dos de las medianas **[0,5 p.]**. Comprobación de que la tercera mediana también pasa por ese punto **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 6: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación correcta y razonada de que la recta es paralela al plano **[1 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto de la distancia entre la recta y el plano **[0,5 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto y razonado del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π **[1 p.]**.

CUESTIÓN 7: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación de que se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 9$ y $p = 0,40$ **[1 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto de la media **[0,25 p.]** y de la desviación típica **[0,25 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto de la probabilidad pedida **[1 p.]**.

CUESTIÓN 8: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación de que los sucesos no son independientes **[0,5 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[1 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[1 p.]**.

CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema.1:

1º) Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+a^2y-z=3-a \\ x-y+az=1 \end{cases}$ en función del parámetro a.

$a)$ Determine para qué valores de a, el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a=0$.

$b)$ Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

$c)$ Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a^2 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & a^2 & -1 & 3-a \\ 1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a^2 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}=a^3+1-1+a^2-1-a=$$

$=a^3+a^2-a-1=0.$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & & -1 & -1 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Resolviendo por la regla de Ruffini, las raíces son: $x_1=1, x_2=x_3=-1$.

$\underline{a)\ Para \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ a\neq -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$

Si $\boldsymbol{a\neq 1}$ y $\boldsymbol{a\neq -1}$ el sistema es compatible determinado.

Para $a=0$ el sistema resulta $\begin{cases} x+y-z=4 \\ x-z=3 \\ x-y=1 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{3-1-4}{1-1-1}=\frac{-2}{-1}=2. \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-1-4+3+1}{-1}=\frac{-1}{-1}=1.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-4+3+3-1}{-1}=\frac{+1}{-1}=-1.$$

$Si\ \boldsymbol{a=0}: \boldsymbol{x=2, y=1, z=-1}$

$$b)\ Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=-1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para $a=-1$ el sistema resulta $\begin{cases}x+y-z=4\\ x+y-z=4\\ x-y-z=1\end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{matrix}x+y-z=4\\ x-y-z=1\end{matrix}\right\}$.

Para resolverlo se hace $z=\lambda$: $\left.\begin{matrix}x+y=4+\lambda\\ x-y=1+\lambda\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=5+2\lambda;\ \ x=\frac{5}{2}+\lambda.$

$x+y=4+\lambda;\ \frac{5}{2}+\lambda+y=4+\lambda;\ \ y=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}.$

$$\underline{Solución: x=\frac{5}{2}+\lambda, y=\frac{3}{2}, z=\lambda, \forall\lambda\in R.}$$

Si $a=-1$ el sistema es compatible indeterminado, de solución: $\boldsymbol{x=\frac{5}{2}+\lambda, y=\frac{3}{2}, z=\lambda}, \forall\lambda\in R$

$$c)\ Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix} = 1-4+2-4+2-1=-4\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}$$

Si $a=1$ el sistema es incompatible

Problema.2:

2º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$a)$ Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus matrices inversas.

$b)$ Resuelve la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución:

$a)$ Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \neq 0.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ las\ matrices\ A\ y\ B\ son\ regulares\ (o\ invertibles).}$$

$|A| = -1.$ $\quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$ $\quad Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ B^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}.$$

Se obtiene la inversa de B por el método de Gauss-Jordan.

$$(B|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 + F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 2F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$b)$ $AXB = A^t - 3B;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (A^t - 3B) \cdot B^{-1};$

$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot (A^t - 3B) \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (A^t - 3B) \cdot B^{-1}.$ (*)

$$A^t - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos anteriormente:

$$X = A^{-1} \cdot (A^t - 3B) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

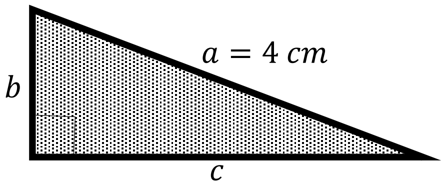
$$= \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}$$

Problema.3:

3º) De entre todos los triángulos rectángulo cuya hipotenusa mide 4 metros, determine las dimensiones de aquel cuya área es máxima. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

Solución:



Solución: Superficie: $S = \frac{b \cdot c}{2} \Rightarrow Máxima.$

Por el teorema de Pitágoras: $4^2 = b^2 + c^2$.

$c = \sqrt{16 - b^2}$. Sustituyendo en la superficie:

$S(b) = \frac{b \cdot \sqrt{16-b^2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16b^2 - b^4}$.

La superficie será máxima cuando se anule su primera derivada:

$S'(b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{32b - 4b^3}{2 \cdot \sqrt{16b^2 - b^4}} = 0 \Rightarrow 32b - 4b^3 = 0;\ \ 4b(8 - b^2) = 0 \Rightarrow$

$b_1 = 0;\ \ 8 - b^2 = 0;\ \ b = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow b_2 = -2\sqrt{2}, b_3 = 2\sqrt{2}$.

La solución $b = 0$ es para mínimo.

El valor negativo carece de sentido lógico, por lo cual: $b = 2\sqrt{2}$.

$c = \sqrt{16 - b^2} = \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$S = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot 2 = 4$.

$\underline{Triángulo\ rectángulo\ isósceles\ de\ catetos\ \boldsymbol{b = c = 2\sqrt{2}\ cm}\ y\ \boldsymbol{4\ cm^2}\ de\ área}$

Problema.4:

4º) a) Calcule la siguiente integral indefinida: $I=\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot dx$.

b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de la función $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ y la recta vertical $x=1$.

Solución:

a) $I=\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 1+\sqrt{x}=t \rightarrow \sqrt{x}=t-1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx=dt \Rightarrow dx=2(t-1) \cdot dt \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{t-1}{t} \cdot 2(t-1) \cdot dt=2 \cdot \int \frac{t^2-2t+1}{t} \cdot dt=2 \cdot \int\left(t-2+\frac{1}{t}\right) \cdot dt=$

$=2 \cdot\left(\frac{t^2}{2}-2t+Lt\right)+C=2 \cdot\left[\frac{(1+\sqrt{x})^2}{2}-2 \cdot(1+\sqrt{x})+L(1+\sqrt{x})\right]+C=$

$=1+2\sqrt{x}+x-4-4\sqrt{x}+2L(1+\sqrt{x})+C.$

$$\underline{I=\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot dx=x-2\sqrt{x}-3+2L(1+\sqrt{x})+C.}$$

$$I=\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot dx=x-2\sqrt{x}+2L|1+\sqrt{x}|+C$$

b) La función $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ corta al eje OX, únicamente, en el origen de coordenadas y, en el intervalo $(0,1)$ todas las ordenadas de la función son positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S=\int_0^1 f(x) \cdot dx=[x-2\sqrt{x}-3+2L(1+\sqrt{x})]_0^1=$$

$=[1-2\sqrt{1}-3+2L(1+\sqrt{1})]-[0-2\sqrt{0}-3+2L(1+\sqrt{0})]=$

$=-2-2+2L2+3-2L1=2L2-1-0.$

$$\underline{S=(\mathbf{2L2-1})\ \boldsymbol{u^2} \cong 0.38629\ u^2.}$$

Problema 5:

5º) Se llama *mediana* de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

a) Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo de vértices $A(-1,2,3)$, $B(3,-4,1)$ y $C(1,-4,5)$.

b) Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Solución:

a) Punto medio de $AB \Rightarrow M(1,-1,2)$.

Punto medio de $AC \Rightarrow N(0,-1,4)$.

Punto medio de $BC \Rightarrow P(2,-4,3)$.

Vector director de $r_{CM} \Rightarrow \overrightarrow{v_{CM}} = [M - C] = [(1,-1,2)-(1,-4,5)] = (0,3,-3)$.

Vector director de $r_{BN} \Rightarrow \overrightarrow{v_{BN}} = [N - B] = [(0,-1,4)-(3,-4,1)] = (-3,3,3)$.

Vector director de $r_{AP} \Rightarrow \overrightarrow{v_{AP}} = [P - A] = [(2,-4,3)-(-1,2,3)] = (3,-6,0)$.

Las ecuaciones paramétricas de las tres medianas son las siguientes:

$$\underline{r_{CM} \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -4+3\lambda \\ z = 5-3\lambda \end{cases}}. \quad \underline{r_{BN} \equiv \begin{cases} x = 3-3\mu \\ y = -4+3\mu \\ z = 1+3\mu \end{cases}}. \quad \underline{r_{AP} \equiv \begin{cases} x = -1+3\delta \\ y = 2-6\delta \\ z = 3 \end{cases}}.$$

b) Punto de corte de las medianas r_{CM} y r_{BN}: $\left.\begin{cases} 1 = 3-3\mu \\ -4+3\lambda = -4+3\mu \\ 5-3\lambda = 1+3\mu \end{cases}\right\}.$

$1 = 3-3\mu;\ \ 3\mu = 2 \Rightarrow \mu = \frac{2}{3}.$

$-4+3\lambda = -4+3\mu;\ \ -4+3\lambda = -4+2;\ \ 3\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}.$

Punto de corte de las medianas r_{CM} y $r_{BN} \Rightarrow D(1,-2,3)$.

Punto de corte de las medianas r_{CM} y r_{AP}: $\left.\begin{cases} 1 = -1+3\delta \\ -4+3\lambda = 2-6\delta \\ 5-3\lambda = 3 \end{cases}\right\}.$

$1 = -1+3\delta;\ \ 3\delta = 2 \Rightarrow \delta = \frac{2}{3}.$

$5-3\lambda = 3;\ \ 3\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}.$

Punto de corte de las medianas r_{CM} y $r_{AP} \Rightarrow D(1,-2,3)$.

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ las\ medianas\ se\ cortan\ en\ el\ punto\ D(1,-2,3).}$$

Problema 6:

6º) Considere la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y - z = 4$:

a) Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

b) En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso contrario, calcule la distancia entre la recta y el plano.

c) Determine el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Solución:

a) La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+1 = 2y-4 \\ z-1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - 2y = -5 \\ z = 1 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x - 2y = -5 \\ z = 1 \\ x - 2y - z = 4 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_2 = -2C_1\} \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 5 + 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos$$

b) La distancia entre r y π es la misma que la distancia de un punto de la recta r al plano π. Un punto de la recta r es $P(-1, 2, 1)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(-1, 2, 1)$ y al plano $\pi \equiv x - 2y - z - 4 = 0$:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-1-4-1-4|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|-10|}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = \underline{\frac{5\sqrt{6}}{3}\ unidades}.$$

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|-10|}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = \frac{\mathbf{5\sqrt{6}}}{\mathbf{3}}\ unidades = \mathbf{4.083}\ u.$$

$c)$ Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, -2, -1)$.

Un punto y un vector director de r son $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, 0)$ y $P(-1, 2, 1)$.

El plano β que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π tiene la siguiente expresión general: $\beta(P;\ \vec{n}, \overrightarrow{v_r}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

$-2(y-2) + (z-1) + 4(z-1) + (x+1) = 0;\ -2y + 4 + 5z - 5 + x + 1 = 0.$

$$\underline{\beta \equiv x - 2y + 5z = 0}.$$

Problema 7:

7º) Una urna tiene 2 bolas blancas y 3 bolas negras. Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que se obtienen al repetir nueve veces el siguiente experimento: se saca una bola de la urna y, después de anotar el color, se devuelve la bola a la urna.

a) ¿Qué tipo de distribución sigue dicha variable aleatoria y cuáles son sus parámetros?

b) ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de bolas anotado sea menor o igual que 4?

Solución:

----

a)

$\underline{Se\ trata\ de\ una\ distribución\ binomial\ de\ parámetros\ n = 9; p = \frac{2}{5} = 0.4\ y\ q = \frac{3}{5} = 0.6.}$

$$P(X = k) = \binom{9}{k} \cdot 0.4^k \cdot 0.6^{9-k} = \frac{9!}{k! \cdot 4(9-k)!} \cdot 0.4^k \cdot 0.6^{9-k}$$

b) La media y la desviación típica en una distribución binomial vienen dadas por las siguientes expresiones:

$\mu = n \cdot p = 9 \cdot 0.4 \Rightarrow \underline{\mu = 3.6}.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{9 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = \sqrt{2.16} \Rightarrow \underline{\sigma \cong 1.4697}.$

Media: $\mu = \mathbf{3.6}$. Desviación típica: $\sigma \cong \mathbf{1.47}$

c) $P = P(X \leq 4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) =$

$= \binom{9}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^9 + \binom{9}{1} \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^8 + \binom{9}{2} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^7 + \binom{9}{3} \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^6 +$

$+ \binom{9}{4} \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^5 = 1 \cdot 1 \cdot 0.0101 + 9 \cdot 0.4 \cdot 0.0168 + \frac{9!}{7! \cdot 2!} \cdot 0.16 \cdot 0.0278 +$

$+ \frac{9!}{6! \cdot 3!} \cdot 0.064 \cdot 0.0467 + \frac{9!}{5! \cdot 4!} \cdot 0.0256 \cdot 0.0778 =$

$= 0.0101 + 0.0605 + 36 \cdot 0.0045 + 84 \cdot 0.0030 + 126 \cdot 0.0020 =$

$= 0.0101 + 0.0605 + 0.1612 + 0.2508 + 0.2508 = \underline{0.7334}.$

$\boldsymbol{P(X \leq 4) = 0.7334}$

Problema 8:

8º) En una determinada población, el 40 % de los individuos lee diariamente la prensa y el 75 % ve diariamente las noticias en la televisión. Además, el 25 % de los individuos lee la prensa y ve las noticias en la televisión diariamente.

$a)$ ¿Son independientes los sucesos “leer diariamente la prensa” y “ver diariamente las noticias en la televisión”?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo lea la prensa diariamente pero no vea las noticias en la televisión?

$c)$ Si un individuo lee la prensa diariamente, ¿cuál es la probabilidad de que también vea las noticias de la televisión?

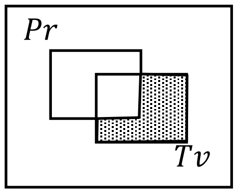
Solución:

$$Datos: P(pr) = 0{,}40; \;\; P(tv) = 0{,}75; \;\; P(pr \cap tv) = 0{,}25.$$

$a)$ Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(Pr) \cdot P(Tv) = 0.4 \cdot 0.75 = 0.3 \neq 0.25 = P(Pr \cap Tv).$$

$$\underline{Los\ sucesos\ (Pr)\ y\ (Tv)\ no\ son\ independientes}.$$



$b)$

$$P = P\left(Pr \cap \overline{Tv}\right) = P(Pr) - P(Pr \cap Tv) = 0.40 - 0.25 = \underline{0.15}.$$

La probabilidad de que un individuo lea la prensa diariamente pero no vea las noticias en la televisión es **0.15**.

$c)$

$$P(Tv|Pr) = \frac{P(Tv \cap Pr)}{P(Pr)} = \frac{0{,}25}{0{,}40} = \underline{0{,}625}.$$

Si un individuo lee la prensa diariamente, la probabilidad de que también vea las noticias de la televisión es **0.625**.

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II

EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - ay + a^2z = -1 \\ -ax + a^2y - a^3z = 2 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Compruebe que el sistema nunca tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones.

c) **[0,5 p.]** Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = 2$.

2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5 y A^6.

b) **[1 p.]** Calcule A^{2020}.

c) **[0,5 p.]** Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(3+x) - \ln(3-x)}{2x}$.

b) **[1,25 p.]** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})$.

4: a) **[2 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \ln(1+x^2)\,dx$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la integral definida $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$.

El examen continúa por detrás

UNIVERSIDAD DE MURCIA   Región de Murcia   Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II

EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

5: Considere los puntos $P=(5,6,1)$ y $Q=(-3,-2,5)$, y la recta

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{4}.$$

a) **[1,5 p.]** Determine el punto R de la recta r para el cual el área del triángulo $\widehat{PQR}$ es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.

b) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q y compruebe que dicha recta corta perpendicularmente a la recta r.

6: Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r:\begin{cases}5x+3y=19\\ y-5z=3\end{cases} \quad \text{y} \quad s:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{0}.$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,25 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

7: El peso de los recién nacidos, medido en kilogramos (kg), sigue una distribución normal de media $\mu=2,8$ kg y desviación típica σ. Se sabe que solo el $20,05\%$ de ellos pesa más de 3 kg.

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2,6 kg?

b) **[1 p.]** Calcule la desviación típica de esta distribución normal.

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,9 kg?

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

8: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas, y la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indica el dado.

a) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea verde?

b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

c) **[1 p.]** Si bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II

EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

OBSERVACIONES GENERALES:

El corrector deberá ajustarse a los criterios de evaluación establecidos en este documento y en la reunión correspondiente. En ningún caso se podrá puntuar por encima de la valoración indicada en cada apartado. Se procurará que, en lo posible, los errores en un apartado no afecten a otros apartados.

Los errores simples de cálculo restarán 0,1 puntos. Los errores graves de concepto restarán 0,25 puntos. Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar puntuación 0 en ese apartado. Si un error simple ha llevado a un problema más sencillo se disminuirá la puntuación.

Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución serán valoradas con 0 puntos.

Se valorará el correcto uso del vocabulario y de la notación. El alumno puede elegir el método que considere más oportuno para la resolución de una cuestión pero, si esto demuestra la falta de comprensión de conocimientos básicos, la puntuación final puede ser menor que la indicada para dicha cuestión.

OBSERVACIONES PARTICULARES:

CUESTIÓN 1: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación correcta y razonada de que el sistema nunca tiene solución única (nunca es SCD) **[1 p.]**.
Apartado b) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene infinitas soluciones (SCI) si y solo si $a = 2$ **[1 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto de dicha solución dependiente de un parámetro cuando $a = 2$ **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 2: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto de A^2 **[0,2 p.]**. Cálculo correcto de A^3 **[0,2 p.]**. Cálculo correcto de A^4 **[0,2 p.]**. Cálculo correcto de A^5 **[0,2 p.]**. Cálculo correcto de A^6 **[0,2 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto de A^{2020} **[1 p.]**.
Apartado c) Justificación de que la matriz A es regular **[0,25 p.]**. Cálculo correcto de su matriz inversa **[0,25 p.]**.

CUESTIÓN 3: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y justificado del límite cuando x tiende a 0, resolviendo la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ **[1,25 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto y justificado del límite cuando x tiende a $+\infty$, resolviendo la indeterminación del tipo $\infty - \infty$ **[1,25 p.]**.

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II

EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

CUESTIÓN 4: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida **[2 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto de la integral definida aplicando la regla de Barrow **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 5: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y justificado del punto R **[1,5 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto de la recta pedida **[0,5 p.]**. Comprobación de que dicha recta corta perpendicularmente a la recta r **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 6: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación correcta y razonada de que las dos rectas se cruzan en el espacio **[1,25 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto y razonado del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s **[1,25 p.]**.

CUESTIÓN 7: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y razonado de la probabilidad pedida **[0,5 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto y razonado de la desviación típica **[1 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto de la probabilidad pedida **[1 p.]**.

CUESTIÓN 8: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[0,75 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[0,75 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[1 p.]**.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-ay+a^2z=-1 \\ -ax+a^2y-a^3z=2 \end{cases}$ en función del parámetro a.

$a)$ Compruebe que el sistema nunca tiene solución única.

$b)$ Determine para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones.

$c)$ Si es posible, resuélvalo para el valor de $a=2$.

Solución:

$a)$ Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema tiene solución única cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e igual al número de incógnitas, que en este caso es tres.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ -a & a^2 & -a^3 \end{pmatrix}$, cuyo rango es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ -a & a^2 & -a^3 \end{vmatrix}=a^4+a^2-a^3-a^2-a^4+a^3=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ M<3, \forall a \in R.$ El sistema no puede ser compatible determinado.

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ el\ sistema\ nunca\ tiene\ solución\ única}.$

$b)$ La matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & a^2 & -1 \\ -a & a^2 & -a^3 & 2 \end{pmatrix}$, cuyo rango, en función del valor de a, es el siguiente:

$$M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & a^2 & -1 \\ -a & a^2 & -a^3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & -1 \\ -a & a^2 & 2 \end{vmatrix}=-2a+2a^2+a-2a^2+a^2-2=a^2-a-2=0;$$

$$a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2} \Rightarrow a_1=-1, a_2=2.$$

$$Para\ \begin{Bmatrix} a=-1 \\ a=2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.$$

$El\ sistema\ tiene\ infinitas\ soluciones\ para\ a=-1\ y\ para\ a=2.$

$Para\ a \neq -1\ y\ a \neq 2\ el\ sistema\ es\ incompatible$

$c)$ Para $a = 2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x-2y+4z=-1 \\ -2x+4y-8z=2 \end{array}\right\}$, equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x-2y+4z=-1 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2-\lambda \\ x-2y=-1-4\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y=2-\lambda \\ -x+2y=1+4\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3y = 3+3\lambda;\ \ y = 1+\lambda.$$

$x + y = 2 - \lambda;\ \ x = 2 - \lambda - 1 - \lambda \Rightarrow x = 1 - 2\lambda.$

$\underline{Solución: \boldsymbol{x = 1 - 2\lambda};\ \ \boldsymbol{y = 1 + \lambda};\ \ \boldsymbol{z = \lambda},\ \forall\lambda \in R.}$

Problema 2:

2º) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule las potencias sucesivas $A^2, A^3, A^4, A^5\ y\ A^6$

b) Calcule $A^{2\,020}$.

c) Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I}$.

$A^4 = A^3 \cdot A = -I \cdot A = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}$.

$A^5 = A^4 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$.

$A^6 = A^3 \cdot A^3 = -I \cdot (-I) = I^2 = \underline{I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I;\ A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};\ A^5 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};\ A^6 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{2\,020} = A^{6\cdot 336 + 4} = A^{6\cdot 336} \cdot A^4 = [A^6]^{336} \cdot A^4 = I^{336} \cdot A^4 = I \cdot A^4 = A^4$.

$$\underline{A^{2\,020} = A^4 = -A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}.$$

c) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible}$.

$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};\ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$.

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Problema 3:

3º) Calcule los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{L(3+x)-L(3-x)}{2x}.$

$b)\ \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right).$

Solución:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{L(3+x)-L(3-x)}{2x} = \frac{L3-L3}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3+x}-\frac{-1}{3-x}}{2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3+x}+\frac{1}{3-x}}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3-x+3+x}{9-x^2}}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{2(9-x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{9-x^2} = \frac{3}{9-0^2} = \frac{1}{3}.$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{L(3+x)-L(3-x)}{2x} = \frac{1}{3}.}}$$

$$b)\ \lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right) = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1-(x+2)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \frac{-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} = \frac{-1}{\infty+\infty} = \frac{-1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right) = 0.}}$$

Problema 4:

4º) a) Calcule la integral indefinida: $I = \int L(1+x^2) \cdot dx$.

b) Calcule la integral definida: $I = \int_0^1 L(1+x^2) \cdot dx$.

Solución:

$$a)\ I = \int L\,(1+x^2) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = L(1+x^2) \rightarrow du = \frac{2x \cdot dx}{1+x^2} \\ dx = dv \rightarrow v = x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot L(1+x^2) - \int x \cdot \frac{2x \cdot dx}{1+x^2} = x \cdot L(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2} \cdot dx =$$

$$= x \cdot L(1+x^2) - 2\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \cdot dx = x \cdot L(1+x^2) - 2\int \frac{1+x^2}{1+x^2} \cdot dx + 2\int \frac{1}{1+x^2} dx.$$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int L\,(1+x^2) \cdot dx = x \cdot L(1+x^2) - 2x + 2 \cdot arc\ tg\ x + C.}}$$

$$b)\qquad I = \int_0^1 L(1+x^2) \cdot dx = \left[x \cdot L(1+x^2) - 2x + 2 \cdot arc\ tg\ x\right]_0^1 =$$

$$= [1 \cdot L(1+1^2) - 2 \cdot 1 + 2 \cdot arc\ tg\ 1] - [0 \cdot L(1+0^2) - 0 + 2 \cdot arc\ tg\ 0] =$$

$$= L2 - 2 + 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 0 = L2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int_0^1 L(1+x^2) \cdot dx = L2 - 2 + \frac{\pi}{2} \cong 0.2639.}}$$

Problema 5:

5º) Considere los puntos $P(5,6,1)\ y\ Q(-3,-2,5)$ y la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4}$.

$a)$ Determine el punto R de la recta r para el cuál el área del triángulo PQR tiene el valor de $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

Observación: Hay dos puntos R que son solución del apartado $a)$; basta con encontrar uno de ellos.

$b)$ Calcule la ecuación de la recta s que pasa por los puntos P y Q y comprueba que dicha recta corta perpendicularmente a la recta r.

Solución:

$a)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de r es $R(\lambda, 1+\lambda, -1+4\lambda)$.

Los puntos P, Q y R determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = [(5,6,1) - (-3,-2,5)] = (8,8,-4)$.

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = [(\lambda, 1+\lambda, -1+4\lambda) - (-3,-2,5)] = (3+\lambda, 3+\lambda, -6+4\lambda)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 8 & -4 \\ 3+\lambda & 3+\lambda & -6+4\lambda \end{vmatrix} \right\| = 18\sqrt{2};$$

$$\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 3+\lambda & 3+\lambda & -6+4\lambda \end{vmatrix} \right\| = 9\sqrt{2};$$

$= |(-12+8\lambda)i - (3+\lambda)j + (6+2\lambda)k - (6+2\lambda)k + (3+\lambda)i + (12-8\lambda)j| =$

$= |(-9+9\lambda)i + (9-9\lambda)j| = 9 \cdot |(-1+\lambda)i + (1-\lambda)j| = 9\sqrt{2};$

$|(-1+\lambda)i + (1-\lambda)j| = \sqrt{2};\ \ \sqrt{(-1+\lambda)^2 + (1-\lambda)^2} = \sqrt{2};$

$1 - 2\lambda + \lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 2;\ \ 2\lambda^2 - 4\lambda = 0;\ \ \lambda^2 - 2\lambda = 0;\ \ \lambda(\lambda-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2.$ Cumplen la condición pedida los siguientes puntos:

$$\underline{\boldsymbol{R_1(0,1,-1)\ y\ R_2(2,3,7).}}$$

$b)$ $\overrightarrow{QP} = (8,8,-4) \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (2,2,-1)$.

Considerando, por ejemplo, el punto $Q(-3,-2,5)$, la expresión de la recta s dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{\boldsymbol{s \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{-1}.}}$$

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 4)$.

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (1, 1, 4) \cdot (2, 2, -1) = 2 + 2 - 4 = 0$.

Las rectas $r\ y\ s$ son perpendiculares.

Para verificar que las rectas se cortan consideramos, por ejemplo, el vector $\overrightarrow{QR_1}$, que tiene origen en un punto de s y extremo en un punto de r:

$\overrightarrow{QR_1} = \overrightarrow{OR_1} - \overrightarrow{OQ} = [(0, 1, -1) - (-3, -2, 5)] = (3, 3, -6)$.

Para que $r\ y\ s$ se corten es necesario que los vectores $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}\ y\ \overrightarrow{QR_1}$ sean linealmente dependiente (estén en un mismo plano), para lo cual es necesario que se anule el determinante que forman:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 24 - 3 - 24 + 3 + 12 = 0.$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ y\ son\ perpendiculares}$.

Problema 6:

6º) Considere las rectas $r \equiv \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ y - 5z = 3 \end{cases}$ $y\ s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{0}$.

a) Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

Solución:

a) La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ y - 5z = 3 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda;\ \ y = 3 + 5\lambda. \qquad 5x + 3y = 19;$$

$$5x + 9 + 15\lambda = 19;\ \ 5x = 10 - 15\lambda;\ \ x = 2 - 3\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(2, 3, 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-3, 5, 1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(1, 0, 5)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-1, 1, 0)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1, 0, 5) - (2, 3, 0)] = (-1, -3, 5)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 3 + 1 + 25 = 14 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3\ \Rightarrow\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

Las rectas r y s se cruzan.

b) El plano π que contiene a r y es paralelo a s tiene la siguiente expresión general:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ -(y-3) - 3z + 5z - (x-2) = 0;$$

$$-y + 3 + 2z - x + 2 = 0.$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv x + y - 2z - 5 = 0.}$$

Problema 7:

7º) El peso de los recién nacidos, medido en kg, sigue una distribución normal de media $\mu = 2.8$ kg y desviación típica σ. Se sabe que solo el 20.05 % de ellos pesa más de 3 kg.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2.6 kg?

b) Calcule la desviación típica de esta distribución normal.

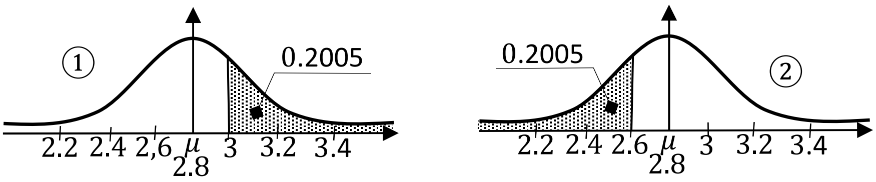
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2.9 kg?

Importante: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

Solución:

$a)\ Datos:\ \mu = 2.8;\ \ P = P(X > 3) = 0.2005.$

El gráfico adjunto facilita la comprensión del apartado.



La gráfica de la Normal es simétrica con respecto a la media μ, por lo cual las superficies sombreadas de las figuras ① y ② son iguales.

La gráfica de la Normal expresa la probabilidad $F(a) = P(Z \leq a)$, por lo cual:

$P = P(X > 3) = 1 - P(X \leq 2.6) = 1 - 0.2005 = \underline{0.7995}.$

La probabilidad de que un recién nacido pese más de 2.6 kg es de **0.7995**.

$b)\ X \to N(\mu;\ \sigma) = N(2.8;\ \sigma).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-2.8}{\sigma}.$

$$P = P(X > 3) = P\left(Z > \frac{3-2.8}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{0.2}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{0.2}{\sigma}\right) = 0.2005;$$

$$P\left(Z \leq \frac{0.2}{\sigma}\right) = 1 - 0.2005 = 0.7995.$$

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0,1)$ a 0.7995 le corresponde 0.84:

$$\frac{0.2}{\sigma} = 0.84 \ \Rightarrow\ \sigma = \frac{0.2}{0.84} = \underline{0.24}.$$

$$\sigma = \frac{20}{84} = \frac{5}{21} = \mathbf{0.24}$$

$$c)\ P = P(X \leq 2.9) = P\left(Z \leq \frac{2.9-2.8}{0.24}\right) = P\left(Z \leq \frac{0.1}{0.24}\right) = P(Z \leq 0.42) = \underline{0.6628}.$$

La probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2.9 kg es de **0.6628**.

Problema 8:

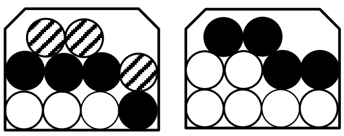
8º) Dos urnas A y B contienen bolas con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas blancas, 4 negras y 3 rayadas, la urna B contiene 6 bolas blancas y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indique el dado.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea rayada?

$c)$ Si la bola extraída es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Solución:



$a)$ $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};\ \ P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$

$$P=P(Bl)=P(A\to Bl)+P(B\to Bl)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10}=\frac{1}{10}+\frac{2}{5}=\frac{1+4}{10}=$$

$$=\frac{5}{10}=\underline{\frac{1}{2}=0.5}.$$

La probabilidad de que la bola sea blanca es **0.5**.

$b)$ $P=P(A\to Ra)+P(B\to Ra)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{0}{10}=\frac{1}{10}+0=\underline{\frac{1}{10}=0.1}.$

La probabilidad de que la bola sea rayada es **0.1**.

$c)$

$$P(B/Bl)=\frac{P(Bl\cap B)}{P(Bl)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}=\underline{\frac{4}{5}=0.8}.$$

Si la bola extraída es blanca, la probabilidad de que proceda de la urna B es **0.8**.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

NAVARRA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Álvaro Garmendia Antolín

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2019-2020
ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS II**

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a^2-2)x+2y+z=a+2 \\ (a^2-2)x+4y+(a+1)z=a+6 \\ (a^2-2)x+2y+(2-a)z=a+\sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) El plano π pasa por los puntos $P_1(2,0,5)$, $P_2(1,-2,2)$ y $P_3(3,-1,2)$. Una esfera con centro en $C(0,1,-3)$ toca al plano en un único punto. Calcula el radio de la esfera y el punto de intersección.

(2.5 puntos)

P3) Calcula las integrales indefinidas:

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx \qquad \text{(1.25 puntos)}$$

$$\int e^{2x}\sin(2x+1)\,dx \qquad \text{(1.25 punto2)}$$

P4) Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}+\ln\dfrac{x^2+2}{3} & x<1 \\ \dfrac{x^2}{3} & x\geq 1 \end{cases}$.

a) Demuestra que la función es derivable en todo $\mathbb{R}$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha\in(0,2)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Enuncia el (los) resultado(s) teórico(s) utilizado(s) y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P5) Sabiendo que la inversa de una matriz A es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la inversa de la matriz $A \cdot B$ es $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determina la matriz B.

(2.5 puntos)

P6) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x + 3z - 7 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$$

(2.5 puntos)

P7) Calcula los extremos absolutos de la función $f(x) = e^{\pi x} \cdot \sin \pi x$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P8) Sean las funciones $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ y $g(x) = \sqrt{x-2} + 2$. Encuentra los dos puntos en los que se cortan sus gráficas, y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2019-2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Criterios de corrección y calificación

Criterios generales

La duración de la prueba es de 90 minutos. Se calificará de 0 a 10 puntos, redondeando a cuartos de punto.

- Se debe responder **exclusivamente** a cuatro de los problemas planteados. Si alguien responde a más de cuatro, solo se sumarán las cuatro peores puntuaciones.

- Se tendrá en cuenta el planteamiento seguido para la resolución del problema y la claridad en la exposición. Si es pertinente, se valorará la referencia a los resultados teóricos usados.

- Para la penalización de los errores en los cálculos; se tendrá en cuenta:
    - si son consecuencia de no haber seguido el procedimiento más adecuado.
    - si reflejan fallos de concepto.
    - si producen simplificaciones relevantes.
    - si ocurren con reiteración.

Criterios específicos

P1) Se valorará con 1.5 puntos la discusión completa, incluyendo la mención del teorema, 0,5 puntos la solución del caso compatible determinado y 0,5 puntos la del caso compatible indeterminado.

P4) En el apartado (b) se valorará sobre 0.75 puntos el enunciado del (de los) resultado(s) teórico(s) requerido(s). Se valorará sobre 1 punto la justificación de su uso.

P7) En el apartado (b) se valorará sobre 0.5 puntos el enunciado del (de los) resultado(s) teórico(s) requerido(s). Se valorará sobre 1 punto la justificación de su uso.

P8) Se valorará con 0.5 puntos la obtención de los puntos de corte, con 0,5 puntos el dibujo de la gráfica (aunque no sea muy detallado) y con 1,5 puntos el cálculo del área. Si la resolución es correcta, se puede obtener la máxima puntuación aunque no incluya dibujo.

Problema P1:

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

$$\begin{cases} (a+1)x+(a^2+a)y=2 \\ (-a-1)x-a^2y=0 \\ ay+(a^2-1)z=3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso

Soluciones:

Para discutir el sistema calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada.

$$C=\begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 \\ -a-1 & -a^2 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 \end{pmatrix}; A=\begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 & 2 \\ -a-1 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 & 3-a \end{pmatrix};$$

El determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$|C|=(a^2-1)\begin{vmatrix} a+1 & a^2+a \\ -a-1 & -a^2 \end{vmatrix}=(a^2-1)((a+1)(-a^2)—a-1(a^2+a)=a(a+1)^2(a-1)$$

Por lo tanto, el rango de la matriz C es 3 si a es distinto de 0, 1 o –1, así como el rango de la matriz ampliada A, por lo que el sistema es compatible determinado según el Teorema de Rouché Frobenius. Podemos resolverlo por Gauss o por Cramer, o incluso directamente resolviendo el sistema de dos ecuaciones en x e y, y sustituyendo en z; y se obtiene:

Si $a \neq 0$, $a \neq 1$; $a \neq -1$, el sistema es compatible determinado. $x=\frac{-2a}{a+1}$; $y=\frac{2}{a}$; $z=\frac{-1}{a+1}$

Para $a = 0$: $C(a=0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; A(a=0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix};$

El rango de la matriz ampliada es 3, y el rango de la matriz de los coeficientes es 2, luego el sistema es incompatible.

Si $a = 0$ el sistema es incompatible.

Para $a = 1$: $C(a=1)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A(a=1)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2, y el rango de la matriz ampliada también es 2, luego el sistema es compatible, pero indeterminado al ser los rangos menores que el número de incógnitas.

$$\begin{cases} 2x+2y=2 \\ -2x-y=0 \\ y=2 \end{cases} \to (F1=F1-F2)\begin{cases} y=2 \\ -2x-y=0 \\ z=t \end{cases} \to \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \\ z=t, \forall t \in R \end{cases} \to$$

Para $a=1 \to x=-1; y=2; z=t, \forall t \in R$. Sistema compatible indeterminado

Para $a = -1$: $C(a=-1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; A(a=-1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix};$

El rango de la matriz de los coeficientes es 1, y el rango de la matriz ampliada es 2, luego el sistema es incompatible.

Si $a = -1$, el sistema es incompatible.

Problema P2:

Calcula la ecuación continua de la recta r sabiendo que corta a la recta $\boldsymbol{s}$: $\begin{cases} \boldsymbol{3x+y-z-7=0} \\ \boldsymbol{x+y-5=0} \end{cases}$, *es paralela al plano de ecuación* π*: 2x – y + 3z – 6 = 0, y pasa por el punto* P*(–1, 3, 1)*

Soluciones:

En primer lugar, vamos a buscar un plano que contenga a la recta r. Será paralelo al plano π. Todos los planos paralelos a π tienen de ecuación: *2x – y + 3z = D*. Imponemos que pase por el punto *P. 2(–1) – 3 + 3(1) = D = –2.* Luego el plano es*: 2x – y + 3z + 2 = 0.*

Buscamos ahora un punto que pertenezca al nuevo plano y a la recta s. Para ello resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 2x-y+3z=-2 \\ 3x+y-z=7 \\ x+y=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-(5-x)+3z=-2 \\ 3x+(5-x)-z=7 \\ y=5-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+3z=3 \\ 2x-z=2 \\ y=5-x \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x+3(2x-2)=3 \\ z=2x-2 \\ y=5-x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9x=9 \\ z=2x-2 \\ y=5-x \end{cases} \rightarrow x=1; y=4; z=0,$$

El punto A (1, 4, 0) debe ser un punto de la recta pedida, que también debe contener al punto P.

Su vector de dirección es $\overrightarrow{PA}=(1-(-1),4-3,0-1)=(2,1,-1)$

Como sabemos que el punto P es la recta y nos piden su ecuación continua, dicha ecuación es:

$$r: \frac{x-(-1)}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-1}$$

$$r: \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-1}$$

Problema P3:

Calcula los siguientes límites

$$a)\ \lim_{x\to 1}(2+\sin\frac{3\pi x}{2})^{\frac{1}{x^2-x}}$$

$$b)\ \lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7})$$

Soluciones:

$$a)\ E=\lim_{x\to 1}(2+\sin\frac{3\pi x}{2})^{\frac{1}{x^2-x}}$$

Queremos saber si es un límite tipo e, para ello calculamos el límite de la base y vemos si tiende a 1, y el límite del exponente para saber si tiende a infinito.

$$\sin\frac{3\pi(1)}{2}=-1\to\lim_{x\to 1}(2+\sin\frac{3\pi x}{2})\quad=1$$

$$\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x^2-x})=\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x(x-1)})=\infty$$

Es un límite tipo e. Aplicamos logaritmos neperianos:

$$E=\lim_{x\to 1}(2+\sin\frac{3\pi x}{2})^{\frac{1}{x^2-x}}\to Ln(E)=\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x^2-x}Ln\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right))$$

Aplicamos la regla de L´Hôpital pues el numerador tiende a $Ln(1)$ = 0, y el denominador tiende también a 0.

$$Ln(E)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{Ln\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)}{x^2-x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\cos\frac{3\pi x}{2}\cdot\frac{3\pi}{2}}{\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)}}{2x-1}=0$$

Pues $\cos\frac{3\pi x}{2}\cdot\frac{3\pi}{2}\to 0$. Luego $Ln(E)=0\to E=e^0=1$

$$\lim_{x\to 1}(2+\sin\frac{3\pi x}{2})^{\frac{1}{x^2-x}}=1$$

b) Para calcular $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7})$ racionalizamos. Multiplicamos numerador y denominador por la conjugada del numerador:

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7})=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7})(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7})}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x^4-x^2+1)-(x^4-7)}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}}=$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2+8}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}}$$

Los términos de mayor grado del numerador y del denominador son x^2. Miramos sus coeficientes que son – 1 en el numerador y 1 + 1 = 2, en el denominador. Luego el límite vale – 1/2.

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7})=\frac{-1}{2}$$

Problema P4:

Sea la función $\boldsymbol{f(x) = \left(1 + sin\frac{\pi x}{2}\right)^x}$

a. *Demuestra que la función es continua en el intervalo [1, 2]*
b. *Demuestra que existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso.*

Soluciones:

a) Es una función exponencial. La base, formada por una función trigonométrica es siempre continua, y el exponente, x, también. Veamos el signo en los extremos del intervalo:

$$f(1) = \left(1 + sin\frac{\pi}{2}\right)^1 = 1 + 1 = 2 > 0$$

$$f(2) = \left(1 + sin\frac{\pi 2}{2}\right)^2 = (1 + sin\pi)^2 = (1 + 0)^2 = 1 > 0$$

La base se anula en $1 + sin\frac{\pi x}{2} = 0 \to sin\frac{\pi x}{2} = -1 \to x = -1$ que no pertenece al intervalo [1, 2].

La función es continua en [1, 2].

b) El Teorema de Bolzano dice que: si una función es continua en un intervalo cerrado y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces existe un valor en el interior del intervalo en el que la función se anula.

Nos piden que se lo apliquemos a la función derivada. Así que calculamos la derivada. Utilizamos derivación logarítmica:

$$f(x) = \left(1 + sin\frac{\pi x}{2}\right)^x \to Ln(f(x)) = Ln\left(\left(1 + sin\frac{\pi x}{2}\right)^x\right) = x \cdot Ln\left(1 + sin\frac{\pi x}{2}\right)$$

Derivamos:

$$\left(Ln(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot Ln\left(1 + \sin\frac{\pi x}{2}\right) + x \cdot \frac{cos\frac{\pi x}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + sin\frac{\pi x}{2}} \to$$

$$f'(x) = f(x)(1 \cdot Ln\left(1 + \sin\frac{\pi x}{2}\right) + x \cdot \frac{cos\frac{\pi x}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + sin\frac{\pi x}{2}})$$

Analizamos la continuidad de esta función derivada.

Ya hemos visto que $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado [1, 2].

La función $Ln\left(1 + sin\frac{\pi x}{2}\right)$ también es continua, pues ya hemos visto que $1 + sin\frac{\pi x}{2}$ es siempre positiva en el intervalo y se anula para $x = -1$, que no pertenece al intervalo. Por el mismo motivo la función $x \cdot \frac{cos\frac{\pi x}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + sin\frac{\pi x}{2}}$ es continua pues está formada por funciones trigonométricas continuas, y podría no serlo en los valores que anulan al denominador, que ya hemos visto que es $x = -1$, que no pertenece al intervalo. $y = f'(x)$ es por tanto una función continua en el intervalo cerrado [1, 2]. Veamos que signo tiene en los extremos del intervalo:

$$f'(1) = f(1)\left(Ln\left(1 + sin\frac{\pi 1}{2}\right) + 1 \cdot \frac{cos\frac{\pi 1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + sin\frac{\pi 1}{2}}\right) = 2(Ln(2) + 0) > 0$$

$$f'(2) = f(2)\left(Ln\left(1 + sin\frac{\pi 2}{2}\right) + 2 \cdot \frac{cos\frac{\pi 2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}{1 + sin\frac{\pi 2}{2}}\right) = 1(Ln(1) + 2\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -\pi < 0$$

Luego por el Teorema de Bolzano sabemos que existe un $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

Problema P5:

Sean A y B dos matrices de tamaño 3 x 3 tales que $|A| = |B| = 1/2$. Calcula $|C|$ *teniendo en cuenta que la matriz C es la siguiente:* $C = (2\cdot A^t \cdot B^{-1})^2$

Soluciones:

Como las matrices son cuadradas y $|A| = |B| = 1/2$, sabemos que $|A^t|$ es igual al determinante de A, y que el determinante de la matriz inversa es 2. Pero $|\ 2\cdot A^t\ |$ al multiplicar una matriz por un número se multiplican todas sus filas:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

Por lo que $|\ 2\cdot A^t\ | = 2^3 = 8$.

Por tanto:

$|C| = |\ (2\cdot A^t \cdot B^{-1})^2| = (8 \cdot (1/2) \cdot 2)^2 = 64$.

$|C| = 64$

Problema P6:

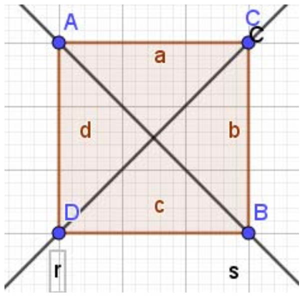
Los puntos A (–1, 2, 1) y B (2, 5, 1) son dos vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta de ecuación: $\boldsymbol{r}$: $\frac{x}{-1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{-4}$.

Soluciones:

Escribimos la ecuación continua de la recta en forma paramétrica: r: $\begin{cases} x=-t \\ y=4+t \\ z=-1-4t \end{cases}$ de punto (0, 4, -1) y vector de dirección $\vec{v}=(-1,1,-4)$.

La recta que contiene a los puntos dados tiene como vector director: $\overrightarrow{AB}=(2-(-1),5-2,1-1)=(3,3,0)\rightarrow\vec{w}=(1,1,0)$. Va a ser el vector director de la recta s. Observamos que ambas rectas no son paralelas. Nos interesa saber si se cortan (y son coplanarias) o se cruzan. Para ello determinamos un vector que tenga su origen en la recta r, (0, 4, -1) y su extremo en un punto de la recta s: A *(–1, 2, 1):* $\vec{u}=(0-(-1),4-2,0-1)=(1,2,-1)$ y analizamos la posición relativa de esos tres vectores. Si el rango de la matriz de las coordenadas de los tres vectores es distinto de cero, entonces se cruzan, si es cero, son coplanarios.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=1-8+0-(-4+0-1)=8-8=0$$



Las rectas r y s son coplanarias.

Buscamos un punto $C\ (-t,4+t,-1-4t)$ de la recta r, de tal forma que el vector $\overrightarrow{AC}$ sea perpendicular al vector $\overrightarrow{CB}$.

$$\overrightarrow{AC}=(-t-(-1),4+t-2,-1-4t-1)=(-t+1,2+t,-2-4t)$$

$$\overrightarrow{CB}=\big(2-(-t),5-(4+t),1-(-1-4t)\big)=(2+t,1-t,2+4t)$$

Imponemos que sean perpendiculares, es decir, que su producto escala sea cero:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}&=(-t+1)\cdot\ (2+t)+(2+t)\cdot(1-t)+(-2-4t)\cdot(2+4t)\\&=(-2t-t^2+2+t)+(2-2t+t-t^2)+(-4-8t-8t-16t^2)\\&=-18t^2-18t+0=0\ \ \rightarrow\end{aligned}$$

$18t\,(t+1)=0$. El parámetro puede valer 0 o –1.

Si $t=0$, entonces $C=\ (0,4,-1)$, y si $t=-1$, $C=\ (1,\ 3,\ 3)$.

El cuadrado pedido tiene de vértices*: A (–1, 2, 1); B (2, 5, 1); C* $=\ (0,4,-1)$ y $D=\ (1,\ 3,\ 3)$.

El cuadrado pedido tiene de vértices: A (–1, 2, 1); B (2, 5, 1); $C=\ (0,4,-1)$ y $D=\ (1,\ 3,\ 3)$.

Hemos impuesto que los lados son perpendiculares, pero debemos comprobar que efectivamente es un cuadrado y no un rectángulo, que todos los lados son iguales:

$\overrightarrow{AC}=(0-(-1),4-2,-1-1)=(1,2,-2);\ |\overrightarrow{AC}|^2=1+4+4=9;$

$$\overrightarrow{AD}=(1-(-1),3-2,3-1)=(2,1,2);\ |\overrightarrow{AD}|^2=4+1+4=9;$$

$$\overrightarrow{CB}=(2,1,2);\ |\overrightarrow{CB}|^2=9;\ \overrightarrow{DB}=(2-1,5-3,1-3)=(1,2,-2);\ |\overrightarrow{DB}|^2=9.$$

También podríamos haber comprobado que las diagonales r y s son perpendiculares

Problema P7:

Sea la función $f(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} Ln(x^2 - x + 2)$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo [–1, 0]
b) Demuestra que existe α ∈ (–1, 0) tal que $f'(\alpha) = -Ln2$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Soluciones:

a) Es el producto de una función exponencial y de una función logarítmica. La función exponencial es composición de una función polinómica y una función seno, ambas continuas en toda la recta real; La función logaritmo no sería continua para valores negativos o cero. $x^2 - x + 2$ no se anula, es siempre positiva, luego la función $Ln(x^2 - x + 2)$ es también continua en toda la recta real, y por tanto en el intervalo [–1, 0].

La función es continua en [-1, 0].

b) El Teorema del Valor Medio de Lagrange dice: Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto entonces existe α ∈ (a, b) tal que $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Veamos si la función es continua en [–1, 0] y derivable en (–1, 0) para poder aplicar el Teorema de Lagrange:

$$f(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} Ln(x^2 - x + 2) \to$$

$$f'(x) = \left((x+3)^{\sin(\pi x)}\right)' \cdot Ln(x^2 - x + 2) + (x+3)^{\sin(\pi x)} \cdot \frac{2x-1}{Ln(x^2 - x + 2)}$$

Utilizamos derivación logarítmica:

$$g(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} \to Ln\big(g(x)\big) = \sin(\pi x) \cdot Ln(x+3) \to$$

$$\Big(Ln\big(g(x)\big)\Big)' = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\pi\cos(\pi x) \cdot Ln(x+3) + \sin(\pi x) \cdot \frac{1}{Ln(x+3)}}{\sin(\pi x) \cdot Ln(x+3)} \to$$

$$g'(x) = g(x) \cdot \frac{\pi\cos(\pi x) \cdot Ln(x+3) + \sin(\pi x) \cdot \frac{1}{Ln(x+3)}}{\sin(\pi x) \cdot Ln(x+3)} \to$$

$$f'(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} \frac{\pi\cos(\pi x) \cdot Ln(x+3) + \sin(\pi x) \cdot \frac{1}{Ln(x+3)}}{\sin(\pi x) \cdot Ln(x+3)} \cdot Ln(x^2 - x + 2) + (x+3)^{\sin(\pi x)} \cdot \frac{2x-1}{Ln(x^2 - x + 2)} = (x+3)^{\sin(\pi x)} \pi\tan(\pi x) + \frac{1}{(Ln(x+3))^2} \cdot Ln(x^2 - x + 2)$$

La función es derivable en (–1, 0)

$$f(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} Ln(x^2 - x + 2) \to$$

$$f(-1) = (-1+3)^{\sin(-\pi)} Ln(1+1+2) = (2)^0 Ln(4) = Ln(4)$$

$$f(0) = (3)^{\sin(\pi 0)} Ln(2) = Ln(2)$$

Entonces existe α ∈ (–1, 0) tal que $f'(\alpha) = \frac{Ln(2)-Ln(4)}{0-(-1)} = \frac{Ln(2)-Ln(4)}{1} = Ln\frac{2}{4} = Ln\left(\frac{1}{2}\right) = -Ln(2)$

Luego por el Teorema del Valor Medio sabemos que existe un α ∈ (–1, 0) tal que $f'(\alpha) = -Ln(2)$.

Problema P8:

Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas funciones:

$$\boldsymbol{f(x) = sin\ (\pi x)} \text{ y } \boldsymbol{g(x) = |x^2 - x|}$$

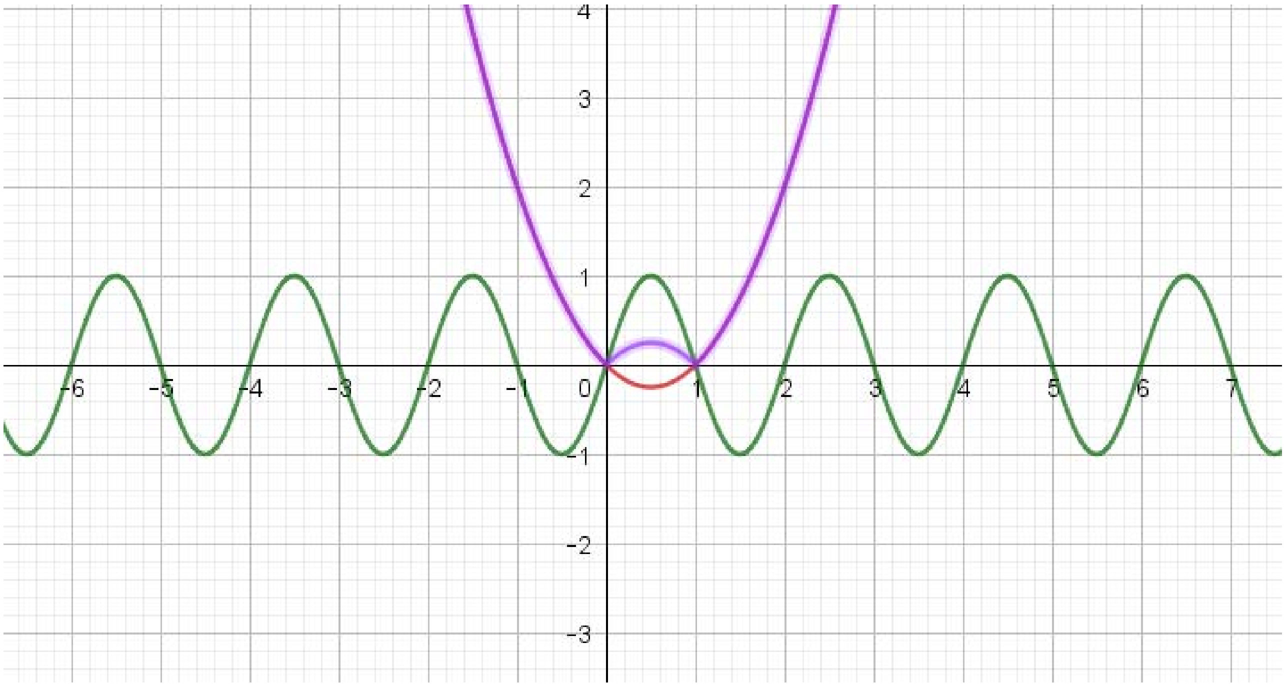
Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Soluciones:

La función $y = x^2 - x$ es una parábola que corta al eje de abscisas en (0, 0) y (1, 0), con vértice (1/2, 1).

Por tanto, es positiva en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$; y negativa en (0, 1)

Representamos ambas funciones, que se cortan en los puntos (0, 0) y (1, 0):



El área de la región viene dada por la integral:

$$\left|\int_0^1 (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_0^1 (\sin\ (\pi x) - |x^2 - x|)dx\right| = \left|\int_0^1 (sin\ (\pi x) - (-x^2 + x))dx\right|$$

$$= \left|\int_0^1 (sin\ (\pi x) + x^2 - x)dx\right| = \left|\left[\frac{\cos\ (\pi x)}{\pi} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1\right|$$

$$= \left|\left(\frac{\cos\ (\pi)}{\pi} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\cos(0)}{\pi} + 0\right)\right| = \left|-\frac{1}{\pi} - \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi}\right| = \left|\frac{-2}{\pi} - \frac{1}{6}\right| \cong 0.803$$

El área de la región encerrada es de **0.803 u²**.

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2019-2020
ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS II**

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a^2-2)x+2y+z=a+2 \\ (a^2-2)x+4y+(a+1)z=a+6 \\ (a^2-2)x+2y+(2-a)z=a+\sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) El plano π pasa por los puntos $P_1(2,0,5)$, $P_2(1,-2,2)$ y $P_3(3,-1,2)$. Una esfera con centro en $C(0,1,-3)$ toca al plano en un único punto. Calcula el radio de la esfera y el punto de intersección.

(2.5 puntos)

P3) Calcula las integrales indefinidas:

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx \qquad \text{(1.25 puntos)}$$

$$\int e^{2x}\sin(2x+1)\,dx \qquad \text{(1.25 punto2)}$$

P4) Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}+\ln\dfrac{x^2+2}{3} & x<1 \\ \dfrac{x^2}{3} & x\geq 1 \end{cases}$.

a) Demuestra que la función es derivable en todo $\mathbb{R}$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha\in(0,2)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Enuncia el (los) resultado(s) teórico(s) utilizado(s) y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P5) Sabiendo que la inversa de una matriz A es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la inversa de la matriz $A \cdot B$ es $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determina la matriz B.

(2.5 puntos)

P6) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x + 3z - 7 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$$

(2.5 puntos)

P7) Calcula los extremos absolutos de la función $f(x) = e^{\pi x} \cdot \sin \pi x$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right[$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P8) Sean las funciones $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ y $g(x) = \sqrt{x-2} + 2$. Encuentra los dos puntos en los que se cortan sus gráficas, y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2019-2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Criterios de corrección y calificación

Criterios generales

La duración de la prueba es de 90 minutos. Se calificará de 0 a 10 puntos, redondeando a cuartos de punto.

- Se debe responder **exclusivamente** a cuatro de los problemas planteados. Si alguien responde a más de cuatro, solo se sumarán las cuatro peores puntuaciones.
- Se tendrá en cuenta el planteamiento seguido para la resolución del problema y la claridad en la exposición. Si es pertinente, se valorará la referencia a los resultados teóricos usados.
- Para la penalización de los errores en los cálculos, se tendrá en cuenta:
    - si son consecuencia de no haber seguido el procedimiento más adecuado.
    - si reflejan fallos de concepto.
    - si producen simplificaciones relevantes.
    - si ocurren con reiteración.

Criterios específicos

P1) Se valorará con 1.5 puntos la discusión completa, incluyendo la mención del teorema, 0,5 puntos la solución del caso compatible determinado y 0,5 puntos la del caso compatible indeterminado.

P4) En el apartado (a) se valorará sobre 0.5 puntos el estudio de la continuidad y con 0.5 puntos el de la derivabilidad. En el apartado (b) se valorará sobre 0.75 puntos el enunciado del (de los) resultado(s) teórico(s) requerido(s). Se valorará sobre 0.75 puntos la justificación de su uso.

P7) Se valorará sobre 1 punto el enunciado del resultado teórico requerido. Se valorará sobre 1.5 puntos la justificación de su uso.

P8) Se valorará con 0.5 puntos la obtención de los puntos de corte, con 0,5 puntos el dibujo de la gráfica (aunque no sea muy detallado) y con 1,5 puntos el cálculo del área. Si la resolución es correcta, se puede obtener la máxima puntuación aunque no incluya dibujo.

Problema P1:

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α *y resuélvelo en los casos en que es compatible*

$$\begin{cases} (a^2-2)x+2y+z=a+2 \\ (a^2-2)x+4y+(a+1)z=a+6 \\ (a^2-2)x+2y+(2-a)z=a+\sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Soluciones:

Para discutir el sistema calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada.

$$C=\begin{pmatrix} (a^2-2) & 2 & 1 \\ (a^2-2) & 4 & a+1 \\ (a^2-2) & 2 & 2-a \end{pmatrix}; A=\begin{pmatrix} (a^2-2) & 2 & 1 & a+2 \\ (a^2-2) & 4 & a+1 & a+6 \\ (a^2-2) & 2 & 2-a & a+\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

El determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$|C|=(a^2-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & a+1 \\ 1 & 2 & 2-a \end{vmatrix}=2(a^2-2)(1-a)$$

Luego el rango de la matriz de los coeficientes es 3 si a es distinto de 1, de $+\sqrt{2}$ y de $-\sqrt{2}$. El rango de la matriz ampliada en esos casos no puede ser mayor de 3, luego el sistema es compatible determinado. Podemos entonces resolver el sistema por Gauss o por Cramer, y se obtiene:

$$\begin{pmatrix} (a^2-2) & 2 & 1 & a+2 \\ (a^2-2) & 4 & a+1 & a+6 \\ (a^2-2) & 2 & 2-a & a+\sqrt{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (a^2-2) & 2 & 1 & a+2 \\ 0 & 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 1-a & \sqrt{2}-2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{cases} (a^2-2)x+2y+\frac{\sqrt{2}-2}{1-a}=a+2 \\ 2y+a\frac{\sqrt{2}-2}{1-a}=4 \\ z=\frac{\sqrt{2}-2}{1-a} \end{cases} \to \begin{cases} x=\frac{1}{a+\sqrt{2}} \\ y=\frac{4-2a-a\sqrt{2}}{2(1-a)};; \\ z=\frac{\sqrt{2}-2}{1-a} \end{cases}$$

$$Si\ a\neq 1, a\neq +\sqrt{2}, a\neq -\sqrt{2} \to x=\frac{1}{a+\sqrt{2}};\ y=\frac{4-2a-a\sqrt{2}}{2(1-a)}; z=\frac{\sqrt{2}-2}{1-a}.$$

El sistema es compatible y determinado.

Si $a=1$, entonces la matriz ampliada es: $A(1)=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 1 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$; La segunda y la tercera columna son dependientes. Calculamos el determinante: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}=2-\sqrt{2}\neq 0$; por lo que su rango es 3, y el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Si a = 1, el sistema es incompatible

Si $a = +\sqrt{2}$, calculamos el rango de la matriz ampliada: $A(\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & \sqrt{2}+2 \\ 0 & 4 & \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+6 \\ 0 & 2 & 2-\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & \sqrt{2}+2 \\ 4 & \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+6 \\ 2 & 2-\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$, por lo que el rango es 2, igual al rango de la matriz de los coeficientes y menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado.

El sistema queda:

$$\begin{cases} 2y + z = \sqrt{2} + 2 \\ 4y + (\sqrt{2}+1)z = \sqrt{2} + 6 \\ 2y + (2-\sqrt{2})z = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Despejamos z de la primera ecuación y sustituimos o en la segunda o en la tercera y obtenemos:

$$\begin{cases} 2y + z = \sqrt{2} + 2 \\ 4y + (\sqrt{2}+1)z = \sqrt{2} + 6 \\ 2y + (2-\sqrt{2})z = 2\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{2} + 2 - 2y \\ 4y + (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2-2y) = \sqrt{2} + 6 \\ 2y + (2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+2-2y) = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{2} + 2 - 2y \\ 4y + (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2-2y) = \sqrt{2} + 6 \\ 2y + (2\sqrt{2} + 4 - 4y - 2 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}y) = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{2} + 2 - 2y = \sqrt{2} + 2 - 2 = \sqrt{2} \\ 4y + (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2-2y) = \sqrt{2} + 6 \\ -2y + 2 + 2\sqrt{2}y = 2\sqrt{2} \rightarrow y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = \sqrt{2} \end{cases}$$

Si $a = +\sqrt{2}, \rightarrow x = t;\ y = 1; z = \sqrt{2}$. El sistema es compatible e indeterminado.

Si $a = -\sqrt{2}$, calculamos el rango de la matriz ampliada: $A(-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -\sqrt{2}+2 \\ 0 & 4 & 1-\sqrt{2} & -\sqrt{2}+6 \\ 0 & 2 & 2+\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -\sqrt{2}+2 \\ 4 & -\sqrt{2}+1 & -\sqrt{2}+6 \\ 2 & 2+\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -8 - 4\sqrt{2} \neq 0$, por lo que el rango es 3, distinto del rango de la matriz de los coeficientes, luego el sistema es incompatible.

Si $a = -\sqrt{2}$, el sistema es incompatible.

Problema P2:

El plano $\boldsymbol{\pi}$ *pasa por los puntos P1 (2, 0, 5), P2 (1, -2, 2) y P3 (3, -1, 2). Una esfera de centro C (0, 1, -3) toca al plano en un único punto. Calcula el radio de la esfera y el punto de intersección.*

Soluciones:

Tres puntos determinan un plano, luego podemos encontrar la ecuación de dicho plano: $ax + by + cz = d$, por ejemplo, resolviendo el sistema obtenido de imponer que pase por los tres puntos. O buscando dos vectores de orientación del plano y un punto.

Como la esfera toca al plano en un único punto, significa que el plano es tangente a la esfera, por lo que el vector normal al plano que pasa por el centro de la esfera nos proporcionará el radio.

Vectores de orientación del plano:

$$\overrightarrow{P2P1} = (2-1, 0-(-2), 5-2) = (1, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{P3P1} = (2-3, 0-(-1), 5-2) = (-1, 1, 3)$$

Ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(x-2) - 6y + 3(z-5) = 3x - 6y + 3z - 21 = 0$$

Simplificando, la ecuación del plano es $\pi: x - 2y + z = 7$, de vector normal (1, –2, 1). Al ser este plano tangente a la esfera el radio es la distancia del centro al plano:

$$d(C, \pi) = \left|\frac{ac1 + bc2 + cc3 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| = \left|\frac{0 - 2(1) + 1(-3) - 7}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}}\right| = \left|\frac{-12}{\sqrt{6}}\right| = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$$

Otra forma:

Buscamos ahora la recta perpendicular al plano que pasa por el centro de la esfera, tomando como punto en centro de la esfera C (0, 1, –3) y como vector director el perpendicular al plano:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

Buscamos el punto de intersección de esta recta con el plano:

$$x - 2y + z = 7 \to t - 2(1 - 2t) + (-3 + t) = 7 \to 6t = 7 + 5 = 12 \to t = 2 \to P4(2, -3, -1)$$

El radio de la esfera es la distancia del centro de la esfera a este punto:

$$d(P4, C) = \sqrt{(0-2)^2 + (1-(-3))^2 + (-3-(-1))^2} = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

El radio de la esfera mide $\mathbf{2\sqrt{6}}$ unidades

Problema P3:

Calcula las integrales indefinidas: a) $\int \frac{x-7}{x^2+x-6} dx$; *b)* $\int e^{2x} \sin(2x-1)\, dx$

Soluciones:

a) La primera integral es una integral racional por lo que la descomponemos en fracciones simples

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6} dx \to x^2+x-6=(x+3)(x-2) \to \frac{x-7}{x^2+x-6}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2}$$
$$=\frac{A(x-2)+B(x+3)}{(x+3)(x-2)} \to A(x-2)+B(x+3)=x-7$$
$$\to \begin{cases} A+B=1 \\ -2A+3B=-7 \end{cases} \to \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases} \to \frac{x-7}{x^2+x-6}=\frac{2}{x+3}+\frac{-1}{x-2}$$

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6} dx = \int \left(\frac{2}{x+3}+\frac{-1}{x-2}\right) dx = 2Ln(x+3)-Ln(x-2)+C = Ln\frac{(x+3)^2}{x-2}+C$$

$$\boldsymbol{\int \frac{x-7}{x^2+x-6} dx = Ln\frac{(x+3)^2}{x-2}+C}$$

b) $\int e^{2x} \sin(2x-1)\, dx$

Esta integral se puede hacer por partes:

El método de integración por partes se basa en la derivada del producto de dos funciones:

$(uv)' = v\cdot u' + u\cdot v' = u\cdot v' + v\cdot u'$, luego integrando término a término:

$\int (uv)'dx = uv = \int((u\cdot v')dx + (v\cdot u')dx) = \int (u\cdot dv + v\cdot du)$.

La fórmula de la integración por partes queda, por tanto: $\int u\cdot dv = uv - \int v\cdot du$

Buscamos las funciones u y v teniendo en cuenta que u lo debemos derivar y v, integral.

Llamamos $u = e^{2x}$, luego $du = 2e^{2x}\,dx$; $dv = sen(2x+1)dx$, luego $v = (-1/2)\, cos(2x+1)$

$$\int \mathbf{e^{2x}}\, sin(\mathbf{2x-1})\, \mathbf{dx} = e^{2x}\cdot\frac{-1}{2}cos(2x+1) - \int \frac{-1}{2}cos(2x+1)\cdot 2\cdot e^{2x}dx$$
$$= e^{2x}\cdot\frac{-1}{2}cos(2x+1) + \int cos(2x+1)\cdot e^{2x}dx$$

Repetimos el proceso siendo ahora dv el coseno: $dv = cos(2x+1)dx$, luego $v = (1/2)\, sen(2x+1)$

$$\int cos(2x+1)\cdot e^{2x}dx$$
$$= e^{2x}\frac{1}{2}sen(2x+1) - \int \frac{1}{2}sen(2x+1)\cdot 2\cdot e^{2x}dx$$
$$= e^{2x}\cdot\frac{1}{2}sen(2x+1) - \int sen(2x+1)\cdot e^{2x}dx$$

Llamamos I a la integral pedida y sustituimos:

$$I = e^{2x}\cdot\frac{-1}{2}cos(2x+1) + e^{2x}\frac{1}{2}sen(2x+1) - I \to 2I = \frac{e^{2x}}{2}(sen(2x+1)-\cos(2x+1))+C$$

$$\boldsymbol{\int e^{2x}\, sen(2x-1)\, dx = \frac{e^{2x}}{2}(sen(2x+1)-cos(2x+1))+C}$$

Problema P4:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} + ln\frac{x^2+2}{3} & x < 1 \\ \frac{x^2}{3} & x \geq 1 \end{cases}$

a) Demuestra que la función es derivable en todo R.

b) Demuestra que existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 1$. Enuncia el (los) resultado(s) teórico(s) utilizado(s) y justifica su uso.

Soluciones:

a) Debemos probar que la función es continua en todo R y que además existe la derivada. Es una función definida a trozos. La primera rama es una función logarítmica que no sería continua si se aplica a valores negativos o cero. Pero $\frac{x^2+2}{3}$ es siempre positiva. La segunda rama es una parábola, una función polinómica que es siempre continua. Nos queda comprobar que ocurre en el punto de unión de ambas ramas, es decir, en $x = 1$.

$\frac{1}{3} + ln\frac{x^2+2}{3}$ para $x = 1$, $\frac{1}{3} + ln\frac{1+2}{3} = \frac{1}{3} + ln\frac{3}{3} = \frac{1}{3} + \ln(0) = \frac{1}{3}$

$\frac{x^2}{3}$ para $x = 1$, es también $\frac{1}{3}$, luego la función es continua en toda la recta real.

Estudiamos la derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{2x}{3}}{ln\frac{x^2+2}{3}} & x < 1 \\ \dfrac{2x}{3} & x > 1 \end{cases}$$

Ya hemos visto que la función $ln\frac{x^2+2}{3}$ es continua en todo R y no se anula nunca. La función $\frac{2x}{3}$ es polinómica y derivable. De nuevo el único punto dudoso es x = 1.

La función $ln\frac{x^2+2}{3}$ en x = 1, vale $ln\frac{x^2+2}{3} = \ln(0) = 1$. Luego $f'(1) = \frac{2(1)}{3} = \frac{2}{3}$ en las dos ramas. La función es derivable en toda la recta real.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{2x}{3}}{ln\frac{x^2+2}{3}} & x < 1 \\ \dfrac{2x}{3} & x \geq 1 \end{cases}$$

La función $f'(x) - 1$ es también continua y derivable en toda la recta real, luego podemos usar el Teorema de Bolzano en cualquier intervalo, en particular en [0, 2].

b) El Teorema de Bolzano dice que, si una función es continua en un intervalo cerrado y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces existe un valor en el interior del intervalo en el que la función se anula.

$$f'(0) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0;\ f'(2) - 1 = \frac{4}{3} > 0$$

La función $f'(x) - 1$ es continua en [0, 2], y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo.

Luego existe un punto en el interior del intervalo dónde se anula $f'(x) - 1$, luego $f'(\alpha) - 1 = 0$, *$f'(\alpha) = 1$.*

Existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 1$.

Problema P5:

Sabiendo que la inversa de la matriz A es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *y la inversa de la matriz AB es* $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*, determina la inversa de la matriz B.*

Soluciones:

La inversa de la inversa de una matriz, es la matriz de origen. Por tanto

$$(A\cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to ((A\cdot B)^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = A\cdot B$$

Calculamos la inversa:

El determinante vale –1.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\to A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \to \cdot B = A^{-1}\cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Problema P6:

Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que corta perpendicularmente a las siguientes rectas: r: $\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x+3z-7=0 \end{cases}$ *y* s: $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{0}$

Soluciones:

Escribimos la ecuación paramétrica de la recta r, tomando a z como parámetro:

$$r\colon \begin{cases} (7-3z)+2y+z-1=0 \to 2y=2z-6 \\ x=7-3z \end{cases} \to \begin{cases} x=7-3t \\ y=-3+t \\ z=t \end{cases}$$

Conocemos, por tanto, ya un punto y el vector director de cada una de las rectas r y s.

$$\begin{cases} r\colon A(7,-3,0);\ \vec{v}=(-3,1,1) \\ s\colon B(-2,0,-3);\ \vec{w}=(2,1,0) \end{cases}$$

Los vectores directores NO son linealmente dependientes, pues no son proporcionales. Las rectas no son paralelas, luego o se cortan o se cruzan. Determinamos el vector $\overrightarrow{AB}$ y comprobamos si es coplanario o no con los vectores de dirección:

$$\overrightarrow{AB}=(-2-7,0-(-3),-3-0)=(-9,3,-3)\to(3,-1,1)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3-2-(2+3)=-6-4=-10\neq 0$$

Las rectas se cruzan. Buscamos un vector (a, b, c) que sea ortogonal a (-3, 1, 1) y a (2, 1, 0). Su producto escalar debe ser cero: *-3a + b +c = 0; 2a +b = 0*.

$$\begin{cases} -3a+b+c=0 \\ 2a+b=0\to b=-2a \end{cases} \to \begin{cases} -3a-2a+c=0\to c=5a \\ 2a+b=0\to b=-2a \end{cases} \to \begin{cases} a=a \\ b=-2a \\ c=5a \end{cases}$$

Es el vector (1, -2, 5). Buscamos ahora las ecuaciones de dos planos, uno que contenga a la recta r, y tenga como vector de orientación (1, -2, 5) y otro que contenga a la recta s, y también tenga a este vector como vector de orientación:

$$\pi 1\colon \begin{vmatrix} x-7 & y+3 & z \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 7(x-7)+16(y+3)+5z=7x+16y+5z-1=0$$

$$\pi 2\colon \begin{vmatrix} x+2 & y & z+3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 5(x+2)-10y-5(z+3)=5x-10y-5z-5=0\to \pi 2\colon x-2y-z=1$$

La recta buscada es: $\begin{cases} 7x+16y+5z=1 \\ x-2y-z=1 \end{cases}$. Nos piden su ecuación continua, luego debemos encontrar un punto y un vector de dirección:

$$\begin{cases} 7x+16y+5z=1 \\ x-2y-z=1 \end{cases} \to \begin{cases} 7x+5z=-16y+1 \\ x-z=2y+1 \end{cases} \to \begin{cases} 7x+5z=-16y+1 \\ 5x-5z=10y+5 \end{cases} \to \begin{cases} 12x=-6y+6 \\ x-z=2y+5 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x=-\left(\frac{1}{2}\right)y+1/2 \\ y=y \\ z=-1/2-(\frac{5}{2})y \end{cases}$$

La ecuación continua es: $t\equiv \frac{x-1/2}{-1/2}=y=\frac{z+1/2}{-5/2}$

Problema P7:

Calcula los extremos relativos de la función $f(x) = e^{\pi x} \cdot sen(\pi x)$ en el intervalo [1/2, 2]. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso

Soluciones:

La función dada es el producto de dos funciones, una exponencial y otra trigonométrica, continuas y derivables en toda la recta real.

Para calcular los máximos y los mínimos relativos buscamos los puntos que anulan a la derivada primera:

$$f'(x) = \pi e^{\pi x} \cdot sen(\pi x) + e^{\pi x} \cdot \pi \cdot \cos(\pi x) = 0$$

La función exponencial no se anula nunca. Debemos resolver la ecuación:

$$sen(\pi x) + \cos(\pi x) = 0 \to \frac{sen(\pi x)}{cos(\pi x)} + 1 = 0 \to Tang(\pi x) = -1$$

$$\to \begin{cases} \pi x = 135° + 360°k = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \to 2º\ cuadrante \\ \pi x = 315° + 360°k = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \to 4º\ cuadrante \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} + 2k \\ x = \dfrac{7}{4} + 2k \end{cases}$$

En el intervalo [1/2, 2] están las soluciones 1/2 = 0.5 < 3/4 = 0.75 < 2 y 1/2 = 0.5 < 7/4 = 1.75 < 2.

Para saber si se trata de máximos o mínimos, podemos determinar los intervalos de crecimiento de la función, o utilizar la derivada segunda:

$$f'(x) = \pi e^{\pi x} \cdot sen(\pi x) + e^{\pi x} \cdot \pi \cdot \cos(\pi x) = \pi e^{\pi x} \cdot (sen(\pi x) + \cos(\pi x))$$

$$\to f''(x) = \pi^2 e^{\pi x}(sen(\pi x) + \cos(\pi x)) + \pi e^{\pi x} \cdot \big(\pi \cos(\pi x) - \pi sen(\pi x)\big) = \pi^2 e^{\pi x}(2\cos(\pi x))$$

$f''\left(\frac{3}{4}\right) = \pi^2 e^{\frac{3}{4}}\left(2\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}\pi^2 e^{\frac{3}{4}} < 0.$. Máximo relativo. $f(3/4) = e^{\pi 3/4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 7.46$

$f''\left(\frac{7}{4}\right) = \pi^2 e^{\frac{7}{4}}\left(2\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\pi^2 e^{\frac{7}{4}} > 0.$ Mínimo relativo. $f(7/4) = -e^{\pi 7/4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cong -172.64$

Para saber si son máximos o mínimos absolutos, tenemos que calcular el valor de la función en los extremos del intervalo:

$$f(1/2) = e^{\pi/2} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cong 4.81$$

$$f(2) = e^{2\pi} \cdot sen(2\pi) = 0$$

Por tanto: $-172.64 < 0 < 4.81 < 7.46$, luego (3/4, $e^{\pi 3/4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$) es el máximo absoluto y ($\frac{7}{4}, -e^{\pi 7/4}$) es el mínimo absoluto.

El punto (3/4, $e^{\pi 3/4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$) es el máximo absoluto y ($\frac{7}{4}, -e^{\pi 7/4}$) es el mínimo absoluto

Problema P8:

Sean las funciones $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ y $g(x) = \sqrt{x-2} + 2$. Encuentra los dos puntos en los que se cortan sus gráficas, y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Soluciones:

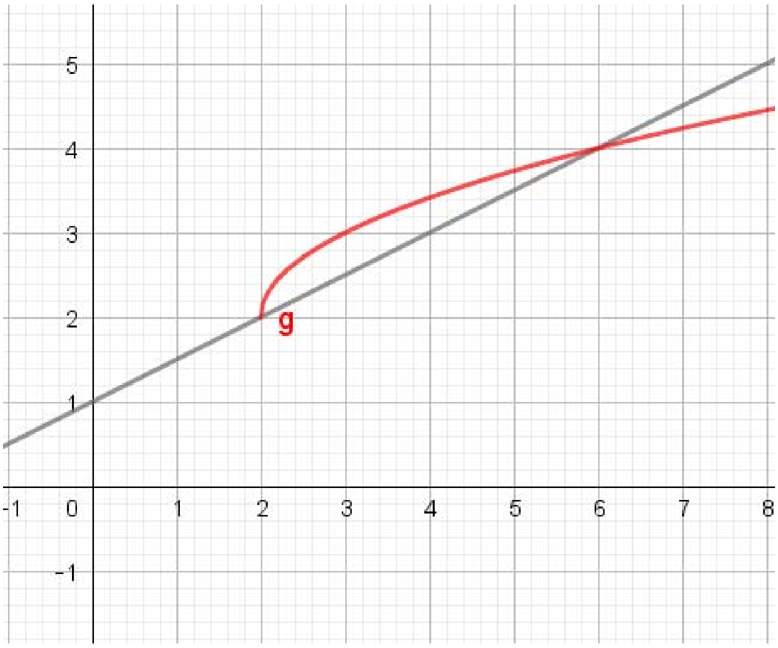
La primera función es una recta. La segunda, una función racional. Buscamos los puntos de intersección:

$$f(x) = g(x) \to \frac{x}{2} + 1 = \sqrt{x-2} + 2 \to \sqrt{x-2} = \frac{x}{2} - 1 = \frac{x-2}{2}$$

Elevamos al cuadrado:

$$x - 2 = \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 = \frac{(x-2)^2}{4} \to 4(x-2) = (x-2)^2 \to$$

Una solución es $x - 2 = 0 \to x = 2, \to\ (2,2)$ y la otra: $4 = x - 2 \to x = 6 \to (6,4)$



En el intervalo [2, 6] la función raíz está por encima de la recta.

Luego área de la región pedida viene dada por la integral:

$$\int_2^6 (g(x) - f(x))dx = \int_2^6 (\sqrt{x-2} + 2 - (\frac{x}{2} + 1))dx$$

$$= \int_2^6 (\sqrt{x-2} + 1 - \frac{x}{2})dx = \left[\frac{(x-2)^{3/2}}{3/2} + x - \frac{x^2}{4}\right]_2^6$$

$$= \left(\frac{(4)^{3/2}}{3/2} + 6 - \frac{6^2}{4}\right) - \left(\frac{(0)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2 - \frac{4^2}{4}\right) = \left(\frac{8}{\frac{3}{2}} + 6 - 9\right) - (2-1) = \left(\frac{16}{3} - 3\right) - 1$$

$$= \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3} \cong 1.3333$$

El área de la región encerrada es de **4/3** ≅ **1.3333 u²**.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma del

PAÍS VASCO

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Álvaro Garmendia Antolín

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

2020ko OHIKOA

MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS II

Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde guztietan kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantailla grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinatzaileen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una IJnica pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

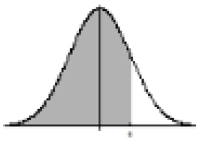
- pantalla gráfica, posibildad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2020ko OHIKOA — *ORDINARIA 2020*

MATEMATIKA II — ***MATEMÁTICAS II***



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

2

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2020ko OHIKOA | ORDINARIA 2020

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discutir el sistema $S(a)$ en función de a, siendo

$$S(a)=\begin{cases} ax-y+2z= & 2 \\ x-2y-z= & 1 \\ x+2y+az= & 3. \end{cases}$$

Resolver en función de a, mediante el método de Cramer, en los casos en que sea posible.

Ejercicio B1

Sea $M(\alpha)$ la matriz dada por $M(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinar para qué valores de α la matriz no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa para $\alpha=0$, y en caso de que no sea posible razonar por qué no es posible.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-1,2,3)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v}=(-1,-2,-3)$ y $\vec{w}=(1,3,5)$.

b) Hallar el valor de A para que el plano calculado en el apartado anterior y $Ax-y+5z=8$ sean perpendiculares.

Ejercicio B2

Sea π el plano $2x-y+Az=0$. Sea r la recta dada por $r\equiv\begin{cases} 4x-3y+4z= & -1 \\ 3x-2y+z= & -3. \end{cases}$

Hallar A para que r y π sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a r y que pase por el origen.

3

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2020ko OHIKOA | *ORDINARIA 2020*

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de a, b y c para que su gráfica pase por $(0,2)$ y tenga un extremo en $(1,-1)$. ¿Tiene f más extremos ?

Ejercicio B3

Sea $f(x) = x^2 + 9$, y P el punto exterior a su gráfica de coordenadas $P = (0,0)$. Calcular razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto P.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibujar la región encerrada por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5$, y calcular el área de dicha región.

Ejercicio B4

Calcular las integrales indefinidas I y J explicando los métodos usados para su resolución.

$$I = \int x\cos(2x)dx\,, \quad J = \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}.$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

En una empresa el 70 por ciento de sus trabajadoras están satisfechas con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 por ciento gana más de 1000 euros. Entre las no satisfechas solo el 20 por ciento gana más de 1000 euros. Si se elige una trabajadora al azar:

a)¿ Cuál es la probabilidad de que gane más de 1000 euros?

b) Si gana más de 1000 euros, ¿ cuál es la probabilidad que esté satisfecha con su contrato?

c) ¿ Cuál es la probabilidad de que gane menos de 1000 euros y esté satisfecha con su contrato?

4

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2020ko OHIKOA | *ORDINARIA 2020*

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***

Ejercicio B5

En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de $0,4$, se pide:

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.

b) Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.

c) Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

SOLUCIONES OPCIÓN A CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2020

PRIMERA PARTE

Ejercicio A1

Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax - y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ x + 2y + az = 3 \end{cases}$ *en función del parámetro a. Resolver, en función de a, mediante el método de Cramer, en los casos en que sea posible.*

Solución:

Escribimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada, y determinamos sus rangos. La matriz de los coeficientes es cuadrada, por lo que calculamos su determinante, y es: $-2a^2 + 3a + 9$, que se anula para $a = 3$, y para $a = -3/2$. Por tanto el rango de la matriz de los coeficientes es 3 siempre que a sea distinto de 3 y de –3/2. Y el rango de matriz ampliada no puede ser mayor que 3.

Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix}}{-2a^2 + 3a + 9} = \frac{-2a + 22}{-2a^2 + 3a + 9}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix}}{-2a^2 + 3a + 9} = \frac{a^2 + a + 2}{-2a^2 + 3a + 9}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-2a^2 + 3a + 9} = \frac{-2a + 10}{-2a^2 + 3a + 9}$$

El sistema es compatible determinado si $a \neq 3$ o $a \neq -3/2$.

Las soluciones son: $x = \frac{-2a+22}{-2a^2+3a+9}$; $y = \frac{a^2+a+2}{-2a^2+3a+9}$; $z = \frac{-2a+10}{-2a^2+3a+9}$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada para esos dos valores.

Para $a = -3/2$ el determinante formado por las columnas primera, segunda y cuarta es distinto de cero, vale 22, luego su rango es 3. El sistema es incompatible.

Para $a = 3$ el determinante formado por las columnas primera, segunda y cuarta es distinto de cero, vale –14, luego su rango es 3. El sistema es incompatible.

Por tanto:

El sistema es incompatible si $a = 3$ o $a = -3/2$.

Observamos que si $a = 3$ o $a = -3/2$, se anulan los denominadores, luego NO hay solución.

Para todo a distinto de 3 o de –3/2, $x = \frac{-2a+22}{-2a^2+3a+9}$; $y = \frac{a^2+a+2}{-2a^2+3a+9}$; $z = \frac{-2a+10}{-2a^2+3a+9}$

Ejercicio B1:

Sea la matriz $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores de a la matriz tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa para a = 0, y en caso de que no sea posible razonar por qué no lo es.

Solución:

a) Para que una matriz tenga inversa sabemos que su determinante debe ser distinto de cero. Calculamos el determinante de la matriz y se obtiene que vale $1 - a^2$, que vale cero si a vale 1 o vale –1.

Por tanto, la matriz M es invertible si a es distinto de 1 y de –1.

M es invertible $\forall a \in$ R – {1, –1}

b) Cuando a = 0, entonces $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, de determinante 1. Calculamos su inversa:

$$M^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos multiplicando ambas matrices que no nos hemos equivocado:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que es la matriz identidad

SEGUNDA PARTE

Ejercicio A2:

*a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (–1, 2, 3) y es paralelo a los vectores **v** = (–1, –2, –3) y **w** = (1, 3, 5).*

b) Hallar el valor de A para que el plano calculado en el apartado anterior y el plano $Ax - y + 5z = 8$ sean perpendiculares.

Solución:

a) Calculamos el vector normal al plano pedido calculando el producto vectorial de los vectores dados:

$$\vec{v} \text{ x } \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -i + 2j - k$$

El vector normal es, por tanto, (–1, 2, –1) luego el plano pedido en paralelo a: $-x + 2y - z = d$.

Imponemos ahora que pase por el punto *(–1, 2, 3):*

– (–1) + 2(2) – 3 = 2 = d.

Por tanto, el plano es:

–x + 2y – z = 2.

b) Para que dos planos sean perpendiculares sus vectores ortogonales deben ser también perpendiculares. El vector ortogonal al primer plano ya hemos visto que es (–1, 2, –1), y el vector ortogonal al segundo plano es (A, –1, 5). Para que sean perpendiculares imponemos que su producto escalar sea cero.

(–1, 2, –1) · (A, –1, 5) = $-A$ –2 –5 = $-A$ – 7 = 0, luego A = –7.

A = –7

Ejercicio B2:

Sea el plano $\pi \equiv 2x - y + Az = 0$. Sea r la recta dada por $\begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$. Hallar A para que r y π sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a r y que pase por el origen.

Solución:

Para que la recta y el plano sean paralelos, no deben tener ningún punto en común, y por tanto el sistema formado por sus ecuaciones debe ser incompatible: $\begin{cases} 2x - y + Az = 0 \\ 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$, por lo que el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada debe ser distinto.

El determinante de la matriz de los coeficientes vale: –6 –8A –12 + 9A + 16 + 4 = A + 2, que vale cero para A = –2. En la matriz ampliada el determinante formado por las columnas primera, segunda y cuarta es distinto de cero. Luego el rango de la matriz de los coeficientes vale 2 para A = –2, y el rango de la matriz ampliada vale 3, por lo que el sistema es incompatible y la recta es paralela al plano.

Para A = –2 la recta y el plano son paralelos.

Buscamos ahora un plano perpendicular a la recta que pase por el origen. Podemos hacerlo de varias formas, por ejemplo, buscando la ecuación paramétrica de la recta y con ello, su vector director. O buscando un vector que sea ortogonal a los dos vectores perpendiculares a los planos que forman la recta. Para ello calculamos el producto vectorial de los vectores (4, –3, 4) y (3, –2, 1):

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5i + 8j + k$$

Obtenemos que el vector director de la recta es (5, 8, 1), que tomamos como vector ortogonal al plano pedido: $5z + 8y + z = d$. Imponemos ahora que pase por el origen, por lo que d = 0. El plano es:

5z + 8y + z = 0

TERCERA PARTE

Ejercicio A3:

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de a, b y c para que su gráfica pase por el punto $P(0, 2)$ y tenga un extremo relativo en $Q(1, –1)$. ¿Tiene más extremos?

Solución:

Imponemos en primer lugar que pase por el punto $P(0, 2)$, con lo que $f(0) = c = 2$

Imponemos también que pase por Q (1, –1): $f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + c = a + b + 2 = –1$, luego $a + b = –3$.

Para que haya un extremo relativo en Q (1, –1) se debe anular la derivada en ese punto:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$, $f'(1) = 3a(1)^2 + 2b(1) = 3a + 2b = 0$, por lo que $b = –3a/2$, y $a + b = a – 3a/2 = –a/2 = –3$.

Luego $a = 6$ y $b = –9$.

La función pedida es:

$$f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 2$$

Para determinar si tiene más extremos, como es una función polinómica definida en toda la recta real, es derivable en toda la recta real, luego los extremos deben estar en punto dónde se anule la derivada.

Derivamos e igualamos a cero:

$f'(x) = 18x^2 – 18x = 18x(x – 1) = 0$, si $x = 0$ y si $x = 1$.

Hay otro extremo para $x = 0$, $y = 2$. En **(0, 2).**

No lo piden, pero vamos a determinar si son máximos o mínimos. Calculamos la derivada segunda:

$f''(x) = 36x – 18$; $f''(1) = 36(1) – 18 = 18 > 0$, que es un mínimo. $f''(0) = 36(0) – 18 = – 18 < 0$, que es un máximo.

El punto $Q(1, –1)$ es un mínimo y el punto (0, 2) es un máximo.

Ejercicio B3:

Sea $f(x) = x^2 + 9$ y $O(0, 0)$ un punto exterior a la gráfica. Calcula razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica que pasen por O

Solución:

Las rectas que pasan por el origen tienen de ecuación $y = mx$.

Para que sean tangentes a la función debe ser su pendiente en el punto de tangencia igual a la derivada: $f'(x) = 2x$.

Buscamos los puntos de intersección entre la función y las rectas $y = mx$, imponiendo que sean puntos de corte dobles: $x^2 + 9 = mx$. $x^2 - mx + 9 = 0$. Imponemos que se anule el discriminante:

$$b^2 - 4ac = m^2 - 4 \cdot 9 = m^2 - 36, \text{ luego } m = \pm 6.$$

Las rectas tangentes buscadas son $y = \pm 6x$.

Las rectas tangentes son $y = 6x$ o $y = -6x$.

Observamos que la función es una parábola de eje de simetría el eje de ordenadas, luego tiene sentido esas rectas tangentes.

El problema no lo pide, pero vamos a calcular los puntos de tangencia:

$$\pm 6x = x^2 + 9,\ x = \pm 6/2 = \pm 3;\ y = \pm 18.$$

Los puntos de tangencia son: (3, 18) y (–3, –18).

CUARTA PARTE

Ejercicio A4:

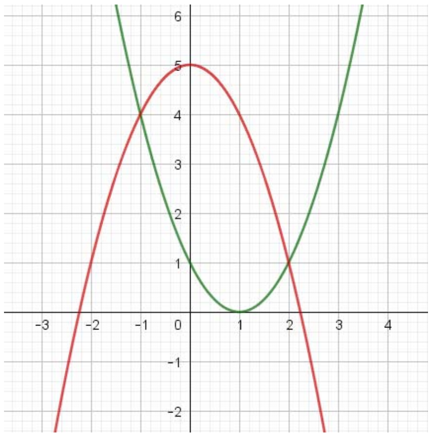
Dibujar la región encerrada por f(x) = $x^2 - 2x + 1$ y g(x) = $-x^2 + 5$, y calcular el área de dicha región.

Solución:

Las funciones dadas son dos parábolas, una con las ramas hacia arriba (convexa) y la otra con las ramas hacia abajo (cóncava). La primera corta al eje de abscisas en el vértice (1, 0) y al eje de ordenadas en (0, 1). La segunda corta al eje de ordenadas en (0, 5), es simétrica respecto a ese eje, y corta al eje de abscisas en $\left(\pm\sqrt{5}, 0\right)\right)$

Buscamos los puntos de intersección de ambas gráficas: *f(x) = g(x),* $x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 5$, $2x^2 - 2x - 4 = 0$, $x^2 - x - 2 = 0$, resolvemos la ecuación de segundo grado y obtenemos –1 y 2, luego los puntos de intersección son (–1, 4) y (2, 1).

Dibujamos la gráfica:



El área de la región viene dada por la integral:

$$\int_{-1}^{2} (g(x) - f(x))dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 5 - (x^2 - 2x + 1))dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{-2\cdot 8}{3} + 4 + 8\right) - \left(\frac{-2\cdot(-1)}{3} + 1 - 4\right) = \frac{-18}{3} + 15 = 9$$

El área de la región encerrada es de **9 u²**.

CUARTA PARTE

Ejercicio B4:

Calcular las integrales indefinidas $I = \int x \cdot \cos(2x)\, dx$ *y* $J = \int \frac{dx}{x^2+2x-3}$ *, explicando los métodos usados para su resolución.*

Solución:

La primera integral se resuelve por partes.

El método de integración por partes se basa en la derivada del producto de dos funciones:

$(uv)' = v \cdot u' + u \cdot v' = u \cdot v' + v \cdot u'$, luego integrando término a término:

$\int (uv)'dx = uv = \int ((u \cdot v')dx + (v \cdot u')dx) = \int (u \cdot dv + v \cdot du)$.

La fórmula de la integración por partes queda, por tanto:

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

Buscamos las funciones u y v teniendo en cuenta que u lo debemos derivar y v, integral.

Llamamos $u = x$, luego $du = dx$; $dv = cos(2x)dx$, luego $v = (1/2)\ sen(2x)$

$I = \int x \cdot \cos(2x)\, dx = x \cdot \frac{1}{2} \cdot sen(2x) - \int \frac{sen(2x)}{2} dx = \frac{x \cdot sen(2x)}{2} - \frac{\cos(2x)}{4} + C$

$$I = \int x \cdot \cos(2x)\, dx = \frac{x \cdot sen(2x)}{2} - \frac{\cos(2x)}{4} + C$$

La segunda integral es una integral racional. Para calcularla hallamos las raíces del denominador resolviendo la ecuación de segundo grado, que son: 1 y -3. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$

Igualamos los numeradores:

$1 = A(x-1) + B(x+3)$

De donde

$A + B = 0$, luego $A = -B$

$1 = -A + 3B = B + 3B$ por lo que $B = 1/4$, y $A = -1/4$

$$J = \int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int \left(\frac{-1/4}{x+3} + \frac{1/4}{x-1}\right) dx = \frac{1}{4}(L|x-1| - L|x+3|) + C = \frac{L|x-1|}{4L|x+3|} + C$$

$$J = \int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \frac{L|x-1|}{4L|x+3|} + C = \frac{L|x-1|}{L|x+3|^4} + C$$

QUINTA PARTE

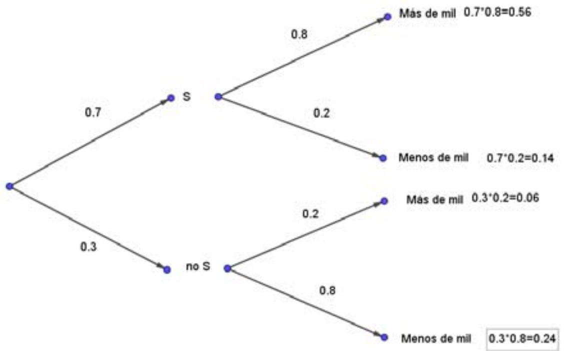
Ejercicio A5:

En una empresa en 70 % de sus trabajadores están satisfechos con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 % gana más de mil euros. Entre las no satisfechas sólo el 20 % gana más de mil euros. Si se elige una trabajadora al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que gane más de mil euros?
b. Si gana más de mil euros, ¿cuál es la probabilidad de que esté satisfecha con su contrato?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que gane menos de mil euros y esté satisfecha con su contrato?

Solución:

Representamos la situación en un diagrama en árbol y en una tabla de contingencia:



	Satisfecha	No satisfecha	
Más de mil	0.56	0.06	**0.62**
Menos de mil	**0.14**	0.24	0.38
	0.7	0.3	1

a) La probabilidad de que gane más de mil euros es **0.62**.

b) Nos piden P(satisfecha/ganar más de mil euros) = P(de la intersección)/P(más de mil) = 0.56/0.62 = 0.9032

Si gana más de mil euros la probabilidad de que esté satisfecha con su contrato es de **0.9032**.

c) Ahora nos piden de nuevo una probabilidad de la intersección que ya tenemos calculada en la tabla:

La probabilidad de que gane menos de mil euros y esté satisfecha con su contrato es de **0.14**.

Ejercicio B5:

En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es del 0.4, se pide:

a. Identificar y describir este modelo de probabilidad.
b. Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.
c. Hallar la probabilidad de que cierto día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

Solución:

a) En una plaza puede haber un automóvil aparcado, o no, luego es una distribución de probabilidad binomial, siendo $p = 0.4$, $q = 0.6$, $n = 30$. Por lo que es la distribución $B(30, 0.4)$.

Distribución binomial $\boldsymbol{B}$**(30, 0.4)**

b) La probabilidad de tener x éxitos es:

$$P(x=8)=\binom{n}{x}p^xq^{n-x}=\binom{30}{8}0.4^8\cdot 0.6^{30-8}=\frac{30!}{8!\cdot 22!}0.4^8\cdot 0.6^{22}=5852925\cdot 0.4^8\cdot 0.6^{22}$$
$$=5852925\cdot 0.00065536\cdot 0.6^{22}=0.0505$$

También se puede aproximar pasando de la binomial a la norma con la corrección de Yatres:

$$P=P(B=8)=P(7.5\le X\le 8.5)=\ P\left(\frac{7.5-12}{2.68}\le Z\le\frac{8.5-12}{2.68}\right)$$

La probabilidad de que haya 8 automóviles aparcados es de **0.0505**.

c) Se observa que los números se complican, así que es preferible transformar la binomial en una normal, de media $np = 30 \cdot 0.4 = 12$, y varianza $npq = 30 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 7.2$, con desviación típica la raíz, 2.68.

$B(30, 0.4) \cong N(12, 2.68)$

$$P=P(10\le B\le 20)$$

Consideramos la corrección de Yates:

$$P=P(10\le B\le 20)=P(9.5\le X\le 20.5)$$

Tipificamos la variable normal: Z: $\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-12}{2.68}$

$$P=P\left(\frac{9.5-12}{2.68}\le Z\le\frac{20.5-12}{2.68}\right)=P(-0.93\le Z\le 3.17)=P(Z<3.17)-\big(1-P(Z<0.93)\big)$$
$$=0.9992-1+0.8238=0.8230$$

La probabilidad de que haya entre 10 y 20 automóviles es de **0.8230**

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

2020ko EZOHIKOA

MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS II

Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantailla grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinatzaileen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responde a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una IJnica pregunta.

En caso de responder a mĜs preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirĜn en orden hasta llegar al nIJmero necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

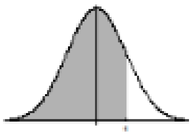
- pantalla gráfica, posibildad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2020ko EZOHIKOA | EXTRAORDINARIA 2020

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2020ko EZOHIKOA | EXTRAORDINARIA 2020

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discutir, en función de A, el sistema que sigue y resolver cuando sea posible:

$$S = \begin{cases} x + y + z = & 2A, \\ 2x + 3y + 4z = & 2, \\ 4x + 4y + Az = & 4A. \end{cases}$$

Ejercicio B1

Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, cacular razonadamente M^{2020}.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Dada la recta

$$r = \begin{cases} 3x + y - z = & 2 \\ 2x + y + 4z = & 1, \end{cases} \quad \text{y el plano} \quad \pi = 3x + (\alpha + 1)(y + 1) + \alpha z = 1,$$

a) hallar α para que la recta y el plano sean paralelos,

b) determinar si el punto $P = (1, 1, 2)$ pertenece al plano hallado en a).

Ejercicio B2

Hallar el punto Q, simétrico de $P = (1, 2, 3)$ respecto al plano de ecuación: $x + y + z = 0$, explicando los pasos seguidos para su cálculo.

Universidad País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2020ko EZOHIKOA	EXTRAORDINARIA 2020
MATEMATIKA II	***MATEMÁTICAS II***

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea f la función definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x, & x \leq 2, \\ x^2 - bx - 4, & x > 2. \end{cases}$$

Calcular a y b razonadamente, sabiendo que f es derivable en toda la recta real.

Ejercicio B3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^2 e^{2x}$. Encontrar sus extremos.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Representar la región finita del plano limitada por la curva $y = 3 - x^2$ y por la recta $y = 2x$. Calcular su área.

Ejercicio B4

Explicar en qué consiste el método de integración por partes y aplicarlo para calcular la integral

$$\int x \cos(3x) dx.$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Una máquina produce recipientes cuyas capacidades se distribuyen según una distribución normal $N(10; 0,1)$. Un fabricante considera que un recipiente es defectuoso si su capacidad no está entre $9,8$ y $10,1$. Calcular:

a) La probabilidad de que un recipiente sea considerado defectuoso.

b) Si se han fabricado 1500 recipientes, ¿cuántos se esperan defectuosos?

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2020ko EZOHIKOA | *EXTRAORDINARIA 2020*

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***

Ejercicio B5

En un instituto el 40 por ciento de sus alumnos tiene el cabello castaño, el 35 por ciento tiene los ojos azules y el 15 por ciento tiene el cabello castaño y los ojos azules. Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cúal es la probabilidad de que tenga los ojos azules?

b) Si tiene los ojos azules, ¿cúal es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño?

c) ¿Cúal es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño ni los ojos azules?

d) ¿Cúal es la probabilidad de que tenga el cabello castaño o los ojos azules?

SOLUCIONES OPCIÓN A CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2020

PRIMERA PARTE

Ejercicio A1

Discutir en función de A el sistema que sigue y resolver cuando sea posible $\begin{cases} x+y+z=2A \\ 2x+3y+4z=2 \\ 4x+4y+Az=4A \end{cases}$.

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada. El determinante de la matriz de los coeficientes, que es cuadrada, vale: $A – 4$, luego si A es distinto de 4, el rango vale 3, así como el rango de la matriz ampliada, luego en ese caso el sistema es compatible y determinado.

Para A = 4 estudiamos el rango de la matriz ampliada y encontramos que el determinante formado por las columnas primera, segunda y cuarta es distinto de cero, por lo que su rango vale 3, y el sistema es incompatible.

Si $A \neq 4$ el sistema es compatible y determinado. Si $A = 4$, el sistema es incompatible.

Podemos resolver el sistema por Gauss o por Cramer. Po el método de Gauss llegamos al sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=2A \\ 0x+\ y+2z=2-4A \\ 0x+0y+(A-4)z=-4A \end{cases}$$

En ambos casos se obtiene que:

Si $A \neq 4$, $x=\frac{6A^2-38A+4A}{A-4}; y=\frac{-4A^2+30A-8}{A-4}; z=\frac{-4A}{A-4}$.

Ejercicio B1

Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*, calcular razonadamente* M^{2020}.

Solución:

Calculamos M^2 y las potencias sucesivas:

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M \cdot M \cdot M = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observa que todos los términos permanecen invariantes: 1, 0, 1, salvo el que se obtiene de sumar la primera fila, por lo que podemos afirmar que:

$$M^{2020} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2020 & 1 \end{pmatrix}$$

SEGUNDA PARTE

Ejercicio A2

Sea la recta $\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ 2x + y + 4z = 1 \end{cases}$ *y el plano* $\pi: 3x + (a+1)(y+1) + az = 1$

a) *Hallar a para que la recta y el plano sean paralelos*
b) *Determinar si el punto P (1, 1, 2) pertenece al plano del apartado anterior*

Solución:

a) Para que la recta y el plano sean paralelos debe verificarse que el vector de dirección de la recta y el vector ortogonal al plano sean perpendiculares.

El vector normal al plano es: (3, a + 1, a).

Para determinar el vector director de la recta podemos escribir la ecuación paramétrica de la misma resolviendo el sistema y dejando la solución en función de un parámetro, u obtenerlo directamente calculando el producto vectorial de los dos vectores ortogonales a los planos que la forman:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5i - 14j + k$$

El vector director de la recta es: (5, –14, 1).

Imponemos que ambos vectores sean perpendiculares anulando su producto escalar:

(3, a + 1, a) · (5, –14, 1) = 15 –14(a + 1) + a = –13a + 1 = 0, luego a = 1/13.

Si a = 1/13, la recta y el plano son paralelos.

b) Para ese valor del parámetro el plano resulta:

$$\pi: 3x + \left(\frac{1}{13} + 1\right)(y+1) + \frac{1}{13}z = 1 \ \rightarrow 3x + \frac{14}{13}y + \frac{1}{13}z + \frac{1}{13} = 0 \rightarrow 39x + 14y + z + 1 = 0$$

Para que el punto pertenezca al plano, debe verificar su ecuación:

P (1, 1, 2); 39(1) + 14(1) + 1(2) + 1 = 39 + 14 + 2 + 1 ≠ 0.

El punto P **no** pertenece al plano.

Ejercicio B2

Hallar el punto Q simétrico de P(1, 2, 3) respecto del plano $\pi: x + y + z = 0$ explicando los pasos seguidos para su cálculo.

Solución:

En primer lugar, buscamos la recta que pase por Q y sea perpendicular al plano. Su vector director es el vector normal del plano (1, 1, 1):

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Buscamos el punto de intersección de la recta r con el plano:

$$x + y + z = 1 + t + 2 + t + 3 + t = 0 = 6 + 3t \to t = -2 \to M(-1, 0, 1).$$

El punto Q simétrico de P verifica que los vectores $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$, luego

$$\overrightarrow{PM} = (M - P) = (-1, 0, 1) - (1, 2,3) = (-2, -2, -2),$$

$$\overrightarrow{MQ} = (x, y, z) - (-1, 0, 1) = (x + 1, y, z - 1)$$

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ} \to (-2, -2, -2) = (x + 1, y, z - 1) \to \begin{cases} x + 1 = -2 \to x = -3 \\ y = -2 \\ z - 1 = -2 \to z = -1 \end{cases}$$

El punto simétrico pedido Q es igual a **(–3, –2, –1)**

TERCERA PARTE

Ejercicio A3

Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & si\ x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & si\ x > 2 \end{cases}$, *calcular a y b razonadamente sabiendo que f es derivable en toda la recta real.*

Solución:

Para que una función sea derivable debe ser continua. La función f está definida mediante dos funciones polinómicas luego es continua en toda la recta real, salvo en el punto de unión de las dos ramas. Imponemos que sea continua en el punto de abscisa $x = 2$.

$$ax^2 + 3x = a(2^2) + 3(2) = 4a + 6$$

$$x^2 - bx - 4 = (2^2) - b(2) - 4 = -2b$$

Para que la función sea continua en toda la recta real se debe verificar que $4a + 2b = -6$.

De nuevo, como la función está formada por dos funciones polinómicas es derivable en toda la recta real salvo en el punto de unión de dichas ramas, dónde imponemos que lo sea:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & si\ x < 2 \\ 2x - b & si\ x > 2 \end{cases},$$

$$2ax + 3 = 2a(2) + 3 = 2x - b = 2(2) - b \to 4a + 3 = 4 - b \to 4a + b = 1$$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ 4a + b = 1 \end{cases}$, restando se obtiene $b = -7$, y sustituyendo $a = 2$.

La función *f* es derivable en toda la recta real si $a = 2$ y $b = -7$.

Ejercicio B3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^2e^{2x}$. *Encontrar esos extremos.*

Solución:

La función dada es continua y derivable en toda la recta real por estar formada por el producto de una función polinómica y una función exponencial. Por tanto, los extremos de la función deben estar en los puntos en los que se anule la derivada.

$$f(x) = x^2e^{2x} \to f'(x) = 2xe^{2x} + x^2e^{2x}2 = e^{2x}(2x + 2x^2) = e^{2x}2x(1 + x)$$

La función exponencial no se anula nunca. La primera derivada se anula para $x = 0; x = -1$.

Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos: $(-\infty, -1); (-1, 0); (0, +\infty)$. La función exponencial es siempre positiva. $2x < 0 \ \ si\ x < 0; 1 + x < 0 \ \ si\ x < -1$. Por tanto en:

$(-\infty, -1) \to f'(x) > 0$. La función es creciente

$(-1, 0) \to f'(x) < 0$. La función es decreciente.

$(0, +\infty) \to f'(x) > 0$. La función es creciente

En el punto de abscisa $x = -1$ la función pasa de creciente a decreciente, luego es un máximo, que se alcanza en $f(-1) = (-1)^2e^{2(-1)} = e^{-2}$. Tenemos un máximo relativo en $(-1, e^{-2}) = (-1, \frac{1}{e^2})$.

En el punto de abscisa $x = 0$ la función pasa de decreciente a creciente, luego es un mínimo, que se alcanza en $f(0) = (0)^2e^{2(0)} = 0$.Tenemos un mínimo en (0, 0).

La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. La función es decreciente en $(-1, 0)$.

Alcanza un máximo relativo en $(-1, e^{-2}) = \left(-1, \frac{1}{e^2}\right)$ y un mínimo relativo en (0, 0).

Para determinar si son máximos o mínimos relativos también se podría haber utilizado el signo de la deriva segunda:

$$f'(x) = e^{2x}(2x + 2x^2) \to f''(x) = e^{2x}2(2x + 2x^2) + e^{2x}(2 + 4x) = e^{2x}(4x + 4x^2 + 2 + 4x)$$
$$= e^{2x}(4x^2 + 8x + 2) \to$$

$f''(-1) = e^{2(-1)}(4(-1)^2 + 8(-1) + 2) = e^{2(-1)}(4 - 8 + 2) = e^{-2}(-2) < 0 \to$ Máximo relativo

$f''(0) = e^{2(0)}(4(0)^2 + 8(0) + 2) = e^{2(0)}(2) > 0 \to$ Mínimo relativo

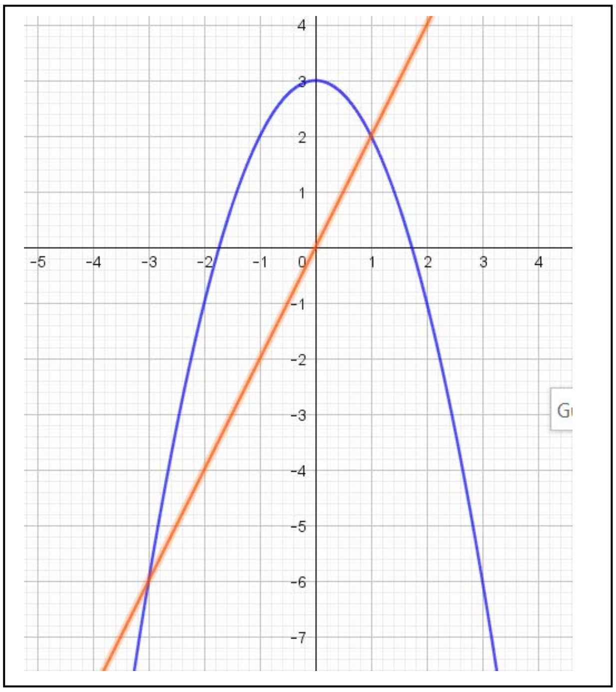
CUARTA PARTE

Ejercicio A4

Representar la región finita del plano limitada por la curva $f(x) = 3 - x^2$, y por la recta $g(x) = 2x$. Calcular su área.

Solución:

La curva $f(x) = 3 - x^2$ es una parábola de vértice (0, 3), con las ramas hacia abajo (cóncava).



La recta y la parábola se cortan en:

$$3 - x^2 = 2x \to x^2 + 2x - 3 = 0 \to x = 1; x = -3 \to (1, 2), (-3, -6)$$

La parábola está siempre por encima de la recta entre -3 < x < 1.

El área pedida es:

$$\text{Área} = \int_{-3}^{1}\big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_{-3}^{1}\left(3 - x^2 - 2x)dx = \int_{-3}^{1}(-x^2 - 2x + 3)dx\right) =$$

$$\left[\frac{-x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_{-3}^{1} = \left(\frac{-1}{3} - 1 + 3\right) - \left(\frac{-(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3(-3)\right) = \frac{-1}{3} + 2 - 9 + 18 = \frac{32}{3}$$

El área vale $\frac{32}{3}\ u^2 \cong 10.67\ u^2$.

Ejercicio B4

Explicar en qué consiste el método de integración por partes y aplicarlo a calcular la integral:

$$I = \int x \cdot \cos(3x)\, dx$$

Solución:

El método de integración por partes se basa en la derivada del producto de dos funciones:

$(uv)' = v \cdot u' + u \cdot v' = u \cdot v' + v \cdot u'$, luego integrando término a término:

$\int (uv)' dx = uv = \int ((u \cdot v')dx + (v \cdot u')dx) = \int (u \cdot dv + v \cdot du)$.

La fórmula de la integración por partes queda, por tanto:

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

Buscamos las funciones u y v teniendo en cuenta que u lo debemos derivar y v, integral.

Llamamos $u = x$, luego $du = dx$; $dv = cos(3x)dx$, luego v = (1/3) $sen(3x)$

$I = \int x \cdot \cos(2x)\, dx = x \cdot \frac{1}{3} \cdot sen(3x) - \int \frac{sen(3x)}{3} dx = \frac{x \cdot sen(3x)}{3} - \frac{\cos(3x)}{3 \cdot 3} + C$

$$I = \int x \cdot \cos(2x)\, dx = \frac{x \cdot sen(3x)}{3} - \frac{\cos(3x)}{9} + C$$

QUINTA PARTE

Ejercicio A5

Una máquina produce recipientes cuyas capacidades se distribuyen según una distribución normal N(10, 0.1). Un fabricante considera que un recipiente es defectuoso si su capacidad no está entre 9.8 y 10.1. Calcular:

a) La probabilidad de que un recipiente sea considerado defectuoso.
b) Si se han fabricado 1 500 recipientes, ¿cuántos de esperan defectuosos?

Solución:

Sabemos que es una distribución normal de media 10, y desviación típica 0.1.

Tipificamos la variable normal: Z: $\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-10}{0.1}$

$$P=P\left(\frac{9.8-10}{0.1}\leq Z\leq\frac{10.1-10}{0.1}\right)=P(-2\leq Z\leq 1)=P(Z<1)-\big(1-P(Z<2)\big)$$
$$=0.8413-1+0.9772=0.8185.$$

La probabilidad de que NO esté entre 9.8 y 10.1 es el suceso contrario:

Probabilidad de defectuoso $=1-0.8185=0.1815$, aproximadamente un 18 %.

La probabilidad de que la capacidad no esté entre 9.8 y 10.1 es de 0.1815

Si se han fabricado 1 500 recipientes se esperan que sean defectuosos:

$$np=1500\cdot 0.1815=272$$

El número esperado de defectuosos es de 272.

Ejercicio B5

En un instituto el 40 % de sus alumnos tienen el cabello castaño, el 35 % tiene ojos azules, y el 15 % tiene el cabello castaño y los ojos azules. Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga los ojos azules?
b) Si tiene los ojos azules, ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga ni el cabello castaño ni los ojos azules?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el cabello castaño o los ojos azules?

Solución:

Llamamos C a tener el cabello castaño, y A a tener los ojos azules. Los datos que tenemos son:

$P(C) = 0.4$; $P(A) = 0.35$; $P(C\ y\ A) = 0.15$.

Llevamos estos datos a una tabla de contingencia, y completamos la tabla:

	C	noC	
A	0.15		0.35
noA			
	0.4		1

	C	noC	
A	0.15	0.2	0.35
noA	0.25	0.4	0.65
	0.4	0.6	1

a) Nos piden $P(A/C) = P(A\ y\ C)/P(C) = 0.15/0.4 = 0.375$

Si tiene los cabellos castaños, la probabilidad de que tenga los ojos azules es 0.375.

b) Nos piden $P(noC/A) = P(noC\ y\ A)/P(A) = 0.2/0.35 = 0.5714$.

Si tiene los ojos azules, la probabilidad de que no tenga el cabello castaño es 0.5714.

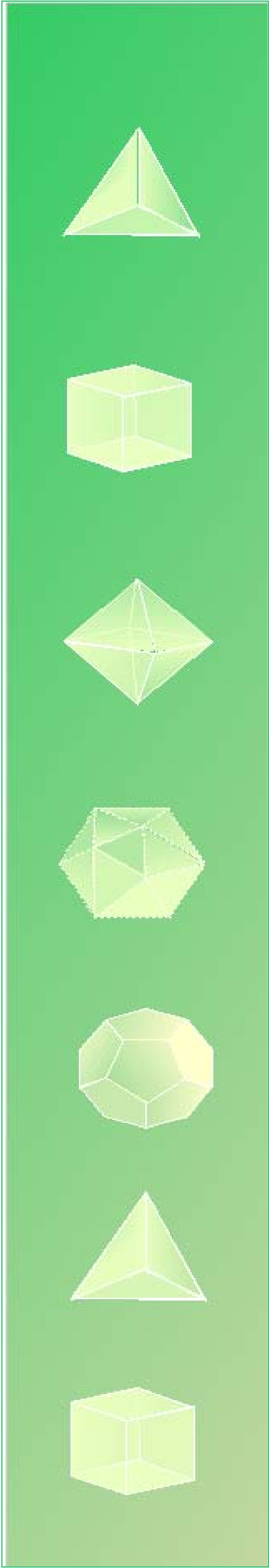
c) Nos piden $P(noC\ y\ noA) = 0.4$ según aparece en la tabla

La probabilidad de que no tenga ni el cabello castaño ni los ojos azules es de 0.4.

d) Nos piden la probabilidad de la unión, que sabemos que es igual a la suma de la probabilidad menos la probabilidad de la intersección:

$$P(A\ o\ C) = P(A) + P(C) - P(A\ y\ C) = 0.35 + 0.40 - 0.15 = 0.6.$$

La probabilidad de que tenga el cabello castaño o los ojos azules es de 0.6.



MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Podadera Sánchez

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JULIO

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumno elegirá solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Problema 1:

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=-2 \end{cases}$, siendo a un parámetro real,

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El estudio del sistema en función del parámetro a. (5 puntos)

b) Las soluciones del sistema cuando $a=-2$. (3 puntos)

c) La solución del sistema cuando $a=0$. (2 puntos)

Problema 2:

Se da la recta $r: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$ y los puntos $P(1,0,0)$ y $Q(2,1,\alpha)$ **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) El valor de a para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r. (3 puntos)

b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando $\alpha=1$ (3 puntos)

c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando $\alpha=1$ (4 puntos)

Problema 3:

Se da la función real f definida por $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio y las asíntotas de la función f. (3 puntos)

b) La integral $\int f(x)dx$, así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto$(2,0)$. (3+1 puntos)

c) El área de la región limitada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$, $x=2$, $x=4$. (3 puntos)

Problema 4:

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real b.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. (3 puntos)

b) Los valores de b para que la matriz $A^T A$ tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A. (3 puntos)

c) La inversa de $A^T A$, cuando dicha inversa exista. (4 puntos)

Problema 5:

Sea dan el plano $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $A(1,2,-1)$ y $B(2,1,0)$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π. (4 puntos)

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r. (1+2 puntos)

c) La distancia entre el punto B y la recta r. (3 puntos)

Problema 6:

En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado. (4 puntos)

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x), 0 \leq x \leq 20$ (4 puntos)

c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área. (2 puntos)

RESPUESTAS

Problema 1:

a) El estudio del sistema en función del parámetro a.

Vamos a discutir el sistema utilizando el Teorema de Rouché-Fröbenius. Para ello tenemos que estudiar los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada.

Matriz de los coeficientes: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Como se trata de una matriz $3x3$ su mayor rango es 3 por lo que calculamos el valor del menor de orden 3 (toda la matriz). Calculamos el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a - a^3 - 1 - 1 = -a^3 + 3a - 2$$

Igualamos a cero para ver los valores que anulan el determinante:

$$-a^3 + 3a - 2 = 0$$

Para resolver la ecuación de tercer grado vamos a descomponer por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & \lfloor 0 \\ 1 & & -1 & -2 & \\ \hline & -1 & -2 & \lfloor 0 & \end{array}$$

Con lo cual tenemos que: $-a^3 + 3a - 2 = (a-1)^2 \cdot (-a-2) = 0$

Las soluciones son:

$$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$
$$-a - 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

La primera conclusión que podemos sacar es que si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el $RgM = 3$ y como la matriz ampliada es de dimensión $3x4$ y su mayor rango puede ser 3 tenemos que:

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el $RgM = 3 = RgM^*$ y el sistema será SCD

Vamos a estudiar los casos $a = 1$ y $a = -2$

➔ Caso $a = 1$, sustituyendo el valor tenemos que:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Como las tres filas (o columnas) son iguales aplicando las propiedades de los determinantes debemos de saber que no habrá ningún menor de orden 2 diferente de cero y, por lo tanto, su rango será 1.

Estudiamos, para este caso, el rango de la matriz ampliada:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Fácilmente podemos ver que hay un menor de orden 2 diferente de cero:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$ Lo que nos indica que el $RgM^* = 2$

Por lo que la discusión queda: $RgM = 1 \neq RgM^* = 2$ y el sistema es SI.

➔ Caso $a = -2$, sustituyendo el valor tenemos que: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Tomando las dos primeras filas y columnas podemos ver que hay un menor de orden 2 diferente de cero:$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$por lo que $RgM = 2$

Estudiamos ahora el rango de la matriz ampliada:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Deberíamos buscar un menor de orden 3 diferente de cero pero, si nos fijamos un poco, la primera y la cuarta columna de la matriz son iguales por lo que todos los menores de orden 3 que calculemos van a ser cero. Por lo tanto, tenemos que el rango de la ampliada es 2 y podemos concluir, para este caso, que$RgM = 2 = RgM^* < nº incógnitas$ por lo que el sistema es SCI.

Hacemos un resumen de la discusión:

- Si $a = 1$ tenemos que $RgM = 1 \neq RgM^* = 2$ y el sistema es SI.
- Si $a = -2$ se da que $RgM = 2 = RgM^* < nº incógnitas$ por lo que el sistema es SCI.
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el $RgM = 3 = RgM^* = nº incógnitas$ y el sistema será SCD

b) Las soluciones del sistema cuando $a = -2$.

Por la discusión realizada anteriormente tenemos que si $a = -2$ se da que el sistema es SCI. Damos ese valor al parámetro y resolvemos por Cramer. Para ello, consideramos el menor que nos dio el rango 2 (las dos primeras ecuaciones y las dos primeras incógnitas) quitamos la última ecuación y hacemos la incógnita igual a un parámetro: $z = \lambda\ \lambda \in \mathbb{R}$ con todo eso queda el sistema:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - 2\lambda = 1 \\ x - 2y + \lambda = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 1 + 2\lambda \\ x - 2y = 1 - \lambda \end{cases}$$

Ahora el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes no es cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$

Resolvemos por Cramer: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1+2\lambda & 1 \\ 1-\lambda & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \dfrac{-2(1+2\lambda) - 1\cdot(1-\lambda)}{-3} = \dfrac{-3-3\lambda}{-3} = 1 + \lambda$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+2\lambda \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1\cdot(1-\lambda) - 1\cdot(1+2\lambda)}{-3} = \frac{-3\lambda}{-3} = \lambda$$

Por lo que las soluciones son: $x = 11 + \lambda; y = -7 - 2\lambda; z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

c) La solución del sistema cuando $a = 0$

Por la discusión del apartado a) tenemos que si $a \neq 1$ y $a \neq -2$el sistema será SCD

Sustituimos el valor y resolvemos por Cramer:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{cases} \rightarrow a = 0 \rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ y + z = -2 \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes queda: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante:

$$|M| = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 1 = -2 \neq 0$$

Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0 - 2 + 0 - 0 - 1 - 1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1 + 0 + 0 - 0 - 1 + 2}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{0+0+1-0+2-1}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$Por lo que la solución es: $(x, y, z) = (2, -1, -1)$

Problema 2:

a) El valor de a para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r.

Para que se cumpla, el vector que pasa por ambos puntos debe ser paralelo (proporcional) al vector director de r.

Como la ecuación está en forma continua tenemos que: $\overrightarrow{v_r} = (1,1,-1)$

El vector que pasa por ambos puntos es el $\overrightarrow{PQ} = (2-1,1-0,\alpha-0) = (1,1,\alpha)$

Planteamos la proporcionalidad de ambos vectores: $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{\alpha}$

Para que sean proporcionales tenemos que: $\alpha = -1$ que es el valor buscado.

b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando $\alpha = 1$

Nos piden la ecuación de un plano por lo que necesitamos un punto y dos vectores:

- Como es paralelo a r tenemos que el vector director de r será uno de los que necesitamos.
- Como contiene a los puntos P y Q también contendrá el vector que los une: $\overrightarrow{PQ} = (1,1,1)$ (hemos hecho ya $\alpha = 1$)
- Podemos tomar como punto cualquiera de ambos, yo voy a tomar el $P(1,0,0)$

Vamos a dar la ecuación general:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (x-1) - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot z = 2 \cdot (x-1) - 2y = 2x - 2y - 2 = 0$$

Podemos utilizar esa ecuación o simplificarla por 2:

$$\pi: x - y - 1 = 0$$

c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando $\alpha = 1$

Primero vamos a trazar el plano que pasa por P y es perpendicular a r.

Para que un plano sea perpendicular a una recta el vector normal del plano ha de ser proporcional al vector director de la recta. Como sabemos que $\overrightarrow{v_r} = (1,1,-1)$ los coeficientes de la ecuación general del plano serán: $A = 1, B = 1, C = -1$

$Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow x + y - z + D = 0$

Calculamos el coeficiente que nos falta aplicando que el plano tiene que pasar por P y, por lo tanto, ha de cumplir la ecuación para ese punto:

$\pi: x + y - z + D = 0 \rightarrow$ Si $P(1,0,0) \in \pi \rightarrow 1 + 0 - 0 + D = 0 \rightarrow D = -1$

Por lo que el plano que pasa por P y es perpendicular a r es $\pi: x + y - z - 1 = 0$

Vamos a calcular ahora la distancia del punto Q al plano. Para ello tenemos que aplicar la fórmula de distancia de un punto a un plano:

$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \rightarrow d(P,\pi) = \frac{|2+1-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} u.$

Problema 3:

a) El dominio y las asíntotas de la función f.

La función es una racional polinómica por lo que estarán fuera del dominio los puntos que anulan el denominador:

$x^2 \cdot (x-1) = 0 \rightarrow\ x = 0 x = 1$ por lo que el dominio es: $Dom f(x) = \mathbb{R} - \{0,1\}$

Asíntotas horizontales. Se encuentran en el valor, si existe del límite:

$\lim_{x\to\infty} f\ (x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = 0$ (por ser el grado del denominador mayor que el del numerador e independiente de ser +∞ o -∞) luego tiene asíntota horizontal en $y = 0$

Asíntotas verticales. Las buscamos en las discontinuidades del dominio, el valor del límite a esos puntos tiene que ser un infinito. Tenemos dos valores candidatos: $x = 0$y$x = 1$calculamos los límites:

$$\lim_{x\to 0} f\ (x) = \left(\frac{1}{0}\right) = \begin{cases} \lim_{x\to 0+} \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = -\infty \\ \lim_{x\to 0-} \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = -\infty \end{cases}$$ luego $x = 0$ es asíntota vertical

$$\lim_{x\to 0} f\ (x) = \left(\frac{1}{0}\right) = \begin{cases} \lim_{x\to 0+} \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = -\infty \\ \lim_{x\to 0-} \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = -\infty \end{cases}$$ luego $x = 1$ es asíntota vertical

Como tiene asíntota horizontal no tiene oblicua.

b) La integral $\int f\ (x)dx$, así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2{,}0)$.

$$\int f\ (x)dx = \int \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}dx$$

Como se trata de una función racional polinómica tenemos que descomponer la fracción en fracciones cuyos denominadores sean la descomposición factorial del denominador original.

La descomposición nos la dan hecha pero tenemos uno de las factores que es raíz múltiple por lo que tendremos que incluir las potencias de orden inferior a la múltiple:

La descomposición queda: $\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}$

Para determinar los valores $A, B y C$ realizamos la suma e igualamos numeradores:

$\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x-1)}{x^2(x-1)} + \frac{B\cdot x\cdot(x-1)}{x^2(x-1)} + \frac{Cx^2}{x^2(x-1)} \rightarrow x^2 + 1 = A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2$

Como se trata de una identidad (no es una ecuación) le damos valores para hallar los coeficientes:

Si $x = 0 \rightarrow 1 = -A$ luego $A = -1$

Si $x = 1 \rightarrow\ 2 = C$

Si $x = 2 \rightarrow 5 = A + 2B + 4C$ sustituyendo los valores conocidos: $5 = -1 + 2B + 8 \rightarrow B = -1$

Por lo que tenemos que: $\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}$

Ahora podemos descomponer nuestra integral en tres integrales más sencillas:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}dx = \int \frac{-1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2}{x-1}dx$$

La primera se puede hacer por la fórmula de $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (con $n = -2$)

La segunda y la tercera son de logaritmo neperiano:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}dx = \int \frac{-1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2}{x-1}dx = -1\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - lnx + 2ln(x-1) + C$$
$$= \frac{1}{x} - ln|x| + 2ln|x-1| + C$$

Queremos determinar la constante de integración para que cumpla que pasa por el punto $(2{,}0)$. Sustituimos la x por 2 e igualamos a cero:

$\frac{1}{2} - ln2 + 2ln(2-1) + C = 0 \to \frac{1}{2} - ln2 + C = 0 \to C = ln2 - \frac{1}{2} \simeq -0.1931$

c) El área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.

Entre los valores considerados la función es positiva siempre (no cambia de signo) por lo que el área pedida será:

$$\int f\,(x)dx = \left[\frac{1}{x} - lnx + 2ln(x-1)\right]_2^4 = \left[\frac{1}{4} - ln4 + 2ln3\right] - \left[\frac{1}{2} - ln2 + 2ln1\right] = \frac{-1}{4} + ln\left(\frac{9}{2}\right)$$
$$\simeq 1.2541u^2$$

Problema 4:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa.

Calculamos la matriz AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 0+2b & 2-2 \\ -b-0 & 0+0 & 2b-0 \\ 1-2 & 0+2b & -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$$

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante vale cero. Calculamos el determinante:

$$|AB| = \begin{vmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{vmatrix} = 0 - 4b^2 + 0 - 0 - 8b^2 + 12b^2 = 0$$

Como el determinante de la matriz vale cero para todo valor de b ($\forall b \in \mathbb{R}$) tenemos que la matriz AB **no tiene inversa nunca**.

Calculamos la matriz BA:

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0-2 & -2+0+4 \\ -1+b^2+1 & -2+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$$

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante vale cero. Calculamos el determinante:

$$|BA| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 2b^2$$

Igualamos a cero el valor del determinante: $12 - 2b^2 = 0 \rightarrow b^2 = \frac{12}{2} \rightarrow b = \pm\sqrt{6}$

La matriz BA **tiene inversa cuando** $b \neq \pm\sqrt{6}$.

b) Los valores de b para que la matriz $A^T A$ tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A.

Tenemos que calcular la matriz $A^T A$

Calculamos primero A^T (recordemos que trasponer es cambiar filas por columnas) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b^2+1 & 2+0-2 \\ 2+0-2 & 4+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Para que una matriz tenga inversa su determinante ha de ser diferente de cero. Calculamos el determinante:

$$|A^T A| = \begin{vmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot (b^2 + 2)$$

Igualamos a cero el valor del determinante: $8 \cdot (b^2 + 2) = 0 \rightarrow\ b = \pm\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$ como el parámetro nos dicen que es real tenemos que **la matriz $A^T A$ tiene inversa siempre para cualquier valor del parámetro**.

$(\forall b \in \mathbb{R})$

c) La inversa de $A^T A$, cuando dicha inversa exista.

Como acabamos de demostrar que la matriz $A^T A$ tiene inversa siempre sabemos que se puede calcular.

$A^T A = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ Su determinante es $|A^T A| = \begin{vmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot (b^2+2)$

Utilizamos el cálculo por adjuntos: $(A^T A)^{-1} = \frac{1}{|A^T A|}\left(Adj(A^T A)\right)^T$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{8(b^2+2)}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{8(b^2+2)}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{b^2+2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar el resultado (no es obligatorio pero sí conveniente) utilizando que: $A \cdot A^{-1} = I$

$(A^T A) \cdot (A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b^2+2}{b^2+2}+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+\frac{8}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ luego está correcta.

Se puede calcular alternativamente por Gauss (sólo hace falta aplicar un método) pero, por su simplicidad, vamos a dar también el resultado:

$\left(\begin{array}{cc|cc} b^2+2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{b^2+2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} \end{array}\right)$

$F_1 = F_1/(b^2+2)$

$F_2 = F_2/8$

El resultado es, lógicamente, el mismo por los dos métodos.

Problema 5:

a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π.

Nos piden la ecuación de un plano por lo que necesitamos un punto y dos vectores:

- Como el plano pasa por los puntos A y B tomamos como nuestro punto el A, por ejemplo (es indiferente)

- Como el plano pasa por los puntos A y B tomamos como nuestro primer vector el que une ambos puntos el $\overrightarrow{AB}$, que tiene que estar contenido en el plano.

$$\overrightarrow{AB} = \big(2-1, 1-2, 0-(-1)\big) = (1,-1,1)$$

- Como el plano es perpendicular al plano π el vector normal de dicho plano tiene que ser una de las direcciones del plano buscado (por ser perpendicular). El vector normal es el $\vec{n} = (2,1,-1)$

Con el punto y los dos vectores damos la ecuación:

$$\pi': \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}(x-1) - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}(y-2) + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}(z+1)$$
$$= -(-3)(y-2) + 3(z+1) = 0$$

$3y - 6 + 3z + 3 = 0 \rightarrow 3y + 3z - 3 = 0$ o bien, simplificando: $\pi': y + z - 1 = 0$

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r.

Nos piden la ecuación de una recta por lo que necesitamos un punto y un vector director.

- Como pasa por A lo vamos a tomar como punto de aplicación.

- Como es perpendicular a π tomamos como vector director el vector normal del plano (que sabemos tiene dirección perpendicular): $\vec{n} = (2,1,-1)$

Con el punto y el vector podemos dar directamente la ecuación paramétrica de la recta:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ahora tenemos que encontrar dos planos cuya intersección sea la recta r. Si recordamos las diferentes ecuaciones de una recta tenemos que la **ecuación implícita** es la que da la recta como intersección de dos planos por lo que basta pasar nuestra ecuación paramétrica a implícita.

La escribimos en forma continua para quitar el parámetro: $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$

Tomando las dos primeras ecuaciones y despejando obtenemos:

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} \rightarrow x - 1 = 2y - 4 \rightarrow x - 2y + 3 = 0$

Tomando la primera y la tercera y despejando obtenemos:

$\frac{x-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \rightarrow -x + 1 = 2z + 2 \rightarrow x + 2z + 1 = 0$

Ya tenemos los planos buscados cuya intersección es la recta r:

$$r:\begin{cases} x-2y+3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$$

c) La distancia entre el punto B y la recta r.

Para hallar la distancia de un punto B a una recta r vamos a utilizar la fórmula:

$d(B,r)=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$donde$\vec{v}$es el vector director de la recta, A es un punto de la misma y el vector $\overrightarrow{AB}$ es el que une el punto de la recta y el punto del que hay que calcular la distancia.

Como el punto A del enunciado forma parte de la recta ya tenemos calculado el vector$\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB}\ =\big(2-1,1-2,0-(-1)\big)=(1,-1,1)$

Como el vector director es: $\vec{v}=(2,1,-1)$realizamos las operaciones:

$$d(B,r)=\frac{|\overrightarrow{AB}\ \times\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\frac{|(1,-1,1)\times(2,1,-1)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|(0,3,3)|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{0^2+3^2+3^2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}u.$$

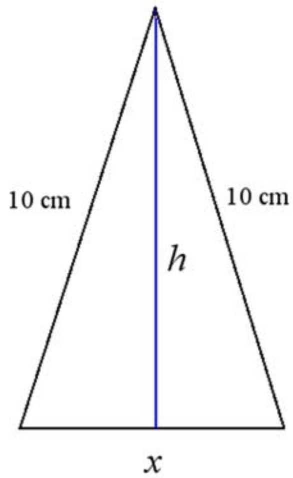
El cálculo del producto vectorial es:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}=(0,3,3)$$

Problema 6:

a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado.

El triángulo que nos dan en el enunciado lo podemos representar así:



Donde hemos llamado x a la base del mismo (nos la da el enunciado) y h a la altura sobre la base x.

El área de este triángulo sería: $A = \frac{x \cdot h}{2}$

Tenemos que expresar h en función de x para tener una función de tan sólo una variable.

Utilizando el teorema de Pitágoras y tomando el triángulo rectángulo formado por uno de los lados iguales, la altura h y la mitad de la base $\frac{x}{2}$ podemos encontrar la relación:

$$10^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow 100 = h^2 + \frac{x^2}{4} \rightarrow h^2 = 100 - \frac{x^2}{4} \rightarrow h = \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{400 - x^2}{4}} = \frac{\sqrt{400 - x^2}}{2}$$

Sustituyendo en la fórmula del área tenemos que:

$$A(x) = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{400 - x^2}}{2}}{2} = \frac{x}{4} \cdot \sqrt{400 - x^2}$$

Hay un método alternativo que es la fórmula de Herón que nos da el área de un triángulo en función de lo que miden los tres lados:

$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ donde a, b y c son los tres lados y $s = \frac{a+b+c}{2}$ (semiperímetro)

Los tres lados miden 10, 10 y x por lo que tenemos que: $s = \frac{10+10+x}{2} = \frac{20+x}{2} = 10 + \frac{x}{2}$

Si sustituimos en la fórmula tenemos:

$$A(x) = \sqrt{\left(10 + \frac{x}{2}\right) \cdot \left(10 + \frac{x}{2} - 10\right) \cdot \left(10 + \frac{x}{2} - 10\right) \cdot \left(10 + \frac{x}{2} - x\right)} = \sqrt{\frac{20+x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \left(10 - \frac{x}{2}\right)} =$$

$A(x) = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{20+x}{2}\cdot\frac{20-x}{2}} = \frac{x}{4}\sqrt{400-x^2}$ que es la misma expresión obtenida antes.

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x), 0 \leq x \leq 20$

Para establecer los intervalos derivamos la función e igualamos a cero:

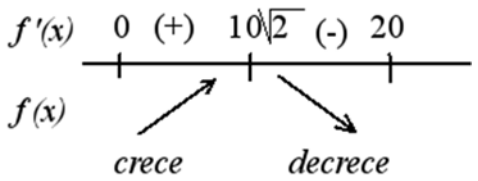
$$A'(x) = \frac{1}{4}\sqrt{400-x^2} + \frac{x}{4}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{400-x^2}} = \frac{\sqrt{400-x^2}}{4} - \frac{x^2}{4\sqrt{400-x^2}} = 0$$

Despejamos la x:

$\frac{\sqrt{400-x^2}}{4} = \frac{x^2}{4\sqrt{400-x^2}} \rightarrow \sqrt{400-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{400-x^2}} \rightarrow 400 - x^2 = x^2 \rightarrow 400 = 2x^2 \rightarrow 200 = x^2$

$x = \pm\sqrt{200} = \pm 10\sqrt{2}$ (podemos desechar el valor $-10\sqrt{2}$ ya que está fuera del dominio.

Como el dominio de la función es $0 \leq x \leq 20$ estudiamos el signo de la derivada dividiendo el dominio en dos intervalos:



Para estudiar el signo he calculado los valores:

$$A'(1) = \frac{\sqrt{400-1^2}}{4} - \frac{1^2}{4\sqrt{400-1^2}} \simeq 4.98 > 0$$

$$A'(15) = \frac{\sqrt{400-15^2}}{4} - \frac{15^2}{4\sqrt{400-15^2}} \simeq -0.94 < 0$$

Con lo cual tenemos que la función crece en $]0,10\sqrt{2}[$ y decrece en $]10\sqrt{2},20[$

c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área.

Por lo visto en el apartado anterior la función tiene un máximo en el valor $x = 10\sqrt{2}$ y el valor del área máxima será:

$$A(10\sqrt{2}) = \frac{10\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{400-(10\sqrt{2})^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\sqrt{200} = 50cm^2$$

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumno elegirá solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Problema 1:

Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+ay+2z=3 \\ x-3y+az=-2 \\ x+y+2z=a \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible. (4 puntos)

b) La solución del sistema cuando a=0. (3 puntos)

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

Problema 2:

Se dan los planos $\pi: x+y=1$ y $\pi': x-y+z=1$ y el punto $P(1,-1,0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto *P* y es paralela a los planos π y π'. (3 puntos)

b) La distancia de la recta r a cada uno de los planos π y π'. (3 puntos)

c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π'. (4 puntos)

Problema 3:

Dada la función $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función f. (3 puntos)

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. (3 +1 puntos)

c) El valor de $\int f(x)dx$

Problema 4:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. (3 puntos)

b) Dos constantes a,b de modo que $A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$siendo I la matriz identidad. (3 puntos)

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones$(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones.

Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema.

Problema 5:

Se dan las rectas r: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda, \ \lambda \varepsilon \boldsymbol{R}, \\ z = 2\lambda \end{cases}$ s: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$y el plano π:$3x+ay-z+1=0$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r está contenida en el plano π. (4 puntos)

b) La distancia entre las rectas r y s. (3 puntos)

c) El coseno del ángulo que forman la recta r y la recta t: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$. (3 puntos)

Problema 6:

Los vértices de un triángulo son A(0,12), B(−5,0) y C(5,0). Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas $(-x,0)$,$(x,0)$, siendo $0 \leq x \leq 5$. Los otros dos vértices están situados en los segmentos AB y AC.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La expresión $f(x)$ del área del rectángulo anterior. (4 puntos)

b) El valor de x para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido. (3 puntos)

c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo. (3 puntos)

RESPUESTAS

Problema 1:

a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible.

Vamos a discutir el sistema utilizando el Teorema de Rouché-Fröbenius. Para ello tenemos que estudiar los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada.

Matriz de los coeficientes: $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Como se trata de una matriz 3x3 su mayor rango es 3 por lo que calculamos el valor del menor de orden 3 (toda la matriz). Calculamos el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + a^2 + 2 + 6 - 2a - a = a^2 - 3a + 2$$

Igualamos a cero para ver los valores que anulan el determinante:

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

La primera conclusión que podemos sacar es que si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el $RgM = 3$ y como la matriz ampliada es de dimensión 3x4 y su mayor rango es 3 tenemos que:

Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema será SCD

Vamos a estudiar los casos $a = 1$ y $a = 2$

➔ Caso $a = 1$, sustituyendo el valor tenemos que:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Como la 1ª y 3ª fila son iguales dará cero el determinante de orden 3 comprobamos si existe algún menor de orden 2 diferente de cero:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 \neq 0$ y, por lo tanto su rango será 2.

Estudiamos, para este caso, el rango de la matriz ampliada:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Comprobamos si hay un menor de orden 3 diferente de cero, de las cuatro posibilidades hay una que sabemos que vale cero, comprobamos si alguna de las otras tres da:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 - 18 - 3 + 6 + 4 = -14 \neq 0$ con lo cual es de rango 3, con lo que concluimos que:

Si $a = 1$ el $RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ y el sistema será SI

➔ Caso $a = 2$, sustituyendo el valor tenemos que:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Como la 1ª y 3ª columna son proporcionales dará cero el determinante de orden 3 comprobamos si existe algún menor de orden 2 diferente de cero:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$ y, por lo tanto su rango será 2.

Estudiamos, para este caso, el rango de la matriz ampliada:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Comprobamos si hay un menor de orden 3 diferente de cero, de las cuatro posibilidades hay una que sabemos que vale cero, comprobamos si alguna de las otras tres da:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4 - 18 - 6 + 12 + 8 = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 + 6 - 6 - 4 + 4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 4 + 3 + 9 - 4 + 2 = 0$$

Como no hay ningún menor de orden 3 diferente de cero podemos concluir que la matriz ampliada también tiene rango 2 por lo que:

Si $a = 2$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema será SCI

La discusión completa del sistema será:

- Si $a = 1$ el $RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ y el sistema será SI
- Si $a = 2$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema será SCI
- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema será SCD

Por lo que el sistema es compatible para cualquier valor $a \neq 1$

b) La solución del sistema cuando $a = 0$.

Por la discusión anterior sabemos que el sistema cuando $a = 0$ es SCD.

Sustituyendo en el sistema tenemos que:

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ x - 3y = -2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Matriz de los coeficientes: $M=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&-3&0\\1&1&2\end{pmatrix}$ calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix}1&0&2\\1&-3&0\\1&1&2\end{vmatrix}=-6+0+2+6-0-0=2\neq 0$$

Al tener igual número de ecuaciones e incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes no ser cero podemos resolver por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3&0&2\\-2&-3&0\\0&1&2\end{vmatrix}}{2}=\frac{-18+0-4-0-0-0}{2}=\frac{-22}{2}=-11$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&3&2\\1&-2&0\\1&0&2\end{vmatrix}}{2}=\frac{-4+0+0+4-6-0}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

$z=\frac{\begin{vmatrix}1&0&3\\1&-3&-2\\1&1&0\end{vmatrix}}{2}=\frac{0+0+3+9-0+2}{2}=\frac{14}{2}=7$ Por lo que la solución es: $(x,y,z)=(-11,-3{,}7)$

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

Por la discusión del primer apartado sabemos que este caso corresponde con $a=2$

Como sabemos que la matriz de los coeficientes tiene rango 2 tomamos las ecuaciones e incógnitas que nos han dado ese rango y, las ecuaciones que quedan fuera las quitamos y las incógnitas que quedan fuera las igualamos a parámetros. El sistema es:

$$\begin{cases}x+2y+2z=3\\x-3y+2z=-2\\x+y+2z=2\end{cases}$$

El menor que nos da el rango es: $\begin{vmatrix}1&2\\1&-3\end{vmatrix}=-3-2=-5\neq 0$ por lo que quitamos la última ecuación y hacemos la $z=\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

Ahora tenemos que resolver:

$$\begin{cases}x+2y+2\lambda=3\\x-3y+2\lambda=-2\end{cases}\to\begin{cases}x+2y=3-2\lambda\\x-3y=-2-2\lambda\end{cases}$$

Resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3-2\lambda&2\\-2-2\lambda&-3\end{vmatrix}}{-5}=\frac{-3(3-2\lambda)-2\cdot(-2-2\lambda)}{-5}=\frac{-5+10\lambda}{-5}=1-2\lambda$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&3-2\lambda\\1&-2-2\lambda\end{vmatrix}}{-5}=\frac{1(-2-2\lambda)-1\cdot(3-2\lambda)}{-5}=\frac{-5}{-5}=1$$

Con lo que la solución queda: $(x,y,z)=(1-2\lambda,1,\lambda)$

Problema 2:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π'.

Si la recta es paralela a ambos planos quiere decir que tiene que ser perpendicular a los vectores normales de ambos. Los vectores normales son:

$\vec{n} = (1,1,0)$ y $\vec{n}' = (1,-1,1)$

Para hallar un vector perpendicular a ambos basta con calcular su producto vectorial:

$\vec{n} \wedge \vec{n}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = (1,-1,-2)$ que es el vector director de nuestra recta

Además sabemos que pasa por el punto $P(1,-1,0)$ con lo que podemos escribir las ecuaciones paramétricas como:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

b) La distancia de la recta r a cada uno de los planos π y π'.

Como la recta es paralela a ambos planos su distancia siempre es la distancia de cualquiera de sus puntos al plano correspondiente. Tomamos como punto de la recta el $P(1,-1,0)$ y tenemos que utilizar la fórmula de distancia de un punto a un plano:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

La distancia de r al plano π: $d(P,\pi) = \frac{|1-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u.l.$

La distancia de r al plano π' : $d(P,\pi') = \frac{|1-1\cdot(-1)+0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} u.l.$

c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π'.

Vamos a obtener el plano que tiene como vector normal el vector director de la recta r (que recordemos es paralela a ambos planos) y que pasa por el punto P.

Este plano cumple que es perpendicular a ambos planos por lo que cortará perpendicularmente a la recta intersección de ambos y además contendrá al punto requerido.

El plano tendrá de vector normal el $(1,-1,-2)$(que lo hemos obtenido antes) por lo que su ecuación tendrá el aspecto:

$x - y - 2z + D = 0$

Como tiene que pasar por el punto P hallamos el valor de D sustituyendo las coordenadas y despejando:

$x - y - 2z + D = 0 \rightarrow 1 - (-1) - 2 \cdot 0 + D = 0 \rightarrow 2 + D = 0 \rightarrow D = -2$

Por lo que el plano es el $x - y - 2z - 2 = 0$

Vamos a hallar el punto de corte de ese plano con la recta intersección de ambos. Para eso hay que resolver el sistema formado por las dos ecuaciones de los planos que forman la recta y nuestro plano:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

Resolvemos por Cramer (tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas) y calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 0 - 0 - (-2) - (-1) = 6 \neq 0$por lo que el sistema es de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{2 + 2 + 0 - 0 - (-2) - (-1)}{6} = \frac{7}{6}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-2 + 1 + 0 - 0 - (-2) - 2}{6} = \frac{-1}{6} z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-2 + 1 - 1 - (-1) - 2 - (-1)}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

Luego el punto de intersección es el: $\left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$

Hallamos ahora las ecuaciones de la recta que pasa por P y por el punto hallado:

$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \rightarrow \frac{x-1}{\frac{7}{6}-1} = \frac{y+1}{\frac{-1}{6}+1} = \frac{z-0}{\frac{-1}{3}-0} \rightarrow \frac{x-1}{\frac{1}{6}} = \frac{y+1}{\frac{5}{6}} = \frac{z}{\frac{-1}{3}}$

Tomamos, para simplificar cálculos (multiplicamos por -6) el: $\vec{v} = (1,5,-2)$

Las ecuaciones serán (en paramétricas):

$$s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 5\lambda \; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

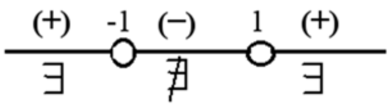
Problema 3:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función f.

La función es una racional polinómica con una raíz en el denominador por lo que estarán fuera del dominio los puntos que anulan el denominador o lo hacen negativo. Para saber el dominio tenemos que resolver la inecuación:

$x^2 - 1 > 0 \rightarrow$ como es continua hallamos cuando vale cero y estudiamos el signo en los intervalos que definen las soluciones.

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$por lo que estudiamos el signo de $x^2 - 1$en los intervalos:



El dominio de la función será: $Domf(x) =]-\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$

Asíntotas horizontales. Se encuentran en el valor, si existe de los límites:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 1$(por ser el grado del denominador igual que el del numerador y los coeficientes 1) luego tiene asíntota horizontal en $y = 1$por $+\infty$

Además podemos comprobar si la función va por debajo o por encima de la asíntota dando un valor grande (relativamente) y positivo, por ejemplo:

$f(10) = \frac{10}{\sqrt{10^2-1}} \simeq 1.005$por lo que la función va por encima de la asíntota.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -1$(por ser el grado del denominador igual que el del numerador y los coeficientes 1 pero el denominador es siempre positivo por la raíz mientras que el numerador será negativo al ser la tendencia $-\infty$) luego tiene asíntota horizontal en $y = -1$por $-\infty$.

Además podemos comprobar si la función va por debajo o por encima de la asíntota dando un valor grande (relativamente) y negativo, por ejemplo:

$f(-10) = \frac{-10}{\sqrt{(-10)^2-1}} \simeq -1.005$por lo que la función va por debajo de la asíntota.

Asíntotas verticales. Las buscamos en las discontinuidades del dominio, el valor del límite a esos puntos tiene que ser un infinito. Tenemos dos valores candidatos: $x = -1$y$x = 1$calculamos los límites a esos puntos teniendo en cuenta que por la derecha del -1 no hay función y por la izquierda del 1 tampoco (por el dominio calculado antes)

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \left(\frac{-1}{0}\right) = \begin{cases} \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = No hay función \\ \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty \end{cases}$$ luego$x = -1$es asíntota vertical

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \left(\frac{1}{0}\right) = \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty \\ \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = No hay función \end{cases}$$ luego$x = 1$es asíntota vertical

Como tiene asíntotas horizontales no tiene oblicua.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función.

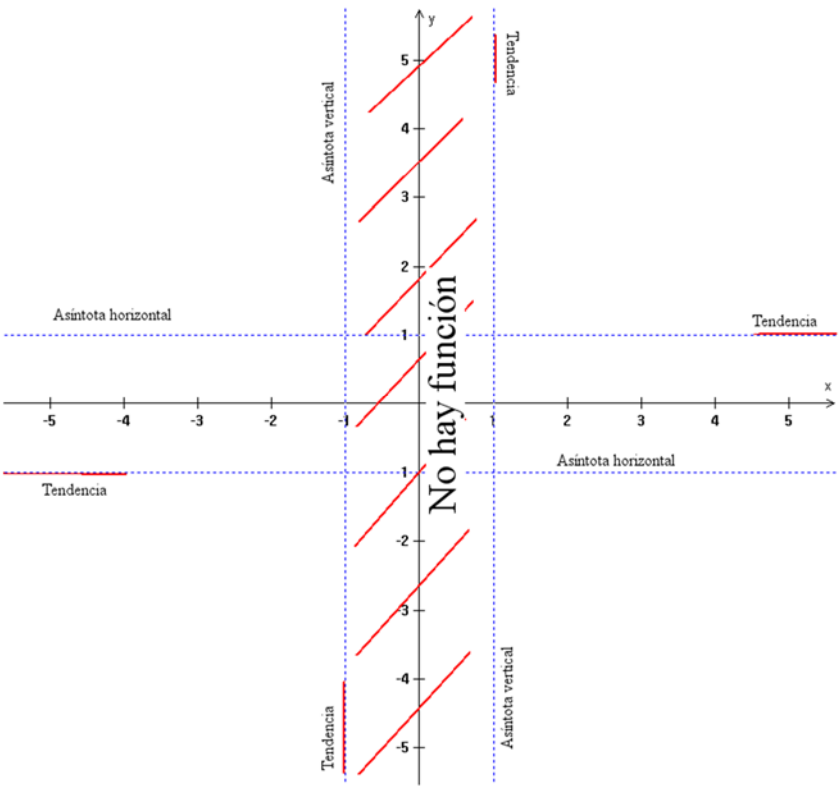
Para calcularlos tenemos que hacer la derivada e igualar a cero para conocer los puntos críticos:

$$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2-1}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2-1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{\dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{-1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

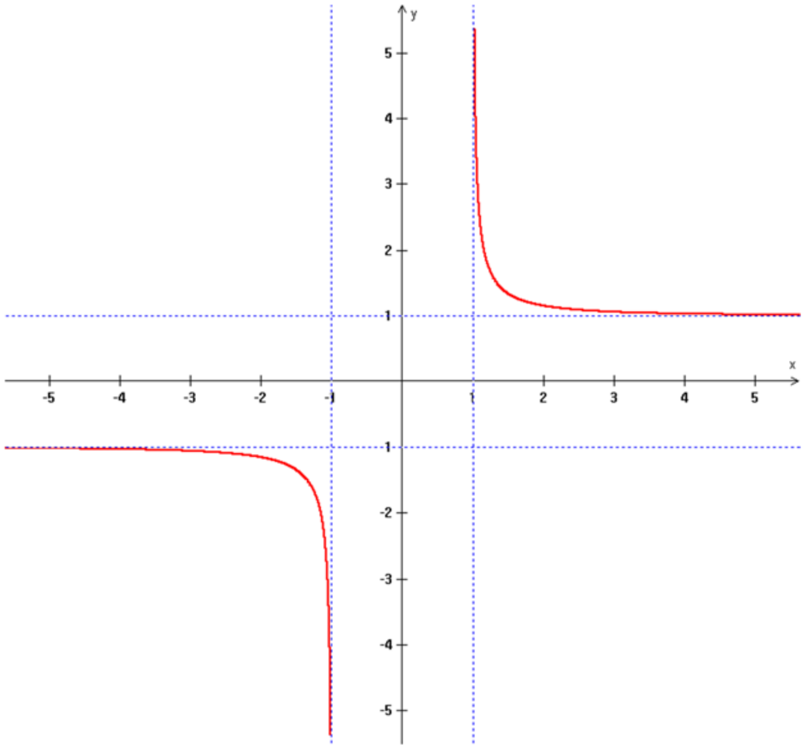
Como es una función racional se hace cero cuando lo es el numerador. Como en este caso no puede ser cero tenemos que la función no tiene puntos críticos (máximos o mínimos).

Por otro lado, tanto para valores positivos como negativos de la variable podemos observar que la derivada es negativa siempre por lo que tenemos que:

La función es decreciente en todo su dominio.



Para representarla gráficamente utilizamos las asíntotas, las tendencias halladas y el dominio:



c) El valor de $\int f(x)dx$

Primero vamos a obtener una primitiva de la función:

$$\int f(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

Como se trata de una función racional que tiene una raíz en el denominador podemos aplicar un cambio de variable o ver que se trata, salvo un factor, de la derivada de una raíz cuadrada.

$\int f(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int \frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}dx = \sqrt{x^2-1} + C$

Si aplicamos, alternativamente, un cambio de variable tenemos que:

$$\int f(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \left| \begin{matrix} t = x^2-1 \\ dt = 2xdx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{2\cdot\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2-1} + C$$

Con ese resultado volvemos para resolver la integral definida:

$$\int f(x)dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^3 = \sqrt{9-1} - \sqrt{4-1} = \sqrt{8} - \sqrt{3} \simeq 1.0964$$

Problema 4:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa.

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es diferente de cero. Calculamos el determinante:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0$por lo que$\exists A^{-1}$

Para calcular la inversa lo hacemos con la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

Aplicando la fórmula tenemos:

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar el resultado (no es obligatorio pero sí conveniente) aplicando:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & -2+2+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+2-2 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$luego es correcto el cálculo.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Dos constantes $a,\ b$ de modo que$A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación$A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$siendo I la matriz identidad.

Vamos a resolverlo aplicando la ecuación que nos dan. Para ello tenemos que fijarnos que nos piden unas constantes relacionadas con el valor de la inversa. Ya sabemos que$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

En la expresión que nos dan despejamos la identidad y obtenemos:

$$A^3 - 3A^2 + 3A = I$$

Si multiplicamos la expresión por la inversa tenemos que:

$$A^{-1} \cdot A^3 - A^{-1} \cdot 3A^2 + A^{-1} \cdot 3A = A^{-1} \cdot I$$

Sabiendo que los números conmutan con las matrices y que $A^{-1} \cdot I = A^{-1}$obtenemos:

$$A^{-1} \cdot A^3 - 3 \cdot A^{-1} \cdot A^2 + 3 \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1}$$

Ahora aplicamos la definición de potencia de una matriz: $A^3 = A \cdot A \cdot A$y$A^2 = A \cdot A$:

$$A^{-1} \cdot A \cdot A \cdot A - 3 \cdot A^{-1} \cdot A \cdot A + 3 \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1}$$

Aplicando la definición de inversa tenemos que: $A^{-1} \cdot A = I$:

$$I \cdot A \cdot A - 3 \cdot I \cdot A + 3 \cdot I = A^{-1}$$

Aplicando ahora que $I \cdot A = A$:

$A \cdot A - 3 \cdot A + 3 \cdot I = A^{-1} \rightarrow A^2 - 3 \cdot A + 3 \cdot I = A^{-1}$

Comparando la expresión resultante con la que nos dan inicialmente tenemos que:

$A^{-1} = A^2 + aA + bI \Leftrightarrow A^{-1} = A^2 - 3 \cdot A + 3 \cdot I$

Por lo cual tenemos que: $a = -3$y$b = 3$

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones$(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$tenga infinitas soluciones. Para dicho valor deλ hallar todas las soluciones del sistema.

La matriz de términos independientes es una matriz columna de ceros lo cual implica que el **sistema es homogéneo.**

Por el teorema de Rouché-Fröbenius sabemos que un sistema homogéneo siempre tiene una única solución compatible determinada: la trivial $(x = y = z = 0)$. Para que tenga una solución diferente a la trivial ha de ser sistema compatible indeterminado (con infinitas soluciones) que es la que queremos.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius sabemos que un sistema será SCI si el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada coinciden (cosa que en un sistema homogéneo siempre se da) pero además el rango ha de ser menor que el número de incógnitas (3) por lo que, para cumplir las condiciones del problema tenemos que:

$Rg(A - \lambda I) = 2$

Para que eso se cumpla los menores de orden 3 de la matriz $A - \lambda I$han de ser cero.

Sólo hay un menor de orden 3 en la matriz por lo que lo igualamos a cero y hallamos el valor del parámetro:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = (1-\lambda)^3 = 0$$

La ecuación tiene una única solución (triple) que es $\lambda = 1$

Por lo tanto **el sistema tiene infinitas soluciones para el valor** $\lambda = 1$

Para ese valor el sistema queda:

$$A - \lambda I = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ 0 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ Por lo que podemos deducir que $y = 0$y las otras incógnitas pueden tener cualquier valor (les tenemos que asignar un parámetro) por lo que la **solución del sistema es**:

$\begin{matrix} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \beta \end{matrix}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Problema 5:

a) Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r esta contenida en el plano π.

Este ejercicio hay varias formas de hacerlo. La más sencilla es aplicar que **una recta estará contenida en un plano si dos de sus puntos lo están.** (El razonamiento hay que escribirlo)

Por lo cual tomamos dos puntos cualesquiera de la recta:

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} hacemos \lambda = 0 \rightarrow p_0(1,2,0) \\ hacemos \lambda = 1 \rightarrow p_1(1,3,2) \end{cases}$$

Sustituimos los puntos en la ecuación del plano. **Para que esos puntos pertenezcan al plano han de verificar su ecuación**.

$$\pi: 3x + ay - z + 1 = 0$$

Si tomamos $p_0(1,2,0)$tenemos que:$3 \cdot 1 + a \cdot 2 - 0 + 1 = 0 \rightarrow 2a + 4 = 0 \rightarrow a = -2$

Si tomamos $p_1(1,3,2)$tenemos que:$3 \cdot 1 + a \cdot 3 - 2 + 1 = 0 \rightarrow 3a + 2 = 0 \rightarrow a = \frac{-2}{3}$

Como ambas valores **no son el mismo** podemos afirmar que **no existe ningún valor de *a* para el que la recta *r* esta contenida en el plano π.**

b) La distancia entre las rectas r y s.

Para calcular la distancia entre dos rectas es necesario conocer su posición relativa (coincidentes, paralelas, se cortan o se cruzan) ya que la forma de calcular la distancia es diferente (si son coincidentes o se cortan la distancia es cero).

Para determinar la posición relativa de ambas rectas necesitamos un punto y un vector de cada una:

$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$por ser la ecuación paramétrica sabemos que el punto es: $P_r(1,2,0)$y el vector director$\overrightarrow{v_r} = (0,1,2)$

$s: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$por ser la ecuación continua sabemos que el punto es: $P_s(-1,0,-2)$y el vector director$\overrightarrow{v_s} = (2,-1,1)$

Hallamos el vector que une ambos puntos:$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1-1, 0-2, -2-0) = (-2,-2,-2)$

Estudiamos ahora si los tres vectores (el director de r, el de s y el que une dos puntos de r y s) son independientes. Para ello estudiamos los rangos de la matriz formada por los dos vectores directores ampliada con el vector de los puntos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de A: como $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$tenemos que $rgA = 2$

El rango de A^* puede ser tres: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 8 - 2 - 4 + 4 - 0 = -10 \neq 0$entonces$rgA^* = 3$

Como el vector de los puntos y los directores de las rectas son independientes podemos afirmar que las rectas se cruzan.

Para hallar la distancia entre dos rectas que se cruzan podemos utilizar la fórmula:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|}$$

Calculamos: $\left|\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right| \to \left|\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}\right| = |0-8-2-4+4-0| = |-10| = 10$

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = (3,4,-2)$$

Hallamos el módulo del producto vectorial: $|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| = \sqrt{3^2+4^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$

Por lo que la distancia será:

$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|} =$

$$\frac{10}{\sqrt{29}} u.l.$$

c) El coseno del ángulo que forma la recta r y la recta$t$: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$

Este ejercicio presenta una primera dificultad que no siempre comprobamos y es que **para que dos rectas formen un ángulo tienen que cortarse en un punto.**

Para esa comprobación y dado que tenemos una en forma paramétrica y otra en forma implícita podemos proceder del siguiente modo: Vamos a comprobar si existe algún valor del parámetro λ de la recta r para el que se verifiquen las ecuaciones de la recta t.

Sustituyendo las ecuaciones de r en t tenemos que:

t: $\begin{cases} 2 \cdot 1 - (2+\lambda) = 0 \\ (2+\lambda) - 2\lambda = 2 \end{cases} \to$ de la primera ecuación: $\lambda = 0$

si sustituimos en la segunda obtenemos que el sistema es compatible:$2 = 2$por lo que **las rectas se cortan en un punto y es posible calcular el ángulo que forman**.

Para ello debemos conocer un vector director de cada recta. Tenemos que: $\overrightarrow{v_r} = (0,1,2)$

Hallamos un vector director de t. Como se trata de la forma implícita podemos resolver el sistema compatible indeterminado de las ecuaciones (y hallamos la ecuación paramétrica de la que es fácil tener un vector director) o bien hacemos el producto vectorial de los vectores normales de los planos que representan las ecuaciones:

Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1} = (2,-1,0)$ y$\overrightarrow{n_2} = (0,1,-1)$

Hallamos su producto vectorial:

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = (1,2,2) \text{que es } \overrightarrow{v_t}$$

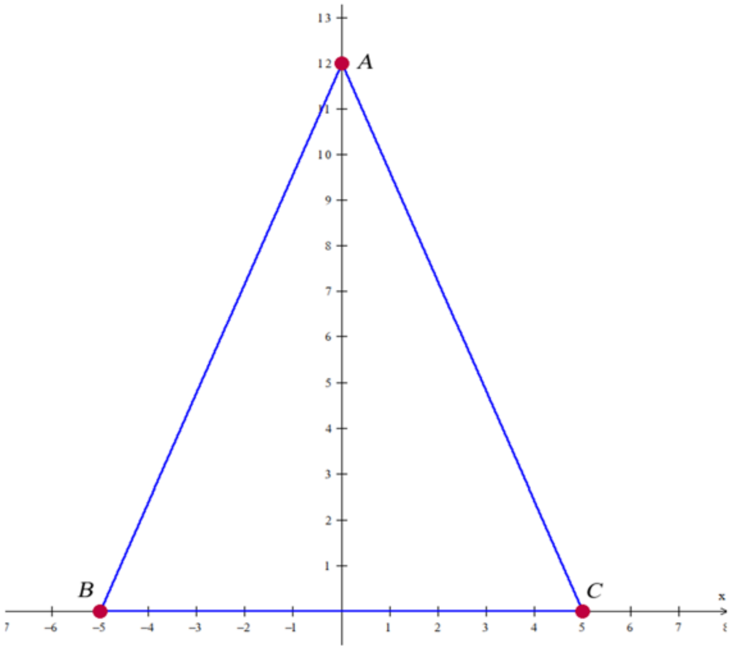
Ahora hallamos el ángulo que forman ambos vectores utilizando para ello la fórmula que se basa en el producto escalar:

$$cos\left(\widehat{\overrightarrow{v_r}\overrightarrow{v_t}}\right) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_t}|}{|\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_t}|} = \frac{|(0,1,2) \cdot (1,2,2)|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

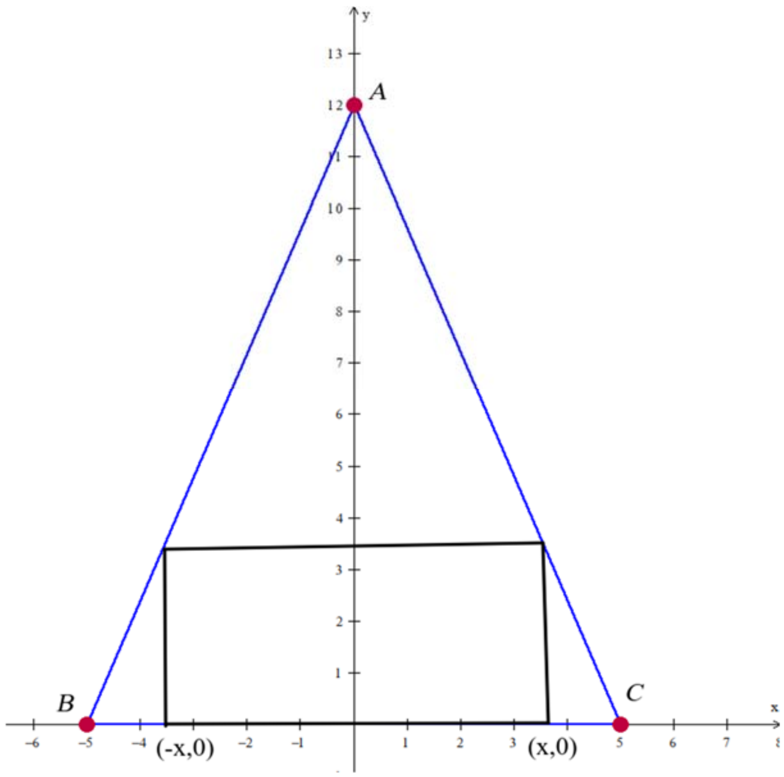
Luego la solución es: $cos\left(\widehat{\overrightarrow{v_r}\overrightarrow{v_t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Problema 6:

No lo pide pero sería recomendable hacer un dibujo del problema para hacernos idea de lo que se nos está preguntando. El triángulo lo podemos dibujar en un eje de coordenadas y nos queda:



Vamos a dibujar rectángulos inscritos en ese triángulo como el de la figura siguiente:



a) La expresión $f(x)$ del área del rectángulo anterior.

Tenemos que hallar la expresión del área del rectángulo en función del valor de x. Todos debemos saber que el área de un rectángulo es su base por su altura.

La base mide desde el valor$(-x,0)$al $(x,0)$por lo que mide $2x$.

La altura (nos da igual cuál tomemos) es un punto de la recta que une los vértices A y C.

La ecuación de la recta que une los puntos$A(0,12)$y$C(5,0)$es:

(ecuación de la recta que une dos puntos) $\frac{x-0}{5-0}=\frac{y-12}{0-12} \rightarrow \frac{x}{5}=\frac{y-12}{-12} \rightarrow y=\frac{-12x}{5}+12$

Por lo tanto el valor que nos da la altura correspondiente al vértice (x,0) será$h=\frac{-12x}{5}+12$

El área del rectángulo buscada tendrá la expresión:

$$A(x)=b\cdot h=2x\cdot\left(\frac{-12x}{5}+12\right)=\frac{-24x^2}{5}+24x x\in[0,5]$$

b) El valor de x para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido.

Tenemos que buscar un máximo de la función área por lo que vamos a derivar e igualar a cero la derivada para hallar los puntos críticos:

$A'(x)=\frac{-48x}{5}+24=0 \rightarrow 24=\frac{48x}{5} \rightarrow 120=48x \rightarrow x=\frac{120}{48}=\frac{5}{2}=2.5$

Para conocer la naturaleza del mismo (máximo, mínimo o punto de inflexión) calculamos el valor de la segunda derivada en el punto en cuestión:

$A''(x)=\frac{-48}{5}<0$Como siempre es negativa el punto calculado es un **máximo relativo**.

Como sabemos que una función continua (la función área es polinómica y, por lo tanto, continua en todos sus puntos) definida en un intervalo cerrado alcanza en éste un máximo y mínimo absolutos en los extremos relativos o en los extremos del intervalo tenemos que la función ha de tener su máximo en el valor hallado$x=2.5$ o en $x=0$o$x=5$

Hallamos el valor de$A(x)$en los tres puntos:

$$A(x)=\frac{-24x^2}{5}+24x$$

$$A(0)=\frac{-24\cdot 0^2}{5}+24\cdot 0=0$$

$$A(2.5)=\frac{-24\cdot 2.5^2}{5}+24\cdot 2.5=30$$

$$A(5)=\frac{-24\cdot 5^2}{5}+24\cdot 5=0$$

Por lo que podemos concluir que el valor $x = 2.5$es un máximo absoluto mientras que los valores $x = 0$y$x = 5$son los mínimos absolutos. El área máxima es $A(2.5) = 30u^2$

Las dimensiones del rectángulo serán:

Base: $2x = 2 \cdot 2.5 = 5u$.

Altura: $h = \frac{-12x}{5} + 12 = \frac{-12 \cdot 2.5}{5} + 12 = 6u$.

c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo. (3 puntos)

El área de un triángulo se calcula mediante la fórmula conocida de$A = \frac{b \cdot h}{2}$la base del mismo mide 10 u. mientras que su altura es de 12 u. por lo que el área es: $A = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60u^2$

La proporción buscada es: $\frac{A_r}{A_t} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$