MATEMÁTICAS aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

Textos Marea Verde

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Javier Ros Castellón

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

Problema 1:

Sean A, B, X, Y matrices invertibles que verifican $A \cdot X = B$ y $B \cdot Y = A$.

a) **(1 punto)** Compruebe que $Y^{-1} = X$.

b) **(1.5 puntos)** Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle X e Y.

Problema 2:

a) **(1 punto)** Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena *A* produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena *B* produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas *A* y *B* es de 1200 y 1500 euros, respectivamente. La cadena *A* puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena *B*. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, formule, sin resolver, el problema que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas *A* y *B* para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos.

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x + 2y \geq 7 \qquad 4x - y \geq 1 \qquad 2x - y \leq 4 \qquad 3x + 2y \leq 20 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Obtenga el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x + y$ en el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 4$, con a y b números reales.

a) **(1 punto)** Determine los valores a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(2, 36)$.

b) **(0.75 puntos)** Para $a = 4$ y $b = -3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos relativos.

c) **(0.75 puntos)** Para $a = 4$ y $b = -3$, calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$ y $F(2) = 10$.

Problema 4:

a) **(1.2 puntos)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = (-5 + x^2)^2 \cdot e^{3x} \qquad g(x) = \frac{\ln(x^3 - 5x)}{1 - x^2}$$

b) **(1.3 puntos)** Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x) = -x^2 + 2x + 3$ y el eje de abscisas.

BLOQUE C

Problema 5:

A 120 estudiantes se les ha recomendado la lectura de dos libros. Se sabe que 46 de ellos han leído el primer libro recomendado, 34 el segundo y 16 estudiantes han leído ambos libros. Se elige un estudiante al azar.

a) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya leído alguno de los dos libros.
b) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros.
c) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que solamente haya leído el primer libro.
d) **(0.7 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo.

Problema 6:

Las bicicletas de alquiler de una ciudad se clasifican por su calidad: buena, media y mala. El 30% de dichas bicicletas son gestionadas por una empresa E_1 y el resto por una empresa E_2. De las bicicletas de la empresa E_1, el 80% son de buena calidad, el 5% de calidad media y el resto de mala calidad. De las bicicletas de la empresa E_2 se sabe que el 60% son de buena calidad, pero se desconocen los porcentajes de bicicletas de calidad media y calidad mala. Se elige al azar una bicicleta de alquiler de esa ciudad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que sea de buena calidad.
b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea de la empresa E_1 y de mala calidad.
c) **(0.75 puntos)** Si se sabe que el porcentaje de bicicletas de alquiler de calidad media en toda la ciudad es del 19%, ¿cuál es la probabilidad de que sea de calidad media, sabiendo que la bicicleta elegida es de la empresa E_2?

BLOQUE D

Problema 7:

La vida útil, en años, de las lavadoras de un determinado modelo, se distribuye según una ley Normal de varianza 7.84. En una muestra de 12 lavadoras, la vida útil en años ha sido:

9.5   9   10.2   8.6   11.4   10.8   12.6   11   11.8   14.5   10.4   9.8

a) **(1.5 puntos)** Con estos datos, determine un intervalo de confianza al 93.5% para estimar la vida útil media de estas lavadoras.
b) **(1 punto)** Calcule el error máximo que se puede cometer al estimar la vida útil media de este modelo de lavadoras, si se toma una muestra de 50 lavadoras y asumimos un nivel de confianza del 99%.

Problema 8:

La renta anual de los hogares andaluces, en miles de euros, se distribuye según una ley Normal con desviación típica 5 y media desconocida μ.

a) **(1 punto)** Si se desea que en el 99% de las posibles muestras del mismo tamaño, elegidas de entre los hogares andaluces, la media muestral no difiera de la renta media anual poblacional de dichos hogares en más de una unidad, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de las muestras?
b) **(0.5 puntos)** Si se consideran muestras de hogares andaluces de tamaño 100, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria "Renta media anual muestral"?
c) **(1 punto)** Suponiendo que la renta media anual poblacional de los hogares andaluces es $\mu = 24$, ¿cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 100 la renta media anual muestral sea superior a 25?

SOLUCIONES BLOQUE A

Problema 1:

Sean A, B, X, Y matrices invertibles que verifican $A \cdot X = B$ y $B \cdot Y = A$.

a) **(1 punto)** Compruebe que $Y^{-1} = X$.

b) **(1.5 puntos)** Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle X e Y.

Solución:

a) Una matriz cuadrada A de orden n se dice que es *invertible* si existe otra matriz cuadrada del mismo orden, llamada matriz inversa de A y que denotaremos por A^{-1}, tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n.
En nuestro caso, para comprobar que $Y^{-1} = X$, es decir, que la inversa de Y es X, tendremos que ver que el producto de X por Y es la matriz identidad.
Como se verifica que $A \cdot X = B$ y $B \cdot Y = A$, si sustituimos la primera ecuación en la segunda:

$$\left.\begin{matrix} A \cdot X = B \\ B \cdot Y = A \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \cdot X \cdot Y = A$$

de donde, multiplicando por A^{-1} a la izquierda los dos miembros[1],

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X \cdot Y = \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I}$$

Y, por tanto,

$$X \cdot Y = I$$

Así,

$$X \cdot \underbrace{Y \cdot Y^{-1}}_{I} = I \cdot Y^{-1} \Rightarrow X = Y^{-1}$$

$$Y^{-1} = X$$

b) Como $A \cdot X = B$ y A es invertible, multiplicando por A^{-1} a la izquierda los dos miembros, obtenemos que $X = A^{-1} \cdot B$.
Por tanto, para obtener la matriz X, basta calcular la inversa de la matriz A y multiplicarla por B.
Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

la inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues,

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

De igual forma, como $B \cdot Y = A$ y B es invertible, entonces $Y = B^{-1} \cdot A$.
Por tanto, como

[1] Sabemos que existe A^{-1} por ser A invertible.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

la inversa de B es:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}[Adj(B)]^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y, finalmente,

$$Y = B^{-1} \cdot A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Las matrices pedidas son[2]: $X = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

Problema 2:

a) **(1 punto)** Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena *A* produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena *B* produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas *A* y *B* es de 1200 y 1500 euros, respectivamente. La cadena *A* puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena *B*. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, formule, <u>sin resolver</u>, el problema que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas *A* y *B* para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos.

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x + 2y \geq 7 \qquad 4x - y \geq 1 \qquad 2x - y \leq 4 \qquad 3x + 2y \leq 20 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Obtenga el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x + y$ en el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

Solución:

a) Estamos ante un problema de *Programación Lineal*. Debemos obtener, por tanto, la *función objetivo* a optimizar (en este caso minimizar) y las *restricciones* a las que está sujeta.

Los puntos del plano que cumplan todas las restricciones estarán en una región del plano llamada *región factible*. La *solución óptima* será aquella que optimice la función objetivo. Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

Dispongamos los datos del problema en una tabla:

	Horas de funcionamiento	Lavadoras	Frigoríficos	Coste por hora
Cadena A	x	$10x$	$5x$	$1200x$
Cadena B	y	$7y$	$6y$	$1500y$

Nuestra **función objetivo** a minimizar es:

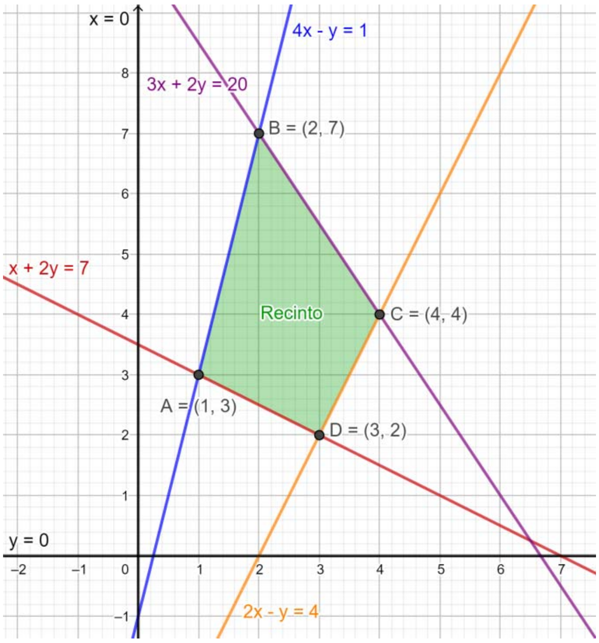
$$F(x, y) = 1200x + 1500y$$

Y las **restricciones** a las que debe estar sujeta son:

[2] Para el cálculo de la matriz Y podríamos haber usado el hecho de que las matrices X e Y son inversas (apartado a) y, por tanto, $Y = X^{-1} = \frac{1}{|X|}[Adj(X)]^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{c} x \le 2y \\ 10x+7y \ge 400 \\ 5x+6y \ge 280 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

b) El recinto definido por las inecuaciones dadas es:



Los vértices del recinto son los puntos: $A(1,3)$, $B(2,7)$, $C(4,4)$, $D(3,2)$

Estos puntos se obtienen como intersección de las rectas correspondientes. Así, por ejemplo, el punto $A(1,3)$ se obtiene como intersección de las rectas $x+2y=7$, $4x-y=1$; etc.

Vértice A	Vértice B	Vértice C	Vértice D
$\left.\begin{array}{r} x+2y=7 \\ 4x-y=1 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} 3x+2y=20 \\ 4x-y=1 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} 3x+2y=20 \\ 2x-y=4 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} x+2y=7 \\ 2x-y=4 \end{array}\right\}$
$A(1,3)$	$B(2,7)$	$C(4,4)$	$D(3,2)$

Sabemos que el mínimo se encuentra en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos la función objetivo $F(x,y)=2x+y$ en cada uno de ellos.

Para $A(1,3)$ obtenemos que $F(A)=F(1,3)=2\cdot 1+3=5$

Para $B(2,7)$, $F(B)=F(2,7)=2\cdot 2+7=11$

Para $C(4,4)$, $F(C)=F(4,4)=2\cdot 4+4=12$

Para $D(3,2)$, $F(D)=F(3,2)=2\cdot 3+2=8$

Por tanto, el mínimo se alcanza en el punto $A(1,3)$ y vale 5.

SOLUCIONES BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 4$, con a y b números reales.

a) **(1 punto)** Determine los valores a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(2, 36)$.
b) **(0.75 puntos)** Para $a = 4$ y $b = -3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos relativos.
c) **(0.75 puntos)** Para $a = 4$ y $b = -3$, calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$ y $F(2) = 10$.

Solución:

a) Para que la función f tenga un extremo relativo en el punto $(2,36)$, deberá ocurrir que:
- Pase por el punto $(2,36)$; es decir, $f(2) = 36$
- Se anule su derivada en $x = 2$; esto es, $f'(2) = 0$

La derivada de la función f es $f'(x) = 3ax^2 + b$, por lo que estas condiciones quedan como:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 36 \Rightarrow a\cdot 2^3 + b\cdot 2 + 4 = 36 \Rightarrow 8a + 2b + 4 = 36 \Rightarrow 8a + 2b = 32 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 3a\cdot 2^2 + b = 0 \Rightarrow 12a + b = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 8a + 2b = 32 \\ 12a + b = 0 \end{array}\right\}$$

tenemos que: $a = -2$ y $b = 24$.

b) Para $a = 4$ y $b = -3$ nuestra función queda como $f(x) = 4x^3 - 3x + 4$ y su derivada es $f'(x) = 12x^2 - 3$.
Para el estudio de la monotonía igualaremos la derivada primera a cero:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Obtenemos así los puntos de posible cambio de signo de la derivada. En aquellos intervalos o semirrectas en los que el signo de la derivada primera sea positivo la función será creciente; y en los que tenga signo negativo, será decreciente.

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
Signo de $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

Así, la función es creciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

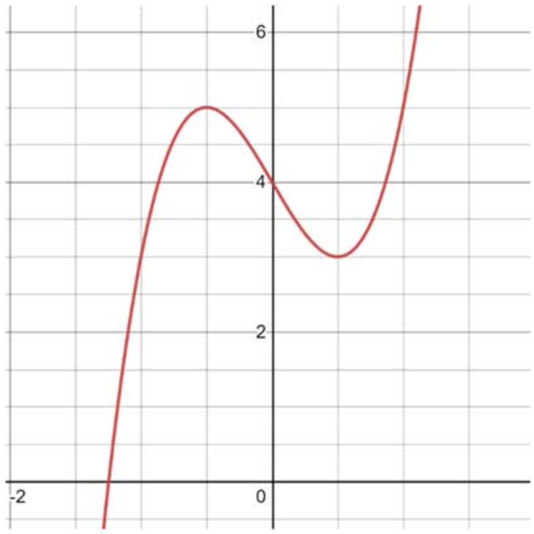
Y, como

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 4\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{3}{2} + 4 = 5$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\frac{1}{2} + 4 = 4\cdot\frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 4 = 3$$

Alcanza un máximo relativo en $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

En el siguiente gráfico de la función $f(x) = 4x^3 - 3x + 4$ puede observarse lo afirmado en este apartado.



c) Como $F'(x) = f(x)$, entonces $F(x) = \int f(x)dx$, luego:

$$F(x) = \int f(x)dx = \int (4x^3 - 3x + 4)dx = 4\cdot\frac{x^4}{4} - 3\cdot\frac{x^2}{2} + 4x + C = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$$

Además, como sabemos que $F(2) = 10$, entonces:

$$2^4 - \frac{3}{2}\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + C = 10 \Rightarrow 16 - 6 + 8 + C = 10 \Rightarrow C = -8$$

Luego la función buscada es:

$$F(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 8$$

Problema 4:

a) **(1.2 puntos)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = (-5 + x^2)^2 \cdot e^{3x} \qquad g(x) = \frac{\ln(x^3 - 5x)}{1 - x^2}$$

b) **(1.3 puntos)** Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x) = -x^2 + 2x + 3$ y el eje de abscisas.

Solución:

a) Aplicando la regla de la cadena para la obtención de las derivadas pedidas, obtenemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(-5 + x^2)\cdot 2x\cdot e^{3x} + (-5 + x^2)^2\cdot 3e^{3x} = \\ &= (-5 + x^2)\cdot e^{3x}\cdot[4x + (-5 + x^2)\cdot 3] = \\ &= (-5 + x^2)\cdot e^{3x}\cdot(4x - 15 + 3x^2) = \\ &= (x^2 - 5)(3x^2 + 4x - 15)\cdot e^{3x} \end{aligned}$$

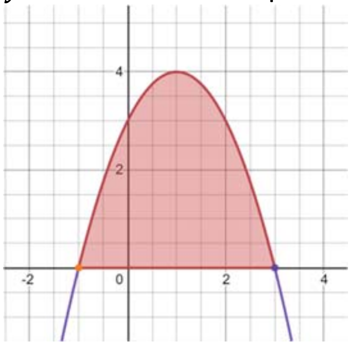
$$f'(x) = (x^2 - 5)(3x^2 + 4x - 15)\cdot e^{3x}$$

Para la función $g(x)$ tenemos que:

$$g'(x) = \frac{\frac{3x^2-5}{x^3-5x}\cdot(1-x^2)-\ln(x^3-5x)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{\frac{3x^2-5}{x^3-5x}\cdot(1-x^2)+2x\ln(x^3-5x)}{(1-x^2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{3x^2-5}{x^3-5x}\cdot(1-x^2)+2x\ln(x^3-5x)}{(1-x^2)^2}$$

b) Para obtener el área del recinto acotado por la gráfica $h(x) = -x^2+2x+3$ y el eje de abscisas $y = 0$ calcularemos primero los puntos de corte de ambas funciones:



$$\left.\begin{matrix} h(x) = -x^2+2x+3 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -x^2+2x+3 = 0 \Rightarrow x = -1; x = 3$$

El área del recinto acotado por ambas gráficas será:

$$Área = \left|\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx\right|$$

Como

$$\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{3} = \left(-\frac{27}{3}+\frac{18}{2}+9\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right) = \frac{32}{3}u^2$$

El área es $\frac{32}{3}u^2$

SOLUCIONES BLOQUE C

Problema 5:

A 120 estudiantes se les ha recomendado la lectura de dos libros. Se sabe que 46 de ellos han leído el primer libro recomendado, 34 el segundo y 16 estudiantes han leído ambos libros. Se elige un estudiante al azar.

a) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya leído alguno de los dos libros.
b) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros.
c) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que solamente haya leído el primer libro.
d) **(0.7 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo.

Solución:

Sean los sucesos A: *"El estudiante ha leído el primer libro"* y B: *"El estudiante ha leído el segundo libro"*. Entonces,

$$p(A) = \frac{46}{120} = \frac{23}{60}$$

$$p(B) = \frac{34}{120} = \frac{17}{60}$$

$$p(A \cap B) = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$$

a) La probabilidad de que un estudiante elegido al azar haya leído alguno de los dos libros puede expresarse como:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{23}{60} + \frac{17}{60} - \frac{2}{15} = \frac{8}{15}$$

$$p(A \cup B) = \frac{8}{15}$$

b) El suceso *"no haber leído ninguno de los dos libros"* puede expresarse como *"no haber leído el primer libro y no haber leído el segundo libro"*, $\bar{A} \cap \bar{B}$, y por las leyes de Morgan sabemos que $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$. Por tanto, la probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros puede calcularse como:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{7}{15}$$

c) El suceso *"solamente ha leído el primer libro"* puede expresarse como *"ha leído el primer libro y no ha leído el segundo libro"*; esto es, $A \cap \bar{B} = A - B$. Por tanto,

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{23}{60} - \frac{2}{15} = \frac{1}{4}$$

$$p(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{4}$$

d) En este último apartado tenemos el caso de una probabilidad condicionada. La probabilidad de que *"haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo"*, puede expresarse como $p(A/\bar{B})$, luego:

$$p(A/\bar{B}\ ) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{1/4}{1-17/60} = \frac{1/4}{43/60} = \frac{15}{43}$$

$$p(A/\bar{B}\ ) = \frac{15}{43}$$

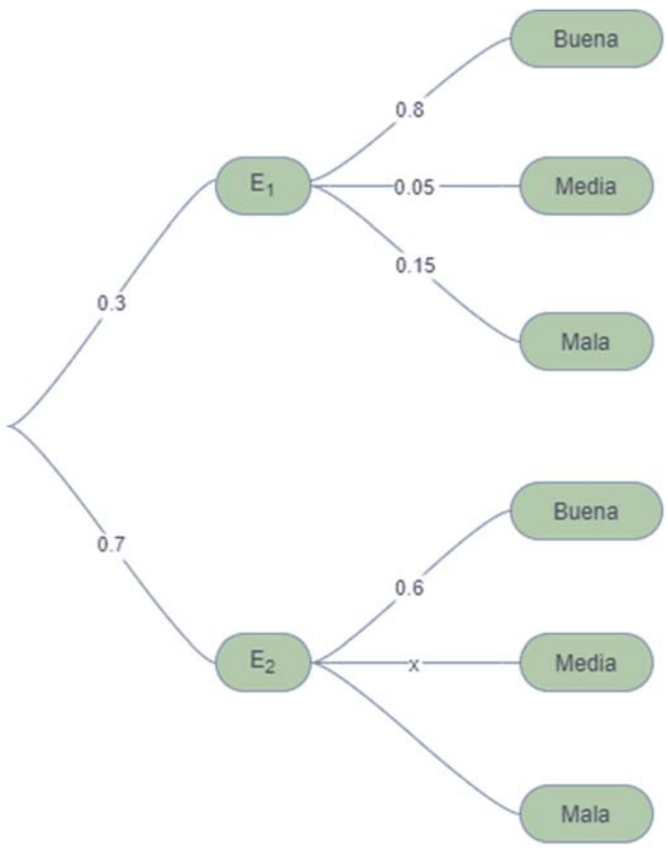
Problema 6:

Las bicicletas de alquiler de una ciudad se clasifican por su calidad: buena, media y mala. El 30% de dichas bicicletas son gestionadas por una empresa E_1 y el resto por una empresa E_2. De las bicicletas de la empresa E_1, el 80% son de buena calidad, el 5% de calidad media y el resto de mala calidad. De las bicicletas de la empresa E_2 se sabe que el 60% son de buena calidad, pero se desconocen los porcentajes de bicicletas de calidad media y calidad mala. Se elige al azar una bicicleta de alquiler de esa ciudad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que sea de buena calidad.
b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea de la empresa E_1 y de mala calidad.
c) **(0.75 puntos)** Si se sabe que el porcentaje de bicicletas de alquiler de calidad media en toda la ciudad es del 19%, ¿cuál es la probabilidad de que sea de calidad media, sabiendo que la bicicleta elegida es de la empresa E_2?

Solución:

Podemos hacer el siguiente diagrama de árbol:



a) Probabilidad de que sea de buena calidad.

$$p(Buena) = 0.3 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.6 = 0.66$$

b) Probabilidad de que sea de la empresa E_1 y de mala calidad.

$$p(E_1 \cap Mala) = 0.3 \cdot 0.15 = 0.045$$

c) Como sabemos que $p(Media) = 0.19$, entonces[3]:

$$p(Media) = 0.3 \cdot 0.05 + 0.7 \cdot x = 0.19 \Rightarrow 0.015 + 0.7x = 0.19$$

De donde,

$$x = p(Media/E_1\,) = 0.25$$

[3] $p(Media) = p(E_1) \cdot p(Media/E_1) + p(E_2) \cdot p(Media/E_2) \Rightarrow 0.19 = 0.3 \cdot 0.05 + 0.7 \cdot p(Media/E_2) \Rightarrow p(Media/E_2) = 0.25$

SOLUCIONES BLOQUE D

Problema 7:

La vida útil, en años, de las lavadoras de un determinado modelo, se distribuye según una ley Normal de varianza 7.84. En una muestra de 12 lavadoras, la vida útil en años ha sido:

9.5 9 10.2 8.6 11.4 10.8 12.6 11 11.8 14.5 10.4 9.8

a) **(1.5 puntos)** Con estos datos, determine un intervalo de confianza al 93.5% para estimar la vida útil media de estas lavadoras.

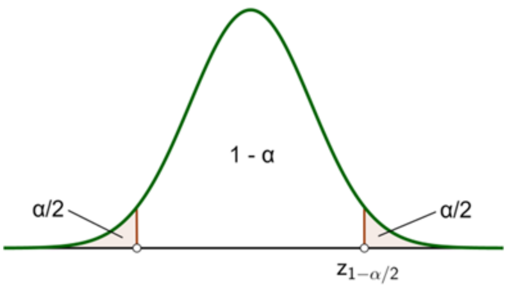
b) **(1 punto)** Calcule el error máximo que se puede cometer al estimar la vida útil media de este modelo de lavadoras, si se toma una muestra de 50 lavadoras y asumimos un nivel de confianza del 99%.

Solución:

Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media poblacional viene dado por la expresión:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0,1)$ que verifica que $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.



Además, el error máximo de la estimación es:

$$\mathcal{E} = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

de donde el tamaño mínimo de la muestra necesario para estimar la media poblacional con un error menor que $\mathcal{E}$ vendrá dado por:

$$n = \left(z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2$$

a) La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{9.5 + 9 + 10.2 + 8.6 + 11.4 + 10.8 + 12.6 + 11 + 11.8 + 14.5 + 10.4 + 9.8}{12} = 10.8$$

Como la varianza es $\sigma^2 = 7.84$, entonces la desviación típica será $\sigma = \sqrt{7.84} = 2.8$. Además, sabemos que el tamaño muestral es $n = 12$ y el nivel de confianza $1 - \alpha = 93.5\% = 0.935$ con lo que el nivel de significación o nivel de riesgo $\alpha = 6.5\% = 0.065$, y $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9675$.

Por tanto,

$$p\left(Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9675$$

En la tabla de la distribución Normal tipificada $\mathcal{N}(0,1)$ debemos encontrar el punto que acumula una probabilidad de 0.9675, que corresponde con $z_{1-\alpha/2} = 1.845$.

Finalmente, como el intervalo de confianza para la media poblacional viene dado por la expresión:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

tendremos que:

$$I.C.(\mu) = \left(10.8 - 1.845 \cdot \frac{2.8}{\sqrt{12}};\ 10.8 + 1.845 \cdot \frac{2.8}{\sqrt{12}}\right) = (9.3087; 12.2913)$$

$$I.C.(\mu) = (9.3087; 12.2913)$$

b) Tenemos que:

Desviación típica $\sigma = 2.8$

Tamaño muestral $n = 50$

Nivel de confianza $1 - \alpha = 99\% = 0.99$, de donde $\alpha = 0.01$

Es decir,

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.01}{2} = 0.995$$

Como

$$p\left(Z \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$$

en la tabla de la $\mathcal{N}(0,1)$ vemos que $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.575$

Por tanto, el error máximo que se comete al estimar la vida útil media de este modelo de lavadoras es:

$$\mathcal{E} = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2.8}{\sqrt{50}} = 1.0196$$

El error máximo al estimar la vida útil media de este modelo de lavadoras es $\mathcal{E} = 1.0196$

Problema 8:

La renta anual de los hogares andaluces, en miles de euros, se distribuye según una ley Normal con desviación típica 5 y media desconocida μ.

a) **(1 punto)** Si se desea que en el 99% de las posibles muestras del mismo tamaño, elegidas de entre los hogares andaluces, la media muestral no difiera de la renta media anual poblacional de dichos hogares en más de una unidad, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de las muestras?

b) **(0.5 puntos)** Si se consideran muestras de hogares andaluces de tamaño 100, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria "Renta media anual muestral"?

c) **(1 punto)** Suponiendo que la renta media anual poblacional de los hogares andaluces es $\mu = 24$, ¿cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 100 la renta media anual muestral sea superior a 25?

Solución:

a) Dada una variable aleatoria normal de media μ desconocida y desviación típica σ, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, la diferencia o error máximo cometido al estimar la media poblacional μ por la media muestral $\bar{x}$ para un nivel de confianza $1 - \alpha$ viene dado por la expresión:

$$\mathcal{E} = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Despejando, podemos obtener la expresión para calcular el tamaño de la muestra para que, con el nivel de confianza $1-\alpha$, la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor que un valor dado.

$$\mathcal{E} = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \Rightarrow n = \left(z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2$$

Como en nuestro caso, $\sigma = 5$ y el nivel de confianza $1-\alpha = 99\% = 0.99 \Rightarrow \alpha = 1\% = 0.01$, tenemos que:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.01}{2} = 1 - 0.005 = 0.995$$

Por tanto, $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.575$. Como queremos calcular el tamaño de la muestra, n, para que el error sea a lo sumo $\mathcal{E} = 1$, sustituyendo en la fórmula anterior, resulta:

$$n = \left(z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2 = \left(2.575 \cdot \frac{5}{1}\right)^2 = 165.77$$

El tamaño mínimo de las muestras debe ser $n = 166$.

b) Si la variable X sigue una distribución normal, $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, entonces la variable aleatoria de las medias muestrales, $\bar{x}$, sigue una distribución normal $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Por tanto, con los datos del enunciado, nuestra *"Renta media anual muestral"* seguirá una distribución:

$$\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(\mu, \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = \mathcal{N}(\mu; 0.5)$$

$\bar{x} \sim \mathcal{N}(\mu; 0.5)$

c) Suponiendo que la renta media anual poblacional de los hogares andaluces es $\mu = 24$, entonces, $\bar{x} \sim \mathcal{N}(24; 0.5)$, y la probabilidad de que en una muestra de tamaño 100 la renta media anual muestral sea superior a 25 es:

$$p(\bar{x} > 25) = p\left(\frac{\bar{x} - 24}{0.5} > \frac{25 - 24}{0.5}\right) = p(\mathcal{Z} > 2) = 1 - p(\mathcal{Z} \le 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$p(\bar{x} > 25) = 0.0228$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

Problema 1:

Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según tipo de habitación: individual, doble y triple.
La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros.
El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples; el segundo, dos individuales, doce dobles y cinco triples; y el tercer instituto, una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) **(1 punto)** Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.
b) **(1 punto)** Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?
c) **(0.5 puntos)** ¿Existe la inversa de la matriz D? ¿Y de la matriz A? Justifique las respuestas.

Problema 2:

a) **(1.75 puntos)** Represente la región factible definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$x + 2y \le 13 \qquad x - y \le 4 \qquad x - 2y \ge 7 \qquad x + y \ge 5$$

b) **(0.75 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x, y) = x + y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{a}{x-1} & si \quad x < 0 \\ a + be^x & si \quad x \ge 0 \end{cases}$

a) **(1.25 puntos)** Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en su dominio.
b) **(0.75 puntos)** Para $a = 2$ y $b = -2$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos.
c) **(0.5 puntos)** Para $a = 2$ y $b = -2$, determine las ecuaciones de las asíntotas de f, si existen.

Problema 4:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x+2 & si \quad x \le 2 \\ -x^2+6x-8 & si \quad 2 < x < 4 \\ \frac{x-3}{x} & si \quad x \ge 4 \end{cases}$

a) **(1.25 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de f en su dominio.

b) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

c) **(0.5 puntos)** Calcule $\int_2^3 f(x)dx$.

BLOQUE C

Problema 5:

Una urna contiene 6 bolas rojas y 4 azules. Se extrae una bola al azar y se reemplaza por seis bolas del otro color. A continuación, se vuelve a extraer una segunda bola de la urna.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

b) **(1 punto)** Si sabemos que la segunda bola extraída es azul, ¿cuál es la probabilidad de que también lo haya sido la primera?

Problema 6:

Una empresa fabrica dos tipos de bombillas: una LED y otra halógena. Se sabe que un 5% de las LED y un 2% de las halógenas salen defectuosas. Se elije al azar una bombilla de una caja que contiene 40 bombillas LED y 10 halógenas.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida no sea defectuosa.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida sea LED, sabiendo que es defectuosa.

BLOQUE D

Problema 7:

a) **(1 punto)** Una población de 25000 personas se ha dividido en cuatro estratos con tamaños 15000, 5000, 3000 y 2000 personas respectivamente. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 36 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.

b) **(1.5 puntos)** Dada la población $P = \{2, 4, 6\}$ construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y halle la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas esas muestras.

Problema 8:

Se ha tomado una muestra de 16 pacientes tratados por un especialista y se ha observado que el tiempo de espera en su consulta, en minutos, ha sido de:

8	9.2	10	8.5	12	9	11.3	7	8.5	8.3	7.6	9	9.4	10.5	8.9	6.8

Supongamos que el tiempo de espera en esa consulta se distribuye según una ley Normal de varianza 4 y media desconocida.

a) **(1.5 puntos)** Halle un intervalo de confianza al 97.5% para estimar el tiempo medio de espera de los pacientes tratados por este especialista.

b) **(1 punto)** ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar, con un nivel de confianza del 90%, que el error cometido sea, a lo sumo, de 0.3 minutos?

SOLUCIONES BLOQUE A

Problema 1:

Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según tipo de habitación: individual, doble y triple.

La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros.

El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples; el segundo, dos individuales, doce dobles y cinco triples; y el tercer instituto, una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) **(1 punto)** Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.
b) **(1 punto)** Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?
c) **(0.5 puntos)** ¿Existe la inversa de la matriz D? ¿Y de la matriz A? Justifique las respuestas.

Solución:

Llamemos:

I_1: Instituto 1, I_2: Instituto 2, I_3: Instituto 3

A_1: Agencia 1, A_2: Agencia 2

I: Habitación individual, D: Habitación doble, T: Habitación triple

a) La matriz A de los precios de las dos agencias según tipo de habitación es:

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I & D & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \end{array}$$

Y la matriz D, demanda de los tres institutos:

$$D = \begin{array}{c} I \\ D \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I_1 & I_2 & I_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) El precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas puede obtenerse como:

$$A \cdot D = \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I & D & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} I \\ D \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I_1 & I_2 & I_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I_1 & I_2 & I_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1678 & 1670 & 2153 \\ 1691 & 1682 & 2148 \end{pmatrix} \end{array}$$

Como podemos ver,

al Instituto 1 le interesa la Agencia 1, con un presupuesto de 1678 euros; al Instituto 2, la Agencia 1 con un presupuesto de 1670 euros; y al Instituto 3, le interesa la Agencia 2 con un presupuesto de 2148 euros.

c) Sabemos que para que una matriz tenga inversa debe ser cuadrada y con determinante distinto de cero.

En este caso la matriz A no es cuadrada por lo que no es posible que tenga inversa.

En cuanto a la matriz D, ya que es cuadrada, calculemos su determinante para ver si es distinto de cero.

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -83 \neq 0$$

Luego la matriz D sí tiene inversa.

Problema 2:

a) **(1.75 puntos)** Represente la región factible definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$x + 2y \leq 13 \qquad x - y \leq 4 \qquad x - 2y \geq 7 \qquad x + y \geq 5$$

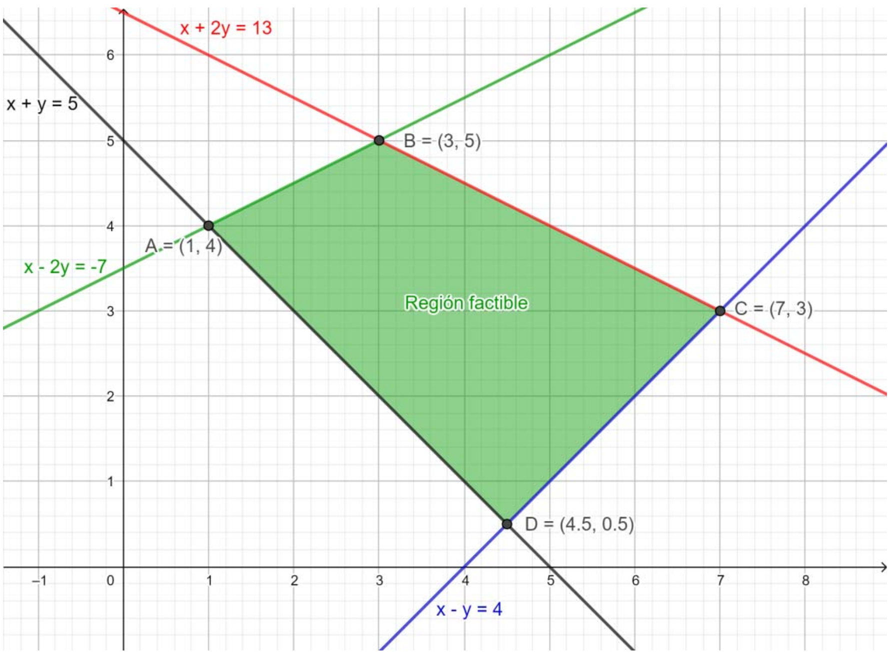
b) **(0.75 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x, y) = x + y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

Solución:

Estamos ante un problema de *Programación Lineal*. Debemos tener, por tanto, la *función objetivo* a optimizar (en este caso maximizar y minimizar) y las *restricciones* (inecuaciones) a las que está sujeta.

Los puntos del plano que cumplan todas las restricciones estarán en una región del plano llamada *región factible*. La *solución óptima* será aquella que optimice la función objetivo. Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

a) La región factible definida por las inecuaciones dadas es:



Los vértices del recinto son los puntos: $A(1,4)$, $B(3,5)$, $C(7,3)$, $D(4.5,0.5)$

Estos puntos se obtienen como intersección de las rectas correspondientes. Así, por ejemplo, el punto $A(1,4)$ se obtiene como intersección de las rectas $x+y=5$, $4x-2y=-7$; etc.

Vértice A	Vértice B	Vértice C	Vértice D
$\left.\begin{matrix} x+y=5 \\ x-2y=-7 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} x+2y=13 \\ x-2y=-7 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} x+2y=13 \\ x-y=4 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} x-y=4 \\ x+y=5 \end{matrix}\right\}$
$A(1,4)$	$B(3,5)$	$C(7,3)$	$D(4.5,0.5)$

b) La *solución óptima* será aquella que optimice la función objetivo. Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.
Como debemos calcular los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x,y)=x+y$ en la región anterior, evaluaremos dicha función en cada uno de ellos.

Para $A(1,4)$ obtenemos que $F(A)=F(1,4)=1+4=5$

Para $B(3,5)$, $F(B)=F(3,5)=3+5=8$

Para $C(7,3)$, $F(C)=F(7,3)=7+3=10$

Para $D(4.5,0.5)$, $F(D)=F(4.5,0.5)=4.5+0.5=5$

Por tanto, el máximo se alcanza en el punto $C(7,3)$ y vale 10. El mínimo estará en todos los puntos del segmento que une los puntos A y D, y vale 5.

SOLUCIONES BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{a}{x-1} & si \quad x < 0 \\ a + be^x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) **(1.25 puntos)** Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en su dominio.

b) **(0.75 puntos)** Para $a = 2$ y $b = -2$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos.

c) **(0.5 puntos)** Para $a = 2$ y $b = -2$, determine las ecuaciones de las asíntotas de f, si existen.

Solución:

a) La rama $2 + \frac{a}{x-1}$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$; por tanto, también será continua y derivable en $x < 0$.
Además, $a + be^x$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por lo que también lo será en $x > 0$.
Así, solo falta exigir la continuidad y derivabilidad en el punto $x = 0$.

<u>**Continuidad en $x = 0$**</u>

Sabemos que una función $y = f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si, y solo si,

$$f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Como

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(2 + \frac{a}{x-1}\right) = 2 - a$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (a + be^x) = a + be^0 = a + b$$

Igualando los límites obtenemos que para que la función sea continua en $x = 0$ debe verificarse que:

$$2 - a = a + b \Rightarrow 2a + b = 2$$

<u>**Derivabiidad en $x = 0$**</u>

La función derivada viene dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-a}{(x-1)^2} & si \quad x < 0 \\ be^x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

<u>Y PARA QUE SEA DERIVABLE EN $x = 0$ DEBE VERIFICARSE QUE</u> $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-a}{(x-1)^2} = -a$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} be^x = be^0 = b$$

Por tanto, debe ser:

$$-a = b \Rightarrow a + b = 0$$

Teniendo en cuenta la condición de continuidad y de derivabilidad, obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} 2a + b = 2 \\ a + b = 0 \end{array}\right\}$$

Y resolviendo el sistema, obtenemos que:

para que la función sea continua y derivable en su dominio, debe ser $a = 2$, $b = -2$.

b) Para el estudio de la monotonía necesitamos conocer el signo de la derivada primera $f'(x)$. En los puntos en los que $f'(x) > 0$ la función será creciente y si $f'(x) < 0$ la función será decreciente.

Para $a = 2$ y $b = -2$ la función derivada queda como:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(x-1)^2} & si \quad x < 0 \\ -2e^x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Resolvamos la ecuación $f'(x) = 0$.

Para $x < 0$ tenemos que $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$, que no se anula para ningún valor de x; de hecho, siempre es negativa ya que es cociente de un número negativo y un cuadrado. Por tanto, la función f es decreciente para $x < 0$.

Para $x > 0$ tenemos que $f'(x) = -2e^x$ que tampoco se anula nunca y siempre es negativa ya que es el producto de un número negativo por la función exponencial e^x que siempre es positiva.

En resumen, la función f es decreciente (↘) para todos los valores de x en $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ y, por tanto, no tiene extremos relativos.

c) Para $a = 2$ y $b = -2$ la función es:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{2}{x-1} & si \quad x < 0 \\ 2 - 2e^x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Calculemos las asíntotas:

Para $x < 0$

En la función $2 + \frac{2}{x-1}$ no hay ningún valor que anule el denominador, luego no tiene asíntota vertical.

Como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2 + \frac{2}{x-1}\right) = 2$$

entonces $y = 2$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, no tiene asíntota oblícua.

Para $x > 0$

No tiene asíntota vertical.

Como

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2 - 2e^x) = 2 - \infty = -\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Veamos si tiene asíntota oblicua $y = mx + n$ con

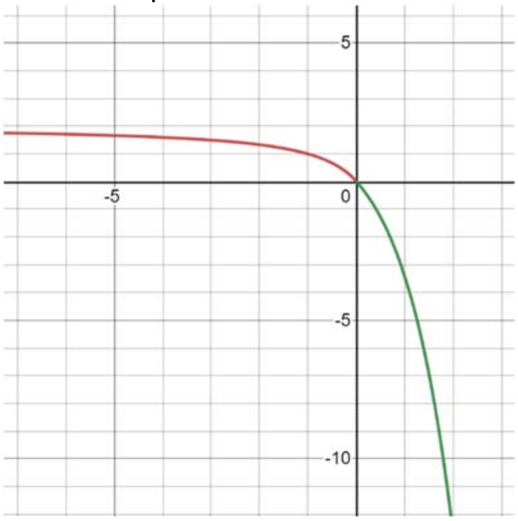
$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 2e^x}{x} \overset{4}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{-2e^x}{1} = -\infty$$

Por tanto, no tiene asíntota oblicua.

En resumen, la función tiene una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ en $y = 2$.

[4] Tenemos la indeterminación ∞/∞ y aplicamos la regla de L'Hopital.

Mostramos aquí la gráfica de la función para evidenciar los resultados obtenidos:



Problema 4:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x+2 & si \quad x \leq 2 \\ -x^2+6x-8 & si \quad 2 < x < 4 \\ \frac{x-3}{x} & si \quad x \geq 4 \end{cases}$

a) **(1.25 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de f en su dominio.
b) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.
c) **(0.5 puntos)** Calcule $\int_2^3 f(x)dx$.

Solución:

a) Sabemos que una función $y = f(x)$ es *continua* en un punto $x = a$ si, y solo si, se verifica:

$$f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Además, una función continua en un punto $x = a$ se dice que es *derivable* en dicho punto si se verifica que $f'(a^-) = f'(a^+)$.

En nuestro caso:

- Para $x < 2$ la función es continua y derivable por ser una función polinómica.
- De la misma forma, para $2 < x < 4$ es continua y derivable por ser un polinomio.
- Para $x > 4$, es continua y derivable por ser cociente de funciones continuas y derivables y no anularse el denominador.

Falta comprobar la continuidad y la derivabilidad en los puntos $x = 2$ y $x = 4$.

<u>**Continuidad y derivabilidad en $x = 2$**</u>

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = -2+2 = 0 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (-x+2) = 0 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (-x^2+6x-8) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$$

Luego es continua en $x = 2$.

Calculamos la función derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<2 \\ -2x+6 & si \quad 2<x<4 \\ \dfrac{3}{x^2} & si \quad x>4 \end{cases}$$

Como,

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=-1 \\ f'(2^+)=-2\cdot 2+6=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)\neq f'(2^+)$$

Y la función no es derivable en $x=2$.

<u>Continuidad y derivabilidad en $x=4$</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(-x^2+6x-8)=0 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4+}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$$

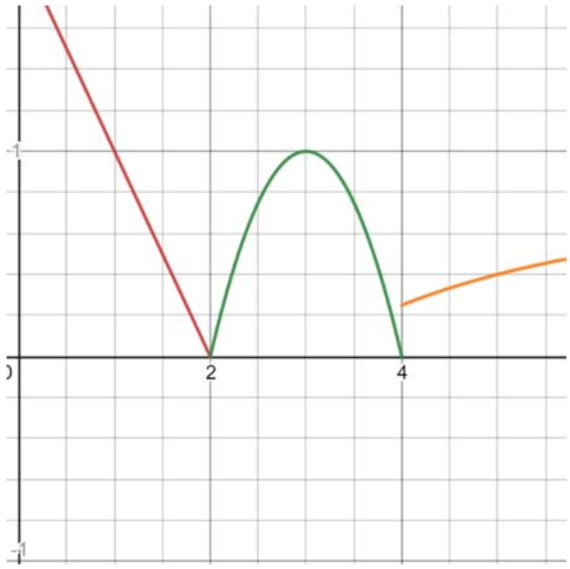
Luego no es continua en $x=4$ y, por tanto, tampoco es derivable en dicho punto.

Resumiendo, la función es continua en $\mathbb{R}-\{4\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{2,4\}$.

b) Para la determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento (monotonía) de la función f debemos estudiar el signo de la derivada primera $f'(x)$. En los puntos en los que $f'(x)>0$ la función será creciente (↗) y en los puntos en los que $f'(x)<0$ la función será decreciente (↘).
Si $x<2$, entonces $f'(x)=-1<0$ luego la función será decreciente (↘).
Si $2<x<4$, entonces $f'(x)=-2x+6=0\Rightarrow x=3$ será un punto de posible cambio de signo. En el intervalo (2,3) la derivada primera $f'(x)>0$ luego la función será creciente (↗); en cambio, en el intervalo (3,4) la derivada primera $f'(x)<0$ y la función será decreciente (↘).
Si $x>4$, entonces $f'(x)=\frac{3}{x^2}>0$ por ser cociente de un número positivo y un cuadrado luego la función será creciente (↗).
En resumen:

	$(-\infty,2)$	$(2,3)$	$(3,4)$	$(4,+\infty)$
Signo de f'	$-$	$+$	$-$	$+$
	Decreciente ↘	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

Aquí se muestra la gráfica de la función estudiada.



c) Calculemos la integral pedida:

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (-x^2+6x-8)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+6\cdot\frac{x^2}{2}-8x\right]_2^3 =$$

$$= \left(-\frac{27}{3}+27-24\right)-\left(-\frac{8}{3}+12-16\right)=\frac{2}{3}$$

$$\int_2^3 f(x)dx = \frac{2}{3}$$

SOLUCIONES BLOQUE C

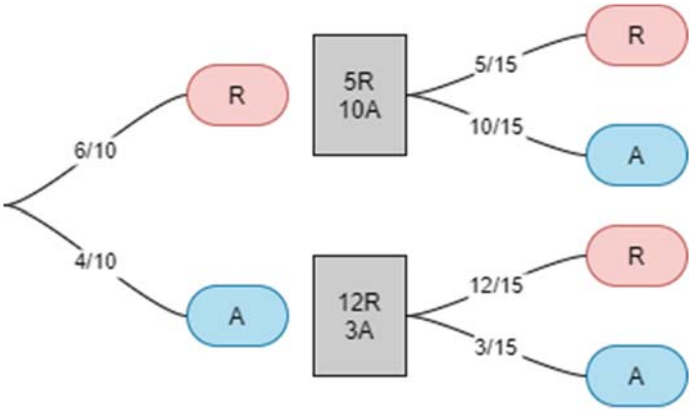
Problema 5:

Una urna contiene 6 bolas rojas y 4 azules. Se extrae una bola al azar y se reemplaza por seis bolas del otro color. A continuación, se vuelve a extraer una segunda bola de la urna.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.
b) **(1 punto)** Si sabemos que la segunda bola extraída es azul, ¿cuál es la probabilidad de que también lo haya sido la primera?

Solución:

Hagamos un diagrama en árbol:



Y sean los sucesos:

R_1: "la primera bola es roja" A_1: "la primera bola es azul"

R_2: "la segunda bola es roja" A_2: "la segunda bola es azul"

a) Para calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja basta seguir las ramas adecuadas[5]:

$$p(R_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{15} + \frac{4}{10} \cdot \frac{12}{15} = \frac{13}{25} = 0.52$$

$$p(R_2) = \frac{13}{25} = 0.52$$

b) Probabilidad de que la primera bola haya sido azul, sabiendo que la segunda es azul[6].

$$p(A_1/A_2) = \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(A_2)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{15}}{1 - 0.52} = \frac{1}{6}$$

Ya que $p(A_2) = 1 - p(R_2) = 1 - 0.52$.

$$p(A_1/A_2\,) = \frac{1}{6} = 0.1667$$

---

[5] $p(R_2) = p(R_1) \cdot p(R_2/R_1) + p(A_1) \cdot p(R_2/A_1)$

[6] $p(A_1/A_2) = \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(A_2)} = \frac{p(A_1) \cdot p(A_2/A_1\,)}{1 - p(R_2)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{15}}{1 - 0.52} = \frac{1}{6}$

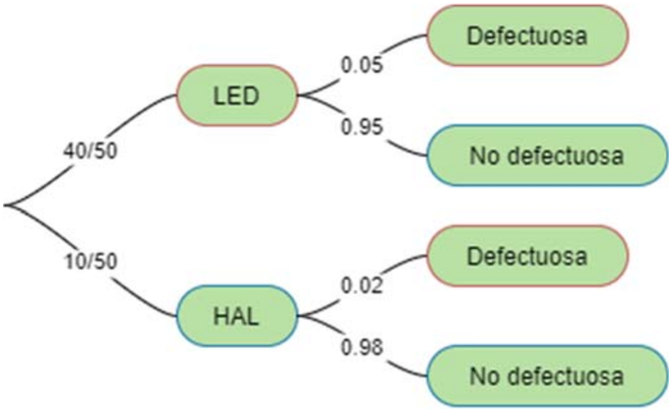
Problema 6:

Una empresa fabrica dos tipos de bombillas: una LED y otra halógena. Se sabe que un 5% de las LED y un 2% de las halógenas salen defectuosas. Se elije al azar una bombilla de una caja que contiene 40 bombillas LED y 10 halógenas.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida no sea defectuosa.
b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida sea LED, sabiendo que es defectuosa.

Solución:

Hagamos el diagrama de árbol:



a) Probabilidad de que la bombilla elegida no sea defectuosa:

$$p(\text{No defectuosa}) = \frac{40}{50}\cdot 0.95 + \frac{10}{50}\cdot 0.98 = 0.956$$

b) Probabilidad de que la bombilla elegida sea LED, sabiendo que es defectuosa:

$$p(LED/\text{Defectuosa}) = \frac{p(LED\ \cap \text{Defectuosa})}{p(\text{Defectuosa})} = \frac{\frac{40}{50}\cdot 0.05}{1-0.956} = 0.909$$

SOLUCIONES BLOQUE D

Problema 7:

a) **(1 punto)** Una población de 25000 personas se ha dividido en cuatro estratos con tamaños 15000, 5000, 3000 y 2000 personas respectivamente. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 36 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.

b) **(1.5 puntos)** Dada la población $P = \{2, 4, 6\}$ construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y halle la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas esas muestras.

Solución:

Recordemos brevemente en qué consisten los métodos de muestreo mencionados en el enunciado.

Muestreo aleatorio simple. Se realiza este tipo de muestreo cuando cada miembro de la población tiene la misma probabilidad de ser escogido en la muestra.

Muestreo aleatorio estratificado. Consiste en dividir previamente la población en grupos homogéneos o estratos, en los que los individuos comparten alguna característica común, y elegir muestras aleatorias simples en cada estrato.

Cuando hay k estratos cada uno con diferentes poblaciones: $N_1, N_2, \dots, N_k$, entonces para conformar una muestra de tamaño n tomamos $n_1, n_2, \dots, n_k$ individuos en cada estrato de modo que

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

y además cada uno de los números $n_1, n_2, \dots, n_k$ ha de ser proporcional a los tamaños de los estratos: $N_1, N_2, \dots, N_k$.

a) Como se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, el tamaño de cada muestra dentro de cada estrato debe ser proporcional al número de individuos en el mismo. Por tanto:

Tamaño de la muestra total:

$$\left.\begin{array}{ccc} 3000 & \longrightarrow & 36 \\ 25000 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{25000 \cdot 36}{3000} = 300\, personas$$

Tamaño del primer estrato

$$\left.\begin{array}{ccc} 3000 & \longrightarrow & 36 \\ 15000 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{15000 \cdot 36}{3000} = 180\, personas$$

Tamaño del segundo estrato

$$\left.\begin{array}{ccc} 3000 & \longrightarrow & 36 \\ 5000 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{5000 \cdot 36}{3000} = 60\, personas$$

Tamaño del cuarto estrato

$$\left.\begin{array}{ccc} 3000 & \longrightarrow & 36 \\ 2000 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{2000 \cdot 36}{3000} = 24\, personas$$

Así, el tamaño muestral de la muestra sería de 300 personas. En el primer estrato habría 180 personas; en el segundo, 60; en el tercero, 36; y en el cuarto, 24 personas.

b) Las muestras posibles de tamaño 2 que se pueden obtener mediante muestreo aleatorio simple de la población $P = \{2, 4, 6\}$ son:

(2,2)	(2,4)	(2,6)
(4,2)	(4,4)	(4,6)
(6,2)	(6,4)	(6,6)

Las medias muestrales de las muestras obtenidas son:

2	3	4
3	4	5
4	5	6

Construyamos la tabla de frecuencias para las medias muestrales para, a partir de ella, calcular la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas esas muestras.

$\bar{x}_i$	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
2	1	2	4	4
3	2	6	9	18
4	3	12	16	48
5	2	10	25	50
6	1	6	36	36
	9	36		156

$$n = 9$$

$$\sum x_i f_i = 36$$

$$\sum x_i^2 f_i = 156$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n} = \frac{36}{9} = 4$$

La varianza sería:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{156}{9} - 4^2 = 1.3333$$

Luego la desviación típica es $\sigma = \sqrt{1.3333} = 1.1547$

Problema 8:

Se ha tomado una muestra de 16 pacientes tratados por un especialista y se ha observado que el tiempo de espera en su consulta, en minutos, ha sido de:

8 9.2 10 8.5 12 9 11.3 7 8.5 8.3 7.6 9 9.4 10.5 8.9 6.8

Supongamos que el tiempo de espera en esa consulta se distribuye según una ley Normal de varianza 4 y media desconocida.

a) **(1.5 puntos)** Halle un intervalo de confianza al 97.5% para estimar el tiempo medio de espera de los pacientes tratados por este especialista.
b) **(1 punto)** ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar, con un nivel de confianza del 90%, que el error cometido sea, a lo sumo, de 0.3 minutos?

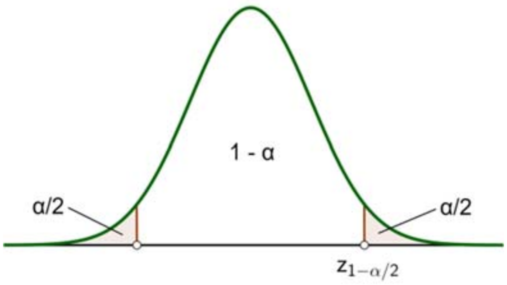
Solución:

Como sabemos, si la variable X sigue una distribución Normal, $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$, entonces la variable aleatoria de las medias muestrales $\bar{x}$ sigue también una distribución Normal $\bar{x} \sim \mathcal{N}\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

También es sabido que el intervalo de confianza para estimar la media viene dado por la expresión:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el punto crítico de la variable Normal tipificada $\mathcal{Z} \leadsto \mathcal{N}(0;1)$ que verifica que $p\left(\mathcal{Z} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.



Además, el error máximo de la estimación para el intervalo de la media poblacional es:

$$\mathcal{E} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

de donde el tamaño mínimo de la muestra necesario para estimar la media poblacional con un error menor que $\mathcal{E}$ es:

$$n = \left(z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2$$

Pasemos a resolver nuestro problema:

a) La variable X tiempo de espera en la consulta se distribuye según una $\mathcal{N}(\mu;2)$ ya que como la varianza es $\sigma^2 = 4$ entonces la desviación típica será $\sigma = 2$.
Como el intervalo de confianza pedido viene dado por la expresión:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

vamos a calcular cada uno de los elementos de dicha expresión:

La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{8 + 9.2 + 10 + 8.5 + 12 + 9 + 11.3 + 7 + 8.5 + 8.3 + 7.6 + 9 + 9.4 + 10.5 + 8.9 + 6.8}{16} = 9$$

Como el nivel de confianza es del 97.5%, $1 - \alpha = 97.5\% = 0.975$, de donde $\alpha = 0.275$ y:

$$p\left(\mathcal{Z} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.025}{2} = 0.9875$$

Por tanto, observando la tabla de la distribución Normal tipificada obtenemos que $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.24$.

Ya tenemos todo lo necesario para aplicar la fórmula del intervalo de confianza:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(9 - 2.24 \cdot \frac{2}{\sqrt{16}}; 9 + 2.24 \cdot \frac{2}{\sqrt{16}}\right) = (7.88; 10.12)$$

$$I.C.(\mu) = (7.88; 10.12)$$

b) En la fórmula del error máximo, despejamos n:

$$E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \Rightarrow n = \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2$$

Ahora el nivel de confianza es de $1-\alpha = 90\% = 0.90$ por lo que $\alpha = 10\% = 0.10$. así:

$$p\left(\mathcal{Z} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.10}{2} = 0.95$$

Obteniendo de la tabla de la distribución Normal tipificada que $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.645$

Como $\sigma = 2$ y queremos hallar el tamaño de la muestra para que el error máximo admitido sea 0.3, sustituyendo en la fórmula:

$$n = \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2 = \left(1.645 \cdot \frac{2}{0.3}\right)^2 = 120.27$$

Luego el tamaño mínimo de la muestra es 121 pacientes.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

ARAGÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa Asso

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSSII	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Se proponen seis preguntas de las que el estudiante debe resolver tres a su elección.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
CALIFICACIÓN: La nota final será la suma de las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas, dividida por tres.
TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1: *(10 puntos)*

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. *(3 puntos)* ¿Es posible calcular $(BA)^2$?. Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.
b. *(3 puntos)* Encontrar, si existe, una matriz X que verifique $2X + 3B = 2C$
c. *(4 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de D.

Problema 2: *(10 puntos)*

Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por casa vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en este caso?

Problema.3: *(10 puntos)*

a. *(3 puntos)* Calcular la derivada de

$$f(x) = e^{3x^2-5x}$$

b. *(3 puntos)* Calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}}$$

c. *(4 puntos)* Calcular

$$\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx$$

Problema 4: *(10 puntos)*

El coste unitario de fabricación de un producto (en euros) depende del tamaño de la producción a través de la siguiente fórmula

$$C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100)$$

Donde $x \in [2, 15]$es el tamaño de la producción (en miles de unidades) y C es el coste unitario (en euros)

Calcular

a. *(1 punto)* Si se producen 5000 unidades, ¿cuánto vale el coste unitario?
b. *(4 puntos)* ¿Para qué valores del tamaño de la producción $x \in [2, 15]$el coste unitario es inferior a 4 euros?
c. *(5 puntos)* ¿Para qué tamaño de la producción $x \in [2, 15]$se alcanza el coste unitario mínimo? ¿Y el máximo? ¿Cuánto valen estos costes?

Problema 5: *(10 puntos)*

En el curso de primero de Bachillerato de un centro educativo se ha hecho una encuesta sobre el destino del viaje de estudios con dos opciones Londres y París. El curso está compuesto por tres clases A, B y C. La clase A tiene 28 estudiantes, de los cuales 12 han votado por Londres y el resto por París. La clase B tiene 25 estudiantes, 10 han votado por Londres y el resto por París, en la clase C, con 23 estudiantes, 18 han votado por Londres y el resto por París.

a. *(2 puntos)* Si elegimos al azar un estudiante del curso, ¿Cuál es la probabilidad de que haya votado por Londres?
b. *(2 puntos)* Si elegimos al azar un estudiante de entre los que han votado por Londres, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B?
c. *(3 puntos)* Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) dos estudiantes del curso, ¿Cuál es la probabilidad de que los dos hayan votado por Londres?
d. *(3 puntos)* Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres estudiantes del curso, ¿Cuál es la probabilidad de que sea uno de cada clase?

Problema 6: *(10 puntos)*

Se sabe que la altura de los estudiantes que se presentan a la EBAU tiene una distribución normal con desviación típica igual a 10 cm. Queremos construir un intervalo de confianza para la media de la altura de los estudiantes

a. *(5 puntos)* Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 97 % tenga una amplitud menor o igual que 4 cm.
b. *(4 puntos)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 9. Medimos a los estudiantes y tenemos los siguientes resultados en cm

175, 187, 183, 162, 161, 164, 180, 171, 158

Calcular un intervalo de confianza al 97 % para la media de la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU

c. *(1 punto)* Calcular la varianza de la muestra del apartado b

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valore de $P(Z \leq k)$ para una distribución $N(0,1)$. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2\\-1&0&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0\\-1&-2\\-1&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\\1&3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&1&0\\3&-1&0\end{pmatrix}$$

a. *(3 puntos)* ¿Es posible calcular $(BA)^2$? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b. *(3 puntos)* Encontrar, si existe, una matriz X que verifique $2X+3B=2C$

c. *(4 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de D.

Solución:

a) $B\in\mathcal{M}_{3x2}(\mathbb{R}),\ A\in\mathcal{M}_{2x3}(\mathbb{R})\ \Rightarrow$ es posible calcular *BA* y $BA\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Por ser BA una matriz cuadrada de orden 3, también se puede calcular $(BA)^2=(BA).(BA)$ y es una matriz cuadrada de orden 3.

$$BA=\begin{pmatrix}2&0\\-1&-2\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&2\\-1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6&4\\0&-3&0\\-1&-3&-1\end{pmatrix}$$

$$(BA)^2=(BA)\cdot(BA)=\begin{pmatrix}4&6&4\\0&-3&0\\-1&-3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&6&4\\0&-3&0\\-1&-3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-6&12\\0&9&0\\-3&6&-3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{(BA)^2=\begin{pmatrix}12&-6&12\\0&9&0\\-3&6&-3\end{pmatrix}}$$

b) $X\in\mathcal{M}_{3x2}(\mathbb{R})$

$$2X+3B=2C\Longrightarrow 2X+3B+(-3)B=2C+(-3)B\Rightarrow 2X=2C+(-3)B\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\frac{1}{2}(2X)=\frac{1}{2}[2C+(-3)B]\Longrightarrow X=\frac{1}{2}[2C+(-3)B]$$

$$2C+(-3)B=\begin{pmatrix}2&-4\\4&2\\2&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&0\\3&6\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-4\\7&8\\5&9\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}[2C+(-3)B]=\begin{pmatrix}-2&-2\\\frac{7}{2}&4\\\frac{5}{2}&\frac{9}{2}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}-2&-2\\\frac{7}{2}&4\\\frac{5}{2}&\frac{9}{2}\end{pmatrix}}$$

c) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det D = |D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \exists D^{-1} == \frac{1}{Det\ D}(Adj\ D)^t$

$$Adj\ D = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

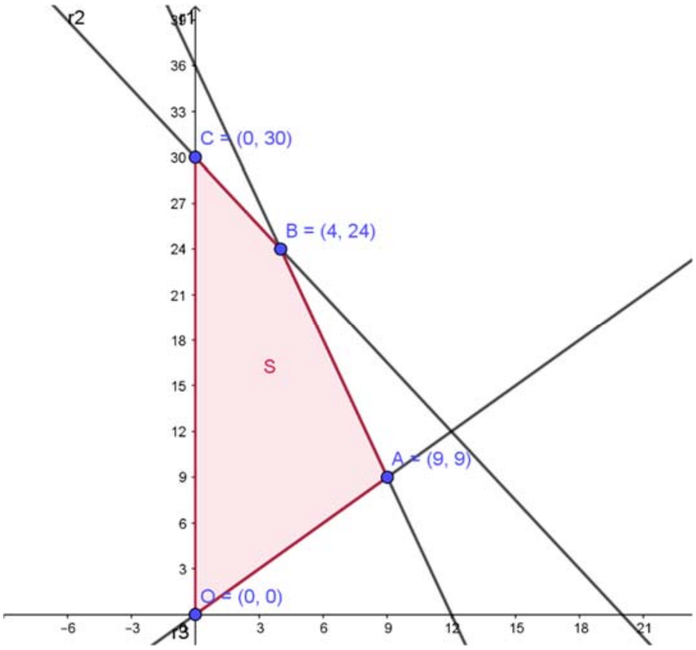
$$D^{-1} == \frac{1}{Det\ D}(Adj\ D)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-4}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Problema 2:

Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por casa vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en este caso?

Solución:



Sean: $x =$ número de vestidos de fiesta

$y =$ número de vestidos de calle

Nuestro objetivo es maximizar la función objetivo, (que representa el beneficio en miles de €)

$$Z = F(x, y) = 100x + 65y$$

sometida a las siguientes restricciones:

$$S \equiv \begin{cases} I_1: 3x + y \leq 36 \\ I_2: 6x + 4y \leq 120 \\ I_3: x \leq y \\ I_4: x \geq 0 \\ I_5: y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la solución de este sistema de inecuaciones. Vamos a resolverlo.

Las dos últimas inecuaciones restringen esta solución al primer cuadrante.

El semiplano solución de la inecuación I_1 está definido por la recta $3x + y = 36$ que pasa por los puntos (0, 36) y (12, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_1 $(3.0+0 \leq 36) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_2 está definido por la recta $6x + 4y = 120$ que pasa por los puntos (0, 30) y (12, 12). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_1 $(6.0+4.0 \leq 120) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_2 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $y = x$ que pasa por los puntos (0, 0) y (12, 12). El punto M (0, 3) cumple la inecuación I_3 $(0 \leq 3) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 contiene a M.

La región factible es el polígono $OABC$, intersección de estos cuatro semiplanos y la solución óptima se encuentra en uno de sus vértices.

Determinamos sus coordenadas

$$A \equiv \begin{cases} y = x \\ 3x + y = 36 \end{cases} \sim \begin{cases} y = x \\ 4x = 36 \end{cases} \sim \begin{cases} y = x \\ x = 9 \end{cases} \Rightarrow \quad A = (9, 9\,)$$

$$B \equiv \begin{cases} \begin{cases} 6x + 4y = 120 \\ 3x + y = 36 \end{cases} \sim \begin{cases} 6x + 4y = 120 \\ -12x - 4y = -144 \end{cases} \sim \begin{cases} 6x + 4y = 120 \\ -6x = -24 \end{cases} \sim \begin{cases} y = \dfrac{120 - 6x}{4} \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} y = \dfrac{96}{4} = 24 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow B = (4, 24\,) \end{cases}$$

$$C \equiv \begin{cases} x = 0 \\ 6x + 4y = 120 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{120 - 6x}{4} = 30 \end{cases} \Rightarrow \ C = (0, 30\,)$$

$$O \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow O = (0, 0\,)$$

Según el teorema fundamental de la programación lineal, la solución, si existe, se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Valoremos la función objetivo en cada uno de ellos:

$$z(O) \ = F(0,0) = 100.0 + 65.0 = 0$$

$$z(A) = F(9, 9\,) = 100.9 + 65.9 = 1485$$

$$z(B) = F(4, 24\,) = 100.4 + 65.24 = 1960$$

$$z(C) = F(0, 30\,) = 100.0 + 65.30 = 1950$$

La solución se alcanza en el vértice B. Por tanto:

Deben realizarse **4** vestidos de fiesta y **24** vestidos de calle para maximizar el beneficio y será en este caso de **1 960 €.**

Problema.3:

a. *(3 puntos)* Calcular la derivada de

$$f(x) = e^{3x^2-5x}$$

b. *(3 puntos)* Calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}}$$

c. *(4 puntos)* Calcular

$$\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx$$

Solución:

a. $f(x) = e^{3x^2-5x} \Longrightarrow f'(x) = (6x-5)\cdot e^{3x^2-5x}$

$$\boldsymbol{f'(x) = (6x-5)\cdot e^{3x^2-5x}}$$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{16x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{16+\frac{5}{x^2}}} = \frac{3}{4}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}} = \frac{3}{4}}$$

c. $\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx = \int_0^2 \left(3x^2 - \frac{2}{4}\,\frac{4}{2\sqrt{4x+1}}\right) dx = \left[x^3 - \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}\right]_0^2 =$

$$2^3 - \frac{1}{2}\sqrt{8+1} - \left(0 - \frac{1}{2}\sqrt{0+1}\right) = 8 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 7$$

$$\boldsymbol{\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx = 7}$$

Problema 4

El coste unitario de fabricación de un producto (en euros) depende del tamaño de la producción a través de la siguiente fórmula

$$C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100)$$

Donde $x \in [2, 15]$es el tamaño de la producción (en miles de unidades) y C es el coste unitario (en euros).

Calcular

a) *(1 punto)* Si se producen 5 000 unidades, ¿cuánto vale el coste unitario?

b) *(4 puntos)* ¿Para qué valores del tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ el coste unitario es inferior a 4 euros?

c) *(5 puntos)* ¿Para qué tamaño de la producción $x \in [2, 15]$se alcanza el coste unitario mínimo? ¿Y el máximo? ¿Cuánto valen estos costes?

Solución:

a) 5 000 unidades = 5 miles de unidades

$$\boldsymbol{C(5) = \frac{1}{10}(5^2 - 16.5 + 100) = 4.5}\text{ €.}$$

El coste unitario es de **4.5 €.**

b) $C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100) < 4 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 100 < 40 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 60 < 0$

$$x^2 - 16x + 60 = 0 \Longrightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 10 \\ \searrow 6 \end{matrix}$$

[2, 6)	6	(6, 10)	10	(10, 15]	
+	0	-	0	+	Signo $x^2 - 16x + 60$

Luego $C(x) < 4 \Leftrightarrow x \in (6, 10)$, es decir:

El coste se mantiene por debajo de 4 € si el número de unidades fabricadas es mayor que 6 000 y menor de 10 000.

c) Las funciones polinómicas son continuas y derivables en $\mathbb{R} \Longrightarrow$ la función coste C es continua y derivable en el intervalo $[2, 15]$ y $C'(x) = \frac{1}{10}(2x - 16)$

$$\boldsymbol{C'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{10}(2x - 16) = 0 \Longrightarrow x = 8}$$

[2, 8)	8	(8, 15]	
-	0	+	Signo C'
Decrece	Mínimo relativo	Crece	Monotonía C

Los extremos absolutos de la función C se alcanzan en los extremos del intervalo o en los extremos relativos. Evaluamos C en las abscisas 2, 5, 8

$$\boldsymbol{C(2) = \frac{1}{10}(2^2 - 16.2 + 100) = 7.2}$$

$$\boldsymbol{C(8) = \frac{1}{10}(8^2 - 16.8 + 100) = 3.6}$$

$$\boldsymbol{C(15) = \frac{1}{10}(15^2 - 16.15 + 100) = 8.5}$$

El coste mínimo se alcanza si producen **8 000** unidades y es de **3.6 €**. El coste es máximo si se producen **15 000** unidades y es de **8.5 €**.

Problema 5:

En el curso de primero de Bachillerato de un centro educativo se ha hecho una encuesta sobre el destino del viaje de estudios con dos opciones Londres y París. El curso está compuesto por tres clases A, B y C. La clase A tiene 28 estudiantes, de los cuales 12 han votado por Londres y el resto por París. La clase B tiene 25 estudiantes, 10 han votado por Londres y el resto por París, en la clase C, con 23 estudiantes, 18 han votado por Londres y el resto por París.

- **a.** *(2 puntos)* Si elegimos al azar un estudiante del curso, ¿Cuál es la probabilidad de que haya votado por Londres?
- **b.** *(2 puntos)* Si elegimos al azar un estudiante de entre los que han votado por Londres, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B?
- **c.** *(3 puntos)* Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) dos estudiantes del curso, ¿Cuál es la probabilidad de que los dos hayan votado por Londres?
- **d.** *(3 puntos)* Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres estudiantes del curso, ¿Cuál es la probabilidad de que sea uno de cada clase?

Solución:

Sean los sucesos:

A = "el alumno elegido al azar pertenece a la clase A" $P(A)=\frac{28}{28+25+23}=\frac{28}{76}$

B = "el alumno elegido al azar pertenece a la clase B" $P(B)=\frac{25}{28+25+23}=\frac{25}{76}$

C = "el alumno elegido al azar pertenece a la clase C" $P(C)=\frac{23}{28+25+23}=\frac{23}{76}$

L = "el alumno elegido al azar ha votado por Londres"

$$P(L/A)=\frac{12}{28} \qquad P(L/B)=\frac{10}{25} \qquad P(L/C)=\frac{18}{23}$$

a. Aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(L)=P(L/A)P(A)+\ P(L/B)P(B)+P(L/C)P(C)=\frac{12}{28}\cdot\frac{28}{76}+\frac{10}{25}\cdot\frac{25}{76}+\frac{18}{23}\cdot\frac{23}{76}=\frac{40}{76}=\frac{10}{19}\approx 0.5263$$

La probabilidad de que haya votado por Londres es de **0.53**.

b. Decir que el alumno elegido ha votado Londres, equivale a decir que ha ocurrido el suceso L. Nos piden, por tanto, $P(B/L)$

$$P(B/L)=\frac{P(L/B)P(B)}{P(L)}=\frac{\frac{10}{25}\cdot\frac{25}{76}}{\frac{10}{19}}=\frac{19}{76}=0.25$$

$$\boldsymbol{P(B/L)=0.25}$$

c. Representemos por L_i= "el alumno elegido en el lugar *i*, ha elegido Londres" *i* = 1, 2

Del total de alumnos: 28 + 25 + 23 = 76, han elegido Londres: 12 + 10 + 18 = 40.

P(*"los dos alumnos hayan votado por Londres"*) $=P(L_1\cap L_2)=P(L_1)\,P(L_2/L_1)=\frac{40}{76}\ \frac{39}{75}=\frac{26}{95}\approx 0.2737.$

P("los dos alumnos hayan votado por Londres") $=\frac{26}{95}\approx \mathbf{0.27}$.

d. Representemos por A_i, B_i, C_i con $i=1,2,3$ los sucesos "el alumno elegido en lugar i es de la clase A, B o C" respectivamente.

P(*"... sea un alumno de cada clase"*) $=P(A_1\cap B_2\cap C_3)+P(A_1\cap C_2\cap B_3)+\ P(B_1\cap A_2\cap C_3)+$

$+P(B_1\cap C_2\cap A_3)+P(C_1\cap A_2\cap B_3)+P(C_1\cap B_2\cap A_3)=6\cdot\frac{28}{76}\cdot\frac{25}{75}\cdot\frac{23}{74}=\frac{96600}{421800}=\frac{161}{703}\approx 0.2290$

P("... sea un alumno de cada clase") $=\frac{161}{703}\approx \mathbf{0.23}$

Problema 6: *(10 puntos)*

Se sabe que la altura de los estudiantes que se presentan a la EBAU tiene una distribución normal con desviación típica igual a 10 cm. Queremos construir un intervalo de confianza para la media de la altura de los estudiantes

a. *(5 puntos)* Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 97 % tenga una amplitud menor o igual que 4 cm.

b. *(4 puntos)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 9. Medimos a los estudiantes y tenemos los siguientes resultados en cm

175, 187, 183, 162, 161, 164, 180, 171, 158

Calcular un intervalo de confianza al 97 % para la media de la altura de los estudiantes que se presentan a la EBAU

c. *(1 punto)* Calcular la varianza de la muestra del apartado b

Solución:

Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 97 %:

$$1-\alpha = 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 0{,}03 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.985$$

El valor más cercano en la tabla es 0.9850 correspondiente a $z_{\alpha/2} = 2.17$

a) La amplitud del intervalo debe ser menor que 4 ⇒ el error máximo admisible $E \le 2$.

$$E = z_{\alpha/2}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 2 \Rightarrow 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \le 2 \Rightarrow 21.7 \le 2\sqrt{n},\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{21.7}{2} \le \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \ge 10.85 \Rightarrow n \ge 10.85^2 \Rightarrow n \ge 117.7225$$

La muestra debe ser al menos de **118** estudiantes.

b) La media de la muestra es

$$\bar{x} = \frac{175+187+183+162+161+164+180+171+158}{9} = \frac{1541}{9} = 171.22$$

Y el intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(171.22 - 2.17\,\frac{10}{\sqrt{9}},\ 171.22 + 2.17\,\frac{10}{\sqrt{9}}\right) = (163.9867, 178.4533)$$

Intervalo de confianza: $(\mathbf{163.99}, \mathbf{178.45})$

c) Denotamos por s^2 la varianza de la muestra

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{{x_i}^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{175^2+187^2+183^2+162^2+161^2+164^2+180^2+171^2+158^2}{9} - 171.22^2$$

$$= \frac{264749}{9} - 29316.2884 = 29416.5556 - 29316.2884 = 100.2671 \approx 100.27$$

La varianza de la muestra es $s^2 = \mathbf{100.27}$

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSSII	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Se proponen seis preguntas de las que el estudiante debe resolver tres a su elección.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

CALIFICACIÓN: La nota final será la suma de las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas, dividida por tres.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1: *(10 puntos)*

Un corredor aficionado tiene dos tipos de entrenamiento, el corto y el largo. En cada entrenamiento corto, al que dedica una 1 hora, corre 15 km y consume 1 200 kilocalorías. En cada entrenamiento largo, al que dedica 3horas, corre 30 km y consume 2 500 kilocalorías. Quiere planificar los entrenamientos del verano de forma que haga al menos 24 entrenamientos, pero no corra más de 660 km ni dedique más de 48 horas, en total. Si su objetivo es maximizar el número total de kilocalorías consumidas, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos entrenamientos de cada tipo tiene que hacer. ¿Cuántas kilocalorías consumirá en ese caso?

Problema 2: *(10 puntos)*

En un museo las entradas cuestan 1 euro para los niños, 2 euros para los jóvenes y 5 euros para los adultos. Ayer se recaudaron un total de 600 euros y se sabe que el número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes; además, si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de niños, jóvenes y adultos que visitaron el museo

Problema.3: *(10 puntos)*

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1}$$

Calcular

a) *(1 punto)* Dominio de f
b) *(3 puntos)* ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) < 0$?
c) *(2 puntos)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
d) *(4 puntos)* Máximos y mínimos relativos de f

Problema 4: *(10 puntos)*

Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x+1} & si\ x < -1 \\ x^3 - 4x^2 + 2x - 10 & si\ -1 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{4x^2 - 7x} - 2x & si\ x > 4 \end{cases}$$

a) *(3 puntos)* Estudiar la continuidad de f.
b) *(4,5 puntos)* Calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$
c) *(2,5 puntos)* Calcular $\int_1^2 f(x)dx$

Problema 5: *(10 puntos)*

En una bolsa tenemos 8 bolas: 3 blancas, 1 roja y 4 negras. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento.

Calcular:

a) *(2 puntos)* La probabilidad de que las dos sean blancas.
b) *(3 puntos)* La probabilidad de que al menos una sea blanca.
c) *(2 puntos)* La probabilidad de que las dos sean del mismo color.
d) *(3 puntos)* Si las dos bolas son del mismo color, la probabilidad de que sean blancas.

Problema 6: *(10 puntos)*

El ayuntamiento de una ciudad quiere estimar la proporción de hogares que tiene Internet de alta velocidad. Para ello, va a visitar una muestra aleatoria simple de hogares para saber si tienen Internet de alta velocidad y, a partir de los resultados, va a construir el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 94 %.

a) *(6 puntos)* Si quiere que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,1, ¿qué tamaño de la muestra debe escoger?

b) *(4 puntos)* Decide tomar una muestra de 200 hogares y, de ellos, 112 tienen Internet de alta velocidad. Calcular el intervalo de confianza al 94 % para la proporción de hogares de la ciudad que tienen Internet de alta velocidad

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

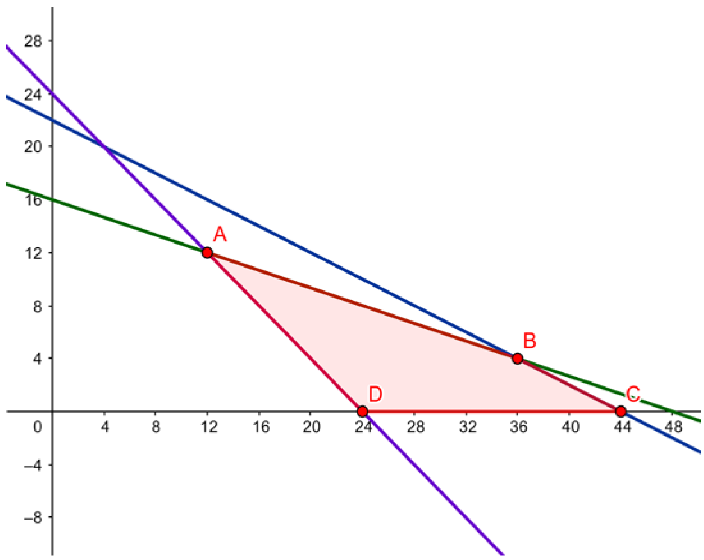
NOTA: En la tabla figuran los valore de $P(Z \leq k)$ para una distribución $N(0,1)$. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1: *(10 puntos)*

Un corredor aficionado tiene dos tipos de entrenamientos, el corto y el largo. En cada entrenamiento corto, al que dedica una 1 hora, corre 15 km y consume 1 200 kilocalorías. En cada entrenamiento largo, al que dedica 3 horas, corre 30 km y consume 2 500 kilocalorías. Quiere planificar los entrenamientos del verano de forma que haga al menos 24 entrenamientos, pero no corra más de 660 km ni dedique más de 48 horas, en total. Si su objetivo es maximizar el número total de kilocalorías consumidas, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos entrenamientos de cada tipo tiene que hacer. ¿Cuántas kilocalorías consumirá en ese caso?

Solución:



Sean: $x =$ número de entrenamientos cortos

$y =$ número de entrenamientos largos

La función objetivo z debe representar el número total de kilocalorías consumidas. Será entonces

$$z = F(x, y) = 1200x + 2500y$$

Y las restricciones que presenta, vienen dadas por el sistema de inecuaciones:

$$S \equiv \begin{cases} I_1: x + 3y \leq 48 \\ I_2: 15x + 30y \leq 660 \\ I_3: x + y \geq 24 \\ I_4: x \geq 0 \\ I_5: y \geq 0 \end{cases}$$

Obtendremos gráficamente su solución:

El semiplano solución de la inecuación I_1 está definido por la recta $x + 3y = 48$ que pasa por los puntos (0, 16) y (48, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_1 $(0+3.\ 0 \leq 48) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_2 está definido por la recta $15x + 30y = 660$ que pasa por los puntos (20, 12) y (36, 4). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_2 $(15.0+30.0 \leq 660) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_2 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $x + y = 24$ que pasa por los puntos (0, 24) y (24, 0). El punto O (0, 0) **NO** cumple la inecuación I_3 $(0+0 < 24) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 no contiene a O.

Las inecuaciones I_4 e I_5 restringen a solución al primer cuadrante.

La región factible es el polígono $ABCD$, intersección de los cinco semiplanos y la solución óptima se encuentra en uno de sus vértices.

Determinamos sus coordenadas

$$A = r_1 \cap r_3 \equiv \begin{cases} x + y = 24 \\ x + 3y = 48 \end{cases} \sim \begin{cases} -x - y = -24 \\ x + 3y = 48 \end{cases} \sim \begin{cases} 2y = 24 \\ x = 48 - 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ x = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = (12, 12)$$

$$B = r_1 \cap r_2 \equiv \begin{cases} x + 3y = 48 \\ 15x + 30y = 660 \end{cases} \sim \begin{cases} -10x - 30y = -480 \\ 15x + 30y = 660 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x = 180 \\ y = \dfrac{48 - x}{3} \end{cases} \sim \begin{cases} x = 36 \\ y = \dfrac{48 - 36}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 36 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B = (36, 4)$$

$$C = r_2 \cap OX \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 15x + 30y = 660 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{660}{15} = 44 \end{cases} \Rightarrow C = (44, 0)$$

$$D = r_3 \cap OX \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x + y = 24 \end{cases} \Rightarrow D = (24, 0)$$

Según el teorema fundamental de la programación lineal, la solución, si existe, se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Valoremos la función objetivo en cada uno de ellos:

$z(A) = F(12,12) = 1200.12 + 2500.12 = 44400$

$z(B) = F(36, 4) = 1200.36 + 2500.4 = 53200$

$z(C) = F(44, 0) = 1200.44 + 2500.0 = 52800$

$z(D) = F(24, 0) = 1200.24 + 2500.0 = 28800$

La función z es máxima en el vértice B. Por tanto, debe realizar 36 entrenamientos cortos y 4 largos para que el número de kilocalorías consumidas sea máximo y serán en este caso 53 200.

Debe realizar **36** entrenamientos cortos y **4** largos para que el número de kilocalorías consumidas sea máximo y serán en este caso **53 200 kilocalorías**.

Problema 2: *(10 puntos)*

En un museo las entradas cuestan 1 euro para los niños, 2 euros para los jóvenes y 5 euros para los adultos. Ayer se recaudaron un total de 600 euros y se sabe que el número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes; además, si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de niños, jóvenes y adultos que visitaron el museo

Solución

Sean $\boldsymbol{x}$ = número de entradas de niño, $\boldsymbol{y}$ = número de entradas de joven, $\boldsymbol{z}$= número de entradas de adulto

$$\begin{cases} x+2y+5z=600 \\ z=2(x+y) \\ y+100=x+z \end{cases} \approx \begin{cases} x+2y+5z=600 \\ 2x+2y-z=0 \\ x-y+z=100 \end{cases}$$

Se trata de un sistema de ecuaciones lineales. La matriz del sistema es:

$$A:B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 600 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 100 \end{pmatrix} \qquad \det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-25\neq 0$$

Utilizamos la regla de Cramer para encontrar la solución:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 600 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 100 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{Det\ A}=\frac{-600}{-25}=24 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 600 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 100 & 1 \end{vmatrix}}{Det\ A}=\frac{-700}{-25}=28 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 600 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 100 \end{vmatrix}}{Det\ A}=\frac{-2600}{-25}=104$$

Visitaron el museo **24** niños, **28** jóvenes y **104** adultos.

Problema.3: *(10 puntos)*

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1}$$

Calcular

a) *(1 punto)* Dominio de f
b) *(3 puntos)* ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) < 0$?
c) *(2 puntos)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
d) *(4 puntos)* Máximos y mínimos relativos de f

Solución:

a) $Dom\,(f) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}/x - 1 \neq 0\ \} = \mathbb{R} - \{1\}$

$$Dom\,(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

b) $f(x) = \frac{x^2-4x+12}{x-1} < 0$

- $x^2 - 4x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{4\pm\sqrt{16-48}}{2}$ no tiene solución real ⇒ el numerador de la expresión analítica de f tiene signo constante
- $x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

f solo puede cambiar de signo en $x = 1$

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
Signo de f	Negativo	$\nexists$	Positivo

Luego $f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 1)$

$$f(x) < 0 \ \ para \ \ x \in (-\infty, \mathbf{1})$$

c) Empecemos por las verticales

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to1^- \\ x<1}} \frac{x^2-4x+12}{x-1} = \frac{9}{0} = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to1^+ \\ x>1}} \frac{x^2-4x+12}{x-1} = \frac{9}{0} = \infty$$

Por lo tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si existen asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+12}{x-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+12}{x-1} = \infty$$

No hay asíntotas horizontales.

Estudiamos ahora la existencia de asíntotas oblicuas. Si existen, tienen la forma $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-4x+12}{x-1} : x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+12}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-4x+12}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+12-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+12}{x-1} = -3$$

La recta $y = x - 3$ es asíntota oblicua en $-\infty$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-4x+12}{x-1} : x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+12}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-4x+12}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+12-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x+12}{x-1} = -3$$

La recta $y = x - 3$ es también asíntota oblicua en ∞.

La recta $\boldsymbol{x = 1}$ es una asíntota vertical. La recta $\boldsymbol{y = x - 3}$ es asíntota oblicua

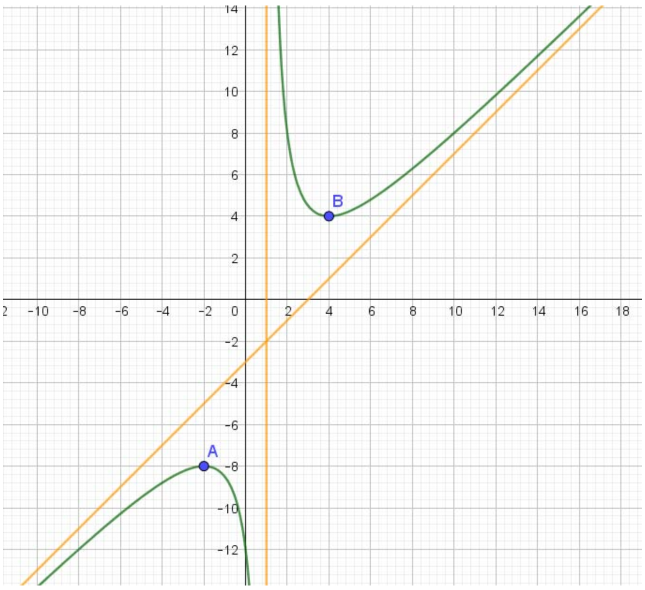
d) $f(x) = \frac{x^2-4x+12}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-4)(x-1)-(x^2-4x+12)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 1)$	1	$(1, 4)$	4	$(4, \infty)$
Signo f'	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
Monotonía de f y extremos relativos	*Creciente*	*Máximo relativo*	*Decreciente*	$\nexists$	*Decreciente*	*Mínimo relativo*	*Creciente*

El punto $(-2, -8)$ es un máximo relativo y el punto $(4, 4)$ un mínimo relativo de la función f.

Máximo relativo: $\boldsymbol{(-2, -8)}$. Mínimo relativo: $\boldsymbol{(4, 4)}$



Problema 4: *(10 puntos)*

Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x+1} & si\ x < -1 \\ x^3 - 4x^2 + 2x - 10 & si\ -1 \le x \le 4 \\ \sqrt{4x^2 - 7x} - 2x & si\ x > 4 \end{cases}$$

a) *(3 puntos)* Estudiar la continuidad de f. b) Calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$. c) *(2,5 puntos)* Calcular $\int_1^2 f(x)dx$

Solución:

a) f es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$. Lo demostramos:

- $g(x) = \frac{3}{x+1}$ es una función racional, continua en $\mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow f$ es continua en $(-\infty, -1)$.
- $h(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 10$ es una función polinómica, continua en $\mathbb{R} \Rightarrow$ f es continua en $(-1,\ 4)$.
- $k(x) = \sqrt{4x^2 - 7x} - 2x$ es continua en $\{x \in \mathbb{R}/4x^2 - 7x > 0\} = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{7}{4}, \infty\right) \Rightarrow$

$\Longrightarrow f$ es continua en $(4, \infty)$.

Analicemos ahora si se cumple la definición de continuidad en los valores de cambio:

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \dfrac{3}{x+1} = -\infty \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^3 - 4x^2 + 2x - 10) = -17 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (x^3 - 4x^2 + 2x - 10) = -2 = f(4) \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \left(\sqrt{4x^2 - 7x} - 2x\right) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4) \quad \Rightarrow \quad f$ es continua en $x = 4$.

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 7x} - 2x\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-7x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-7x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-7x}+2x} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-7x}\right)^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-7x}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-7x-4x^2}{\sqrt{4x^2-7x}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-7x}{\sqrt{4x^2-7x}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-7x}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}}+\frac{2x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-7}{\sqrt{4-\frac{7}{x}}+2} =$

$= \frac{-7}{\sqrt{4+\frac{7}{\infty}}+2} = \frac{-7}{\sqrt{4}+2} = \frac{-7}{4}.$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{-7}{4}$$

c) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^3 - 4x^2 + 2x - 10\,)dx = \left[\underbrace{\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + x^2 - 10x}_{F(x)}\right]_1^2 \underbrace{=}_{Regla\ de\ Barrow}$

$= \underbrace{\left(\frac{2^4}{4} - \frac{4.2^3}{3} + 2^2 - 10.2\right)}_{F(2)} - \underbrace{\left(\frac{1^4}{4} - \frac{4.1^3}{3} + 1^2 - 10.1\right)}_{F(1)} = -\frac{151}{12} = -12.5833$

$$\int_1^2 f(x)dx = -\frac{151}{12}$$

Problema 5: *(10 puntos)*

En una bolsa tenemos 8 bolas: 3 blancas, 1 roja y 4 negras. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento.

Calcular:

a) *(2 puntos)* La probabilidad de que las dos sean blancas.
b) *(3 puntos)* La probabilidad de que al menos una sea blanca.
c) *(2 puntos)* La probabilidad de que las dos sean del mismo color.
d) *(3 puntos)* Si las dos bolas son del mismo color, la probabilidad de que sean blancas.

Solución:

Describimos, mediante un diagrama en árbol, el espacio muestral

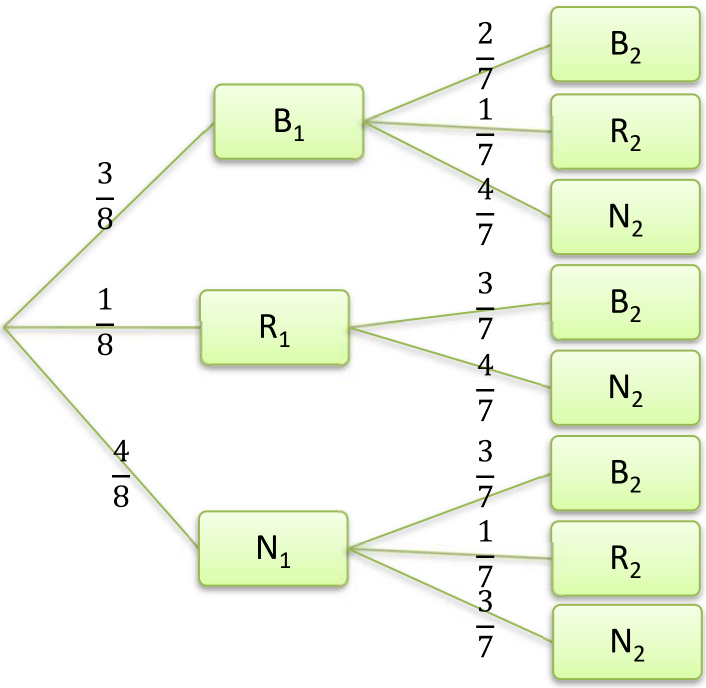
Sean

Bi = "La bola extraída en lugar i es blanca"

Ri = "La bola extraída en lugar i es roja"

Ni = "La bola extraída en lugar i es negra"

Para i = 1,2



a) $P(\text{“las dos bolas extraídas son blancas”}) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28} = 0.10714$

La probabilidad de que las dos sean blancas es igual a $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{28}}$.

b) $P(\text{“al menos una bola es blanca”}) = 1 - P(\text{"ninguna bola extraída es blanca"})=$

$$=1 - \left[P[\underbrace{(R_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap R_2) \cup (N_1 \cap N_2)}_{(R_1\cap N_2),(N_1\cap R_2),(N_1\cap N_2)\text{ son sucesos incompatibles 2a2}}] \right] = 1 - [P(R_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap N_2)]$$

$$= 1 - [P(R_1).P(N_2/R_1) + P(N_1).P(R_2/N_1) + P(N_1).P(N_2/N_1)] = 1 - \left[\frac{1}{8}.\frac{4}{7} + \frac{4}{8}.\frac{1}{7} + \frac{4}{8}.\frac{3}{7}\right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{4}{56} + \frac{4}{56} + \frac{12}{56}\right] = 1 - \frac{20}{56} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14} = 0.642857$$

La probabilidad de que al menos una sea blanca es igual a $\frac{9}{14}$

c) $P(\text{“}las\ dos\ bolas\ sean\ del\ mismo\ color\text{”}) = P\left[\underbrace{(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)}_{(B_1 \cap B_2),(N_1 \cap N_2)\ incompatibles}\right] =$

$= P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) + P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28} =$

0.321428

La probabilidad de que las dos sean del mismo color es igual a $\mathbf{\frac{9}{28}}$.

d) Llamemos C al suceso del apartado anterior, C = “*las dos bolas son del mismo color*”

$$P((B_1 \cap B_2)/C) = \frac{P[(B_1 \cap B_2) \cap C]}{P(C)} = \frac{P((B_1 \cap B_2)}{P(C)} = \frac{3}{28} : \frac{9}{28} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0.33333$$

Si las dos bolas son del mismo color, la probabilidad de que sean blancas es igual a $\mathbf{\frac{1}{3}}$

Problema 6: *(10 puntos)*

El ayuntamiento de una ciudad quiere estimar la proporción de hogares que tiene Internet de alta velocidad. Para ello, va a visitar una muestra aleatoria simple de hogares para saber si tienen Internet de alta velocidad y, a partir de los resultados, va a construir el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 94 %.

a) *(6 puntos)* Si quiere que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0.1, ¿qué tamaño de la muestra debe escoger?

b) *(4 puntos)* Decide tomar una muestra de 200 hogares y, de ellos, 112 tienen Internet de alta velocidad. Calcular el intervalo de confianza al 94 % para la proporción de hogares de la ciudad que tienen Internet de alta velocidad

Solución:

a) Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 94 %:

$$1-\alpha = 0.94 \Rightarrow \alpha = 0.06 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.97$$

El valor más cercano en la tabla es 0.9699 correspondiente a $z\alpha/_2 = 1.88$

La amplitud del intervalo de confianza debe ser menor o igual que 0.1 $\Rightarrow$ el error máximo admisible $E \le 0.05$.

Como no tenemos más información, suponemos $p_r = 0.5$

$$E = z\alpha/_2 \sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}} \le 0.05 \Rightarrow 1.88\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{n}} \le 0.05 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.25}{n}} \le \frac{0.05}{1.88} \Rightarrow \frac{0.25}{n} \le \frac{0.005^2}{1.88^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \ge \frac{0.25\cdot 1.88^2}{0.05^2} \sim 353.44$$

La muestra debe ser al menos de **354** hogares.

b) En este caso $p_r = \frac{112}{200} = 0.56$

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por

$$\left(p_r - z\alpha/_2 \sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}, p_r + z\alpha/_2 \sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}\right) = \left(0.56 - 1.88\sqrt{\frac{0.56\cdot 0.44}{200}},\ 0.56 + 1.88\sqrt{\frac{0.56\cdot 0.44}{200}}\right) =$$

$= (0.56 - 0.066,\ 0.56 + 0.066) = (0.494,\ 0.626)$

El intervalo de confianza para la proporción es $\mathbf{(0.494,\ 0.626)}$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará con un máximo de 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

1A. En una oficina se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias entre fotocopias en blanco y negro y fotocopias en color. El coste total de dichas fotocopias fue de 3,5 euros, siendo el coste de cada fotocopia en blanco y negro de m céntimos de euro, y el coste de cada fotocopia en color cuatro veces el coste de una en blanco y negro.

a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de fotocopias en blanco y negro y en color hechas la semana pasada.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas fotocopias en blanco y negro se realizaron en la oficina si cada fotocopia en color costó 2 céntimos?

1B. En un local que se destinará a restaurante, se está pensando en poner mesas altas y bajas. Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2. El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas y como mucho el doble de mesas altas que bajas.

a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas mesas puede haber en el restaurante de cada tipo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo?

b) **[0,75 puntos]** Por estudios de mercado, se estima que el beneficio que dejan los clientes por mesa alta es de 20 euros, mientras que el beneficio por mesa baja es de 25 euros. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe colocar para maximizar los beneficios estimados? ¿a cuánto ascenderían dichos beneficios?

2A. Dada la función $f(x) = \frac{a}{x+1}$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = 10 \cdot ln(2)$, donde F denota una primitiva de f.

b) **[2 puntos]** Suponiendo que $a = 10$, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = -2$.

2B. A la hora de estudiar la relación entre el beneficio mensual de una empresa y cantidad de producto fabricado, se representa por $f(x)$ el beneficio mensual, en millones de euros, si se han fabricado x toneladas de producto ese mes. Si en un mes se fabrican como mucho 100 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es $\frac{1}{900}(-x^2+100x-1600)$ millones de euros, mientras que si se fabrican más de 100 toneladas de producto, el beneficio viene dado por $1-\frac{120}{x}$ millones de euros.

a) **[1,75 puntos]** Obtén la expresión de la función f. Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0,\infty)$.

Universidad de Oviedo
Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad
2019-2020

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

b) **[0,75 puntos]** ¿Qué cantidad debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que fabricar para que el beneficio sea positivo?

3A. El 20 % de los trabajadores de una empresa tiene estudios superiores y el 80 % restante no los tiene. De los que tienen estudios superiores, el 6 % fuma. Además se sabe que del total de los trabajadores, el 12 % fuma.

a) **[1,25 puntos]** De los trabajadores que fuman, ¿qué porcentaje tiene estudios superiores?

b) **[1,25 puntos]** De los trabajadores que no tienen estudios superiores, ¿qué porcentaje fuma?

3B. Una fábrica de tornillos utiliza en su fabricación el 60 % de las veces la máquina A y el 40 % restante la B. La máquina A produce un 5 % de tornillos defectuosos y la B un 2,5 %.

a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un tornillo, elegido al azar, sea defectuoso.

b) **[1,25 puntos]** Si un tornillo elegido al azar resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que lo haya producido la máquina B.

4A. Para estudiar la evolución del precio medio de un producto en determinada ciudad, se consideró una muestra aleatoria de 40 comercios de dicha ciudad y se obtuvo que el precio medio de dicho producto en la muestra era de 36 euros. Se supone que el precio de dicho producto se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 5,5 euros.*

a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza para el precio medio de dicho producto en esa ciudad, al 90 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio en esa ciudad a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1,5 euros y un nivel de confianza del 90 %?

4B. En una determinada comunidad autónoma se ha seleccionado una muestra aleatoria de 500 personas, de las que 190 leen el periódico habitualmente.*

a) **[1,5 puntos]** Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de personas que leen el periódico habitualmente en esa comunidad autónoma.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño muestral?

---

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$ y $F(2{,}58) = 0{,}995$.

Bloque 1.A.

En una oficina se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias entre fotocopias en blanco y negro y fotocopias en color. El coste total de dichas fotocopias fue de 3.5 euros, siendo el coste de cada fotocopia en blanco y negro de m céntimos de euro, y el coste de cada fotocopia en color cuatro veces el coste de una en blanco y negro.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de fotocopias en blanco y negro, respectivamente, hechas la semana pasada.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas fotocopias en blanco y negro se realizaron en la oficina si cada fotocopia en color costó 2 céntimos?

Solución:

a) Sean x las fotocopias en blanco y negro e y las de color. Pasamos los euros a céntimos, 3.5 euros = 350 céntimos.

El sistema es: $\begin{cases} x + y = 550 \\ mx + 4my = 350 \end{cases}$

donde la primera ecuación representa el total de fotocopias y la segunda su precio en céntimos de euro.

b) Resolvemos

$$\begin{cases} x + y = 550 \\ mx + 4my = 350 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 550 - y \\ m(550 - y) + 4my = 350 \end{cases}$$

$$3my = 350 - m \cdot 550$$

$$y = \frac{350 - 550m}{3m} \rightarrow x = 550 - \frac{350 - 550m}{3m}$$

Existe solución única y es única, sí y solo sí, $m \neq 0$. Si $m = 0$ el sistema es incompatible.

Veamos ahora el caso particular que nos piden. Si las fotocopias en color cuestan 2 céntimos entonces,

$4m = 2 \rightarrow m = 0.5 \Longrightarrow y = \frac{350 - 550 \cdot 0.5}{3 \cdot 0.5} = 50$ fotocopias en color

$x = 550 - 50 = 500$ fotocopias en blanco y negro

La solución es **500** fotocopias en blanco y negro y **50** fotocopias en color.

Bloque 1.B.

En un local que se destinará a restaurante, se está pensando en poner mesas altas y bajas. Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2. El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas y como mucho el doble de mesas altas que bajas.

$a)$ ¿Cuántas mesas puede haber en el restaurante de cada tipo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo?

$b)$ Por estudios de mercado, se estima que el beneficio que dejan los clientes por mesa alta es de 20 euros, mientras que el beneficio por mesa baja es de 25 euros. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe colocar para maximizar los beneficios estimados?, ¿a cuánto ascenderán dichos beneficios?

Solución:

Sea:

$$\begin{cases} x = nº\ mesas\ altas\ (2\,m^2/mesa) \\ y = nº\ mesas\ bajas\ (4\,m^2/mesa) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 5; x \leq 2y \end{cases}$$

$r: x + 2y = 60$

x	y
0	30
60	0

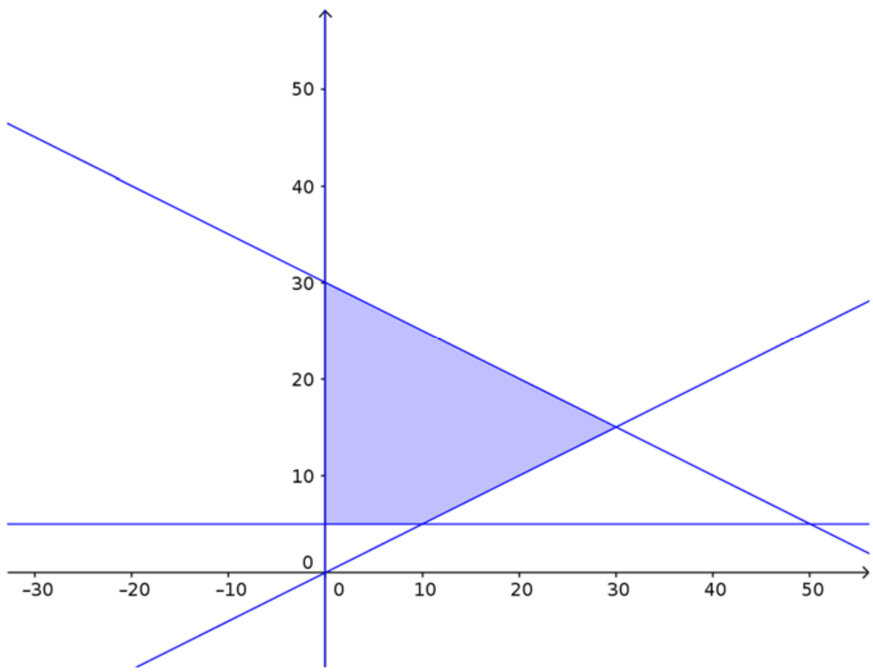
$s: y = 5$

x	y
0	5
30	5

$t: x = 2y$

x	y
0	0
60	30

La región factible es la siguiente



Calculamos los puntos de corte. Uno de ellos debe ser la solución.

$$P = s \cap OY \to P(0,5)\ ;\ Q = r \cap OY \to Q(0,30)$$

$$R = t \cap r \to \begin{cases} x = 2y \\ x + 2y = 60 \end{cases} \to \begin{cases} x = 30 \\ y = 15 \end{cases} \to R(30,15)$$

$$S = s \cap t \to \begin{cases} y = 5 \\ x = 2y \end{cases} \to \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases} \to S(10,5)$$

De donde los vértices de la región factible son: S (10, 5); P (0, 5); Q (0, 30); R (30, 15)

El punto x = 15, y = 15 cumple todas las restricciones, por lo que está dentro de la región factible. Por tanto

Sí, podrá haber 15 mesas de cada tipo.

b) La solución es necesariamente uno de los puntos, como ya hemos dicho.

La función objetivo es $f(x,y) = 20x + 25y$. Basta sustituir en cada uno de los puntos y ver en cuál se alcanza el máximo valor.

$f(S) = f(10,5) = 20(10) + 25(5) = 325.$

Análogamente:

$f(P) = f(10,5) = 20(0) + 25(5) = 125.$

$f(Q) = f(0,30) = 20(0) + 25(30) = 150.$

$f(R) = f(30,15) = 20(30) + 25(15) = 975.$

Es claro que en R es máximo el beneficio.

Debe colocar **30** mesas altas y **15** mesas bajas.

Su beneficio estimado será entonces de **975 €.**

Bloque 2.A.

Dada la función $f(x) = \frac{a}{x+1}$, se pide:

a) Encontrar el valor de a que verifica $F(0) = 0\ y\ F(1) = 10 \cdot L2$, donde F denota una primitiva de f.

b) Suponiendo que $a = 10$, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3\ y\ x = 2$.

Solución:

a) Primitiva de *f*.

$$F(x) = \int \frac{a}{x+1} dx = aln|x+1| + k$$

$$\begin{cases} F(0) = aln(1) + k = a \cdot 0 + k = 0 \Longrightarrow k = 0 \\ F(1) = aln(2) + k = a \cdot ln(2) = 10ln(2) \Longrightarrow a = 10 \end{cases}$$

$$F(x) = 10 \cdot ln|x+1| \to \boldsymbol{a = 10}$$

b) Para $a = 10$

$$y = \frac{10}{x+1}$$

El único problema es el valor que anula el denominador. El dominio es pues $D = \Re - \{-1\}$

Calculamos los límites en los infinitos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

que nos da una asíntota horizontal $y = 0$ en ambos infinitos

Los límites en la discontinuidad son respectivamente:

$$\lim_{x \to -1^+,} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -1^-,} f(x) = 0$$

por lo que $x = -1$ es asíntota vertical.

La función *f* es continua y derivable en todo su dominio *D*, corta al eje OY en el punto (0, 10) y no corta al eje OX.

- Crecimiento:

$$f'(x) = \frac{-10}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ en } D.$$

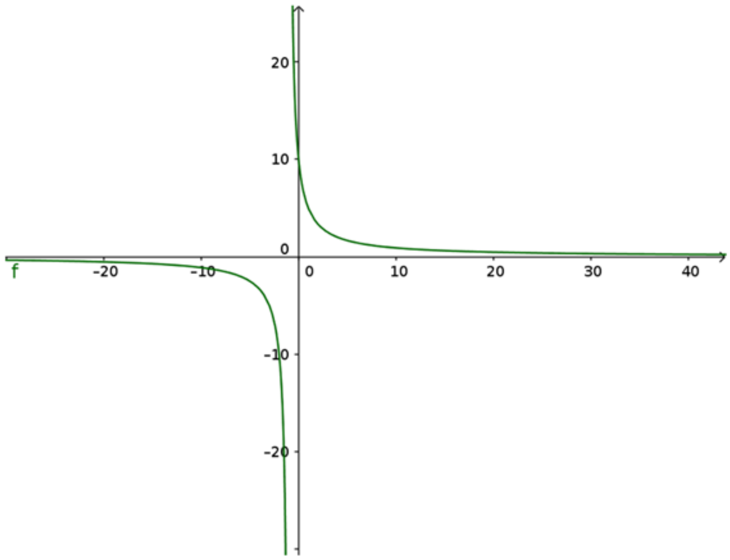
La función *f* es decreciente en todo su dominio.

- Concavidad

$$f''(x) = \frac{0 - (10) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{20}{(x+1)^3}$$

Su segunda derivada y por tanto su curvatura es positiva (ramas hacia arriba) si $x > -1$ y negativa (ramas hacia abajo) si $x < -1$.

Su gráfica es, por tanto:



- Área

$$f(-2) = \frac{10}{-1} = -10$$

$$f(-3) = \frac{10}{-1} = -5$$

$$Área = \left|\int_{-3}^{-2} f(x)dx\right| = |F(-2) - F(-3)| = \left|10 \cdot ln|-1| - 10 \cdot ln|-2|\right| = 10 \cdot ln(2)$$

El área es: $10 \cdot ln(2)\ u^2 = 6.93\ u^2$.

Bloque 2.B.

A la hora de estudiar la relación entre el beneficio mensual de una empresa y cantidad de producto fabricado, se representa por $f(x)$ el beneficio mensual, en millones de euros, si se han fabricado x toneladas de producto ese mes. Si en un mes se fabrican como mucho 100 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es $\frac{1}{900}(-x^2+100x-1600)$ millones de euros, mientras que, si se fabrican más de 100 toneladas de producto, el beneficio viene dado por $1-\frac{120}{x}$ millones de euros.

$a)$ Obtén la expresión de la función f. Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0,\infty)$.

$b)$ ¿Qué cantidad debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que fabricar para que el beneficio sea positivo?

Solución:

a) La función *f* viene dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{-x^2+100x-1600}{900}, x\le 100\\ 1-\frac{120}{x}, x>100\end{cases}.$$

Se entiende, naturalmente, que solo tiene sentido económico para x nulo o positivo, pero sentido matemático tiene también para cualquier valor negativo.

Dibujamos pues la función.

Si $x\le 100$ es una parábola de eje vertical ramas hacia abajo.

El vértice está localizado en (50, 1), ya que $f'(x)=0, f'(x)=\frac{1}{900}(-2x+100)=0$, pues da, $x=50$ que es un máximo. La función crece entre 0 y 50 y decrece entre 50 y 100.

Los cortes de los ejes son $\left(0,-\frac{16}{9}\right)$; $(20,0)$; $(80,0)$. El primero es con OY, que se obtiene dando a x el valor 0. Los otros dos salen de igualar $f(x)$ a 0 y resolver la ecuación de segundo grado resultante:

$$-x^2+100x-1600=0\Longrightarrow x=20, x=80$$

Tiene un máximo relativo en $P(50,1)$

Tiene un punto de discontinuidad para x = 100. $f(100)=-0.2$

- Si $x>100$ es continua en $x>100$, ya que x = 0, no está en ese intervalo

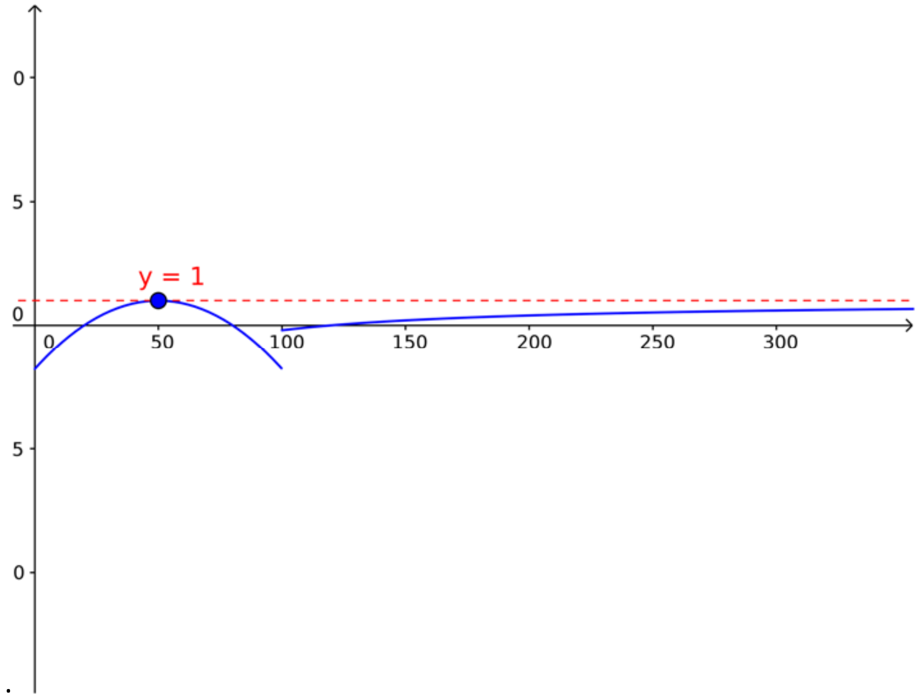
$$f'(x)=0-\frac{0\cdot x^2-2x\cdot 100}{x^2}=\frac{240}{x}$$

Entonces $f'(x)>0$ si $x>100$. Es siempre creciente.

No se puede cortar con OY pues x > 100. Para calcular el corte con OX resolvemos $f(x)=0$. Se tiene pues $1-\frac{120}{x}=0$ que da x = 120. El punto de corte es (120, 0). Por otro lado, tiene una asíntota horizontal en infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$\lim_{x\to 100} 1 - \frac{120}{x} = 1 - \frac{120}{100} = -1.2 \neq f(100) = 0.2$ por lo que NO es continua en $x = 100$



b) En la gráfica se ve claramente que el máximo se alcanza en el intervalo [0, 100]. Tampoco es difícil notarlo analíticamente pues si x > 100 la función es creciente y tiende a 1 en el infinito, luego está siempre por debajo de 1 estrictamente.

Ya hemos visto que el máximo en [0, 100] se alcanza para x = 50 y es el punto $P(50, 1)$.

Luego debe fabricar **50** toneladas de producto.

Obtendrá un beneficio de **1 millón de euros**.

Para ver cuándo que el beneficio es positivo observamos la gráfica y tenemos en cuenta los cortes con los ejes.

El beneficio es positivo entre 20 y 80 unidades (nulo en 20 y 80 exactamente) y a partir de 120 unidades (nulo en 120 exactamente).

Bloque 3.A.

El 20 % de los trabajadores de una empresa tiene estudios superiores y el 80 % restante no los tiene. De los que tienen estudios superiores, el 6 % fuma. Además, se sabe que, del total de los trabajadores, el 12 % fuma.

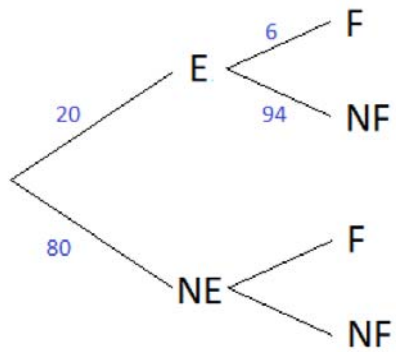
$a)$ De los trabajadores que fuman, ¿qué porcentaje tiene estudios superiores?

$b)$ De los trabajadores que no tienen estudios superiores, ¿qué porcentaje fuma?

Solución:

Sean los sucesos:

E: tiene estudios superiores. NE: no tiene estudios superiores. F: fuma. NF: no fuma



$$P(E)=\frac{20}{100}, P(NE)=\frac{80}{100}, P(F|E)=\frac{6}{100}, P(F)=\frac{12}{100}$$

a) De los fumadores el porcentaje de trabajadores que tienen estudios superiores es:

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{P(F|E)\cdot P(E)}{P(F)}=\frac{\frac{6}{100}\cdot\frac{20}{100}}{\frac{12}{100}}=\frac{10}{100}=10\ \%$$

La solución es que el **10 %** de los fumadores tiene estudios superiores.

b) Nos piden una condicionada $P(F|NE)=\frac{P(F\cap NE)}{P(NE)}$. Necesitamos pues los fumadores sin estudios superiones. Pero ya tenemos los que sí tienen estudios superiores calculada de antes.

$$P(E\cap F)=P(F|E)\cdot P(E)=\frac{6}{100}\cdot\frac{20}{100}=\frac{12}{1000}=1.2\%$$

Pero es que, además, tenemos el total de fumadores, el 12 %. Restando tenemos los fumadores sin estudios superiores:

$$P(F\cap NE)=P(F)-P(F\cap NE)=\frac{12}{100}-\frac{12}{1000}=\frac{108}{1000}=10.8\ \%$$

Basta pues dividir. Lo tenemos todo:

$$P(F|NE)=\frac{P(F\cap NE)}{P(NE)}=\frac{\frac{108}{1000}}{\frac{80}{100}}=\frac{108}{800}=\frac{27}{200}=13.5\ \%$$

La solución es que el **13.5 %** de los trabajadores sin estudios superiores fuma.

Bloque 3.B.

Una fábrica de tornillos utiliza en su fabricación el 60 % de las veces la máquina A y el 40 % restante la B. La máquina A produce un 5 % de tornillos defectuosos y la B un 2.5 %.

a) Calcula la probabilidad de que un tornillo, elegido al azar, sea defectuoso.

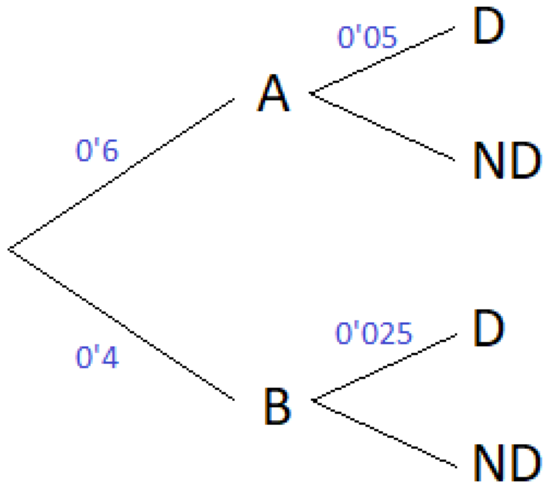
b) Si un tornillo elegido al azar resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que lo haya producido la máquina B.

Solución:

Sean los sucesos:

$A: produce\ con\ la\ máquina\ A.\ \ B: produce\ con\ la\ máquina\ B$

$D: es\ defectuoso.\ \ ND: no\ es\ defectuoso$



a) La probabilidad de un tornillo defectuoso elegido al azar se calcula como:

$$P(D) = P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) = 0.05 \cdot 0.6 + 0 - 025 \cdot 0.4 = 0.03 \cdot 0.01 = 0.04 = \frac{4}{100}$$

La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es del **0.04**.

b) La probabilidad de que el tornillo defectuoso haya sido producido por la máquina B es:

$$P(B|D) = \frac{P(D \cap B) \cdot P(B)}{P(D)} = \frac{\frac{2'5}{100} \cdot \frac{40}{100}}{\frac{4}{100}} = \frac{25}{100} = 0.25 = 25\ \%$$

La probabilidad de que el tornillo defectuoso lo haya fabricado B es del **0.25**.

Bloque 4.A.

Para estudiar la evolución del precio medio de un producto en determinada ciudad, se consideró una muestra aleatoria de 40 comercios de dicha ciudad y se obtuvo que el precio medio de dicho producto en la muestra era de 36 euros. Se supone que el precio de dicho producto se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica de 5.5 euros.

a) Construye un intervalo de confianza para el precio medio de dicho producto en esa ciudad, al 90 % de confianza.

b) Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio con esa ciudad a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1.5 euros y un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

a) La variable es $X = N(\mu, 5.5)$. La media muestral con 40 valores es por tanto:

$\overline{X} = N\left(\mu, \frac{5.5}{\sqrt{40}}\right) = N(\mu, 0.87)$ de donde $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{0.87} = N(0,1)$

El intervalo es del 90 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$ y despejamos

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha = 0.90 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0.90 = 0.10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645.\ (1-0.05 = 0.950 \ \rightarrow z = 1.64).$

$P(-M < Z < M) = 0.9 \rightarrow F(M) - F(-M) = 0.9 \rightarrow F(M) + [1 - F(M)] = 0.9$

y finalmente $F(M) = 0.9 + 12 = 0.95$ que nos da $M = 1.64$

Por tanto, el intervalo es $-1.64 < \frac{\overline{X}-\mu}{0.87} < -1.64$ que resulta:

$$(36 - 0.87 \cdot 1.64, 36 + 0.87 \cdot 1.64) = (34.57, 37.53)$$

El intervalo de confianza es **(34.57, 37.53)**

b) Nos sirven la mayoría de los cálculos.

El intervalo será $\left(36 - \frac{5.5}{\sqrt{n}} \cdot 1.64,\ \ 36 + \frac{5.5}{\sqrt{n}} \cdot 1.64\right)$ por lo que debe cumplirse:

$\frac{5.5}{\sqrt{n}} 1.64 = 1.5$ de donde $\sqrt{n} = \frac{5.5 \cdot 1.64}{1.5} = 6.01$. Así pues $n = 36.16$

Debe ser un número entero, por lo que tomamos el siguiente.

El tamaño muestral mínimo es **37**.

Bloque 4.B.

En una determinada continuidad autónoma se ha seleccionado una muestra aleatoria de 500 personas, de las que 190 leen el periódico habitualmente.

a) Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de personas que leen el periódico habitualmente en esa comunidad autónoma.

b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño muestral?

Solución:

Se trata de una distribución binomial, $B(n, p)$ donde queremos calcular un intervalo de confianza para p con n = 500

Sabemos que, si calculamos la media muestral, puede aproximarse por una normal:
$\overline{X} = N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$, de donde $Z = \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = N(0,1)$

El intervalo es del 95 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.95$

$F(M) - F(-M) = 0.95$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.95$ y finalmente $F(M) = \frac{0.95+1}{2} = 0.975$ que nos da $M = 1.96$.

Por tanto, el intervalo es $-1.96 < \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}} < 1.96$. Como son 190 valores, para el denominador tomamos $p = \frac{190}{500} = 0.38$ de donde $\sqrt{\frac{0.38\,(1-0.38)}{500}} = 0.021$

El intervalo es pues $(0.38 - 0.021 \cdot 1.96, 0.38 + 0.021 \cdot 1.96) = (0.34, 0.42)$

El intervalo para la proporción es **(0.34, 0.42)** es decir (34%, 42%)

b) El error de estimación es la diferencia entre la proporción estimada y uno cualquiera de los extremos, en este caso 0.42 – 0.38 = 0.04

El error de estimación es **0.04**

Otra manera de calcularlo es notar que la cantidad que sumamos y restamos es $\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}1.96$. Si la proporción p permanece constante y lo único que varía es n, al estar en el denominador, un aumento de n reduce el error. Y al revés, que es lo que nos preguntan. Si n disminuye el error aumenta. Es además bastante intuitivo, a menos datos, más error. En resumen:

Una disminución del tamaño muestral, manteniendo constante lo demás (nivel de confianza y proporción), AUMENTA el error.

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará con un máximo de 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

1A. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Si $(A+B)\cdot C = B \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[1,5 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

1B. Una empresa puede contratar trabajadores de tipo A y trabajadores de tipo B en una nueva factoría. Por convenio, es necesario que haya mayor o igual número de trabajadores de tipo A que de tipo B y que el número de trabajadores de tipo A no supere al doble del número de trabajadores de tipo B. En total la empresa puede contratar un máximo de 30 trabajadores de tipo A y de 40 de tipo B.

a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántos trabajadores de cada tipo se pueden contratar en la empresa, de forma que se satisfagan todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratarse a 20 trabajadores de tipo A y 15 de tipo B?

b) **[0,75 puntos]** Si el beneficio diario esperado para la empresa por cada trabajador de tipo A es de 240 euros y por cada trabajador de tipo B es de 200 euros, ¿cuántos trabajadores de cada tipo se deben contratar para maximizar el beneficio diario? ¿a cuánto asciende dicho beneficio máximo?

2A. Según una compañía telefónica, el coste de la transferencia de datos se descompone en dos conceptos: un coste fijo de 25 céntimos de euro por transferencia realizada más un coste variable en función de los gigabytes transferidos. El coste variable asociado a los 2 primeros gigabytes en gratis, pero a partir de 2 gigabytes, pasa a tarifar los gigabytes restantes a 10 céntimos de euro por gigabyte.

a) **[0,75 puntos]** Si $f(x)$ representa el coste total en céntimos de euro de una transferencia en función de la cantidad de gigabytes transferidos en la misma (x), obtén la expresión de dicha función f para cualquier valor positivo x. ¿Es el coste una función continua de la cantidad transferida?

b) **[1,75 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0,\infty)$. Si el coste total de una transferencia ha sido de 2,25 euros, ¿cuántos gigabytes se han transferido? ¿Cuál es el coste mínimo de una transferencia cualquiera? ¿Y el coste máximo?

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

2B. Dada la función $f(x) = \frac{6}{x+1} - 2$, se pide: Se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 2$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

3A. Se sortea un viaje a Japón entre los 240 mejores clientes de una agencia de viajes. De ellos, 144 son mujeres, 168 son personas con hijos y 90 son hombres con hijos.

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre sin hijos?

b) **[1,25 puntos]** Si la persona a la que le toca el viaje tiene hijos, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

3B. En un proceso de fabricación se sabe que el 2 % de las piezas producidas son defectuosas. Se utiliza un dispositivo para detectarlas que califica como defectuosas al 90 % de las piezas defectuosas, pero también califica como defectuosas a un 5 % que no lo son.

a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que el dispositivo califique una pieza cualquiera como defectuosa.

b) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que no sea defectuosa una pieza que el dispositivo ha calificado como defectuosa.

4A. Se supone que el precio de un determinado producto sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 5 euros.*

a) **[1,5 puntos]** Para estimar el precio medio, se considera una muestra aleatoria de 100 de estos productos, los cuales han costado **en total** 10400 euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el precio medio de ese producto, al 95 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,5 euros y un nivel de confianza del 95 %?

4B. En una ciudad se ha encuestado a 1250 vecinos, de los cuales 525 han manifestado estar a favor de la gestión económica del ayuntamiento.*

a) **[1,5 puntos]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de vecinos de esa ciudad que están a favor de la gestión económica del ayuntamiento, al 99 % de confianza.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño de la muestra?

---

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$ y $F(2{,}58) = 0{,}995$.

Universidad de Oviedo
Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad
2019-2020

OPCIÓN A

Bloque 1.A.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix}$.

$a)$ Si $(A+B)\cdot C = B\cdot D$, plantea un sistema de ecuaciones con dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

$b)$ ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

Solución:

a) *Sea* $(A+B)\cdot C = B\cdot D$.

$$A+B = \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix}$$

$$(A+B)\cdot C = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx-y \\ -x+my \end{pmatrix}$$

$$B\cdot D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2m+2m \\ 1-2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2m \end{pmatrix}$$

$$(A+B)\cdot C = B\cdot D \rightarrow \begin{pmatrix} mx-y \\ -x+my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2m \end{pmatrix}$$

El sistema es $\begin{cases} mx-y=1 \\ -x+my=1-2m \end{cases}$

b) Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$M = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m^2-1$$

- Si $m^2-1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$ y $m \neq -1$

El $rango(M)$ es 2, igual al rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Por lo que el sistema es compatible determinado, tiene solución y es única.

- o Si $m = 1$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ -x+y=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Es un sistema compatible indeterminado de 2 ecuaciones iguales. El $rango(M)$ es 1, igual al rango de la matriz ampliada, menor al número de incógnitas. Tiene solución, pero no es única

- o Si $m = -1$

$$\begin{cases} -x-y=1 \\ -x-y=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x-y=1 \\ 0x+0y=2 \end{cases}$$

Es un sistema incompatible.

En resumen:

El sistema tiene solución siempre que m sea distinto de -1.

En caso de que m sea 1, tiene solución, pero no es única (hay infinitas).

Para cualquier valor de m que no sea 1 o -1, hay solución única.

- Si $m = 2$, el sistema tiene solución única:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ -x + 2(2x-1) = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3x = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-5}{3} \\ x = \dfrac{-1}{3} \end{cases}$$

La solución en el caso $m = 2$ es $\boldsymbol{x} = \mathbf{-1/3}$ e $\boldsymbol{y} = \mathbf{-5/3}$

Bloque 1.B.

Una empresa puede contratar trabajadores de tipo A y trabajadores de tipo B en una nueva factoría. Por convenio, es necesario que haya mayor o igual número de trabajadores de tipo A que de tipo B y que el número de trabajadores de tipo A no supere el doble del número de trabajadores de tipo B. En total la empresa puede contratar un máximo de 30 trabajadores de tipo A y 40 de tipo B.

a) ¿Cuántos trabajadores de cada tipo se pueden contratar en la empresa, de forma que se satisfagan todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratarse a 20 trabajadores de tipo A y 15 de tipo B?

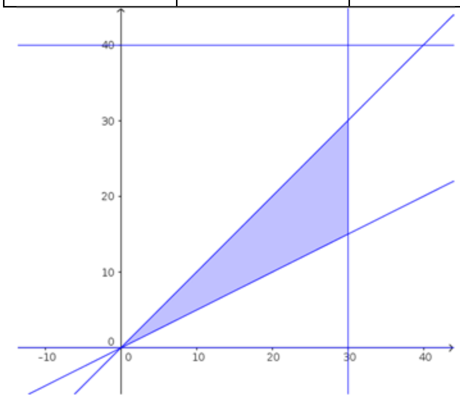
b) Si el beneficio diario esperado para la empresa por cada trabajador de tipo A es de 240 euros y por cada trabajador de tipo B es de 200 euros, ¿cuántos trabajadores de cada tipo se deben contratar para maximizar el beneficio diario? ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Solución:

Sea: $\begin{cases} x = nº\ trabajadores\ de\ tipo\ A \\ y = nº\ trabajadores\ de\ tipo\ B \end{cases}$. Las ecuaciones son

$$\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 2y \\ x \leq 30 \\ y \leq 40 \end{cases}$$

$r: x = y$		$s: x = 2y$		$t: x = 30$		$v: y = 40$	
x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	0	30	0	0	40
30	30	20	40	30	30	20	40



De donde A (10, 5); B (0, 5); C(0, 30); D (30, 15)

El punto x = 20, y = 15 cumple todas las restricciones. Por tanto:

Sí, podrían contratarse 20 de tipo A y 15 de tipo B.

Los puntos de corte de las rectas son P = (0, 0), Q = (30, 15) y R = (30, 30). Puede hacerse intersecando dos a dos o directamente en la gráfica.

La solución es necesariamente uno de los puntos, como ya hemos dicho. La función objetivo es $f(x, y) = 240x + 200y$. Basta sustituir en cada uno de los puntos y ver en cuál se alcanza el máximo valor.

$f(P) = f(0,0) = 240(0) + 200(0) = 0$. Análogamente $f(Q)$ = 7200 + 3000 = 10200 y finalmente $f(R)$ = 7200 + 6000 = 13200. Es claro que en $R(30, 30)$ es máximo el beneficio.

Debe contratar a **30** trabajadores de cada tipo. Su beneficio será de **13 200 €**

Bloque 2.A.

Según una compañía telefónica, el coste de la transferencia de datos se descompone en dos conceptos: un coste fijo de 25 céntimos de euro por transferencia realizada más un coste variable en función de los gigabytes transferidos. El coste variable asociado a los dos primeros gigabytes es gratis, pero a partir de dos gigabytes, pasa a tarifar los gigabytes a 10 céntimos de euros por gigabyte.

a) Si $f(x)$ representa el coste total en céntimos de euro de una transferencia en función de la cantidad de gigabytes transferidos en la misma (x), obtén la expresión de dicha función f para conseguir valor positivo x. ¿Es el coste una función continua de la cantidad transferida?

b) Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0,\infty)$. Si el coste total de una transferencia ha sido de 2.25 euros, ¿cuántos gigabytes se han transferido? ¿Cuál es el coste mínimo de una transferencia cualquiera? ¿Y el coste máximo?

Solución:

a) Sea x el número de gigabytes transferidos.

La función es $f(x)=\begin{cases} 25, x\leq 2 \\ 25+10(x-2), x>2 \end{cases}$

Para ver si es continua, calculamos los límites laterales en $x=2$, que es el único punto conflictivo. El límite lateral izquierdo es 25 y el derecho es $25+10(2-2)=25$.

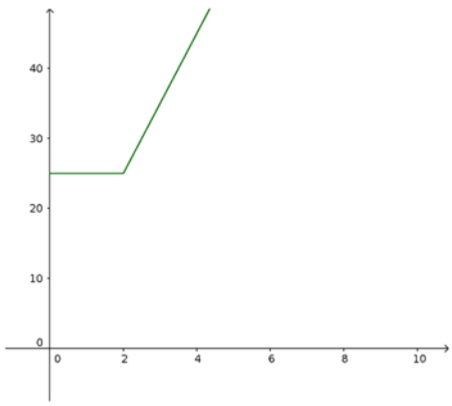
$$f(2)=25$$

El coste es función continua de la cantidad transferida

b) Si $x\leq 2$ se trata de una función constante. Para $x>2$ es una recta y por tanto basta dar dos valores. Por ejemplo $f(3)=35$ y $f(4)=45$.
La gráfica es la del margen:
2.25 € son 225 céntimos. Es más de 25, así que estamos en la zona $x>2$.
Igualamos

$$25+10(x-2)=225$$

que es $25+10x-20=225$ y resulta en $x=22$.



Si el coste han sido **2.25** euros se han transferido **22** gigabytes

De la gráfica vemos que $f(x)$ es siempre creciente en sentido amplio (puede verse también haciendo la derivada en los dos intervalos y comprobando $f'(x)\geq 0$ en todos los valores donde esté definida) por tanto el coste mínimo es 25 céntimos.

Además $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ por lo que no hay coste máximo.

El coste mínimo son **25** céntimos. No hay coste máximo, puede costar cualquier valor mayor de 25 céntimos por grande que sea. Si el número de gigabytes se hace arbitrariamente grande, también lo es su coste

Bloque 2.B.

Dada la función $f(x) = \frac{6}{x+1} - 2$, se pide:

a) Encontrar la primitiva $F\ de\ f$ se verificando que $F(0) = 2$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = 0\ y\ x = 3$.

Solución:

a) Calculamos la primitiva genérica con la integral indefinida:

$$\int f\,(x)dx = \int \frac{6}{x+1} - 2\,dx = \int \frac{6}{x+1}dx - \int 2\,dx = 6ln|x+1| - 2x + K$$

donde K es la constante de integración.

$F(0) = 2$ por lo que, sustituyendo $6ln|0+1| - 2(0) + K = 2$ es decir K = 2.

La primitiva es $F(x) = \boldsymbol{6ln|x+1| - 2x + 2}$

b) La función solo tiene una discontinuidad cuando se anula el denominador, esto es, si $x = -1$ que no nos afecta pues está fuenra del intervalo [0, 3].

Calculamos los cortes con los ejes.

Si $x = 0$, queda $f(x) = \frac{6}{0+1} - 2 = 4$. Un corte es el punto (0, 4).

Para calcular el corte con el eje OX, igualamos a 0.

$0 = f(x) = \frac{6}{x+1} - 2$ de donde $6 = 2(x+1)$.

El punto de corte con OX es el (2, 0).

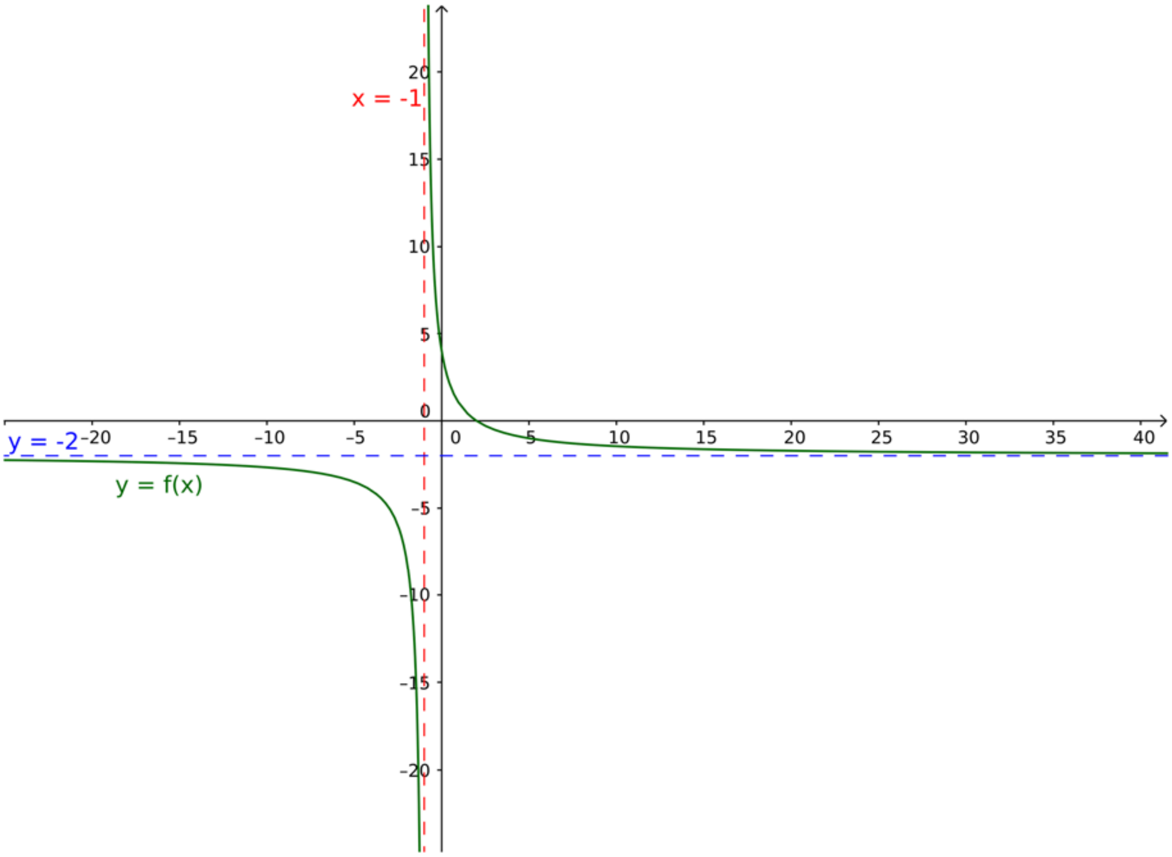
Derivando $f'(x) = \frac{-6}{(x+1)^2}$ que es siempre negativa, luego es siempre decreciente.

A su vez, $f''(x) = \frac{12}{(x+1)^3}$ que es positiva para $x > -1$ y, en particular para el intervalo que nos piden. Luego tiene curvatura positiva y por tanto ramas hacia arriba.

El límite en infinito es -2, por lo que tiene a $y = -2$ como asíntota horizontal en el infinito.

En menos infinito no nos interesa pues nos piden solo de 0 en adelante.

La gráfica de la función, junto con sus asíntotas, es la siguiente.



En cuanto al área, es positiva para $x < 2$ y negativa para $x > 2$. Hay que hacer los dos tramos:

$$\int |f(x)|\, dx = \int f\,(x)dx - \int f\,(x)dx$$

No es preciso hacer la integral, ya tenemos una primitiva. Es más cómodo tomar la de K = 0, pero valdría cualquiera, por ejemplo la *F* anterior. Sea pues $G(x) = 6ln|x+1| - 2x$

$$\int |f(x)|\, dx = G(2) - G(0) - [G(3) - G(2)] = 6ln(3) - 4 - 0 - [6ln(4) - 6 - (6ln(3) - 4)]$$

Operamos los valores.

El área es $12ln(3) - 6\ln(4) - 2$.

Bloque 3.A.

Se sortea un viaje a Japón entre los 240 mejores clientes de una agencia de viajes. De ellos, 144 son mujeres, 168 son personas con hijos y 90 son hombres con hijos.

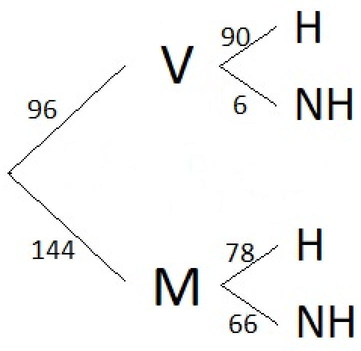
$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre sin hijos?

$b)$ Si la persona a la que le toca el viaje tiene hijos, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Solución:

Sean los sucesos:

- *M: ser mujer*
- *V: ser varón*
- *H: tener hijos*
- *NH: no tener hijos*



a) *La probabilidad de que le toque el viaje a un hombre sin hijos es* $P(V \cap NH)$

$$P(V \cap NH) = P(NH|V) \cdot P(V) = \frac{9}{96} \cdot \frac{96}{240} = \frac{1}{40} = 0.025$$

La probabilidad de que le toque el viaje a un hombre sin hijos es 1/40 = **0.025**, el 2.5 %.

b) *Si la persona a la que le toca el viaje tiene hijos, la probabilidad de que sea una mujer es* $P(M|H)$

$$P(M|H) = \frac{P(M \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{144}{240} \cdot \frac{78}{144}}{\frac{144}{240} \cdot \frac{78}{144} + \frac{96}{240} \cdot \frac{90}{96}} = \frac{13}{28}$$

Si el viaje le ha tocado a alguien con hijos, la probabilidad de que sea una mujer es **13/28**

Bloque 3.B.

En un proceso de fabricación se sabe que el 2 % de las piezas producidas son defectuosas. Se utiliza un dispositivo para detectarlas que califica como defectuosas al 90 % de las piezas defectuosas, pero también califica como defectuosas a un 5 % que no lo son.

$a)$ Calcula la probabilidad de que el dispositivo califique una pieza cualquiera como defectuosa.

$b)$ Calcula la probabilidad de que no sea defectuosa una pieza que el dispositivo ha calificado como defectuosa.

Solución:

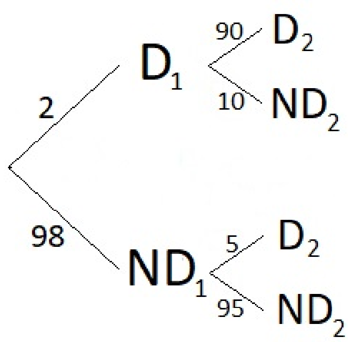
Sean los sucesos:

b) *D_1: la pieza es defectuosa*

c) *ND_1: la pieza no es defectuosa*

d) *D_2: la pieza se califica como defectuosa*

e) *ND_2: la pieza se califica como no defectuosa*



a) La probabilidad de que el dispositivo califique una pieza cualquiera como defectuosa es $P(D_2)$

$$P(D_2) = P(D_2|D_1) \cdot P(D_1) + P(D_2|ND_1) \cdot P(ND_1)$$

$$P(D_2) = \frac{90}{100} \cdot \frac{2}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{98}{100} = \frac{180 + 490}{100 \cdot 100} = \frac{670}{10000} = \frac{67}{1000}$$

La probabilidad de que el dispositivo califique una pieza cualquiera como defectuosa es $\frac{67}{1000}$, el 6.7 %

b) La probabilidad de que no sea defectuosa una pieza que el dispositivo ha calificada como defectuosa es $P(ND_1|D_2)$

$$P(ND_1|D_2) = \frac{P(ND_1 \cap D_2)}{P(D_2)} = \frac{P(D_2|ND_1) \cdot P(ND_1)}{P(D_2)} = \frac{\frac{5}{100} \cdot \frac{98}{100}}{\frac{67}{1000}} = \frac{5 \cdot 98}{67 \cdot 10} = \frac{49}{67}$$

La probabilidad de que no sea defectuosa una pieza que el dispositivo ha calificado como defectuosa es $\mathbf{\frac{49}{67}}$.

Bloque 4.A.

Se supone que el precio de un determinado producto sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 5 euros.

a) Para estimar el precio medio, se considera una muestra aleatoria de 100 de estos productos, los cuales han costado en total 10 400 euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el precio medio de ese producto, al 95 % de confianza.

b) Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.5 euros y un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

a) La variable es $X = N(\mu, 5)$. Nos dan el precio total y necesitamos el medio. Pero como también nos dan el total de elementos, basta dividir: 10400/100 = 104

La media muestral con 100 valores es por tanto $\overline{X} = N\left(\mu, \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = N(\mu, 0.5)$ de donde tipificando:

$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{0.5} = N(0,1)$

El intervalo es del 95 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$ y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.95$

$F(M) - F(-M) = 0.95$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.95$ y finalmente $F(M) = \frac{0.95+1}{2} = 0.975$ que nos da $M = 1.96$

Por tanto, el intervalo es $-1.96 < \frac{\overline{X}-\mu}{0.5} < 1.96$ que resulta $(104 - 0.5 \cdot 1.96,\ 104 + 0.5 \cdot 1.96) = (103.02,\ 104.98)$

El intervalo de confianza es **(103.02, 104.98)**

b) Nos sirven la mayoría de los cálculos. El intervalo será $\left(104 - \frac{5}{\sqrt{n}} \cdot 1.96,\ 104 + \frac{5}{\sqrt{n}} \cdot 1.96\right)$ por lo que debe cumplirse $\frac{5}{\sqrt{n}} 1.96 = 0.5$ de donde $\sqrt{n} = \frac{5 \cdot 1.96}{0.5} = 19.60$. Así pues $n = 384.15$

Debe ser un número entero, por lo que tomamos el siguiente.

El tamaño muestral mínimo es **385**

Bloque 4.B.

En una ciudad se han encuestado a 1 250 vecinos, de los cuales 525 han manifestado estar a favor de la gestión económica del ayuntamiento.

a) Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de vecinos de esa ciudad que están a favor de la gestión económica del ayuntamiento, al 99 % de confianza.

b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial, $B(n,p)$ donde queremos calcular un intervalo de confianza para p con n = 1250.

Sabemos que, si calculamos la media muestral, puede aproximarse por una normal:

$\overline{X} = N\left(p, \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\right)$, de donde $Z = \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}} = N(0,1)$

El intervalo es del 99 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.99$

$F(M) - F(-M) = 0.99$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.99$ y finalmente $F(M) = \frac{0.99+1}{2} = 0.995$ que nos da $M = 2.58$

Por tanto, el intervalo es $-2.58 < \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}} < 2.58$. Como son 190 valores, para el denominador tomamos $p = \frac{525}{1250} = 0.42$ de donde $\sqrt{\frac{0.42\,(1-0.42)}{1250}} = 0.014$

El intervalo es pues $(0.42 - 0.014 \cdot 2.58,\ 0.42 + 0.014 \cdot 2.58) = (0.4,\ 0.44)$

El intervalo para la proporción es (0.40, 0.44) es decir (40 %, 44 %)

b) El error de estimación es la diferencia entre la proporción estimada y uno cualquiera de los extremos, en este caso 0.44 – 0.42 = 0.04

El error de estimación es **0.04**

Otra manera de calcularlo es notar que la cantidad que sumamos y restamos es $\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}2.58$. Si la proporción p permanece constante y lo único que varía es n, al estar en el denominador, un aumento de n reduce el error. Es además bastante intuitivo, a más datos, menos error. En resumen

Si aumenta el tamaño muestral (sin cambiar el nivel de confianza ni la proporción) el error de estimación disminuye

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

BALEARES

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre totes les proposades en les opcions A i B conjuntament. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 Donat el sistema següent:

$$x + (a+1)y = 1$$

$$ax + 2y = -2$$

a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre a. (6 punts)

b) Resoleu-lo per a $a = -2$. (4 punts)

2 En una empresa es poden produir fins a 500 taules cada mes. La funció de costs en relació amb el nombre q de taules produïdes és

$$C(q) = q^3/50 + 8q + 40$$

Si q és el nombre de taules produïdes, el cost mitjà de cada taula s'expressa mitjançant la funció

$$Q(q) = C(q)/q$$

a) Caculau el cost mitjà de cada taula, si l'empresa en produeix 5. I si en produeix 20? (3 punts)

b) Determinau quantes taules cal produir perquè el cost mitjà sigui mínim. Justificau que es tracta efectivament d'un mínim i calculau aquest cost mitjà. (7 punts)

3 Donades les funcions $f(x) = -x^2 + 5$ i $g(x) = x^2 - a$, on $a \in R$.

a) Trobau tots els possibles valors de a perquè $f(x)$ i $g(x)$ s'intersequin. (3 punts)

b) Per a $a = 3$, dibuixau el recinte tancat entre els gràfics de $f(x)$ i $g(x)$, identificant els punts d'intersecció. (3 punts)

c) Per a $a = 3$, calculau l'àrea d'aquest recinte interior. (4 punts)

4 En una mostra aleatòria de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.

a) Obteniu un interval de confiança al 95 % per a l'edat mitjana de la població. (5 punts)

b) Quina ha de ser la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perquè en estimar l'edat mitjana amb un nivell de confiança del 99%, l'error comès sigui inferior a 0.5 anys? (5 punts)

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2

OPCIÓ B

1 Un trajecte de 600 km s'ha de fer combinant taxi, ferrocarril i autobús. El cost del taxi és de 0.5 euros/km; el del ferrocarril, de 0.2 euros/km, i el de l'autobús, de 0.1 euros/km. El recorregut ens ha costat 150 euros, i se sap que s'han fet el doble de quilòmetres amb ferrocarril que amb taxi i autobús junts. Determinau les distàncies que s'han recorregut amb cada mitjà de transport. (10 punts)

2 Un pastisser disposa de 150 kg de farina, 22 kg de sucre i 26 kg de mantega per fer dos tipus de pastissos, A i B. Per fer una fornada de pastissos del tipus A es necessiten 3 kg de farina, 1 kg de sucre i 1 kg de mantega, mentre que per fer una fornada de pastissos del tipus B es necessiten 6 kg de farina, 0.5 kg de sucre i 1 kg de mantega. Se sap que el benefici que s'obté en vendre una fornada del tipus A és de 20 euros i, de 30 euros en vendre una fornada del tipus B.

a) Plantejau la maximització del benefici del pastisser com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 punts)

c) Determinau quantes fornades de cada tipus ha de fer i vendre el pastisser per maximitzar els seus beneficis. Determinau també aquest benefici màxim. (2 punts)

3 Considerem una funció $f(x)$ tal que la seva primera derivada és $f'(x) = x^3 + bx + 4$, en què b és un paràmetre real.

a) Determinau el valor de b perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu a $x = -1$ i raonau si es tracta d'un màxim o d'un mínim. (4 punts)

b) Suposant que $b = 1$, trobau una primitiva de $f'(x)$, i.e, $\int f'(x)\,dx$. (3 punts)

c) Utilitzau la primitiva anterior per trobar $f(x)$ per $b = 1$ sabent que $f(2) = -1$. (3 punts)

4 Una tafona rep caixes d'olives de dues productores, A i B, que conreen dues varietats, picual i arbequina. El 40% de les olives prové de la productora A, d'aquestes el 60 % és de la varietat picual. De les que provenen de la productora B, el 30 % és de la varietat arbequina. Es tria una caixa d'olives a l'atzar.

a) Interpretau les dades proporcionades en termes de successos, probabilitats i probabilitats condicionades. (2 punts)

b) Quina és la probabilitat que sigui de la varietat picual? (4 punts)

c) Si se sap que és de la varietat picual, quina és la probabilitat que provingui de la productora A? (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

SOLUCIONES CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2020

Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 1:

1º) Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} x+(a+1)y=1 \\ ax+2y=-2 \end{array}\right\}$.

a) Discute el sistema en función del parámetro a.

b) Resuélvalo para $a=-2$.

Solución:

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ a & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ a & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ a & 2 \end{vmatrix}=2-a(a+1)=2-a^2-a=0;\ \ a^2+a-2=0;$$

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}\Rightarrow a_1=-2, a_2=1.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{c} a\neq-2 \\ a\neq1 \end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2=n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow\{C_1=C_3\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=-2\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=1<n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\neq0\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=1\Rightarrow Rang\ M=1;\ Rang\ M'=2\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

b)

Se resuelve para $a=-2$. El sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ -2x+2y=-2 \end{array}\right\}$, equivalente a la ecuación $x-y=1$.

$$\underline{Solución\colon x=1+\lambda, y=\lambda, \forall\lambda\in R.}$$

Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 2:

2º) En una empresa puede producir hasta 500 mesas cada mes. La función de costes en relación al número q de mesas producidas es $C(q) = \frac{1}{50}q^3 + 8q + 40$. Si q es el número de mesas producidas, el coste medio de cada mesa se expresa mediante la función $Q(q) = \frac{C(q)}{q}$.

a) Calcula el coste medio de cada mesa, si la empresa produce 5. ¿Y si produce 20?

b) Determina cuántas mesas debe producir para que el coste medio sea mínimo. Justifica que se trata efectivamente de un mínimo y calcula este coste mínimo.

Solución:

a)

$$Q(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{\frac{1}{50}q^3+8q+40}{q} = \frac{1}{50}q^2 + 8 + \frac{40}{q}.$$

$$Q(5) = \frac{1}{50} \cdot 5^2 + 8 + \frac{40}{5} = \frac{25}{50} + 8 + 8 = 16 + \frac{1}{2} = 16{,}5.$$

$$\underline{El\ precio\ medio\ unitario\ si\ se\ producen\ 5\ mesas\ es\ 16{,}5\ euros.}$$

$$Q(20) = \frac{1}{50} \cdot 20^2 + 8 + \frac{40}{20} = \frac{400}{50} + 8 + 2 = 8 + 10 = 18.$$

$$\underline{El\ precio\ medio\ unitario\ si\ se\ producen\ 20\ mesas\ es\ 18\ euros.}$$

b)

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$$Q'(q) = \frac{q}{25} + 0 - \frac{40}{q^2} \Rightarrow \frac{q}{25} = \frac{40}{q^2};\ \ q^3 = 25 \cdot 40 = 1.000 = 10^3 \Rightarrow q = 10.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$Q''(q) = \frac{1}{25} - \frac{-40 \cdot 2q}{q^4} = \frac{1}{25} + \frac{80}{q^3}.$$

$$Q''(10) = \frac{1}{25} + \frac{80}{10^3} > 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo\ para\ q = 10.}$$

$$Q(10) = \frac{1}{50} \cdot 10^2 + 8 + \frac{40}{10} = \frac{100}{50} + 8 + 4 = 2 + 12 = 14.$$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ de\ fabricación\ de\ una\ mesa\ es\ de\ 14\ euros.}$$

Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 3:

3º) Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 5$ y $g(x) = x^2 - a, \forall a \in R$.

a) Hallar los puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$.

b) Para $a = 3$, dibuja el recinto formado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$, identificando sus puntos de intersección.

c) Para $a = 3$, calcula el área del recinto anterior.

Solución:

a)

Los puntos de corte de dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 5 = x^2 - a;\ 2x^2 = a + 5;\ x^2 = \frac{a+5}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a+5}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{a+5}{2}},\ x_2 = \sqrt{\frac{a+5}{2}}.$$

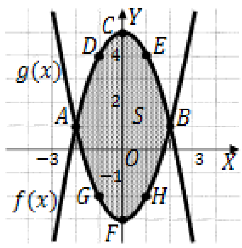
b)

Para $a = 3$ es $g(x) = x^2 - 3$ y los puntos de corte son los siguientes:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3+5}{2}} = -\sqrt{4} = -2 \Rightarrow \underline{A(-2, 1)}. \quad x_2 = \sqrt{\frac{3+5}{2}} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \underline{B(2, 1)}.$$

La función $f(x) = -x^2 + 5$ es una parábola cóncava (∩), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el punto $C(0, 5)$. Otros puntos de la parábola son $D(-1, 4)$ y $E(1, 4)$.

La función $g(x) = x^2 - 3$ es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el punto $F(0, -3)$. Otros puntos de la parábola son $G(-1, -2)$ y $H(1, -2)$.



La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.

c)

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, $(-2, 2)$, todas las ordenadas de $f(x)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de $g(x)$; por otra parte, las dos funciones son pares, es decir, simétricas con respecto al eje de ordenadas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 [(5 - x^2) - (x^2 - 3)] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^2 (5 - x^2 - x^2 + 3) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 (-2x^2 + 8) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{2x^3}{3} + 8x\right]_0^2 =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(-\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 8 \cdot 2\right) - 0\right] = 2 \cdot \left(-\frac{16}{3} + 16\right) = 32 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 32 \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{64}{3}\ u^2 = 21{,}33\ u^2}.$$

Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 4:

4º) En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17,4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la cual procede la muestra es de 2 años.

a) Obtener un intervalo de confianza al 95 % para la edad media de la población.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para estimar la edad media con un nivel de confianza del 99 %, si el error cometido debe ser inferior a 0,5 años?

Solución:

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750 \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=256;\ \overline{x}=17{,}4;\ \sigma=2;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(17{,}4-1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{256}};\ 17{,}4+1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{256}}\right);$

$(17{,}4-1{,}96\cdot 0{,}125;\ 17{,}4+1{,}96\cdot 0{,}125);\ (17{,}4-0{,}245;\ 17{,}4+0{,}245).$

$\underline{I.C._{99\,\%}=(17{,}155;\ 17{,}645)}.$

b)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0{,}99 \rightarrow \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}575.$
$(1-0{,}005=0{,}9950 \rightarrow z=2{,}575).$

Datos: $\sigma=2;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575;\ E=0{,}5.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2{,}575\cdot\frac{2}{0{,}5}\right)^2=$

$=(2{,}575\cdot 4)^2=10{,}3^2=106{,}09.$

$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 107 individuos}}.$

Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 1:

1º) Un trayecto de 600 km se ha de hacer combinando taxi, ferrocarril y autobús. El coste del taxi es de 0,5 euros/km; el del ferrocarril, de 0,2 euros/km, y el del autobús, es 0,1 euros/km. El recorrido cuesta 150 euros, y se sabe que se hace el doble de kilómetros en ferrocarril que en taxi y autobús juntos. Determina las distancias que se han de recorrer con cada tipo de transporte.

Solución:

Sean x, y, z los kilómetros que se recorren en taxi, ferrocarril y autobús, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=600 \\ 0{,}5x+0{,}2y+0{,}1z=150 \\ y=2\cdot(x+z) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=600 \\ 5x+2y+z=1.500 \\ 2x-y+2z=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 600 & 1 & 1 \\ 1.500 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{2.400-1.500+600-3.000}{4-5+2-4+1-10}=\frac{-1.500}{-12}=125.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 600 & 1 \\ 5 & 1.500 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{3.000+1.200-3.000-6.000}{-12}=\frac{1.200-6.000}{-12}=\frac{-4.800}{-12}=400.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 600 \\ 5 & 2 & 1.500 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{-3.000+3.000-2.400+1500}{-12}=\frac{1.500-2.400}{-12}=\frac{-900}{-12}=75.$$

$\underline{Se\ recorrieron\ 125\ km\ en\ taxi,\ 400\ en\ ferrocarril\ y\ 75\ en\ autobús}.$

Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 2:

2º) Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 26 kg de manteca para hacer dos tipos de pasteles, A y B. Para hacer una hornada de pasteles del tipo A se necesitan cada día 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de manteca y para hacer una hornada de tipo B se necesitan 6 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de manteca. Se sabe que el beneficio que se obtiene cada día es de 20 euros con los pasteles de tipo A y 30 euros con los de tipo B.

a) Plantea la maximización del beneficio del pastelero como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la resolución, indicando las rectas y vértices que la determinan.

c) Determina cuantas hornadas de cada tipo ha de hacer y vender el pastelero para maximizar sus beneficios. Determina también cuál es este beneficio.

Solución:

a)

Sean x *e* y el número hornadas diarias que realiza el pastelero, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+6y\le 150 \\ x+0{,}5y\le 22 \\ x+y\le 26 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+2y\le 50 \\ 2x+y\le 44 \\ x+y\le 26 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

b)

① $\Rightarrow x+2y\le 50 \Rightarrow y\le \frac{50-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	50
y	25	0

② $\Rightarrow 2x+y\le 44 \Rightarrow y\le 44-2x \rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	22
y	44	0

③ $\Rightarrow x+y\le 26 \Rightarrow y\le 26-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	26
y	26	0

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

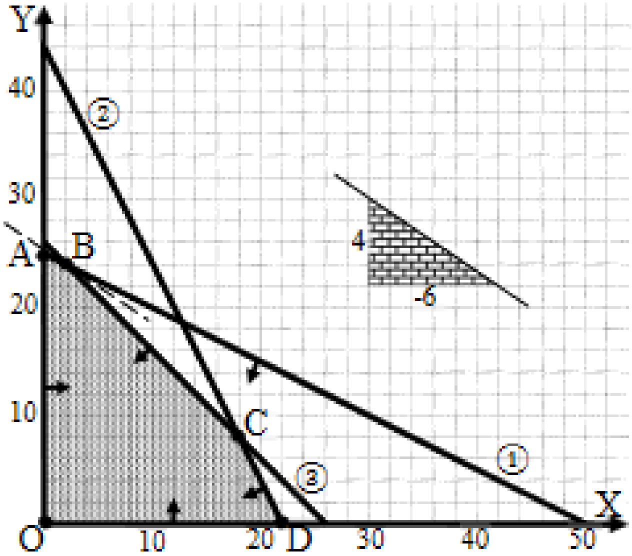
$$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=50 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,25).$$

$$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=50 \\ x+y=26 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2y=50 \\ -x-y=-26 \end{array}\right\} \Rightarrow y=24 \Rightarrow x+24=26;\ x=2 \Rightarrow B(2,24).$$

$$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=44 \\ x+y=26 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+y=44 \\ -x-y=-26 \end{array}\right\} \Rightarrow x=18;18+y=26;\ y=8 \Rightarrow B(18,8).$$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x + y = 44 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 44; \;\; x = 22 \Rightarrow D(22;\; 0).$

La región factible es la zona que aparece sombreada de la figura adjunta.



c)

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 20x + 30y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,25) =$

$= 20 \cdot 0 + 30 \cdot 25 = 0 + 750 = 750.$

$B \Rightarrow f(2,24) = 20 \cdot 2 + 30 \cdot 24 = 40 + 720 = 760.$

$C \Rightarrow f(18,8) = 20 \cdot 18 + 30 \cdot 8 = 360 + 240 = 600.$

$D \Rightarrow f(22;0) = 20 \cdot 22 + 30 \cdot 0 = 440 + 0 = 440.$

El máximo se produce en el punto $B(2,24)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 20x + 30y = 0 \Rightarrow y = -\frac{20}{30}x = -\frac{4}{6}x \Rightarrow m = -\frac{4}{6}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ se\ obtiene\ fabricando\ 2\ hornadas\ de\ A\ y\ 24\ de\ B}.$

$\underline{La\ recaudación\ máxima\ es\ de\ 760\ euros}.$

Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 3:

3º) Considera la función $f(x)$ tal que su primera derivada es $f'(x) = x^3 + bx + 4$, donde b es un parámetro real.

a) Determina el valor de b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -1$ y razona si te trata de un máximo o de un mínimo.

b) En el supuesto de que $b = 1$, hallar una primitiva de $f'(x)$.

c) Utiliza la primitiva anterior para hallar $f(x)$ para $b = 1$ tal que $f(2) = -1$.

Solución:

a)

Por tener un extremo relativo para $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0$.

$f'(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 + b \cdot (-1) + 4 = 0;\ -1 - b + 4 = 0 \Rightarrow \underline{b = 3}$.

Para $b = 3 \Rightarrow f'(x) = x^3 + 3x + 4$.

$f''(x) = 3x^2 + 3$. $\qquad f''(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 3 = 3 + 3 > 0 \Rightarrow Mín.$

$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ un\ mínimo\ relativo\ para\ x = -1}$.

b)

Para $b = 1 \Rightarrow f'(x) = x^3 + x + 4$.

$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (x^3 + x + 4) \cdot dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x + C$.

$\underline{Todas\ las\ primitivas\ de\ f'(x)\ son\ f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x + C, C \in R}$.

c)

$f(2) = -1 \Rightarrow \frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2} + 4 \cdot 2 + C = -1;\ \ 4 + 2 + 8 + C = -1 \Rightarrow C = -15$.

$$\underline{f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x - 15.}$$

Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 4:

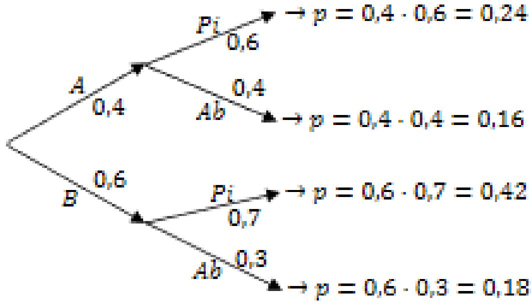
4º) Una almazara recibe cajas de aceitunas de dos productoras A y B, que cultivan dos variedades, picual y arbequina. El 40 % de las aceitunas las provee la productora A, de las cuales el 60 % son de la variedad picual. De las que proceden de la productora B, el 30 % son de la variedad arbequina. Se coge una caja de aceitunas al azar:

a) Interpretar los datos proporcionados en términos de sucesos, probabilidades y probabilidades condicionadas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la variedad picual?

c) Si se sabe que es de la variedad picual, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la productora A?

Solución:



a)

$$P = P(Pi) = P(A \cap Pi) + P(B \cap Pi) = P(A) \cdot P(Pi/A) + P(B) \cdot P(Pi/B) =$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}24 + 0{,}42 = \underline{0{,}66}.$$

b)

$$P = P(A/Pi) = \frac{P(A \cap Pi)}{P(Pi)} = \frac{P(A) \cdot P(Pi/A)}{P(Pi)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{0{,}66} = \frac{0{,}24}{0{,}66} = \underline{0{,}3636}.$$

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre totes les proposades en les opcions A i B conjuntament. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 En Bernat va quedar ahir amb uns amics en un bar i van prendre 4 cerveses, 3 panets i 5 cafès amb llet. Tot plegat els va costar 19,50 euros. Dies enrere, havia anat al mateix bar amb el seu cosí Martí, i per 2 cerveses, 1 panet i 2 cafès amb llet havien pagat 8,10 euros. En aquest bar totes les cerveses valen el mateix i tots els panets tenen el mateix preu.

a) Identificau les variables i interpretau l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (2 punts)

b) Avui en Bernat hi ha tornat amb uns altres amics i han pres 2 cerveses, 2 panets i 3 cafès amb llet. Combinau les equacions de l'apartat a) per deduir quant han pagat en total. (3 punts)

c) Si 1 cervesa, 1 panet i 1 cafè amb llet costen 5,10 euros, quant valen la cervesa, el panet i el cafè amb llet separadament? (5 punts)

2 D'una funció $y = f(x)$ sabem que la seva derivada és $f'(x) = 2x^3 - 18x$.

a) Determinau els intervals de creixement i de decreixement de la funció $y = f(x)$. (5 punts)

b) Determinau les abscisses dels seus extrems relatius i classificau-los. (5 punts)

3 Siguin A i B dos successos tals que $p(A \cup B) = 0.8$, $p(A^c) = 0.5$, on A^c denota el succés complementari del succés A, i $P(A \cap B) = 0.3$.

a) Calculau les probabilitats $p(B)$ i $p(A/B)$. (5 punts)

b) Calculau les probabilitats $p(A \cap B^c)$ i $p(A^c \cup B^c)$. (4 punts)

c) Són A i B successos independents? Justificau la vostra resposta. (1 punt)

4 En una població una variable aleatòria segueix una llei normal amb desviació típica 8. S'ha elegit, a l'atzar, una mostra de mida 100 i la seva mitjana ha estat 67.

a) Calculau l'interval de confiança del 93 %, per a la mitjana de la població. (5 punts)

b) Quina ha de ser la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre per estimar, amb un nivell de confiança del 99%, la mitjana de la població amb un error no superior a 2? (5 punts)

Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3

OPCIÓ B

1 Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculau A^2, A^3. (2 punts)

b) Proposau una fórmula per a A^n i utilitzau-la per calcular A^{14}. (4 punts)

c) Resoleu l'equació matricial $A \cdot X + \frac{1}{5} B^t \cdot B = 2A$, on B^t denota la matriu transposada de B. (4 punts)

2 Un taller de joieria disposa de 150 grams de plata i de 180 hores de feina per produir dos models d'anells. Per fer un anell del model A calen 6 grams de plata i 3 hores de feina, mentre que per fer-ne un del model B calen 2 grams de plata i 6 hores de feina. Els anells dels models A i B proporcionen, respectivament, 35 i 55 euros de benefici per unitat.

a) Plantejau la maximització del benefici de la joieria com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 punts)

c) Sabent que es vendrà tota la producció, determinau quants anells de cada model cal produir per obtenir el màxim benefici i indicau quin és aquest benefici. (2 punts)

3 Els beneficis setmanals d'una empresa expressats en euros, quan fabrica i ven x objectes, s'ajusten a la funció

$$B(x) = -0,75x^2 + 75x - 1200, \text{ en que } 20 \leq x \leq 80.$$

a) Calcular el benefici que obté en fabricar i vendre 20 objectes. (2 punts)

b) Cercau el nombre d'objectes que ha de fabricar i vendre per obtenir el benefici màxim, així com aquest benefici màxim. (4 punts)

c) El benefici mitjà per x objectes és $M(x) = B(x)/x$. Digau quants objectes ha de fabricar i vendre perquè el benefici mitjà sigui màxim, i quin és aquest benefici. (4 punts)

4 En una població, el tant per cent de persones que miren un cert programa de televisió és del 40%. Se sap que el 60% de les persones que el miren tenen estudis superiors i que el 30% de les persones que no el miren no tenen estudis superiors.

a) Interpreta les dades proporcionades en termes de successos, probabilitats i probabilitats condicionades. (2 punts)

b) Quina és la probabilitat que una persona tengui estudis superiors? (4 punts)

c) Cercau la probabilitat que una persona que tengui estudis superiors, miri el citat programa. (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

SOLUCIONES CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2020

Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 1:

1º) En Bernat quedé ayer en un bar con unos amigos que tomamos 4 cervezas, 3 panecillos y 5 cafés con leche. En total pagamos 19,50 euros. Días atrás había ido al mismo bar con mi primo Martí, y por 2 cervezas, un panecillo y dos cafés con leche nos cobraron 8,10 euros. En este bar todas las cervezas tienen el mismo precio y todos los panecillos tienen el mismo precio.

a) Identifica las variables e interpreta el enunciado con un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Hoy ha vuelto con otros amigos al mismo bar y han consumido 2 cervezas, 2 panecillos y 3 cafés con leche. Con las ecuaciones del apartado anterior, calcula cuanto han pagado en total.

c) Si una cerveza, un panecillo y un café con leche cuestan 5,10 euros, ¿cuánto vale la cerveza, el panecillo y el café con leche separadamente?

Solución:

a)

Sean x, y, z los precios de la cerveza, el panecillo y el café con leche, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} 4x+3y+5z=19{,}5 \\ 2x+y+2z=8{,}1 \end{matrix}\right\} \quad \underline{\left.\begin{matrix} 8x+6y+10z=39 \\ 20x+10y+20z=81 \end{matrix}\right\}}.$$

b)

$$\left.\begin{matrix} 2x+2y+3z=m \\ 4x+3y+5z=19{,}5 \\ 2x+y+2z=8{,}1 \end{matrix}\right\}. \text{ Resolviendo por el método de Gauss:}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & m \\ 4 & 3 & 5 & 19{,}5 \\ 2 & 1 & 2 & 8{,}1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & m \\ 0 & -1 & -1 & 19{,}5-2m \\ 0 & -1 & -1 & 8{,}1-m \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & m \\ 0 & -1 & -1 & 19{,}5-2m \\ 0 & 0 & 0 & -11{,}4+m \end{pmatrix} \Rightarrow -11{,}4+m=0; \ \ m=11{,}4.$$

$$\underline{En\ total\ han\ pagado\ 11{,}4\ euros}.$$

c)

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+5z=19{,}5 \\ 2x+y+2z=8{,}1 \\ x+y+z=5{,}1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 8x+6y+10z=39 \\ 20x+10y+20z=81 \\ 10x+10y+10z=51 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 39 & 6 & 10 \\ 81 & 10 & 20 \\ 51 & 10 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 20 & 10 & 20 \\ 10 & 10 & 10 \end{vmatrix}}=\frac{60\cdot\begin{vmatrix} 13 & 3 & 1 \\ 27 & 5 & 2 \\ 17 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{200\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{65+102+135-85-130-81}{4+10+6-5-8-6}=\frac{3}{10}\cdot\frac{302-296}{1}=$$

$$=\frac{3}{10}\cdot 6=1{,}8=x.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 8 & 39 & 10 \\ 20 & 81 & 20 \\ 10 & 51 & 10 \end{vmatrix}}{200}=\frac{60\cdot\begin{vmatrix} 4 & 13 & 1 \\ 10 & 27 & 2 \\ 5 & 17 & 1 \end{vmatrix}}{200}=\frac{3}{10}\cdot\frac{108+170+130-135-136-130}{1}=$$

$$=\frac{3}{10}\cdot(408-401)=\frac{3}{10}\cdot 7=2{,}1=y.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 8 & 6 & 39 \\ 20 & 10 & 81 \\ 10 & 10 & 51 \end{vmatrix}}{200}=\frac{12\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 & 13 \\ 10 & 5 & 27 \\ 5 & 5 & 17 \end{vmatrix}}{200}=\frac{3}{50}\cdot\frac{340+650+405-325-540-510}{1}=$$

$$=\frac{3}{50}\cdot(1.395-1.375)=\frac{3}{50}\cdot 20=1{,}2=z.$$

$$\underline{Cerveza: 1{,}8\ euros;\ \ panecillo: 2{,}1\ euros\ y\ el\ café\ con\ leche: 1{,}2\ euros.}$$

Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 2:

2º) De una función $f(x)$ sabemos que su derivada es $f'(x) = 2x^3 - 18x$.

a) Determina los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

b) Determina las abscisas de sus extremos relativos y calcúlalos.

Solución:

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 18x;\ \ 2x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 0, x_3 = 3.$$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, -3), (-3, 0), (0, 3)$ y $(3, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 3)$ es:

$$f'(1) = 2 \cdot 1^3 - 18 \cdot 1 = 2 - 18 = -16 < 0 \Rightarrow Decreciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-3, 0) \cup (3, +\infty)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (-\infty, -3) \cup 0, 3}.$$

b)

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 0, x_3 = 3.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 6x^2 - 18.$$

$$f''(-3) = 6 \cdot (-3)^2 - 18 = 36 > 0 \Rightarrow \underline{Mínmo\ relativo\ para\ x = -3}.$$

$$f''(0) = -18 < 0 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo\ para\ x = 0}.$$

$$f''(3) = 6 \cdot 3^2 - 18 = 36 > 0 \Rightarrow \underline{Mínmo\ relativo\ para\ x = 3}.$$

Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 3:

3º) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0{,}8$; $P(A^c) = 0{,}5$, donde A^c denota el suceso complementario de A, y $P(A \cap B) = 0{,}3$.

a) Calcula las probabilidades $P(B)$ y $P(A/B)$.

b) Calcule las probabilidades $P(A \cap B^c)$ y $P(A^c \cup B^c)$.

c) ¿Son A y B sucesos independientes? Razona la respuesta.

Solución:

$Datos$: $P(A \cup B) = 0{,}8$; $P(A^c) = 0{,}5$; $P(A \cap B) = 0{,}3$.

a)

$P(A^c) = 1 - P(A) \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

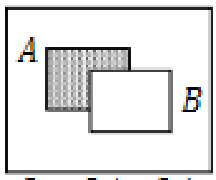
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0{,}8 - 0{,}5 + 0{,}3 = \underline{0{,}6}$.

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \underline{0{,}5}$.

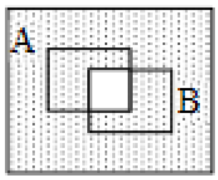
b)

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}3 = \underline{0{,}2}$.



$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}3 = \underline{0{,}7}$.



$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B)$

c)

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3 = P(A \cap B)$.

$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ A\ y\ B\ son\ independientes}$.

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es

Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 4:

4º) En una población una variable aleatoria sigue una ley normal con desviación típica 8. Se ha elegido, al azar, una muestra de 100 personas cuya media ha sido 67.

a) Calcular un intervalo de confianza al 93 % para la media de la población.

b) ¿Cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar, con un nivel de confianza del 99 %, la media de la población con un error no superior a 2?

Solución:

a)

Para un nivel de confianza del 93 % es:

$1-\alpha=0{,}93 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}93=0{,}07 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}035}=1{,}81.$
$(1-0{,}035=0{,}965 \;\rightarrow z=1{,}81).$

Datos: $n=100;\;\; \overline{x}=67;\; \sigma=8;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}81.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\; \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(67-1{,}81\cdot\frac{8}{\sqrt{100}};\; 67+1{,}81\cdot\frac{8}{\sqrt{100}}\right);\;\; (67-1{,}81\cdot 0{,}8;\; 67+1{,}81\cdot 0{,}8);$

$(67-1{,}448;\; 67+1{,}448).$

$$\underline{I.C._{93\,\%}=(65{,}552;\; 68{,}448).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0{,}99 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}575.$
$(1-0{,}05=0{,}9950 \;\rightarrow z=2{,}575).$

Datos: $\sigma=8;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575;\;\; E=2.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2{,}575\cdot\frac{8}{2}\right)^2=$

$=(2{,}575\cdot 4)^2=10{,}3^2=106{,}09.$

$$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 107 personas.}}$$

Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 1:

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$a)$ Calcula A^2 y A^3.

$b)$ Determina una fórmula para calcular A^n y utilízala para calcular A^{14}.

$c)$ Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X + \frac{1}{5} \cdot B^t \cdot B = 2A$, siendo B^t la matriz traspuesta de B.

Solución:

$a)$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$A^3 = a^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$b)$

Del apartado anterior se deduce que $\underline{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}}$. $\underline{A^{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}}$.

$c)$

$$A \cdot X + \tfrac{1}{5} \cdot B^t \cdot B = 2A; \;\; A \cdot X = 2A - \tfrac{1}{5} \cdot B^t \cdot B = M;$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot M; \;\; I \cdot X = A^{-1} \cdot M \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot \left(2A - \tfrac{1}{5} \cdot B^t \cdot B\right)}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad Adj.\, de\, A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\, A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M = 2A - \tfrac{1}{5} \cdot B^t \cdot B = 2A - \tfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2A - \tfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = M.$$

$$X = A^{-1} \cdot M = \tfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \tfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}}.$$

Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 2:

2º) Un taller de joyería dispone de 150 gramos de plata y de 180 horas de trabajo para producir dos modelos de anillos. Para hacer un anillo del modelo A necesita 6 gramos de plata y 3 horas de trabajo, mientras que para hacer un anillo del modelo B necesita 2 gramos de plata y 6 horas de trabajo. Los anillos de los modelos A y B le proporcionan por unidad un beneficio de 35 y 55 euros, respectivamente.

a) Plantea la maximización del beneficio de la joyería como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la resolución, indicando las rectas y vértices que la determinan.

c) Sabiendo que vende toda la producción, determina cuantos anillos de cada modelo tiene que fabricar para obtener el máximo beneficio e indica cuál es este beneficio.

Solución:

a)

Sean *x e y* el número de anillos de los tipos A y B que fabrica y vende el taller joyería, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r}6x+2y\le 150\\ 3x+6y\le 180\\ x\ge 0;\;\; y\ge 0\end{array}\right\}\;\; \underline{\left.\begin{array}{r}3x+y\le 75\\ x+2y\le 60\\ x\ge 0;\;\; y\ge 0\end{array}\right\}}.$

b)

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

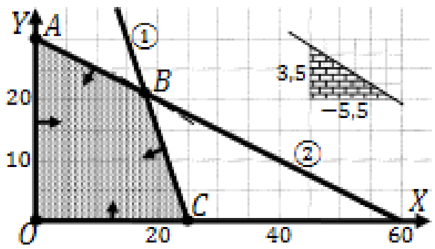
$① \Rightarrow 3x+y\le 75 \Rightarrow y\le 75-3x \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	20	25
y	15	0

$② \Rightarrow x+2y\le 60 \Rightarrow y\le \frac{60-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	60	0
y	0	30

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x=0\\ x+2y=60\end{array}\right\} \Rightarrow A(0,30).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r}3x+y=75\\ x+2y=60\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}6x+2y=150\\ -x-2y=-60\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x=90;\;\; x=18;\;\; 18+2y=60;\;\; 9+y=30;\;\; y=21 \Rightarrow B(18,21).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r}y=0\\ 3x+y=75\end{array}\right\} \Rightarrow 3x=75;\;\; x=25 \Rightarrow C(25,0).$

$c)$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 35x + 55y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 30) = 35 \cdot 0 + 55 \cdot 30 = 0 + 1.650 = 1.650.$

$B \Rightarrow f(18, 21) = 35 \cdot 18 + 55 \cdot 21 = 630 + 1.115 = 1.785.$

$C \Rightarrow f(25, 0) = 35 \cdot 25 + 55 \cdot 0 = 875 + 0 = 875.$

El máximo se produce en el punto $B(18, 21)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 35x + 55y = 0 \Rightarrow y = -\frac{35}{55}x = -\frac{7}{11}x \Rightarrow m = -\frac{3,5}{5,5}.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ fabricando\ 18\ anillos\ modelo\ A\ y\ 21\ modelo\ B.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 1.785\ euros.}$

****

Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 3:

3º) El beneficio semanal de una empresa expresado en euros, que fabrica y vende x objetos, según la función $B(x) = -0{,}75x^2 + 75x - 1.200$, $con\ 20 \le x \le 80$.

a) Calcula el beneficio que obtiene fabricando y vendiendo 20 objetos.

b) Busca el número de objetos que ha de fabricar y vender para obtener el beneficio máximo, y determina también ese beneficio máximo.

c) El beneficio medio por x objetos es $M(x) = \frac{B(x)}{x}$. Diga cuántos objetos ha de fabricar y vender para que el beneficio medio sea máximo, y cuál es este beneficio.

Solución:

----

a)

$B(20) = -0{,}75 \cdot 20^2 + 75 \cdot 20 - 1.200 = -0{,}75 \cdot 400 + 1.500 - 1.200 =$

$= -300 + 300 = 0.$

$\underline{Fabricando\ 20\ objetos\ no\ se\ obtiene\ ningún\ beneficio}.$

b)

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera derivada.

$B'(x) = -1{,}5x + 75.$

$B'(x) = 0 \Rightarrow -1{,}5x + 75 = 0;\ -15x + 750 = 0;\ -x + 50 = 0 \Rightarrow x = 50.$

$B''(x) = -1{,}5 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 50.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ fabricando\ y\ vendiendo\ 50\ objetos}.$

$B(50) = -0{,}75 \cdot 50^2 + 75 \cdot 50 - 1.200 = -0{,}75 \cdot 2.500 + 3.750 - 1.200 =$

$= -1.875 + 2.550 = 675.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 675\ euros}.$

c)

$M(x) = \frac{B(x)}{x} = \frac{-0{,}75x^2+75x-1.200}{x} = -0{,}75x + 75 - \frac{1.200}{x}.$

$M'(x) = -0{,}75 + 0 + \frac{1.200}{x^2} = -0{,}75 + \frac{1.200}{x^2}.$

$M'(x) = 0 \Rightarrow -0{,}75 + \frac{1.200}{x^2} = 0;\ \ 0{,}75x^2 = 1.200;\ \ 75x^2 = 120.000;$

$$x^2 = \frac{120.000}{75} = 1.600 \Rightarrow x = \sqrt{1.600} = 40.$$

$$\underline{El\ beneficio\ medio\ es\ máximo\ fabricando\ y\ vendiendo\ 40\ objetos.}$$

$$M(40) = -0{,}75 \cdot 40 + 75 - \frac{1.200}{40} = 75 - 30 = 45.$$

$$\underline{El\ beneficio\ medio\ máximo\ es\ de\ 45\ euros\ cada\ objeto.}$$

. . . .

Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 4:

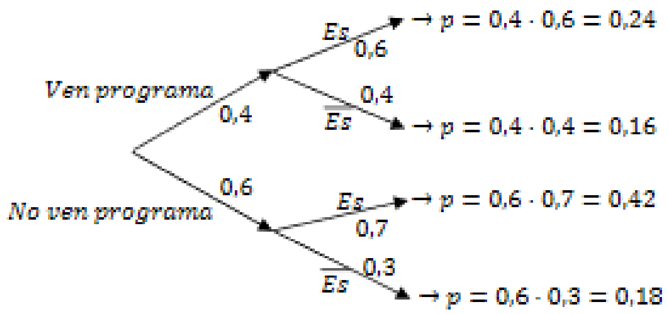
4º) En una población, el tanto por ciento de personas que ven un cierto programa de televisión es del 40 %. Se sabe que el 60 % de las personas que lo ven tienen estudios superiores y que el 30 % de las personas que no lo ven no tienen estudios superiores.

a) Interpretar los datos proporcionados en términos de sucesos, probabilidades y probabilidades condicionadas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga estudios superiores?

c) Halla la probabilidad que una persona que tenga estudios superiores, vea el programa.

Solución:



a)

$$Datos: P(V) = 0{,}4;\ \ P(Es/V) = 0{,}6;\ \ P\left(\overline{V}/\overline{Es}\right) = 0{,}3.$$

b)

$$P = P(Es) = P(V \cap Es) + P\left(\overline{V} \cap Es\right) =$$

$$= P(V) \cdot P(Es/V) + P\left(\overline{V}\right) \cdot P\left(Es/\overline{A}\right) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}24 + 0{,}42 = \underline{0{,}66}.$$

c)

$$P = P(V/Es) = \frac{P(V \cap Es)}{P(Es)} = \frac{P(V) \cdot P(Es/V)}{P(Es)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{0{,}66} = \frac{0{,}24}{0{,}66} = \underline{0{,}3636}.$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de CANARIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: Se debe resolver hasta un máximo de 4 preguntas del siguiente modo:
- De las preguntas A1-A2-B1-B2 se pueden elegir 3 como máximo.
- De las preguntas A3-A4-B3-B4 se pueden elegir 3 como máximo.
- Cada pregunta puntúa un máximo de 2.5 puntos

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

Una multinacional dedicada a la fabricación de vehículos fabrica el 40 % de sus vehículos en España, el 35 % en Francia y el resto en Italia. Los vehículos fabricados son de tres modelos (Ancer, Beam y Celestial). En España se fabrican los tres modelos a partes iguales. En Francia dos terceras partes de los vehículos que se fabrican son del modelo Ancer y el resto son Beam. En Italia se fabrican los modelos Beam y Celestial a partes iguales.

a) Construye el diagrama de árbol de probabilidades.

b) Se elige un vehículo al azar de entre todos los producidos por la multinacional, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo Beam?

c) Si poseyéramos un vehículo modelo Ancer, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en España?

Problema A.2:

En una determinada provincia, se seleccionó una muestra al azar de 400 personas cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 1250 € con una desviación típica de 210 €.

a) Calcular un intervalo de confianza al 90% para los ingresos medios mensuales.

b) ¿De qué tamaño debe ser la muestra si se desea estimar los ingresos medios mensuales con un error menor de 15 € y con una confianza del 95%?

Problema A.3:

Una empresa que ofrece servicios en internet tiene, en el día de más actividad del año, una demanda de datos que viene dada por la función:

$$D(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}t^2-\dfrac{6}{5}t+4 & 0\le t\le 8\\[2mm] \dfrac{-36}{t}+6 & 8<t\le 24\end{cases}$$

donde t es la hora del día (de 0 a 24) y $D(t)$ es la demanda de datos a esa hora expresada en cientos de Gigabits por segundo.

a) Representa gráficamente la función. ¿Hubo una demanda continua de datos a lo largo del día? En caso negativo, ¿a qué hora hubo un salto instantáneo de la demanda y cuál fue la magnitud del salto?

b) Calcula los valores de las demandas mínima y máxima absolutas y cuando se alcanzaron.

Problema A.4:

En un puesto del mercado se preparan dos tipos de cajas de frutas y verduras para repartir a domicilio. Cada caja del tipo A (caja pequeña) lleva 3 kg de fruta y 3 kg de verdura. Cada caja del tipo B (caja grande) lleva 5 kg de fruta y 8 kg de verdura. Cada día hay que cubrir una demanda fija de al menos 20 cajas de tipo A. Las cajas tipo A se venden a 10 € cada una y las cajas tipo B a 18 € cada una. El puesto tiene 195 kg de fruta y 240 kg de verduras disponibles diariamente todas las mañanas. Se desea determinar el número de cajas de cada tipo que se han de preparar diariamente para maximizar los ingresos.

a) Plantear el problema y representar la región factible.

b) ¿Cuántas cajas de cada tipo deben prepararse cada día para maximizar los ingresos? ¿Cuáles son los ingresos máximos?

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	**CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: Se debe resolver hasta un máximo de 4 preguntas del siguiente modo:
- De las preguntas A1-A2-B1-B2 se pueden elegir 3 como máximo.
- De las preguntas A3-A4-B3-B4 se pueden elegir 3 como máximo.
- Cada pregunta puntúa un máximo de 2.5 puntos

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

En un Instituto de Enseñanza Secundaria se ha seleccionado una muestra aleatoria de 48 estudiantes a quienes se les preguntó si utilizaban la cafetería del instituto. Contestaron negativamente un total de 12 estudiantes.

a) Estima, con una confianza del 94 %, en qué intervalo se encuentra la proporción de alumnos que utilizan la cafetería del instituto.

b) ¿Qué tamaño muestral hubiese sido necesario tomar para estimar dicha proporción con un error menor del 4 % y una confianza del 90 %?

Problema B.2:

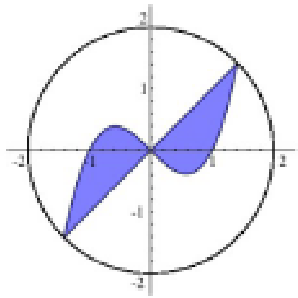
El peso de las piñas de plátanos de una cooperativa de una determinada zona, se distribuye normalmente con una desviación típica de 8 kg.

a) Determina el tamaño de la muestra si se desea que el intervalo de confianza al 92% para el peso medio de las piñas de plátanos tenga una amplitud de 4 kg.

b) Si el peso medio de las piñas de plátanos fuera de 40 kg. ¿Cuál sería la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 81 piñas estuviese entre 38 y 41 kg?

Problema B.3:

La empresa XYPERIA ha encargado la construcción de su logotipo corporativo en madera y cobre, tomando como modelo la figura adjunta, que diseñó una empresa contratada para ello. El círculo, que será de madera, está centrado en el punto (0,0) y tiene 2 metros de radio. Las funciones que delimitan el área sombreada son: $f(x) = x^3 - x$ $\quad g(x) = x$



a) La zona sombreada se va a recubrir de cobre ¿Qué superficie tiene esta zona?

b) Teniendo en cuenta que el m^2 de plancha de cobre se cobra a 60 € y no se desperdicia nada, que el coste de mano de obra es el 30 % de lo que cuesta el cobre, y que el círculo de madera, el transporte y el montaje in situ tienen un coste fijo de 270 €, ¿cuánto deberá pagar XYPERIA por la construcción e instalación de su logotipo corporativo?

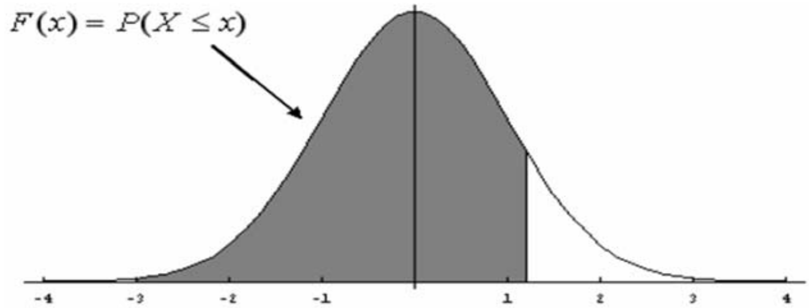
Problema B.4:

Una tienda de informática vende pendrives de 32Gb, 64 Gb y 128 Gb, siendo sus precios 5€, 15€ y 20€, respectivamente. Un cliente ha comprado un total de 15 pendrives que le han costado 160 €. Sabiendo que el número de pendrives de 128 Gb que compró era la cuarta parte del resto,

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Calcular cuántos pendrives de cada clase compró el cliente.

TABLA DE LA VARIABLE $N(0.1)$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

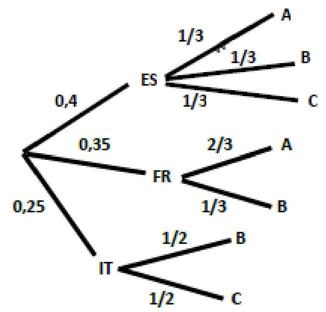
RESPUESTAS OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

Una multinacional dedicada a la fabricación de vehículos fabrica el 40 % de sus vehículos en España, el 35 % en Francia y el resto en Italia. Los vehículos fabricados son de tres modelos (Ancer, Beam y Celestial). En España se fabrican los tres modelos a partes iguales. En Francia dos terceras partes de los vehículos que se fabrican son del modelo Ancer y el resto son Beam. En Italia se fabrican los modelos Beam y Celestial a partes iguales.
a) Construye el diagrama de árbol de probabilidades.
b) Se elige un vehículo al azar de entre todos los producidos por la multinacional, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo Beam?
c) Si poseyéramos un vehículo modelo Ancer, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en España?
Solución:

a) Se definen los sucesos: ES = "el vehículo se fabrica en España", FR = "el vehículo se fabrica en Francia", IT = "el vehículo se fabrica en Italia", A = "el vehículo es del modelo Ancer", B = "el vehículo es del modelo Beam" y C = "el vehículo es del modelo Celestial".

El árbol de probabilidades es:



b) Por el Teorema de la probabilidad total:

$$P(B)=P(ES)\cdot P(B/ES)+P(FR)\cdot P(B/FR)+P(IT)\cdot P(B/IT)=0.4\cdot\frac{1}{3}+0.35\cdot\frac{1}{3}+0.25\cdot\frac{1}{2}=0.375$$

La probabilidad de que el vehículo sea del modelo Beam es **0.375**.

c) Se pide la probabilidad de que el vehículo se haya fabricado en España, sabiendo que es del modelo Ancer.

Aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(ES/A)=\frac{P(ES\cap A)}{P(A)}=\frac{P(ES)\cdot P(A/ES)}{P(ES)\cdot P(A/ES)+P(FR)\cdot P(A/FR)+P(IT)\cdot P(A/IT)}=$$

$$=\frac{0.4\cdot\frac{1}{3}}{0.4\cdot\frac{1}{3}+0.35\cdot\frac{2}{3}+0.25\cdot 0}=0.3636$$

La probabilidad de que el vehículo se haya fabricado en España, sabiendo que es del modelo Ancer, es **0.3636.**

Problema A.2:

En una determinada provincia, se seleccionó una muestra al azar de 400 personas cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 1 250 € con una desviación típica de 210 €.
a) Calcular un intervalo de confianza al 90 % para los ingresos medios mensuales.
b) ¿De qué tamaño debe ser la muestra si se desea estimar los ingresos medios mensuales con un error menor de 15 € y con una confianza del 95 %?
Solución:

a) X = ingresos mensuales

$$1-\alpha=0.9 \qquad P\left(Z\le z_{\alpha/2}\right)=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.1}{2}=0.95\Rightarrow z_{\alpha/2}=1.645$$

$$n=400$$

$$\overline{X}=1250€$$

$$s=210€$$

$$I.C.=\left[\overline{X}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\right]=\left[1250-1.645\cdot\frac{210}{\sqrt{400}},1250+1.645\cdot\frac{210}{\sqrt{400}}\right]=$$
$$=[1232.73,1267.27]$$

Los ingresos medios mensuales en esa provincia están entre **1232.73 € y 1267.27 €,** con un nivel de confianza del 90 %.

b)

$$1-\alpha=0.95 \qquad P\left(Z\le z_{\alpha/2}\right)=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.05}{2}=0.975\Rightarrow z_{\alpha/2}=1.96$$

$$\overline{X}=1250€ \qquad s=210\ €$$

$$E<15€\rightarrow n=?$$

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{z_{\alpha/2}\cdot s}{E}\Rightarrow n=\left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot s}{E}\right)^2$$

$$n>\left(\frac{1.96\cdot 210}{15}\right)^2\Rightarrow n>752.95$$

La muestra debe ser de al menos **753** personas, si se desea estimar los ingresos medios mensuales con un error menor de 15 € y con una confianza del 95%.

Problema A.3:

Una empresa que ofrece servicios en internet tiene, en el día de más actividad del año, una demanda de datos que viene dada por la función:

$$D(t)=\begin{cases}\frac{1}{10}t^2-\frac{6}{5}t+4 & 0\le t\le 8\\ \frac{-36}{t}+6 & 8<t\le 24\end{cases}$$

donde *t* es la hora del día (de 0 a 24) y *D(t)* es la demanda de datos a esa hora expresada en cientos de Gigabits por segundo.

a) Representa gráficamente la función. ¿Hubo una demanda continua de datos a lo largo del día? En caso negativo, ¿a qué hora hubo un salto instantáneo de la demanda y cuál fue la magnitud del salto?

b) Calcula los valores de las demandas mínima y máxima absolutas y cuando se alcanzaron.

Solución:

a) Se estudia la continuidad de la función: en el intervalo [0, 8) es continua por ser polinómica y en (8, 24] es continua porque es una función racional con denominador no nulo. (En t = 0 es continua por la derecha y en t = 24 es continua por la izquierda).

Se estudia la continuidad en t = 8:

$$t=8\rightarrow D(8)=\frac{1}{10}\cdot 8^2-\frac{6}{5}\cdot 8+4=\frac{64-96+40}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}=0.8$$

$$\lim_{x\to 8^-}\left(\frac{1}{10}t^2-\frac{6}{5}t+4\right)=\frac{1}{10}\cdot 8^2-\frac{6}{5}\cdot 8+4=\frac{4}{5}=0.8$$

$$\lim_{x\to 8^+}\left(\frac{-36}{t}+6\right)=\frac{-36}{8}+6=\frac{-36+48}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}=1.5$$

$$1.5-0.8=0.7$$

La función tiene una discontinuidad de salto finito en t = 8, por lo que a las 8 horas hubo un salto en la demanda de 0.7 · 100 = 70 Gigabits por segundo.

Para representar la gráfica hallamos algunos puntos y calculamos el vértice de la parábola del primer tramo de la función, mediante su derivada:

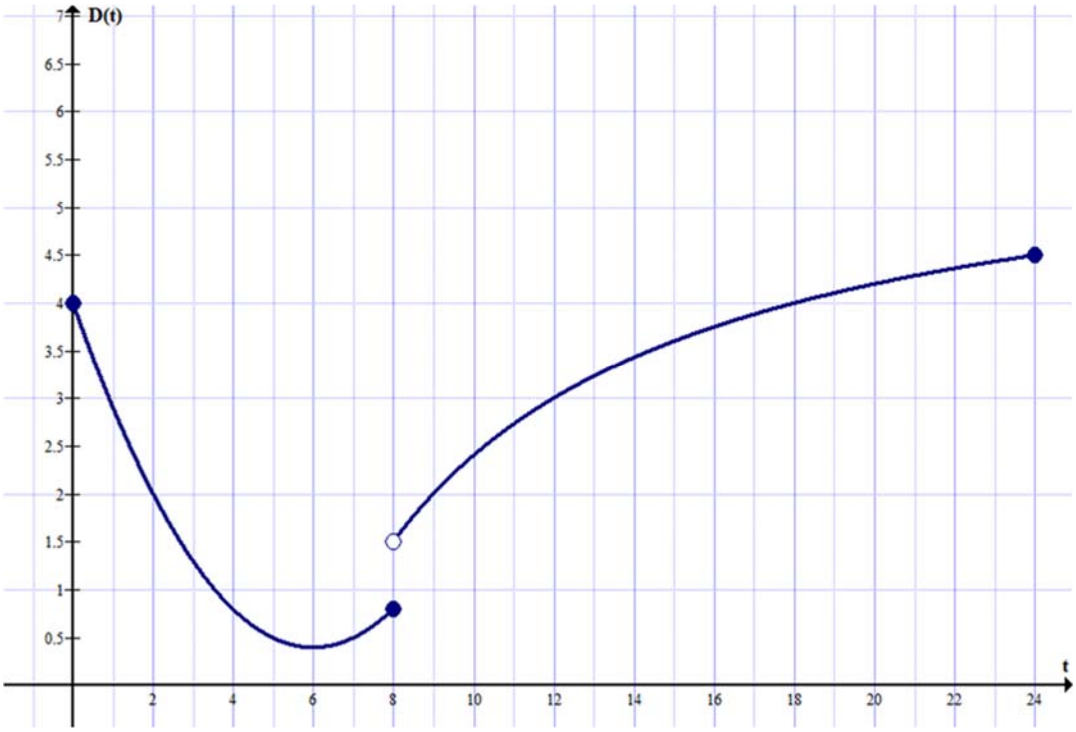
$$D(0)=\frac{1}{10}\cdot 0^2-\frac{6}{5}\cdot 0+4=4$$

$$D(24)=\frac{-36}{24}+6=\frac{-3}{2}+6=\frac{9}{2}=4.5$$

$$D'(t)=\begin{cases}\frac{1}{10}\cdot 2t-\frac{6}{5}, & 0<\mathrm{t}<8\\ \frac{0\cdot t-(-36)\cdot 1}{t^2}, & 8<\mathrm{t}<24\end{cases}=\begin{cases}\frac{t-6}{5}, & 0<\mathrm{t}<8\\ \frac{36}{t^2}, & 8<\mathrm{t}<24\end{cases}$$

$$\frac{t-6}{5}=0\Rightarrow t=6\rightarrow D(6)=\frac{1}{10}\cdot 6^2-\frac{6}{5}\cdot 6+4=\frac{36-72+40}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}=0.4$$

La gráfica de la función es:



b) El máximo absoluto de la función es el punto (24, 4.5) y el mínimo absoluto es el punto (6, 0.4). Por lo tanto, la demanda máxima absoluta se alcanzó a las 24 horas y fue de 450 Gigabits por segundo, mientras que la demanda mínima absoluta fue de 40 Gigabits por segundo y se alcanzó a las 6 horas.

La demanda máxima absoluta se alcanzó a las 24 horas y fue de 450 Gigabits por segundo, mientras que la demanda mínima absoluta fue de 40 Gigabits por segundo y se alcanzó a las 6 horas.

Problema A.4:

En un puesto del mercado se preparan dos tipos de cajas de frutas y verduras para repartir a domicilio. Cada caja del tipo A (caja pequeña) lleva 3 kg de fruta y 3 kg de verdura. Cada caja del tipo B (caja grande) lleva 5 kg de fruta y 8 kg de verdura. Cada día hay que cubrir una demanda fija de al menos 20 cajas de tipo A. Las cajas tipo A se venden a 10 € cada una y las cajas tipo B a 18 € cada una. El puesto tiene 195 kg de fruta y 240 kg de verduras disponibles diariamente todas las mañanas. Se desea determinar el número de cajas de cada tipo que se han de preparar diariamente para maximizar los ingresos.

a) Plantear el problema y representar la región factible.

b) ¿Cuántas cajas de cada tipo deben prepararse cada día para maximizar los ingresos? ¿Cuáles son los ingresos máximos?

Solución:

a)

Caja	Fruta	Verdura	Demanda mínima diaria	Precio/caja
A (pequeña)	3 kg	3 kg	20 cajas	10 €
B (grande)	5 kg	8 kg		18 €
Totales disponibles	195 kg	240 kg		

El planteamiento del problema es:

$$\max \ z = 10x + 8y$$

$$s.a: \left.\begin{array}{l} 3x + 5y \le 195 \\ 3x + 8y \le 240 \\ x \ge 20 \\ y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y \le \dfrac{195-3x}{5} \\ y \le \dfrac{240-3x}{8} \\ x \ge 20 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Para representar la región factible hallamos los puntos de corte de las rectas entre sí y con el eje X:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{195-3x}{5} \\ y = \dfrac{240-3x}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{195-3x}{5} = \frac{240-3x}{8} \Rightarrow 1560 - 24x = 1200 - 15x \Rightarrow x = 40$$

$$y = \frac{195 - 3\cdot 40}{5} = 15 \qquad \qquad Punto \ \ (40,15)$$

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
www.apuntesmareaverde.org.es

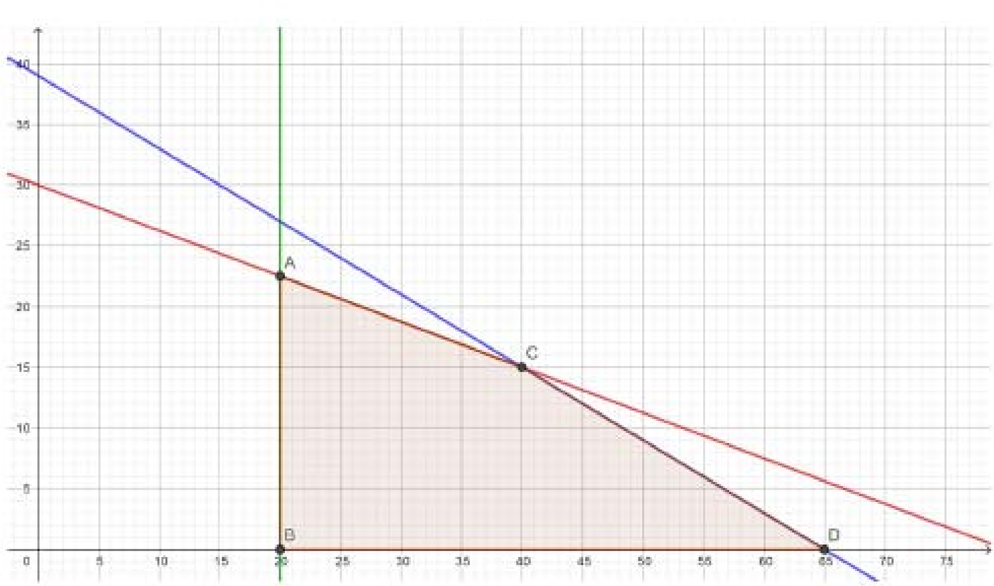
$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{195 - 3x}{5} \\ x = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \dfrac{195 - 3 \cdot 20}{5} = 27 \qquad Punto\ (20, 27)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{195 - 3x}{5} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 195 - 3x = 0 \Rightarrow x = 65 \qquad Punto\ (65, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{240 - 3x}{8} \\ x = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \dfrac{240 - 3 \cdot 20}{8} = 22.5 \qquad Punto\ (20, 22.5)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{240 - 3x}{8} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 240 - 3x = 0 \Rightarrow x = 60 \qquad Punto\ (80, 0)$$

La región factible se muestra en la gráfica y viene determinada por los puntos $A(20, 22.5)$; $B(20, 0)$; $C(40, 15)$ y $D(65, 0)$



b) Se evalúa la función objetivo en los cuatro vértices de la región factible y se obtiene la solución:

$$z(A) = 10 \cdot 20 + 18 \cdot 22.5 = 605 \qquad z(B) = 10 \cdot 20 + 18 \cdot 0 = 200$$
$$z(C) = 10 \cdot 40 + 18 \cdot 15 = 670 \qquad z(D) = 10 \cdot 65 + 18 \cdot 0 = 650$$

Los ingresos son máximos si se preparan **40** cajas de tipo A y **15** de tipo B.

El ingreso máximo es de **670** euros.

RESPUESTAS OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

En un Instituto de Enseñanza Secundaria se ha seleccionado una muestra aleatoria de 48 estudiantes a quienes se les preguntó si utilizaban la cafetería del instituto. Contestaron negativamente un total de 12 estudiantes.

a) Estima, con una confianza del 94 %, en qué intervalo se encuentra la proporción de alumnos que utilizan la cafetería del instituto.

b) ¿Qué tamaño muestral hubiese sido necesario tomar para estimar dicha proporción con un error menor del 4 % y una confianza del 90 %?

Solución:

a) p = proporción de estudiantes que utilizan la cafetería

$$n = 48$$

$$\hat{p} = \text{proporción muestral de estudiantes que utilizan la cafetería} = \frac{36}{48} = 0.75$$

$$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.25$$

$$1 - \alpha = 0.94 \qquad P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.06}{2} = 0.97 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.88$$

El intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que utilizan la cafetería viene dado por la siguiente expresión:

$$I.C. = \left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0.75 - 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{48}}, 0.75 + 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{48}}\right] =$$

$$= [0.6325, 0.8675]$$

La proporción de estudiantes que utilizan la cafetería está entre **0.6325** y **0.8675**, con un nivel de confianza del 94 %.

b)

$$1 - \alpha = 0.9 \qquad P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.1}{2} = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$\hat{p} = 0.75$$

$$E < 0.04 \ \rightarrow \ n = ?$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} \Rightarrow \sqrt{n} \cdot E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}}{E}\right)^2$$

$$E < 0.04 \Rightarrow n > \left(\frac{1.96 \cdot \sqrt{0.75 \cdot 0.25}}{0.04}\right)^2 \Rightarrow n > 317.11$$

El tamaño de la muestra debe ser de **318** personas, como mínimo, para estimar la proporción de estudiantes que utilizan la cafetería con un error inferior al 4 % y con un nivel de confianza del 90 %.

Problema B.2:

El peso de las piñas de plátanos de una cooperativa de una determinada zona, se distribuye normalmente con una desviación típica de 8 kg.

a) Determina el tamaño de la muestra si se desea que el intervalo de confianza al 92 % para el peso medio de las piñas de plátanos tenga una amplitud de 4 kg.

b) Si el peso medio de las piñas de plátanos fuera de 40 kg. ¿Cuál sería la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 81 piñas estuviese entre 38 y 41 kg?

Solución:

a) X = peso de las piñas de plátanos $\quad X \sim N(\mu, 8)$

Si la amplitud del intervalo de confianza para el peso medio de las piñas de plátanos debe ser 4 kg, el error será igual a 2 kg.

$$1-\alpha=0.92 \qquad P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right)=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.08}{2}=0.96 \Rightarrow z_{\alpha/2}=1.75$$

$$\sigma=8$$

$$E=2kg \to n=?$$

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2 \Rightarrow 1.75\cdot\frac{8}{\sqrt{n}}=2 \Rightarrow 1.96\cdot 8=2\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n}=\frac{1.75\cdot 8}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n=\left(\frac{1.75\cdot 8}{2}\right)^2 \Rightarrow n=49$$

El intervalo de confianza tendrá una amplitud de 4 kg si la muestra es de **49** piñas de plátanos.

b) El peso medio muestral sigue una distribución normal:

$$\mu=40\,\text{kg} \qquad \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(40, \frac{8}{9}\right)$$

$$n=81$$

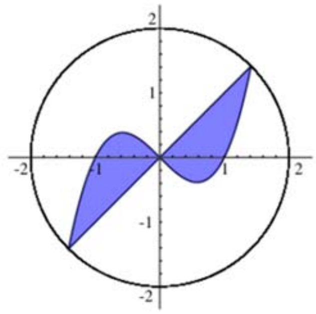
$$P\left(38 \le \overline{X} \le 41\right)=P\left(\frac{38-40}{8/9} \le Z \le \frac{41-40}{8/9}\right)=P(-2.25 \le Z \le 1.125)=$$

$$=P(Z \le 1.125)-P(Z \le -2.25)=P(Z \le 1.125)-P(Z \ge 2.25)=$$

$$=P(Z \le 1.125)-\left[1-P(Z \le 2.25)\right]=0.8708-\left[1-0.9878\right]=0.8586$$

La probabilidad de que el peso medio de una muestra de 81 piñas esté entre 38 y 41 kg es **0.8586**.

Problema B.3:



La empresa XYPERIA ha encargado la construcción de su logotipo corporativo en madera y cobre, tomando como modelo la figura adjunta, que diseñó una empresa contratada para ello. El círculo, que será de madera, está centrado en el punto (0,0) y tiene 2 metros de radio. Las funciones que delimitan el área sombreada son: $f(x) = x^3 - x$ $\quad g(x) = x$

a) La zona sombreada se va a recubrir de cobre ¿Qué superficie tiene esta zona?

b) Teniendo en cuenta que el m^2 de plancha de cobre se cobra a 60 € y no se desperdicia nada, que el coste de mano de obra es el 30 % de lo que cuesta el cobre, y que el círculo de madera, el transporte y el montaje in situ tienen un coste fijo de 270 €, ¿cuánto deberá pagar XYPERIA por la construcción e instalación de su logotipo corporativo?

Solución:

a) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - x \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - x = x \Rightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 2\right) = 0 \Rightarrow x = 0; x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Ambas funciones son simétricas respecto al origen de coordenadas, por lo que el área de la zona sombreada es el doble de la superficie que delimitan las funciones en el intervalo $\left(0, +\sqrt{2}\right)$.

$$A = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left[x - \left(x^3 - x\right)\right] dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(2x - x^3\right) dx = 2\left[x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\left(\left(\sqrt{2}\right)^2 - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^4}{4} - 0\right) = 2$$

La superficie de la zona sombreada es **2** m².

b) Precio del m² de cobre: 60 €

Mano de obra: 30 % del coste del cobre

Coste fijo: 270 €

$$60 \cdot 2 + 0.3 \cdot (60 \cdot 2) + 270 = 120 + 36 + 270 = 426$$

La empresa XYPERIA debe pagar **426 €** por la construcción e instalación de su logotipo corporativo.

Problema B.4:

Una tienda de informática vende pendrives de 32Gb, 64 Gb y 128 Gb, siendo sus precios 5€, 15€ y 20€, respectivamente. Un cliente ha comprado un total de 15 pendrives que le han costado 160 €. Sabiendo que el número de pendrives de 128 Gb que compró era la cuarta parte del resto,

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Calcular cuántos pendrives de cada clase compró el cliente.

Solución:

a) x = número de pendrives de 32 Gb (precio: 5 € cada uno)

y = número de pendrives de 64 Gb (precio: 15 € cada uno)

z = número de pendrives de 128 Gb (precio: 20 € cada uno)

El cliente ha comprado 15 pendrives

Precio total: 160 €

Número de pendrives de 128 Gb = cuarta parte del resto

El sistema de ecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ 5x+15y+20z=160 \\ z=\dfrac{x+y}{4} \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=15 \\ 5x+15y+20z=160 \\ z=\dfrac{x+y}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=15 \\ x+3y+4z=32 \\ x+y-4z=0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 3 & 4 & 32 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=15 \\ 2y+3z=17 \\ -5z=-15 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{-15}{-5}=3$$

$$2y+3z=17 \Rightarrow 2y+3\cdot 3=17 \Rightarrow y=\frac{8}{2}=4$$

$$x+y+z=15 \Rightarrow x+4+3=15 \Rightarrow x=8$$

El cliente ha comprado **8** pendrives de 32 Gb, **4** de 64 Gb y **3** de 128 Gb.

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2019–2020 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: Se debe resolver hasta un máximo de 4 preguntas del siguiente modo:
- De las preguntas A1-A2-B1-B2 se pueden elegir 3 como máximo.
- De las preguntas A3-A4-B3-B4 se pueden elegir 3 como máximo.
- Cada pregunta puntúa un máximo de 2.5 puntos

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

Un medicamento cura una determinada enfermedad en el 80 % de los casos.

a) Si se administra a 10 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 9 no se curen?

b) Si se administra a 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el número de curados esté entre 76 y 88?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra de 64 pacientes a los que se ha administrado el medicamento, la proporción de no curados sea menor o igual que 0,15?

Problema A.2:

Un distribuidor reparte verduras procedentes de tres fincas: A (dos séptimas partes), B (dos quintas partes) y C (el resto). Durante el periodo de reparto, el porcentaje de verduras que presentan deterioros es el 4 %, el 6 % y el 5 %, respectivamente.

a) Dibujar el correspondiente diagrama de árbol.

b) En un determinado envío se han repartido 4000 kilogramos de verduras ¿Cuál es la cantidad esperada que no presenta deterioros?

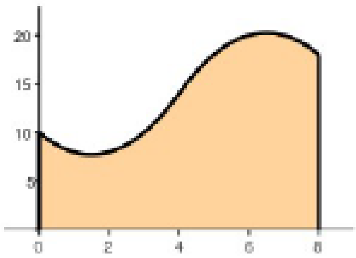
c) Si se elige una verdura al azar y se observa que está deteriorada, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la finca C?

Problema A.3:

Para hacer los decorados de una película se necesita construir y pintar una pared de cartón piedra como la de la figura adjunta. La curva superior de la pared puede representarse mediante la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+10 & x\in[0,4] \\ -x^2+13x-22 & x\in(4,8] \end{cases}$$

Las unidades se miden en metros.



a) Calcular cuánto mide la superficie de la pared.

b) Si el cartón piedra cuesta 4 €/m^2, la pintura 0.5 €/m^2 y el coste la mano de obra es igual al 70 % del coste de los materiales (cartón y pintura) ¿cuánto costará la elaboración de esta pared?

Problema A.4:

Un comerciante quiere comprar a un mayorista de moda gabardinas de dos tipos: de paño a 180 € y de piel a 300 € la unidad, respectivamente. El comerciante dispone de 5400 € y no precisa más de 20 unidades.

a) Representar la región factible y los vértices.

b) Si en la venta posterior obtiene un beneficio de 99€ por la venta de cada gabardina de paño y 156€ por la venta de cada gabardina de piel, calcular el número de gabardinas que ha de adquirir de cada tipo para obtener el beneficio máximo.

DUC Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

Un estudio reciente, realizado sobre 400 internautas de una región, de edades comprendidas entre 16 y 65 años, indica que 344 usan redes sociales.

a) Con una confianza del 97%, construir un intervalo de confianza para la proporción de internautas de la región que no usan redes sociales.

b) Si, para estimar la proporción de internautas que usan redes sociales, se obtiene el intervalo [0,826,0,894]. ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Si la población de la región, con edades entre 16 y 65 años, es de 400000 personas, usando el nivel de confianza del apartado b), ¿entre qué límites está el número de los que no usan redes sociales?

Problema B.2:

Se toma una muestra de 400 estudiantes al azar y se les pregunta por su gasto anual en libros y material escolar, obteniéndose una cantidad media de 132 €. Se sabe, además, que la desviación típica de este gasto en la población estudiantil es de 24 €.

a) Calcular un intervalo de confianza al 90% para la media poblacional de este gasto.

b) Calcular el tamaño muestral necesario para que el correspondiente intervalo de confianza del apartado anterior fuese [128,71,135,29].

Problema B.3:

Durante los últimos 10 años el déficit en las cuentas de una institución, en millones de euros, viene dado por la función:

$$D(t)=\begin{cases} -\dfrac{(t-2)^2}{4}+5, & t\in[0,4] \\ \dfrac{(t-7)^2}{9}+3, & t\in\,]4,10] \end{cases}$$

siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

a) ¿Es continua D(t)? Representarla gráficamente.

b) ¿Es D(t) derivable?

c) ¿Entre qué valores varía D(t)? ¿Cuáles son sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento? ¿Cuándo alcanza los valores máximos y mínimos absolutos?

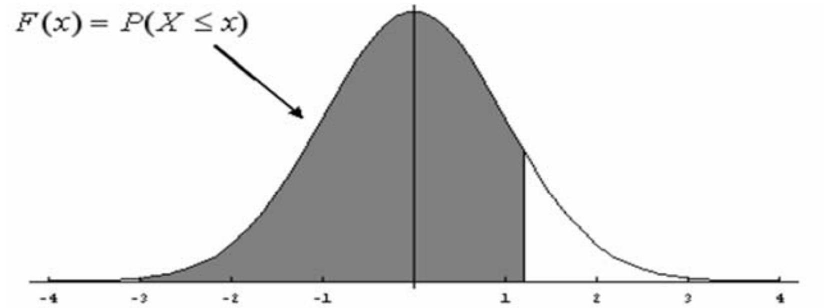
Problema B.4:

En un hotel hay 400 turistas de españoles, alemanes e ingleses. El número de alemanes es el 120% del número de ingleses y estos últimos, sumados a los españoles, superan en 40 al número de alemanes.

a) Plantear el correspondiente sistema.

b) ¿Cuántos españoles, alemanes e ingleses hay en el hotel?

TABLA DE LA VARIABLE $N(0,1)$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

RESPUESTAS OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Un medicamento cura una determinada enfermedad en el 80 % de los casos.

a) Si se administra a 10 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 9 no se curen?

b) Si se administra a 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el número de curados esté entre 76 y 88?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, en una muestra de 64 pacientes a los que se ha administrado el medicamento, la proporción de no curados sea menor o igual que 0.15?

Solución:

a) X = "número de pacientes que se curan con el medicamento"

la variable X sigue una distribución binomial. $X \sim B(10, 0.8)$

$n = 10$ (número de pacientes)

Éxito: el paciente se cura con el medicamento $p = 0.8$ $q = 1 - p = 0.2$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{10}{k} \cdot 0.8^k \cdot 0.2^{10-k}$$

Si no se curan 9 pacientes, a lo sumo, significa que no se curan 9, 8, 7, 6, … o 0. Por tanto, se curan 1, 2, 3, 4, ...o 10.

$$P(X \geq 1) = 1 - [P(X = 0)] = 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0.8^0 \cdot 0.2^{10}\right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{10!}{0! \cdot 10!} \cdot 0.2^{10}\right] = 1 - 0.2^{10} = 1 - 0.0000001 = 0.9999999$$

La probabilidad de que, a lo sumo, 9 no se curen, es prácticamente 1, prácticamente el suceso seguro.

b) $n = 100$ $X \sim B(100, 0.8)$

Como n es un número elevado, se aproxima a una distribución normal.

$$\left.\begin{aligned} n \cdot p = 100 \cdot 0.8 = 80 > 5 \\ n \cdot q = 100 \cdot 0.2 = 20 > 5 \end{aligned}\right\} \to X' \sim N\left(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}\right) \Rightarrow X' \sim N(80,4)$$

$$P(76 \leq X' \leq 88) = P\left(\frac{76-80}{4} \leq \frac{X'-80}{4} \leq \frac{88-80}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 2) =$$

$$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 2) - P(Z \geq 1) = P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 1)] =$$

$$= 0.9772 - [1 - 0.8413] = 0.8185$$

Sin utilizar la corrección de Yates, la probabilidad de que el número de curados esté entre 76 y 88 es 0.8185.

Si se utiliza la corrección de Yates:

$$P(76 \le X \le 88) = P(75.5 \le X' \le 88.5) = P\left(\frac{75.5-80}{4} \le \frac{X'-80}{4} \le \frac{88.5-80}{4}\right) =$$
$$P(-1.125 \le Z \le 2.125) = P(Z \le 2.125) - P(Z \le -1.125) = P(Z \le 2.125) - P(Z \ge 1.125) =$$
$$= P(Z \le 2.125) - [1 - P(Z \le 1.125)] = 0.9832 - [1 - 0.8697] = 0.8529$$

La probabilidad pedida es mayor de 0.8.

c)

$$\hat{P} = \text{proporción muestral de pacientes que no se curan}$$
$$\hat{P} \sim N\left(q, \sqrt{\frac{q\cdot(1-q)}{n}}\right) \Rightarrow \hat{P} \sim N\left(0.2, \sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{64}}\right) \Rightarrow \hat{P} \sim N(0.2, 0.05)$$
$$P(\hat{P} \le 0.15) = P\left(\frac{\hat{P}-0.2}{0.05} \le \frac{0.15-0.2}{0.05}\right) = P(Z \le -1) = P(Z \ge 1) = 1 - P(Z \le 1) =$$
$$= 1 - 0.8413 = 0.1587$$

Otra forma:

Si la proporción de pacientes no curados es menor o igual que 0.15 significa que la proporción de curados es mayor o igual que 0.85. El 85 % de 64 es 54,4.

$$\left.\begin{array}{l} n\cdot p = 64\cdot 0.8 => 51.2 > 5 \\ n\cdot q = 64\cdot 0.2 = 12.8 > 5 \end{array}\right\} \to X' \sim N\left(n\cdot p, \sqrt{n\cdot p\cdot q}\right) \Rightarrow X' \sim N(51.2, 3.2)$$
$$0.85\cdot 64 = 54.4$$
$$P(X' \ge 54.4) = P\left(\frac{X'-51.2}{3.2} \ge \frac{54.4-51.2}{3.2}\right) = P(Z \ge 1) = 1 - P(Z \le 1) =$$
$$= 1 - 0.8413 = 0.1587$$

La probabilidad de que la proporción de no curados sea menor o igual que 0.15 es **0.1587**.

Problema A.2:

Un distribuidor reparte verduras procedentes de tres fincas: A (dos séptimas partes), B (dos quintas partes) y C (el resto). Durante el periodo de reparto, el porcentaje de verduras que presentan deterioros es el 4 %, el 6 % y el 5 %, respectivamente.
a) Dibujar el correspondiente diagrama de árbol.
b) En un determinado envío se han repartido 4 000 kilogramos de verduras ¿Cuál es la cantidad esperada que no presenta deterioros?
c) Si se elige una verdura al azar y se observa que está deteriorada, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la finca C?

Solución:

a) Se definen los sucesos:

A = "las verduras proceden de la finca A"

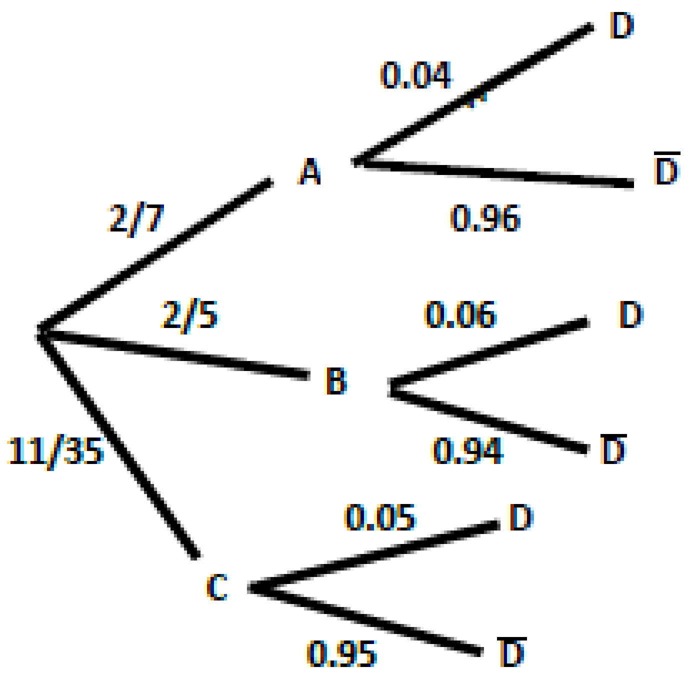
B = "las verduras proceden de la finca B"

C = "las verduras proceden de la finca C"

D = "las verduras presentan deterioro" y su contrario D = "las verduras presentan deterioro"

$$P(C)=1-[P(A)+P(B)]=1-\left[\frac{2}{7}+\frac{2}{5}\right]=1-\frac{10+14}{35}=\frac{11}{35}$$

El árbol de probabilidades es:



b) Calculamos la probabilidad de que la verdura no presente deterioro utilizando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(\overline{D}) = P(A)\cdot P(\overline{D}/A) + P(B)\cdot P(\overline{D}/B) + P(C)\cdot P(\overline{D}/C) =$$
$$= \frac{2}{7}\cdot 0.96 + \frac{2}{5}\cdot 0.94 + \frac{11}{35}\cdot 0.95 = 0.948857 \cong 0.9489$$

4000 kg · 0.9489 = 3795.6 kg

De los 4 000 kg de verduras que se han repartido, se espera que **3 795.6 kg** no presenten deterioro.

c) Por el Teorema de Bayes:

$$P(C/D) = \frac{P(C\cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)\cdot P(D/C)}{1-P(\overline{D})} = \frac{\frac{11}{35}\cdot 0.05}{1-0.9489} = 0.3075$$

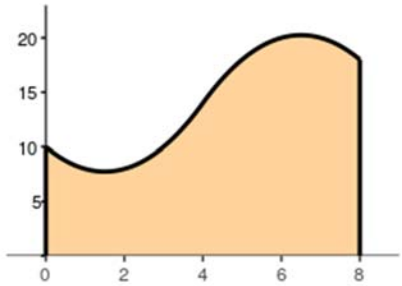
La probabilidad de que la verdura proceda de la finca C, sabiendo que está deteriorada, es **0.3075**.

Problema A.3:

Para hacer los decorados de una película se necesita construir y pintar una pared de cartón piedra como la de la figura adjunta. La curva superior de la pared puede representarse mediante la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 10 & x \in [0,4] \\ -x^2 + 13x - 22 & x \in [4,8] \end{cases}$$

Las unidades se miden en metros.



a) Calcular cuánto mide la superficie de la pared.

b) Si el cartón piedra cuesta 4 €/m^2, la pintura 0.5 €/m^2 y el coste la mano de obra es igual al 70 % del coste de los materiales (cartón y pintura) ¿cuánto costará la elaboración de esta pared?

Solución:

a) La superficie de la pared viene dada por la suma de dos integrales definidas:

$$A = \int_0^4 \left(x^2 - 3x + 10\right)dx + \int_4^8 \left(-x^2 + 13x - 22\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 10x\right]_0^4 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{13x^2}{2} - 22x\right]_4^8 =$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - \frac{3\cdot 4^2}{2} + 10\cdot 4\right) - 0 + \left(-\frac{8^3}{3} + \frac{13\cdot 8^2}{2} - 22\cdot 8\right) - \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{13\cdot 4^2}{2} - 22\cdot 4\right) =$$

$$= \frac{64}{3} - 24 + 40 - \frac{512}{3} + 416 - 176 + \frac{64}{3} - 104 + 88 = 112$$

La superficie de la pared es **112** metros cuadrados.

b) Precio del cartón piedra: 4 · 112 = 448 €

Precio de la pintura: 0.5 · 112 = 56 €

Coste de la mano de obra: 0.7 · (448 + 56) = 352.8 €

Coste total: 448 + 56 + 352.8 = 856.8 €

La elaboración de la pared costará **856.8 €**

Problema A.4:

Un comerciante quiere comprar a un mayorista de moda gabardinas de dos tipos: de paño a 180 € y de piel a 300 € la unidad, respectivamente. El comerciante dispone de 5 400 € y no precisa más de 20 unidades.

a) Representar la región factible y los vértices.

b) Si en la venta posterior obtiene un beneficio de 99 € por la venta de cada gabardina de paño y 156 € por la venta de cada gabardina de piel, calcular el número de gabardinas que ha de adquirir de cada tipo para obtener el beneficio máximo.

Solución:

a) x = número de gabardinas de paño (180 € cada una)

y = número de gabardinas de piel (300 € cada una)

Dinero disponible: 5 400 €

Total de gabardinas: 20 como máximo.

La región factible viene determinada por las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{c} x+y\leq 20 \\ 180x+300y\leq 5400 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y\leq 20 \\ 3x+5y\leq 90 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} y\leq 20-x \\ y\leq \dfrac{90-3x}{5} \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Se calculan los puntos de corte entre ambas rectas y con los ejes de coordenadas:

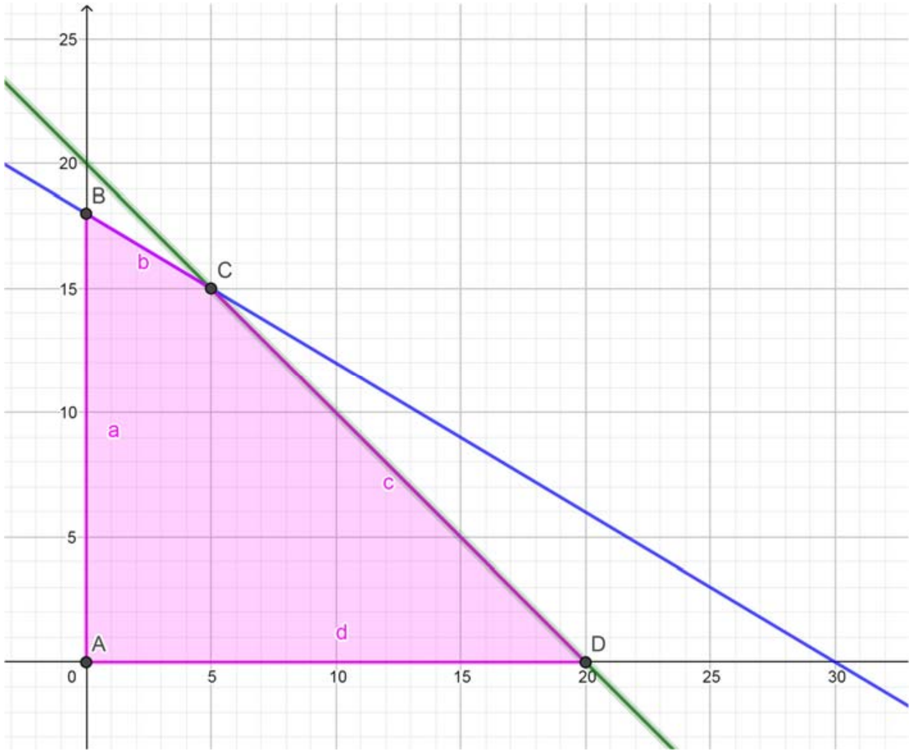
$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{90-3x}{5} \\ y=20-x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{90-3x}{5}=20-x \Rightarrow 90-3x=100-5x \Rightarrow x=5$$

$$y=\frac{90-3\cdot 5}{5}=15 \qquad \text{Punto } (5,15)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{90-3x}{5} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=30 \quad \text{Punto } (30,0) \qquad \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{90-3x}{5} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=18 \quad \text{Punto } (0,18)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=20-x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=20 \quad \text{Punto } (20,0) \qquad \left.\begin{array}{l} y=20-x \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=20 \quad \text{Punto } (0,20)$$

La región factible es la zona sombreada en la siguiente gráfica:



b) Precios de venta de las gabardinas:

Paño: 99 €   Piel: 156 €

La función objetivo es $z = 99x + 156y$

Se evalúa la función objetivo en los vértices de la región factible: A(0, 0), B(0, 18), C(5, 15) y D(20, 0).

$$z(A) = 99 \cdot 0 + 156 \cdot 0 = 0 \qquad z(B) = 99 \cdot 0 + 156 \cdot 18 = 2808$$
$$z(C) = 99 \cdot 5 + 156 \cdot 15 = 2835 \qquad z(D) = 99 \cdot 20 + 156 \cdot 0 = 1980$$

El beneficio es máximo en el punto C(5, 15), por lo tanto debe adquirir **5** gabardinas de paño y **15** de piel. El beneficio máximo es de **2 835** euros.

RESPUESTAS OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Un estudio reciente, realizado sobre 400 internautas de una región, de edades comprendidas entre 16 y 65 años, indica que 344 usan redes sociales.

a) Con una confianza del 97 %, construir un intervalo de confianza para la proporción de internautas de la región que no usan redes sociales.

b) Si, para estimar la proporción de internautas que usan redes sociales, se obtiene el intervalo [0.826, 0.894]. ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Si la población de la región, con edades entre 16 y 65 años, es de 400 000 personas, usando el nivel de confianza del apartado b), ¿entre qué límites está el número de los que no usan redes sociales?

Solución:

a) p = proporción de internautas que no usan las redes sociales

$$n = 400$$

$$\hat{p} = \text{proporción muestral de internautas que no usan redes sociales} = \frac{56}{400} = 0.14$$

$$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.86$$

$$1 - \alpha = 0.97 \qquad P\left(Z \le z\alpha/_2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.03}{2} = 0.985 \Rightarrow z\alpha/_2 = 2.17$$

El intervalo de confianza para la proporción de internautas que no usan redes sociales viene dado por la siguiente expresión:

$$I.C. = \left[\hat{p} - z\alpha/_2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\alpha/_2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0.14 - 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.14 \cdot 0.86}{400}}, 0.14 + 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.14 \cdot 0.86}{400}}\right] =$$

$$= [0.1024, 0.1776]$$

La proporción de internautas que no utilizan redes sociales está entre 0.1024 y 0.1776, con un nivel de confianza del 97 %.

b) Sea ahora p = proporción de internautas que usan las redes sociales.

Intervalo de confianza [0.826, 0.894]

La amplitud del intervalo es 0.894 – 0.826= 0.068

El error es la mitad de la amplitud del intervalo, es decir, 0.034.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} = 0.034 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0.86 \cdot 0.14}{400}} = 0.034 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{\alpha/2} = 0.034 \cdot \sqrt{\frac{400}{0.86 \cdot 0.14}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$P\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(Z \leq 1.96) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 0.975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha = 2 \cdot (1 - 0.975) = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95$$

El nivel de confianza utilizado es **95 %.**

c) Sea de nuevo p = proporción de internautas que no usan las redes sociales

El intervalo de confianza sería:

$$I.C. = \left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right] =$$

$$= \left[0.14 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.14 \cdot 0.86}{400}}, 0.14 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.14 \cdot 0.86}{400}}\right] =$$

$$= [0.106, 0.174]$$

0.106 · 400000 = 42 400 internautas

0.174 · 400000 = 69 600 internautas

El número de internautas que no usa las redes sociales está entre 42 400 y 69 600, con un nivel de confianza del 95 %.

Otra forma:

El intervalo de confianza para estimar la proporción de internautas que usan redes sociales es [0.826,0.894]. El número de internautas que usan redes sociales estaría entre:

0.826 · 400000 = 330400 y 0.894 · 400000 = 357600

Si restamos estas cantidades a 400000:

400000 – 330400 = 69600 y 400000 – 357600 = 42400

Por lo tanto, el número de internautas que no usan las redes sociales está entre **42 400** y **69 600**, con un nivel de confianza del 95 %.

Problema B.2:

Se toma una muestra de 400 estudiantes al azar y se les pregunta por su gasto anual en libros y material escolar, obteniéndose una cantidad media de 132 €. Se sabe, además, que la desviación típica de este gasto en la población estudiantil es de 24 €.
a) Calcular un intervalo de confianza al 90 % para la media poblacional de este gasto.

b) Calcular el tamaño muestral necesario para que el correspondiente intervalo de confianza del apartado anterior fuese [128,71,135,29].

Solución:

a) X= gasto anual en libros y material escolar.

$$1-\alpha = 0.9 \qquad P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{0.1}{2} = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$n = 400$$

$$\overline{X} = 132\text{ €}$$

$$\sigma = 24\text{ €}$$

$$I.C. = \left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[132 - 1.645\cdot\frac{24}{\sqrt{400}}, 132 + 1.645\cdot\frac{24}{\sqrt{400}}\right] =$$

$$= [130.026, 133.974]$$

Los ingresos medios mensuales en esa provincia están entre **130.03 €** y **133.97 €**, con un nivel de confianza del 90 %.

b) El intervalo de confianza es [128.71, 135.29].

La amplitud del intervalo es 135.29 – 128.71 = 6.58.

El error es la mitad de esa amplitud, es decir, 3.29.

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 \Rightarrow n = \left(\frac{1.645\cdot 24}{3.29}\right)^2 \Rightarrow n = 144$$

La muestra debe ser de **144** estudiantes para que el intervalo de confianza sea [128.71,135.29].

Problema B.3:

Durante los últimos 10 años el déficit en las cuentas de una institución, en millones de euros, viene dado por la función:

$$D(t)=\begin{cases} -\dfrac{(t-2)^2}{4}+5, & t\in[0,4] \\ \dfrac{(t-7)^2}{9}+3, & t\in]4,10] \end{cases}$$

siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

a) ¿Es continua $D(t)$? Representarla gráficamente.

b) ¿Es $D(t)$ derivable?

c) ¿Entre qué valores varía D(t)? ¿Cuáles son sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento? ¿Cuándo alcanza los valores máximos y mínimos absolutos?

Solución:

a) La función $D(t)$ es continua en los intervalos [0, 4) y (4, 10] por ser polinómica en ambos casos, siendo continua por la derecha en t = 0 y continua por la izquierda en t = 24.

Se estudia la continuidad en t = 4:

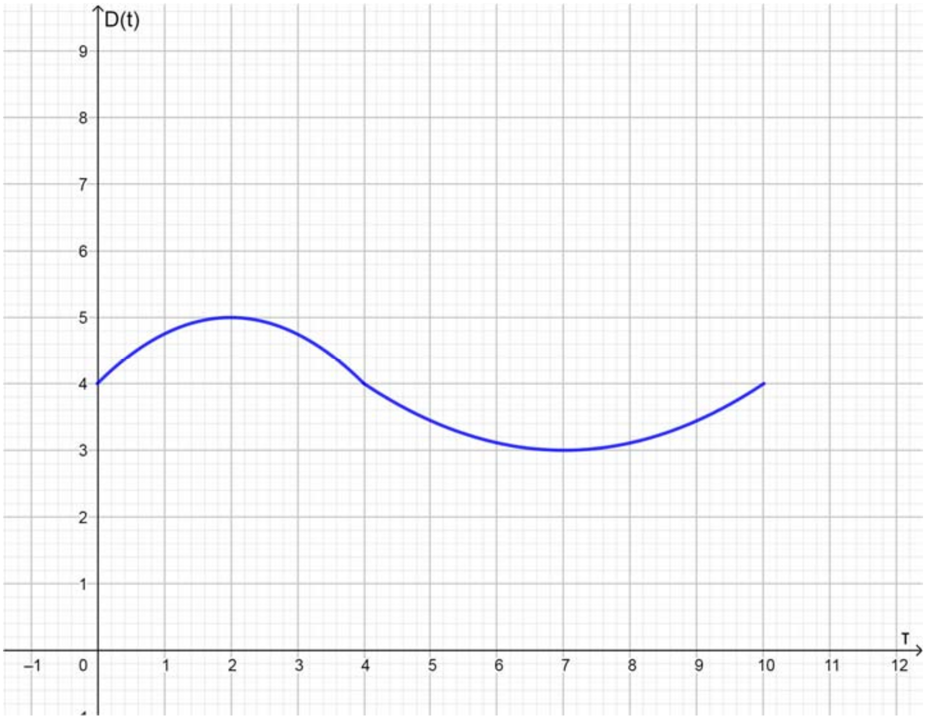
$$\left.\begin{array}{l} D(4)=-\dfrac{(4-2)^2}{4}+5=4 \\ \lim\limits_{t\to4^-}D(t)=\lim\limits_{t\to4^-}\left(-\dfrac{(t-2)^2}{4}+5\right)=4 \\ \lim\limits_{t\to4^+}D(t)=\lim\limits_{t\to4^+}\left(\dfrac{(t-7)^2}{9}+3\right)=\dfrac{(4-7)^2}{9}+3=4 \end{array}\right\} \quad \lim_{t\to4^-}D(t)=\lim_{t\to4^+}D(t)=D(4)$$

La función es continua también en t = 4, por tanto, es continua en su dominio: [0, 10].

Elaboramos una tabla de valores para representar la gráfica:

t	**D(t)**		**t**	**D(t)**
0	4		4	4
2	5		7	3
4	4		10	4

La gráfica de la función es:



b) Se estudia la derivabilidad de $D(t)$:

$$D'(t)=\begin{cases}-\dfrac{2(t-2)}{4}, & 0<t<4\\ \dfrac{2(t-7)}{9}, & 4<t<10\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2-t}{2}, & 0<t<4\\ \dfrac{2t-14}{9}, & 4<t<8\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to4^-}D'(t)=\lim\limits_{t\to4^-}\dfrac{2-t}{2}=-1\\ \lim\limits_{t\to4^+}D'(t)=\lim\limits_{t\to4^+}\dfrac{2t-14}{9}=-\dfrac{6}{9}=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right\}\quad \lim\limits_{t\to4^-}D'(t)\neq\lim\limits_{t\to4^+}D'(t)$$

La función **no** es derivable en t = 4.

c) $D(t)$ varía entre 3 y 5, es decir, el déficit oscila entre 3 y 5 millones de euros.

Es creciente en (0, 2) U (7, 10) y decreciente en (2, 7). El déficit crece en los dos primeros años y en los tres últimos años. Decrece entre el segundo año y el séptimo.

El máximo absoluto es el punto (2, 5), es decir, después de **2** años el déficit alcanza los **5** millones de euros.

El mínimo absoluto es el punto (7, 3), lo que significa que el séptimo año el déficit fue de **3** millones de euros, el mínimo de los últimos **10** años.

Problema B.4:

En un hotel hay 400 turistas de españoles, alemanes e ingleses. El número de alemanes es el 120 % del número de ingleses y estos últimos, sumados a los españoles, superan en 40 al número de alemanes.

a) Plantear el correspondiente sistema.

b) ¿Cuántos españoles, alemanes e ingleses hay en el hotel?

Solución:

a) x = número de turistas españoles

y = número de turistas alemanes

z = número de turistas ingleses

El sistema de ecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=400 \\ y=\dfrac{120}{100}\cdot z \\ z+x=y+40 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=400 \\ 5y-6z=0 \\ x-y+z=40 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 40 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -360 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} x+y+z=400 \\ 5y-6z=0 \\ -2y=-360 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$y=\frac{-360}{-2}=180$$

$$5y-6z=0 \Rightarrow 5\cdot 180-6z=0 \Rightarrow z=\frac{900}{6}=150$$

$$x+y+z=400 \Rightarrow x+180+150=400 \Rightarrow x=70$$

En el hotel hay **70** turistas españoles, **180** alemanes y **150** ingleses.

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa Asso

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El estudiante realizará solo **tres ejercicios elegidos entre los seis de que consta el examen.**
2. Una vez elegido un ejercicio ha de hacerlo completo (todos sus apartados).
3. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada ejercicio y de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.
6. Si se realizan más de tres ejercicios solo se corregirán los tres primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
7. **La calificación del examen será el resultado de la puntuación obtenida entre 0,75.**

BLOQUE 1

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una empresa del sector alimentario lanza al mercado dos nuevas bebidas, A y B, compuestas de zumos de frutas combinados. La composición de cada litro de bebida es la siguiente:

	Zumo de piña	Zumo de mango	Zumo de papaya
A	0,5 litros	0,5 litros	
B	0,4 litros		0,6 litros

El precio de venta fijado es de 1,5 euros por litro de A y de 1,75 euros por litro de B.

Semanalmente se cuenta con 20 000 litros de zumo de piña, con 15 000 de zumo de mango y con 15 000 de zumo de papaya.

Determinar los litros que deben producirse semanalmente de cada bebida para obtener unos ingresos semanales máximos. ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una tienda de electrodomésticos ha vendido 750 televisores de tres modelos diferentes, A, B y C. Los ingresos totales obtenidos han sido de 230 400 euros. El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el del C, un 10 % más caro que A. Además, de A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que de B.

A. [0,9 PUNTO] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular cuántas unidades se han vendido de cada modelo de televisor.

B. [0,8 PUNTO] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

BLOQUE 2

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A. [2,5 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ obtener sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+5x+6}$

1. [0,25 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua?
2. [0,5 PUNTOS] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?
3. [0,5 PUNTOS] Calcular los dos límites laterales en x = –3. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

B. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+2x-1 & si \quad x\le -1 \\ x^2-5 & si \quad -1<x\le 3 \\ \dfrac{b+x}{3x-2} & si \quad x>3 \end{cases}$

determinar los valores de a y b para los que la función es continua en x = –1 y en x = 3.

BLOQUE 3

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] El precio de alquiler de viviendas en un determinado barrio de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 265 euros. Queremos que el error cometido al estimar el precio medio de alquiler con un nivel de confianza del 97 % sea 20,7 euros. ¿Cuántas viviendas hemos de tomar aleatoriamente para calcular la estimación?

B. [1,25 PUNTOS] En el caso de una población de tamaño pequeño, el precio de alquiler sigue una distribución normal con desviación típica 134 euros. Una muestra aleatoria de 357 viviendas da como resultado un alquiler medio de 448 euros. Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el precio medio de alquiler.

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Una empresa juguetera lanza al mercado un nuevo modelo de balón de playa, que fabrica en tres plantas, A, B y C, de las que salen respectivamente el 45 %, 21 % y el 34 % de la producción total. Se ha detectado un fallo en la máquina utilizada en cada planta para aplicar los colores. De hecho, sale defectuoso el 1 % de los balones procedentes de la planta A, el 3 % de los provenientes de la B, y el 2 % de los de la C.
Seleccionamos un balón al azar de entre todos los que han salido de las tres plantas:

A. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso y haya pasado por la máquina de la planta A?

B. [1,25 PUNTOS] Si no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina de la planta B?

BLOQUE 1

Ejercicio 1:

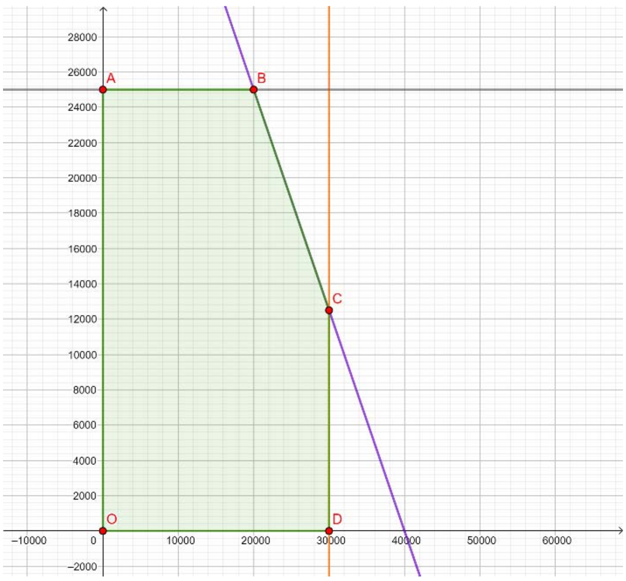
Una empresa del sector alimentario lanza al mercado dos nuevas bebidas, A y B, compuestas de zumos de frutas combinados. La composición de cada litro de bebida es la siguiente:

	Zumo de piña	Zumo de mango	Zumo de papaya
A	0.5 litros	0.5 litros	
B	0.4 litros		0.6 litros

El precio de venta fijado es de 1.5 euros por litro de A y de 1.75 euros por litro de B. Semanalmente se cuenta con 20 000 litros de zumo de piña, con 15 000 litros de zumo de mango y con 15 000 litros de zumo de papaya. Determinar los litros que deben producirse semanalmente de cada bebida para obtener unos ingresos semanales máximos. ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Solución

Se trata de un problema de programación lineal. Sean: $x =$ nº litros de A $y =$ nº litros de B



Nuestro objetivo es maximizar

$$F(x, y) = z = 1.5x + 1.75y$$

Sometida a las restricciones

$$\begin{cases} I_1: 0.5x + 0.4y \le 20000 \\ I_2: 0.5x \le 15000 \\ I_3: 0.6y \le 15000 \\ I_4: x \ge 0 \\ I_5: y \ge 0 \end{cases}$$

La región factible es la solución de este sistema de inecuaciones.

Las dos últimas inecuaciones restringen esta solución al primer cuadrante.

El semiplano solución de la inecuación I_1 lo define la recta $r_1: 0.5x + 0.4y = 20000$ que pasa por los puntos (40000, 0) y (20000, 25000). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_1 $(0.5.0 + 0.4.0 \le 20000) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_2 está definido por la recta $r_2: 0.5x = 15000 \approx x = 30000$ que es la paralela a OY que pasa por (30000,0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_2 $(0 \le 15000) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_2 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $r_3: 0.6y = 15000 \approx y = 25000$ que es la paralela a OX que pasa por (0, 25000). El punto O = (0, 0) cumple la inecuación I_3 $(0 \le 15000) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 contiene a M.

La región factible es el polígono $OABCD$, intersección de estos cinco semiplanos y la solución óptima se encuentra en uno de sus vértices.

Determinamos sus coordenadas

Autora: Milagros Latasa Asso
www.apuntesmareaverde.org.es

$$A \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 25000 \end{cases} \Rightarrow \quad A = (0, 25000)$$

$$B \equiv \begin{cases} y = 25000 \\ 0.5x + 0.4y = 20000 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 25000 \\ x = \dfrac{20000 - 0.4\,.\,25000}{0.5} \end{cases} \sim \begin{cases} y = 25000 \\ x = 20000 \end{cases} \Rightarrow B = (20000, 25000)$$

$$C \equiv \begin{cases} x = 30000 \\ 0.5x + 0.4y = 20000 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 30000 \\ y = \frac{20000 - 0.5\,.30000}{0.4} = 12500 \end{cases} \Rightarrow \; C = (30000, 12500)$$

$$D \equiv \begin{cases} x = 30000 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D = (30000, 0)$$

$$O \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow O = (0, 0)$$

Según el teorema fundamental de la programación lineal, la solución óptima se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Evaluamos la función objetivo en cada uno de ellos:

$$z(O) = F(0,0) = 1.5\ .\ 0 + 1.75\ .\ 0 = 0$$

$$z(A) = F(0, 25000) = 1.5\ .\ 0 + 1.75\ .\ 25000 = 43750$$

$$z(B) = F(20000, 25000) = 1.5\ .\ 20000 + 1.75\ .\ 25000 = 73750$$

$$z(C) = F(30000, 12500) = 1.5\ .\ 30000 + 1.75\ .\ 12500 = 66875$$

$$z(D) = F(30000, 0) = 1.5\ .\ 30000 + 1.75\ .\ 0 = 45000$$

La solución se alcanza en el vértice B

El máximo beneficio es de **73 750 euros**, que se obtiene haciendo semanalmente **20 000 litros** de la bebida A y **25 000 litros** de la B.

Ejercicio 2:

Una tienda de electrodomésticos ha vendido 750 televisores de tres modelos, A, B y C. Los ingresos totales obtenidos han sido de 230 400 euros. El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el C, un 10 % más caro que A. Además, de A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que de B.

a) Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular cuántas unidades se han vendido de cada modelo de televisor.

b) Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

c) Resolverlo.

Solución

a) Sean x, y, z el número de televisores que se venden de los modelos A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=750 \\ 320x+256y+352z=230400 \\ x+z=2y \end{array}\right\}$$

b) Escribamos la matriz de coeficientes y ampliada del sistema:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 320 & 256 & 352 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 750 \\ 320 & 256 & 352 & 230400 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 750 \\ 320 & 256 & 352 & 230400 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{Intercambiamos\ F2\ y\ F3} rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 750 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 320 & 256 & 352 & 230400 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\substack{F2'=F2-F1 \\ F3'=F3-320F1}}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 750 \\ 0 & -3 & 0 & -750 \\ 0 & -64 & 32 & -9600 \end{pmatrix}$$

Estos tres vectores fila son linealmente independientes, luego la matriz ampliada tiene rango 3.

Las mismas transformaciones realizadas en A nos llevan a que

$rg\ A\ = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -64 & 32 \end{pmatrix}$ que tiene también tres vectores fila linealmente independientes.

El rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas, luego por el Teorema de Rouché – Frobenius,

El sistema es compatible y determinado

c) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 750 \\ 0 & -3 & 0 & -750 \\ 0 & -64 & 32 & -9600 \end{pmatrix}$ obtenida en el apartado anterior al estudiar rangos, nos ofrece los coeficientes de un sistema triangular equivalente al planteado en el apartado a):

$$S' \equiv \begin{cases} x + y + z = 750 \\ -3y = -750 \\ -64y + 32z = -9600 \end{cases} \approx \begin{cases} x + z + y = 750 \\ 32z - 64y = -9600 \\ -3y = -9600 \end{cases}$$

$$y = \frac{-750}{-3} = 250 \qquad z = \frac{-9600+64\,.250}{32} = 200 \qquad x = 750 - 250 - 200 = 300$$

$$\textit{Se han vendido } \mathbf{300} \textit{ televisores del modelo } A, \mathbf{250} \textit{ del } B \textit{ y } \mathbf{200} \textit{ del } C$$

BLOQUE 2

Ejercicio 3:

Dada la función $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2}$ obtener sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

Solución

La función es continua y derivable en $Dom\ f\ = \mathbb{R} - \{2\}$

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x-2)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0\ \ o\ x = 4$$

$(-\infty, 0)$	0	(0,2)	2	(2,4)	4	$(4, \infty)$	
+	0	-	∄	-	0	+	Signo f'
Crece	Máximo relativo	Decrece	∄	Decrece	Mínimo relativo	Crece	Monotonía f

$$Crecimiento: x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty);\ Decrecimiento: x \in (0, 2) \cup (2, 4)$$

Si $x = 0 \Longrightarrow f(0) = \frac{-2}{-2} = 1$ Si $x = 4 \Longrightarrow f(4) = \frac{16+4-2}{4-2} = 9$

$$Máximo\ relativo: (\mathbf{0}, \mathbf{1});\ Mínimo\ relativo: (\mathbf{4}, \mathbf{9})$$

Ejercicio 4:

$a)$ Dada la función $f(x) = \frac{2x+4}{x^2+5x+6}$:

$a_1)$ ¿En qué puntos es discontinua?

$a_2)$ ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?

$a_3)$ Calcular los dos límites laterales en $x = -3$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

$b)$ Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x - 1 & si\ \ x \leq -1 \\ x^2 - 5 & si\ \ -1 < x \leq 3 \\ \frac{b+x}{3x-2} & si\ \ x > 3 \end{cases}$ determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = -1$ y en $x = 3$.

Solución

$a_1)$ La función es discontinua para $x = -3\ y\ x = -2$

$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{x\to-3^-} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \frac{-2}{0} = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-3^+} f(x) = \lim_{x\to-3^+} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \frac{-2}{0} = \infty$

$x = -3$ es una discontinuidad inevitable de salto infinito

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to-2^-} \frac{2(x+2)}{(x+3)(x+2)} = \lim_{x\to-2^-} \frac{2}{(x+3)} = 2$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to-2^+} \frac{2(x+2)}{(x+3)(x+2)} = \lim_{x\to-2^+} \frac{2}{(x+3)} = 2$$

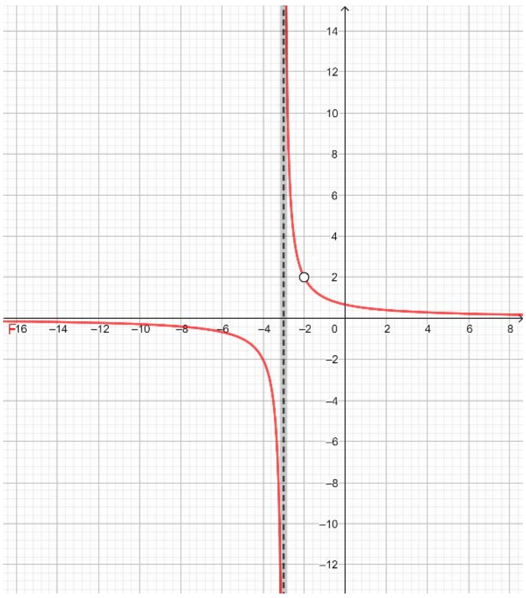
$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^+} f(x) \text{ sin embargo } \nexists\ f(-2) \Longrightarrow$$

$x = -2$ es una discontinuidad evitable

$a_2)$ Según hemos visto en el apartado anterior, los límites laterales en -2 son iguales, si definimos $f(-2)$ igual a estos límites:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+4}{x^2+5x+6} & si\ x \neq -3\ \ x \neq -2 \\ 2 \quad si & x = -2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow f$ sería continua en $\mathbb{R} - \{-3\}$



$a_3)$ Hemos visto que $x = -3$ es una discontinuidad de salto infinito de f

En $x = -3$ hay una asíntota vertical, tendiendo a$-\infty$, cuando $x = -3^-$; y $a + \infty$ para $x = -3^+$

b) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x - 1 \ \ si \ \ x \le -1 \\ x^2 - 5 \ \ si \ \ -1 < x \le 3 \\ \frac{b+x}{3x-2} \ \ si \ \ x > 3 \end{cases}$

Para que f sea continua en $x = -1$, debe cumplir: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

$$\left.\begin{array}{r} f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (ax^2 + 2x - 1) = a - 3 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x^2 - 5) = -4 \end{array}\right\} \underbrace{\Longrightarrow}_{f \ continua \ en -1} a - 3 = -4 \Longrightarrow a = -1$$

Para que f sea continua en $x = 3$, debe cumplir: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

$$\left.\begin{array}{r} f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2 - 5) = 4 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{b+x}{3x-2} = \frac{b+3}{7} \end{array}\right\} \underbrace{\Longrightarrow}_{f \ continua \ en 3} 4 = \frac{b+3}{7} \Longrightarrow 28 = b + 3 \Longrightarrow b = 25$$

$$\boldsymbol{a = -1; \ b = 25}$$

BLOQUE 3

Ejercicio 5:

a) El precio de alquiler de viviendas en un determinado barrio de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 265 euros. Queremos que el error cometido al estimar el precio medio de alquiler con un nivel de confianza del 97 % sea 20.7 euros. ¿Cuántas viviendas hemos de tomar aleatoriamente para calcula la estimación?

b) En el caso de una población de tamaño pequeño, el precio de alquiler sigue una distribución normal con desviación típica 134 euros. Una muestra aleatoria de 357 viviendas da como resultado un alquiler medio de 448 euros. Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el precio medio del alquiler.

Solución

a) Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 97 %:

$$1-\alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.985$$

El valor más cercano en la tabla es 0.9850 correspondiente a $z\alpha/_2 = 2.17$

El error debe ser $E = 20.7$

$$E = z\alpha/_2 \ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 20.7 \Rightarrow 2.17 \cdot \frac{265}{\sqrt{n}} = 20.7 \Rightarrow 575.05 = 20.7\sqrt{n},\ \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{575.05}{20.7} = \sqrt{n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{n} = 27.78 \Rightarrow n = 27.78^2 \Rightarrow n = 771.73$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de **772** *viviendas*

b) Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 93 %:

$$1-\alpha = 0.93 \Rightarrow \alpha = 0.07 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.965$$

Los valores más cercanos en la tabla son 0.9641 y 0.9656, más cerca el segundo: $z\alpha/_2 = 1.81$

$$\left(\bar{x} - z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(448 - 1.81\frac{134}{\sqrt{357}},\ 448 + 1.81\frac{134}{\sqrt{357}}\right) = (435.1634, 460.8366)$$

El intervalo de confianza del 93 % para el precio medio del alquiler es de $\mathbf{(435.1634, 460.8366)}$

Ejercicio 6:

Una empresa juguetera lanza al mercado un nuevo modelo de balón de playa, que fabrica en tres plantas, A, B y C, de las que salen respectivamente el 45 %, 21 % y 34 % de la producción total. Se ha detectado un fallo en la máquina utilizada en cada planta para aplicar los colores. De hecho, sale defectuoso el 1 % de los balones procedentes de la planta A, el 3 % de los procedentes de la planta B, y el 2 % de los de la C.

Seleccionamos un balón al azar de entre todos los que han salido de las tres plantas:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso y haya pasado por la máquina de la planta A?

$b)$ Si no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina de la planta B?

Solución

Nombremos los sucesos:

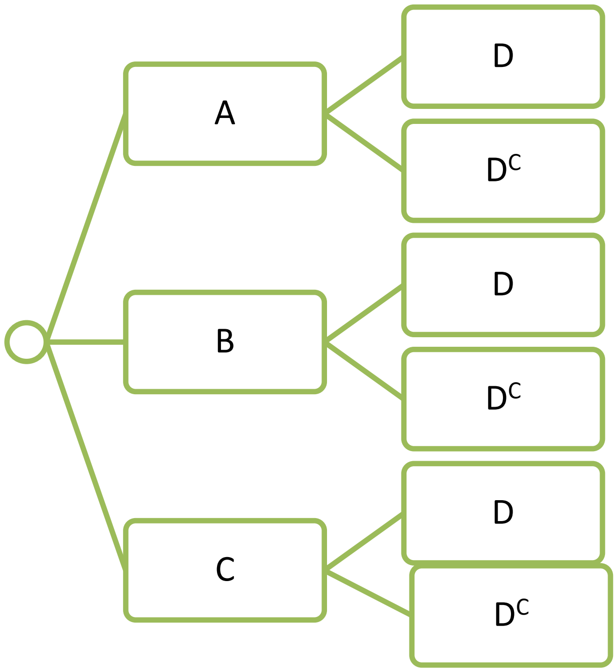
A = *"el balón ha pasado por la máquina de la planta A "*

B = *"el balón ha pasado por la máquina de la planta B"*

C =*" el balón ha pasado por la máquina de la planta C "*

D = *"el balón es defectuoso"*

Utilizamos un diagrama en árbol para describir el espacio muestral



a) P*(que no sea defectuoso y haya pasado por la máquina de la planta A)* $= P(A \cap D^c)$

$P(A \cap D^c) = P(A) \cdot P(D^c/A) = 0.45 \cdot 0.99 = 0.4455$

La probabilidad de que no sea defectuoso y haya pasado por la máquina de la planta A es de $\mathbf{0.4455}$

b) P*(si no es defectuoso, haya pasado por B)* $= P(B/D^c)$

$$P(B/D^c) = \frac{P(B \cap D^c)}{P(D^c)} = \frac{P(B)\ .\ P(D^c/B)}{P(B)\ .\ P(D^c/B)+P(B)\ .\ P(D^c/B)+P(B)\ .\ P(D^c/B)} = \frac{0.21\ .0.97}{0.45\ .0.99+0.21\ .0.97+0.34\ .0.98} = 0.2073$$

Si no es defectuoso, la probabilidad de que haya salido de la máquina de la planta B es de $\mathbf{0.2073}$.

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – SEPTIEMBRE 2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El estudiante realizará solo **tres ejercicios elegidos entre los seis de que consta el examen.**
2. Una vez elegido un ejercicio ha de hacerlo completo (todos sus apartados).
3. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada ejercicio y de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.
6. Si se realizan más de tres ejercicios solo se corregirán los tres primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
7. **La calificación del examen será el resultado de la puntuación obtenida entre 0,75.**

BLOQUE 1

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

A. Una oficina necesita adquirir material de papelería. Cuenta con un presupuesto de 600 euros y necesita archivadores, cuadernos y carpetas. Los precios de cada artículo por unidad son de 6, 3 y 2 euros respectivamente. El número de cuadernos va a ser la cuarta parte que el de carpetas y el número total de archivadores y de carpetas será de 165.

1. [0,9 PUNTOS] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.
2. [0,8 PUNTOS] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.
3. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Un inversor quiere comprar acciones de dos clases, A y B. La suma total de acciones adquiridas será como máximo de 1200. Cada acción del tipo A le reportará un beneficio de 0,2 euros y cada acción del B, uno de 0,08 euros. Tiene claro que no comprará más de 500 acciones del tipo A. Pero sí está dispuesto a adquirir como mínimo 350 del B. Además, no quiere que el número de acciones B adquiridas sea mayor del triple de acciones A. ¿Cuántas acciones debe comprar de cada tipo para obtener los máximos beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

BLOQUE 2

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\dfrac{x+5}{2x^2+4x-30}$

1. [0,25 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua?
2. [0,5 PUNTOS] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?
3. [0,5 PUNTOS] Calcular los dos límites laterales en x = 3. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

B. [1,25 PUNTOS] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2a}{x-5} & si \quad x\le 2 \\ x^2-5 & si \quad 2<x\le 4 \\ x^2+2x-b & si \quad x>4 \end{cases}$$

determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x = 2$ y en $x = 4$.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ y $g(x) = x^2 - x$

A. [0,25 PUNTOS] Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [1 PUNTO] Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

C. [0,25 PUNTOS] Dibujar las gráficas de ambas funciones indicando la región delimitada por ambas.

D. [1 PUNTO] Calcular el área de la región anterior.

BLOQUE 3

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

En una población de 3510 habitantes, se conoce el número, por franjas de edades, de los que colaboran con alguna ONG. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	18-35 años	36-55 años	Mayores de 55 años	Total
Colabora con alguna ONG	537	759	463	1759
No colabora con ninguna ONG	115	1034	602	1751
Total	652	1793	1065	3510

Elegido un habitante al azar,

A. [1,25 PUNTOS] Calcular la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 18 y 35 años.

B. [1,25 PUNTOS] Si sabemos que no colabora con ninguna ONG, ¿cuál es la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 36 y 55 años?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El número de horas semanales que los habitantes de determinada población dedican a la lectura de libros, sigue una distribución normal con desviación típica 2 horas. Una muestra aleatoria de 375 personas da como resultado un tiempo medio de 4 horas.

A. [1,25 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 94 % para el tiempo medio.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 90 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

BLOQUE 1

Ejercicio 1:

Una oficina necesita adquirir material de papelería. Cuenta con un presupuesto de 600 euros y necesita archivadores, cuadernos y carpetas. Los precios de cada artículo por unidad son de 6, 3 y 2 euros, respectivamente. El número de cuadernos va a ser la cuarta parte que el de carpetas y el número total de archivadores y de carpetas será de 165.

$a)$ Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

$b)$ Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

$c)$ Resolverlo.

Solución

a) Sean x, y, z el número de archivadores, cuadernos y carpetas que compra la oficina, respectivamente.

$$\left.\begin{aligned} 6x + 3y + 2z = 600 \\ y = \frac{z}{4} \\ x + z = 165 \end{aligned}\right\} \sim \left.\begin{aligned} 6x + 3y + 2z = 600 \\ 4y - z = 0 \\ x + z = 165 \end{aligned}\right\}.$$

Escribamos las matrices de coeficientes y ampliada del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A{:}B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 600 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 165 \end{pmatrix}$$

$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 24 - 3 - 8 = 13 \neq 0 \Longrightarrow |A|$ es un menor de orden 3 (máximo posible) no nulo, tanto de A como de $A{:}B$. Por tanto:

El rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas, por lo que el Teorema de Rouché - Frobenius nos dice que

El sistema es compatible y determinado

b) Utilizamos la regla de Cramer para encontrar la solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 600 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 165 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{Det\ A} = \frac{585}{13} = 45 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 600 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 165 & 1 \end{vmatrix}}{Det\ A} = \frac{390}{13} = 30 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 600 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 165 \end{vmatrix}}{Det\ A} = \frac{1560}{13} = 120$$

$$Se\ deben\ comprar\ \mathbf{45}\ archivadores, \mathbf{30}\ cuadernos\ y\ \mathbf{120}\ carpetas$$

Ejercicio 2:

Un inversor quiere comprar acciones de dos clases, A y B. La suma total de acciones adquiridas será como máximo de 1 200. Cada acción del tipo A le reportará un beneficio de 0.2 euros y cada acción del B, uno de 0.08 euros. Tiene claro que no comprará más de 500 acciones de tipo A. Pero sí está dispuesto a adquirir como mínimo 350 del B. Además, no quiere que el número de acciones B adquiridas sea mayor del triple de acciones A. ¿Cuántas acciones debe comprar de cada tipo para obtener los máximos beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Solución

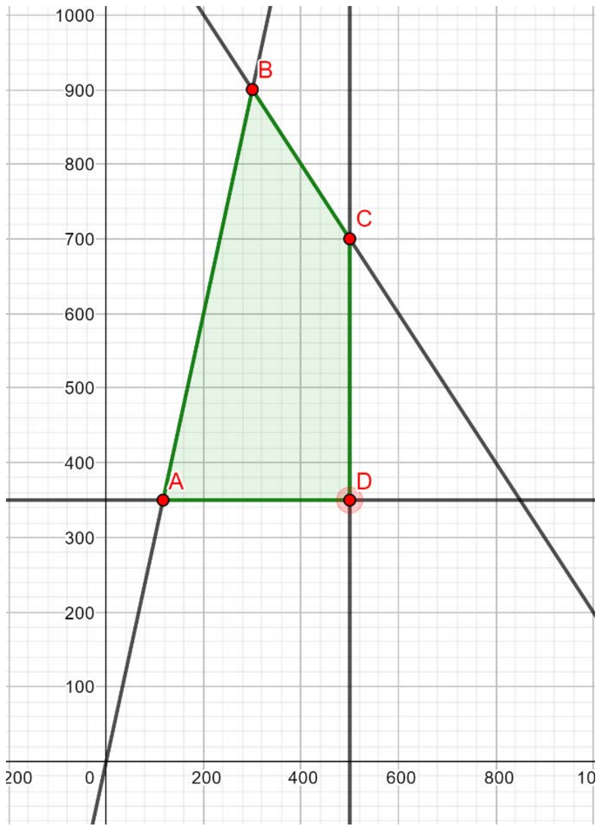
Se trata de un problema de programación lineal.

Sean x, y los números de acciones del tipo A y B compradas, respectivamente.

Debemos maximizar $z = F(x, y) = 0.2x + 0.08y$.

Sometida a las restricciones

$$\begin{cases} I_1: \ x + y \leq 1200 \\ I_2: \quad x \leq 500 \\ I_3: \quad y \geq 350 \\ I_4: \quad y \leq 3x \\ I_5: \quad x \geq 0 \\ I_6: \quad y \geq 0 \end{cases}$$



La región factible es la solución de este sistema de inecuaciones.

Las dos últimas inecuaciones restringen esta solución al primer cuadrante.

El semiplano solución de la inecuación I_1 lo define la recta $r_1: x + y = 1200$ que pasa por los puntos (1200, 0) y (0, 1200). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_1 $(0 + 0 \leq 1200) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_2 lo define la recta $r_2: x = 500$, paralela a OY. El conjunto de puntos del plano con una abscisa menor o igual que 500 constituye la solución de I_2.

El semiplano solución de la inecuación I_3 lo define la recta $r_3: y = 350$, paralela a OX. El conjunto de puntos del plano con una ordenada mayor o igual que 350 constituye la solución de I_3.

El semiplano solución de la inecuación I_4 lo define la recta $r_4: y = 3x$ .que pasa por los puntos (0, 0) y (100, 300). El punto P $(500{,}0)$ cumple la inecuación I_4 $(0 \leq 1500) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_4 contiene al punto P $(500{,}0)$

La intersección de estos 6 semiplanos es el polígono $ABCD$. Sabemos que la solución se encuentra, si existe, en uno de los vértices de este polígono. Determinamos sus coordenadas

$A \equiv \begin{cases} y = 350 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow \quad A = \left(\frac{350}{3}, 350\right)$

$B \equiv \begin{cases} y = 3x \\ x + y = 1200 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 3x \\ 4x = 1200 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 900 \\ x = 300 \end{cases} \Rightarrow B = (300, 900)$

$C \equiv \begin{cases} x + y = 1200 \\ x = 500 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 500 \\ y = 1200 - 500 = 700 \end{cases} \Rightarrow \ C = (500, 700\ )$

$D \equiv \begin{cases} x = 500 \\ y = 350 \end{cases} \Rightarrow D = (500, 350\ )$

Evaluamos $z = F(x, y) = 0.2x + 0.08y$ en cada uno de estos puntos

$$z(A) = F\left(\frac{350}{3}, 350\right) = 0.2\frac{350}{3} + 0.08\,.\,350 = \frac{154}{3}$$

$$z(B) = F(300, 900) = 0.2.\,300 + 0.08\,.\,900 = 132$$

$$z(C) = F(500, 700\ ) = 0.2.\,500 + 0.08\,.\,700 = 156$$

$$z(D) = F(500, 350\ ) = 0.2.\,500 + 0.08\,.\,350 = 128$$

El máximo se alcanza en el punto C. Sus coordenadas nos dan la solución:

$.Para\ obtener\ el\ máximo\ beneficio\ debe\ comprar\ \mathbf{500}\ acciones\ del\ tipo\ A\ y$
$\mathbf{700}\ del\ tipo\ B;\ \ y\ ese\ beneficio\ es\ de\ \mathbf{156}\ euros$

BLOQUE 2

Ejercicio 3:

$a)$ Dada la función $f(x)=\frac{x+5}{2x^2+4x-30}$:

$a_1)$ ¿En qué puntos es discontinua?

$a_2)$ ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?

$a_3)$ Calcular los dos límites laterales en $x=3$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

$b)$ Dada la función $f(x)=\begin{cases} \frac{x+2a}{x-5} & si\ \ x\leq 2 \\ x^2-5 & si\ \ 2<x\leq 4 \\ x^2+2x-b & si\ \ x>4 \end{cases}$, determinar los valores de a y b para los que la función es continua en $x=2$ y en $x=4$.

Solución

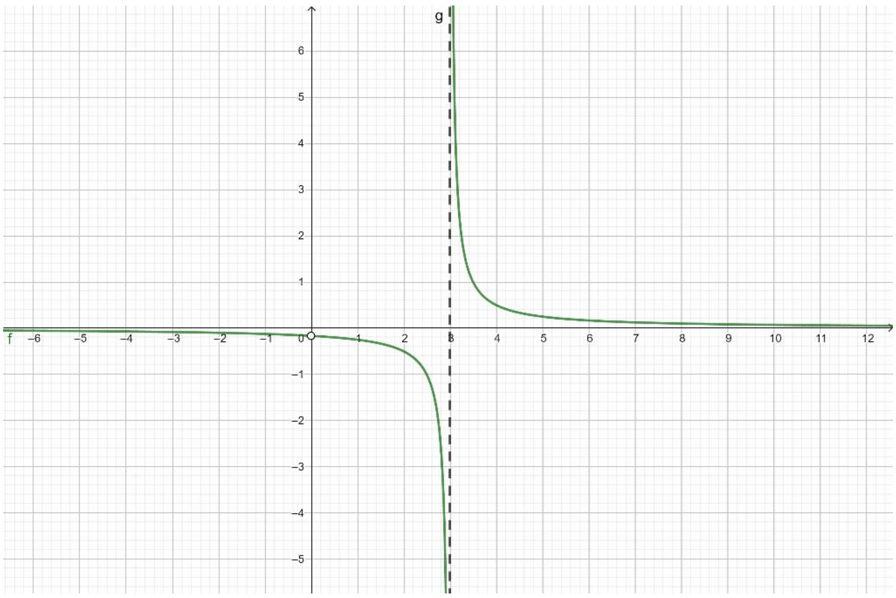
$a_1)$ La función es discontinua para los valores que anulan el denominador de la expresión analítica de f : $2x^2+4x-30=0 \Longrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16+240}}{4}=\begin{matrix}\nearrow 3 \\ \searrow -5\end{matrix}$

$$\lim_{x\to -5^-} f(x)=\lim_{x\to -5^-}\frac{x+5}{2x^2+4x-30}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -5^-}\frac{x+5}{2(x+5)(x+3)}=\lim_{x\to -5^-}\frac{1}{2(x+3)}=-\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to -5^+} f(x)=\lim_{x\to -5^+}\frac{x+5}{2x^2+4x-30}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -5^+}\frac{x+5}{2(x+5)(x+3)}=\lim_{x\to -5^+}\frac{1}{2(x+3)}=-\frac{1}{4}$$

La función no existe en $x=-5$

$\boldsymbol{x=-5}$ es una discontinuidad evitable



$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x+5}{2x^2+4x-30}=-\infty \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x+5}{2x^2+4x-30}=+\infty$$

$x = 3$ es una discontinuidad inevitable de salto ∞

a_2) Según hemos visto en el apartado anterior, los límites laterales en -5 son iguales, si definimos $f(-5)$ igual a estos límites:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+5}{2x^2+4x-30} & si\ x \neq -5\ \ x \neq 3 \\ -\frac{1}{4} & si \qquad\qquad x = -5 \end{cases} \Longrightarrow f \text{ sería continua en } \mathbb{R} - \{3\}$$

a_3) Hemos visto que $x = 3$ es una discontinuidad de salto infinito de f. Los límites están calculados en el primer apartado.

En $x = 3$ hay una asíntota vertical, tendiendo a $-\infty$, por la izquierda de la asíntota;y hacia $+\infty$ por la derecha

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2a}{x-5} & si\ \ x \leq 2 \\ x^2 - 5\ \ si\ \ 2 < x \leq 4 \\ x^2 + 2x - b\ \ si\ \ x > 4 \end{cases}$

Para que f sea continua en $x = 2$, debe cumplir: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x+2a}{x-5} = -\frac{2+2a}{3} \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 5) = -1 \end{array}\right\} \underbrace{\Longrightarrow}_{f\ continua\ en\ x=2} -\frac{2+2a}{3} = -1 \Longrightarrow 2 + 2a = 3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ 2a = 1 \Longrightarrow\ a = \frac{1}{2}$$

Para que f sea continua en $x = 4$, debe cumplir: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$

$$\left.\begin{array}{l} f(4) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (x^2 - 5) = 11 \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (x^2 + 2x - b) = 24 - b \end{array}\right\} \underbrace{\Longrightarrow}_{f\ continua\ en\ x=4} 11 = 24 - b \Longrightarrow b = 24 - 11 \Longrightarrow$$

$$b = 13$$

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{2};\ b = 13}$$

Ejercicio 4:

Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ y $g(x) = x^2 - x$:

$a)$ Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.

$b)$ Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

$c)$ Dibujar las gráficas de ambas funciones indicando la región que determinan.

$d)$ Calcular el área de la región anterior.

Solución

a) Corte de la gráfica de f con los ejes

$$OX \equiv \begin{cases} y = 0 \\ y = x^3 - 6x^2 + 9x \end{cases} \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow x(x-3)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad o \quad x = 3$$

$$OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = x^3 - 6x^2 + 9x \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

La gráfica de f corta a OX en los puntos $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{3}, \mathbf{0})$ y al eje OY en **(0, 0).**

Corte de la gráfica de g con los ejes

$$OX \equiv \begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \ o\ x = 1$$

$$OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 - x \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

La gráfica de g corta a OX en los puntos $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ y al eje OY en **(0, 0).**

b) Son funciones polinómicas y por tanto continuas y derivables n veces en $\mathbb{R}$. Estudiamos su monotonía a partir del signo de sus derivadas

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

$(-\infty, 1)$	1	(1,3)	3	(3,∞)	
+	0	-	0	+	Signo f'
Crece	Máximo relativo	Decrece	Mínimo relativo	Crece	Monotonía f

f es creciente en $(-\infty, \mathbf{1}) \cup$ **(3,+∞)** y decreciente en $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$. Tiene un máximo relativo en el punto $(\mathbf{1}, \mathbf{4})$ y un mínimo relativo en $(\mathbf{3}, \mathbf{0})$

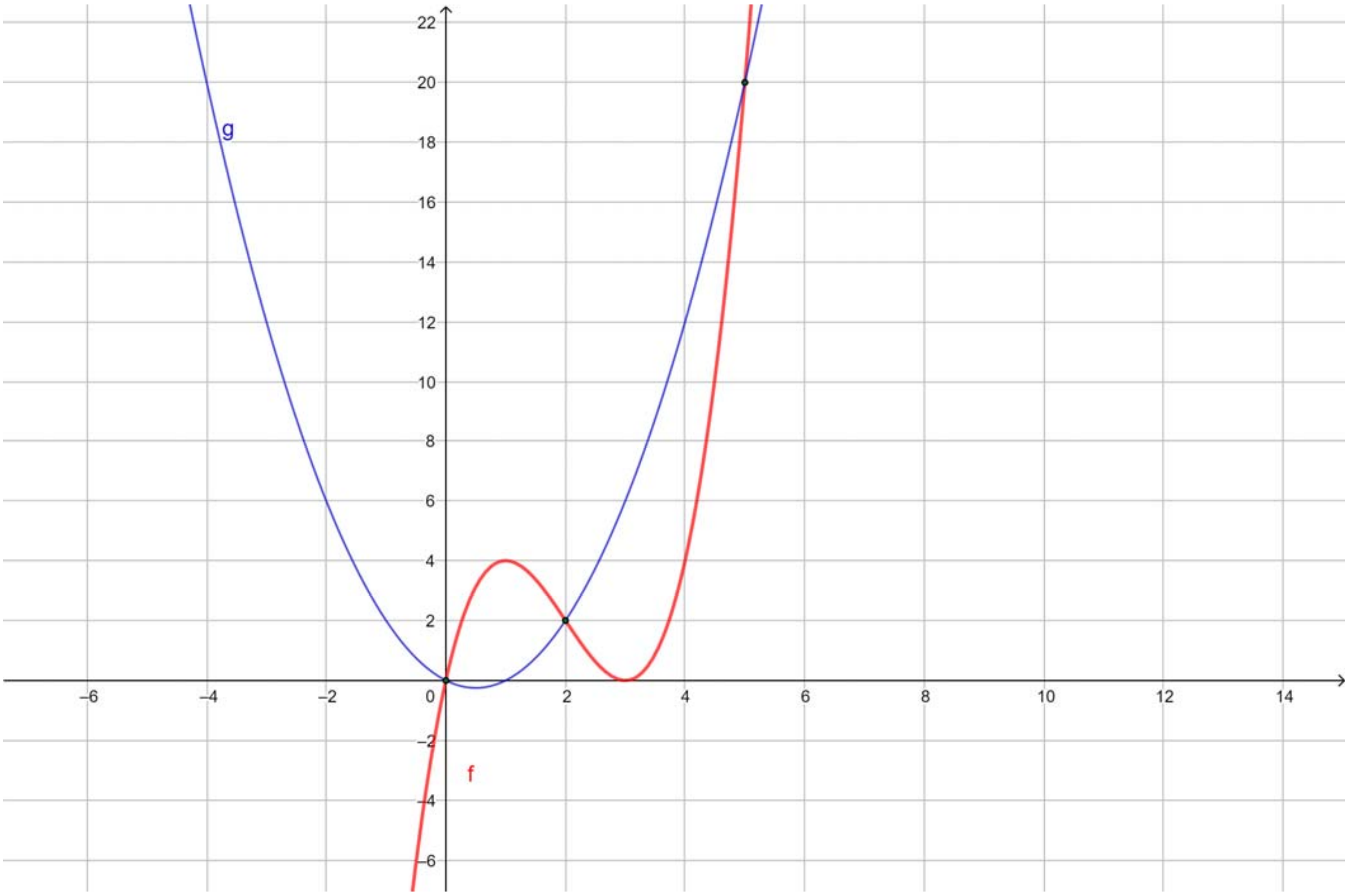
Autora: Milagros Latasa Asso
www.apuntesmareaverde.org.es

$$g(x) = x^2 - x \Rightarrow g'(x) = 2x - 1 \qquad g'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$(-\infty, 1/2)$	1/2	$(1/2, \infty)$	
+	0	+	Signo g'
Decrece	Mínimo relativo	Crece	Monotonía g

g es creciente en **(1/2, +∞)** y decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$. Tiene un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. Es el vértice de la parábola que es la gráfica de g

c) El estudio realizado en los apartados anteriores nos lleva a la representación con facilidad.

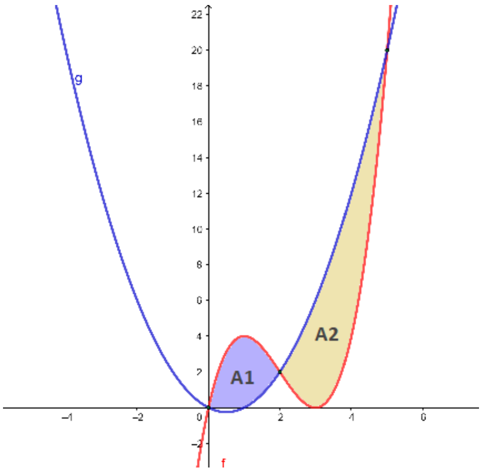


d) El área comprendida entre las gráficas de f y g está definida por los puntos de intersección de ambas gráficas. Debemos calcular las abscisas de estos puntos:

$$\left.\begin{array}{r} y = x^3 - 6x^2 + 9x \\ y = x^2 - x \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = x^2 - x \Rightarrow x^3 - 7x^2 + 10x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 7x + 10) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad o\; x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad o \quad x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 5 \\ \searrow 2 \end{array}$$



Área comprendida entre las gráficas de f y $g = A$

$$A = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_0^2 [(x^3 - 6x^2 + 9x) - (x^2 - x)]dx$$

$$A_2 = \int_2^5 [(x^2 - x) - (x^3 - 6x^2 + 9x)]$$

$$A_1 + A_2 = \int_0^2 (x^3 - 7x^2 + 10x)dx + \int_2^5 (-x^3 + 7x^2 - 10x)\,dx$$

Aplicamos la regla de Barrow a estas dos integrales:

$$A = A_1 + A_2 = \left[\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^3}{3} + 5x^2\right]_0^2 + \left[-\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^3}{3} - 5x^2\right]_2^5 =$$

$$= \left[\frac{16}{4} - \frac{56}{3} + 20 - 0\right] + \left[\left(-\frac{625}{4} + \frac{875}{3} - 125\right) - \left(-\frac{16}{4} + \frac{56}{3} - 20\right)\right] =$$

$$= \ 2.\frac{16}{4} - 2.\frac{56}{3} - \frac{625}{4} + \frac{875}{3} - 85 = \frac{96 - 448 - 1875 + 3500 - 1020}{12} = \frac{253}{12}$$

El área del recinto comprendido entre las gráficas de f y g es $\boldsymbol{\frac{253}{12} u^2}$

BLOQUE 3

Ejercicio 5:

En una población de 3 510 habitantes, se conoce el número, por franjas de edades, de los que colaboran con alguna ONG. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	18 – 35 años	36 – 55 años	Mayores de 55 años	Total
Colabora con alguna ONG	537	759	463	1 759
No colabora con ninguna ONG	115	1 034	602	1 751
Total	652	1 793	1 065	3 510

Elegido un habitante al azar:

$a)$ Calcular la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 18 y 35 años.

$b)$ Si sabemos que no colabora con ninguna ONG, ¿cuál es la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 36 y 55 años?

Solución

Nombramos los sucesos A = *" la edad del habitante elegido al azar está comprendida entre 18 y 35 años"*

B = *"el habitante elegido al azar no colabora con ninguna ONG"*

C = *"la edad del habitante elegido al azar está comprendida entre 36 y 55 años"*

Con estas identificaciones la solución del apartado a) es $P(A)$ y la del apartado b) $P(C/B)$:

a) Con los datos del enunciado, podemos aplicar directamente la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{652}{3510} = 0.1858$$

La probabilidad de que la edad del habitante elegido esté comprendida entre los 18 y 35 años es 0.1858

b) $P(C/B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1034}{3510}}{\frac{1751}{3510}} = \frac{1034}{1751} = 0.5905$

La probabilidad de que la edad del habitante elegido esté comprendida entre los 36 y 55 años, si no colabora con ninguna ONG es 0.5905

Ejercicio 6:

En número de horas semanales que los habitantes de determinada población dedican a la lectura de libros, sigue una distribución normal con desviación típica 2 horas. Una muestra aleatoria de 375 personas da como resultado un tiempo medio de 4 horas.

a) Obtener el intervalo de confianza del 94 % para el tiempo medio.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 90 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

Solución

a) Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 94 %:

$$1-\alpha = 0.94 \Rightarrow \alpha = 0.06 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.97$$

El valor más cercano a 0.97 en la tabla es 0.9699 correspondiente a $z\alpha/_2 = 1.88$

$$\left(\bar{x} - z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(4 - 1.88\frac{2}{\sqrt{375}}, 4 + 1.88\frac{2}{\sqrt{375}}\right) = (3.8058,\ \ 4.1942)$$

$$\mathit{El\ intervalo\ de\ confianza\ para\ la\ media\ de\ las\ horas\ de\ lectura\ es}$$
$$(\mathbf{3.8058},\ \ \mathbf{4.1942})$$

b) Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 90 %:

$$1-\alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.95$$

Los valores más cercanos en la tabla son 0.9495 y 0.9505 que corresponden respectivamente a 1.64 y 1.65. Tomamos entonces la media de ambos $z\alpha/_2 = \frac{164+1.65}{2} = 1.645$

El error del apartado anterior es $1.88\frac{2}{\sqrt{375}} = 0.1942 \Longrightarrow$ en este apartado $E = \frac{0.1942}{4} = 0.04855$

$$E = z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.04855 \Rightarrow 1.645 . \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.04855 \Rightarrow \frac{3.29}{0.04855} = \sqrt{n} \Rightarrow 67.7651 = \sqrt{n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = 67.7651^2 \Rightarrow n = 4592.12$$

$$\mathit{El\ tamaño\ de\ la\ muestra\ debe\ ser\ de}\ \mathbf{4\,593\ personas}$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

SECCIÓN 1 (3 puntos)

Bloque 1:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 - 4 & si\ x \leq -2 \\ t & si\ -2 < x < 2 \\ (x-4)^2 - 4 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = -2. (0.5 ptos)

b) Para t = 3, representa gráficamente la función f. (1 pto)

2. *La función* $f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c$ *tiene un punto de inflexión en* $(1, 10)$ *y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es 7. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)*

Bloque 2:

1. *Un artesano hace botines, botas de media caña y botas de caña alta, vendiendo cada par, respectivamente, a 150, 200 y 250 euros. La diferencia entre los botines y las botas de caña alta vendidas equivalen al número de caña media vendidas. El número de caña alta vendidas es la tercera parte de los botines. Por el total de las ventas obtiene 5500 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botas de cada tipo se vendieron. (1 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

2. *En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función* $f(x, y) = 6x - 2y$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$$x + y \geq 2; x - y \leq 2; y \leq 1; x \geq 0$$

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)

c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. (0.25 ptos)

SECCIÓN 2 (3,5 puntos)

Bloque 1:

3. *En un instituto el 15 % de los alumnos ven la tele todos los días, el 25 % juegan todos los días a la consola y el 26 % ven la tele todos los días o juegan todos los días a la consola o ambos.*

a) Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que vea la tele todos los días y juegue a la consola todos los días? (0.75 ptos)

b) Si elegimos un alumno al azar y juega todos los días a la consola, ¿cuál es la probabilidad de que vea todos los días la televisión? (0.75 ptos)

4. *Para hacer un estudio de las horas de duración de la batería de un juguete, se tomó una muestra aleatoria de 10 de estas baterías, siendo el número de horas de duración obtenida de: 4.2, 4.6, 5, 5.7, 5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.5 y 7.3 respectivamente. Sabiendo que la variable "número de horas de duración de la batería" sigue una distribución normal de desviación típica 2.1 horas, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza para el número medio de horas de duración de la batería con un nivel de confianza del 97 %. (1 pto)

b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ *del número de horas es de 4 horas con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x)=\begin{cases} x+t & si\ x\leq -1 \\ x^3-2x^2+4 & si\ x>-1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en x=-1? (0.75 ptos)

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1,+\infty)$. (0.5 ptos)

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1,+\infty)$. (0.5 ptos)

4. *Las botellas de agua vendidas por un hipermercado (que abre de 10 de la mañana a 4 de la tarde) durante una ola de calor viene dado por la función $C(t)=2t^3-27t^2+120t$, con $1\leq t\leq 6$ siendo $t=1$ la primera hora desde la apertura y $t=6$ la última hora hasta el cierre y $C(t)$ en cientos de botellas.*

a) ¿En que intervalos de tiempo las ventas aumentan? ¿Y en cuáles disminuye? (0.5 ptos)

b) ¿Cuándo se produce la máxima venta? ¿Y la mínima? (0.75 ptos)

c) ¿Cuántas botellas se venden en esos dos casos? (0.5 ptos)

SECCIÓN 3 (3,5 puntos)

Bloque 1:

5. *Una marca ofrece paquetes de tortitas de arroz de tres tipos: con espelta, con amapola y con chía. Se venden el triple de paquetes de las de amapola que de las de espelta. Se venden 40 paquetes más de las de amapola que de las de chía. Los precios de los paquetes para espelta, amapola y chía son respectivamente 2.50, 3.50 y 3 euros obteniendo por la venta de todas las tortitas 1640 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos paquetes de cada tipo se vendieron. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

6. *Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $C=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $M=A\cdot C-(B-I)^T$ siendo I la matriz identidad de orden 2. (0.75 ptos)

b) Calcula, si es posible, la matriz X tal que $X\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$. (0.75 ptos)

Bloque 2:

5. *En una ciudad el 1 % de los habitantes ha ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas. De las personas que han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, el 70 % tiene problemas financieros. De los habitantes que no han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, se sabe que un 5 % tiene problemas financieros.*

a) Calcula la probabilidad de que elegido un habitante al azar tenga problemas financieros. (0.75 ptos)

b) Sabiendo que una persona tiene problemas financieros, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas? (0.75 ptos)

6. *El tiempo medio de espera en una línea de atención al cliente sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma=2$ minutos. Se hace un estudio de los tiempos de espera de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera, con un nivel de confianza del 95 %. (1.25 ptos)

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

RESPUESTAS

SECCIÓN 1

Bloque 1:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 - 4 & si\ x \leq -2 \\ t & si\ -2 < x < 2 \\ (x-4)^2 - 4 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = -2. (0.5 ptos)

b) Para t = 3, representa gráficamente la función f. (1 pto)

RESPUESTA

a) Para que *f* sea continua en *x* = –2, como *f*(–2) = 0 el límite de *f*(*x*) cuando *x* tiende a –2 ha de ser 0 y para ello los límites laterales han de ser iguales e igual a 0, los calculamos,

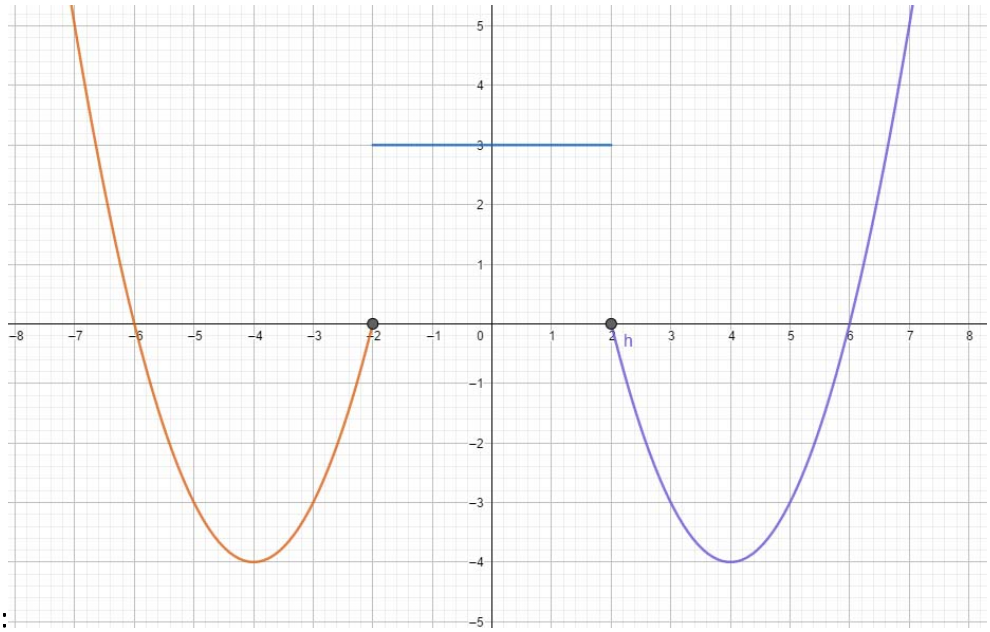
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} [(x+4)^2 - 4] = 0$$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} t = t$, luego t debe valer 0.

La función es continua en $x = -2$ si $t = 0$.

b) Para *t* = 3, la función queda: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 12 & si\ x \leq -2 \\ 3 & si\ -2 < x < 2 \\ x^2 - 8x + 12 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

y su gráfica es:



2. *La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c$ tiene un punto de inflexión en $(1, 10)$ y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es 7. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)*

RESPUESTA

Si f tiene un punto de inflexión en (1, 10), $f(1) = 10$ y además $f''(1) = 0$

Si la pendiente de la recta tangente en el punto (1, 10) es 7 entonces $f'(1) = 7$

Calculamos las derivadas

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 16$ de donde $3 \cdot a \cdot 1 + 2 \cdot b \cdot 1 + 16 = 7$

$f''(x) = 6ax + 2b$ de donde $6 \cdot a \cdot 1 + 2b = 0$

y $f(1) = 10$ de donde $a \cdot 1 + b \cdot 1 + 16 \cdot 1 + c = 10$, tenemos el sistema

$$\begin{cases} a + b + c = -6 \\ 6a + 2b = 0 \\ 3a + 2b = -9 \end{cases}$$

Calculamos $E'_2 = -6E_1 + E_2$ y $E'_3 = -3E_1 + E_3$ obtenemos

$$\begin{cases} a + b + c = -6 \\ -4b - 6c = 36 \\ -b - 3c = 9 \end{cases}$$

Calculamos $E''_3 = E'_2 - 4E'_3$ obtenemos

$$\begin{cases} a + b + c = -6 \\ -4b - 6c = 36 \\ 6c = 0 \end{cases}$$

de donde, $c = 0$, $b = -9$ y $a = 3$

$a = 3$, $b = -9$, $c = 0$; $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 16x$

Bloque 2:

1. *Un artesano hace botines, botas de media caña y botas de caña alta, vendiendo cada par, respectivamente, a 150, 200 y 250 euros. La diferencia entre los botines y las botas de caña alta vendidas equivalen al número de caña media vendidas. El número de caña alta vendidas es la tercera parte de los botines. Por el total de las ventas obtiene 5500 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botas de cada tipo se vendieron. (1 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

RESPUESTA

Sea x el número de botines, y el número de botas de media caña, z el número de botas de caña alta.

a)

Escribimos el sistema $\begin{cases} 150x + 200y + 250z = 5500 \\ x - z = y \\ z = \frac{1}{3}x \end{cases}$ simplificando la primera ecuación, dividiendo entre 50 y ordenando todas

b)

$\begin{cases} x \quad - 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 110 \end{cases}$ Calculamos $E'_2 = -E_1 + E_2$ y $E'_3 = -3E_1 + E_3$ obtenemos

$\begin{cases} x \quad - 3z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ 4y + 14z = 110 \end{cases}$ Calculamos $E''_3 = 4E'_2 + E'_3$ obtenemos

$\begin{cases} x \quad - 3z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ 22z = 110 \end{cases}$ de donde $z = 5$, $y = 10$, $x = 15$

Vende 15 pares de botines, 10 de botas de media caña y 5 de botas de caña alta

2. *En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función* $f(x, y) = 6x - 2y$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$$x + y \geq 2; x - y \leq 2; y \leq 1; x \geq 0$$

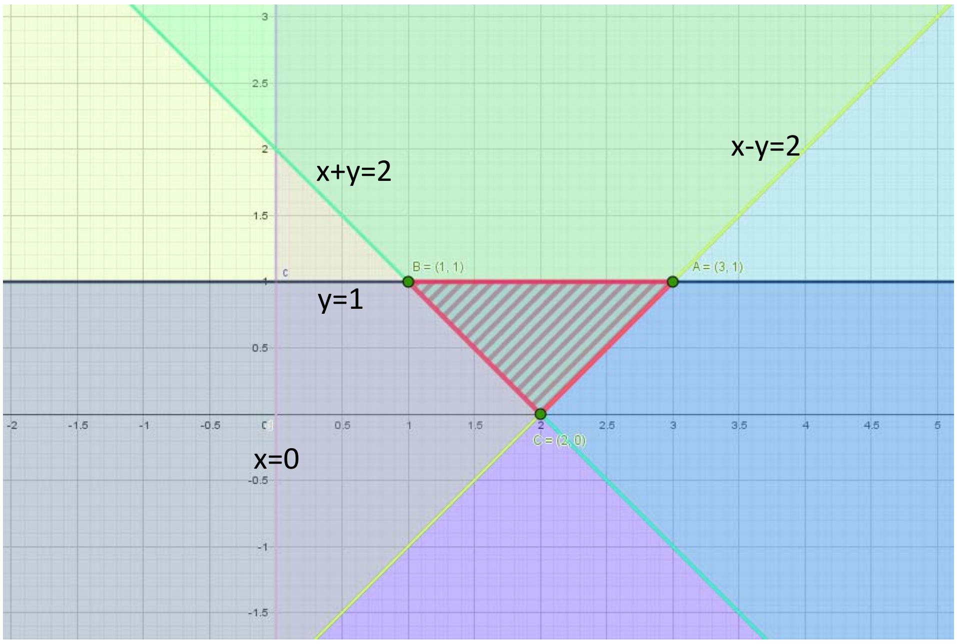
a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)

c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. (0.25 ptos)

RESPUESTA

a)



b) Resolvemos los sistemas formados por las ecuaciones de las rectas

$\begin{cases} x - y = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ obtenemos $A(3, 1)$ $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ obtenemos $B(1, 1)$ $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ obtenemos $C(2, 0)$

Los vértices son A(3, 1), B(1, 1) y C(2, 0)

c) Sustituimos los vértices en la función $f(x, y) = 6x - 2y$

A, $f(3, 1) = 6 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 16$ B, $f(1, 1) = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 4$ C, $f(2, 0) = 6 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 12$

Máximo en A con valor 16. Mínimo en B con valor 4

SECCIÓN 2

Bloque 1:

3. *En un instituto el 15 % de los alumnos ven la tele todos los días, el 25 % juegan todos los días a la consola y el 26 % ven la tele todos los días o juegan todos los días a la consola o ambos.*

a) Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que vea la tele todos los días y juegue a la consola todos los días? (0.75 ptos)

b) Si elegimos un alumno al azar y juega todos los días a la consola, ¿cuál es la probabilidad de que vea todos los días la televisión? (0.75 ptos)

RESPUESTA

Sea **T** el suceso ver la tele todos los días y **C** jugar todos los días a la consola

Según el enunciado $P(T) = 0.15$ $P(C) = 0.25$ y $P(T \cup C) = 0.26$

a) Se pide $P(T \cap C)$, como $P(T \cup C) = P(T) + P(C) - P(T \cap C)$ sustituyendo

$0.26 = 0.15 + 0.25 - P(T \cap C)$ de donde $P(T \cap C) = 0.14$

La probabilidad de que un alumno vea la tele y juegue a la consola todos los días es de 0.14

b) Se pide $P(T/C) = \frac{P(T\cap C)}{P(C)} = \frac{0.14}{0.25} = 0.56$

Si elegimos un alumno al azar y juega todos los días a la consola, la probabilidad de que vea todos los días la televisión es $\boldsymbol{P(T/C) = 0.56}$

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo
www.apuntesmareaverde.org.es

4. *Para hacer un estudio de las horas de duración de la batería de un juguete, se tomó una muestra aleatoria de 10 de estas baterías, siendo el número de horas de duración obtenida de: 4.2, 4.6, 5, 5.7, 5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.5 y 7.3 respectivamente. Sabiendo que la variable "número de horas de duración de la batería" sigue una distribución normal de desviación típica 2.1 horas, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza para el número medio de horas de duración de la batería con un nivel de confianza del 97 %. (1 pto)

b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del número de horas es de 4 horas con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right),$$

donde X es la variable "número de horas de duración de la batería", X sigue una N(μ, 2.1)

Nos dan los siguientes datos: $\sigma = 2.1$ $\quad 1 - \alpha = 0.97$, $\quad n = 10$.

Calculamos la media muestral:

$$\overline{x} = \frac{4.2+4.6+5+5.7+5.8+5.9+6.1+6.2+6.5+7.3}{10} = 5.73.$$

$1 - \alpha = 0.97$, $\alpha = 0.03$, $\frac{\propto}{2} = 0.015$, $1 - \frac{\propto}{2} = 0.985$, buscamos en la tabla: $Z_{0.985} = 2.17$.

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(5.73 - 2.17\frac{2.1}{\sqrt{10}},\quad 5.73 + 2.17\frac{2.1}{\sqrt{10}}\right) = (4.29,\ \ 7.17)$$

Intervalo de confianza: $(4.29,\ \ 7.17)$

b) Si se quiere que el intervalo de confianza tenga menor amplitud se debe aumentar el tamaño de la muestra o disminuir el nivel de confianza.

Aumentar el tamaño de la muestra o disminuir nivel de confianza.

c) Si el nivel de confianza fuese del 90 %, 97 % > 90 %, el intervalo de confianza tendría menor amplitud, como 4 ya no se encuentra en el intervalo anterior, al ser menor el nivel de confianza, la amplitud del intervalo va a ser menor y por tanto el valor 4 no va a estar en el intervalo, por tanto, se puede decir que la media poblacional no va a ser de 4.

No se puede afirmar que la media poblacional sea 4 con una probabilidad del 90 %.

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+t & si\ x \le -1 \\ x^3 - 2x^2 + 4 & si\ x > -1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en x=-1? (0.75 ptos)

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, +\infty)$. (0.5 ptos)

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, +\infty)$. (0.5 ptos)

RESPUESTA

a) $f(x) = \begin{cases} x+t & si\ x \le -1 \\ x^3 - 2x^2 + 4 & si\ x > -1 \end{cases}$ para que *f* sea continua en *x* = –1 los límites laterales en *x* = –1 han de coincidir y su valor ser igual a *f*(–1)

$$\boldsymbol{\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x+t) = -1+t}$$

$\boldsymbol{\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (x^3 - 2x^2 + 4) = 1}$, igualamos, –1 + *t* = 1, luego *t* = 2.

_f_ es continua en _x_ = –1 cuando _t_ = 2

b) En el intervalo dado la función es $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x^2 + 4}$, calculamos su derivada,

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 4x}$, $\boldsymbol{3x^2 - 4x = 0}$, obtenemos, $\boldsymbol{x = 0 \ \ y \ \ x = \frac{4}{3}}$, hacemos la segunda derivada,

$\boldsymbol{f''(x) = 6x - 4}$, sustituimos los valores obtenidos,

$\boldsymbol{f''(0) = -4 < 0}$, máximo relativo, $\boldsymbol{f''\left(\frac{4}{3}\right) = 4 > 0}$, mínimo relativo

En _x_ = 0 hay un máximo relativo: (0, 4); y en _x_ = $\frac{4}{3}$ _hay un mínimo relativo:_ $\left(\frac{4}{3}, \frac{76}{27}\right)$.

c) Considerando los valores del apartado b) tenemos los intervalos:

(–1, 0), $(0, \frac{4}{3})$ y $(\frac{4}{3}, +\infty)$, tomamos valores que estén dentro de cada intervalo y sustituimos en la primera derivada, $x = -\frac{1}{2}$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4} > 0$, luego en el intervalo (–1, 0) *f* es creciente,

$x = \frac{1}{3}$, $f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} < 0$, luego en el intervalo $(0, \frac{4}{3})$ *f* es decreciente,

$x = 10$, $f'(10) = 280 > 0$, luego en el intervalo $(\frac{4}{3}, +\infty)$ *f* es creciente.

En (–1, 0) _f_ es creciente, en $(0, \frac{4}{3})$ _f_ es decreciente y en $(\frac{4}{3}, +\infty)$ _f_ es creciente

4. *Las botellas de agua vendidas por un hipermercado (que abre de 10 de la mañana a 4 de la tarde) durante una ola de calor viene dado por la función $C(t) = 2t^3 - 27t^2 + 120t$, con $1 \leq t \leq 6$ siendo $t = 1$ la primera hora desde la apertura y $t = 6$ la última hora hasta el cierre y $C(t)$ en cientos de botellas.*

a) ¿En que intervalos de tiempo las ventas aumentan? ¿Y en cuáles disminuye? (0.5 ptos)

b) ¿Cuándo se produce la máxima venta? ¿Y la mínima? (0.75 ptos)

c) ¿Cuántas botellas se venden en esos dos casos? (0.5 ptos)

RESPUESTA

a) *Calculamos la derivada,* $\boldsymbol{C'(t) = 6t^2 - 54t + 120}$ resolvemos $\boldsymbol{6t^2 - 54t + 120 = 0}$

Obtenemos $t = 4$ y $t = 5$, tenemos los intervalos (1, 4) (4, 5) y (5, 6) tomamos valores dentro de cada uno de los intervalos y sustituimos en la función derivada

$\mathrm{C}'(2) = 6 \cdot 2^2 - 54 \cdot 2 + 120 = 36 > 0$ Creciente en (1, 4)

$\mathrm{C}'(4.5) = 6 \cdot 4.5^2 - 54 \cdot 4.5 + 120 = -1.5 < 0$ Decreciente en (4, 5)

$\mathrm{C}'(5.5) = 6 \cdot 5.5^2 - 54 \cdot 5.5 + 120 = 4.5 > 0$ Creciente en (5, 6)

En (1, 4) C es creciente, en (4, 5) C es decreciente y en (5, 6) C es creciente

b) La máxima venta puede ser a las 4 horas o a las 6 horas

$C(4)$ = $C(4) = 2 \cdot 4^3 - 27 \cdot 4^2 + 120 \cdot 4 = 176$

$C(6) = 2 \cdot 6^3 - 27 \cdot 6^2 + 120 \cdot 6 = 180$

La máxima venta se produce a las 6 de la tarde, aunque a las 4 hay un máximo relativo.

La mínima venta puede ser a la 1 hora o a las 5 horas

$C(1) = 2 \cdot 1^3 - 27 \cdot 1^2 + 120 \cdot 1 = 95$

$C(5) = 2 \cdot 5^3 - 27 \cdot 5^2 + 120 \cdot 5 = 175$

La mínima venta se produce a las 11 de la mañana, aunque a las 5 hay un mínimo relativo.

Máxima venta a las 6 de la tarde, mínima venta a la 1 de la mañana

c) A las 6 de la tarde se venden 18 000 botellas

A la 1 de la mañana se venden 9 500 botellas

A las 6 de la tarde se venden 18 000 botellas, a la 1 de la mañana se venden 9 500 botellas

SECCIÓN 3

Bloque 1:

5. *Una marca ofrece paquetes de tortitas de arroz de tres tipos: con espelta, con amapola y con chía. Se venden el triple de paquetes de las de amapola que de las de espelta. Se venden 40 paquetes más de las de amapola que de las de chía. Los precios de los paquetes para espelta, amapola y chía son respectivamente 2.50, 3.50 y 3 euros obteniendo por la venta de todas las tortitas 1640 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos paquetes de cada tipo se vendieron. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

RESPUESTA

Sea x el número de paquetes con espelta, y con amapola, **z** con chía.

a)

Escribimos el sistema $\begin{cases} 2.5x + 3.5y + 3z = 1640 \\ y = 3x \\ y = z + 40 \end{cases}$

b)

Como $y = 3x$ además $y = z + 40$, $3x = z + 40$, $z = 3x - 40$

sustituimos en la primera ecuación

$2.5x + 3.5 \cdot 3x + 3 \cdot (3x - 40) = 1640$

$22x = 1440$, $x = 80$, sustituyendo

$y = 3 \cdot 80 = 240$,

$z = 3 \cdot 80 - 40 = 200$

Se venden 80 paquetes con espelta, 240 con amapola y 200 con chía

6. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $M = A \cdot C - (B - I)^T$ *siendo* I *la matriz identidad de orden 2. (0.75 ptos)*

b) Calcula, si es posible, la matriz X *tal que* $X \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$. *(0.75 ptos)*

RESPUESTA

a) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 26 & 1 \end{pmatrix}$

$B - I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(B - I)^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot C - (B - I)^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 26 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 24 & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A \cdot C - (B - I)^t = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 24 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) Sea $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$; $X \cdot B = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2x & 2x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$;

$\begin{cases} -2x = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases} \qquad x = -1, \quad y = 3$

Luego la matriz X sería $X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Bloque 2:

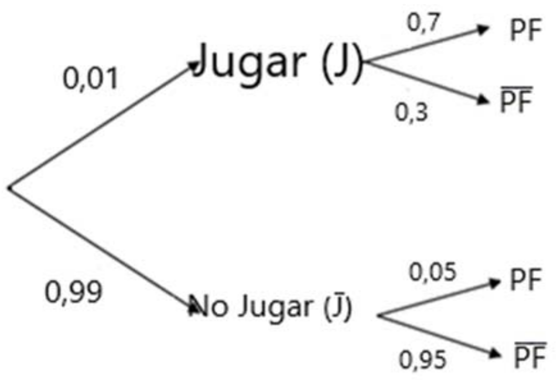
5. *En una ciudad el 1 % de los habitantes ha ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas. De las personas que han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, el 70 % tiene problemas financieros. De los habitantes que no han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, se sabe que un 5 % tiene problemas financieros.*

a) Calcula la probabilidad de que elegido un habitante al azar tenga problemas financieros. (0.75 ptos)

b) Sabiendo que una persona tiene problemas financieros, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas? (0.75 ptos)

RESPUESTA

Construimos el diagrama de árbol



a) Por el teorema de la probabilidad total

$P(PF) = P(J \cap PF) + P(\bar{J} \cap PF) = 0.01 \cdot 0.7 + 0.99 \cdot 0.05 = 0.0565$

$$\boldsymbol{P(\text{Problemas Financieros}) = 0.0565}$$

b) $P(J/PF) = \frac{P(J \cap PF)}{P(PF)} = \frac{P(J) \cdot P(PF/J)}{P(PF)} = \frac{0.01 \cdot 0.7}{0.0565} = \frac{0.007}{0.0565} = 0.1239$

$$\boldsymbol{P(\text{Jugar cuando tiene Problemas Financieros}) = 0.1239}$$

6. El tiempo medio de espera en una línea de atención al cliente sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 2$ minutos. Se hace un estudio de los tiempos de espera de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera, con un nivel de confianza del 95 %. (1.25 ptos)

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Nos dan los siguientes datos:

$\sigma = 2$, $\quad 1 - \alpha = 0.95$, $\quad \alpha = 0.05$, $\frac{\alpha}{2} = 0.025$, $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$ $\qquad n = 10$.

Calculamos la media muestral:

$$\overline{x} = \frac{5+6+7+8+9+11+12+14+15+16}{10} = 10.3.$$

Buscamos en la tabla: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96.$

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(10.3 - 1.96\frac{2}{\sqrt{10}},\qquad 10.3 + 1.96\frac{2}{\sqrt{10}}\right) =$$

=(9.06, 11.54)

Intervalo de confianza: (9.06, 11.54)

b) El error máximo admisible viene dado por: $E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Por tanto, para E = 1, $\qquad 1 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}$

luego, $\sqrt{n} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma = 1.96 \cdot 2$, $\qquad$ y $\qquad n = 15.3664$.

El tamaño de la muestra debe ser mayor que 16 clientes.

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL
CURSO: **2019–2020**
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE **SEPTIEMBRE**

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

SECCIÓN 1 (3 puntos)

Bloque 1:

1. *Una empresa telefónica ofrece tres modelos de teléfonos: de precio reducido, medio y superior. El precio del teléfono de gama superior es el mismo que el de los otros dos juntos. Vendiendo 50 teléfonos de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 del superior y por la venta de 5 teléfonos de precio reducido, 5 de medio y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo. (1 pto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

2. *En una pastelería se elaboran dos tipos de tarta de chocolate (A y B). La primera lleva 100 gr de chocolate con leche y 200 gr de chocolate negro y la segunda 200 gr de chocolate con leche y 100 gr de chocolate negro. Dispone de 9 kg de cada tipo de chocolate. Por cada tarta A obtiene un beneficio de 5 euros y por cada tarta B de 4 euros.*

a) Expresa la función objetivo para obtener un beneficio máximo. (0.25 ptos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto).

c) Determina el número de tartas de cada tipo que puede vender para obtener beneficio máximo. (0.25 ptos)

Bloque 2:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} -4x+4 & si\ x \le c \\ x^2-4x & si\ x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.5 ptos)

b) Para $c = 2$, representa gráficamente la función f. (1 pto)

2. *Una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto $(1, -9)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)*

SECCIÓN 2 (3,5 puntos)

Bloque 1:

3. *El 10 % de los adultos padece sobrepeso. Se sabe por estudios previos que el riesgo de padecer hipertensión arterial es dos veces mayor en las personas con sobrepeso que las que no tienen sobrepeso y también que la probabilidad de que un adulto sin sobrepeso padezca hipertensión arterial es del 14.8 %.*

a) ¿Qué porcentaje de adultos tienen sobrepeso e hipertensión arterial? (0.75 ptos)

b) Si se escoge un adulto al azar y tiene hipertensión arterial, ¿cuál es la probabilidad de que tenga sobrepeso? (0.75 ptos)

4. *El tiempo medio diario de consumo de televisión en Castilla-La Mancha sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 30$ minutos. Se hizo un estudio con 50 personas y se observó que la media de consumo diario de ellas era de 220 minutos. Se pide:*

a) Calcula el intervalo de confianza del 95 % para el consumo medio de televisión en Castilla-La Mancha. (1 pto)

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ de consumo diario de televisión en Castilla-La Mancha es de 230 minutos con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x-t & si\ x \le 0 \\ (x-t)^2 - 5(x+t) + 4 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.75 ptos)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.75 ptos)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)

4. *En un taller para automóviles el número de clientes a los que cambiaron las ruedas de su coche durante 5 días de esta semana se ajusta a la función $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 75$, $1 \le x \le 5$, siendo $x = 1$ el lunes y $x = 5$ el viernes.*

a) ¿Qué día acuden menos clientes a cambiar las ruedas de su coche? ¿Cuántos clientes son? (0.75 ptos)

b) ¿Cuál es el día que van más clientes a que les cambien las ruedas y cuántos son esos clientes? (0.75 ptos)

SECCIÓN 3 (3,5 puntos)

Bloque 1:

5. *La elección de una película ganadora de un festival de cine negro se realiza mediante una votación pública por internet entre las seleccionadas (A, B y C) para la final. El número de votantes es de 1200 personas. El número de votos de A es el doble de los conseguidos por B y C juntas. B consigue el 50 % de votos más que C.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos votos obtuvo cada película. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

6. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

a) Calcula $(A - B)^2$. (0.75 ptos)

b) ¿Se podría calcular la matriz inversa de $(A - B)^2$? (0.25 ptos)

c) ¿Qué propiedad tienen que cumplir dos matrices A y B cualesquiera para que se cumpla $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$? (0.5 ptos)

Bloque 2:

5. *En un municipio el 5 % de los habitantes son deportistas aficionados. El 0.5 % de estos deportistas aficionados no han superado un test respiratorio. Mientras que de los habitantes no deportistas aficionados el 15 % no han superado el mismo test respiratorio.*

a) *Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya superado el test respiratorio? (0.75 ptos)*

b) *Sabiendo que un habitante elegido al azar no ha superado el test respiratorio, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado? (0.75 ptos)*

6. *Se ha tomado una muestra aleatoria de 10 frascos de Berenjenas de Almagro de 1 kilogramo para medir el contenido de fibra en gramos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido de fibra en cada frasco se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para la media poblacional del contenido en fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro. (1 pto)

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

RESPUESTAS

SECCIÓN 1

Bloque 1:

1. *Una empresa telefónica ofrece tres modelos de teléfonos: de precio reducido, medio y superior. El precio del teléfono de gama superior es el mismo que el de los otros dos juntos. Vendiendo 50 teléfonos de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 del superior y por la venta de 5 teléfonos de precio reducido, 5 de medio y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo. (1 pto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

RESPUESTA

Sea x el precio reducido, y el precio medio, z el precio superior.

a)

Escribimos el sistema $\begin{cases} 5x + 5y + 10z = 7500 \\ x + y = z \\ 50y = 30z \end{cases}$ simplificando la primera ecuación, dividiendo entre 5, la tercera entre 10 y ordenando todas

b)

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 1500 \end{cases}$ Calculamos $E'_3 = -E_1 + E_3$ obtenemos

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \\ 3z = 1500 \end{cases}$ de donde $z = 500$, $y = 300$, $x = 200$

Precio reducido 200 €, precio medio 300 € y precio superior 500 €

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo
www.apuntesmareaverde.org.es

2. *En una pastelería se elaboran dos tipos de tarta de chocolate (A y B). La primera lleva 100 gr de chocolate con leche y 200 gr de chocolate negro y la segunda 200 gr de chocolate con leche y 100 gr de chocolate negro. Dispone de 9 kg de cada tipo de chocolate. Por cada tarta A obtiene un beneficio de 5 euros y por cada tarta B de 4 euros.*

a) Expresa la función objetivo para obtener un beneficio máximo. (0.25 ptos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto).

c) Determina el número de tartas de cada tipo que puede vender para obtener beneficio máximo. (0.25 ptos)

RESPUESTA

	Chocolate con leche (gr)	Chocolate negro (gr)	Beneficio
Nº tartas A	100	200	5 €
Nº tartas B	200	100	4 €
Total	9000	9000	

a) *f(x, y) = 5x + 4y*

f(x, y) = 5x + 4y

b)

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{x \geq 0 \quad y \geq 0}\\ \mathbf{100x + 200y \leq 9000}\\ \mathbf{200x + 100y \leq 9000}\end{array}\right\}$$

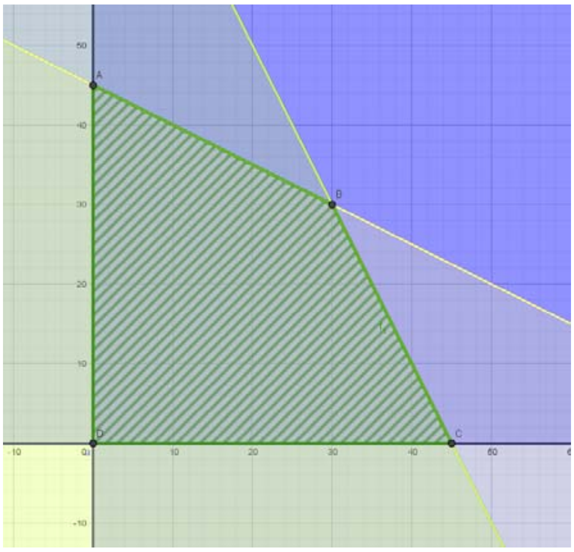
Los vértices son:

A(0, 45)

B(30, 30)

C(45, 0)

D(0, 0)



c) f(0, 45) = 5 · 0 + 4 · 45 = 180

f(30, 30) = 5 · 30 + 4 · 30 = 270

f(45, 0) = 5 · 45 + 4 · 0 = 225

f(0, 0) = 0

Puede vender 30 tartas de cada tipo para obtener el máximo beneficio que sería de 270 €

Bloque 2:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} -4x+4 & si\ x \le c \\ x^2-4x & si\ x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ *es continua en* $x = c$*? (0.5 ptos)*

b) Para $c = 2$*, representa gráficamente la función f. (1 pto)*

RESPUESTA

a) $f(x) = \begin{cases} -4x+4 & si\ x\ \le c \\ x^2-4x & si\ x\ > c \end{cases}$ para que *f* sea continua en $x=c$, los límites laterales en $x=c$ han de coincidir y su valor ser igual a $f(c)$

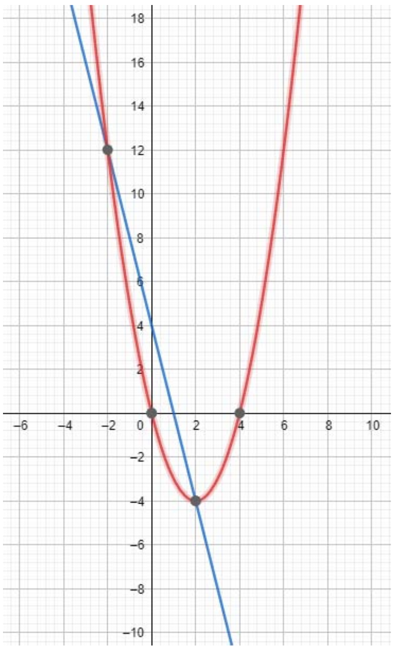
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^-}(-4x+4) = -4c+4$$

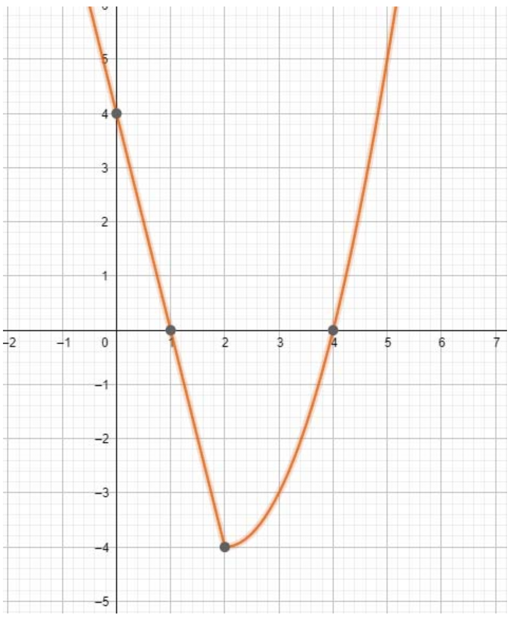
$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^+}(x^2-4x) = c^2-4c,$$ igualamos, $c^2-4c = -4c+4$

luego $c=2$ o $c=-2$

f es continua en $x = c$ cuando $c = 2$ o $c = -2$

b)





2. *Una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto $(1, -9)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)*

RESPUESTA

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

Máximo en $x = -1$, entonces $f'(-1) = 0$

Punto inflexión en $(1, -9)$ entonces $f(1) = -9$ y $f''(1) = 0$

Calculamos $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ y $f''(x) = 6x + 2a$

Aplicamos a los datos dados

$f(1) = -9$ $(1)^3 + a(1)^2 + b(1) + c = -9$ $1 + a + b + c = -9$

$f'(-1) = 0$ $3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0$ $3 - 2a + b = 0$

$f''(1) = 0$ $6(1) + 2a = 0$ $6 + 2a = 0$

Resolviendo el sistema:

$a = -3$ $b = -9$ $c = 2$

$a = -3$, $b = -9$, $c = 2$ y $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + +2$

SECCIÓN 2

Bloque 1:

3. *El 10 % de los adultos padece sobrepeso. Se sabe por estudios previos que el riesgo de padecer hipertensión arterial es dos veces mayor en las personas con sobrepeso que las que no tienen sobrepeso y también que la probabilidad de que un adulto sin sobrepeso padezca hipertensión arterial es del 14.8 %.*

a) ¿Qué porcentaje de adultos tienen sobrepeso e hipertensión arterial? (0.75 ptos)

b) Si se escoge un adulto al azar y tiene hipertensión arterial, ¿cuál es la probabilidad de que tenga sobrepeso? (0.75 ptos)

RESPUESTA

Como la probabilidad de padecer hipertensión con sobrepeso es doble que sin sobrepeso y ésta es de 14.8 % la probabilidad de sobrepeso será 29.6 %.

Denotamos por S, sobrepeso y por HA, hipertensión arterial

Hacemos el diagrama de árbol

a) $P(S \cap HA) = P(S) \cdot P(HA/S) = 0.1 \cdot 0.296 = 0.0296$

El 2.96% de personas adultas tienen hipertensión y sobrepeso

b) $P(S/HA)$ = por el teorema de Bayes = $\frac{P(S\cap HA)}{P(HA)} = \frac{0.0296}{P(HA)} = (*)$

necesitamos calcular $P(HA)$, utilizamos el teorema de la probabilidad total,

$P(HA) = P(S \cap HA) + P(\bar{s} \cap HA) = P(S) \cdot P(HA/S) + P(\bar{s}) \cdot P(HA/\bar{s}) =$

$= 0.1 \cdot 0.296 + 0.9 \cdot 0.148 = 0.1628$

$(*) = \frac{0.0296}{0.1628} = \mathbf{0.1818}$

Una persona con hipertensión tiene un 18.18 % de tener sobrepeso

4. *El tiempo medio diario de consumo de televisión en Castilla-La Mancha sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 30$ minutos. Se hizo un estudio con 50 personas y se observó que la media de consumo diario de ellas era de 220 minutos. Se pide:*

a) Calcula el intervalo de confianza del 95 % para el consumo medio de televisión en Castilla-La Mancha. (1 pto)

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ de consumo diario de televisión en Castilla-La Mancha es de 230 minutos con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Nos dan los siguientes datos:

$$\sigma = 30, \qquad 1 - \alpha = 0.95 , \qquad \bar{x} = 220, \qquad n = 50$$

X: tiempo medio consumo televisión, $\quad X$ sigue una $N(\mu, 30)$

$$\alpha = 0.05 , \ \frac{\alpha}{2} = 0.025 , \ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$$

Buscamos en la tabla: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96.$

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(220 - 1.96\frac{30}{\sqrt{50}}, 220 + 1.96\frac{30}{\sqrt{50}}\right) = (221.68, 228.32)$$

Intervalo de confianza: (221.68, 228.32)

b) Si se quiere que el intervalo de confianza tenga menor amplitud se debe aumentar el tamaño de la muestra o disminuir el nivel de confianza.

Aumentar el tamaño de la muestra o disminuir nivel de confianza.

c) Si el nivel de confianza fuese del 90 %, 95 % > 90 %, el intervalo de confianza tendría menor amplitud, como 230 ya no se encuentra en el intervalo anterior, al ser menor el nivel de confianza, la amplitud del intervalo va a ser menor y por tanto el valor 230 no va a estar en el intervalo, luego, se puede decir que la media poblacional no va a ser de 230.

No se puede afirmar que la media poblacional sea 230 con una probabilidad del 90 %

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x-t & si\ x \le 0 \\ (x-t)^2 - 5(x+t) + 4 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.75 ptos)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.75 ptos)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)

RESPUESTA

a) $f(x) = \begin{cases} x-t & si\ x \le 0 \\ (x-t)^2 - 5(x+t) + 4 & si\ x > 0 \end{cases}$ para que f sea continua en x **= 0,** los límites laterales en x **= 0** han de coincidir y su valor ser igual a $f(0)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-t) = -t$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x-t)^2 - 5(x+t) + 4 = t^2 - 5t + 4$, igualamos, $t^2 - 5t + 4 = -t$

obtenemos $t = 2$

***f* es continua en *x* = 0 cuando *t* = 2**

b) En el intervalo dado, $f(x) = x^2 - 5x + 4$, calculamos $f'(x) = 2x - 5$, $2x - 5 = 0$, $x = \frac{5}{2}$

Como $f''(x) = 2 > 0$ en $x = \frac{5}{2}$ hay un mínimo relativo.

En $x = \frac{5}{2}$ hay un mínimo relativo: $(\frac{5}{2}, \frac{-9}{4})$

c) Los posibles intervalos son (0, 5/2) y (5/2, +∞), tomamos valores que pertenezcan a cada uno de los intervalos y sustituimos en la derivada de la función

$f'(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3 < 0$ luego en (0, 5/2) la función es decreciente

$f'(10) = 2 \cdot 10 - 5 = 15 > 0$ luego en (5/2, ∞) la función es creciente

***f* es decreciente en (0, 5/2) y creciente en (5/2, +∞)**

4. *En un taller para automóviles el número de clientes a los que cambiaron las ruedas de su coche durante 5 días de esta semana se ajusta a la función* $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 75$, $1 \leq x \leq 5$, *siendo* $x = 1$ *el lunes y* $x = 5$ *el viernes.*

a) ¿Qué día acuden menos clientes a cambiar las ruedas de su coche? ¿Cuántos clientes son? (0.75 ptos)

b) ¿Cuál es el día que van más clientes a que les cambien las ruedas y cuántos son esos clientes? (0.75 ptos)

RESPUESTA

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 75$$

a) Calculamos

$\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - 30x + 24}$

Resolvemos

$\boldsymbol{6x^2 - 30x + 24 = 0}$

Obtenemos $x = 1$ y $x = 4$

Calculamos

$\boldsymbol{f''(x) = 12x - 30}$ sustituimos los valores obtenidos

$\boldsymbol{f''(1) = 12 \cdot 1 - 30 = -18 < 0}$ luego en $x = 1$, hay un máximo relativo

$\boldsymbol{f''(4) = 12 \cdot 4 - 30 = 18 > 0}$ luego en $x = 4$ hay un mínimo relativo

$\boldsymbol{f(4) = 2 \cdot 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 + 75 = 59}$

El jueves es el día con menos clientes, 59.

b)

$\boldsymbol{f(1) = 2 \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 + 75 = 86}$

El lunes es el día con más clientes, 86.

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo
www.apuntesmareaverde.org.es

SECCIÓN 3

Bloque 1:

5. *La elección de una película ganadora de un festival de cine negro se realiza mediante una votación pública por internet entre las seleccionadas (A, B y C) para la final. El número de votantes es de 1200 personas. El número de votos de A es el doble de los conseguidos por B y C juntas. B consigue el 50 % de votos más que C.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos votos obtuvo cada película. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

RESPUESTA

Sea x el número de votos para A, y los de B, z los de C.

a)

Escribimos el sistema $\begin{cases} x+y+z=1200 \\ x=2(y+z) \\ y=z+0.5z \end{cases}$

b) Ordenamos el sistema

$\begin{cases} x+y+z=1200 \\ x-2y-2z=0 \\ y-1.5z=0 \end{cases}$ Calculamos E'$_2$ = –E$_1$ + E$_2$ obtenemos

$\begin{cases} x+y+z=1200 \\ -3y-3z=-1200 \\ y-1.5z=0 \end{cases}$ Calculamos E''$_3$ = E'$_2$ + 3 E'$_3$, obtenemos

$\begin{cases} x+y+z=1200 \\ -3y-3z=-1200 \\ -7.5z=-1200 \end{cases}$ Ya podemos resolver

z = 160, y = 240, x = 800

A obtuvo 800 votos, B, 240 votos y C, 160 votos

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo
www.apuntesmareaverde.org.es

6. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

a) Calcula $(A-B)^2$*. (0.75 ptos)*

b) ¿Se podría calcular la matriz inversa de $(A-B)^2$*? (0.25 ptos)*

c) ¿Qué propiedad tienen que cumplir dos matrices A y B cualesquiera para que se cumpla $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$*? (0.5 ptos)*

RESPUESTA

a) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\right]^2 = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 25 \end{vmatrix} = \mathbf{225} \neq \mathbf{0}$ por tanto, sí se puede calcular su inversa

Si tiene inversa

c) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2 = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^2$

Para que $-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ debe ser:

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ es decir, $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ deben **conmutar**.

Bloque 2:

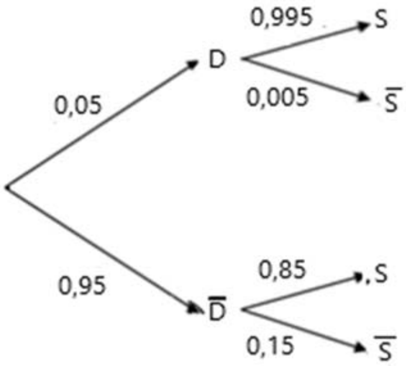
5. *En un municipio el 5 % de los habitantes son deportistas aficionados. El 0.5 % de estos deportistas aficionados no han superado un test respiratorio. Mientras que de los habitantes no deportistas aficionados el 15 % no han superado el mismo test respiratorio.*

a) *Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya superado el test respiratorio? (0.75 ptos)*

b) *Sabiendo que un habitante elegido al azar no ha superado el test respiratorio, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado? (0.75 ptos)*

RESPUESTA

Denotamos por D al suceso ser deportista y por T al suceso superar el test respiratorio.
Hacemos el diagrama de árbol



a) Por el teorema de la probabilidad total

$P(\bar{S}) = P(D\cap\bar{S}) + P(\bar{D}\cap \bar{S})$ = 0.05 · 0.005 + 0.95 · 0.15 = 0.1428

$$\boldsymbol{P(\text{no haber superado el test}) = 0.1428}$$

b) $P(D/\bar{S}) = \frac{P(D\cap\bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(D)\cdot P(\bar{S}/D)}{P(PF)} = \frac{0.05\cdot 0.005}{0.1428} = 0.00175$

$$\boldsymbol{P(\text{ser deportista aficionado si no ha superado el test}) = 0.00175}$$

6. *Se ha tomado una muestra aleatoria de 10 frascos de Berenjenas de Almagro de 1 kilogramo para medir el contenido de fibra en gramos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido de fibra en cada frasco se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para la media poblacional del contenido en fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro. (1 pto)

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de fibra de un frasco de Berenjenas de Almagro es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

donde X es la variable "contenido de fibra de un frasco de 1kg", X sigue una $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{10})$

Nos dan los siguientes datos: $\boldsymbol{\sigma = 10}$ $\quad \mathbf{1 - \alpha = 0.97}$, $\quad n = 10$.

Calculamos la media muestral:

$$\overline{x} = \frac{60+80+120+95+65+70+75+85+100}{10} = 75.$$

$\mathbf{1 - \alpha = 0.97}$, $\boldsymbol{\alpha = 0.03}$, $\frac{\alpha}{2} = \mathbf{0.015}$, $1 - \frac{\alpha}{2} = \mathbf{0.985}$, buscamos en la tabla: $Z_{0.985} = \mathbf{2.17}$.

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(84 - 2.17\frac{10}{\sqrt{10}},\quad 84 + 2.17\frac{10}{\sqrt{10}}\right) = (77.14, 90.86)$$

Intervalo de confianza: (77.14, 90.86)

b) Si se quiere que el intervalo de confianza tenga menor amplitud se debe aumentar el tamaño de la muestra, o disminuir el nivel de confianza $\mathbf{1 - \alpha}$.

Aumentar el tamaño de la muestra.

c) Si el nivel de confianza fuese del 98.5 %, 98.5 % > 97 %, el intervalo de confianza tendría mayor amplitud, como 85 ya se encuentra en el intervalo anterior, al ser mayor el nivel de confianza, la amplitud del intervalo va a ser mayor y por tanto el valor 85 va a estar en el intervalo, luego, se puede decir que la media poblacional va a ser de 85.

Se puede afirmar que la media poblacional será 85 gr con una probabilidad del 98.5 %

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

CASTILLA Y LEÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñóz

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad **Castilla y León**	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	**EXAMEN** **Nº páginas: 2** (tabla adicional)

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER **TRES** PROBLEMAS Y **UNA** CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

Problemas (a elegir tres)

P1. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -3x+2y-5z=2 \\ x+2y-az=-1 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a (**hasta 2 puntos**).

b) Resolver el sistema para $a=-2$ (**hasta 1 punto**).

P2. (Números y álgebra)

Una empresa utiliza 4 horas de trabajo de electrónica y 2 horas de trabajo de montaje por cada televisor LED que fabrica, y 3 horas de trabajo de electrónica y 1 hora de trabajo de montaje por cada televisor QLED. La empresa dispone de un máximo de 2400 horas de trabajo de electrónica y un máximo de 1000 horas de trabajo de montaje. Para satisfacer la demanda, la empresa debe fabricar al menos 200 televisores QLED. El beneficio obtenido en cada televisor LED es de 70 € y en cada televisor QLED es de 50 €.

Utilizar técnicas de programación lineal para determinar el número de televisores de cada tipo que la empresa debe fabricar para que el beneficio sea máximo, así como ese beneficio máximo.

P3. (Análisis)

Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & x\le 3 \\ 3x-2m & x>3 \end{cases}$$

a) Hallar el valor de m para que la función sea continua en todos los números reales.

b) Para $m=-1$, calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo [5, 7].

P4. (Análisis)

La temperatura adecuada para el desarrollo vegetativo en el cultivo de tomates no debe exceder los 23 grados Celsius (ºC) y en ningún caso debe bajar de 7 ºC. La siguiente función expresa la temperatura, en grados Celsius, el día 14 de agosto en una zona de cultivo:

$$T(x) = \frac{-1}{14}x^2 + 2x + 10$$

donde $x \in [0, 24]$ es la hora del día.

a) Determinar a qué hora de ese día se alcanza la temperatura máxima y si ésta supera los 23 ºC.

b) ¿La zona de cultivo tuvo una temperatura inferior a los 7 ºC el 14 de agosto?

P5. (Estadística y probabilidad)

El 30 % de los clientes de un banco especializado en microcréditos son hombres y el 70 % son mujeres. Se sabe que el 20 % de los hombres recibieron un crédito inferior a 6000 € mientras que el 72 % de las mujeres recibieron un crédito igual o superior a dicha cantidad.

a) Elegido uno de los clientes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que éste haya recibido un crédito inferior a 6000 €?

b) Elegido al azar un cliente entre los que recibieron un crédito inferior a 6000 €, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

P6. (Estadística y probabilidad)

Las pruebas realizadas de un nuevo modelo de teléfono móvil aseguran que la ley de probabilidad de la vida útil del teléfono sin averías (en meses) es normal de media 32 meses y desviación típica 12.5 meses. La campaña de lanzamiento del nuevo modelo ofrece la sustitución gratuita del móvil por cualquier avería aparecida en los primeros 4 meses.

a) Calcular la probabilidad de que haya que sustituir un móvil adquirido durante la campaña de lanzamiento.

b) Si una tienda vende 64 teléfonos móviles del nuevo modelo el primer día de campaña, determinar la probabilidad de que el tiempo medio sin averías de esos móviles sea superior a 36 meses.

Cuestiones (a elegir una)

C1. (Números y álgebra)

¿Es posible que una matriz 4×2 coincida con su inversa? ¿Y con su traspuesta?

C2. (Análisis)

Representar gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ 4-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

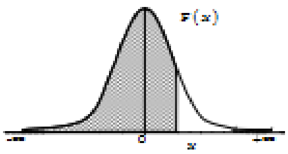
C3. (Estadística y probabilidad)

Se lanza una moneda 3 veces. Calcular la probabilidad de que se obtenga al menos una cruz.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES - Examen - Propuesta nº 3/ 2020 Pág. 2 de 2

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^{2}}\,dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

SOLUCIONES CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2020

Problema P.1:

P1) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -3x+2y-5z=2 \\ x+2y-az=-1 \end{cases}$, en función del parámetro a:

$a)$ Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

$b)$ Resuelve el sistema para $a=-2$.

Solución:

a) Calculamos los rangos de las matrices de los coeficientes y ampliada:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -a & -1 \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -a \end{vmatrix}=-2a-6-10-2+10-6a=0;\ -8a-8=0; a+1=0 \Rightarrow a=-1.$$

Si $a\neq-1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $a=-1$ el rango de la matriz ampliada $M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ es:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-2+4-4-6=-8\neq0$, es 3 distinto del de la matriz de los coeficientes que es 2, luego el sistema es incompatible.

$$\mathit{Para\ a\neq-1\ el\ sistema\ es\ compatible\ y\ determinado.}$$
$$\mathit{Si\ a=-1\ el\ sistema\ es\ incomptible}$$

b) Para $a=-2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ -3x+2y-5z=2 \\ x+2y+2z=-1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

Resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{4+10+2-8}{4-6-10-2+10+12}=\frac{8}{8}=1. \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{8}=\frac{4+3-2-5}{8}=\frac{0}{8}=0.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{8}=\frac{-2+4-4-6}{8}=\frac{-8}{8}=-1.$$

$$\boldsymbol{x=1;\ \ y=0;\ \ z=-1}$$

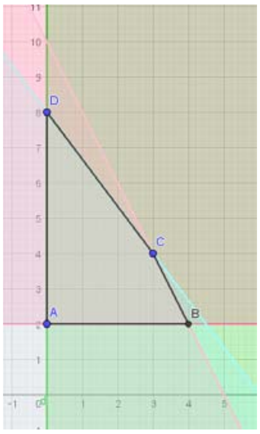
Problema P.2:

Una empresa utiliza 4 horas de trabajo de electrónica y 2 horas de trabajo de montaje por cada televisor LED que fabrica, y 3 horas de trabajo de electrónica y 1 hora de trabajo de montaje por cada televisor QLED. La empresa dispone de un máximo de 2 400 horas de trabajo de electrónica y un máximo de 1 000 horas de trabajo de montaje. Para satisfacer la demanda, la empresa debe fabricar al menos 200 televisores QLED. El beneficio obtenido en cada televisor LED es de 70 euros y en cada televisor QLED es de 50 euros. Utilizar técnicas de programación lineal para determinar el número de televisores de cada tipo que la empresa debe fabricar para que el beneficio sea máximo, así como ese beneficio máximo.

Solución:

Sean x e y el número de televisores de los tipos LED y QLED que fabrica la empresa, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 4x+3y \leq 2.400 \\ 2x+y \leq 1.000 \\ x \geq 0;\ y \geq 200 \end{array}\right\}$.



Buscamos los vértices calculando los puntos de intersección entre cada dos rectas:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=200 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,200);$ $B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 4x+3y=2400 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0,800).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y=2400 \\ 2x+y=1000 \end{array}\right\} \Rightarrow C(300,400);$ $D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=200 \\ 2x+y=1000 \end{array}\right\} \Rightarrow D(400,200).$

La función de objetivos es: $f(x,y) = 70x + 50y$.

Calculamos la función de objetivos en cada uno de los vértices:

$A \Rightarrow f(0,200) = 70 \cdot 0 + 50 \cdot 200 = 0 + 10000 = 10000.$

$B \Rightarrow f(0,800) = 70 \cdot 0 + 50 \cdot 800 = 0 + 40000 = 40000.$

$C \Rightarrow f(300,400) = 70 \cdot 300 + 50 \cdot 400 = 21000 + 20000 = 41000.$

$D \Rightarrow f(400,200) = 70 \cdot 400 + 50 \cdot 20 = 28000 + 10000 = 38000.$

El máximo se produce en el punto $C(300,400)$.

$$Debe\ fabricar\ \mathbf{300}\ televisores\ LED\ y\ \mathbf{400}\ QLED.$$

$$El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ \mathbf{41\ 000}\ euros$$

Problema P.3:

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si\ \ x\le 3 \\ 3x-2m & si\ \ x>3 \end{cases}$:

$a)$ Hallar el valor de m para que la función sea continua en todos los números reales.

$b)$ Para $m=-1$, calcular el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[5,7]$.

Solución:

a) La función dada es una función definida a trozos, formada por dos funciones polinómicas continuas en toda la recta real. El único punto dudoso es el punto de unión de ambos trozos: $x=3$

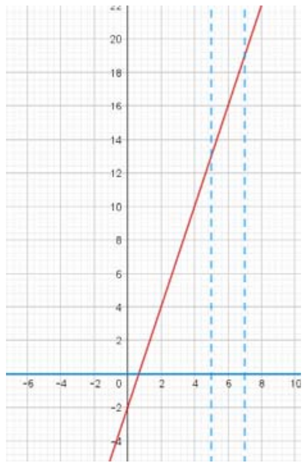
Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\text{Si } x=3 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x^2-3x+2)=2=f(3) \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(3x-2m)=9-2m \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3)\Rightarrow$$

$$2=9-2m;\ \ 2m=7\Rightarrow$$

$$m=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}=3.5$$

b) Para $m=-1$ la función resulta $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & si\ \ x\le 3 \\ 3x+2 & si\ \ x>3 \end{cases}$.



El intervalo $[5,7]$ es todo él mayor que 3, luego la función es $y=3x+2$, y todas las ordenadas son positivas.

$$S=\int_5^7 f(x)\cdot dx=\int_5^7 (3x+2)\cdot dx=\left[\frac{3x^2}{2}+2x\right]_5^7$$
$$=\left(\frac{3\cdot 7^2}{2}+2\cdot 7\right)-\left(\frac{3\cdot 5^2}{2}+2\cdot 5\right)=$$
$$\frac{147}{2}+14-\frac{75}{2}-10=4+\frac{72}{2}=4+36=40.$$

$$\boldsymbol{\acute{A}rea=\ 40\ u^2}$$

Autor: Jorge Muñoz
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema P.4:

La temperatura adecuada para el desarrollo vegetativo en el cultivo de tomates no debe exceder los 23°C y en ningún caso debe bajar de los 7°C. La siguiente función expresa la temperatura, en grados Celsius, el día 14 de agosto en una zona de cultivo: $T(x) = \frac{-1}{14}x^2 + 2x + 10$, donde $x \in [0, 24]$ es la hora del día.

$a)$ Determina a qué hora de ese día se alcanza la temperatura máxima y si ésta supera los 23°C.

$b)$ ¿La zona de cultivo tuvo una temperatura inferior a los 7°C el 14 de agosto?

Solución:

a) Estudiamos la función temperatura: La función $T(x) = \frac{-1}{14}x^2 + 2x + 10$ es una parábola cóncava (∩) por ser negativo el coeficiente de x^2; su vértice (máximo) lo obtenemos derivando e igualando a cero:

$T'(x) = \frac{-1}{7}x + 2.$ $\quad T'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{7}x + 2 = 0;\ -x + 14 = 0 \Rightarrow x = 14.$

$T(14) = \frac{-1}{14} \cdot 14^2 + 2 \cdot 14 + 10 = -14 + 28 + 10 = 24.$

$$La\ temperatura\ máxima\ se\ alcanza\ a\ las\ \mathbf{14}\ horas\ y\ es\ de\ 24\ °C,$$
$$luego\ si\ supera\ los\ 23\ °C$$

b) Calculamos la hora de la temperatura mínima. Como la función es una parábola, alcanzará los valores mínimos en los extremos del intervalo de definición:

$T(24) = \frac{-1}{14} \cdot 24^2 + 2 \cdot 24 + 10 = -\frac{288}{7} + 48 + 10 = 58 - \frac{288}{7} = \frac{406-288}{7} = \frac{118}{7} = 16.86°C.$

$T(0) = 10°C.$

La temperatura mínima fue de 10 $°C$, luego nunca fue inferior a 7 $°C$.

Problema P.5:

El 30 % de los clientes de un banco especializado en microcréditos son hombres y el 70 % son mujeres. Se sabe que el 20 % de los hombres recibieron un crédito inferior a 6 000 euros mientras que el 72 % de las mujeres recibieron un crédito igual o superior a dicha cantidad.

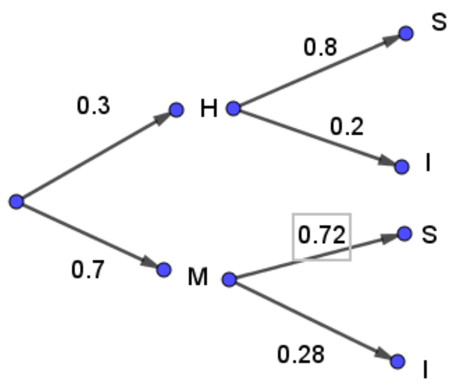
a) Elegido uno de los clientes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que éste haya recibido un crédito inferior a 6 000 euros?

b) Elegido al azar un cliente entre los que recibieron un crédito inferior a 6.000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:

Llamamos H al suceso ser hombre, y M al suceso ser mujer. Llamamos S al suceso haber recibido un crédito superior a 6 000 euros, e I al haberlo recibido inferior.

Hacemos un diagrama en árbol con los datos del ejercicio:



a) El que elegido un cliente al azar haya recibido un crédito inferior a 6 000 euros, debemos recorrer dos ramas del árbol:

$$P = P(I) = P(H \cap I) + P(M \cap I) = P(H) \cdot P(I/H) + P(M) \cdot P(I/M) = 0.3 \cdot 0.2 + 0.7 \cdot 0.28 =$$
$$= 0.06 + 0.196 = 0.256.$$

La probabilidad de que haya recibido un crédito inferior a 6 000 euros es de **0.256**.

b) Ahora tenemos que calcular una probabilidad condicionada:

$$P = P(M|I) = \frac{P(M \cap I)}{P(M)} = \frac{P(M) \cdot (P(I|M)}{P(M)} = \frac{0.7 \cdot 0.28}{0.256} = \frac{0.196}{0.256} = 0.7656.$$

Elegido al azar un cliente entre los que recibieron un crédito inferior a 6 000 euros, la probabilidad de que sea mujer es de **0.7656**.

Problema P.6:

Las pruebas realizadas de un nuevo modelo de teléfono móvil aseguran que la ley de probabilidad de la vida útil del teléfono sin averías (en meses) es normal de media 32 meses y desviación típica 12.5 meses. La campaña de lanzamiento del nuevo modelo ofrece la sustitución gratuita del móvil por cualquier avería aparecida en los 4 primeros meses.

a) Calcular la probabilidad de que haya que sustituir un móvil adquirido durante la campaña de lanzamiento.

b) Si una tienda vende 64 teléfonos móviles del nuevo modelo el primer día de campaña, determinar la probabilidad de que el tiempo medio sin averías de esos móviles sea superior a 36 meses.

Solución:

a) Nos dicen que sigue una distribución normal de media $\mu = 32$ y desviación típica $\sigma = 12.5$.

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(32;\ 12.5)$. Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-32}{12.5}$.

$$P = P(X \le 4) = P\left(Z \le \frac{4-32}{12.5}\right) = P\left(Z \le \frac{-28}{12.5}\right) = P(Z \le -2.24) = 1 - P(Z < 2.24) = 1 - 0.9875 = 0.0125$$

La probabilidad de que haya que sustituir un móvil adquirido durante la campaña de lanzamiento es de **0.0125**.

b) Sigue siendo una distribución normal de media $\mu = 32$ y desviación típica $\sigma = 12.5$. Pero ahora buscamos la distribución de la media con $n = 64$.

$$X \to N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(32;\ \frac{12.5}{\sqrt{64}}\right) = N\left(32;\ \frac{12.5}{8}\right) = N(32;\ 1.5625).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-32}{1.5625}$.

Queremos conocer la probabilidad de que el tiempo medio sin averías sea superior a 36 meses:

$$P = P(X \ge 36) = P\left(Z \ge \frac{36-32}{1.5625}\right) = P\left(Z \ge \frac{4}{1.5625}\right) = P(Z \ge 2.56) = 1 - P(Z < 2.56) =$$

$$1 - 0.9948 = 0.0052.$$

La probabilidad de que el tiempo medio sin averías de esos móviles sea superior a 36 meses es de **0.0052**.

Cuestión C.1:

C1) ¿Es posible que una matriz 4×2 coincida con su inversa? ¿Y con su traspuesta?

Solución:

La matriz de dimensión 4 x 2 no puede tener matriz inversa ya que no es una matriz cuadrada, luego es imposible que coincida con su inversa.

La transpuesta de una matriz de 4 x 2 tiene de dimensión 2 x 4, luego es imposible que coincidan.

Cuestión C.2:

C2) Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & si \;\; x<2 \\ 3 & si \;\; x=2 \\ 4-x & si \;\; x>2 \end{cases}$.

Solución:

Es una función definida a trozos formada por dos tramos de rectas y por un punto (2, 3).

La primera recta tiene de pendiente 1, y de ordenada en el origen 2.

La segunda recta tiene de pendiente -1, y pasa por el punto (4, 0).

Cuestión C.3:

C3) Se lanza una moneda 3 veces. Calcular la probabilidad de que se obtenga al menos una cruz.

Solución:

El suceso obtener al menos una cruz, es el suceso contrario de no obtener ninguna cruz, es decir de obtener tres caras. El espacio muestral está formado por 8 elementos, luego la probabilidad pedida es:

$$\boldsymbol{P = 1 - \frac{1}{7} = \frac{7}{8} = 0.875.}$$

	Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad **Castilla y León**	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	**EXAMEN** **Nº páginas: 2** (tabla adicional)

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER **TRES** PROBLEMAS Y **UNA** CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

Problemas (a elegir tres)

P1. (Números y álgebra)

La asociación "*Stop Stress*" tiene 60 personas asociadas que practican solo una de las siguientes actividades: correr, yoga o natación. Se sabe que hay 18 personas menos en la actividad de correr que la suma de personas que practican yoga y natación. Además, la séptima parte de las personas que corren es igual a la quinta parte de las que practican yoga. Calcular el número de personas que realiza cada una de las actividades.

P2. (Números y álgebra)

Un supermercado tiene almacenados 100 botes de alubias y 150 botes de garbanzos. Para su venta organiza dichos productos en dos lotes, A y B. La venta de un lote A, que contiene 1 bote de alubias y 3 botes de garbanzos, produce un beneficio de 3 €. La venta de un lote B, que contiene 2 botes de alubias y uno de garbanzos, produce un beneficio de 2 €. Además, desea vender al menos 10 lotes tipo A y al menos 15 lotes del tipo B.

Utilizando técnicas de programación lineal, calcular cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar el beneficio. ¿A cuánto asciende ese beneficio máximo?

P3. (Análisis)

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+8 & \text{si } -1<x\le 2 \\ x+m & \text{si } \quad x>2 \end{cases}$

a) Determinar el valor de m para que $f(x)$ sea continua.

b) Calcular el área delimitada por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo [0, 1].

P4. (Análisis)

La cotización en euros de la criptomoneda *Bitcoin* en un determinado día del pasado año siguió la función $f(t)=20t^2-200t+1000$ donde t es el tiempo medido en horas desde el comienzo del día.

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(t)$.

b) ¿Cuánto se paga por la compra de 10 Bitcoins en el momento de mínima cotización de ese día?

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES - Examen - Propuesta nº 1/ 2020 Pág. 1 de 2

P5. (Estadística y probabilidad)

Para ir a clase, un estudiante utiliza su coche el 70 % de los días, mientras que va en autobús el resto de los días. Cuando utiliza su coche, llega tarde el 20 % de los días, mientras que si va en autobús llega a tiempo el 10 % de los días. Elegido un día al azar:

a) Calcular la probabilidad de que el estudiante llegue tarde.

b) Si ha llegado a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que haya venido en autobús?

P6. (Estadística y probabilidad)

El tiempo que tarda el servidor de una empresa de venta *online* en registrar un pedido sigue una ley de probabilidad normal de media 0.16 minutos y desviación típica 0.37 minutos. Al comienzo de un *viernes negro* la empresa recibe 365 pedidos.

a) Calcular la probabilidad de que el servidor tarde más de 73 minutos en registrar los 365 pedidos.

b) Calcular la probabilidad de que el tiempo medio de registro de esos 365 pedidos sea menor o igual que 0.18 minutos.

Cuestiones (a elegir una)

C1. (Números y álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$, calcular $AB+C$.

C2. (Análisis)

Calcula el valor de a para que la función $f(x)=ax^2-5ax+4$ corte al eje OX en el punto de abscisa $x=4$.

C3. (Estadística y probabilidad)

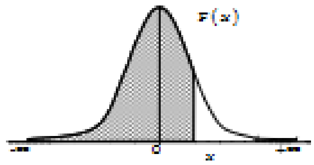
La ficha técnica de un sondeo electoral indica que ha encuestado a 1207 individuos de 18 o más años residentes en España. La muestra se ha tomado de manera estratificada por grupos de edad y sexo, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos que acudirá a votar en las próximas elecciones es de ±2.8 % con un nivel de confianza del 95.5 %.

Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: población, diseño muestral, tamaño muestral y parámetro estimado.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES - Examen - Propuesta nº 1/ 2020 Pág. 2 de 2

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

SOLUCIONES CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2020

Problema P.1:

La asociación "Stop Stress" tiene 60 personas asociadas que practican solo una de las siguientes actividades: correr, yoga o natación. Se sabe que hay 18 personas menos en la actividad de correr que la suma de personas que practican yoga y natación. Además, la séptima parte de las personas que corren es igual a la quinta parte de las que practican yoga. Calcular el número de personas que realiza cada una de las actividades.

Solución:

Llamamos x, y, z a las personas que practican las actividades de correr, yoga o natación, respectivamente.

Del enunciado del ejercicio se deduce el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ x+18=y+z \\ \frac{x}{7}=\frac{y}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ x-y-z=-18 \\ 5x-7y=0 \end{array}\right\}.$$

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -7 & 0 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

El sistema es compatible determinado

Lo resolvemos utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 60 & 1 & 1 \\ -18 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -7 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{126-420}{-7-5+5-7} = \frac{-294}{-14} = \frac{42}{2} = 21.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 60 & 1 \\ 1 & -18 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-300+90}{-14} = \frac{-210}{-14} = \frac{30}{2} = 15.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 60 \\ 1 & -1 & -18 \\ 5 & -7 & 0 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-420-90+300-126}{-14} = \frac{300-636}{-14} = \frac{-336}{-14} = \frac{48}{2} = 24.$$

$$Corren\ \mathbf{21}\ personas, hacen\ yoga\ \mathbf{15}\ y\ practican\ natación\ \mathbf{24}.$$

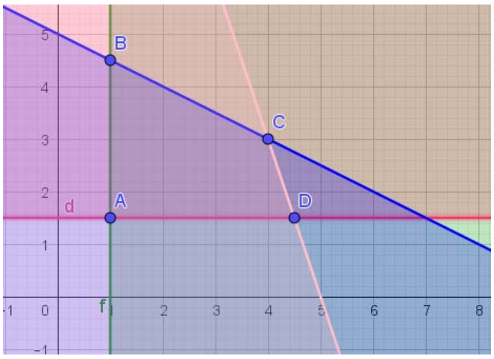
Problema P.2:

Un supermercado tiene almacenados 100 botes de alubias y 150 botes de garbanzos. Para su venta organiza dichos productos en dos lotes, A y B. La venta de un lote A, que contiene 1 bote de alubias y 3 botes de garbanzos, produce un beneficio de 3 euros. La venta de un lote B, que contiene 2 botes de alubias y uno de garbanzos, produce un beneficio de 2 euros. Además, desea vender al menos 10 lotes de tipo A y al menos 15 lotes del tipo B. Utilizando técnicas de programación lineal, calcular cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar el beneficio. ¿A cuánto asciende este beneficio máximo?

Solución:

Llamamos x e y el número de lotes de los tipos A y B que vende el supermercado, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} x+2y\leq 100 \\ 3x+y\leq 150 \\ x\geq 10;\ \ y\geq 15 \end{array}\right\}.$



Calculamos los vértices de la región factible:

$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=10 \\ y=15 \end{array}\right\}\Rightarrow A(10,15).$ $B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=10 \\ x+2y=100 \end{array}\right\}\Rightarrow y=45\Rightarrow B(10,45).$

$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=100 \\ 3x+y=150 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-2y=-100 \\ 6x+2y=300 \end{array}\right\}\Rightarrow C(40,30).$

$D\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=15 \\ 3x+y=150 \end{array}\right\} 3x+15=150;\ \Rightarrow\ D(45,15).$

La función de objetivos es $f(x)=3x+2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A\Rightarrow f(10,15)=3\cdot 10+2\cdot 15=30+30=60.$

$B\Rightarrow f(10,45)=3\cdot 10+2\cdot 45=30+90=120.$

$C\Rightarrow f(40,30)=3\cdot 40+2\cdot 30=120+60=180.$

$D\Rightarrow f(45,15)=3\cdot 45+2\cdot 15=135+30=165.$

El máximo se produce en el punto $C(40,30)$.

$$\textit{Se obtiene el beneficio máximo vendiendo } \mathbf{40} \textit{ lotes } A \textit{ y } \mathbf{30} \textit{ lotes } B.$$

$$\textit{Este beneficio es de } \mathbf{180} \textit{ euros}.$$

Autor: Jorge Muñoz
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema P.3:

Se considera la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+8 & si\ -1<x\le 2\\ x+m & si\ \ x>2\end{cases}$:

$a)$ Determinar el valor de m para que $f(x)$ sea continua.

$b)$ Calcular el área definida por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0,1]$.

Solución:

a) La función es una función definida a trozos formada por dos funciones polinómicas, una parábola y una recta, ambas continuas en toda la recta real. Por tanto el único punto dudoso es el de unión de ambas ramas.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

Si $x=2\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(-x^2+8)=4=f(2)\\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+m)=2+m\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)\Rightarrow 4=2+m\Rightarrow.$

$$\boldsymbol{m=2}$$

b) En el intervalo $[0,1]$ la función es la parábola $f(x)=-x^2+8$. Todas sus ordenadas son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$Área=\int_0^1 f(x)\cdot dx=\int_0^1(-x^2+8)\cdot dx=\left[-\frac{x^3}{3}+8x\right]_0^1=\left(-\frac{1^3}{3}+8\cdot 1\right)-0=\frac{23}{3}\ u^2$$

$$Área=\frac{\mathbf{23}}{\mathbf{3}}\ u^2=\mathbf{7.67}\ u^2$$

Autor: Jorge Muñoz
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema P.4:

La cotización en euros de la criptomoneda Bitcoin en un determinado día del pasado año siguió la función $f(t) = 20t^2 - 200t + 1000$, donde t es el tiempo medido en horas desde el comienzo del día.

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(t)$.

b) ¿Cuánto se paga por la compra de 10 Bitcoins en el momento de mínima cotización de ese día?

Solución:

a) Estudiamos el crecimiento o decrecimiento utilizando el signo de la derivada primera

$f'(t) = 40t - 200. \qquad f'(t) = 0 \Rightarrow 40t - 200 = 0;\ t - 5 = 0 \Rightarrow t = 5.$

Que es la abscisa del vértice de la parábola, que es un mínimo. Por tanto, la función es creciente si $t\epsilon(5, 24)$ y decreciente si $t\epsilon(0, 5)$.

$$Creciente\ si\ t\epsilon(5, 24);\ decreciente\ si\ t\epsilon(0, 5)$$

b) Buscamos el momento de mínima cotización. Es el vértice encontrado de la parábola. Pero vamos a comprobarlo usando la derivada primera y comprobando que se anula, y la derivada segunda y viendo que es positiva:

$$f'(t) = 40t - 200. \quad f'(t) = 0 \Rightarrow 40t - 200 = 0;\ t - 5 = 0 \Rightarrow t = 5.$$

$$f''(t) = 40 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } t = 5.$$

$f(5) = 20 \cdot 5^2 - 200 \cdot 5 + 1000 = 20 \cdot 25 - 1000 + 1000 = 500.$

En el momento de mínima cotización se pagan por 10 Bitcoins, **5 000** euros.

Problema P.5:

Para ir a clase, un estudiante utiliza su coche el 70 % de los días, mientras que va en autobús el resto de los días. Cuando utiliza su coche, llega tarde el 20 % de los días, mientras que si va en autobús llega a tiempo el 10 % de los días. Elegido un día al azar:

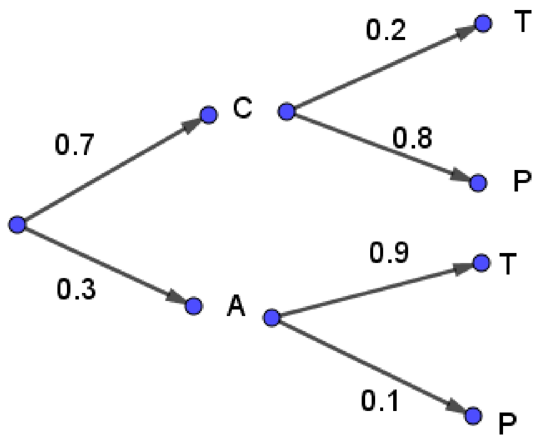
$a)$ Calcular la probabilidad de que éste el estudiante llegue tarde.

$b)$ Si ha llegado a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que haya venido en autobús?

Solución:

a) Llamamos C al suceso utilizar el coche, A al suceso utilizar el autobús, T al suceso llegar tarde y P al suceso llegar puntual.

Llevamos los datos del problema a un diagrama de árbol



$$P = P(T) = P(C \cap T) + P(A \cap T) = P(C) \cdot P\left(\frac{T}{C}\right) + P(A) \cdot P\left(\frac{T}{A}\right) = 0.7 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.9$$

$$= 0.14 + 0.27 = 0.41.$$

La probabilidad de que llegue tarde es de **0.41**.

b) Ahora nos piden la probabilidad condicionada: $P(A/P)$

$$P(A/P) = \frac{P(A \cap P)}{P(P)} = \frac{P(A) \cdot P(T/A)}{1 - P(T)} = \frac{0.3 \cdot 0.1}{1 - 0.41} = \frac{0.3}{0.59} = 0.5085.$$

Si ha llegado a tiempo, la probabilidad de que haya venido en autobús es de **0.5085**.

Problema P.6:

El tiempo que tarde el servidor de una empresa de venta online en registrar un pedido sigue una ley de probabilidad normal de media 0.16 minutos y desviación típica 0.37 minutos. Al comienzo de un viernes negro la empresa recibe 365 pedidos.

$a)$ Calcular la probabilidad de que el servidor tarde más de 73 minutos en registrar los 365 pedidos.

$b)$ Calcular la probabilidad de que el tiempo medio de registro de esos 365 pedidos sea menor o igual que 0.18 minutos.

Solución:

a) El tiempo en registrar un pedido sigue una media de 0.16, y una desviación típica de 0.37. Ahora estudiamos el tiempo que tarde en registrar 365 pedidos.

Entonces, ahora $\mu = 0.16 \cdot 365 = 58.4$, y $\sigma = \sqrt{365 \cdot 0.37^2} = 0.37 \cdot \sqrt{365} = 0.37 \cdot 19.105 = 707.$

El tiempo de la espera sigue

$X \to N(\mu, \sigma) = N(58.4;\ 7.07).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-58.4}{7.07}.$

$$P = P(X > 73) = P\left(Z > \frac{73 - 58.4}{7.07}\right) = P\left(Z > \frac{14.6}{7.07}\right) = P(Z > 2.06) = 1 - P(Z \leq 2.06) = 1 - 0.9803 = 0.0197.$$

La probabilidad de que el servidor tarde más de 73 minutos en registrar los 365 pedidos es de **0.0197**.

b) Ahora buscamos el tiempo medio: Sabemos que $\mu = 0.16;\ \ \sigma = 0.37;\ \ n = 365.$

$X \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(0.16;\ \frac{0.37}{\sqrt{365}}\right) = N(0.16;\ 0.0194).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-0.16}{0.0194}.$

$$P = P(X \leq 0.18) = P\left(Z \leq \frac{0.18.- 0.16}{0.0194}\right) = P\left(Z \leq \frac{0.02}{0.0194}\right) = P(Z \leq 1.03) = 0.8485.$$

La probabilidad de que el tiempo medio de registro de esos 365 pedidos sea menor o igual que 0.18 minutos es de **0.8485**.

Cuestión C.1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcular $A \cdot B + C$.

Solución:

$$A \cdot B + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B + C = \begin{pmatrix} \mathbf{15} \\ \mathbf{16} \end{pmatrix}$$

Cuestión C.2:

Calcula el valor de a para que la función $f(x) = ax^2 - 5ax + 4$ corte al eje OX en el punto de abscisa $x = 4$.

Solución:

Para que la función corte al eje de abscisas en $x = 4$, debe ser $f(4) = 0$.

$f(4) = 0 \Rightarrow a \cdot 4^2 - 5a \cdot 4 + 4 = 0; \rightarrow\ 4a - 5a + 1 = 0;\ -a + 1 = 0 \rightarrow a = 1.$

$$\boldsymbol{a = 1}$$

Cuestión C.3:

La ficha técnica de un sondeo electoral indica que ha encuestado a 1 207 individuos de 18 o más años residentes en España. La muestra se ha tomado de manera estratificada por grupos de edad y sexo, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos que acudirá a votar en las próximas elecciones es de $\pm$2.8 % con un nivel de confianza del 95.5 %. Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: población, diseño muestral, tamaño muestral y parámetro estimado.

Solución:

Residentes: en España de 18 años o más.

Diseño muestral: de manera **estratificada** por grupos de edad y sexo, con muestreo aleatorio simple en cada estrato.

Tamaño muestral: 1 207 individuos

Parámetro estimado: El error de estimación de la proporción de individuos que acudirá a votar en las próximas elecciones con un nivel de confianza del 95.5 %.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2020
Comunidad autónoma de
CATALUNYA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JAIME CARRASCOSA OROZCO

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 1

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Un venedor d'una llibreria de vell cobra, a més a més d'un sou fix, diferents comissions depenent del tipus de llibre que ven. Cobra 1 € per cada còmic, 1,5 € per cada revista i 2 € per cada novel·la.

Ahir, va vendre el doble de revistes que de novel·les i 5 còmics menys que revistes, i va aconseguir en total una comissió de 30 €.

Quantes publicacions va vendre de cada tipus?

[2,5 punts]

x = nº de còmics venuts

y = nº de revistes venudes

z = nº de novel·les venudes.

- Va vendre el doble de revistes que de novel·les $\longrightarrow y = 2z \rightarrow y - 2z = 0$
- 5 comics menys que revistes $\rightarrow x + 5 = y \rightarrow x - y = -5$
- Comissió de 30 € $\longrightarrow 1 \cdot x + 1'5 \cdot y + 2 \cdot z = 30 \rightarrow 2x + 3y + 4z = 60$

El sistema queda: $\begin{cases} x - y = -5 \\ y - 2z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 60 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 60 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & -70 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ 2F_1 - F_3 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -70 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ 5F_2 + F_3 \end{array} \rightarrow -14z = -70 \rightarrow \boxed{z = 5}$

- substituint a la 2a fila: $y - 2 \cdot 5 = 0 \rightarrow \boxed{y = 10}$
- substituint a la 1a fila: $x - 10 = -5 \rightarrow \boxed{x = 5}$

Solució: Va vendre 5 còmics, 10 revistes i 5 novel·les.

2. L'1 de gener de 2019 va sortir al mercat un nou model d'un producte tècnic d'esquí. La funció de tercer grau $f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1.470x$ ens dona el nombre total d'unitats venudes, en què x denota el nombre de mesos transcorreguts, des del llançament del producte, durant el primer any (és a dir, $x \in [0, 12]$).

a) Quantes unitats s'havien venut al cap de 3 mesos? Quantes se'n van vendre al cap d'un any? Determineu la taxa de variació mitjana entre els mesos 3 i 12.
[1,25 punts]

- Al cap de 3 mesos: $f(3) = 10 \cdot 3^3 - 210 \cdot 3^2 + 1470 \cdot 3 = 270 - 1890 + 4.410 = \boxed{2.790 \text{ unitats.}}$

- Al cap d'un any: $f(12) = 10 \cdot 12^3 - 210 \cdot 12^2 + 1470 \cdot 12 = 17.280 - 30.240 + 17.640 = \boxed{4.680 \text{ unitats}}$

- Taxa de variació mitjana: $\dfrac{f(12) - f(3)}{12-3} = \dfrac{4680 - 2790}{9} = \dfrac{1.890}{9} = \boxed{210.}$

b) Comproveu que la funció és creixent en l'interval [0, 12] i trobeu en quin instant el creixement ha estat més lent.
[1,25 punts]

- Per comprovar que és creixent, ho farem estudiant el signe de la derivada:

$$f'(x) = 30x^2 - 420x + 1470 = 30(x^2 - 14x + 49) \underset{\text{Id. notables}}{=}$$

$$= 30(x-7)^2$$

$f'(x) \geq 0$ ja que $(x-7)^2 \geq 0$ per estar elevat al quadrat i al multiplicar per 30 no canvia el signe.

Si fem $f'(x) = 0 \rightarrow 30\cdot(x-7)^2 = 0 \rightarrow (x-7)^2 = 0 \rightarrow x - 7 = 0$
$\rightarrow x = 7$

x	0		7		12
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

$\rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ és creixent en } [0,7) \cup (7,12] \\ f(x) \text{ té un punt d'inflexió en } x = 7 \end{array}}$

$\left([0,7) \cup (7,12] = [0,12] \text{ qpp} \right)$

- El creixement ha estat més lent $\boxed{\text{al transcórrer 7 mesos.}}$
(en el punt d'inflexió la funció ni creix ni decreix)
El valor de la derivada és el que ens indica la velocitat amb la que la funció creix (o decreix) i $f'(7) = 0 \rightarrow$ en $x = 7$ el creixement és zero.

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	*a*	
	b	
	Total	

3. El cost d'elaboració d'un menú en un restaurant és de 8 €. S'ha realitzat un estudi de mercat i s'ha arribat a la conclusió que si el preu del menú és de 18 € entren a dinar al restaurant 120 clients. També s'ha conclòs que la relació entre el preu del menú i el nombre de clients és lineal, de manera que, per cada euro que augmentem el preu del menú, disminueix en 4 el nombre de clients. I a l'inrevés, per cada euro que disminuïm el preu, augmenta en 4 el nombre de clients.

a) Obteniu la funció que expressa el benefici del restaurant en funció del nombre d'euros en què augmentem o disminuïm el preu inicial del menú.
[1,25 punts]

Benefici = (Benefici de cada menú)·(nº de menús venuts)

$$B(x) = [(18+x)-8]\cdot(120-4x)$$

$$B(x) = (x+10)(x-30)\cdot(-4) = -4(x^2-20x-300)$$

$$\boxed{B(x) = -4(x^2-20x-300)}$$

b) Trobeu en quants euros cal augmentar o disminuir el preu inicial del menú per tal que el restaurant obtingui el màxim benefici. Quin seria el preu final del menú i quin seria el benefici obtingut amb aquest preu?
[1,25 punts]

- Ens estan demanant el màxim de la funció $B(x)$:

1r| Derivem $B(x) \longrightarrow B'(x) = -4(2x-20) = -8(x-10)$

2n| Igualem la derivada a zero per trobar els punts singulars de $B(x)$:

$-8(x-10) = 0 \longrightarrow x = 10.$

3r| Fem la 2a derivada per veure quin tipus de punt singular tenim quan $x = 10$:

$B''(x) = -8 \longrightarrow B''(10) = -8 < 0 \longrightarrow$ quan $x = 10$

$B(x)$ té un màxim.

$\boxed{\text{Hem d'augmentar el preu } 10\ €}$

- Preu final del menú: $18 + 10 = \boxed{28\ €}$

- Benefici: $B(10) = -4\cdot(10^2 - 20\cdot 10 - 300) =$

$= -4\cdot(100 - 200 - 300) = -4\cdot(-400) = \boxed{1.600\ €}$

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	*a*	
	b	
	Total	

4. Un fabricant de mobles de jardí fabrica cadires i taules de fusta d'exterior. Cada cadira li aporta un benefici de 20 € i cada taula un de 25 €. Sabem que cada mes pot produir com a màxim un total de 120 mobles entre els dos productes. També sabem que, com a màxim, pot fabricar 100 cadires i que ha de fabricar un mínim de 10 taules. D'altra banda, el nombre de cadires fabricades ha de ser igual o superior al triple de taules fabricades.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible.
[1,25 punts]

x = Cadires fabricades.
y = taules fabricades

Funció objectiu: $B(x,y) = 20x + 25y$

Restriccions:

Màxim 120 mobles $\rightarrow x + y \leq 120$

Màxim 100 cadires $\rightarrow x \leq 100$

Mínim 10 taules $\rightarrow y \geq 10$

Cadires igual o superior al triple de taules $\rightarrow x \geq 3y$

(No cal afegir les restriccions $x \geq 0$ i $y \geq 0$ ja que tenim $y \geq 10$ i $x \geq 3y$)

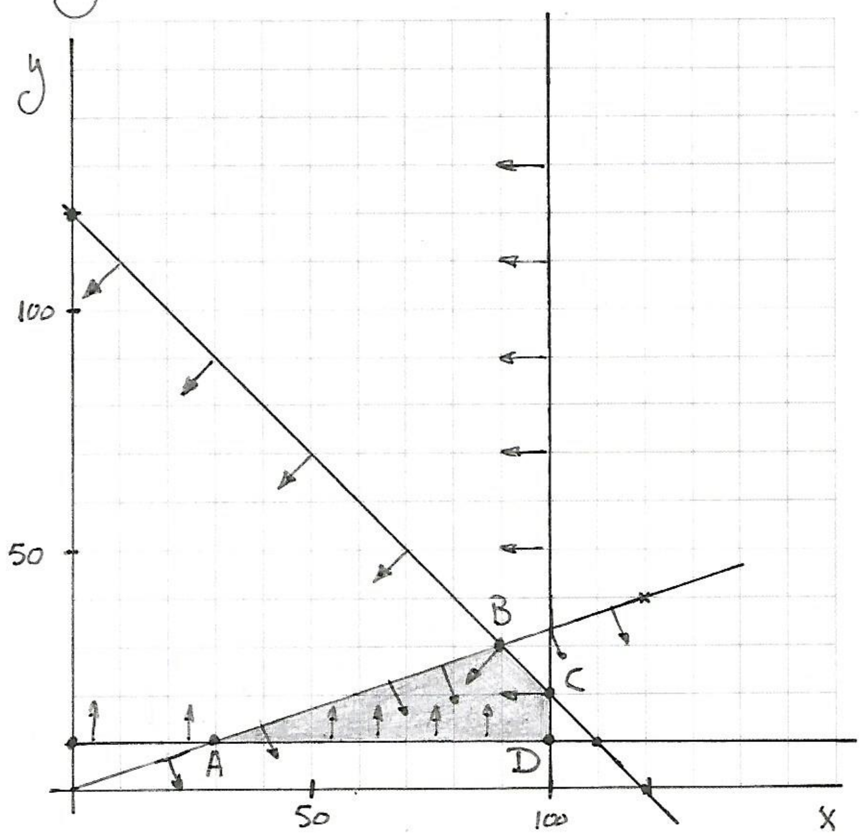
$$\Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 120 \\ x \leq 100 \\ y \geq 10 \\ x - 3y \geq 0 \end{cases}$$

$x + y \leq 120 \rightarrow x + y = 120 \rightarrow$

x	y
0	120
120	0

$x - 3y \geq 0 \rightarrow x - 3y = 0 \rightarrow$

x	y
0	0
120	40



b) Quina és la producció mensual que li aporta el màxim benefici un cop venuda? Quin és aquest benefici?
[1,25 punts]

Sabem que el màxim i el mínim d'una funció contínua a una regió tancada, s'assoleixen als vèrtex de la regió.

1r| Calculem els vèrtex:

A: $\begin{cases} x-3y=0 \\ y=10 \end{cases} \rightarrow x-30=0 \rightarrow x=30$ $\quad \underline{A=(30,10)}$

B: $\begin{cases} x+y=120 \\ x-3y=0 \end{cases}$ $\quad$ $-\begin{array}{r} x+y=120 \\ x-3y=0 \\ \hline 4y=120 \end{array} \rightarrow y=30$ $\quad x+30=120 \rightarrow x=90$ $\quad \underline{B=(90,30)}$

C: $\begin{cases} x+y=120 \\ x=100 \end{cases} \rightarrow 100+y=120 \rightarrow y=20$ $\quad \underline{C=(100,20)}$

D: $\begin{cases} x=100 \\ y=10 \end{cases} \rightarrow \underline{D=(100,10)}$

2n| trobem el valor de la funció objectiu als vèrtex:

$B(A) = 20\cdot 30 + 25\cdot 10 = 850$ €

$B(B) = 20\cdot 90 + 25\cdot 30 = \boxed{2.550 \text{ €}}$ valor màxim

$B(C) = 20\cdot 100 + 25\cdot 20 = 2.500$ €

$B(D) = 20\cdot 100 + 25\cdot 10 = 2.250$ €

Solució: Assoleix el benefici màxim si fabrica 90 cadires i 30 taules. Aquest benefici és de 2.550 €

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	*a*	
	b	
	Total	

5. Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que es compleix que $A^{-1} = A^2$.
[1,25 punts]

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podem comprovar que $A^{-1} = A^2$ de dues formes:

1a) Comprovant que $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = Id.$

$\bullet\ A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

$\bullet\ A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

$\rightarrow A^2 = A^{-1}$ ✓.

2a) Calculant A^{-1} i veient que coincideix amb A^2

$\bullet\ |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1$

$\bullet\ A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\bullet\ Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$

$\bullet\ \dfrac{Adj(A^t)}{|A|} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1} \quad (= A^2)$ ✓.

***b*)** Resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2.
[1,25 punts]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad AX + B = I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad AX = I - B$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad AX = I - B$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{Id.}} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{Id} X = A^{-1}(I - B)$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \qquad X = A^{-1} \cdot (I - B)$$

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	*a*	
	b	
	Total	

6. El benefici d'una empresa, expressat en milions d'euros, és donat per la funció següent, en què x indica el nombre d'anys que han passat des del moment que va començar a funcionar:

$$B(x)=\frac{5x+20}{x^2+9}-\frac{20}{9}.$$

a) Quin és el benefici en el moment en què l'empresa comença a funcionar? En quin moment l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues?
[1,25 punts]

- Quan va començar a funcionar $x=0$

$$B(0)=\frac{5\cdot 0+20}{0^2+9}-\frac{20}{9}=\frac{20}{9}-\frac{20}{9}=0 \text{ milions d'euros}$$

- Estudiem el signe de la funció.

$$B(x)=\frac{5x+20}{x^2+9}-\frac{20}{9}=\frac{45x+180-20x^2-180}{9(x^2+9)}=$$

$$=\frac{5x(9-4x)}{9(x^2+9)}$$ el signe de $B(x)$ només depèn de

$5x(9-4x)$ ja que $9(x^2+9)>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$.

$$5x(9-4x)=0 \begin{cases} 5x=0 \longrightarrow x=0 \\ 9-4x=0 \longrightarrow x=\frac{9}{4} = 2 \text{ anys i } 3 \text{ mesos.} \end{cases}$$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad \frac{9}{4} \ \ldots$

$+ \qquad -$

- $x=1 \rightarrow 5\cdot 1(9-4\cdot 1)=25>0$
- $x=3 \rightarrow 5\cdot 3(9-4\cdot 3)=-45<0$

$\boxed{\text{L'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues al cap de 2 anys i 3 mesos.}}$

b) En quin moment aconsegueix l'empresa el benefici màxim? Quin és aquest benefici màxim?
[1,25 punts]

Ens demanen que trobem el màxim de la funció $B(x)$

1r| Derivem $B(x)$:

$$B'(x) = \frac{5(x^2+9)-(5x+20)\cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \frac{5x^2+45-10x^2-40x}{(x^2+9)^2}$$

$$= \frac{-5x^2-40x+45}{(x^2+9)^2} = -5\cdot\frac{x^2+8x-9}{(x^2+9)^2}$$

2n| Igualem la derivada a zero per trobar els punts singulars de $B(x)$:

$$-5\cdot\frac{x^2+8x-9}{(x^2+9)^2} = 0 \longrightarrow x^2+8x-9=0 \longrightarrow (x+9)(x-1)=0 \begin{cases} x=-9 \\ x=1 \end{cases}$$

Com que el domini de $B(x)$ és $[0,+\infty)$ no hem de tenir en compte $x=-9$.

3r| Comprovem que $x=1$ és el màxim que busquem, fent servir el criteri del signe de la la derivada:

x	0		1		...
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$\nearrow$	màx	$\searrow$	

Com que $(x^2+9)^2>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ el signe de $B'(x)$ només depèn de $-5(x^2+8x-9)$

- $x=\frac{1}{2} \rightarrow -5\left(\frac{1}{4}+4-9\right)=\frac{95}{4}>0$
- $x=2 \longrightarrow -5(4+16-9)=-105<0$

$B(x)$ té un màxim quan $x=1$

4t| Calculem el valor del màxim:

$$B(1) = \frac{5\cdot 1+20}{1^2+9} - \frac{20}{9} = \frac{5}{18}$$

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	a	
	b	
	Total	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

$\boxed{\text{Solució: L'empresa aconsegueix el benefici màxim al cap d'un any. Aquest benefici és de } \frac{5}{18} \text{ milions d'euros.}}$

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 3

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. La taula següent reflecteix el preu unitari, expressat en euros, de tres productes P_1, P_2 i P_3, subministrats a un restaurant per dues empreses diferents E_1 i E_2:

	E_1	E_2
P_1	6	5
P_2	5	8
P_3	9	7

El restaurant haurà de fer dues comandes: una aquesta setmana i una altra la setmana que ve. Aquesta setmana necessita 8 unitats del producte P_1, 5 unitats del producte P_2 i 12 unitats del producte P_3; mentre que per a la setmana vinent necessitarà 10 unitats del producte P_1, 15 unitats del producte P_2 i 7 unitats del producte P_3.

a) Escriviu en forma matricial la informació que relaciona el preu unitari dels productes i les empreses subministradores, i també la informació de les quantitats de productes demanats en cada una de les dues comandes que ha de fer el restaurant.
[1,25 punts]

- La matriu que relaciona el preu unitari dels productes i les empreses és:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

- Les matrius files de les dues comandes són:

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 12 \end{pmatrix} \quad i \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Calculeu a quina de les dues empreses ha d'encarregar el restaurant cada una de les comandes perquè li surti més econòmica i a quin preu li sortirà cadascuna.
[1,25 punts]

Per calcular el preu de les comandes a cada empresa calculem:

$$\bullet B \cdot A = (8 \ 5 \ 12)\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (181 \ 164)$$

$$\boxed{\text{Per tant la 1a comanda surt més econòmica a la } E_2 \text{ i costarà } 164\text{ €}}$$

$$\bullet C \cdot A = (10 \ 15 \ 7)\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (198 \ 219)$$

$$\boxed{\text{Per tant la 2a comanda surt més econòmica a la } E_1 \text{ i costarà } 198\text{ €}}$$

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	*a*	
	b	
	Total	

2. Una empresa vol fabricar un producte nou. Encomana un estudi de mercat que determina que l'evolució de les vendes al llarg dels propers sis anys seguirà la funció $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, en què $f(t)$ representa la quantitat de milers d'unitats venudes en funció del temps $t \in [0, 6]$ expressat en anys.

a) Quantes unitats vendrà el primer any? Tret de l'instant inicial ($t = 0$), es preveu que hi haurà algun altre any en què no es produirà cap venda?

[1,25 punts]

- El 1r any $t=1$: $f(1) = 1 - 12 + 36 = 25$
- Per saber si algun any no es produirà cap venda resolem l'equació $f(t) = 0 \rightarrow t^3 - 12t^2 + 36t = 0$

$$\rightarrow t(t^2 - 12t + 36) = 0 \rightarrow t(t-6)^2 = 0 \begin{cases} t=0 \\ (t-6)^2 = 0 \rightarrow t=6 \end{cases}$$

Solució: Al cap d'un any es vendran 25.000 unitats.
El 6è any no es produiran vendes.

b) En quin any es produirà el màxim nombre de vendes i quants productes s'hauran venut aquell any?
[1,25 punts]

Volem trobar el màxim de la funció $f(x)$.

1r| Calculem $f'(x)$:

$$f'(x) = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t^2 - 8t + 12)$$

2n| Resolem l'equació $f'(x) = 0$ per trobar els punts singulars de $f(x)$.

$$3(t^2 - 8t + 12) = 0 \rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \rightarrow (x-6)(x-2) = 0$$

$$\nearrow x - 6 = 0 \rightarrow x = 6$$
$$\searrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

3r| Per saber si a $x=6$ i a $x=2$ tenim màxims, mínims o punts d'inflexió, fem servir el criteri de la 2a derivada:

- $f''(x) = 3\cdot(2t-8) = 6(t-4)$
- $f''(2) = 6\cdot(2-4) = -12 < 0 \rightarrow f(x)$ té un màxim quan $x = 2$
- $f''(6) = 6\cdot(6-4) = 12 > 0 \rightarrow f(x)$ té un mínim quan $x = 6$

4t| Calculem $f(2) = 8 - 48 + 72 = 32$

Solució: El màxim de vendes es produeix el segon any; el nombre de productes venuts és de 32.000 unitats

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	*a*	
	b	
	Total	

3. Una fàbrica especialitzada en roba d'esport té problemes amb el subministrament de les fibres. Per a satisfer una comanda de samarretes i malles només disposa de 90 km de fibra de polipropilè, 3,2 km de fibra de poliamida i 6,8 km de fibra d'elastà. Ha de fabricar, com a mínim, 80 samarretes i 50 malles.

Per a fabricar cada peça de roba, tant si és una samarreta com si són unes malles, calen en total 200 metres de fibra, dels quals el 90 % són de polipropilè en ambdós casos. En la composició de les samarretes hi ha, a més a més, un 6 % de poliamida i un 4 % d'elastà, i en la composició de les malles hi ha un 2 % de poliamida i un 8 % d'elastà.

El benefici que el fabricant obté per cada samarreta que fabrica és de 5 € i per cadascuna de les malles obté un benefici de 3 €.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió de les possibles opcions que té el fabricant per a satisfer la comanda amb les fibres disponibles.
[1,25 punts]

x = nº Samarretes

y = nº Malles

Funció objectiu: $B(x,y) = 5x+3y$

• 90% de 200 = 180, 6% de 200 = 12, 4% de 200 = 8, 2% de 200 = 4

8% de 200 = 16.

	Polipropilè	Poliamida	Elastà
x	180	12	8
y	180	4	16
	≤ 90.000 m	≤ 3.200 m	≤ 6800 m

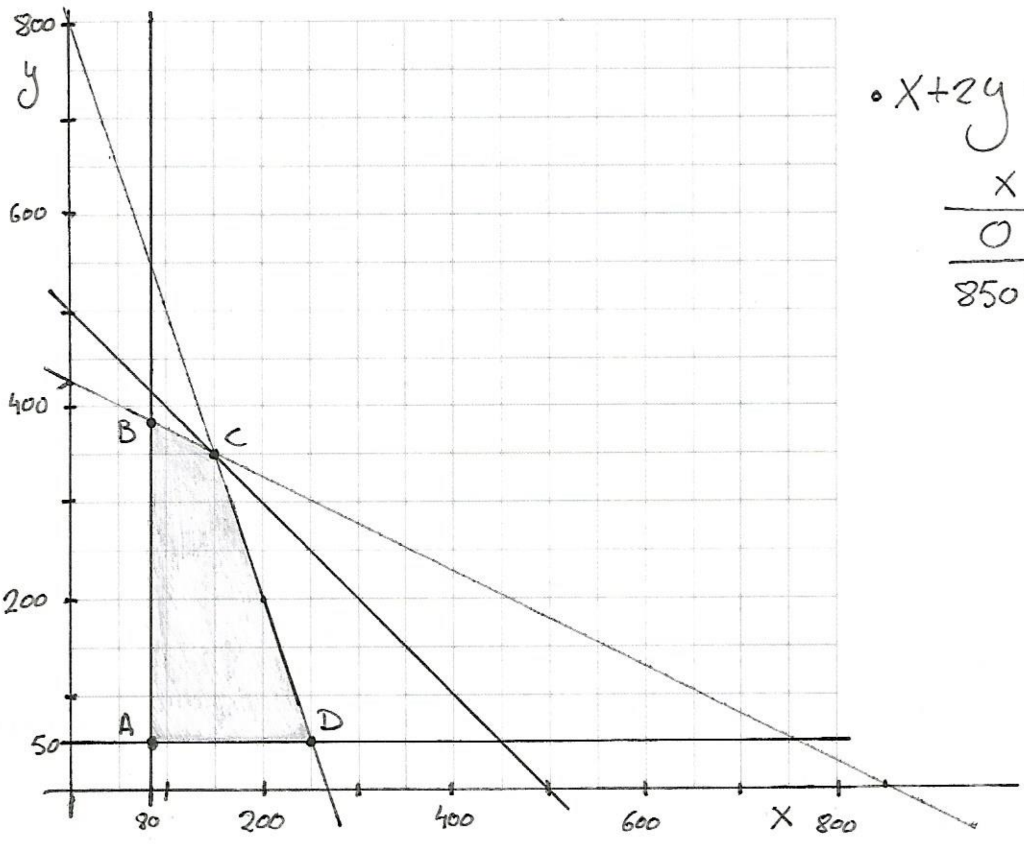
$$\rightarrow \begin{cases} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ 180x + 180y \leq 90.000 \\ 12x + 4y \leq 3200 \\ 8x + 16y \leq 6800 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ x + y \leq 500 \\ 3x + y \leq 800 \\ x + 2y \leq 850 \end{cases}$$

• $x + y = 500$

x	y
0	500
500	0

• $3x + y = 800$

x	y
0	800
200	200



• $x + 2y = 850$

x	y
0	425
850	0

b) Calculeu quantes samarretes i quantes malles s'han de fabricar perquè el benefici sigui màxim. Quin és aquest benefici?
[1,25 punts]

Com que el màxim i mínim d'una funció contínua a una regió tancada s'assoleixen als vèrtex, calculem els vèrtex de la nostra regió objectiu:

• A: $\begin{cases} x = 80 \\ y = 50 \end{cases} \longrightarrow \underline{A = (80,50)}$

• B: $\begin{cases} x = 80 \\ x+2y = 850 \end{cases} \longrightarrow 80+2y = 850 \longrightarrow y = \frac{850-80}{2} = 385$ $\quad \underline{B = (80,385)}$

• C: $\begin{cases} x+y = 500 \\ 3x+y = 800 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{r} -\ x+y = 500 \\ 3x+y = 800 \\ \hline -2x \quad = -300 \end{array} \longrightarrow x = 150 \longrightarrow 150+y = 500 \longrightarrow y = 350$ $\quad \underline{C = (150,350)}$

• D: $\begin{cases} 3x+y = 800 \\ y = 50 \end{cases} \longrightarrow 3x+50 = 800 \longrightarrow x = \frac{800-50}{3} = 250$ $\quad \underline{D = (250, 50)}$

Substituïm els vèrtex a la funció objectiu per trobar el màxim:

$\cdot B(A) = 5\cdot 80 + 3\cdot 50 = 550$ €

$\cdot B(B) = 5\cdot 80 + 3\cdot 385 = 1.555$ €

$\cdot B(C) = 5\cdot 150 + 3\cdot 350 = \boxed{1.800 \text{ €}}$

$\cdot B(D) = 5\cdot 250 + 3\cdot 50 = 1.400$ €

Solució
El benefici màxim és de 1800 € i s'obté fent 150 samarretes i 350 malles

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	*a*	
	b	
	Total	

4. Considereu la funció $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

a) Trobeu els valors dels paràmetres a, b i c sabent que la funció té un màxim en el punt $(2, 1)$ i un mínim en el punt $(0, -1)$.

[1,25 punts]

• Té un màxim en $(2,1)$
- Passa per $(2,1) \rightarrow f(2)=1$ ①
- En $x=2$ té un màxim $\rightarrow f'(2)=0$ ②

• Té un mínim en $(0,-1)$
- Passa per $(0,-1) \rightarrow f(0)=-1$ ③
- En $x=0$ té un mínim $\rightarrow f'(0)=0$ ④

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

① $a\cdot 2^4 + b\cdot 2^2 + c = 1 \longrightarrow 16a + 4b + c = 1 \longrightarrow 8a + 2b = 1$

② $4a\cdot 2^3 + 2b\cdot 2 = 0 \longrightarrow 32a + 4b = 0 \longrightarrow -8a + b = 0$

③ $a\cdot 0^4 + b\cdot 0^2 + c = -1 \longrightarrow \boxed{c=-1}$

④ $4a\cdot 0^3 + 2b\cdot 0 = 0 \longrightarrow 0=0$

$0 \quad \boxed{+b=1}$

$8a+1=0$

$\boxed{a=-\frac{1}{8}}$

$$\boxed{f(x) = -\frac{x^4}{8} + x^2 - 1}$$

b) Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció per als valors dels paràmetres *a*, *b* i *c* trobats a l'apartat anterior.
[1,25 punts]

Els intervals de creixement i decreixement venen donats pel signe de la derivada

- Calculem $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{4x^3}{8} + 2x = -\frac{x^3}{2} + 2x$$

- Estudiem el signe de $f'(x)$

1r) Mirem quan $f'(x) = 0$:

$$-\frac{x^3}{2} + 2x = 0 \rightarrow x\left(-\frac{x^2}{2} + 2\right) = 0 \begin{cases} \rightarrow x = 0 \\ \rightarrow -\frac{x^2}{2} + 2 = 0 \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{2} = 2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \begin{cases} \rightarrow x = 2 \\ \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Hem de mirar el signe de $f'(x)$ als intervals

$(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, +\infty)$

x		-2		0		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	$\nearrow$	màx	$\searrow$	mín	$\nearrow$	màx	$\searrow$

- $f'(-3) = -\frac{-27}{2} - 6 = \frac{15}{2} > 0$
- $f'(-1) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} < 0$
- $f'(1) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} > 0$
- $f'(3) = -\frac{27}{2} + 6 = -\frac{15}{2} < 0$

Solució:

$f(x)$ és creixent quan $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$

$f(x)$ és decreixent quan $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	*a*	
	b	
	Total	

5. En una empresa de tecnologia hi ha un total de 100 empleats dividits en tres seccions: administració, recerca i publicitat. Tots els empleats de cada secció cobren el mateix sou mensual: 2.000 euros els d'administració, 2.400 euros els de recerca i 2.800 euros els de publicitat, i la despesa total mensual en salaris de l'empresa és de 228.000 euros.

a) Plantegeu i estudieu el sistema d'equacions associat. Justifiqueu si es pot determinar el nombre d'empleats de cada secció.

[1,25 punts]

x = Empleats administració
y = Empleats recerca
z = Empleats publicitat

Total empleats 100 $\longrightarrow$ $x+y+z=100$

Admin: 2.000
Rec: 2400
Pub: 2800
total 228.000 $\longrightarrow$ $2000x+2400y+2800z=228.000$

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 2000x+2400y+2800z=228.000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+6y+7z=570 \end{cases}$$

Aplicant Gauss: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 6 & 7 & 570 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-5F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \end{array}\right)$

Veiem que el rang de la matriu del sistema és 2 i el rang de la matriu ampliada també és 2 i que tenim 3 incògnites $\xrightarrow{\text{T}^{\text{a}}\text{ Rouché}}$ S.C.I amb 1 grau de llibertat

$\longrightarrow$ No es pot determinar la solució.

b) Una reestructuració recent ha obligat a acomiadar $\frac{1}{10}$ part dels empleats d'administració, $\frac{1}{6}$ part dels de recerca i $\frac{1}{5}$ part dels de publicitat. Aquest fet ha significat un estalvi mensual en salaris de 33.200 euros. Determineu quants empleats tenia cada secció de l'empresa abans de la reestructuració.
[1,25 punts]

Hem d'afegir al sistema anterior l'equació:

$2000 \cdot \frac{x}{10} + 2400 \cdot \frac{y}{6} + 2800 \cdot \frac{z}{5} = 33.200$ al simplificar:

$5x + 10y + 14z = 830.$

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 6y + 7z = 570 \\ 5x + 10y + 14z = 830 \end{cases} \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 6 & 7 & 570 \\ 5 & 10 & 14 & 830 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_3-5F_1]{F_2-5F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \\ 0 & 5 & 9 & 330 \end{array}\right) \xrightarrow{5F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right) \rightarrow \boxed{z=20}$$

- Substituint z a la 2a fila: $y + 40 = 70 \rightarrow \boxed{y=30}$
- Substituint y i z a la 1a fila: $x + 30 + 20 = 100 \rightarrow \boxed{x=50}$

Solució: 50 empleats d'administració, 30 de recerca i 20 de publicitat.

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	*a*	
	b	
	Total	

6. Un centre de formació organitza un curs subvencionat que té un cost fix de 9.000 €, al qual cal sumar una quantitat que varia segons el nombre d'alumnes del curs i que és donada per la funció $0{,}02x^3 - 24x$, en què x representa el nombre d'alumnes matriculats. El Consell Comarcal ha atorgat al centre una subvenció de 5.000 € per a l'organització del curs i l'Ajuntament paga al centre 30 € per cada alumne matriculat.

La despesa que ha d'assumir el centre és la diferència entre el cost total del curs i les dues subvencions rebudes.

Quants alumnes s'han de matricular al curs perquè la despesa sigui mínima per al centre i quina seria aquesta despesa?

[2,5 punts]

- Hem d'aconseguir escriure la despesa en funció dels alumnes matriculats. Anomenem X als alumnes matriculats.

Despesa = Cost − Subvencions

$$D(X) = (9000 + 0'02X^3 - 24X) - (5000 + 30X)$$

$$D(X) = 0'02X^3 - 54X + 4.000 \qquad X \geq 0$$

- Per trobar el mínim 1r calculem la derivada per trobar els punts singulars:

$$D'(X) = 0'06X^2 - 54$$

Trobem els punts singulars resolent l'equació $D'(X) = 0$

$$0'06X^2 - 54 = 0 \rightarrow X^2 = \frac{54}{0'06} \rightarrow X^2 = 900 \rightarrow X = \pm\sqrt{900} \begin{cases} 30 \\ -30 \end{cases}$$

Com que -30 no pertany al domini de $D(x)$ el descartem i comprovem que $X = +30$ és el mínim que busquem. Ho fem amb el criteri de la 2a derivada:

$D''(X) = 0'12X \quad D''(30) = 3'6 > 0 \rightarrow D(X)$ té un mínim quan $X = 30$

• Calculem el valor de la despesa per a $x=30$

$$D(30) = 0'02 \cdot 30^3 - 54 \cdot 30 + 4000 = 2.920 \text{ €}$$

$$\boxed{\text{Solució: La despesa serà mínima si hi ha 30 alumnes matriculats i és de 2.920 €}}$$

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	Total	

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2019-2020

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II — Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de **10 problemas**, cuyo valor es de **2 puntos cada uno**. El estudiante ha de elegir 5 problemas.

En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el siguiente lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Una factoría de automóviles tiene pedidos de 180 turismos y 140 furgonetas para la próxima temporada. Dispone para ello de dos fábricas A y B. La fábrica A produce diariamente 6 turismos y 2 furgonetas con un coste diario de 30000 euros y la fábrica B 2 turismos y 2 furgonetas con un coste de 20000 euros cada día. ¿Cuántos días debe abrir cada fábrica para producir el pedido de la temporada con el mínimo coste? ¿Cuál es el valor de dicho coste mínimo? Justificar las respuestas.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Un apicultor hurdano tiene 900 botes de miel y 500 botes de polen con los que elabora dos lotes A y B que pone a la venta. Cada lote A contiene 2 botes de miel y 2 botes de polen con un beneficio de 15 euros y cada lote B 3 botes de miel y 1 bote de polen con un beneficio de 12 euros. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe organizar para que el beneficio sea máximo? Halla el valor de dicho beneficio máximo. Justificar las respuestas.

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Sea A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, las matrices X e Y que sean solución del sistema de ecuaciones matriciales siguiente:

$$\left.\begin{aligned} -2X + Y &= A + B \\ 5X + Y &= A - 2B \end{aligned}\right\}$$

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, el valor de x para el que se verifica $A^t = A^{-1}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} la matriz inversa de A.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El gasto G (en euros) por el consumo de energía eléctrica en un taller durante las 8 horas de funcionamiento varía de acuerdo con la función:

$$G(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t + 60 \quad (0 \le t \le 8)$$

donde t es el tiempo transcurrido en horas. Se pide, justificando las respuestas, determinar a qué horas se producen los gastos máximo y mínimo y los valores de dichos gastos máximo y mínimo.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

En una piscina natural, el aumento de temperatura (en grados centígrados), x, ocasiona un aumento en la cantidad de algas en superficie (en kg), $F(x)$. La relación entre ambas cantidades viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 2Bx + 2A & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 3Ax + 8B & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Se sabe que para un aumento de 4 grados centígrados, se han recogido 12 kg de algas y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje OX entre $x = 4$ y $x = 6$. **(1 punto)**

(b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \dfrac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)}$ **(1 punto)**

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Una biblioteca cuenta con 1000 socios, de los cuales 350 son jóvenes, 400 adultos y 250 mayores. Encuestados sobre la puesta en marcha de un nuevo servicio, se muestran favorables 210 jóvenes, 300 adultos y 125 mayores. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un adulto sea contrario a la puesta en marcha del servicio. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar sea favorable a la puesta en marcha del servicio. **(1 punto)**

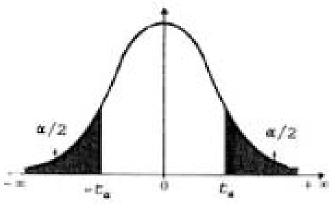
PROBLEMA 9 (2 puntos)

El peso de los libros de texto es una variable que sigue una distribución normal con una desviación típica de 72 gramos. Se toma una muestra de 36 libros, siendo su peso medio de 800 gramos. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95 % para el peso medio de los libros de texto.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se pretende realizar un estudio sobre la renta mensual de las familias. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media de dicha variable, ¿cuántas familias tenemos que seleccionar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.

Tabla para los Problemas 9 y 10



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2020

Problema 1:

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Una factoría de automóviles tiene pedidos de 180 turismos y 140 furgonetas para la próxima temporada. Dispone para ello de dos fábricas A y B. La fábrica A produce diariamente 6 turismos y 2 furgonetas con un coste diario de 30000 euros y la fábrica B 2 turismos y 2 furgonetas con un coste de 20000 euros cada día. ¿Cuántos días debe abrir cada fábrica para producir el pedido de la temporada con el mínimo coste? ¿Cuál es el valor de dicho coste mínimo? Justificar las respuestas.

Solución:

Sean x e y los días que trabajan las fábricas A y B, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} 6x+2y\geq 180 \\ 2x+2y\geq 140 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x+y\geq 90 \\ x+y\geq 70 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow 3x+y\geq 90 \Rightarrow y\geq 90-3x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	0	30
y	90	0

$② \Rightarrow x+y\geq 70 \Rightarrow y\geq 70-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	0	70
y	70	0

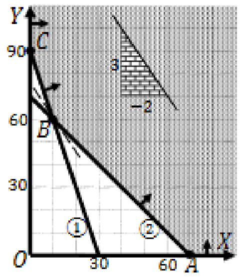
La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=70 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(70,0).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y=90 \\ x+y=70 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x+y=90 \\ -x-y=-70 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=20;\ \ x=10 \Rightarrow B(10,60).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 3x+y=90 \end{array}\right\} \Rightarrow C(0,90).$$



La función de objetivos es la siguiente:

$f(x,y)=30.000x+20.000y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(70,0)=30.000\cdot 70+20.000\cdot 0=2.100.000.$

$B \Rightarrow f(10,60)=30.000\cdot 10+20.000\cdot 60=300.000+1.200.000=$

$=1.500.000.$

$C \Rightarrow f(0,90)=30.000\cdot 0+20.000\cdot 90=1.800.000.$

El valor mínimo se produce en el punto $B(10,60)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y)=30.000x+20.000y=0 \Rightarrow y=-\frac{30.000}{20.000}x=-\frac{3}{2}x \Rightarrow m=-\frac{3}{2}.$

$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ si\ la\ fábrica\ A\ trabaja\ 10\ días\ y\ la\ B,60\ días}.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 1.500.000\ euros}.$

Problema 2:

PROBLEMA 2 (2 puntos)
Un apicultor hurdano tiene 900 botes de miel y 500 botes de polen con los que elabora dos lotes A y B que pone a la venta. Cada lote A contiene 2 botes de miel y 2 botes de polen con un beneficio de 15 euros y cada lote B 3 botes de miel y 1 bote de polen con un beneficio de 12 euros. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe organizar para que el beneficio sea máximo? Halla el valor de dicho beneficio máximo. Justificar las respuestas.

Solución:

Sean x e y los lotes de los tipos A y B que elabora el apicultor, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} 2x+3y \le 900 \\ 2x+y \le 500 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$.

① $\Rightarrow 2x+3y \le 900 \Rightarrow y \le \frac{900-2x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	450
y	300	0

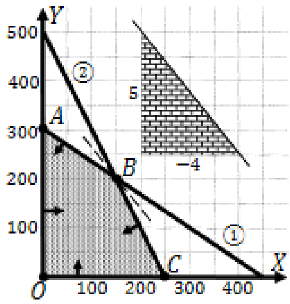
② $\Rightarrow 2x+y \le 500 \Rightarrow y \le 500-2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	250
y	500	0

La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,300).$



$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=900 \\ 2x+y=500 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+3y=900 \\ -2x-y=-500 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y=400;\ \ y=200;\ \ 2x+200=500;$

$2x=300;\ \ x=150 \Rightarrow B(150,200).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 2x+y=500 \end{array}\right\} \Rightarrow C(250,0).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=15x+12y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,300)=15\cdot 0+12\cdot 300=0+3.600=3.600.$

$B \Rightarrow f(150,200)=15\cdot 150+12\cdot 200=2.250+2.400=4.650.$

$C \Rightarrow f(250,0)=15\cdot 250+12\cdot 0=3.750+0=3.750.$

El valor máximo se produce en el punto $B(150,200)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y)=15x+12y=0 \Rightarrow y=-\frac{15}{12}x=-\frac{5}{4}x \Rightarrow m=-\frac{5}{4}.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ elaborando\ 150\ lotes\ A\ y\ 200\ lotes\ B}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 4.650\ euros}.$

Problema 3:

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Sea A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, las matrices X e Y que sean solución del sistema de ecuaciones matriciales siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2X - Y = -A - B \\ 5X + Y = A - 2B \end{array}\right\} \Rightarrow 7X = -3B;\ X = -\frac{3}{7}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = -\frac{3}{7}B = -\frac{3}{7} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{array}{r} -2X + Y = A + B \\ 5X + Y = A - 2B \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -10X + 5Y = 5A + 5B \\ 10X + 2Y = 2A - 4B \end{array}\right\} \Rightarrow 7Y = 7A + B;\ Y = A + \frac{1}{7}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Y = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{36}{7} \\ 0 & -\frac{22}{7} \end{pmatrix}}.$$

****

Problema 4:

PROBLEMA 4 (2 puntos)
Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, el valor de x para el que se verifica $A^t = A^{-1}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} la matriz inversa de A.

Solución:

$$A^t = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}; \; |A| = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2+1; \; Adj\ de\ A^t = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\ de\ A^t}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+1} & \frac{-1}{x^2+1} \\ \frac{1}{x^2+1} & \frac{x}{x^2+1} \end{pmatrix}.$$

$$A^t = A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+1} & \frac{-1}{x^2+1} \\ \frac{1}{x^2+1} & \frac{x}{x^2+1} \end{pmatrix} \Rightarrow x^2+1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x=0}}.$$

De otra forma:

Cumpliéndose que $A^t = A^{-1}$, se tiene que cumplir que: $A \cdot A^t = A \cdot A^{-1} = I$.

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & 0 \\ 0 & x^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x=0}}.$$

****

Problema 5:

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El gasto G (en euros) por el consumo de energía eléctrica en un taller durante las 8 horas de funcionamiento varía de acuerdo con la función:

$$G(t) = 2t^3 - 27t^2 + 84t + 60 \quad (0 \leq t \leq 8)$$

donde t es el tiempo transcurrido en horas. Se pide, justificando las respuestas, determinar a qué horas se producen los gastos máximo y mínimo y los valores de dichos gastos máximo y mínimo.

Solución:

$$G(0) = 60.$$

$$G(8) = 2 \cdot 8^3 - 27 \cdot 8^2 + 84 \cdot 8 + 60 = 2 \cdot 512 - 27 \cdot 64 + 672 + 60 =$$

$$= 1.024 - 1.728 + 672 + 60 = 1.756 - 1.728 = 28.$$

$$G'(t) = 6t^2 - 54t + 84. \qquad G''(t) = 12t - 54.$$

$$G'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 54t + 84 = 0;\ t^2 - 9t + 14 = 0;\ t = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} =$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2} \Rightarrow t_1 = 2;\ t_2 = 7.$$

$$G''(2) = 12 \cdot 2 - 54 = 24 - 54 = -30 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 2.$$

$$G(2) = 2 \cdot 2^3 - 27 \cdot 2^2 + 84 \cdot 2 + 60 = 16 - 108 + 168 + 60 =$$

$$= 244 - 108 = 136.$$

$$\underline{El\ gasto\ máximo\ se\ produce\ a\ las\ 2\ horas\ y\ es\ de\ 136\ euros.}$$

$$G''(7) = 12 \cdot 7 - 54 = 84 - 54 = 30 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ t = 7.$$

$$G(7) = 2 \cdot 7^3 - 27 \cdot 7^2 + 84 \cdot 7 + 60 = 2 \cdot 343 - 27 \cdot 49 + 588 + 60 =$$

$$= 686 - 1.323 + 648 = 1.334 - 1.323 = 11.$$

$$\underline{El\ gasto\ mínimo\ se\ produce\ a\ las\ 7\ horas\ y\ es\ de\ 11\ euros.}$$

****

Problema 6:

PROBLEMA 6 (2 puntos)

En una piscina natural, el aumento de temperatura (en grados centígrados), x, ocasiona un aumento en la cantidad de algas en superficie (en kg), $F(x)$. La relación entre ambas cantidades viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 2Bx + 2A & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ x^2 - 3Ax + 8B & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Se sabe que para un aumento de 4 grados centígrados, se han recogido 12 kg de algas y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

Solución:

Por ser continua la función se cumple que $\lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3^+} F(x) = F(3)$.

$F(4) = 12;\ 4^2 - 3A\cdot 4 + 8B = 16 - 12A + 8B = 12;\ 12A - 8B = 4;$

$3A - 2B = 1.\quad (1)$

$$\lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3}(2Bx + 2A) = 2B\cdot 3 + 2A = 2A + 6B.$$

$$\lim_{x\to 3^+} F(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 - 3Ax + 8B) = 3^2 - 3A\cdot 3 + 8B = -9A + 8B + 9.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3}(2Bx + 2A) = 2B\cdot 3 + 2A = 2A + 6B \\ \lim_{x\to 3^+} F(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 - 3Ax + 8B) = 3^2 - 3A\cdot 3 + 8B = -9A + 8B + 9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2A + 6B = -9A + 8B + 9;\ 11A - 2B = 9.\quad (2)$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 3A - 2B = 1 \\ 11A - 2B = 9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -3A + 2B = -1 \\ 11A - 2B = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 8A = 8;\ \underline{A = 1}.$$

$3\cdot 1 - 2B = 1;\ 2B = 3 - 2;\ 2B = 2;\ \underline{B = 1}.$

****

Problema 7:

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje OX entre $x = 4$ y $x = 6$.

(b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \dfrac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)}$

Solución:

a)

En el intervalo (4, 6) todas las ordenadas de la función $f(x)$ (que es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2) son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_4^6 f(x) \cdot dx = \int_4^6 (x^2 + x - 2) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_4^6 =$$

$$= \left(\frac{6^3}{3} + \frac{6^2}{2} - 2 \cdot 6\right) - \left(\frac{4^3}{3} + \frac{4^2}{2} - 2 \cdot 4\right) = 72 + 18 - 12 - \frac{64}{3} - 8 + 8 =$$

$$= 78 - \frac{64}{3} = \frac{234 - 64}{3} = \frac{170}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{170}{3}\, u^2 \cong 56{,}67\, u^2.}$$

b)

Asíntotas verticales: Son los valores reales que anulan el denominador.

$$3(x^2 + x - 2) = 0;\ \ x^2 + x - 2 = 0;\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow x_1 = -2;\ \ x_2 = 1.$$

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -2\ y\ x = 1.}$$

Asíntota horizontal: Es el valor del límite de la función cuando $x \to \pm\infty$.

$$y = \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2 - 1}{3(x^2 + x - 2)} = -\frac{2}{3}.$$

$$\underline{Asíntota\ horizontal: y = -\frac{2}{3}.}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

****

Problema 8:

PROBLEMA 8 (2 puntos)
Una biblioteca cuenta con 1000 socios, de los cuales 350 son jóvenes, 400 adultos y 250 mayores. Encuestados sobre la puesta en marcha de un nuevo servicio, se muestran favorables 210 jóvenes, 300 adultos y 125 mayores. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un adulto sea contrario a la puesta en marcha del servicio. **(1 punto)**

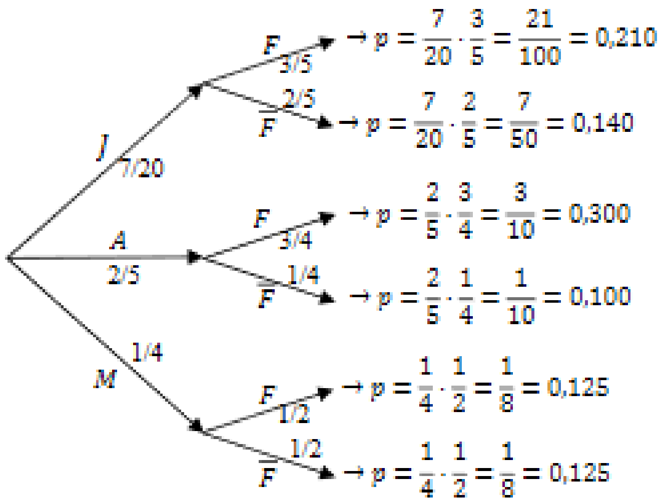
(b) Calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar sea favorable a la puesta en marcha del servicio. **(1 punto)**

Solución:

$a)$

$$P(J)=\frac{350}{1.000}=\frac{7}{20}. \qquad P(A)=\frac{400}{1.000}=\frac{2}{5}. \qquad P(M)=\frac{250}{1.000}=\frac{1}{4}.$$

$$P(F/J)=\frac{210}{350}=\frac{3}{5}. \qquad P(F/A)=\frac{300}{400}=\frac{3}{4}. \qquad P(F/M)=\frac{125}{250}=\frac{1}{2}.$$



$$P(\overline{F}/A)=\frac{100}{400}=\frac{1}{4}=\underline{0{,}25}.$$

$b)$

$$P=P(F)=P(J\cap F)+P(A\cap F)+P(M\cap F)=$$

$$=P(J)\cdot P(F/J)+P(A)\cdot P(F/A)+P(M)\cdot P(F/M)=$$

$$=\frac{7}{20}\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{21}{100}+\frac{3}{10}+\frac{1}{8}=\frac{210+300+125}{1.000}=\frac{635}{1.000}=\underline{0{,}635}.$$

****

Problema 9:

PROBLEMA 9 (2 puntos)
El peso de los libros de texto es una variable que sigue una distribución normal con una desviación típica de 72 gramos. Se toma una muestra de 36 libros, siendo su peso medio de 800 gramos. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95 % para el peso medio de los libros de texto.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $n = 36;\ \ \overline{x} = 800;\ \ \sigma = 72;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(800 - 1{,}96 \cdot \frac{72}{\sqrt{36}};\ 800 + 1{,}96 \cdot \frac{72}{\sqrt{36}}\right);\ \ (800 - 1{,}96 \cdot 12;\ 800 + 1{,}96 \cdot 12);$

$(800 - 23{,}52;\ 800 + 23{,}52).$

$$\underline{I.C._{95\ \%} = (776{,}48;\ 823{,}52).}$$

****

Problema 10:

PROBLEMA 10 (2 puntos)
Se pretende realizar un estudio sobre la renta mensual de las familias. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media de dicha variable, ¿cuántas familias tenemos que seleccionar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$

Teniendo en cuenta que el error máximo es la mitad del intervalo de confianza, los datos son los siguientes:

Datos: $\sigma = 400;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96;\ \ E = \frac{160}{2} = 80.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{400}{80}\right)^2 =$

$= (1{,}96 \cdot 5)^2 = 9{,}8^2 = 96{,}04.$

<u>*El número de familias consultadas tiene que ser de 97.*</u>

****

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2019-2020

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II — Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de **10 problemas**, cuyo valor es de **2 puntos cada uno.** El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el siguiente lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Una tienda de productos agrícolas dispone de 300 kg de abono de nitrógeno y de 80 kg de abono de potasio para la fabricación de dos compuestos A y B. Cada envase del compuesto A contiene 3 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio y cada envase del compuesto B contiene 6 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio. Si el beneficio producido por cada envase del compuesto A es de 100 euros y el del envase del compuesto B de 120 euros, ¿cuántos envases de cada tipo debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo? Justificar las respuestas.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Una tienda de artesanía de calzado fabrica zapatos y botas. Cada par de zapatos requiere 1 hora de trabajo y 0.5 m^2 de piel y cada par de botas 1 hora de trabajo y 1 m^2 de piel , siendo el beneficio obtenido de 70 euros por cada par de zapatos y de 80 euros por cada par de botas. Si solo dispone de 50 horas de trabajo y de 35 m^2 de piel, ¿cuántos pares de zapatos y de botas hay que fabricar para obtener los máximos beneficios?. ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Sean A, B e I la matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, la matriz X que sea solución de la ecuación matricial:

$$A \cdot B \cdot X = A \cdot B + I$$

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Sean X, I y O las matrices siguientes

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, los valores del parámetro a para los que se verifica

$$X^2 - 4X + 3I = O$$

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Durante el estudio de medida del ruido R, expresado en decibelios, en un punto de una determinada ciudad se ha comprobado que varía con el tiempo, t, expresado en horas de acuerdo con la función:

$$R(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 60 \quad (1 \le t \le 7)$$

Determinar, justificando las respuestas, en qué momentos se producen los valores máximo y mínimo de ruido. Calcular dichos valores máximo y mínimo.

PROBLEMA 6 (2 puntos)
Cierta levadura es utilizada en la masa del pan en una cantidad, x, entre 1 y 5 gramos. El crecimiento de la masa en el horno, $F(x)$ (en cm) viene determinado por la cantidad de levadura de acuerdo a la función:

$$F(x) = \begin{cases} Bx + 2A & \text{si } 1 \le x < 3 \\ x^2 + Ax - B & \text{si } 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

Se sabe que con 2 gramos de levadura la masa experimenta un crecimiento de 2 cm y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

PROBLEMA 7 (2 puntos)
Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$. **(1 punto)**

(b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \dfrac{-2x^2 + 3}{2(x^2 + 3x + 2)}$ **(1 punto)**

PROBLEMA 8 (2 puntos)
En Portugal, el 40 % del café consumido es de marca Delta, el 50 % de marca Sical y el 10 % restante se lo reparten otras marcas. Delta utiliza la variedad arábica para el 70 % de sus envases y la variedad robusta para el 30 % restante. Sical utiliza la variedad arábica en el 40 % de sus envases y la robusta en el 60 %. Las otras marcas de café utilizan ambas variedades en el 50 % de sus envases. Se pide, justificando las respuestas:

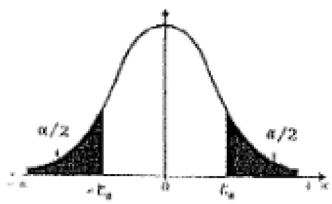
(a) Calcular la probabilidad de que un envase de café comprado en Portugal sea Sical y de variedad arábica. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que en un envase de café portugués se haya utilizado la variedad robusta. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)
Una marca de dulces realiza un control de calidad de sus productos, considerando el diámetro (en cm) de las galletas que produce. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 2 cm. Se eligen al azar 100 de las galletas producidas en la fábrica, obteniéndose un diámetro medio de 8 cm. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95 % para el diámetro medio de las galletas producidas por dicha marca.

PROBLEMA 10 (2 puntos)
Se realiza un estudio sobre el precio del pan en distintas tiendas, variable que se supone con distribución normal de desviación típica 20 céntimos. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media de dicha variable, ¿cuántas tiendas tenemos que visitar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 10 céntimos? Justificar la respuesta.

Tabla para los Problemas 9 y 10



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2020

Problema 1:

PROBLEMA 1 (2 puntos)
Una tienda de productos agrícolas dispone de 300 kg de abono de nitrógeno y de 80 kg de abono de potasio para la fabricación de dos compuestos A y B. Cada envase del compuesto A contiene 3 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio y cada envase del compuesto B contiene 6 kg de abono de nitrógeno y 1 kg de abono de potasio. Si el beneficio producido por cada envase del compuesto A es de 100 euros y el del envase del compuesto B de 120 euros, ¿cuántos envases de cada tipo debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo? Justificar las respuestas.

Solución:

Sean x e y el número de envases de los compuestos A y B que se fabrican, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+6y\le 300 \\ x+y\le 80 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+2y\le 100 \\ x+y\le 80 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

① $\Rightarrow x+2y\le 100 \Rightarrow y\ge \frac{100-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	100
y	50	0

② $\Rightarrow x+y\le 80 \Rightarrow y\le 80-x \to O(0,0)\to Si.$

x	80	0
y	0	80

La región factible es la zona que aparece sombreada de la figura adjunta.

La función de objetivos es $f(x,y)=100x+120y$.

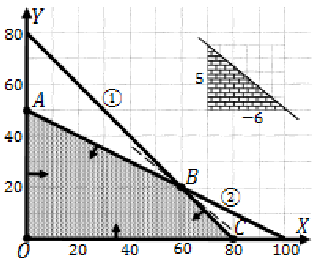
Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=50 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,50).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=100 \\ x+y=80 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2y=100 \\ -x-y=-80 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$y=20;\ \ x=60 \Rightarrow B(60,20).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x=80 \end{array}\right\} \Rightarrow C(80,0).$



Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,50)=100\cdot 0+120\cdot 50=0+6.000=6.000.$

$B \Rightarrow f(60,20)=100\cdot 60+120\cdot 20=6.000+2.400=8.400.$

$C \Rightarrow f(80,0)=100\cdot 80+120\cdot 0=8.000+0=8.000.$

El valor máximo se produce en el punto $B(60,20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y)=100x+120y=0 \Rightarrow y=-\frac{100}{120}x=-\frac{10}{12}x \Rightarrow m=-\frac{5}{6}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ consigue\ fabricando\ 60\ envases\ A\ y\ 20\ envases\ B}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 8.400\ euros}.$

Problema 2:

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Una tienda de artesanía de calzado fabrica zapatos y botas. Cada par de zapatos requiere 1 hora de trabajo y 0.5 m^2 de piel y cada par de botas 1 hora de trabajo y 1 m^2 de piel , siendo el beneficio obtenido de 70 euros por cada par de zapatos y de 80 euros por cada par de botas. Si solo dispone de 50 horas de trabajo y de 35 m^2 de piel, ¿cuántos pares de zapatos y de botas hay que fabricar para obtener los máximos beneficios?. ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justificar las respuestas.

Solución:

Sean x e y el número de pares de zapatos y de botas que se fabrican, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y\le 50 \\ 0{,}5x+y\le 35 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y\le 50 \\ x+2y\le 70 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

① $\Rightarrow x+y\le 50 \Rightarrow y\le 50-x \rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	50
y	50	0

② $\Rightarrow x+2y\le 100 \Rightarrow y\ge \frac{100-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	80	0
y	0	80

La región factible es la zona que aparece sombreada de la figura adjunta.

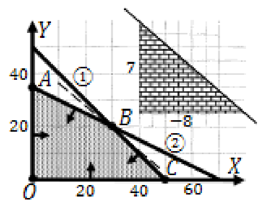
La función de objetivos es $f(x,y)=70x+80y$.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=35 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,35).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=50 \\ x+2y=70 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-y=-50 \\ x+2y=70 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$y=20;\ \ x=30 \Rightarrow B(30,20).$



$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x=50 \end{array}\right\} \Rightarrow C(50,0).$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,35)=70\cdot 0+80\cdot 35=0+2.800=2.800.$

$B \Rightarrow f(30,20)=70\cdot 30+80\cdot 20=2.100+1.600=3.700.$

$C \Rightarrow f(50,0)=70\cdot 50+80\cdot 0=3.500+0=3.500.$

El valor máximo se produce en el punto $B(30,20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y)=70x+80y=0 \Rightarrow y=-\frac{70}{80}x=-\frac{7}{8}x \Rightarrow m=-\frac{7}{8}.$$

$\underline{Máximo\ beneficio: fabricando\ 30\ pares\ de\ zapatos\ 20\ \ pares\ de\ botas.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 3.700\ euros.}$

Problema 3:

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Sean A, B e I la matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, la matriz X que sea solución de la ecuación matricial:

$$A \cdot B \cdot X = A \cdot B + I$$

Solución:

$$A \cdot B \cdot X = A \cdot B + I; \;\; (A \cdot B) \cdot X = (A \cdot B) + I;$$

$$(A \cdot B)^{-1} \cdot (A \cdot B) \cdot X = (A \cdot B)^{-1} \cdot [(A \cdot B) + I]; \;\; I \cdot X = (A \cdot B)^{-1} \cdot [(A \cdot B) + I].$$

$$\underline{X = (A \cdot B)^{-1} \cdot [(A \cdot B) + I].}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 18 = 10. \qquad (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(A \cdot B) + I = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A \cdot B)^{-1} \cdot [(A \cdot B) + I] = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & 14 \end{pmatrix}.}$$

****

Problema 4:

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Sean X, I y O las matrices siguientes

$$X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar, justificando la respuesta, los valores del parámetro a para los que se verifica

$$X^2-4X+3I=O$$

Solución:

$$X^2=X\cdot X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$4\cdot X=4\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$X^2-4X+3I=O \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} a^2-4a+3=0 \\ 9-12+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2-4a+3=0;\ \ a=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=2\pm 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=1, a_2=3.$$

$$\underline{X^2-4X+3I=O \Rightarrow a=1\ y\ a=3.}$$

****

Problema 5:

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Durante el estudio de medida del ruido R, expresado en decibelios, en un punto de una determinada ciudad se ha comprobado que varía con el tiempo, t, expresado en horas de acuerdo con la función:

$$R(t) = t^3 - 12t^2 + 36t + 60 \quad (1 \leq t \leq 7)$$

Determinar, justificando las respuestas, en qué momentos se producen los valores máximo y mínimo de ruido. Calcular dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

$$R(1) = 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 + 60 = 1 - 12 + 36 + 60 = 85.$$

$$R(7) = 7^3 - 12 \cdot 7^2 + 36 \cdot 7 + 60 = 343 - 12 \cdot 49 + 252 + 60 =$$

$$= 343 - 588 + 252 + 60 = 655 - 588 = 67.$$

$$R'(t) = 3t^2 - 24t + 36. \qquad R''(t) = 6t - 24.$$

$$R'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0; \;\; t^2 - 8t + 12 = 0; \;\; t = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2 \Rightarrow t_1 = 2; \;\; t_2 = 6.$$

$$R''(2) = 6 \cdot 2 - 24 = 12 - 24 = -12 < 0 \Rightarrow \mathit{Máximo\ para\ } t = 2.$$

$$R(2) = 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 + 60 = 8 - 48 + 72 + 60 = 140 - 48 = 92.$$

$\underline{\textit{El ruido máximo se produce a las 2 horas y es de 92 decibelios.}}$

$$R''(6) = 6 \cdot 6 - 24 = 36 - 24 = 12 > 0 \Rightarrow \mathit{Mínimo\ para\ } t = 6.$$

$$R(6) = 6^3 - 12 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6 + 60 = 216 - 12 \cdot 36 + 216 + 60 =$$

$$= 216 - 432 + 216 + 60 = 60.$$

$\underline{\textit{El ruido mínimo se produce a las 6 horas y es de 60 decibelios.}}$

Problema 6:

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Cierta levadura es utilizada en la masa del pan en una cantidad, x, entre 1 y 5 gramos. El crecimiento de la masa en el horno, $F(x)$ (en cm) viene determinado por la cantidad de levadura de acuerdo a la función:

$$F(x) = \begin{cases} Bx + 2A & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x^2 + Ax - B & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Se sabe que con 2 gramos de levadura la masa experimenta un crecimiento de 2 cm y que la función es continua. Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

Solución:

Por ser continua la función se cumple que $\lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3^+} F(x) = F(3)$.

$F(2) = 2;\ \ 2B + 2A = 2;\ \ A + B = 1.\quad (1)$

$\lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3}(Bx + 2A) = B\cdot 3 + 2A = 2A + 3B.$

$\lim_{x\to 3^+} F(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 + Ax - B) = 3^2 + A\cdot 3 - B = 3A - B + 9.$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} F(x) = \lim_{x\to 3}(2Bx + 2A) = 2A + 3B \\ \lim_{x\to 3^+} F(x) = \lim_{x\to 3}(x^2 - 3Ax + 8B) = 3A - B + 9 = F(3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2A + 3B = 3A - B + 9;\ \ A - 4B = -9.\quad (2)$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} A + B = 1 \\ A - 4B = -9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} A + B = 1 \\ -A + 4B = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 5B = 10;\ \ \underline{B = 2}.$$

$A + 2 = 1 \Rightarrow \underline{A = -1}.$

****

Problema 7:

PROBLEMA 7 (2 puntos)
Se pide, justificando las respuestas:

(a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$.

(b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \dfrac{-2x^2+3}{2(x^2+3x+2)}$

Solución:

a)

En el intervalo $(1, 3)$ todas las ordenadas de la función $f(x)$ (que es una parábola convexa $(\cup)$, por ser positivo el coeficiente de x^2) son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_1^3 f(x)\cdot dx = \int_1^3 (x^2+3x+2)\cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^3 =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} + \frac{3\cdot 3^2}{2} + 2\cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{3\cdot 1^2}{2} + 2\cdot 1\right) = 9 + \frac{27}{2} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 2 =$$

$$= 13 - \frac{1}{3} + 12 = 25 - \frac{1}{3} = \frac{75-1}{3} = \frac{74}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{74}{3}\ u^2 \cong 24{,}67\ u^2.}$$

b)

Asíntotas verticales: Son los valores reales que anulan el denominador.

$$3(x^2+3x+2) = 0;\ x^2+3x+2 = 0;\ x = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3\pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = -1.$$

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -2\ y\ x = -1.}$$

Asíntota horizontal: Es el valor del límite de la función cuando $x \to \pm\infty$.

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2+3}{2(x^2+3x+2)} = -1.$$

$$\underline{Asíntota\ vertical: y = -1.}$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

****

Problema 8:

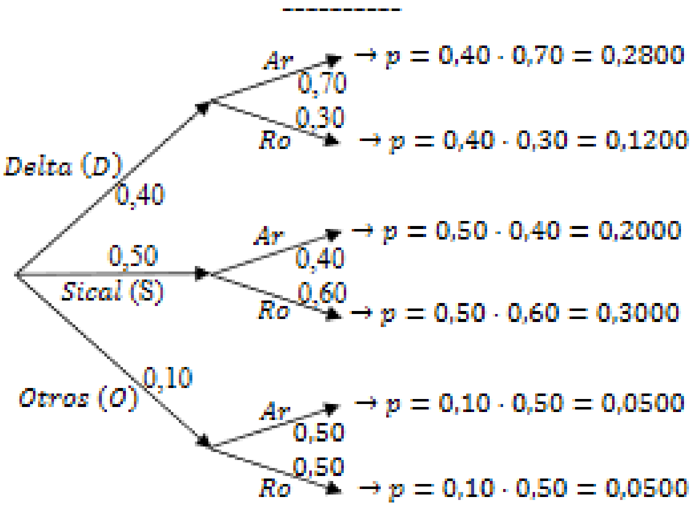
PROBLEMA 8 (2 puntos)

En Portugal, el 40 % del café consumido es de marca Delta, el 50 % de marca Sical y el 10 % restante se lo reparten otras marcas. Delta utiliza la variedad arábica para el 70 % de sus envases y la variedad robusta para el 30 % restante. Sical utiliza la variedad arábica en el 40 % de sus envases y la robusta en el 60 %. Las otras marcas de café utilizan ambas variedades en el 50 % de sus envases. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular la probabilidad de que un envase de café comprado en Portugal sea Sical y de variedad arábica. **(1 punto)**

(b) Calcular la probabilidad de que en un envase de café portugués se haya utilizado la variedad robusta. **(1 punto)**

Solución:



$a)$

$$P = P(S \cap Ar) = P(S) \cdot P(Ar/S) = 0{,}50 \cdot 0{,}40 = \underline{0{,}20}.$$

$b)$

$$P = P(Ro) = P(D \cap Ro) + P(S \cap Ro) + P(O \cap Ro) =$$

$$= P(D) \cdot P(Ro/D) + P(S) \cdot P(Ro/S) + P(O) \cdot P(Ro/O) =$$

$$= 0{,}40 \cdot 0{,}30 + 0{,}50 \cdot 0{,}60 + 0{,}10 \cdot 0{,}50 = 0{,}120 + 0{,}300 + 0{,}050 = \underline{0{,}470}.$$

Problema 9:

PROBLEMA 9 (2 puntos)
Una marca de dulces realiza un control de calidad de sus productos, considerando el diámetro (en cm) de las galletas que produce. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica 2 cm. Se eligen al azar 100 de las galletas producidas en la fábrica, obteniéndose un diámetro medio de 8 cm. Calcular, justificando la respuesta, el intervalo de confianza al 95 % para el diámetro medio de las galletas producidas por dicha marca.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750 \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=100;\ \overline{x}=8;\ \sigma=2;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(8-1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{100}};\ 8+1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{100}}\right);\ (8-1{,}96\cdot 0{,}2;\ 8+1{,}96\cdot 0{,}2);$

$(8-0{,}392;\ 8+0{,}392).$

$$\underline{I.C._{95\ \%}=(7{,}608;\ 8{,}392).}$$

****

Problema 10:

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se realiza un estudio sobre el precio del pan en distintas tiendas, variable que se supone con distribución normal de desviación típica 20 céntimos. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95 % para la media de dicha variable, ¿cuántas tiendas tenemos que visitar (tamaño muestral) para que el intervalo tenga una longitud de 10 céntimos? Justificar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $n = 100;\ \overline{x} = 8;\ \sigma = 2;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(8 - 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}};\ 8 + 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{100}}\right);\ (8 - 1{,}96 \cdot 0{,}2;\ 8 + 1{,}96 \cdot 0{,}2);$

$(8 - 0{,}392;\ 8 + 0{,}392).$

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (7{,}608;\ 8{,}392).}$$

****

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

GALICIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Dolores Vázquez Torrón

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN El examen consta de 6 preguntas, todas con la misma puntuación (3.33), de las que se puede responder un MÁXIMO DE 3, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, sólo se corregirán las 3 primeras respondidas.

Problema A.1: Álgebra. Consideramos las matrices: $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule las matrices A + B y 3C - B.

b) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear A + B = 3C – B y resuélvalo.

Problema A.2: Álgebra. Un fabricante de sistemas de iluminación quiere producir focos de tecnología led en dos modelos distintos: A y B. Para diseñar la estrategia de producción diaria tendrá en cuenta que se producirán al menos 50 focos del modelo A, que el número de focos del modelo B no superará las 300 unidades y que se producirán al menos tantos focos del modelo B como del modelo A. Además, la producción total no superará las 500 unidades diarias.

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema.

b) Representa la región factible y calcule sus vértices.

c) Si el beneficio obtenido por cada foco del modelo A es de 60 euros y por cada foco del modelo B es de 40 euros, ¿cuántos focos de cada modelo debe producir diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende el beneficio máximo?

Problema A.3: Análisis. El número de personas (en miles) que visitan cada año un parque temático viene dado por la función:

$\boldsymbol{P(t) = \frac{180t}{t^2+9}}$, $\boldsymbol{t \geq 0}$ donde t es el tiempo transcurrido en años desde su apertura en el año 2010 (t = 0).

a) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de visitantes.

b) ¿En qué año recibió el mayor número de visitantes? ¿A cuánto ascienden? Razone las respuestas.

c) ¿A partir de qué año el número de visitantes será inferior a 18 000 personas? ¿Qué ocurrirá con el número de visitantes con el paso del tiempo? Razone las respuestas.

Problema A.4: Análisis. Dada la función $f(x) = -4x^2 + 12x - 5$.

a) Realice su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo. **b)** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x), el eje OX y las rectas x=1, x=2.

Problema A.5: Estadística y probabilidad.

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que P(A) = 0.4 , $\boldsymbol{P(\overline{B}) = 0.7}$ y $\boldsymbol{P(\overline{B}/A) = 0.75}$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $\boldsymbol{P(A \cap \overline{B})}$ b) $\boldsymbol{P(A \cup B)}$ c) $\boldsymbol{P(A \cap B)}$. **d)** ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta.

Problema A.6: Estadística y probabilidad.

La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja se puede aproximar por una variable normal de media $\boldsymbol{\mu}$ desconocida y desviación típica $\boldsymbol{\sigma = 50}$ litros.

a) Determine el tamaño mínimo de muestra para que el correspondiente intervalo de confianza para $\boldsymbol{\mu}$ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 8 litros.

b) Se toman los datos de producción de 25 días, calcule la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas sea menor o igual a 930 litros si sabemos que $\boldsymbol{\mu}$ = 950 litros.

SOLUCIONES

Problema A.1: Álgebra. Consideramos las matrices: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & -\boldsymbol{b} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

a) Calcule las matrices A + B y 3C - B.

b) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear A + B = 3C – B y resuélvalo.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3C - B = \begin{pmatrix} 3c & -9 & 3 \\ 3c & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Se expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear A + B = 3C – B y se resuelve.

$$A + B = 3C - B \Rightarrow \begin{cases} a+b = 3c-b \\ a-b = -9+b \\ a+3 = 3c-3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+2b-3c = 0 \\ a-2b \quad = -9 \\ a-3c = -6 \end{cases}$$

Su expresión matricial es: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$

Resolución por Cramer $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 6 + 6 = 6 \neq 0.$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -9 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{36-54}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -9 & 0 \\ 1 & -6 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{27+18-27}{6} = 3$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -9 \\ 1 & 0 & -6 \end{vmatrix}}{1A1} = \frac{12-18+12}{6} =1$$

Resolución por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & +3 & -9 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2F_3 - F_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & +3 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3c = 3 \quad \Rightarrow c = 1$$
$$4b - 3c = 9 \Rightarrow b = 3$$
$$a + 2b - 3c = 0 \Rightarrow a = -3$$

a = -3, b = 3, c = 1

Problema A.2: Álgebra. Un fabricante de sistemas de iluminación quiere producir focos de tecnología led en dos modelos distintos: A y B. Para diseñar la estrategia de producción diaria tendrá en cuenta que se producirán al menos 50 focos del modelo A, que el número de focos del modelo B no superará las 300 unidades y que se producirán al menos tantos focos del modelo B como del modelo A. Además, la producción total no superará las 500 unidades diarias.

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema.

b) Representa la región factible y calcule sus vértices.

c) Si el beneficio obtenido por cada foco del modelo A es de 60 euros y por cada foco del modelo B es de 40 euros, ¿cuántos focos de cada modelo debe producir diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende el beneficio máximo?

Solución:

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema.

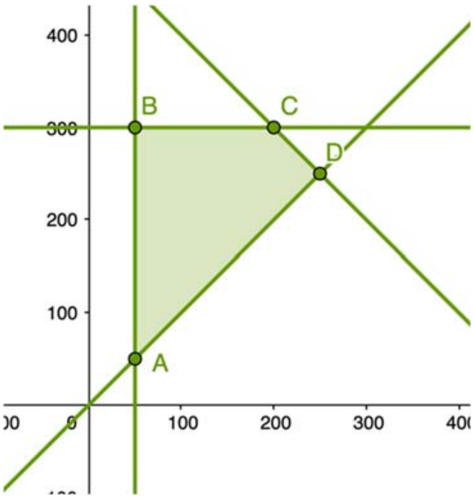
x: nº de focos tipo A que se producen diariamente

y: nº de focos tipo B que se producen diariamente

$$\begin{cases} x \geq 50 \\ y \leq 300 \\ y \geq x \\ x + y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

*Podemos prescindir de las restricciones $x \geq 0,\ y \geq 0$ al quedar incluidas en las restricciones $x \geq 50, y \geq x$

b) Representa la región factible y calcule sus vértices.



$$\begin{aligned} &A: (x = 50) \cap (x = y) &&\Rightarrow A = (50,50) \\ &B: (x = 50) \cap (y = 300) &&\Rightarrow B = (50,300) \\ &C: (y = 300) \cap (x + y = 500) &&\Rightarrow C = (200,300) \\ &D: (y = x) \cap (x + y = 500) &&\Rightarrow D = (250,250) \end{aligned}$$

c) Si el beneficio obtenido por cada foco del modelo A es de 60 euros y por cada foco del modelo B es de 40 euros, ¿cuántos focos de cada modelo debe producir diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende el beneficio máximo?

Maximizar z=f(x,y)=60x+40y

A: f(50,50)=60·50+40·50=5 000€

B: f(50,300)=60·50+40·300=15 000€

C: f(200,300)=60·200+40·300=24 000€

D: f(250,250)=60·250+40·250=25 000€ → máximo

Deben producirse 250 unidades diarias de cada modelo para obtener un beneficio máximo de 25 000 €

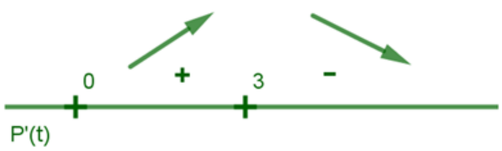
Problema A.3: Análisis. El número de personas (en miles) que visitan cada año un parque temático viene dado por la función: $\boldsymbol{P(t)=\frac{180t}{t^2+9}}$, $\boldsymbol{t\geq 0}$ donde t es el tiempo transcurrido en años desde su apertura en el año 2010 (t = 0). **a)** Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de visitantes.
b) ¿En qué año recibió el mayor número de visitantes? ¿A cuánto ascienden? Razone las respuestas.
c) ¿A partir de qué año el número de visitantes será inferior a 18 000 personas? ¿Qué ocurrirá con el número de visitantes con el paso del tiempo? Razone las respuestas.

Solución:

El número de personas (en miles) que visitan cada año un parque temático viene dado por la función: $\boldsymbol{P(t)=\frac{180t}{t^2+9}}$, $\boldsymbol{t\geq 0}$ donde t es el tiempo transcurrido en años desde su apertura en el año 2010 (t = 0).
a) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de visitantes.

Estudiamos el signo de la derivada 1ª en el dominio de la función (t$\geq \boldsymbol{0}$)

$\boldsymbol{P'(t)=\frac{180(t^2+9)-360t^2}{(t^2+9)^2}=\frac{-180t^2+1620}{(t^2+9)^2}}$; $\boldsymbol{P'(t)=0\Rightarrow t^2=9\Rightarrow t=\pm 3}$ (t = 3 punto crítico)



La función es creciente en $\boldsymbol{(0,3)}$ y decreciente en $\boldsymbol{(3,\infty)}$

El nº de visitantes fue creciendo desde el año 2010, año de la apertura del parque hasta 2013. A partir de ese momento el nº de visitantes desciende

b) ¿En qué año recibió el mayor número de visitantes? ¿A cuánto ascienden? Razone las respuestas.
P(0) = 0 por lo tanto x = 3 es un máximo absoluto de la función (continua en el punto x = 3 y pasa de crecimiento a decrecimiento). P(3) = 30

El mayor número de visitantes se registra en el año 2013 y es de 30 000 personas

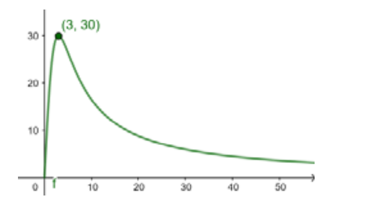
c) $\boldsymbol{P(t)<18}$. Resolvemos la inecuación:

$$\boldsymbol{\frac{180t}{t^2+9}<18\Rightarrow 180t<18(t^2+9)\Rightarrow 0<18t^2-180t+162}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow t^2-10t+9>0;\ t^2-10t+9=0\Rightarrow t=\frac{10\pm 8}{2}\Rightarrow t=1,t=9}$$

La función toma valores inferiores a 18 en los intervalos $\boldsymbol{(0,1)\cup(9,\infty)}$ por lo tanto:

A partir de 2019 (t = 9) el nº de visitantes desciende de los 18 000.



¿Qué ocurrirá con el número de visitantes con el paso del tiempo?

Calculamos el límite observando grado del numerador y denominador

$$\lim_{t\to\infty}\frac{180t}{t^2+9}=0$$

Con el paso del tiempo el número de visitantes al parque descenderá tendiendo a cero personas.

Problema A.4:

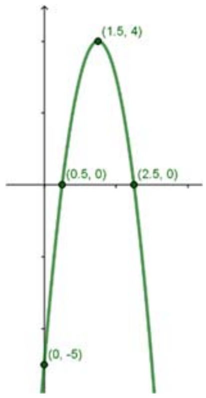
Dada la función $\boldsymbol{f(x) = -4x^2 + 12x - 5}$.

a) Realice su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.

b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x), el eje OX y las rectas x = 1, x = 2.

Solución:

a) $\mathrm{f(x) = -4x^2 + 12x - 5}$



Puntos de corte con eje $\overline{OY}$: $\boldsymbol{y = 0 \Rightarrow -4x^2 + 12x - 5 = 0 \Rightarrow}$

$$\boldsymbol{x = -\frac{12 \pm 8}{-8} = \begin{cases} \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ \frac{5}{2} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}, 0\right) \end{cases}}$$

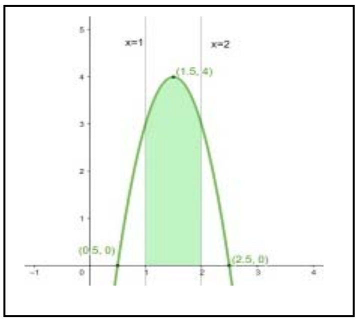
Puntos de corte con eje $\overline{OX}$: $\boldsymbol{x = 0 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow (0, -5)}$

Extremos: $\boldsymbol{f'(x) = -8x + 12}$

$\boldsymbol{f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}}$ punto crítico

$\boldsymbol{f''(x) = -8 \Rightarrow f''\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = 4}$ máximo relativo de *f(x)* $\Rightarrow \boldsymbol{(\frac{3}{2}, 4)}$

El extremo también se puede calcular, teniendo en cuenta que la función de partida es una parábola cóncava (∩), calculando las coordenadas del vértice:



$\boldsymbol{x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \quad y_v = 4}$

b) A = $\boldsymbol{\int_1^2 (f(x) - g(x))dx = \int_1^2 (-4x^2 + 12x - 5)dx =}$

$$\boldsymbol{\left[-\frac{4x^3}{3} + 6x^2 - 5x\right]_1^2 = \frac{-32}{3} + 24 - 10 - \left(-\frac{4}{3} + 6 - 5\right) = \frac{11}{3}u^2}$$

$$\mathrm{A = \frac{11}{3} u^2}$$

Problema A.5:

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que P(A) = 0.4, $\boldsymbol{P(\overline{B}) = 0.7}$ y $\boldsymbol{P(\overline{B}/A) = 0.75}$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) $\boldsymbol{P(A \cap \overline{B})}$ b) $\boldsymbol{P(A \cup B)}$ c) $\boldsymbol{P(A \cap B)}$. d) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta.

Solución:

Teniendo en cuenta la propiedad $\boldsymbol{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$

$\boldsymbol{P(A) = 0.4 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0.6}$
$\boldsymbol{P(\overline{B}) = 0.7 \Rightarrow P(B) = 0.3}$
$\boldsymbol{P(\overline{B}/A) = 0.75 \Rightarrow P(B/A) = 0.25}$

a) Como $\boldsymbol{P(\overline{B}/A) = \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)}}$

$$\mathrm{P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}/A) = 0.4 \cdot 0.75 = 0.3}$$

b) $P(A \cap B) = P(A) - P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.3 - 0.1 = 0.6$$

c) Calculada en el apartado anterior:

$$P(A \cap B) = 0.1$$

d) Para que dos sucesos A y B sean independientes debe cumplirse alguna de las siguientes condiciones:

$\boldsymbol{P(A) = P(A/B) \quad o \quad P(B) = P(B/A) \quad o \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

En este caso $\boldsymbol{P(A \cap B) = 0.1}$

$\boldsymbol{P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12,}$

Por lo tanto, los sucesos **no** son independientes

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE JULIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 6 preguntas, todas con la misma puntuación (3,33), de las que se puede responder un MÁXIMO DE 3, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, sólo se corregirán las 3 primeras respondidas.

Problema 1: Álgebra. Disponemos de tres granjas A, B y C para la cría ecológica de pollos. La granja A tiene capacidad para criar un 20% más de pollos que la granja B, y la granja B tiene capacidad para criar el doble de pollos que la granja C. Se sabe además que entre las tres granjas se pueden criar un total de 405 pollos.

a) Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior. ¿Cuántos pollos se pueden criar en cada una de las tres granjas?

Problema 2: Álgebra. El Comité Organizador de un Congreso cuenta con dos tipos de habitaciones, A y B, para ofrecer como alojamiento a sus participantes. Para realizar la contratación, han decidido que el número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A, y que el número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160. Además, se sabe que en total serán necesarias como máximo 200 habitaciones.

a) Plantee el sistema de inecuaciones asociado a este problema.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Si los costes son de 80 € por cada habitación de tipo A y de 50 € por cada habitación de tipo B, ¿cuál es el coste máximo de alojamiento que afrontaría el Comité Organizador? ¿Cuántas habitaciones de cada tipo habría que contratar para que se diese esa situación?

Problema 3: Análisis. Los gastos financieros de una organización, en cientos de miles de euros, siguen la función:

$$G(t)=\begin{cases} 4-\frac{t}{3} & si\ \ 0\le t\le 3 \\ \frac{5t-3}{t+1} & si\ \ t>3 \end{cases}$$ siendo t el tiempo en años transcurridos.

a) ¿En qué momento los gastos son iguales a 400 000 euros? Razona la respuesta.

b) ¿Cuándo crece G(t)? ¿Cuándo decrece G(t)? ¿Cuándo los gastos alcanzan su valor mínimo y cuánto valen?

c) ¿Qué ocurre con los gastos cuando el número de años crece indefinidamente?

Problema 4: Análisis. Una pequeña empresa comercializa paraguas a 60 euros la unidad. El coste de producción diario de "x" paraguas viene dado por la función $C(x)= x^2-10x$, estando limitada su capacidad de producción a un máximo de 70 paraguas al día ($0\le x<70$).

a) Obtenga las expresiones de las funciones que determinan los ingresos y los beneficios diarios obtenidos por la empresa en función del número de paraguas producidos "x".

b) Determine el número de paraguas que debe producir diariamente para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascienden los ingresos, los costes y los beneficios diarios en este caso? Razone la respuesta.

Problema 5: Estadística y Probabilidad. Una empresa de transporte decide renovar su flota de vehículos. Para ello encarga 240 vehículos al distribuidor A, 600 al distribuidor B y 360 al distribuidor C. Se sabe que el 10% de los vehículos suministrados por el distribuidor A tienen algún defecto, siendo estas proporciones del 20% y 15% para los distribuidores B y C respectivamente.

Para aceptar o rechazar el pedido la empresa revisa un vehículo elegido al azar del total de vehículos, rechazando todo el pedido si el vehículo tiene algún defecto.

a) Determine el porcentaje de pedidos rechazados.

b) Si el vehículo revisado resulta ser NO defectuoso, calcule la probabilidad de que provenga del distribuidor A.

Problema 6: Estadística y probabilidad.

Una empresa editorial desea conocer el impacto que tendrá la publicación de una nueva obra de un reconocido novelista. Tras revisar a 100 personas aficionadas a la lectura, 80 de ellas reconocen que adquirirán esa nueva obra.

a) ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra está entre el 69.7% y el 90.3%? **b)** Si se sabe que 8 de cada 10 personas aficionadas a la lectura adquirirán la obra y elegimos una muestra de n=144 de esas personas, calcule la probabilidad de que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra sea superior al 75%.

SOLUCIONES

Problema A.1:

Disponemos de tres granjas A, B y C para la cría ecológica de pollos. La granja A tiene capacidad para criar un 20 % más de pollos que la granja B, y la granja B tiene capacidad para criar el doble de pollos que la granja C. Se sabe además que entre las tres granjas se pueden criar un total de 405 pollos.

a) Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior. ¿Cuántos pollos se pueden criar en cada una de las tres granjas?

Solución:

Definimos las variables

a) *x* = nº de pollos que puede criar la granja *A*

y = nº de pollos que puede criar la granja *B*

z = nº de pollos que puede criar la granja *C*

Planteamos las ecuaciones:

La granja *A* tiene capacidad para criar un 20 % más de pollos que la granja *B* $\Longrightarrow$ *x* = 1.20*y*

la granja *B* tiene capacidad para criar el doble de pollos que la granja *C* $\Longrightarrow$ *y* = 2*z*

entre las tres granjas se pueden criar un total de 405 pollos. $\Longrightarrow$ *x + y + z* = 405

Por lo tanto, el sistema asociado:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1.20y \\ y &= 2z \\ x + y + z &= 405 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} x &= 1.20y \\ y &= 2z \\ x + y + z &= 405 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} x - 1.20y &= 0 \\ y - 2z &= 0 \\ x + y + z &= 405 \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos

$$x = 1.20y \quad \Rightarrow 1.20y + y + z = 405 \quad \Rightarrow 2.20y + z = 405 \quad \Rightarrow \left.\begin{aligned} z &= 405 - 2.20y \\ z &= \frac{y}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$405 - 2{,}20y = \frac{y}{2} \Rightarrow \quad 810 - 4{,}40y = y \quad \Rightarrow y = \frac{810}{5{,}40} \Rightarrow \quad y = 150, \quad z = 75, \quad x = 180$$

Puede criar 180 pollos en la granja A, 150 en la granja B y 75 en la granja C.

Podemos resolverlo por Gauss utilizando cálculo con matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.20 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 405 \end{pmatrix} F_3 - F_1 \begin{pmatrix} 1 & -1.20 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2.20 & 1 & 405 \end{pmatrix} F_3 - 2.12F_2 \begin{pmatrix} 1 & -1.20 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5.4 & 405 \end{pmatrix} \Rightarrow ?$$

$5.4z = 405 \Rightarrow z = \dfrac{405}{5.4} \Rightarrow z = 75$ pollos que puede criar la graja C

$y - 2z = 0 \Rightarrow y = 150$ pollos que puede criar la graja B

$x - 1120y = 0 \Rightarrow x = 180$ pollos que puede criar la graja A

*Se facilitarían mucho los cálculos si hubiésemos simplificado la primera ecuación $x - 1.20y = 0 \quad \Longrightarrow$ $100x - 120y = 0 \quad \Longrightarrow 5x - 6y = 0$

Problema A.2:

El Comité Organizador de un Congreso cuenta con dos tipos de habitaciones, A y B, para ofrecer como alojamiento a sus participantes. Para realizar la contratación, han decidido que el número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A, y que el número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160. Además, se sabe que en total serán necesarias como máximo 200 habitaciones.

a) Plantee el sistema de inecuaciones asociado a este problema.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Si los costes son de 80 € por cada habitación de tipo A y de 50 € por cada habitación de tipo B, ¿cuál es el coste máximo de alojamiento que afrontaría el Comité Organizador? ¿Cuántas habitaciones de cada tipo habría que contratar para que se diese esa situación?

Solución:

a) Consideramos las variables:

x habitaciones tipo A

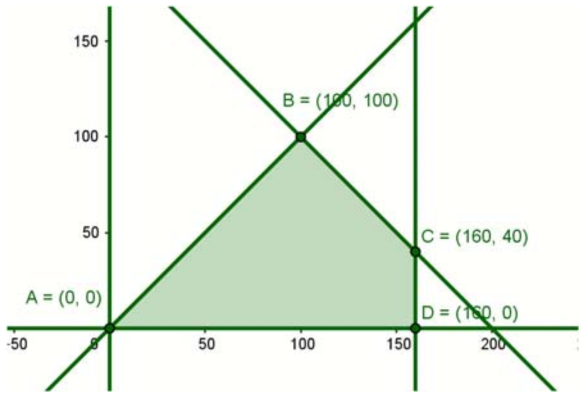
y habitaciones tipo B

$$\begin{cases} y \leq x \\ x \leq 160 \\ x + y \leq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Podemos prescindir de la restricción x ≥ 0 por estar ya considerada en las restricciones $y \leq x$, $y \geq 0$

b)

$$\begin{cases} r_1: & x - y = 0 \\ r_2: & x = 160 \\ r_3: & x + y = 200 \\ r_4: & x = 0 \\ r_5: & y = 0 \end{cases}$$



Calculamos los vértices de la región factible

A(0, 0)

B: $r_1 \cap r_3$ $\left.\begin{matrix} x = y \\ x + y = 200 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B(100,100)$

$C: r_3 \cap r_2$ $\left.\begin{matrix} x + y = 200 \\ x = 160 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C(160,40)$

D: $r_2 \cap r_5$ $\left.\begin{matrix} x = 160 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D(160,0)$

c) la función objetivo a maximizar *z = f(x, y) = 80x + 50y*; A(0, 0) f(0, 0) = 0

B(100, 100) f(100, 100) = 80 · 100 + 50 · 100 = 13 000 €

C(160, 40) f(160, 40) = 80 · 160 + 50 · 40 = 14 800 €

D(160, 0) f(160, 0) = 80 · 160 = 12 800 €

El Comité Organizador afrontará un coste máximo de 14 800 € si contrata 160 habitaciones tipo A y 40 tipo B.

Problema A.3:

Los gastos financieros de una organización, en cientos de miles de euros, siguen la función:

$$\boldsymbol{G(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{4 - \frac{t}{3}} & \boldsymbol{si \quad 0 \leq t \leq 3} \\ \boldsymbol{\frac{5t-3}{t+1}} & \boldsymbol{si \quad t > 3} \end{cases}$$ siendo t el tiempo en años transcurridos.

a) ¿En qué momento los gastos son iguales a 400 000 euros? Razona la respuesta.
b) ¿Cuándo crece G(t)? ¿Cuándo decrece G(t)? ¿Cuándo los gastos alcanzan su valor mínimo y cuánto valen?
c) ¿Qué ocurre con los gastos cuando el número de años crece indefinidamente?

Solución:

a) La función de gastos viene dada en cientos de miles por lo que debemos determinar en que momento *G(t)* = 4

$$4 - \frac{t}{3} = 4 \Rightarrow \frac{t}{3} = 0 \Rightarrow t = 0$$

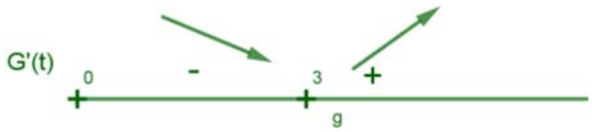
$$\frac{5t - 3}{t + 1} = 4 \Rightarrow 5t - 3 = 4t + 4 \Rightarrow t = 7$$

Los gastos ascienden a 400 000 € en el año que la empresa empieza a funcionar (t = 0) y en el séptimo año (t = 7)

b) Para estudiar el crecimiento estudiamos el signo de la primera derivada

$$G'(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3} & 0 \leq t \leq 3 \\ \dfrac{5(t+1) - 5t + 3}{(t+1)^2} & t \geq 3 \end{cases} \Rightarrow G'(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3} & 0 \leq t \leq 3 \\ \dfrac{8}{(t+1)^2} & t \geq 3 \end{cases}$$

$G'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, \infty)$ por lo tanto, la función no tiene puntos críticos, para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento tendremos en cuenta los puntos en los que la función cambia de expresión (t=3):



Los gastos disminuyen en los tres primeros años y aumentan a partir del tercero.

El mínimo debe alcanzarse el tercer año $G(3) = \frac{5 \cdot 3 - 3}{3+1} = 3$

El gasto mínimo se alcanza el tercer año y asciende a 300 000 €

c)

$$\lim_{t \to \infty} \frac{5t-3}{t+1} = 5 \Rightarrow$$

Con el paso del tiempo los gastos tienden a estabilizarse en torno a los 500 000 €.

Problema A.4:

Una pequeña empresa comercializa paraguas a 60 euros la unidad. El coste de producción diario de "x" paraguas viene dado por la función $C(x) = x^2 - 10x$, estando limitada su capacidad de producción a un máximo de 70 paraguas al día ($\mathbf{0 \leq x < 70}$) .

a) Obtenga las expresiones de las funciones que determinan los ingresos y los beneficios diarios obtenidos por la empresa en función del número de paraguas producidos "x".

b) Determine el número de paraguas que debe producir diariamente para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascienden los ingresos, los costes y los beneficios diarios en este caso? Razone la respuesta.

Solución:

$$C(x) = x^2 - 10x \qquad 0 \leq x < 70$$

a) Ingresos: $I(x) = 60x$

Beneficios: $B(x) = I(x) - C(x) = 60\mathrm{x} - (\mathrm{x}^2 - 10\mathrm{x}) = -\mathrm{x}^2 + 70\mathrm{x} \qquad 0 \leq \mathrm{x} < 70$

b) Función de beneficios es una parábola cóncava (∩) por lo que para determinar su máximo podemos calcular su vértice o hacer un estudio de las derivadas

$B'(x) = -2x + 70$

$B'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{x} = \frac{70}{2} \;\Rightarrow \mathrm{x} = 35$ punto crítico

$B''(x) = -2 < 0 \quad \forall x$ entonces $x = 35$, $y = 1\,225$ máximo relativo de la función $B(x)$.

Ingresos I(35) = 2 100

Costes C(35) = 875

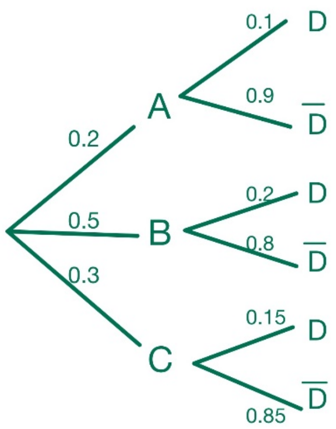
Produciendo **35** paraguas diarios se obtiene un **beneficio** máximo de **1 225 €** consiguiéndose unos **ingresos de 2 100 €** y unos **costes de producción de 875 €.**

Problema A.5:

Una empresa de transporte decide renovar su flota de vehículos. Para ello encarga 240 vehículos al distribuidor A, 600 al distribuidor B y 360 al distribuidor C. Se sabe que el 10 % de los vehículos suministrados por el distribuidor A tienen algún defecto, siendo estas proporciones del 20 % y 15 % para los distribuidores B y C respectivamente.
Para aceptar o rechazar el pedido la empresa revisa un vehículo elegido al azar del total de vehículos, rechazando todo el pedido si el vehículo tiene algún defecto.
a) Determine el porcentaje de pedidos rechazados.
b) Si el vehículo revisado resulta ser NO defectuoso, calcule la probabilidad de que provenga del distribuidor A.

Solución:

Definimos los sucesos:
A vehículos encargados al distribuidor A $\Longrightarrow$ P(A) = 240/1200 = 0.2
B vehículos encargados al distribuidor B $\Longrightarrow$ P(B) = 600/1200 = 0.5
C vehículos encargados al distribuidor C $\Longrightarrow$ P(C) = 360/1200 = 0.3
D Vehículo defectuoso
P(D/A) = 0.1 (10 %)
P(D/B) = 0.2 (20 %)
P(D/C) = 0.15 (15%)
Podemos utilizar un diagrama de árbol



P(rechazado) = P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = 0.2 · 0.1 + 0.5 · 0.2 + 0.3 · 0.15 = 0.165

El porcentaje de pedidos rechazados, por contener algún vehículo defectuoso es del 16.5 %.

b) $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{D}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{D}) = 1 - 0.165 = 0.835$ luego

$$P(A/\overline{\mathrm{D}}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{D}})}{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{D}})} = \frac{0.2 \cdot 0.9}{0.835} = 0.216$$

La probabilidad de que un vehículo revisado venga del proveedor A, sabiendo que no es defectuoso, es $P(A/\overline{\mathrm{D}}) = 0.216$

Problema A.6:

Una empresa editorial desea conocer el impacto que tendrá la publicación de una nueva obra de un reconocido novelista. Tras revisar a 100 personas aficionadas a la lectura, 80 de ellas reconocen que adquirirán esa nueva obra.

a) ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra está entre el 69.7 % y el 90.3 %?

b) Si se sabe que 8 de cada 10 personas aficionadas a la lectura adquirirán la obra y elegimos una muestra de n = 144 de esas personas, calcule la probabilidad de que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra sea superior al 75 %.

Solución:

p = proporción de aficionados a la lectura que adquirirán una obra de un reconocido novelista

Sea $\hat{p}$ el estadístico proporción (proporción muestral) de aficionados a la lectura que adquirirán una obra de un reconocido novelista:

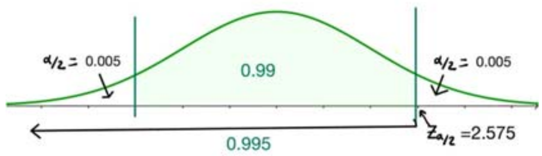
$$\hat{p} = \frac{80}{100} = 0.8$$
$$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.2$$

El intervalo de confianza para la proporción poblacional con un nivel de confianza $1-\alpha$ será

$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$ donde $z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ es el radio del intervalo

En nuestro caso el intervalo es (0.697, 0.903) cuyo radio es

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \frac{0.903-0.697}{2} = 0.103 \implies$$



$$z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{0.8\cdot 0.2}{100}} = 0.103 \quad \implies \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$$

Buscamos en la tabla de la distribución N(0, 1) y obtenemos $\frac{\alpha}{2} = 1 - 0.9950$ (valor intermedio entre (0.9949 y 0.9951)

El nivel de significación será $\alpha = 0.005$ por lo tanto el nivel de confianza $1-\alpha$ = 0.995

Podemos afirmar con un nivel de confianza del 99.5 % que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra está entre el 69.7 % y el 90.3 %

b) Conocemos la proporción de la población que adquirirá la obra: $p = \frac{8}{10} = 0.8$; q = 1 – p = 0.2

Sea $\hat{p}$ la proporción de aficionados a la lectura que, de una muestra de 144, personas adquirirá la obra.

$$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = N\left(0.8, \sqrt{\frac{0.8\cdot 0.2}{144}}\right) = N(0.8\,, 0.03) \implies Z = \frac{\hat{p}-0.8}{0.03} \sim N(0,1)$$

$P(\hat{p} > 0.75) = P(Z > \frac{0.75-0.8}{0.03})$ = P(Z > -1.67) = P(Z < 1.67) = 0.9525

La probabilidad de que la proporción de personas aficionadas a la lectura, de una muestra de 144 personas, adquieran la obra sea superior al 75 % es de 0.9525.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019 – 2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques que contienen tres ejercicios cada uno de ellos. De cada uno de los bloques, el alumno podrá contestar como máximo a dos ejercicios. En total deberá contestar a 4 ejercicios. Es decir, podrá contestar a dos ejercicios de un bloque y uno de cada uno de los otros dos, o bien elegir dos bloques y contestar a dos ejercicios de cada uno. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calulen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

Bloque 1. Álgebra y Programación Lineal.
Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1.1.– De los bebés que se han inscrito en el mes de mayo en el registro civil de Logroño, 63 tienen de nombre Alba, Lucía, Pedro o Mateo. 48 de ellos tienen tienen los nombres de Alba, Pedro o Mateo. Sabemos que el número de bebés inscritos con el nombre de Pedro es igual a la suma de los inscritos con los nombres de Alba y Mateo; además se han inscrito tantos bebés con el nombre de Alba como la suma de la mitad de los inscritos con el nombre de Pedro más los inscritos con el nombre de Mateo.

(I) ¿Cuántos de estos bebés se llaman Alba?, ¿cuántos Pedro?, ¿cuántos Mateo? **(2 puntos)**

(II) ¿Cuántos bebés se llaman Lucía? **(0,5 puntos)**

1.2.– Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(I) Calcula A^2 y A^3. **(0,5 puntos)**

(II) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15} y A^{30}. **(1 punto)**

(III) Resuelve la ecuación matricial $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

1.3.– Julián dispone de 10 hectáreas de terreno para cultivar dos variedades de uva: tempranillo y viura. El beneficio que le produce una hectárea de tempranillo es de 2 mil euros y la de viura 3 mil euros. Dispone de 180 kg de productos fitosanitarios; una hectárea de tempranillo precisa de 10 kg de estos productos y una hectárea de viura 20. Vendimiar una hectárea de tempranillo le cuesta 20 horas y una de viura 10 horas; dispone de un total de 160 horas de trabajo de vendimiadores.

(I) ¿Cómo puede distribuir Julián el cultivo de sus 10 hectáreas respetando sus restricciones? Dibuja en el plano la región factible que represente los posibles repartos. **(1,25 puntos)**

(II) Escribe la función que representa el beneficio que obtiene Julián. ¿Con qué distribución obtiene el máximo beneficio? Calcula dicho máximo. **(1,25 puntos)**

Bloque 2. Análisis.
Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

2.1.– Sea la función

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2, & 0 \le t < 1 \\ 3t-1, & 1 \le t < 2 \\ -5t+15, & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

(I) Estudia razonadamente su continuidad. **(0,75 puntos)**

(II) Haz una representación gráfica de la función f. **(1 punto)**

(III) Si la función f representa la asistencia (en miles de personas) a un festival de música en función del tiempo t (medido en horas), ¿en qué momento la asistencia fue máxima? (Para qué valor de t). ¿Cuántas personas había en el festival en ese momento? **(0,75 puntos)**

2.2.– Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(I) Determina a, b y c sabiendo que el punto $(-2, 1)$ pertenece a la gráfica de la función f y que, además, el punto $(-1, 0)$ es un extremo relativo de f. **(1,25 puntos)**

(II) Determina el área que encierra la gráfica de f y el eje OX en el intervalo $[0, 3]$. **(1,25 puntos)**

NOTA: si no has conseguido determinar a, b y c en el apartado anterior, toma $a = 1$, $b = 2$ y $c = 1$ en este segundo apartado.

2.3.– La producción de un invernadero depende de la temperatura a la que esté regulado. La cantidad de toneladas de verduras que produce viene dada por la siguiente función, en la que x indica la temperatura en grados Celsius:

$$f(x) = (x+3)^2(36-x) \qquad (0 \le x \le 36)$$

(I) ¿Para qué valor de x se obtiene la máxima producción? **(1,5 puntos)**

(II) ¿Cuántas toneladas se obtienen a esa temperatura? **(0,5 puntos)**

(III) ¿Para qué valores de x el invernadero no produce nada? **(0,5 puntos)**

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.
Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

3.1.– En una residencia canina hay en total 120 perros; de ellos 40 son pastores alemanes (35 negros y 5 blancos), 30 pekineses (18 negros y 12 blancos) y 50 mastines (42 negros y 8 blancos).

(I) Hemos elegido un perro al azar, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea pekinés? **(0,75 puntos)**

(II) Elegido al azar un perro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de color blanco? **(0,75 puntos)**

(III) Se ha elegido al azar un perro que ha resultado ser blanco, ¿cuál es la probabilidad de que sea un mastín? **(1 punto)**

3.2.– La vida media de un modelo de grapadoras sigue una distribución normal con una desviación típica de 60 días.

(I) Si la media fuese de 950 días, ¿cuál sería la probabilidad de que la duración media de una muestra de 100 grapadoras superase los 959 días? **(1,25 puntos)**

(II) Si una muestra de 64 grapadoras tiene una vida media de 980 días, determina un intervalo de confianza del 90 % para la media de la producción. **(1,25 puntos)**

3.3 – Luis ha hecho una cartulina con cada una de las siete letras de LA RIOJA y las ha introducido en una urna.

(I) Si extrae una cartulina, ¿cuál es probabilidad de que sea la R?, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea la A? **(0,5 puntos)**

(II) Luis extrae una cartulina y, a continuación, sin volver a introducir la primera, saca otra y se las muestra en ese orden a María ¿Cuál es la probabilidad de que María vea LA? **(0,5 puntos)**

(III) Luis repite la operación y le vuelve a mostrar las cartas a María ¿Cuál es la probabilidad de que María pueda formar la palabra LA?, ¿y de que pueda formar la palabra LO? **(0,75 puntos)**

(IV) Luis extrae ahora tres cartulinas sin reemplazar después de cada extracción. ¿Cuál es la probabilidad de que María lea RIO si se las muestra en el orden en el que Luis las ha extraído? ¿Y de que lea RIA? **(0,75 puntos)**

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019 – 2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

(1) Se sugiere un tipo de corrección positivo, es decir, partiendo de cero y sumando puntos por los aciertos que el alumno vaya obteniendo.

(2) Como excepción al apartado anterior, los errores muy graves, que muestren un desconocimiento profundo de propiedades y funciones básicas (errores repetidos en la manipulación de igualdades y desigualdades o en operaciones con fracciones, errores graves al desarrollar cuadrados o en la resolución de ecuaciones de segundo grado, etc.), penalizarán especialmente y pueden suponer un cero en el apartado en el que se hayan cometido.

(3) Se deberá valorar la exposición lógica y la coherencia de las respuestas, tanto en cuestiones teóricas como prácticas. Algunos ejemplos:

(a) Si al resolver un sistema de ecuaciones, el alumno comete un error **numérico**, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se prestará especial atención siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial.

(b) En la representación gráfica de funciones, se valorará la coherencia del dibujo con los datos obtenidos previamente por el alumno. (Vale aquí la misma excepción que en el párrafo anterior.)

(4) La puntuación máxima de cada pregunta figurará en su enunciado. En los casos en los que la pregunta contenga apartados, lo que aparecerá es el valor de cada uno de ellos.

(5) Si un alumno da una respuesta acertada a un problema escribiendo solo los resultados, sin aportar el desarrollo que le ha permitido obtener dicha solución, la puntuación en este apartado no podrá ser superior al 50 % de la nota máxima prevista. Como excepción, se será flexible en las respuestas a cuestiones de estadística y probabilidad.

SOLUCIONES CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO 2020

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal

Problema 1.1:

1º) De los bebés que se han inscrito en el mes de mayo en el registro civil de Logroño, 63 tienen nombre Alba, Lucía, Pedro o Mateo. 48 de ellos tienen los nombres de Alba, Pedro o Mateo. Sabemos que el número de bebés inscritos con el nombre de Pedro es igual a la suma de los inscritos con los nombres de Alba y Mateo; además se han inscrito tantos bebés con el nombre de Alba como la suma de la mitad de los inscritos con el nombre de Pedro más los inscritos con el nombre de Mateo.

a) ¿Cuántos de estos bebés se llaman Alba? ¿Cuántos Pedro? ¿Cuántos Mateo?

b) ¿Cuántos bebés se llaman Lucía?

Solución:

a, b)

Sean x, y, z, t los bebés registrados en Logroño con los nombres de Alba, Lucía, Pedro y Mateo, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=63 \\ x+z+t=48 \\ z=x+t \\ x=\frac{z}{2}+t \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z+t=63 \\ x+z+t=48 \\ x-z+t=0 \\ 2x-z-2t=0 \end{array}\right\}.$$

Restando a la primera ecuación la segunda: $y = 63 - 48 = 15$.

$$\underline{Se\ llaman\ Lucía\ 15\ de\ los\ bebés\ registrados}.$$

El sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+z+t=48 \\ x-z+t=0 \\ 2x-z-2t=0 \end{array}\right\}.$

Restando a la primera ecuación la segunda: $2z = 48;\ \ z = 24$.

$$\underline{Se\ llaman\ Pedro\ 24\ de\ los\ bebés\ registrados}.$$

El sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+24+t=48 \\ 2x-24-2t=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+t=24 \\ 2x-2t=24 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+t=24 \\ x-t=12 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 36;\ \ x = 18. 18 + t = 24;\ \ t = 24 - 18 \Rightarrow t = 6.$

$$\underline{Se\ llaman\ Alba\ 18\ de\ los\ bebés\ registrados\ y\ 6\ se\ llaman\ Mateo}.$$

$$Se\ llaman\ Lucía\ \mathbf{15}\ de\ los\ bebés\ registrados;\ Pedro, \mathbf{24};\ Alba, \mathbf{18}\ y\ Mateo, \mathbf{6}.$$

Problema 1.2:

2º) Si $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$:

$a)$ Calcula A^2 y A^3.

$b)$ Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, calcula A^{15} y A^{30}.

$c)$ Resuelve la ecuación matricial $AX=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Solución:

$a)$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I.}$$

$$A^3=A^2\cdot A=I\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=A.}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I;\ A^3=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=A$$

$b)$

$$A^{15}=A^{14}\cdot A=(A^2)^7\cdot A=I^7\cdot A=I\cdot A=\underline{\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=A.}$$

$$A^{30}=A^{15}\cdot A^{15}=A\cdot A=\underline{A^2=I}.$$

$$A^{15}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=A;\ A^{30}=A^2=I.$$

$c)$

Teniendo en cuenta que $A^2=I$, del apartado $a)$:

$$AX=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ \ A\cdot A\cdot X=A\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ \ A^2\cdot X=A\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};$$

$$I\cdot X=A\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{X=A\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}.$$

$$X=A\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$$

Problema 1.3:

3º) Julián dispone de 10 hectáreas de terreno para cultivar dos variedades de uva: tempranillo y viura. El beneficio que le produce una hectárea de tempranillo es de 2 000 euros y la de viura, 3 000 euros. Dispone de 180 kg de productos fitosanitarios; una hectárea de tempranillo precisa de 10 kg de estos productos y una hectárea de viura 20. Vendimiar una hectárea de tempranillo le cuesta 20 horas y una de viura 10 horas; dispone de un total de 160 horas de trabajo de vendimiadores.

a) ¿Cómo puede distribuir Julián el cultivo de sus 10 hectáreas respetando sus restricciones? Dibuja en el plano la región factible que represente los posibles repartos.

b) Escribe la función que representa el beneficio que obtiene Julián. ¿Con qué distribución obtiene el máximo beneficio? Calcula dicho máximo.

Solución:

a, b)

Sean x e y el número de hectáreas plantadas con las variedades tempranillo y viura, respectivamente.

La función de objetivos es $f(x, y) = 2\,000x + 3\,000y$.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x + y \leq 10 \\ 10x + 20y \leq 180 \\ 20x + 10y \leq 160 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 18 \\ 2x + y \leq 16 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$

$(1) \Rightarrow x + y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	10
y	10	0

$(2) \Rightarrow x + 2y \leq 18 \Rightarrow y \leq \frac{18-2x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	18
y	9	0

$(3) \Rightarrow 2x + y \leq 16 \Rightarrow y \leq 16 - 2x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	8
y	16	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

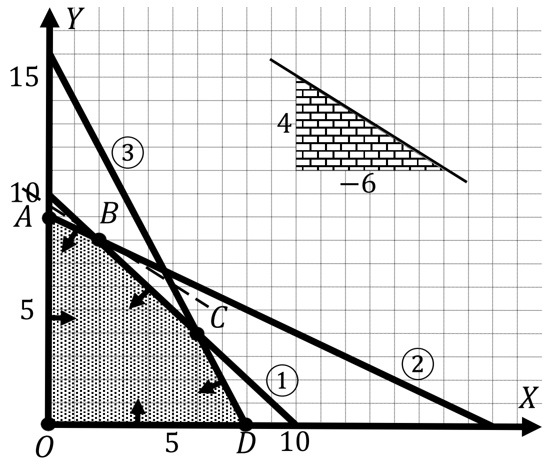
Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + 2y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 9).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ x + 2y = 18 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x - y = -10 \\ x + 2y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 8;\ \ x = 2 \Rightarrow B(2, 8).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x + y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 9 \Rightarrow C(9, 0).$



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,9) = 2\,000 \cdot 0 + 3\,000 \cdot 9 = 0 + 27\,000 = 27\,000.$

$B \Rightarrow f(2,8) = 2\,000 \cdot 2 + 3\,000 \cdot 8 = 4\,000 + 24\,000 = 28\,000.$

$C \Rightarrow f(9,0) = 2\,000 \cdot 9 + 3\,000 \cdot 0 = 18\,000 + 0 = 18.000.$

El valor máximo se produce en el punto $B(2,8)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 2\,000x + 3\,000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2\,000}{3\,000}x = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{4}{6}.$$

$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ cultivando\ \mathbf{2}\ ha\ de\ tempranillo\ y\ \mathbf{8}\ ha\ de\ viura.}$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ \mathbf{28\,000}\ euros.}$

Bloque 2. Análisis

Problema 2.1:

4º) Sea la función $f(t)=\begin{cases} 2t^2, & 0\le t<1 \\ 3t-1, & 1\le t<2 \\ -5t+15, & 2\le t\le 3 \end{cases}$.

a) Estudia razonadamente su continuidad.

b) Haz una representación gráfica de la función f.

c) Si la función f representa la asistencia (en miles de personas) a un festival de música en función del tiempo t (medido en horas). ¿En qué momento la asistencia fue máxima? (Para qué valor de t). ¿Cuántas personas había en el festival en ese momento?

Solución:

a) La función $f(t)$ es continua en R, excepto para $t=1$ y $t=2$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ t=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to 1^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 1}(2t^2)=2 \\ \lim\limits_{t\to 1^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 1}(3t-1)=2=f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 1^-} f(t)=\lim_{t\to 1^+} f(t)=f(1) \Rightarrow \underline{La\ función\ f(t)\ es\ continua\ para\ t=1}.$$

$$Para\ t=2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to 2^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 2}(3t-1)=5 \\ \lim\limits_{t\to 2^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 2}(-5t+15)=5=f(2) \end{cases} \Rightarrow$$

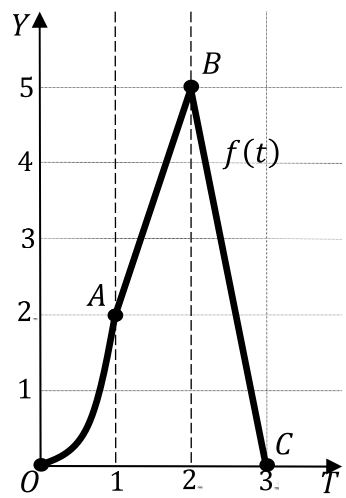
$$\Rightarrow \lim_{t\to 2^-} f(t)=\lim_{t\to 2^+} f(t)=f(2) \Rightarrow \underline{La\ función\ f(t)\ es\ continua\ para\ t=2}.$$

La función es continua en toda la recta real.

b) En el intervalo $[0,1)$ la función es la parábola de ecuación $f(t)=2t^2$, que es convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de t^2 y cuyo vértice (mínimo) es el origen.

En el intervalo $[1,2)$ la función es la recta de ecuación $f(t)=3t-1$, que tiene como extremos a los puntos $A(1,2)$ y $B(2,5)$.

En el intervalo $[2,3]$ la función es la recta de ecuación $f(t)=-5t+15$, que tiene como extremos a los puntos $B(2,5)$ y $C(3,0)$.



c) Si la función f representa la asistencia (en miles de personas) a un festival de música en función del tiempo t (medido en horas). ¿En qué momento la asistencia fue máxima? (Para qué valor de t). ¿Cuántas personas había en el festival en ese momento?

De la observación de la gráfica de la función se deduce que:

$$\underline{La\ asistencia\ fue\ máxima\ para\ t=\mathbf{2}}.$$

$$\underline{La\ asistencia\ máxima\ al\ festival\ fue\ de\ \mathbf{5\,000}\ personas}.$$

Problema 2.2:

5º) Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$:

a) Determina a, b y c sabiendo que el punto $P(-2, 1)$ pertenece a la gráfica de la función f y que, además, el punto $Q(-1, 0)$ es un extremo relativo de f.

b) Determina el área que encierra la gráfica de f y el eje OX en el intervalo $[0, 3]$.

Nota: Si no has conseguido determinar a, b y c, en el apartado anterior, toma los valores $a = 1, b = 2$ y $c = 1$ en este apartado.

Solución:

a)

Por contener al punto $P(-2, 1) \Rightarrow f(-2) = 1$:

$f(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 1;\ \ 4a - 2b + c = 1.$ (1)

Por contener al punto $Q(-1, 0) \Rightarrow f(-1) = 0$:

$f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0;\ \ a - b + c = 0.$ (2)

Por tener un extremo relativo en $Q(-1, 0) \Rightarrow f'(-1) = 0$:

$f'(x) = 2ax + b.$

$f'(-1) = 2a \cdot (-1) + b = 0;\ -2a + b = 0.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$\left.\begin{array}{r} 4a - 2b + c = 1 \\ a - b + c = 0 \\ -2a + b = 0 \end{array}\right\}$. Restando a la primera ecuación la segunda:

$\left.\begin{array}{r} 3a - b = 1 \\ -2a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = 1}.$ $\qquad -2 + b = 0 \Rightarrow \underline{b = 2}.$

$a - b + c = 0 \Rightarrow 1 - 2 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = 1}.$

$$\boldsymbol{a = 1;\ b = 2;\ c = 1.}$$

b)

La función resulta ser $f(x) = x^2 + 2x + 1$, que tiene todas sus ordenadas positivas en el intervalo $[0, 3]$, por lo cual la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 + 2x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x\right]_0^3 = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_0^3 =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3\right) - 0 = 9 + 9 + 3 = \underline{21\ u^2}.$$

$$\boldsymbol{Área = 21\ u^2}$$

Problema 2.3:

6º) La producción de un invernadero depende de la temperatura a la que esté regulado. La cantidad de toneladas de verduras que produce viene dada por la siguiente función, en que x indica la temperatura en grados Celsius: $f(x) = (x+3)^2(36-x)$, con $(0 \leq x \leq 36)$.

a) ¿Para qué valor de x se obtiene la máxima producción?

b) ¿Cuántas toneladas se obtienen a esa temperatura?

c) ¿Para qué valores de x el invernadero no produce nada?

Solución:

a)

Los valores de la función en los extremos del intervalo de su dominio son los siguientes:

$f(0) = (0+3)^2 \cdot (36-0) = 9 \cdot 36 = 324.$

$f(36) = (36+3)^2 \cdot (36-36) = 0.$

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(x) = [2 \cdot (x+3) \cdot 1] \cdot (36-x) + (x+3)^2 \cdot (-1) =$

$= (x+3) \cdot [2 \cdot (36-x) - (x+3)] = (x+3) \cdot (72-2x-x-3) =$

$= (x+3) \cdot (69-3x) = 3 \cdot (x+3) \cdot (23-x).$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (x+3) \cdot (23-x) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 23.$

La solución $x_1 = -3$ no pertenece al dominio de la función.

$f''(x) = 3 \cdot [1 \cdot (23-x) + (x+3) \cdot (-1)] = 3 \cdot (23-x-x-3) =$

$= 3 \cdot (20-2x) = 6 \cdot (10-x)$

$f''(23) = 6 \cdot (10-23) = 6 \cdot (-13) < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 23.$

$f(23) = (23+3)^2 \cdot (36-23) = 26^2 \cdot 13 = 676 \cdot 13 = 8\,788.$

$\underline{El\ máximo\ rendimiento\ del\ invernadero\ se\ produce\ para\ x = \mathbf{23° \ C}.}$

b)

$\underline{El\ máximo\ rendimiento\ que\ produce\ a\ 23°\ C\ es\ de\ \mathbf{8\,788}\ toneladas.}$

c)

Como quiera que no se prevé una temperatura de $-3°\ C$ (que también se anularía la producción):

$\underline{La\ producción\ del\ invernadero\ es\ nula\ a\ partir\ de\ 36°\ C.}$

Bloque 3. Estadística y Probabilidad

Problema 3.1:

7º) En una residencia canina hay en total 120 perros; de ellos 40 son pastores alemanes (35 negros y 5 blancos), 30 pekineses (18 negros y 12 blancos) y 50 mastines (42 negros y 8 blancos).

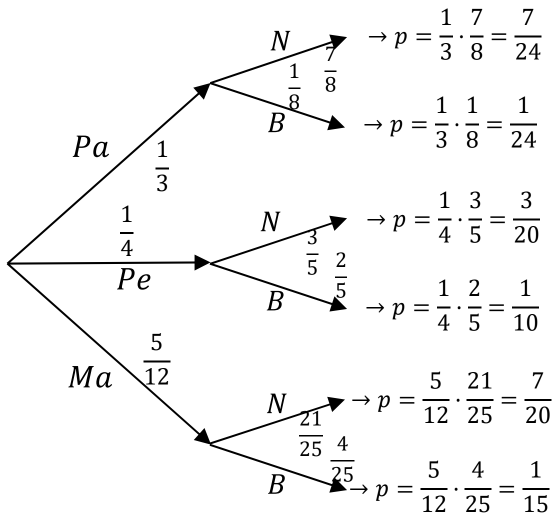
a) Hemos elegido un perro al azar, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea pekinés?

b) Elegido al azar un perro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de color blanco?

c) Se ha elegido al azar un perro que ha resultado ser blanco, ¿cuál es la probabilidad de que sea un mastín?

Solución:

$$Datos: \begin{cases} P(Pa) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} P(n) = \frac{35}{40} = \frac{7}{8} \\ P(b) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \end{cases} \\ P(Pe) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} P(n) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} \\ P(b) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \end{cases} \\ P(Ma) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12} \Rightarrow \begin{cases} P(n) = \frac{42}{50} = \frac{21}{25} \\ P(b) = \frac{8}{50} = \frac{4}{25} \end{cases} \end{cases}.$$



a)

$$P = P(\overline{Pe}) = 1 - P(Pe) = 1 - \frac{30}{120} = 1 - \frac{1}{4} = \underline{\frac{3}{4} = 0.75}.$$

La probabilidad de que NO sea pekinés es de **0.75**.

$b)$

$$P = P(B) = P(Pa \cap B) + P(Pe \cap B) + P(Ma \cap B) =$$

$$= P(Pa) \cdot P(B/Pa) + P(Pe) \cdot P(B/Pe) + P(Ma) \cdot P(B/Ma) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{25} = \frac{1}{24} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{5+12+8}{120} = \frac{25}{120} = \underline{\frac{5}{24} = 0.2083}.$$

También puede hacerse este apartado por la regla de Laplace:

$$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{nº\ de\ perros\ blancos}{nº\ de\ perros} = \frac{5+12+8}{120} = \frac{25}{120} = \underline{\frac{5}{24} = 0.2083}.$$

La probabilidad de que sea de color blanco es de **0.21**.

$c)$

$$P = P(Ma/B) = \frac{P(Ma \cap B)}{P(B)} = \frac{P(Ma) \cdot P(B/Ma)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{25}}{\frac{5}{24}} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{5}{24}} = \frac{24}{75} = \underline{\frac{8}{25} = 0.32}.$$

Un perro que ha resultado ser blanco, la probabilidad de que sea un mastín es de **0.32**.

Problema 3.2:

8º) La vida media de un modelo de grapadoras sigue una distribución normal con una desviación típica de 60 días.

a) Si la media fuese de 950 días, ¿cuál sería la probabilidad de que la duración media de una muestra de 100 grapadoras superase los 959 días?

b) Si una muestra de 64 grapadoras tiene una vida media de 980 días, determina un intervalo de confianza del 90 % para la media de la producción.

Solución:

a)

$Datos$: $\mu = 950$; $n = 100$; $\sigma = 60$.

$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(950, \frac{60}{\sqrt{100}}\right) = N\left(950, \frac{60}{10}\right) = N(950, 6)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-950}{6}$.

$P = P(X > 959) = P\left(Z > \frac{959-950}{6}\right) = P\left(Z > \frac{9}{6}\right) = P(Z > 1.5) =$

$= 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = \underline{0.0668}$.

La probabilidad de que superase los 959 días es de **0.0668**.

b)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 1 - 0.90 = 0.10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645$.

$(1 - 0.05 = 0.9500 \rightarrow z = 1.645)$.

Datos: $n = 64$; $\overline{x} = 980$; $\sigma = 60$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(980 - 1.645 \cdot \frac{60}{\sqrt{64}};\ 980 + 1.645 \cdot \frac{60}{\sqrt{64}}\right)$;

$(980 - 1.645 \cdot 7.5;\ 980 + 1.645 \cdot 7.5)$; $(980 - 12.3375;\ 980 + 12.3375)$.

$\underline{I.C._{90\ \%} = (967.6625;\ 992.3375)}$.

El intervalo de confianza para la media de la producción al 90 % es de $\mathbf{(967.6625;\ 992.3375)}$

Problema 3.3:

9º) Luis ha hecho una cartulina con cada una de las siete letras de LA RIOJA y las ha introducido en una urna.

a) Si extrae una cartulina, ¿cuál es la probabilidad de que sea la R?, ¿cuál es la probabilidad de que NO sea la A?

b) Luis extrae una cartulina y, a continuación, sin volver a introducir la primera, saca otra y se las muestra en ese orden a María, ¿cuál es la probabilidad de que María vea LA?

c) Luis repite la operación y le vuelve a mostrar las cartas a María. ¿Cuál es la probabilidad de que María pueda formar la palabra LA?, ¿y de que pueda formar la palabra LO?

d) Luis extrae ahora tres cartulinas sin reemplazar después de cada extracción. ¿Cuál es la probabilidad de que María lea RIO si se las muestra en el orden en el que Luis las ha extraído? ¿Y de que lea RIA?

Solución:

a)

$$P = P(R) = \underline{\tfrac{1}{7} = 0.1429.} \qquad P = P(No\ A) = \underline{\tfrac{5}{7} = 0.7143.}$$

La probabilidad de que sea la R es **0.1429**. La probabilidad de que NO sea la A es **0.7143**.

b) $$P = P(LA) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} = \underline{\frac{1}{21} = 0.0476.}$$

La probabilidad de que María vea LA es de **0.0476**.

c) Para que María pueda formar la palabra LA, tendría que sacar LA o AL:

$$P = P(LA) + P(AL) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21} + \frac{1}{21} = \underline{\frac{2}{21} = 0.0952.}$$

Para que pueda formar la palabra LO, tendría que sacar LO o OL:

$$P = P(LO) + P(OL) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{42} + \frac{1}{42} = \underline{\frac{1}{21} = 0.04761.}$$

La probabilidad de que pueda formar la palabra LA es de $\mathbf{\frac{2}{21} = 0.0952}$, y la palabra LO es **de** $\mathbf{\frac{1}{21} = 0.04761}$

d) $$P = P(RIO) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \underline{\frac{1}{210} = 0.0048.}$$

$$P = P(RIA) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \underline{\frac{1}{105} = 0.0095.}$$

La probabilidad de que lea RIO es de $\mathbf{\frac{1}{210} = 0.0048}$, y de que lea RIA es de $\mathbf{\frac{1}{105} = 0.0095}$.

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019 – 2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques que contienen tres ejercicios cada uno de ellos. De cada uno de los bloques, el alumno podrá contestar como máximo a dos ejercicios. En total deberá contestar a 4 ejercicios. Es decir, podrá contestar a dos ejercicios de un bloque y uno de cada uno de los otros dos, o bien elegir dos bloques y contestar a dos ejercicios de cada uno. **Es necesario justificar las respuestas.**

Se perrmite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calulen integrales. **Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.**

Tiempo: Una hora y media.

Bloque 1. Álgebra y Programación Lineal.
Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

1.1.– Consideramos el sistema de ecuaciones lineales donde a es un número real

$$\begin{aligned} ay + az &= 0 \\ y + z &= 0 \\ 4x - 2y + az &= a \end{aligned}$$

(I) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema es compatible y determinado? **(0,75 puntos)**

(II) ¿Existe algún valor de a para el que el sistema no tenga soluciones? **(0,5 puntos)**

(III) Resuelve el sistema si $a = 0$. **(1,25 puntos)**

1.2.– Dada una matriz cuadrada A

(I) ¿Puede saberse si tiene inversa sin calcularla explícitamente? ¿Cómo? **(0,5 puntos)**

(II) Sea ahora A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Halla, si existe, la inversa de A. **(0,75 puntos)**

(III) Si A es la matriz del apartado anterior, determina las matrices X e Y de orden 2 tales que:

$$\begin{aligned} 3X + 2Y &= A \\ X + Y &= 2A \end{aligned}$$

(1,25 puntos)

1.3.– Los beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(x, y) = x+y+1$ pero está sujeta a las siguientes restricciones:

$$4x + y \geq 8; \quad 3x - 2y \leq 12; \quad x + 5y \leq 21; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$$

(I) Dibuja en el plano la región factible que representa estas restricciones. **(1,25 puntos)**

(II) Para qué valores de x e y obtiene la empresa el beneficio máximo. **(1,25 puntos)**

Bloque 2. Análisis.
Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

2.1.– Consideramos la función $f(x) = x^4 - ax^2 + b$

(I) ¿Qué valores deben tomar a y b para que la función tenga un mínimo en el punto $(1, 0)$? **(1 punto)**

(II) Con los valores de a y b del apartado (I), calcula los puntos donde $f(x)$ tiene tangente paralela a la recta $y = 1$. **(1 punto)**

(III) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x = 1$. **(0,5 puntos)**

NOTA: si no has conseguido determinar a y b en el apartado anterior, toma $a = 2$ y $b = 1$ en los apartados (II) e (III).

2.2.– Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ ax - 2, & 1 \leq x \end{cases}$$

(II) Sea ahora A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Halla, si existe, la inversa de A. **(0,75 puntos)**

(III) Si A es la matriz del apartado anterior, determina las matrices X e Y de orden 2 tales que:

$$\begin{aligned} 3X + 2Y &= A \\ X + Y &= 2A \end{aligned}$$

(1,25 puntos)

1.3.– Los beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(x,y) = x+y+1$ pero está sujeta a las siguientes restricciones:

$$4x + y \geq 8; \qquad 3x - 2y \leq 12; \qquad x + 5y \leq 21; \qquad x \geq 0; \qquad y \geq 0.$$

(I) Dibuja en el plano la región factible que representa estas restricciones. **(1,25 puntos)**

(II) Para qué valores de x e y obtiene la empresa el beneficio máximo. **(1,25 puntos)**

Bloque 2. Análisis.
Responde, como máximo, a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación.

2.1.– Consideramos la función $f(x) = x^4 - ax^2 + b$

(I) ¿Qué valores deben tomar a y b para que la función tenga un mínimo en el punto $(1,0)$? **(1 punto)**

(II) Con los valores de a y b del apartado (I), calcula los puntos donde $f(x)$ tiene tangente paralela a la recta $y = 1$. **(1 punto)**

(III) Calcula la recta tangente a la función en el punto $x = 1$. **(0,5 puntos)**

NOTA: si no has conseguido determinar a y b en el apartado anterior, toma $a = 2$ y $b = 1$ en los apartados (II) e (III).

2.2.– Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \\ ax - 2, & 1 \leq x \end{cases}$$

3.3.– Un hospital está especializado en el tratamiento de 3 enfermedades A, B, C. El 40 % de los pacientes ingresan con la enfermedad A, el 35 % con la enfermedad B y el 25 % con la enfermedad C. La probabilidad de curación de la enfermedad A es el 80 %, de la B el 60 % y de la C el 90 %.

(I) José ingresa en el hospital (no sabemos cual de las tres enfermedades padece). ¿Cuál es la probabilidad de que se cure? **(1 punto)**

(II) Miguel ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que ingresara padeciendo la enfermedad B? **(1 punto)**

(III) Rosa ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que NO padeciera la enfermedad B? **(0,5 puntos)**

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019 – 2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

(1) Se sugiere un tipo de corrección positivo, es decir, partiendo de cero y sumando puntos por los aciertos que el alumno vaya obteniendo.

(2) Como excepción al apartado anterior, los errores muy graves, que muestren un desconocimiento profundo de propiedades y funciones básicas (errores repetidos en la manipulación de igualdades y desigualdades o en operaciones con fracciones, errores graves al desarrollar cuadrados o en la resolución de ecuaciones de segundo grado, etc.), penalizarán especialmente y pueden suponer un cero en el apartado en el que se hayan cometido.

(3) Se deberá valorar la exposición lógica y la coherencia de las respuestas, tanto en cuestiones teóricas como prácticas. Algunos ejemplos:

(a) Si al resolver un sistema de ecuaciones, el alumno comete un error **numérico**, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se prestará especial atención siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial.

(b) En la representación gráfica de funciones, se valorará la coherencia del dibujo con los datos obtenidos previamente por el alumno. (Vale aquí la misma excepción que en el párrafo anterior.)

(4) La puntuación máxima de cada pregunta figurará en su enunciado. En los casos en los que la pregunta contenga apartados, lo que aparecerá es el valor de cada uno de ellos.

(5) Si un alumno da una respuesta acertada a un problema escribiendo solo los resultados, sin aportar el desarrollo que le ha permitido obtener dicha solución, la puntuación en este apartado no podrá ser superior al 50 % de la nota máxima prevista. Como excepción, se será flexible en las respuestas a cuestiones de estadística y probabilidad.

SOLUCIONES CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE 2020

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal

Problema 1.1:

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ay + az = 0 \\ y + z = 0 \\ 4x - 2y + az = a \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

$a)$ ¿Existe algún valor de a para el que el sistema es compatible determinado?

$b)$ ¿Existe algún valor de a para el que el sistema no tenga soluciones?

$c)$ Resuelve el sistema para $a = 0$.

Solución:

$a)$ $b)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{pmatrix}.$$

Los rangos de las matrices, en función del parámetro a, se obtienen por el procedimiento de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & a & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 + 2F_2 \\ F_3 \to F_3 - aF_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & a+2 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2, \forall a \in R.$$

$$\underline{Para\ a \in R \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

No existe ningún valor de $a \in R$ para el que el sistema es compatible determinado, y tampoco existe ninguno para el que no tiene solución.

$c)$ Para $a = 0$ el sistema resulta: $\begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ y + z = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$, cuya solución es la siguiente:

$$\underline{Solución: \boldsymbol{x = \lambda, y = 2\lambda, z = -2\lambda}, \forall \lambda \in R.}$$

Problema 1.2:

Dada una matriz cuadrada A:

a) ¿Puede saberse si tiene inversa sin calcularla explícitamente? ¿Cómo?

b) Sea ahora la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Halla, si existe, la inversa de A.

c) Si A es la matriz del apartado anterior, determina las matrices X e Y de orden 2 tales que: $\left.\begin{matrix} 3X + 2Y = A \\ X + Y = 2A \end{matrix}\right\}$.

Solución:

a) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero, por lo tanto, para saber si tiene inversa se calcula su determinante.

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible}$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.\ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

c)

$$\left.\begin{matrix} 3X + 2Y = A \\ X + Y = 2A \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3X + 2Y = A \\ -2X - 2Y = -4A \end{matrix}\right\} \Rightarrow X = -3A \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{matrix} 3X + 2Y = A \\ X + Y = 2A \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -3X - 2Y = -A \\ 3X + 3Y = 6A \end{matrix}\right\} \Rightarrow Y = 5A \Rightarrow \underline{Y = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}}.$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix};\ Y = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}}$$

Problema 1.3:

Los beneficios de una empresa vienen dados por la función $f(x,y) = x + y + 1$ pero está sujeta a las siguientes restricciones:

$$4x + y \geq 8;\ \ 3x - 2y \leq 12;\ \ x + 5y \leq 21;\ \ x \geq 0;\ \ y \geq 0.$$

$a)$ Dibuja en el plano la región factible que representa estas restricciones.

$b)$ Para qué valores de x e y obtiene la empresa el beneficio máximo.

Solución:

$a)$

① $\Rightarrow 4x + y \geq 8 \Rightarrow y \geq 8 - 4x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	1	2
y	4	0

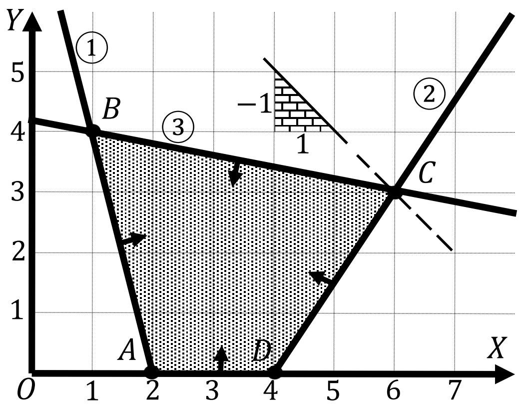
② $\Rightarrow 3x - 2y \leq 12 \Rightarrow y \geq \frac{3x-12}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	4	6
y	0	3

③ $\Rightarrow x + 5y \leq 21 \Rightarrow y \leq \frac{21-x}{5} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	1	6
y	4	3

La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 4x + y = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow A(2,0).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + y = 8 \\ x + 5y = 21 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -4x - y = -8 \\ 4x + 20y = 84 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 19y = 76;\ \ y = \frac{76}{19} = 4;\ \ 4x + 4 = 8;\ \ 4x = 4;\ \ x = 1 \Rightarrow B(1,4).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 12 \\ x + 5y = 21 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -3x + 2y = -12 \\ 3x + 15y = 63 \end{array}\right\} \Rightarrow 17y = 51;\ \ y = \frac{51}{17} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 15 = 21;\ \ x = 6 \Rightarrow C(6,3).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x - 2y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 12;\ \ x = 4 \Rightarrow D(4,0).$$

$b)$ La función de objetivos es $f(x, y) = x + y + 1$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(2, 0) = 2 + 0 + 1 = 2$. $B \Rightarrow f(1, 4) = 1 + 4 + 1 = 6$.

$C \Rightarrow f(6, 3) = 6 + 3 + 1 = 10$. $D \Rightarrow f(4, 0) = 4 + 0 + 1 = 5$.

El valor mínimo se produce en el punto $C(6, 3)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -x - 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{1}$.

$\underline{El\ beneficio\ de\ la\ empresa\ es\ máximo\ para\ x = 6\ e\ y = 3}.$

Bloque 2. Análisis

Problema 2.1:

Consideramos la función $f(x) = x^4 - ax^2 + b$.

$a)$ ¿Qué valores deben tomar a y b para que la función tenga un mínimo en $P(1, 0)$?

$b)$ Con los valores de a y b del apartado anterior, calcula los puntos donde $f(x)$ tiene tangente paralela a la recta $y = 1$.

$c)$ Calcula la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Nota: Si no has conseguido determinar a y b en el apartado anterior, toma como valores $a = 2$ y $b = 1$ en los apartados $b)$ y $c)$.

Solución:

$a)$ Por contener al punto $P(1, 0)$ es $f(1) = 0$:

$f(1) = 1^4 - a \cdot 1^2 + b = 1 - a + b = 0;\ \ a - b = 1.$ (1)

Por tener un mínimo relativo en $P(1, 0)$ es $f'(1) = 0$.

$f'(x) = 4x^3 - 2ax.\ \ f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 2a \cdot 1 = 0;\ \ 4 - 2a = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}$.

Sustituyendo en (1) el valor obtenido de a: $2 - b = 1 \Rightarrow \underline{b = 1}$.

$$\boldsymbol{a = 2; b = 1}$$

$b)$ La función resulta $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

La pendiente de la recta $y = 1$ es $m = 0$.

La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$.

$$\underline{\boldsymbol{Los\ puntos\ pedidos\ son\ A(0,1), B(-1,0)\ y\ P(1,0)}}.$$

$c)$ El punto de tangencia en $P(1, 0)$. $\quad m = f'(1) = 0$

$$\underline{\boldsymbol{La\ tangente\ pedida\ es\ t \equiv y = 0\ (eje\ X)}}.$$

Problema 2.2:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^2, 0 \le x < 1: \\ ax - 2, 1 \le x \end{cases}$

$a)$ ¿Para qué valor de a la función es continua?

$b)$ Utilizando el valor de a del apartado anterior, esboza una gráfica de la función f.

$c)$ Con el valor de a del apartado $a)$, calcula el área encerrada por la gráfica de la función f, el eje OX y la recta $x = 3$.

Nota: Si no has conseguido determinar a, toma $a = 3$ en los apartados $b)$ y $c)$.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

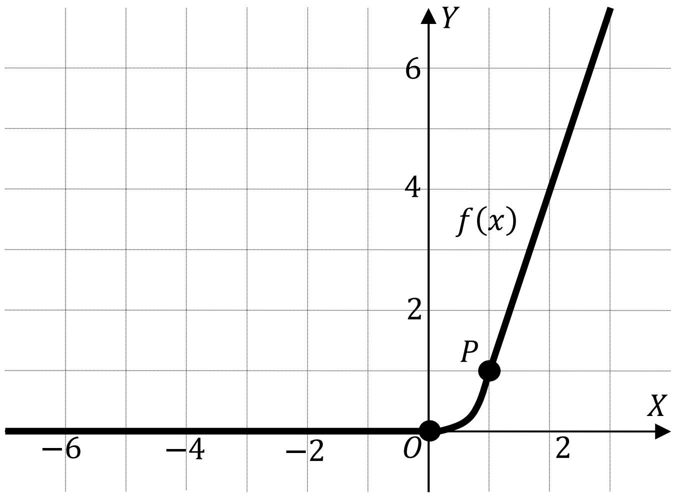
Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(ax - 2) = a - 2 = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 = a - 2 \Rightarrow \underline{a = 3}.$$

Para $\boldsymbol{a = 3}$ la función es continua.

$b)$ La función resulta ser $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^2, 0 \le x < 1. \\ 3x - 2, 1 \le x \end{cases}$



La representación gráfica de la función se expresa en la figura adjunta; se ha tenido en cuenta que la función es continua en su dominio, que es R, que en el intervalo $(-\infty, 0)$ la función es una recta horizontal; en el intervalo $[0, 1)$ es una parábola cóncava $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2 y en el intervalo $[1, +\infty)$ es una recta de pendiente tres.

$c)$ Todas las ordenadas de la función en el intervalo de la superficie a calcular, que es $(0,3)$, son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S=\int_0^1 x^2\cdot dx+\int_1^3(3x-2)\cdot dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{3x^2}{2}-2x\right]_1^3=$$

$$=\frac{1^3}{3}-0+\left(\frac{3\cdot 3^2}{2}-2\cdot 3\right)-\left(\frac{3\cdot 1^2}{2}-2\cdot 1\right)=\frac{1}{3}+\frac{27}{2}-6-\frac{3}{2}+2=8+\frac{1}{3}=\frac{25}{3}.$$

$$\underline{S=\frac{25}{3}\,u^2\cong 8.33\,u^2.}$$

$$\boldsymbol{S=\frac{25}{3}\,u^2\cong 8.33\,u^2}$$

Problema 2.3:

La parte positiva de la función $f(t) = -2t^2 + 16t$ indica la gravedad de un enfermo desde que contrae una determinada enfermedad hasta que vuelve a estar sano.

a) Haz un esbozo de la gráfica de la función.

b) Si la variable t se mide en días, ¿cuántos días dura la enfermedad?

c) ¿En qué día del proceso está más grave el enfermo?

Solución:

a) La función $f(t) = -2t^2 + 16t$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de t^2, cuyo vértice (máximo) es el siguiente:

$f'(t) = -4t + 16 = 0 \Rightarrow t = 4.$

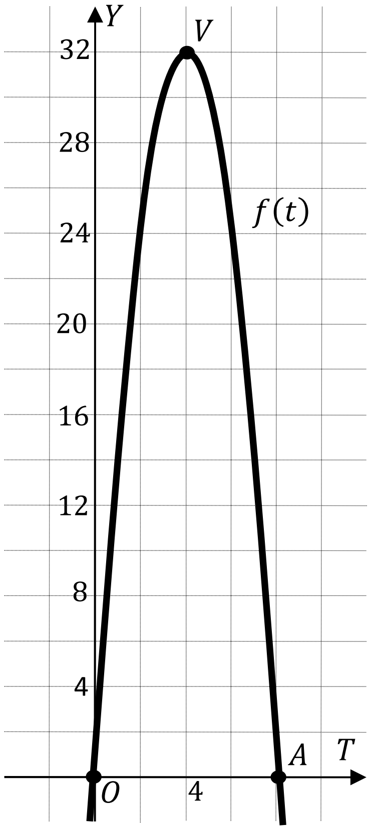
$f(4) = -2 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 = 32 \Rightarrow V(4, 32).$

Los puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:

$f(t) = 0 \Rightarrow -2t^2 + 16t = 0;\ \ t^2 - 8t = 0;$

$t(t-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow O(0,0) \\ t_2 = 8 \rightarrow A(8,0) \end{cases}.$

La representación gráfica de la función $f(t)$ se expresa en la figura adjunta.



b)

$$\underline{La\ enfermedad\ duró\ 8\ días.}$$

c)

$$\underline{El\ enfermo\ está\ más\ grave\ al\ \boldsymbol{cuarto}\ día\ del\ comienzo\ de\ la\ enfermedad.}$$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es

Bloque 3. Estadística y Probabilidad

Problema 3.1:

El número de usuarios del transporte metropolitano sigue una distribución normal con desviación típica 108.

$a)$ Si la media de usuarios fuese de 1 700, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de usuarios de 36 días fuese más de 1 678?

$b)$ En los 100 primeros días del año, la media diaria de usuarios ha sido de 1 750, determina un intervalo de confianza del 95 % para la media de viajeros.

Solución:

$a)\ Datos\text{:}\ \mu = 1\,700;\ \ \sigma = 108.$

$$X \to N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(1\,700;\ \frac{108}{\sqrt{36}}\right) = N\left(1\,700;\ \frac{108}{6}\right) = N(1\,700;\ 18).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X - 1\,700}{18}$.

$$P = P(X > 1\,678) = P\left(Z > \frac{1\,678 - 1\,700}{18}\right) = P\left(Z > \frac{-22}{18}\right) = P(Z > -1.22) =$$

$= P(Z \leq 1.22) = \underline{0.8888}.$

La probabilidad de que la media de 36 días fuese superior a 1 678 es de $\mathbf{0.8888}$

$b)$ Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0.95\ \to\ \alpha = 1 - 0.95 = 0.05\ \to\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.$$

$$(1 - 0.025 = 0.9750\ \to z = 1.96).$$

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 1\,750;\ \ \sigma = 108\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(1\,750 - 1.96 \cdot \frac{108}{\sqrt{100}};\ 1\,750 + 1.96 \cdot \frac{108}{\sqrt{100}}\right);$$

$(1\,750 - 1.96 \cdot 10.8;\ 1\,750 + 1.96 \cdot 10.8);\ \ (1\,750 - 21.168;\ 1\,750 + 21.168)$

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (1\,728.832;\ 1\,271.168).}$$

Intervalo de confianza para la media de viajeros: $\mathbf{(1\,728.832;\ 1\,271.168)}$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 3.2:

En una clase hay 24 estudiantes, 12 de ellos han aprobado inglés, 16 han aprobado matemáticas y 4 han suspendido las dos asignaturas.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un alumno de esa clase resulte que haya aprobado matemáticas y haya suspendido inglés?

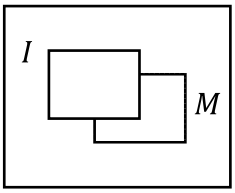
$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir al azar un alumno de esa clase resulte que haya aprobado las dos asignaturas?

$c)$ ¿Son independientes los sucesos aprobar matemáticas y aprobar inglés?

Solución:

$$Datos: P(I) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2};\ \ P(M) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3};\ \ P(\overline{I} \cap \overline{M}) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

$a)$



$$\Rightarrow P(\overline{I} \cap \overline{M}) = 1 - P(I \cup M) \Rightarrow$$

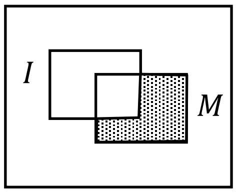
$$\Rightarrow P(I \cup M) = 1 - P(\overline{I} \cap \overline{M}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

$$P(I \cup M) = P(I) + P(M) - P(I \cap M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(I \cap M) = P(I) + P(M) - P(I \cup M) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} =$$

$$= \frac{3+4-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$P(\overline{I} \cap M) = P(M) - P(I \cap M) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{3}}.$$



$P(\overline{I} \cap M) = P(M) - P(I \cap M)$

La probabilidad de que haya aprobado Matemáticas y suspendido Inglés, es de **1/3**.

$b)$ De los 24 alumnos han aprobado las dos asignaturas 4. Aplicando la regla de Laplace:

$$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{4}{24} = \underline{\frac{1}{6}}.$$

La probabilidad de que haya aprobado las dos asignaturas de **1/6**.

$c)$ Dos sucesos $I\ y\ M$ son independientes cuando $P(I \cap M) = P(I) \cdot P(M)$:

$$P(I) \cdot P(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = P(I \cap M).$$

$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ I\ y\ M\ son\ independientes.}$

Problema 3.3:

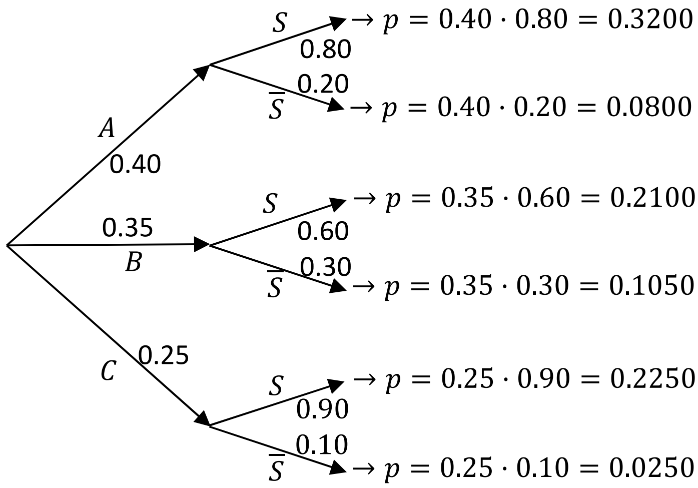
Un hospital está especializado en el tratamiento de tres enfermedades A, B y C. El 40 % de los pacientes ingresan con la enfermedad A, el 35 % con la enfermedad B y el 25 % con la enfermedad C. La probabilidad de curación de la enfermedad A es del 80 %, la de B el 60 % y de la C el 90 %.

a) José ingresa en el hospital (no sabemos cuál de las tres enfermedades padece). ¿Cuál es la probabilidad de que se cure?

b) Miguel ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que ingresara padeciendo la enfermedad B?

c) Rosa ingresó en el hospital y se ha restablecido completamente. ¿Cuál es la probabilidad de que NO padeciera la enfermedad B?

Solución:



a) $P = P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) =$

$= P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B) + P(C) \cdot P(S/C) =$

$= 0.40 \cdot 0.80 + 0.35 \cdot 0.60 + 0.35 \cdot 0.25 = 0.3200 + 0.2100 + 0.2250 = \underline{0.7550}$.

La probabilidad de que se cure José es del $\mathbf{0.7550}$

b) $P = P(B/S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{P(B) \cdot P(S/B)}{P(S)} = \frac{0.35 \cdot 0.60}{0.755} = \frac{0.210}{0.755} = \underline{0.2781}$.

La probabilidad de que Miguel tuviera la enfermedad B es del $\mathbf{0.2781}$.

c) El suceso de Rosa es el contrario del suceso de Miguel, por lo tanto:

$P = P(\overline{B}/S) = 1 - P\left(\frac{B}{S}\right) = 1 - 0.2781 = \underline{0.7219}$.

La probabilidad de que Rosa NO tuviera la enfermedad B es del $\mathbf{0.7219}$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de:

MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2019-2020**

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

A.1. (2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+ay & = & 0 \\ x+2z & = & 0 \\ x+ay+(a+1)z & = & a \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema para $a=0$.

A.2. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4$$

a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x=0$ para que la función anterior sea continua en este punto.
b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

A.3. (2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x)=-x^4+x^3+2x^2$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=-1$.
b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x>0$.

A.4. (2 puntos)
Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40 % de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35 % a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

a) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.
b) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

A.5. (2 puntos)
La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.

a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.
b) Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

B.1. (2 puntos)
Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.
b) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

B.2. (2 puntos)
La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \qquad 0 \leq y \leq 15, \qquad y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \qquad y - x \leq 10, \qquad y + 20 \geq 2x$$

a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.
b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

B.3. (2 puntos)
Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = 3(x + k)e^{\frac{-x}{3}}$$

a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.
b) Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

B.4. (2 puntos)
Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40 % de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.

a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el periodo de garantia.
b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantia y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

B.5. (2 puntos)
Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes:

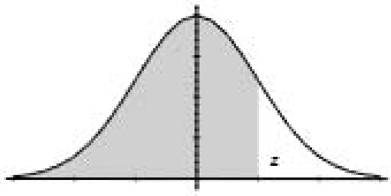
$$40 \quad 45 \quad 38 \quad 44 \quad 41 \quad 40 \quad 35 \quad 50 \quad 40 \quad 37$$

Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.
b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de los valores críticos .... 0,50 puntos.
Discusión correcta .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Solución correcta del sistema .... 1,00 punto.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Determinación correcta del dominio .... 0,25 puntos.
Planteamiento correcto de la condición de continuidad .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto del límite .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto

Obtención correcta de la asíntota vertical .... 0,50 puntos.
Obtención correcta de la asíntota oblicua .... 0,50 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Expresión correcta de la ecuación de la recta tangente .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la pendiente de la tangente .... 0,50 puntos.
Ecuación correcta de la recta tangente .... 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la integral y los límites de integración .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la integral indefinida .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la integral definida .... 0,25 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.
Expresión correcta de la fórmula del error .... 0,25 puntos.
Determinación correcta del tamaño de la muestra .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión de la distribución de la media muestral .... 0,25 puntos.
Tipificación correcta de la variable .... 0,25 puntos.
Obtención correcta de la probabilidad .... 0,50 puntos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de los términos de la ecuación ....0,50 puntos.

Obtención correcta del parámetro..0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la inversa ....0,25 puntos.

Cálculo correcto de la inversa ....0,75 puntos

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Representación correcta de la región factible ....0,50 puntos.

Obtención correcta de los vértices...0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Encontrar el punto de valor máximo (abscisa y ordenada).....................0,25 puntos

Determinar máximo de la función ....0,25 puntos.

Encontrar el punto de valor mínimo (abscisa y ordenada) ....0,25 puntos

Determinar mínimo de la función..0,25 puntos.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto

Obtención correcta del dominio ....0,25 puntos.

Obtención correcta de la derivada ....0,25 puntos.

Obtención correcta del parámetro..0,25 puntos.

Obtención correcta de la recta tangente...0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto ....0,25 puntos

Determinación correcta de los intervalos ....0,75 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad ....0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad...0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad ....0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad...0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de $\overline{x}$ ....0,25 puntos.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ ....0,25 puntos.

Expresión correcta de la fórmula del intervalo de confianza..................0,25 puntos.

Determinación correcta del intervalo ....0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión correcta de la fórmula del error ....0,25 puntos.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ ....0,25 puntos

Obtención correcta del nivel de confianza……………………………..0,50 puntos.

SOLUCIONES DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

REPERTORIO 5. OPCIÓN A

Problema A.1:

Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{aligned} x+ay&=0\\ x+2z&=0\\ x+ay+(a+1)z&=a\end{aligned}\right\}$, dependiente del parámetro real a:

a) Discute el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema para $a=0$.

Solución:

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & a & a+1\end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & a & a+1 & a\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es:

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & a & a+1\end{vmatrix}=2a-2a-a(a+1)=0 \Rightarrow a_1=0, a_2=-1.$$

Si $a\neq 0$ y $a\neq -1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada e igual a número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $a=0 \Rightarrow M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $M'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$ El rango de la matriz M es 2, igual al rango de M' y menor al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado.

Si $a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow$ El rango de la matriz ampliada es 3, distinto al de la matriz de los coeficientes que es 2, luego el sistema es incompatible.

Si $a\neq 0$ o $a\neq -1$ el sistema es compatible y determinado. Si $a=0$ el sistema es compatible indeterminado. Si $a=-1$ el sistema es incompatible.

b) Para $a=0$ el sistema resulta: $\left.\begin{aligned} x&=0\\ x+2z&=0\\ x+z&=0\end{aligned}\right\}$, que es compatible indeterminado. Sustituimos $x=0$ en la tercera ecuación, con lo que queda $x=z=0$. La solución es:

$$\boldsymbol{x=0;\ \ y=\lambda;\ \ z=0, \forall\lambda\in R}$$

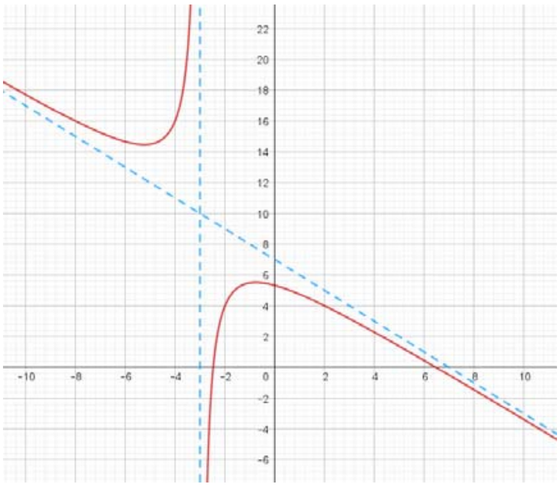
Problema A.2:

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{4x-x^3}{3x+x^2} + 4$.

$a)$ Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x = 0$ para que la función anterior sea continua en este punto.

$b)$ Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

Solución:



$a)$ La función es racional. Su denominador se anula en:

$$x^2 + 3x = 0;\ \ x(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -3$$

$$D(f) \Rightarrow R - \{-3, 0\}$$

Estudiamos la continuidad en $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{4x-x^3}{3x+x^2} + 4 = \lim_{x\to 0} \frac{-x^3+4x^2-16x}{3x+x^2} =$$

que es indeterminado, pues se anula el numerador y el denominador. Dividimos por x numerador y denominador.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x(x^2-4x+16)}{x(x+3)} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^2-4x+16}{x+3} = -\frac{16}{3}.$$

La función no está definida en $x = 0$. Si asignamos a $f(0)$ el valor $-\frac{16}{3}$ la función anterior será continua en este punto. Para que la función sea continua para $x = 0$ debe redefinirse así:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x-x^3}{3x+x^2} + 4 & si\ \ x \neq 0 \\ -\dfrac{16}{3} & si\ \ x = 0 \end{cases}$$

$b)$ Hemos visto que $x = 0$ no es una asíntota vertical.

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-(-3)^3+4\cdot(-3)^2-16\cdot(-3)}{3\cdot(-3)+(-3)^2} = \frac{27+36+48}{-9+9} = \infty.$$ Luego:

$\boldsymbol{x = -3}$ **es una asíntota vertical.**

Asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to\infty} \frac{-x^3+4x^2-16x}{3x+x^2} = -\infty$. No hay asíntota horizontal

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y = mx + n$, siendo: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-x^3+4x^2-16x}{3x+x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3+4x^2-16x}{3x^2+x^3} = -1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-x^3+4x^2-16x}{3x+x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^3+4x^2-16x+3x^2+x^3}{3x+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{7x^2-16x}{3x+x^2} = 7.$$

Asíntota oblicua: $\boldsymbol{y = -x + 7}$

Problema A.3:

Se considera la función real de variable real $f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$.

$a)$ Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.

$b)$ Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x > 0$.

Solución:

$a)$ El punto de tangencia es el siguiente:

$f(-1) = -(-1)^4 + (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 = -1 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow P(-1, 0)$.

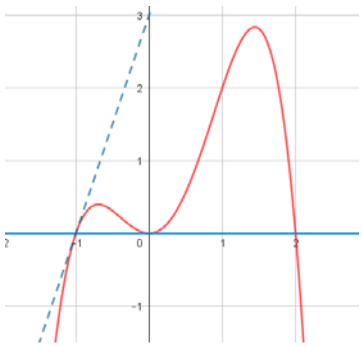
La pendiente de la tangente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$f'(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x \to m = f'(-1) = -4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = 4 + 3 - 4 = 3$.

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$y - 0 = 3 \cdot (x + 1) = 3x + 3$.

La recta tangente es: $\boldsymbol{y = 3x + 3}$



$b)$ Los puntos de corte de $f(x)$ en $[0, +\infty]$ son los siguientes:

$f(x) = 0 \Rightarrow -x^4 + x^3 + 2x^2 = 0;\ -x^2(x^2 - x - 2) = 0;\ \ x_1 = x_2 = 0$.

$x^2 - x - 2 = 0;\ \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_3 = -1, x_4 = 2 \Rightarrow$

Como nos dicen que $x > 0$ los puntos son: $O(0, 0), A(2, 0)$.

El área es:

$Área = \int_0^2 f(x) \cdot dx = \int_0^2 (-x^4 + x^3 + 2x^2) \cdot dx = \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \left(-\frac{2^5}{5} + \frac{2^4}{4} + \frac{2 \cdot 2^3}{3}\right) - 0 = -\frac{32}{5} + 4 + \frac{16}{3} = \frac{-96+60+80}{15} = \frac{44}{15}$.

$$Área = \frac{\mathbf{44}}{\mathbf{15}}\ u^2 \cong 2.93\ u^2$$

Problema A.4:

Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40 % de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35 % a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0.5, 0.6 y 0.45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

$a)$ Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.

$b)$ Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

Solución:

$a)$ Llamamos Ll al suceso que llueva, y C, H y L a los sucesos ir al nacimiento del rio Cuervo, ir a las Hoces del rio Duratón, y L ir al cañón del rio Lobo.

Representamos los datos en una tabla:

	C	H	L	
Ll	0.40 · 0.50 = 0.2	0.35 · 0.40 = 0.21	0.25 · 0.55 = 0.1125	0.5225
$\overline{Ll}$	0.2	0.14	0.1375	0.4775
	0.4	0.35	0.25	1

$P(\overline{Ll}) = P(C \cap \overline{Ll}) + P(H \cap \overline{Ll}) + P(L \cap \overline{Ll}) = P(C) \cdot P(\overline{Ll}/C) + P(H) \cdot P(\overline{Ll}/H) + P(L) \cdot P(\overline{Ll}/L) = 0.2 + 0.14 + 0.1375 = 0.4775$

La probabilidad de que no llueva es **0.4777**.

$b)$ Nos piden ahora una probabilidad condicionada:

$$P = P(C/Ll) = \frac{P(C \cap Ll)}{P(Ll)} = \frac{0.40 \cdot 0.50}{0.5225} = \frac{0.2000}{0.5225} = 0.3828.$$

Ha llovido, la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo, es **0.3828**.

Problema A.5:

La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de madia μ km y desviación típica de 0.5 km.

$a)$ Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0.05 km con un nivel de confianza del 95.44 %.

$b)$ Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se pueda escribir más de 30 km.

Solución:

$a)$ Para un nivel de confianza del 95.44 % es:

$1-\alpha = 0.9544 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0.9544 = 0.0456 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.0228} = 2.\ (1 - 0.0228 = 0.9772 \ \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2).$

Sabemos que: $\sigma = 0.5;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2;\ \ E = 0.05.$

Ya que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2 \cdot \frac{0,5}{0,05}\right)^2 = (2 \cdot 10)^2 = 20^2 = 400.$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de **400** bolígrafos.

$b)$ Si con 16 bolígrafos se escriben 30 km, con uno se escribirán: $\frac{30}{16} = 1.875\ km.$

Ahora sabemos: $\mu = 2;\ \ n = 16;\ \ \sigma = 0.5.$

La suma de lo que escriben 16 bolígrafos es una normal:

$X \rightarrow N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(2;\ \frac{0.5}{\sqrt{16}}\right) = N\left(2;\ \frac{0.5}{4}\right) = N(2;\ 0125).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-2}{0.125}.$

$P = P(X > 1.875) = P\left(Z > \frac{1.875-2}{0.125}\right) = P\left(Z > \frac{-0.125}{0.125}\right) = P(Z > -1) = P(Z \leq 1) = 0.8413.$

La probabilidad de que con esa muestra se puedan escribir más de 16 km es **0.8413**.

SOLUCIONES DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

REPERTORIO 5. OPCIÓN B

Problema B.1:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.

$b)$ Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución:

$$a)\ A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$-5A = -5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -5 & -10 \\ 0 & -5m & 0 \\ -5 & 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 - 5A = -4I \Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & -5 & -10 \\ 0 & -5m & 0 \\ -5 & 5 & -10 \end{pmatrix} = -4I \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 0 & -m+4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} m-4=0 \\ m^2-5m=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{m = 4}$$

$b)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

Para $m = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. $\quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow$

Por lo tanto, la matriz es invertible.

Podemos obtener la inversa por distintos procedimientos, como por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow_{\{F_3 \leftrightarrow F_1\}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow_{\{F_3 \to F_3 - 3F_1\}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow_{\left\{\begin{array}{c} F_1 \to F_1 + F_2 \\ F_3 \to F_3 - 4F_2 \end{array}\right\}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -4 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow_{\left\{F_3 - \frac{1}{4}F_3\right\}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right) \Rightarrow_{\{F_1 \to F_1 - 2F_3\}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Problema B.2:

La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3;\;\; 0 \leq y \leq 15;\;\; y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0;\;\; y - x \leq 10;\;\; y + 20 \geq 2x.$$

a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

Solución:

a) Vamos calculando los puntos de intersección de todas las rectas y obtenemos los vértices.

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 20 \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{r} x + 2y = 10 \\ 4x - 2y = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x = 50;$$

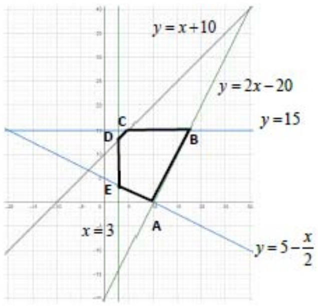
$$x = 10;\;\; y = 0 \Rightarrow A(10, 0).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 15 \\ 2x - y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 35 \Rightarrow B\left(\frac{35}{2}, 15\right).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 15 \\ x - y = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 5 \Rightarrow C(5, 15).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 3 \\ x - y = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 13 \Rightarrow D(3, 13).$$

$$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 3 \\ x + 2y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{7}{2} \Rightarrow E\left(3, \frac{7}{2}\right).$$



$$\left.\begin{array}{l} y = 5 - \frac{x}{2} \\ y = 2x - 20 \end{array}\right\} A(10, 0) \qquad \left.\begin{array}{l} y = 15 \\ y = 2x - 20 \end{array}\right\} B\left(\frac{35}{2}, 15\right) \qquad \left.\begin{array}{l} y = 15 \\ y = x + 10 \end{array}\right\} C(5, 15)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = x + 10 \end{array}\right\} D(3, 13) \qquad \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 5 - \frac{x}{2} \end{array}\right\} E\left(3, \frac{7}{2}\right)$$

Los vértices son: $\boldsymbol{A(10, 0)}$; $\boldsymbol{B\left(\frac{35}{2}, 15\right)}$; $\boldsymbol{C(5, 15)}$; $\boldsymbol{D(3, 13)}$; $\boldsymbol{E\left(3, \frac{7}{2}\right)}$.

b) La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = x + y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son:

$$A \Rightarrow f(10, 0) = 10 + 0 = 10. \qquad E \Rightarrow f\left(3, \frac{7}{2}\right) = 3 + \frac{7}{2} = \frac{13}{2} = 6.5.$$

$$D \Rightarrow f(3, 13) = 3 + 13 = 16. \qquad C \Rightarrow f(5, 15) = 5 + 15 = 20.$$

$$B \Rightarrow f\left(\frac{35}{2}, 15\right) = \frac{35}{2} + 15 = \frac{65}{2} = 32.5.$$

El máximo valor, **32.5**, se obtiene en el punto $\boldsymbol{\left(\frac{35}{2}, 15\right)}$**,** y el mínimo valor, **6.5**, se obtiene en el punto $\boldsymbol{\left(3, \frac{7}{2}\right)}$

Problema B.3:

Se considera la función real de variable real $f(x) = 3 \cdot (x + k) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

$a)$ Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.

$b)$ Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

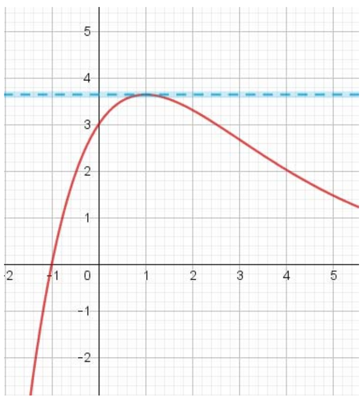
$a)$ La función es producto de una función polinómica y una función exponencial, ambas continuas y están definidas en toda la recta real.

$$\boldsymbol{D(f) = R}$$

La pendiente de la tangente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(x) = 3\left[e^{-\frac{x}{2}} - (x+k) \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}\right] = 3e^{-\frac{x}{2}}\left(1 - \frac{x+k}{2}\right) = \frac{3}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cdot (2 - x - k).$

$m = f'(1) = \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 - 1 - k) = -\frac{3e(1-k)}{2\sqrt{e}}.$



Para que la recta sea horizontal, su pendiente debe ser cero:

$$m = 0 \Rightarrow -\frac{3e(1-k)}{2\sqrt{e}} = 0;\ \ 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1.$$

$$\boldsymbol{k = 1}$$

El punto de tangencia, para $x = 1$ y $k = 1$, el siguiente:

$f(1) = 3(1+1) \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{6}{\sqrt{e}} = \frac{6\sqrt{e}}{e} \Rightarrow P\left(1, \frac{6\sqrt{e}}{e}\right).$

La recta tangente es: $\boldsymbol{y = \frac{6\sqrt{e}}{e}}$

$b)$ Para $k = 1$ la función es $f(x) = 3 \cdot (x + 1) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

Una función es creciente en los puntos en los que su primera derivada es positiva y decreciente si es negativa.

$$f'(x) = \frac{3}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cdot (2 - x - 1) = \frac{3}{2} e^{-\frac{x}{2}} \cdot (1 - x).$$

La función exponencial es siempre positiva, luego el signo de la derivada nos lo da el factor $(1 - x)$. Si $x < 1 \to f'(x) > 0 \to f$ creciente. Si $x > 1 \to f'(x) < 0 \to f$ decreciente.

En $(-\infty, 1)$es creciente y en $(1, +\infty)$, decreciente.

Problema B.4:

Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0.02. Esta probabilidad se eleva a 0.05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplia ésta por dos años más. El 40 % de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.

a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.

b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

Solución:

a) Llamamos M al suceso en que el microondas se estropea en el periodo garantía. Llamamos P al suceso en que el horno se estropea en el periodo garantía. Y llamamos F al suceso que el cliente conserve la factura.

Todos los sucesos son independientes.

Sabemos que la probabilidad de que se estropee el microondas es $P(M) = 0.02$. Y la probabilidad de que se estropee el horno es $P(H) = 0.05$.

Utilizamos el suceso contrario. El suceso contrario a "que se estropee al menos uno de ellos" es "que no se estropee ninguno", por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 1 - P(\overline{M}) \cdot P(\overline{H}) = 1 - (1 - 0.02) \cdot (1 - 0.05) = 1 - 0.98 \cdot 0.95 = 1 - 0.931 = 0.069$$

Otra forma:

$$P(M \cap F) = P(M) + P(H) - P(M \cap H) = 0.02 + 0.05 - 0.02 \cdot 0.05 = 0.07 - 0.001 = 0.069$$

La probabilidad de que se estropee al menos uno ellos en el periodo de garantía es **0.069**

b) La probabilidad de conservar la factura es $P(F) = 1 - 0.4 = 0.6$.

Son sucesos independientes

La probabilidad pedida es $P(M \cap F) = 0.02 \cdot 0.6 = 0.012$

La probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura es **0.012**

Problema B.5:

Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes: $40,\ 45,\ 38,\ 44,\ 41,\ 40,\ 35,\ 50,\ 40\ y\ 37$. Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua del modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.

b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Solución:

a) La variable X indica el consumo de agua en dicho programa. Nos dicen que $\sigma = 7$. Calculamos la media de la muestra:

$$\overline{x} = \frac{40+45+38+44+41+40+35+50+40+37}{10} = \frac{410}{10} = 41.$$

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1-\alpha = 0.90 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0.90 = 0.10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645.\ (1-0.05 = 0.9500 \ \rightarrow z = 1.645).$$

Por tanto, sabemos que: $n = 10;\ \ \overline{x} = 41;\ \sigma = 7;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

$$\left(41 - 1.645 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}}, 41 + 1.645 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}}\right) \rightarrow (41 - 1.645 \cdot 2.2136, 41 + 1.645 \cdot 2.2136) \rightarrow$$

$$(41 - 3.6414, 41 + 3.6414) \rightarrow \ (37.3586,\ 44.6414)$$

El intervalo de confianza pedido es: $\mathbf{(37.3586,\ 44.6414)}$

b) El error máximo es la mitad del intervalo de confianza: $E = \frac{5}{2} = 2.5.$

Ahora los datos son: $n = 64;\ \ \sigma = 7;\ \ E = 2.5.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{2.5 \cdot \sqrt{64}}{7} = \frac{2.5 \cdot 8}{7} = 2.86.$$

Buscando en la tabla $N(0,1)$, al valor 2.86 le corresponde 0.9979, por lo tanto:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9979;\ \ \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.9979 = 0.0021 \Rightarrow \alpha = 0.0042;\ 1 - \alpha = 1 - 0.0042 = 0.9958.$$

Se ha utilizado un nivel de confianza del **99.58 %** para construir el intervalo

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2019-2020** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

A.1. (2 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la igualdad $A^2 - 5A = -I$, donde I es la matriz identidad.

b) Calcule A^{-1} para $a = -1$.

A.2. (2 puntos)

Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y 60 € por cada metro cúbico de tipo B.

a) Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.

b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

A.3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x}{2x^2+1} & \text{si } x < 1 \\ 2m + \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudie los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y calcule la derivada de la función para $x < 1$.

b) Halle el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = -1$ y $x = 0$ y el eje $0X$.

A.4. (2 puntos)

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A|B) = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{1}{6}$ y $P(A) = \dfrac{2}{3}$. Calcule:

a) $P(A \cup \overline{B})$.

b) $P((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A))$.

Nota: $\overline{S}$ *denota el suceso complementario del suceso* S.

A.5. (2 puntos)

El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60$ g.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\overline{X} \leq 220) = 0,9940$.

B.1. (2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} x - ay &= 1 \\ ax - 4y - z &= 2 \\ 2x + ay - z &= a - 4 \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.
b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

B.2. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{ax^2 - 3}{x^2 - 5}$$

a) Calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $y = -1$.
b) Para $a = 1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y los extremos relativos, si existen.

B.3. (2 puntos)
Dada la función real de variable real

$$f(x) = e^{2x} + x$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$.
b) Calcule

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

B.4. (2 puntos)
En un instituto se decide que los alumnos y alumnas solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de $0,7$. La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es $0,2$. Se elige un examen al azar. Determine la probabilidad de que

a) Sea el examen de un alumno.
b) Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.

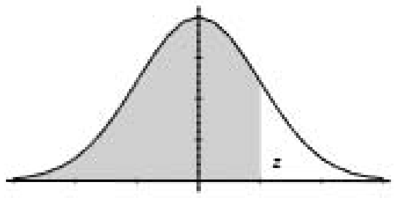
B.5. (2 puntos)
Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarda en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

a) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza $(26.9, 37.1)$, expresado en minutos, para estimar el tiempo medio que tarda en realizar el recorrido, μ, con un nivel de confianza del 98,92 %. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.
b) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 35 minutos de media para completar el recorrido.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

Ejercicio A.1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de los términos de la ecuación .... 0,50 puntos.
Obtención correcta del parámetro .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la inversa........ 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la inversa .... 0,75 puntos

Ejercicio A.2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Expresión correcta de las restricciones .... 0,25 puntos.
Representación correcta de la región factible........ 0,50 puntos.
Obtención correcta de los vértices........ 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión correcta de la función objetivo........ 0,25 puntos.
Encontrar el punto de valor máximo (abscisa y ordenada)........ 0,50 puntos.
Determinación correcta del máximo de la función........ 0,25 puntos.

Ejercicio A.3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la condición de continuidad .... 0,25 puntos.
Obtención correcta del parámetro .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la derivada........ 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la integral y los límites de integración .... 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la integral indefinida .... 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la integral definida .... 0,25 puntos

Ejercicio A.4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad........ 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad........ 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad........ 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad........ 0,50 puntos.

Ejercicio A.5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.
Expresión correcta de la fórmula del tamaño........ 0,25 puntos.
Cálculo correcto del tamaño de la muestra........ 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión de la distribución de la media muestral........ 0,25 puntos.
Tipificación correcta de la variable........ 0,25 puntos.
Obtención correcta de la media........ 0,50 puntos.

Ejercicio B.1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de los valores críticos.......... 0,50 puntos.

Discusión correcta.......... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Solución correcta del sistema.......... 1,00 punto.

Ejercicio B.2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto del límite.......... 0,25 puntos.

Resolución correcta del límite.......... 0,50 puntos.

Obtención correcta del parámetro .... 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de la derivada.......... 0,25 puntos.

Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento .... 0,50 puntos.

Obtención de los extremos relativos .... 0,25 puntos

Ejercicio B.3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Expresión correcta de la ecuación de la recta tangente .... 0,25 puntos.

Cálculo correcto de la pendiente de la tangente .... 0,50 puntos.

Ecuación correcta de la recta tangente .... 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Cálculo correcto de la integral indefinida .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la integral definida .... 0,50 puntos

Ejercicio B.4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.......... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.......... 0,50 puntos.

Ejercicio B.5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.

Expresión correcta de la fórmula del tamaño .... 0,25 puntos.

Cálculo correcto del tamaño de la muestra.......... 0,25 puntos.

Cálculo correcto de la media muestral .... 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión de la distribución de la media muestral.......... 0,25 puntos.

Tipificación correcta de la variable.......... 0,25 puntos.

Obtención correcta de la probabilidad.......... 0,50 puntos.

SOLUCIONES DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

REPERTORIO 5. OPCIÓN A

Problema A.1:

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 5a\\ a & 3\end{pmatrix}$, con $a\in R$.

$a)$ Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la siguiente igualdad: $A^2-5A=-I$.

$b)$ Calcule A^{-1} para $a=-1$.

Solución:

$a)$ $A^2-5A=-I \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 5a\\ a & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5a\\ a & 3\end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix}2 & 5a\\ a & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix}4+5a^2 & 25a\\ 5a & 9+5a^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10 & -25a\\ -5a & -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix}5a^2-6 & 0\\ 0 & 5a^2-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow 5a^2-6=-1;\;\; 5a^2=5$$

Se verifica la igualdad para $\boldsymbol{a}$ **= +1** y para $\boldsymbol{a=-1}$.

$b)$ Para $a=-1$ es $A=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. $|A|=\begin{vmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{vmatrix}=6-5=1$. $\quad A^{-1}=\dfrac{Adj.de\,A^t}{|A|}=\dfrac{\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}}{1}$.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{5}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$$

Problema A.2:

Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21 000 kg de tierra vegetal y 15 000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora del tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 euros y 60 euros por cada metro cúbico de tipo B.

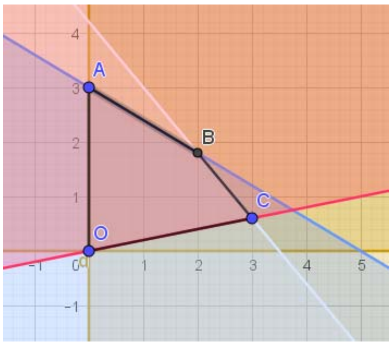
a) Represente la región del plano determinado por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.

b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

Solución:

a) Sean x e y los metros cúbicos que elabora el vivero de los tipos A y B, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 60x+50y\le 21000 \\ 30x+50y\le 15000 \\ x\le 5y \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} 6x+5y\le 2.100 \\ 3x+5y\le 1.500 \\ x-5y\le 0 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$



Los vértices de la región factible son: $\boldsymbol{O(0,0)}$; $\boldsymbol{A(0,300)}$; $\boldsymbol{B(200,180)}$; $\boldsymbol{C(300,60)}$.

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 3x+5y=1.500 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,300).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x+5y=2.100 \\ 3x+5y=1.500 \end{array}\right\} \Rightarrow B(200,180);$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x+5y=2.100 \\ x-5y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow;\ C(300,60).$

La función objetivo es la siguiente: $f(x,y)=50x+60y$.

b) Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,300)=50\cdot 0+60\cdot 300=0+18000=18\,000.$

$B \Rightarrow f(200,180)=50\cdot 200+60\cdot 180=10000+10800=20\,800.$

$C \Rightarrow f(300,60)=50\cdot 300+60\cdot 60=15000+3600=18\,600.$

El máximo se produce en el punto $B(200,180)$.

Deben elaborarse **200** m^3 de A y **180** m^3 de B para que el beneficio sea máximo, de **20 800 euros**

Problema A.3:

Se considera la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{2x^2+1} & si \quad x < 1 \\ 2m + Lx & si \quad x \geq 1 \end{cases}$.

$a)$ Estudie los valores del parámetro $m \in R$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y calcule la derivada de la función para $x < 1$.

$b)$ Halle el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = -1$ y $x = 0$ y el eje OX.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de m para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{6x}{2x^2+1} = \frac{6}{3} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (2m + L1) = 2m + 0 = 2m = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

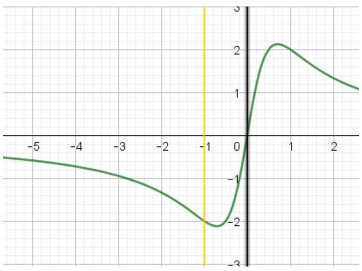
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 2 = 2m.$

Para $\boldsymbol{m = 1}$ la función es continua en toda la recta real.

Para $x < 1$ la función es $f(x) = \frac{6x}{2x^2+1}$; su derivada es la siguiente:

$$f'(x) = \frac{6\cdot(2x^2+1) - 6x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{12x^2+6-24x^2}{(2x^2+1)^2} = \frac{6-12x^2}{(2x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6\cdot(1-2x^2)}{(2x^2+1)^2}$$



$b)$ En el intervalo $(-1, 0)$ la función es $f(x) = \frac{6x}{2x^2+1}$, que tiene todos sus valores negativos en este intervalo, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$Área = \int_0^{-1} f(x) \cdot dx = \int_0^{-1} \frac{6x}{2x^2+1} \cdot dx \Rightarrow$$

Es una integral inmediata de Logaritmo. Hacemos un cambio de variable:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x^2 + 1 = t \\ 4x \cdot dx = dt \\ 6x \cdot dx = \frac{3}{2} \cdot dt \end{array} \right| \left. \begin{array}{c} x = -1 \to t = 3 \\ x = 0 \to t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Área = \frac{3}{2} \cdot \int_1^3 \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{3}{2} \cdot [Lt]_1^3 = \frac{3}{2} \cdot (L3 - L1) = \frac{3}{2} \cdot (L3 - 0) = \frac{3}{2} \cdot L3.$$

$$Área = \boldsymbol{\frac{3}{2} \cdot L3\ u^2} \cong 1.65\ u^2$$

Problema A.4:

Sean A y B sucesos de un experimento aleatoria tales que $P(A/B)=\frac{1}{4}, P(B)=\frac{1}{6}$ y $P(A)=\frac{2}{3}$. Calcule:

$a)$ $P(A\cup\overline{B})$.

$b)$ $P[(\overline{A}\cup B)\cup(\overline{B}\cup A)]$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario de S.

Solución:

$a)$ Nos dicen que: $P(A/B)=\frac{1}{4}$, por tanto $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{1/6}=\frac{1}{4}$, luego

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$$

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$P(A\cap\overline{B})=\frac{15}{24}$$

$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\cap\overline{B})=\frac{2}{3}+(1-P(B))-P(A\cap\overline{B})=\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{15}{24}=\frac{16+20-15}{24}$$
$$=\frac{21}{24}=0.875$$

$$P(A\cup\overline{B})=\mathbf{\frac{21}{24}}$$

$b)$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{16+4-1}{24}=\frac{19}{24}$.

$$P[(\overline{A}\cup B)\cup(\overline{B}\cup A)]=P(A\cup B)-P(A\cap B)=\frac{19}{24}-\frac{1}{24}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$$

$$P[(\overline{A}\cup B)\cup(\overline{B}\cup A)]=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

Problema A.5:

El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60\ g$.

$a)$ Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95 %.

$b)$ Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\overline{X} \leq 220) = 0.9940$.

Solución:

$a)$ Para un nivel de confianza del 95 % es: $1 - \alpha = 0.95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \ \rightarrow$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.\ (1 - 0.025 = 0.9750 \ \rightarrow z = 1.96).$$

Datos: $\sigma = 60;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96;\ \ Error\ máximo < 20.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow 20 = 1.96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} \rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \ \Rightarrow$

$n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{60}{20}\right)^2 = (1.96 \cdot 3)^2 = 5.88^2 = 34.5744.$

El tamaño mínimo debe ser de **35** patatas

$b)$ Datos: $\sigma = 60;\ \ n = 100;\ \ P(\overline{X} \leq 220) = 0.9940.$

$\overline{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{60}{\sqrt{100}}\right) = N(\mu, 6)$. Tipificando $\rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-\mu}{6}$.

$P(\overline{X} \leq 220) = 0.9940 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{220-\mu}{6}\right) = 0.9940.$

Buscando en la tabla $N(0,1)$ a la inversa, a 0,.940 le corresponde 2.51:

$\frac{220-\mu}{6} = 2.51;\ \ 220 - \mu = 15.06;\ \ \mu = 220 - 15.06 = 204.94.$

El peso medio de las patatas de la muestra es de **204.94** gramos

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Se considera el sistema $\left.\begin{array}{r} x-ay=1 \\ ax-4y-z=2 \\ 2x+ay-z=a-4 \end{array}\right\}$ dependiente del parámetro $a \in R$:

$a)$ Discute el sistema para los diferentes valores de a.

$b)$ Resuelva el sistema para $a=3$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ a & -4 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ a & -4 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix}=4+2a+a-a^2=0;\ \ a^2-3a-4=0; a=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm5}{2}\Rightarrow$ $a_1=-1, a_2=4$. Por tanto, para $a\neq-1$ y $a\neq4$ el rango de matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada, e igual al número de incógnitas. Por lo que el sistema es compatible y determinado.

Para $\boldsymbol{a}\neq-\mathbf{1}$ y $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{4}$ el sistema es compatible y determinado.

Si $a=-1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1, C_2, C_4\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}=20+1+4+8+2-10=25\neq0\Rightarrow Rang\ M'=3.$ El rango de la matriz ampliada es 3, y el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Si $a=-1$ el sistema es incompatible

Si $a=4\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{Gauss\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{Bmatrix} F_2\to F_2-4F_1 \\ F_3\to F_3-2F_1 \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow\{F_2=F_3\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$ El rango de la matriz ampliada es 2, y el rango de la matriz de los coeficientes es 2, menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible pero indeterminado.

Si $a=4$ el sistema es compatible pero indeterminado.

$b)$ Para $a=3$ el sistema resulta $\begin{cases} x-3y=1 \\ 3x-4y-z=2 \\ 2x+3y-z=-1 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Lo resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{4+0-3-(0-3+6)}{4+0+6-(0-3+9)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$.\,y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{4}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}.$$

$$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2};\;\; y=-\frac{1}{2};\;\; z=-\frac{3}{2}}$$

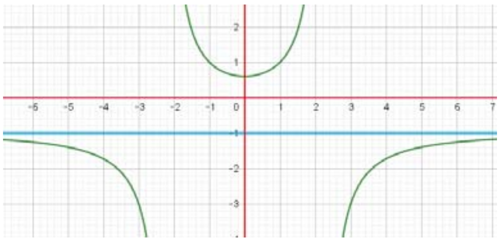
Problema B.2:

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{ax^2-3}{x^2-5}$.

$a)$ Calcule el valor del parámetro $a \in R$ para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $x = -1$.

$b)$ Para $a = 1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y los extremos relativos, si existen.

Solución:

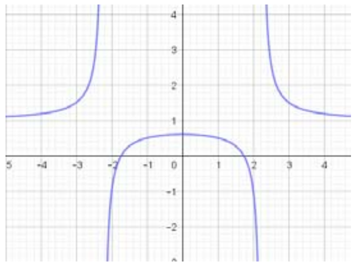


$a)$ Para determinar la asíntota horizontal $y = -1$calculamos el límite de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^2-3}{x^2-5} = a = -1 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{a = -1}$$

$b)$ Para $a = 1$ la función resulta $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-5}$.



El dominio de la función es $D(f) \Rightarrow R - \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$.

Estudio del crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-5)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-5)^2} = \frac{2x\cdot(x^2-5-x^2+3)}{(x^2-5)^2} = \frac{-4x}{(x^2-5)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4x}{(x^2-5)^2} = 0;\ -4x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Es creciente como el denominador es siempre positivo, $f'(x) > 0$, si $x > 0$, y decreciente si $x < 0$.

Se debe tener en cuenta que la función es par, por ser $f(x) = f(-x)$, por lo cual es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

La función pasa en $x = 0$ de ser creciente a ser decreciente, luego hay un máximo: $f(0) = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$$\text{Máximo: } \left(\mathbf{0},\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\right)$$

No hay ni máximos ni mínimos absolutos.

Autor: Javier Rodrigo Hitos

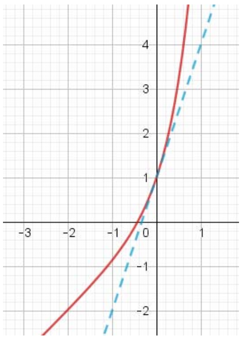
Problema B.3:

Dada la función real de variable real $f(x) = e^{2x} + x$.

$a)$ Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$.

$b)$ Calcule $I = \int_0^1 f(x) \cdot dx$.

Solución:



$a)$ La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} + 1 \rightarrow m = f'(0) = 2 \cdot e^0 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

El punto de tangencia para $x = 0$ es el siguiente: $f(0) = e^0 + 0 = 1 \Rightarrow P(0, 1)$.

La ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 1 = 3 \cdot (x - 0) = 3x \;\Rightarrow\; 3x - y + 1 = 0$$

$$\boldsymbol{y = 3x + 1}$$

$b)$ $I = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 (e^{2x} + x) \cdot dx \Rightarrow$ Integramos por partes

$$\left\{\begin{matrix} 2x = t; \;\; x = \frac{1}{2}t \\ dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{matrix}\middle| \begin{matrix} x = 1 \rightarrow t = 2 \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \left(e^t + \frac{1}{2}t\right) \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \left[e^t + \frac{t^2}{4}\right]_0^2 =$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot \left(e^2 + \tfrac{2^2}{4}\right) - \tfrac{1}{2} \cdot \left(e^0 + \tfrac{0^2}{4}\right) == \tfrac{1}{2} \cdot (e^2 + 1) - \tfrac{1}{2} \cdot (1 + 0) = \tfrac{1}{2} \cdot (e^2 + 1 - 1) = \tfrac{1}{2} \cdot e^2.$$

$$\int_0^1 f(x) \cdot dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{e^2}$$

Problema B.4:

En un instituto se decide que los alumnos y las alumnas solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de 0.7.

La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es 0.2. Se elige un examen al azar. Determina la probabilidad de que:

a) Sea el examen de un alumno.

b) Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.

Solución:

Este ejercicio se puede hacer mediante una tabla de contingencia. Los datos que tenemos son: $P(Azul) = \frac{2}{3} = 0.6667)$; $P(Alumna/Azul) = 0.7$; $P(Negro\ \cap\ Alumno) = 0.2$.

Por lo tanto: $P(Alumna/Azul) = \frac{P(Azul \cap Alumna)}{P(Azul)} = \frac{P(Azul \cap Alumna)}{\frac{2}{3}} = 0.7 \rightarrow$

$$P(Azul\ \cap\ Alumna) = 0.7 \cdot \frac{2}{3} = 0.467$$

	$Negro$	$Azul$	
$Alumno$	0.2000		
$Alumna$		0.4667	
		$\frac{2}{3} = 0.6667$	1

Completamos la tabla de contingencia:

	$Negro$	$Azul$	
$Alumno$	0.2000	$\mathbf{0.2000}$	$\mathbf{0.4000}$
$Alumna$	$\mathbf{0.1333}$	0.4667	$\mathbf{0.6000}$
	$\mathbf{0.3333}$	0.6667	1

a) Miramos la tabla:

Probabilidad de que sea de un alumno es **0.4.**

b) En la tabla buscamos la probabilidad de que esté escrito en negro siendo un alumno, y la probabilidad de que sea un alumno:

$$P(Alumno/Negro) = \frac{P(Negro \cap Alumno)}{P(Negro)} = \frac{0.2000}{0.3333} = 0.6\ .$$

Si está escrito en negro, la probabilidad de que sea de un alumno es **0.6.**

Problema B.5:

Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarde en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

a) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza $(26.9, 37.1)$, expresado en minutos, para estimar el tiempo que tarda en realizar el recorrido, μ, con un nivel de confianza del 98.92 %. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.

b) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 35 minutos de media para completar el recorrido.

Solución:

$a)\ E = \frac{37.1-26.9}{2} = \frac{10.2}{2} = 5.1.$

Para un nivel de confianza del 98.92 % es: $1 - \alpha = 0.9892\ \rightarrow\ \alpha = 1 - 0.9892 = 0.0108\ \rightarrow$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.0054} = 2.55.\ (1 - 0.0054 = 0.9946 \rightarrow z = 2.55).$

Datos: $\sigma = 10;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.55;\ \ E = 5.1$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\ \Rightarrow$

$n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2.55 \cdot \frac{10}{5.1}\right)^2 = (2.55 \cdot 1.9608)^2 = 5^2 = 25.$

El tamaño mínimo debe ser de **25** días.

$b)\ Datos\colon\ \mu = 30;\ \ n = 16;\ \ \sigma = 10.$

$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(30, \frac{10}{\sqrt{16}}\right) = N(30, 2.5)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-30}{2.5}$.

$P = P(25 \leq X \leq 35) = P\left(\frac{25-30}{2.5} \leq Z \leq \frac{35-30}{2.5}\right) = P\left(\frac{-5}{2.5} \leq Z \leq \frac{5}{2.5}\right) =$

$= P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z < 2) - [1 - P(Z < 2)] = P(Z < 2) - 1 + P(Z < 2) =$

$= 2 \cdot P(Z < 2) - 1 = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 1.9544 - 1 = 0.9544.$

$P(25 \leq X \leq 35) = \mathbf{0.9544}$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

MURCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
—207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES—
EBAU2020 - JULIO

OBSERVACIONES IMPORTANTE: Debes responder a un máximo de 5 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2 puntos. Si se responde a más de 5 preguntas, sólo se corregirán las cinco primeras que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$$

Resolverlo para a=3.

CUESTIÓN 2. (2 puntos) La repoblación forestal de un bosque quemado en un gran incendio se va a llevar a cabo por dos empresas diferentes de jardinería. Hay que repoblar con pinos, eucaliptos y chopos. La primera empresa es capaz de plantar, en una semana, 30 pinos, 20 eucaliptos y 20 chopos. La segunda empresa planta 20 pinos, 30 eucaliptos y 20 chopos. El coste semanal se estima en 33.000€ para la primera empresa de jardinería y de 35.000€ para la segunda. Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos, 120 eucaliptos y 100 chopos. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

CUESTIÓN 3. (2 puntos) El beneficio semanal obtenido en una empresa de ordenadores viene dado para la función $B(x)=-2x^2+24x-36$, donde x representa el número de ordenadores vendidos semanalmente. Calcular el número de ordenadores vendidos cada semana para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es este beneficio máximo?

CUESTIÓN 4. Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$:

a) Determinar los valores de a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en $x=1$ y la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$ tenga de pendiente $m=-1$ (1 punto).

b) Si en la función anterior $a=-2$ y $b=-4$, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como sus extremos relativos (1 punto)

CUESTIÓN 5. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=x^2-4x+6$ y $g(x)=-2x^2+5x+6$. Calcular su área.

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x = 1$ (1 punto).

b) Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$ el eje OX y las rectas de ecuación $x = 0$ y $x = 1$. (1 punto).

CUESTIÓN 7. En una ferretería se encuentran mezclados 100 tornillos de color azul, 60 de color blanco y 40 de color rojo. La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es de 0,01 si es azul, 0,02 si es blanco y de 0,03 si es rojo. Un comprador elige un tornillo al azar:

a) Calcule la probabilidad de que el tornillo sea defectuoso. (1 punto)

b) Sabiendo que el tornillo es defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanco? (1 punto)

CUESTIÓN 8. (2 puntos) Dado dos sucesos independientes A y B se conoce que $P(A) = 0,3$ y que $P(\overline{B}) = 0,4$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B)$. (0,75 puntos)

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. (0,5 puntos)

c) $P(A / \overline{B})$. (0,75 puntos)

CUESTIÓN 9. Se ha estimado que el consumo medio de gasolina de los automóviles de un concesionario se distribuye según una distribución normal con una desviación típica de 0,5 litros. Se han probado 10 automóviles, elegidos aleatoriamente, de este concesionario por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares, obteniendo un consumo medio de 6,5 litros por cada 100km.

a) Determine un intervalo de confianza, al 95% de confianza, para la media del gasto de gasolina de estos vehículos. (1,25 puntos)

b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 95%, el error cometido del consumo de gasolina sea inferior a 0,2. (0,75 puntos)

CUESTIÓN 10. En un laboratorio farmacéutico se analiza el PH de una solución y se supone que este sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,02. Con un ensayo de 6 mediciones de la misma solución se obtuvo un PH medio de 7,91.

a) Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de todas las determinaciones de PH de la misma solución obtenida por el mismo método. (1,25 puntos)

b) Con el mismo nivel de confianza anterior, ¿cuál será el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 0,01? (0,75 puntos)

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
—207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES—
EBAU2020 - **JULIO**

CRITERIOS DE VALORACIÓN

CRITERIOS GENERALES

Cada error de cálculo trivial se penalizará con 0,1 puntos y cada error de cálculo no trivial con 0,2 puntos.
Los errores ortográficos graves se tendrán en cuenta en la calificación total del ejercicio.

CRITERIOS ESPECÍFICOS

CUESTIÓN 1. (2 puntos)
- Discusión correcta: 1,5 puntos.
- Resolución correcta: 0,5 puntos.

CUESTIÓN 2. (2 puntos)
- Resolución correcta: 2 puntos.

CUESTIÓN 3. (2 puntos)
- Resolución correcta: 2 puntos.

CUESTIÓN 4. (2 puntos)
- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 1 punto.

CUESTIÓN 5. (2 puntos)
- Representar gráficamente el recinto: 0,75 puntos.
- Calcular su área: 1,25 puntos.

CUESTIÓN 6. (2 puntos)
- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 1 punto.

CUESTIÓN 7. (2 puntos)

- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 1 punto.

CUESTIÓN 8. (2 puntos)

- Apartado a): 0,75 puntos.
- Apartado b): 0,5 puntos.
- Apartado c): 0,75 puntos.

CUESTIÓN 9. (2 puntos)

- Dar la expresión general del intervalo: 0,75 puntos.
- Sustituir bien los valores: 0,5 puntos.
- Dar la expresión del error: 0,25 puntos.
- Calcular el tamaño: 0,5 puntos.

CUESTIÓN 10. (2 puntos)

- Dar la expresión general del intervalo: 0,75 puntos.
- Sustituir bien los valores: 0,5 puntos.
- Dar la expresión del error: 0,25 puntos.
- Calcular el tamaño: 0,5 puntos.

SOLUCIONES CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2020

Cuestión 1:

1º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$ en función de los valores del parámetro a. Resolverlo para $a=3$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2+a^2-2-a=0;\ \ a^2-a=0 \Rightarrow a_1=0, a_2=1.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2-2-2=-2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=0 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2=C_4\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado.}$$

Para $a=3$ el sistema es $\left.\begin{array}{r} x+3y+z=1 \\ 2y+3z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3^2-3}=\frac{2+2+9-2-3-6}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}. \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6}=\frac{2+3-2-3}{6}=\frac{0}{6}=0.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6}=\frac{2+6-2-2}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

$$\underline{Solución: x=\frac{1}{3},\ y=0,\ z=\frac{2}{3}.}$$

Cuestión 2:

2º) La repoblación forestal de un bosque quemado en un gran incendio se va a llevar a cabo por dos empresas diferentes de jardinería. Hay que repoblar con pinos, eucaliptos y chopos. La primera empresa es capaz de plantar, en una semana, 30 pinos, 20 eucaliptos y 20 chopos. La segunda empresa planta 20 pinos, 30 eucaliptos y 20 chopos. El coste semanal se estima en 33 000 euros para la primera empresa de jardinería y de 35 000 euros para la segunda. Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos, 120 eucaliptos y 100 chopos. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el coste mínimo?

Solución:

Sean x e y el número semanas que trabajan la primera y la segunda empresa, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 30x+20y \ge 60 \\ 20x+30y \ge 120 \\ 20x+20y \ge 100 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x+2y \ge 6 \\ 2x+3y \ge 12 \\ x+y \ge 5 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow 3x+2y \ge 6 \Rightarrow y \ge \frac{6-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	2
y	3	0

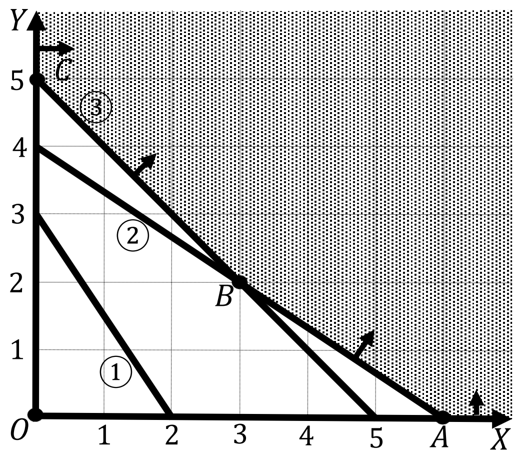
$② \Rightarrow 2x+3y \ge 12 \Rightarrow y \ge \frac{12-2x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	6
y	4	0

$③ \Rightarrow x+y \ge 5 \Rightarrow y \ge 5-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	5
y	5	0

La región factible, que es abierta, es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la región factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 2x+3y=12 \end{array}\right\} \Rightarrow A(6,0).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=12 \\ x+y=5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+3y=12 \\ -2x-2y=-10 \end{array}\right\} \Rightarrow B(3,2).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow C(0,5).$

La función de objetivos es: $f(x,y)=33\,000x+35\,000y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(6,0)=33\,000\cdot 6+35\,000\cdot 0=198\,000+0=198\,000.$

$B \Rightarrow f(3,2)=33\,000\cdot 3+35\,000\cdot 2=99\,000+70\,000=169\,000.$

$C \Rightarrow f(0,5)=33\,000\cdot 0+35\,000\cdot 5=0+175\,000=175\,000.$

El valor mínimo se produce en el punto $B(3,2)$.

$\underline{\textit{El coste es mínimo con } \mathbf{3} \textit{ semanas de la primera empresa y } \mathbf{2} \textit{ de la segunda.}}$

$\underline{\textit{El mínimo coste es de } \mathbf{169\,000} \textit{ euros.}}$

Cuestión 3:

3º) El beneficio semanal obtenido en una empresa de ordenadores viene dado por la función

$B(x) = -2x^2 + 24x - 36$, donde x representa el número de ordenadores vendidos semanalmente. Calcular el número de ordenadores vendidos cada semana para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es este beneficio máximo?

Solución:

La función $B(x)$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2; su vértice (máximo) es el siguiente:

$$B'(x) = -4x + 24. \quad B'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 24 = 0;\ -x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ cuando\ se\ venden\ \mathbf{6}\ ordenadores\ cada\ semana}.$$

$$B(6) = -2 \cdot 6^2 + 24 \cdot 6 - 36 = -72 + 144 - 36 = 144 - 108 = 36.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ \mathbf{36}\ unidades\ (que\ no\ se\ especifican)}.$$

Cuestión 4:

4º) Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$:

a) Determinar los valores de a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tenga de pendiente $m = -1$.

b) Si en la función anterior $a = -2$ y $b = -4$, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos.

Solución:

a) Por tener un extremo relativo en $x = 1$ es $f'(1) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$ $\quad f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 2a + b + 3.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2a + b + 3 = 0;\ \ 2a + b = -3.$ (*)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto, por lo cual:

$m = f'(0) = -1.$ $\quad f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = -1 \Rightarrow \underline{b = -1}.$

Sustituyendo el valor obtenido en la expresión (*):

$2a + b = -3;\ \ 2a - 1 = -3;\ \ 2a = -2 \Rightarrow \underline{a = -1}.$

$$\boldsymbol{a = -1;\ b = -1}$$

b) Para $a = -2$ y $b = -4$ la función es $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1.$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4.$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2 \cdot 3} =$

$= \frac{4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} = \frac{2 \pm 4}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 2.$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de su primera derivada dividen su dominio, que es R, en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$ y $(2, +\infty)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente. Considerando, por ejemplo, $x = 0 \in \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$:

$f'(9) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 4 = -4 < 0 \Rightarrow Decreciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{2}{3}, 2\right).}$$

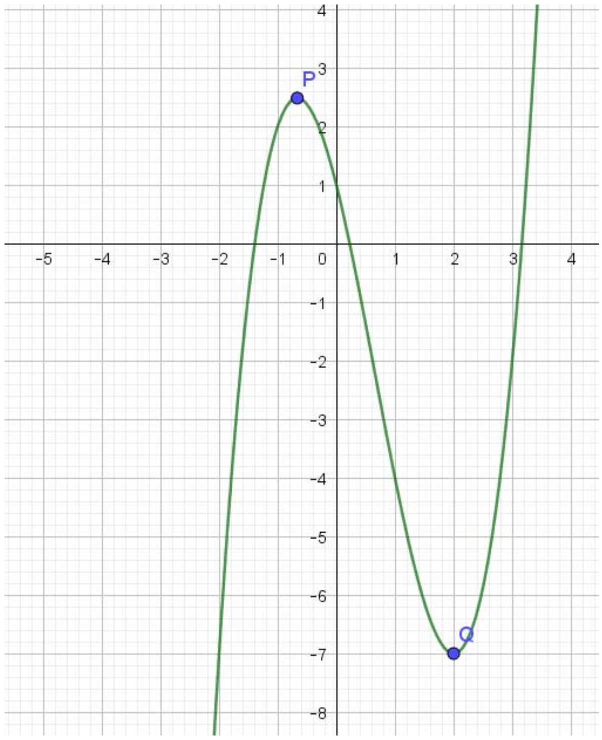
De los periodos de crecimiento y decrecimiento y teniendo en cuenta que la función es continua, la función tiene un máximo relativo para $x = -\frac{2}{3}$ y un mínimo relativo para $x = 2$.

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 1 =$$

$$= \frac{-8-24+72+27}{27} = \frac{99-32}{27} = \frac{67}{27} \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: P\left(-\frac{2}{3}, \frac{67}{27}\right)}.$$

$$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 8 - 8 - 8 + 1 = -7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: Q(2, -7)}.$$



$$Máximo\ relativo: P\left(-\frac{2}{3}, \frac{67}{27}\right) = (-0.67, 2.48);\ Mínimo\ relativo: Q(2, -7)$$

Cuestión 5:

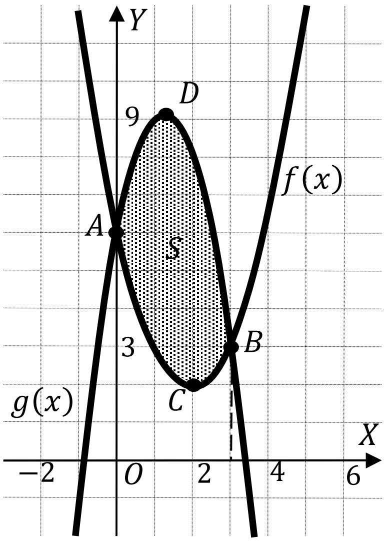
5º) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las siguientes parábolas: $f(x) = x^2 - 4x + 6$ y $g(x) = -2x^2 + 5x + 6$. Calcular su área.

Solución:

a) Los puntos de corte de las dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = -2x^2 + 5x + 6;$$

$$3x^2 - 9x = 0;\ \ 3x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to A(0,6) \\ x_2 = 3 \to B(3,3) \end{cases}.$$



La función $f(x) = x^2 - 4x + 6$ es una parábola convexa (∪) cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Vértice: C(2,2).$$

La función $g(x) = -2x^2 + 5x + 6$ es una parábola cóncava (∩) cuyo vértice es el siguiente:

$$g'(x) = -4x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}.$$

$$g\left(-\frac{5}{4}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + 6 = -\frac{50}{16} - \frac{25}{4} + 6 = -\frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 6 =$$

$$= \frac{-25+50+48}{8} = \frac{98-25}{8} = \frac{73}{8} \Rightarrow Vértice: D\left(-\frac{5}{4}, \frac{73}{8}\right).$$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular todas las ordenadas de $g(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de $f(x)$, por lo cual la superficie es la siguiente:

$$S = \int_0^3 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_0^3 [(-2x^2 + 5x + 6) - (x^2 - 4x + 6)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-3x^2 + 9x) \cdot dx = \left[-\frac{3x^3}{3} + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3 = \left[-x^3 + \frac{9x^3}{2}\right]_0^3 = \left(-3^3 + \frac{9 \cdot 3^2}{2}\right) - 0 =$$

$$= -27 + \frac{81}{2} = \frac{81-54}{2} = \frac{27}{2}.$$

$$\boldsymbol{S = \frac{27}{2}\ u^2 = 13.5\ u^2.}$$

Cuestión 6:

6º) Dada la función $f(x)=\frac{1}{x+1}$:

$a)$ Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x=1$.

$b)$ Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX y las rectas de ecuación $x=0$ y $x=1$.

Solución:

$a)$ El punto de tangencia es: $f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow P\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

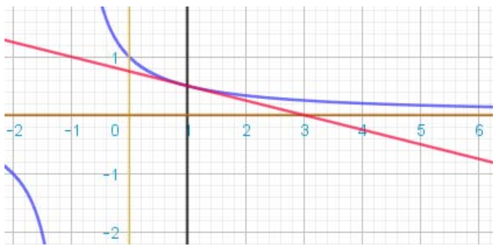
La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$. $\quad m=f'(1)=\frac{-1}{(1+1)^2}=-\frac{1}{4}$.

La ecuación de una recta conocidos el punto de tangente y la pendiente viene dada por la expresión $y-y_0=m\cdot(x-x_0)$:

$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\cdot(x-1);\;\; 4y-2=-x+1.$

$\underline{Recta\ tangente: t\equiv \boldsymbol{x+4y-3=0}}.$



$b)$ En el intervalo $(0,1)$ todas las ordenadas de la función $f(x)=\frac{1}{x+1}$ son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S=\int_0^1 f(x)\cdot dx=\int_0^1\frac{1}{x+1}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt\end{matrix}\middle|\begin{matrix} x=1\rightarrow t=2 \\ x=0\rightarrow t=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int_1^2\frac{1}{t}\cdot dt=$$

$$=[Lt]_1^2=L2-L1=L2-0=L2.$$

$$\underline{\boldsymbol{S=L2\ u^2\cong 0.69\ u^2}}.$$

Cuestión 7:

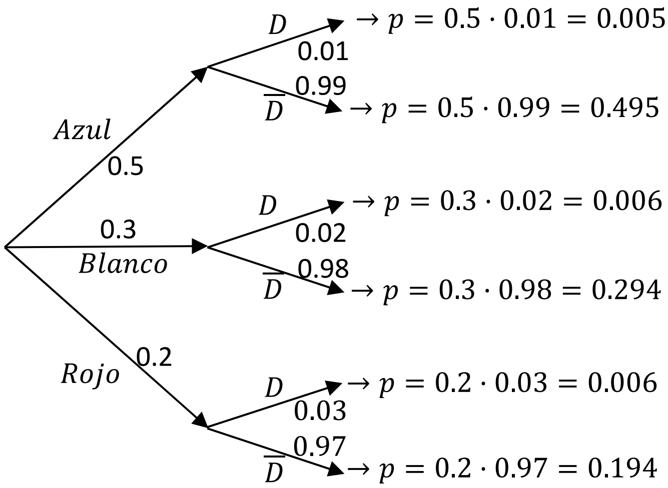
7º) En una ferretería se encuentran mezclados 100 tornillos de color azul, 60 de color blanco y 40 de color rojo. La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es de 0.01 si es azul, 0.02 si es blanco y de 0.03 si es rojo. Un comprador elige un tornillo al azar:

a) Hallar la probabilidad de que el tornillo sea defectuoso.

b) Sabiendo que el tornillo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanco?

Solución:

$$n = 100 + 60 + 40 = 200;\;\; P(A) = 0.5;\;\; P(B) = 0.3;\;\; P(R) = 0.2.$$



$a)\qquad P = P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(R \cap D) =$

$= P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(R) \cdot P(D/R) =$

$= 0.6 \cdot 0.99 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.2 \cdot 0.97 = 0.005 + 0.006 + 0.006 = \underline{0.017}.$

La probabilidad de que el tornillo sea defectuoso es $\mathbf{0.017}$

$$b)\ P = P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.017} = \frac{0.006}{0.017} = \underline{0.3529}.$$

Sabiendo que el tornillo es defectuoso, la probabilidad de que sea blanco es $\mathbf{0.3529}$

Cuestión 8:

8º) Dados dos sucesos independientes A y B se conoce que $P(A) = 0.3$ y que $P(\overline{B}) = 0.4$. Calcular las siguientes probabilidades:

$a)$ $P(A \cup B)$.

$b)$ $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

$c)$ $P(A/\overline{B})$.

Solución:

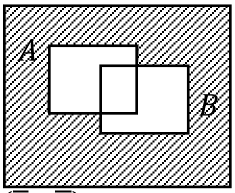
$a)$ $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.4 = 0.6$.

Por ser A y B independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.6 - 0.18 = 0.9 - 018 = 0.72$.

$$P(A \cup B) = \mathbf{0.72}$$

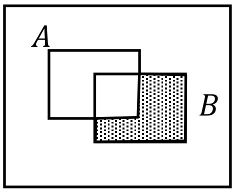
$b)$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.72 = \underline{0.28}$.



$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$

$$\boldsymbol{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.28}$$

$c)$ $P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\overline{B})} = \frac{0.3 - 0.18}{0.4} = \frac{0.12}{0.4} = \underline{0.3}$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$$\boldsymbol{P(A|\overline{B}) = 0.3}$$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es

Cuestión 9:

9º) Se ha estimado que el consumo medio de gasolina de los automóviles de un concesionario se distribuye según una distribución normal con una desviación típica de 0.5 litros. Se han probado 10 automóviles, elegidos aleatoriamente, de este concesionario por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares, obteniendo un consumo medio de 6.5 litros por cada 100 km.

a) Determine un intervalo de confianza, al 95 % de confianza, para la media del gasto de gasolina de esos vehículos.

b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error cometido del consumo de gasolina sea inferior a 0.2.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0.95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.$

$(1 - 0.025 = 0.9750 \ \rightarrow z = 1.96).$

Datos: $n = 10; \ \overline{x} = 6.5; \ \sigma = 0.5; \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma \ y \ n$, es la siguiente:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

$\left(6.5 - 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{10}}; \ 6.5 + 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{10}}\right);$

$(6.5 - 1.96 \cdot 0.1581; \ 6.5 + 1.96 \cdot 0.1581); \ \ (6.5 - 0.3099; \ 6.5 + 0.3099).$

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (6.1901; \ 6.8099).}$$

El intervalo de confianza para la media de gasto de gasolina es $\mathbf{(6.1901; \ 6.8099).}$

b) Datos: $\sigma = 0.5; \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96; \ E = 0.2.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \ \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{0.5}{0.2}\right)^2 =$

$= (1.96 \cdot 2.5)^2 = 4.9^2 = 24.01.$

$\underline{El \ tamaño \ mínimo \ de \ la \ muestra \ tiene \ que \ ser \ de \ \mathbf{25} \ automóviles.}$

Cuestión 10:

10º) En un laboratorio farmacéutico se analiza el PH de una solución y se supone que este sigue una distribución normal con una desviación típica de 0.02. Con un ensayo de 6 mediciones de la misma solución se obtuvo un PH de 7.91.

a) Determine el intervalo de confianza al 95 % para la media de todas las determinaciones del PH de la misma solución obtenida por el mismo método.

b) Con el mismo nivel de confianza anterior, ¿cuál será el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 0.01?

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 1-0.95 = 0.05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.$

$(1-0.025 = 0.9750 \rightarrow z = 1.96).$

Datos: $n = 6;\ \overline{x} = 7.91;\ \sigma = 0.02;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

$$\left(7.91 - 1.96 \cdot \frac{0.02}{\sqrt{6}};\ 7.91 + 1.96 \cdot \frac{0.02}{\sqrt{6}}\right);$$

$$(7.91 - 1.96 \cdot 0.0082;\ 7.91 + 1.96 \cdot 0.0082);\ \ (7.91 - 0.0160;\ 7.91 - 0.0160).$$

$$\underline{I.C._{95\ \%} = (7.8940;\ 7.9260)}.$$

El intervalo de confianza de la media es $\mathbf{(7.8940;\ 7.9260)}$.

b) Datos: $\sigma = 0.02;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96;\ E = 0.01.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{0.02}{0.01}\right)^2 =$

$= (1.96 \cdot 2)^2 = 3.92^2 = 15.37.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ \mathbf{16}\ ensayos.}$

UNIVERSIDAD DE MURCIA | Región de Murcia | Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
—207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES—
EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

OBSERVACIONES IMPORTANTE: Debes responder a un máximo de 5 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2 puntos. Si se responde a más de 5 preguntas, sólo se corregirán las cinco primeras que haya respondido el/la estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule $(A-B)$ (0,5 puntos).

b) Calcule $(A-B)^{-1}$ (0,5 puntos).

c) Hallar la matriz X que verifica $AX-A=BX+B$ (1 punto).

CUESTIÓN 2. (2 puntos) Sea S la región del plano definida por las inecuaciones:

$$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\geq 2x-4,\ y\leq x-1,\ 2y\geq x,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$$

a) Representar la región S y obtener sus vértices.

b) Maximizar la función $f(x,y)=x-3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el máximo.

c) Minimizar la función $f(x,y)=x-3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el mínimo.

CUESTIÓN 3. Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años viene dado por la función: $B(t)=\begin{cases} at-t^2 & si\ \ 0\leq t\leq 6 \\ 2t & si\ \ 6<t\leq 10 \end{cases}$ siendo t el tiempo transcurrido en años.

a) Calcular el valor del parámetro a para que la función de beneficios sea continua. (0,5 puntos).

b) Para $a=8$ represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece o decrece. (1 punto).

c) Para $a=8$ indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo beneficio y cuál es su valor. (0,5 puntos).

CUESTIÓN 4. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\left(x^2-2\right)Lnx$ (1 punto).

b) $f(x)=e^{4x^3+2}$ (1 punto).

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
—207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES—
EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

CUESTIÓN 5. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x) = 4 - x^2$ y la recta $g(x) = 2 + x$. Calcular su área.

CUESTIÓN 6. (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 6x$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

CUESTIÓN 7. Entre los alumnos ERASMUS que han llegado este curso a la Universidad de Murcia el 75% hablan inglés, el 50% hablan francés y un 5% no hablan ninguno de estos dos idiomas. Elegido un alumno al azar:

a) Calcule la probabilidad de que hable inglés o francés. (0,5 puntos).
b) Calcule la probabilidad de que hable inglés y francés. (0,5 puntos).
c) Calcule la probabilidad de que, hablando inglés, no hable francés. (1 punto).

CUESTIÓN 8. En una empresa multinacional el 60% de las reuniones se realizan a través de videoconferencia. El 40% de los empleados que asisten a estas videoconferencias son de países de la Unión Europea, mientras que en las reuniones presenciales solo el 20% son trabajadores que no pertenecen a la Unión Europea. Si elegimos un trabajador al azar:

a) Calcule la probabilidad de que pertenezca a la Unión Europea. (1 punto).
b) Sabiendo que el trabajador es de la Unión Europea, ¿Cuál es la probabilidad de que haya asistido a la reunión por videoconferencia? (1 punto).

CUESTIÓN 9. (2 puntos) El precio medio de los aspiradores de una gran superficie se distribuye según una distribución normal de desviación típica 100€. Se toma una muestra aleatoria de 9 aspiradoras de distintas marcas obteniendo un precio medio de 178,89€. Determine un intervalo de confianza al 99% para el precio medio.
Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 99%, el error cometido de estimación del precio no supere los 50€.

CUESTIÓN 10. (2 puntos) Se sabe que el peso de los tarros de cacao de un supermercado es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 1,8 gramos. Se toma una muestra aleatoria de 9 tarros y se obtiene un peso medio de 89 gramos. Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para la media de esta población.
¿Cuál será el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido de estimación del peso no supere 1 gramo, a un nivel de confianza del 95%?

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
—207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES—
EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

CRITERIOS DE VALORACIÓN

CRITERIOS GENERALES

Cada error de cálculo trivial se penalizará con 0,1 puntos y cada error de cálculo no trivial con 0,2 puntos.
Los errores ortográficos graves se tendrán en cuenta en la calificación total del ejercicio.

CRITERIOS ESPECÍFICOS

CUESTIÓN 1. (2 puntos)
- Apartado a): 0,5 puntos.
- Apartado b): 0,5 puntos.
- Apartado 5): 1 punto.

CUESTIÓN 2. (2 puntos)
- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 0,5 puntos.
- Apartado 5): 0,5 puntos.

CUESTIÓN 3. (2 puntos)
- Apartado a): 0,5 puntos.
- Apartado b): 1 punto.
- Apartado 5): 0,5 puntos.

CUESTIÓN 4. (2 puntos)
- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 1 punto.

CUESTIÓN 5. (2 puntos)
- Representar gráficamente el recinto: 0,75 puntos.
- Calcular su área: 1,25 puntos.

UNIVERSIDAD DE MURCIA Región de Murcia Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
—207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES—
EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

CUESTIÓN 6. (2 puntos)

- Representar gráficamente el recinto: 0,75 puntos.
- Calcular su área: 1,25 puntos.

CUESTIÓN 7. (2 puntos)

- Apartado a): 0,5 puntos.
- Apartado b): 0,5 puntos.
- Apartado 5): 1 punto.

CUESTIÓN 8. (2 puntos)

- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 1 punto.

CUESTIÓN 9. (2 puntos)

- Dar la expresión general del intervalo: 0,5 puntos.
- Sustituir bien los valores: 0,5 puntos.
- Dar la expresión del error: 0,5 puntos.
- Calcular el tamaño: 0,5 puntos.

CUESTIÓN 10. (2 puntos)

- Dar la expresión general del intervalo: 0,5 puntos.
- Sustituir bien los valores: 0,5 puntos.
- Dar la expresión del error: 0,5 puntos.
- Calcular el tamaño: 0,5 puntos.

SOLUCIONES CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2020

Cuestión 1:

1º) Sean las marices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule $A - B$.

$b)$ Calcule $(A - B)^{-1}$.

$c)$ Hallar la matriz X que verifica $AX - A = BX + B$.

Solución:

$a)$ $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}$.

$$A - B = \underline{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

$b)$ $|A - B| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2.$ $(A - B)^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$Adj. de\ (A - B)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$(A - B)^{-1} = \frac{Adj. de\ (A - B)^t}{|A - B|} \Rightarrow$$

$$\underline{(A - B)^{-1} = -\tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$c)$ $AX - A = BX + B;$ $AX - BX = A + B;$ $(A - B) \cdot X = A + B;$.

$(A - B)^{-1} \cdot (A - B) \cdot X = (A - B)^{-1} \cdot (A + B);$ $I \cdot X = (A - B)^{-1} \cdot (A + B)$.

$$\underline{X = (A - B)^{-1} \cdot (A + B)}.$$

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$X = (A + B) \cdot (A - B)^{-1} = -\tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Cuestión 2:

2º) Sea S la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$S = \{(x, y) \in |y \geq 2x - 4;\ \ y \leq x - 1;\ \ 2y \geq x;\ \ x \geq 0;\ \ y \geq 0\}.$$

a) Representar la región S y obtener sus vértices.

b) Maximizar la función $f(x, y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el máximo.

c) Minimizar la función $f(x, y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el mínimo.

Solución:

a)

$(1) \Rightarrow y \geq 2x - 4 \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	2	4
y	0	4

$(2) \Rightarrow y \leq x - 1 \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

x	1	5
y	0	4

$(3) \Rightarrow 2y \geq x;\ \ y \geq \frac{x}{2} \Rightarrow P(1, 0) \rightarrow No.$

x	0	6
y	0	3

La región factible es la zona que aparece sombreada de la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ -x + 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

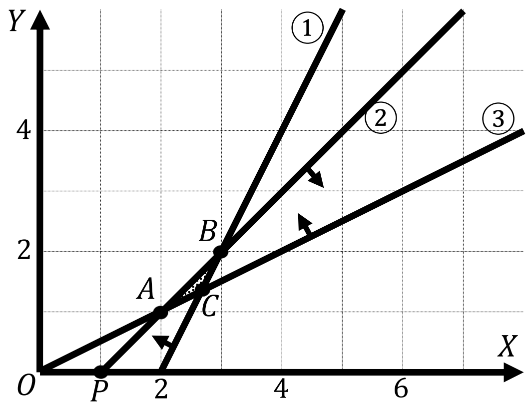
$y = 1;\ \ x = 2 \Rightarrow \underline{A(2, 1)}.$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = 4 \\ x - y = 1 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{r} 2x - y = 4 \\ -x + y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$x = 3;\ \ y = 2 \Rightarrow \underline{B(3, 2)}.$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = 4 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{r} 4x - 2y = 8 \\ -x + 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 8;$$

$x = \frac{8}{3};\ y = \frac{4}{3} \Rightarrow \underline{C\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)}.$



b, c) La función de objetivos es $f(x, y) = x - 3y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(2, 1) = 2 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1.$

$B \Rightarrow f(3, 2) = 3 - 3 \cdot 2 = 3 - 6 = -3.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} - 3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8-12}{3} = -\frac{4}{3}.$

El máximo se produce en el punto $\boldsymbol{A(2, 1)}$ *y el mínimo en el punto* $\boldsymbol{B(3, 2)}$.

Cuestión 3:

3º) Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años viene dado por la función $B(t)=\begin{cases} at-t^2 & si\ \ 0\le t\le 6 \\ 2t & si\ \ 6<t\le 10\end{cases}$, siendo t el tiempo transcurrido en años.

a) Calcular el valor del parámetro a para que la función de beneficios sea continua.

b) Para $a=8$ represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece o decrece.

c) Para $a=8$ indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo beneficio y cuál es su valor.

Solución:

a) La función $B(t)$ es continua en R, excepto para $t=6$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ t=6 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to 6^-} B(t)=\lim\limits_{t\to 6}(at-t^2)=6a-36=B(6) \\ \lim\limits_{t\to 6^+} B(t)=\lim\limits_{t\to 6}(2t)=12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 6^-} B(t)=\lim_{t\to 6^+} B(t)=B(6)\Rightarrow 6a-36=12;\ \ a-6=2\Rightarrow \underline{a=8}.$$

La función de beneficios es continua si $\boldsymbol{a=8}$

b,c) La función resulta $B(t)=\begin{cases} 8t-t^2 & si\ \ 0\le t\le 6 \\ 2t & si\ \ 6<t\le 10\end{cases}$.

En el intervalo $[0,6]$ la función es la parábola de ecuación $g(t)=8t-t^2$, que es cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de t^2, y cuyo vértice es el siguiente:

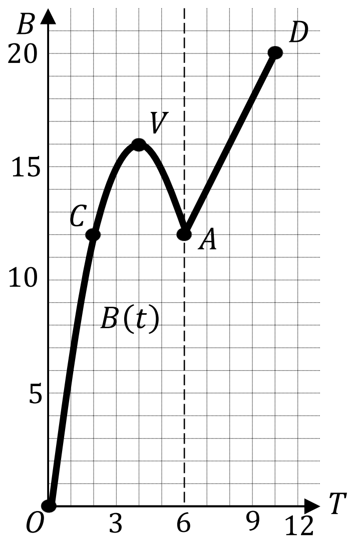
$$g'(t)=8-2t=0;\ \ 4-t=0\Rightarrow t=4.$$

$$g(4)=8\cdot 4-4^2=32-16=16\Rightarrow V(4,16).$$

Por ser $g(0)=0$, la parábola contiene al origen de coordenadas; otros puntos de la parábola son $A(6,12)\ y\ C(2,12)$.

En el intervalo $(6,10]$ la función es la recta $h(t)=2t$, cuyos puntos extremos son $A(6,12)\ y\ D(10,20)$.

La representación gráfica, aproximada, se pude observar en la figura adjunta.



De la observación de la gráfica se observan los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$Crecimiento: t\in(0,4)\cup(6,10);\ Decrecimiento: t\in(4,6)$$

$$En\ los\ 6\ primeros\ años\ el\ máximo\ beneficio\ se\ produce\ para$$

$$\boldsymbol{t=4}\ siendo\ el\ valor\ máximo\ de\ \boldsymbol{16}\ unidades.$$

Cuestión 4:

4º) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = (x^2 - 2) \cdot Lx.$

$b)\ f(x) = e^{4x^3+2}.$

Solución:

$a)\ f'(x) = 2x \cdot Lx + (x^2 - 2) \cdot \frac{1}{x}.$

$$\underline{f(x) = (x^2 - 2) \cdot Lx \ \Rightarrow \ f'(x) = \frac{2x^2 \cdot Lx + x^2 - 2}{x}}.$$

$b)\ f(x) = e^{4x^3+2} \Rightarrow L[f(x)] = Le^{4x^3+2} = (4x^2 + 2) \cdot Le = 4x^2 + 2.$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = 8x \Rightarrow f'(x) = 8x \cdot f(x).$

$$\underline{f(x) = e^{4x^3+2} \ \Rightarrow \ f'(x) = 8x \cdot e^{4x^3+2}}.$$

Cuestión 5:

5º) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola de ecuación $f(x) = 4 - x^2$ y la recta $g(x) = 2 + x$. Calcular su área.

Solución:

La función $f(x) = 4 - x^2$ es una parábola cóncava ($\cap$) que corta al eje de abscisa en los puntos $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$.

El vértice de la parábola es el siguiente:

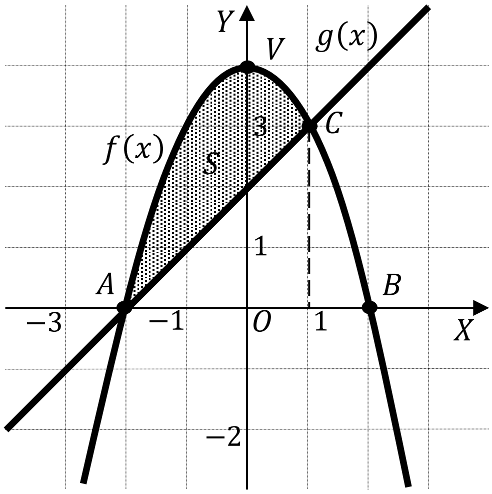
$f'(x) = -2x = 0 \to x = 0 \Rightarrow V(0, 4)$.

Los puntos de corte de la parábola y la recta tienen por abscisas las raíces de la ecuación que se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$4 - x^2 = 2 + x;\ x^2 + x - 2 = 0;$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \to A(-2, 0) \\ x_2 = 1 \to C(1, 3) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.



$$S = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-2}^{1} [4 - x^2 - (2 + x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} (4 - x^2 - 2 - x) \cdot dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) - \left[-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2)\right] = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 =$$

$$= -\frac{9}{3} - \frac{1}{2} + 8 = 5 - \frac{1}{2} = \underline{\frac{9}{2}\ u^2 = 4.5\ u^2}.$$

$$\boldsymbol{Área = \frac{9}{2}\ u^2 = 4.5\ u^2}$$

Cuestión 6:

6º) Calcular el área del recinto limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 6x$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

Solución:

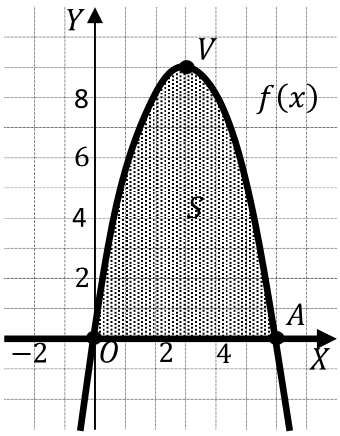
Los puntos de corte de la parábola $f(x) = -x^2 + 6x$ con el eje OX son los siguientes:

$$-x^2 + 2x + 8 = 0; -x(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0,0) \\ x_2 = 6 \rightarrow B(6,0) \end{cases}.$$

El vértice de la parábola es el siguiente:

$$f'(x) = -2x + 6 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow V(3,9).$$

De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_0^6 (-x^2 + 6x) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_0^6 =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_0^6 = \left(-\frac{6^3}{3} + 3 \cdot 6^2\right) - 0 = -72 + 108 = \underline{36\, u^2}.$$

$$\acute{A}rea = \mathbf{36}\, u^2$$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es

Cuestión 7:

7º) Entre los alumnos ERASMUS que han llegado este curso a la Universidad de Murcia el 75 % hablan inglés, el 50 % hablan francés y un 5 % no hablan ninguno de estos idiomas. Elegido un alumno al azar:

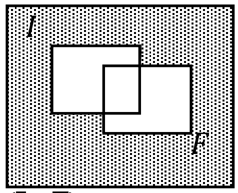
a) Calcular la probabilidad de que hable inglés o francés.

b) Calcule la probabilidad de que hable inglés y francés.

c) Calcule la probabilidad de que, hablando inglés, no hable francés.

Solución:

$Datos: P(I) = 0.75;\ \ P(F) = 0.50;\ \ P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 0.05.$



$P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 1 - P(I \cup F)$

$a)\qquad P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 1 - P(I \cup F) \Rightarrow$

$\Rightarrow\ P(I \cup F) = 1 - P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 1 - 0.05 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{P(I \cup F) = 0.95}.$

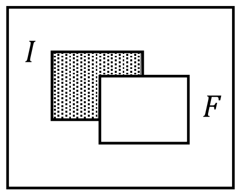
La probabilidad de que hable inglés o francés es $\mathbf{0.95}$

$b)\ P(I \cup F) = P(I) + P(F) - P(I \cap F) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(I \cap F) = P(I) + P(F) - P(I \cup F) = 0.75 + 0.50 - 0.95 = 1.25 - 0.95 = 0.30.$

$\underline{P(I \cap F) = 0.30}.$

La probabilidad de que hable inglés y francés es $\mathbf{0.30}$



$P(I \cap \overline{F}) = P(I) - P(I \cap F)$

$c)$

$P = P(\overline{F}/I) = \frac{P(I\cap\overline{F})}{\mathrm{P(I)}} = \frac{P(I)-P(I\cap F)}{\mathrm{P(I)}} = \frac{0.75-0.30}{0.75} = \frac{0.45}{0.75} = \underline{0.6}.$

La probabilidad de que, hablando inglés, no hable francés es de $\mathbf{0.6}$

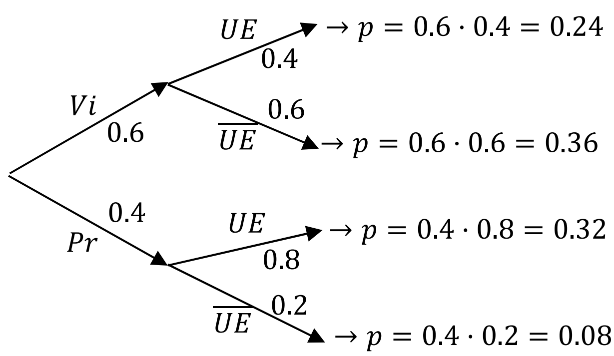
Cuestión 8:

8º) En una empresa multinacional el 60 % de las reuniones se realizan a través de videoconferencias. El 40 % de los empleados que asisten a esas videoconferencias son de países de la Unión Europea, mientras que en las reuniones presenciales solo el 20 % son trabajadores que no pertenecen a la Unión Europea. Si elegimos un trabajador al azar:

a) Calcule la probabilidad de que pertenezca a la Unión Europea.

b) Sabiendo que el trabajador es de la Unión Europea, ¿cuál es la probabilidad de que haya asistido a la reunión por videoconferencia?

Solución:



a) $\quad P = P(UE) = P(Vi \cap UE) + P(Pr \cap UE) =$

$= P(Vi) \cdot P(UE/Vi) + P(Pr) \cdot P(UE/Pr) = 0.6 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.8 =$

$= 0.24 + 0.32 = \underline{0.56}$.

La probabilidad de que pertenezca a la Unión Europea es de **0.56**.

b) $\quad P(Vi/UE) = \frac{P(Vi \cap UE)}{P(UE)} = \frac{P(Vi) \cdot P(UE/Vi)}{P(UE)} = \frac{0.6 \cdot 0.4}{0.56} = \frac{0.24}{0.56} = \underline{0.4286}$.

Sabiendo que el trabajador es de la Unión Europea, la probabilidad de que haya asistido a la reunión por videoconferencia es de **0.43**.

Problema 9:

9º) El precio medio de los aspiradores de una gran superficie se distribuye según una distribución normal de desviación típica 100 euros. Se toma una muestra aleatoria de 9 trabajadores de distintas marcas obteniendo un precio medio de 178.89 euros. Determine un intervalo de confianza al 99 % para el precio medio. Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 99 % el error cometido de estimación del precio no supere los 50 euros.

Cuestión:

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0.99 \ \rightarrow \ \alpha=1-0.99=0.01 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.005}=2.575.$

$(1-0.005=0.9950 \ \rightarrow z=2.575).$

Datos: $n=9$; $\overline{x}=178.89$; $\sigma=100$; $z_{\frac{\alpha}{2}}=2.575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma \ y \ n$, es la siguiente:

$$\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

$\left(178.89-2.575\cdot\frac{100}{\sqrt{9}};\ 178.89+2.575\cdot\frac{100}{\sqrt{9}}\right);$

$(178.89-2.575\cdot 33.3333;\ 178.89+2.575\cdot 33.3333);$

$(178.89-85.8333;\ 178.89+85.8333)$

$$\underline{I.C._{99\,\%}=(93.0567;\ 246.7233)}.$$

El intervalo de confianza para el precio medio es $(\mathbf{93.0567};\ \mathbf{246.7233})$

Datos: $\sigma=100$; $z_{\frac{\alpha}{2}}=2.575$; $E=50.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \ \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2.575\cdot\frac{100}{50}\right)^2=$

$=(2.575\cdot 2)^2=5.15^2=26.5225.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ \mathbf{27}\ aspiradores.}$

Cuestión 10:

10º) Se sabe que el peso de los tarros de cacao de un supermercado es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 1.8 gramos. Se toma una muestra aleatoria de 9 tarros y se obtiene un peso medio de 89 gramos. Obtenga un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población. ¿Cuál será el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido de estimación del peso no supere 1 gramo, a un nivel de confianza del 95 %?

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0.95 \ \rightarrow \ \alpha=1-0.95=0.05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96.$

$(1-0.025=0.9750 \ \rightarrow z=1.96).$

Datos: $n=9;\ \ \overline{x}=89;\ \ \sigma=1.8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(89-1.96\cdot\frac{1.8}{\sqrt{9}};\ 89+1.96\cdot\frac{1.8}{\sqrt{9}}\right);\ \ (89-1.96\cdot 0.6;\ 89+1.96\cdot 0.6);$
$(89-1.176;\ 89+1.176).$

$$\underline{I.C._{95\ \%}=(87.824;\ 90.176).}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es de $\mathbf{(87.824;\ 90.176)}$

Datos: $\sigma=1.8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96;\ \ E=1.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \ \Rightarrow\ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\ \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1.96\cdot\frac{1.8}{1}\right)^2=$
$=(1.96\cdot 1.8)^2=3.528^2=12.447.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ \mathbf{13}\ tarros.}$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Álvaro Garmendia Antolín

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2019-2020
ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Elija tres de los seis ejercicios siguientes

EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes cuestiones:

i) Determine el valor de m para que **AB** = **BA**. (3.5 puntos)

ii) Calcule $\mathbf{C}\,\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{D}\,\mathbf{C}^{t}$. (3.5 puntos)

iii) ¿Qué dimensión debe tener una matriz **N** para que pueda calcularse el producto **DNC** ? ¿Y para que $\mathbf{NBD}^{t}$ sea una matriz cuadrada? Razone las respuestas. (3 puntos)

EJERCICIO 2:

i) Calcule el valor de los parámetros de la función $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$, sabiendo que tiene un extremo relativo en el punto $(-1,0)$ y un punto de inflexión en el punto $x = 1/3$. (5 puntos)

ii) Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x-2}$ (5 puntos)

EJERCICIO 3:

Una empresa tecnológica clasifica a sus 40 empleados en tres secciones: Portátiles (16 empleados), Telefonía (20 empleados) y Sonido (4 empleados). El 25% de los trabajadores de la sección Portátiles, el 40% de Telefonía y 3 trabajadores de Sonido tienen titulación C1 en inglés. Se selecciona al azar un empleado de la empresa.

i) Calcule la probabilidad de que no tenga titulación C1 en inglés y trabaje en la sección de Sonido. (3 puntos)

ii) Calcule la probabilidad de que trabaje en la sección de Telefonía, sabiendo que tiene titulación C1 en inglés. (3.5 puntos)

iii) Consideremos los sucesos A "el empleado trabaja en la sección Portátiles" y el suceso B "el empleado tiene titulación C1 en inglés". Compruebe si los sucesos A y B son o no independientes. (3.5 puntos)

EJERCICIO 4:

Una empresa fabrica dos tipos de biocombustibles a partir de aceites vegetales (T1 y T2) y vende cada tonelada de biocombustible a un precio de 2000 euros y 1800 euros, respectivamente. Cada tonelada de biocombustible T1 requiere 3 horas de proceso en la línea de producción y 2 unidades de materia prima. Cada tonelada de biocombustible T2 requiere 1 hora de proceso en la línea de producción y 4 unidades de materia prima. Cada semana la empresa dispone de 195 unidades de materia prima y de 90 horas de tiempo de proceso en la línea de producción. Determine cuántas toneladas de cada tipo de biocombustible se deberá fabricar semanalmente para maximizar el precio total de venta, sabiendo que además se desea fabricar un total de al menos 40 toneladas de biocombustible.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se considerara un objetivo de tipo ecológico, y se deseara minimizar el nivel de contaminación asociado a este proceso de producción, sabiendo que fabricar una tonelada de biocombustible T1 produce 5 unidades de contaminación y fabricar una tonelada de biocombustible T2 produce 10 unidades de contaminación. (2 puntos)

EJERCICIO 5:

Sea la función $y = x^3 - 3x^2$.

i) Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 punto)

ii) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcule los máximos y mínimos. (3 puntos)

iii) Dibuje el recinto limitado por la función y el eje OX. (2 puntos)

iv) Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

EJERCICIO 6:

El tiempo que la población de jóvenes de una región dedica mensualmente a hacer deporte sigue una distribución normal con varianza de 16 horas^2. El tiempo medio obtenido a partir de una muestra aleatoria de 64 jóvenes de dicha región es de 25.8 horas.

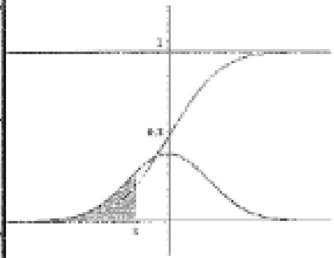
i) Calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97%. (5 puntos)

ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para el tiempo medio que los jóvenes de dicha región dedican mensualmente a hacer deporte: [24.9775,26.6225]. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Tabla de la distribución normal estándar Z ~ N(0,1)

$$P(Z<k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\,dt$$



k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix}$, *y* $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = (-3, 1)$ *y* $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, *responda a las siguientes cuestiones:*

i. *Determine el valor de m para que* $AB = BA$.

ii. *Calcule* CB^{-1} *y* DC^{t}.

iii. *¿Qué dimensión debe tener la matriz* N *para que pueda calcularse el producto* DNC*? ¿Y para que* NBD^{t} *sea una matriz cuadrada? Razone las respuestas*

Solución:

i. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -m-5 & -10 \end{pmatrix}$;

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1+2m & -10 \end{pmatrix}$$

Todos los términos son ya iguales salvo: $-m - 5 = 1 + 2m \rightarrow m = -2$

$$\boldsymbol{m = -2.}$$

ii. CB^{-1}: Calculamos la matriz inversa de B. $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, su determinante vale -2,

$B^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $C \cdot B^{-1} = (-3, 1)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (7/2, 1/2)$,

$D \cdot C^{t} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$C \cdot B^{-1} = (7/2, 1/2);\ D \cdot C^{t} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

iii. DNC: Las dimensiones son *(3 x 2) x (a x b) x (1 x 2).* Para poder efectuar el producto a debe ser igual a 2, y b a 1. Luego la matriz N debe tener 2 filas y 1 columna.

NBD^{t}: Para que sea una matriz cuadrada: (a x b) x (2 x 2) x (2 x 3). La transpuesta de D tiene de dimensión 2 x 3. Para poder efectuar el producto, b debe vale 2. Y para que el resultado sea una matriz cuadrada a = 3.

Para poder efectuar DNC la matriz N debe tener 2 filas y una columna: 3 x 1.

Para que NBD^{t} sea una matriz cuadrada la matriz N debe tener 3 filas y 2 columnas: 3 x 2.

EJERCICIO 2:

i. Calcule el valor de los parámetros de la función $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ sabiendo que tiene un extremo relativo en el punto (–1, 0) y un punto de inflexión en el punto x = 1/3.

ii. Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{3x^2+1}{x-2}$

Solución:

i. Para imponer que la función tenga un extremo relativo en (–1, 0), calculamos la derivada primera y la igualamos a cero.

$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b \quad \to f'(-1) = -3(-1)^2 + 2a(-1) + b = -3 - 2a + b = 0 \to b = 2a + 3$

Para que tenga un punto de inflexión en x = 1/3, imponemos que se anule la derivada segunda en ese punto:

$f''(x) = -6x + 2a \quad \to f''\left(\frac{1}{3}\right) = -6\left(\frac{1}{3}\right) + 2a = 0 = -2 + 2a \to a = 1.$

Y $b = 2a + 3 = 2 + 3 = 5$

$\boldsymbol{a = 1; b = 5}.$

ii. Calculamos las asíntotas verticales observando dónde se anula el denominador:

Hay una asíntota vertical para x = 2.

Estudiamos el comportamiento en el infinito:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} 3x$$

Cuando x tiende a +∞ infinito, $f(x)$ tiende a +∞, y cuando tiende a −∞, tiende a −∞. Tiene una asíntota oblicua para paralela a la recta $y = 3x$. Vamos a determinar la ordenada en el origen:

$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - 3x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{x-2} - 3x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{x-2} - \frac{3x(x-2)}{x-2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+1)-(3x^2-6x)}{x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x+1}{x-2} = 6$

Por tanto, la asíntota oblicua es: $y = 3x + 6$.

Asíntota vertical: $\boldsymbol{x = 2}$. Asíntota oblicua: $\boldsymbol{y = 3x + 6}$.

EJERCICIO 3:

Una empresa tecnológica clasifica a sus 40 empleados en tres secciones: Portátiles (16 empleados), Telefonía (20 empleados) y Sonido (4 empleados). El 25 % de los trabajadores de la sección Portátiles, el 40 % de Telefonía y 3 trabajadores de Sonido tienen titulación C1 en inglés. Se selecciona al azar un empleado de la empresa.

i. Calcule la probabilidad de que no tenga titulación C1 en inglés y trabaje en Sonido.

ii. Calcule la probabilidad de que trabaje en la sección de Telefonía, sabiendo que tiene titulación C1 en inglés.

iii. Consideremos los sucesos A "el empleado trabaja en la sección de Portátiles" y el suceso B "el empleado tiene titulación C1 en inglés". Comprueba si los sucesos A y B son o no independientes.

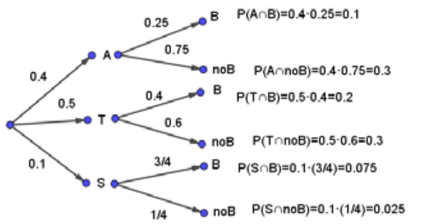
Solución:

Llamamos A al suceso "trabajar en Portátiles", T al suceso trabajar en Telefonía y S al suceso trabajar en Sonido. Llamamos B a tener la titulación C1 en inglés y noB, a no tenerla.

Según el enunciado sabemos que: $P(A)$ = 16/40 = 2/5 = 0.4; $P(T)$ = 20/40 = 1/2 = 0.5; $P(S)$ = 4/40 = 1/10 = 0.1. $P(B/A)$ = 0.25; $P(B/T)$ = 0.4; $P(B/S)$ = 3/4 = 0.75.

Podemos llevar los datos a un diagrama en árbol, o a una tabla de contingencia.

Sabemos que $P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$ = 0.25 · 0.4 = 0.1; $P(T \cap B) = P(B/T) \cdot P(T)$ = 0.4 · 0.5 = 0.2; $P(S \cap B) = P(B/S) \cdot P(S)$ = 0.75 · 0.1 = 0.075.



	A	T	S	
B	0.25 · 0.4 = 0.1	0.4 · 0.5 = 0.2	0.75 · 0.1 = 0.075	0.375
noB	0.3	0.3	0.025	0.625
	0.4	0.5	0.1	1

Nos piden:

i. Nos piden: $P(noB \cap S)$ = 0.025, según el árbol y según la tabla. Lo hemos obtenido restando a 0.1, 0.075, es decir: $P(noB \cap S) = P(S) - P(S \cap B)$ = 0.1 – 0.075 = 0.025.

O bien multiplicando: 0.1 · (1(4) = 0.075 = $P(S) \cdot P(noB / S)$

$P(noB \cap S)$ = 0.025

ii. Nos piden: $P(T / B) = P(B) \cdot P(T \cap B)$ = 0.325 · 0.2 = 0.650

$P(B) = P(A \cap B) + P(T \cap B) + P(S \cap B)$ = 0.1 + 0.2 + 0.075 = 0.375.

$P(T / B) = P(T \cap B) / P(B)$ = 0.2 / 0.375 = 0.5333.

$P(T / B)$ = 0.5333

iii. Podemos comprobarlo de varias formas: Viendo si a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; b) $P(A/B) = P(A)$; c) $P(B/A) = P(B)$.

a) $P(A \cap B)$ = 0.1; $P(A)$ = 0.4; $P(B)$ = 0.375; $P(A) \cdot P(B)$ = 0.4 · 0.375 = 0.15 ≠ 0.1.

Son sucesos dependientes.

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
www.apuntesmareaverde.org.es

EJERCICIO 4:

Una empresa fabrica dos tipos de biocombustibles a partir de aceites vegetales (T1 y T2) y vende cada tonelada de biocombustible a un precio de 2000 euros y 1800 euros respectivamente. Cada tonelada de biocombustible T1 requiere 3 horas de proceso en la línea de producción y 2 unidades de materia prima. Cada tonelada de biocombustible T2 requiere 1 hora de proceso en la línea de producción y 4 unidades de materia prima. Cada semana la empresa dispone de 195 unidades de materia prima y de 90 horas de tiempo de proceso en la línea de producción. Determine cuántas toneladas de cada tipo de biocombustible se deberá fabricar semanalmente para maximizar el precio total de venta, sabiendo que además se desea fabricar un total de al menos 40 toneladas de biocombustible.

i) Plantee el problema.

ii) Resuélvalo gráficamente.

iii) Analice que ocurriría si se considerara un objetivo de tipo ecológico, y se deseara minimizar el nivel de contaminación asociado a este proceso de producción, sabiendo que fabricar una tonelada de biocombustible T1 produce 5 unidades de contaminación y fabricar una tonelada del biocombustible T2 produce 10 unidades de contaminación.

Solución:

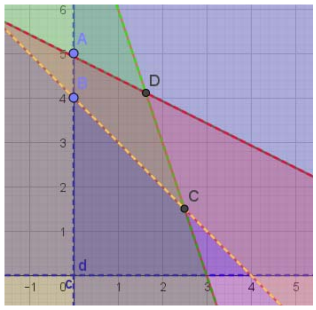
i) Llamamos x a las toneladas de biocombustible T1, e y a las de T2.

- La función beneficio es: $B(x, y) = 2000x + 1800y$.

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 90 \\ 2x + 4y \leq 195 \\ x + y \geq 40 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

- Representamos la región factible:



Hemos representado los semiplanos dados por las restricciones.

ii) La región factible es el cuadrilátero de vértices:

A(0, 197/4) = (0, 49.25) que es la intersección de la recta $2x + 4y = 197$, con $x = 0$.

B(0, 40) que es la intersección de la recta $x + y = 40$, con $x = 0$.

C(25, 15) que es la intersección de la recta $x + y = 40$, con $3x + y = 90$.

D que es la intersección de la recta $2x + 4y = 197$, con $3x + y = 90$:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 197 \\ 3x + y = 90 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 4(90 - 3x) = 197 = 2x + 360 - 12x = 197 \rightarrow 10x = 360 - 197 = 163 \\ y = 90 - 3x \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 16.3 \\ y = 90 - 3(16.3) = 90 - 48.9 = 41.1 \end{cases} \rightarrow D\left(\frac{163}{10}, \frac{211}{10}\right) = D(16.3, 41.1)$$

Calculamos la función beneficio en cada vértice:

A: B(0, 4.925) = 1800(49.25) = 87 750 euros.

B: B(0, 40) = 1800(40) = 72 000 euros.

C: B(25, 15) = 2000(25) + 1800(15) = 50000 + 27000 = 77 000 euros.

D: B(16.3, 41.1) = 2000(16.3) + 1800(41.1) = 106 580 euros.

El beneficio es máximo produciendo 16.3 toneladas de T1 y 41.1 toneladas de T2.

iii) Llamamos $Cont$ a la función contaminación que queremos minimizar: $Cont(x, y) = 5x + 10y$.

Calculamos la contaminación para cada vértice:

A: $Cont$ (0, 4.925) = 10(49.25) = 492.5 unidades de contaminación

B: $Cont$ (0, 40) = 10(40) = 400 unidades de contaminación

C: $Cont$ (25, 15) = 5(25) + 10(15) = 125 + 150 = 275 unidades de contaminación

D: $Cont$ (16.3, 41.1) = 5(16.3) + 10(41.1) = 492.5 unidades de contaminación

La mínima contaminación se consigue produciendo 25 toneladas de T1 y 15 toneladas de T2.

EJERCICIO 5:

Sea la función $y = x^3 - 3x^2$

i) Calcule los puntos de corte con los ejes.
ii) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calcule los máximos y mínimos
iii) Dibuje el recinto limitado por la función y el eje OX.
iv) Calcule el área de dicho recinto.

Solución:

i) Para x = 0, se anula y. Resolvemos la ecuación: $x^3 - 3x^2 = 0 = x^2(x-3)$. La función tiene un punto de corte doble en x = 0, y también pasa por (0, 3).

Puntos de corte: (0, 0), (0, 3).

ii) Hallamos la derivada primera y los puntos dónde se anula:

$$y = x^3 - 3x^2 \rightarrow y' = 3x^2 - 6x = 0 = 3x(x-2)$$

Se anula en x = 0 y en x = 2. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, 0)$; $(0, 2)$; $(2, +\infty)$.

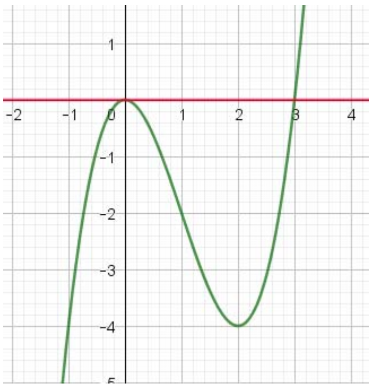
Estudiamos el signo de la derivada primera:

$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
+	−	+
↗	↘	↗

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, y decreciente en (0, 2). Como para x = 0, pasa de creciente a decreciente, en ese punto alcanza un máximo: (0, 0) es un máximo relativo. Como en x = 2 la función pasa de decreciente a creciente, en ese punto alcanza un mínimo relativo: (2, –4).

Creciente: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Decreciente: (0, 2). Máximo relativo: (0, 0). Mínimo relativo: (2, –4).

iii)



Con los datos que tenemos, dibujamos la curva, y observamos que el eje de abscisas está siempre por encima de la curva. Que el recinto limitado es el del intervalo (0, 3) donde la curva es negativa.

iv) La integral pedida es:

$$Área = \int_0^3 (0 - (x^3 - 3x^2))dx = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2)dx = \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{3x^3}{3}\right]_0^3 = \left(\frac{-81}{4} + 27\right) - (0)$$

$$= \frac{-81 + 108}{4} = \frac{27}{4} \cong 6.75$$

El área de la región encerrada es de **27/4 u² = 6.25 u²**

EJERCICIO 6:

El tiempo que la población de una región dedica mensualmente a hacer deporte sigue una distribución normal con varianza de 16 horas. El tiempo medio obtenido a partir de una muestra aleatoria de 64 jóvenes de dicha región es de 25.8 horas.

i) Calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97 %.

ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para el tiempo medio que los jóvenes de dicha región dedican mensualmente a hacer deporte: [24.9775, 26.6225]. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta.

Solución:

i) Como el nivel de confianza es del 97 % sabemos que 1 – α = 1.97, luego α = 1 – 0.97 = 0.03. Por tanto:

$z_{\alpha/2} = z_{0.015}$ = 2.17, ya que 1 – 0.015 = 0.9850.

Los datos que conocemos son: $z_{\alpha/2}$ = 2.17; $\bar{x}$ = 25.8; $\sigma = \sqrt{16} = 4$; n = 64.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Sustituimos los datos:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(25.8 - 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{64}}, 25.8 - 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{64}}\right) = \left(25.8 - \frac{2.17}{2}, 25.8 - \frac{2.17}{2}\right)$$
$$= (24.715, 25.885)$$

Intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 97 % es $(24.715, 25.885)$.

ii) Nos dan el intervalo: [24.9775, 26.6225] de longitud: $E = \frac{26.6225 - 24.9775}{2} = \frac{1.6450}{2} = 0.8225$.

Sabemos que: $\sigma = \sqrt{16} = 4$; n = 64; E = 0.8225.

La fórmula que debemos usar es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Despejando y sustituyendo:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0.8225 \cdot \sqrt{64}}{\sqrt{16}} = 0.8225 \cdot 2 = 1.645$$

Buscamos en la tabla de la N(0, 1) los valores 1.64 y 1.65 obtenemos que $\frac{0.9495 - 0.9505}{2} = \frac{1.9}{2} = 0.95$

1 – α/2 = 0.95, α/2 = 1 – 0.95 = 0.05, α = 0.1. Por tanto 1 – α = 1 – 0.1 = 0.9.

El nivel de confianza del intervalo es del 90 %.

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2019-2020
ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Elija tres de los seis ejercicios siguientes

EJERCICIO 1:

i) Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases}$$ (7 puntos)

ii) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule AB e indique qué relación hay entre A y B. (3 puntos)

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+3x+4}{x}$

i) Calcule los máximos y mínimos. (3 puntos)

ii) Calcule $\int_1^2 f(x)dx$ (4 puntos)

iii) Calcule la derivada de la función $g(x)$, siendo $g(x) = f(x) + \ln(5x-3)^2 + xe^{3x}$ (3 puntos)

EJERCICIO 3:

El peso (en toneladas) de los contenedores que transporta una empresa de servicios de transporte marítimo puede aproximarse a una distribución normal con desviación de 3 toneladas.

i) Se realizó un estudio tomando una muestra aleatoria simple de contenedores y se calculó un intervalo de confianza al 97% para la media poblacional, con un error máximo de 0.651. Calcule el tamaño de la muestra que se tomó en ese estudio. (5 puntos)

ii) Se decide realizar otro estudio y se selecciona una muestra de contenedores, obteniéndose los siguientes pesos (en toneladas): 20.25, 17.5, 21.8, 15.7, 14.6, 17.2, 23.1, 11.7, 18.3. Construya un intervalo de confianza para el peso medio de los contenedores, con un nivel de confianza del 93%. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

EJERCICIO 4:

Una empresa diseña y vende dos tipos de telas (T1 y T2) con un precio de venta de 60 euros/m^2 y 100 euros/m^2, respectivamente. Para cubrir la demanda semanal debe fabricar un total de al menos 15 m^2 de telas. Para elaborar un m^2 de tela T1 se necesitan 2 horas de máquina y 6 carretes de hilo. Para elaborar un m^2 de tela T2 se requieren 4 horas de máquina y 3 carretes de hilo. La disponibilidad semanal de estos dos recursos es de 80 horas de máquina y 150 carretes de hilo. ¿Cuántos m^2 de cada tipo de tela tiene que vender la empresa si busca maximizar el beneficio semanal, sabiendo que el coste de elaborar un m^2 de cada tipo de tela es 15 y 10 euros, respectivamente?

i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se quiere elaborar al menos el triple de m^2 de tela T1 que de tela T2. (2 puntos)

EJERCICIO 5:

Considere la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 5 & 1 < x < 4 \\ 2x - 11 & x \geq 4 \end{cases}$$

i) Calcule las derivadas laterales de $f(x)$ en $x = 4$, utilizando la definición de derivada. (4 puntos)
ii) ¿La función $f(x)$ es derivable en $x = 4$? ¿Es continua en $x = 4$? Justifique la respuesta. (2 puntos)
iii) Calcule la siguiente integral: $\int \sqrt{6x - 1}\ dx$ (4 puntos)

EJERCICIO 6:

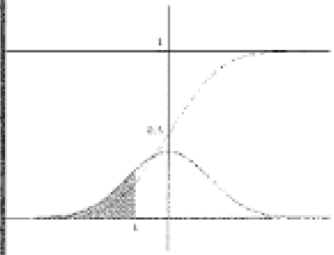
En un centro de bachillerato aprobaron la prueba de acceso a la universidad 112 estudiantes de los 140 que se presentaron. En un segundo centro aprobaron la prueba el 60% de los 110 estudiantes presentados.

i) Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que haya aprobado. (3 puntos)
ii) Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que proceda del segundo centro, sabiendo que el estudiante ha suspendido. (4 puntos)
iii) Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de que pertenezcan al mismo centro. (3 puntos)

Tabla de la distribución normal estándar Z ~ N(0,1)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,1669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,0207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,0602	0,4562	0,4522	0,6483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,3557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

$$P(Z<k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\,dt$$



EJERCICIO 1:

i) Clasifique el siguiente sistema en función del número de soluciones y resuélvalo utilizando el método de Gauss. $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases}$.

ii) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcule AB e indique qué relación hay entre A y B.

Solución:

i) Las matrices de los coeficientes, C, y ampliada, A, son:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculamos sus rangos haciendo combinaciones lineales entre las filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que tanto la matriz de los coeficientes como la matriz ampliada tienen de rango 2, menor que el número de incógnitas, por lo que, según el Teorema de Rouché Frobenius, el sistema es compatible e indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones:

$$.\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases} \to \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3y - z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x - y + (3y + 2) = 3 \\ 3y - z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y + 2 = z \\ 0 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Sistema compatible indeterminado: $x = 1 - 2t$; $y = t$; $z = 2 + 3t$.

ii) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to A \cdot B = I.$$

Al multiplicar las matrices hemos obtenido la matriz identidad, por lo que la matriz B es inversa de la matriz A, y A es la matriz inversa de la B.

$A \cdot B = I$, las matrices A y B son inversas.

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x)=\frac{x^2+3x+4}{x}$.

i) Calcule los máximos y mínimos.

ii) Calcule $\int_1^2 f(x)dx$

iii) Calcule la derivada de la función $g(x)$, siendo $g(x)=f(x)+Ln(5x-3)^2+xe^{3x}$.

Solución:

i) Calculamos la derivada primera y la igualamos a cero:

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{x}\to f'(x)=\frac{(2x+3)x-(x^2+3x+4)1}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}=0.$$

La derivada primera se anula en x = 2 y en x = –2, donde estarán los posibles máximos o mínimos. Con el signo de la derivada obtenemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Estudiamos el signo de la derivada primera:

$(-\infty,-2)$	$(-2,0)\cup(0,2)$	$(2,+\infty)$
+	−	+
$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

La función es creciente en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, y decreciente en (-2, 2). Como para x = –2, pasa de creciente a decreciente el punto es un máximo, en (–2, –1). Como en x = 2, la función pasa de decreciente a creciente, en el punto hay un mínimo, en (2, 7).

También podríamos haber usado la derivada segunda:

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{x}\to f'(x)=\frac{x^2-4}{x^2}\to f''(x)=\frac{(2x)x^2-(x^2-4)2x}{x^4}=\frac{8x}{x^4}=\frac{8}{x^3}\to$$

$$f''(-2)<0;Máximo;\ f''(2)>0,Mínimo$$

(–2, –1) es un máximo. (2, 7) es un mínimo.

ii) $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\frac{x^2+3x+4}{x}dx=\int_1^2\left(x+3+\frac{4}{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+3\mathrm{x}+4\mathrm{Ln(x)}\right]_1^2=(2+6+4\mathrm{Ln}(2))-\left(\frac{1}{2}+3+4Ln(1)\right)=5+4\mathrm{Ln}(2)-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}+\mathrm{Ln}(16)$

$$\int_1^2 f(x)dx=\frac{9}{2}+\mathrm{Ln}(16)$$

iii) $g(x)=f(x)+Ln(5x-3)^2+xe^{3x}=f(x)+2Ln(5x-3)+xe^{3x}\to$

$g'(x)=f'(x)+\frac{2(5)}{5x-3}+(1\cdot e^{3x}+x\cdot 3\cdot e^{3x})=\frac{x^2-4}{x^2}+\frac{10}{5x-3}+e^{3x}(1+3x).$

$$g'(x)=\frac{x^2-4}{x^2}+\frac{10}{5x-3}+e^{3x}(1+3x).$$

EJERCICIO 3:

El peso (en toneladas) de los contenedores que transporta una empresa de servicios de transporte marítimo puede aproximarse a una distribución normal con desviación típica de 3 toneladas.

i) Se realizó un estudio tomando una muestra aleatoria simple de contenedores y se calculó un intervalo de confianza al 97 % para la media poblacional, con un error máximo de 0.651. Calcule el tamaño de la muestra que se tomó en ese estudio.

ii) Se decide realizar otro estudio y se selecciona una muestra de contenedores, obteniéndose los siguientes pesos (en toneladas): 20.25, 17.5, 21.8, 15.7, 14.6, 17.2, 23.1, 11.7, 18.3. Construya el intervalo de confianza para el peso medio de los contenedores, con un nivel de confianza del 93 %

Solución:

i) Como el nivel de confianza es del 97 % sabemos que $1 - \alpha = 1.97$, luego $\alpha = 1 - 0.97 = 0.03$. Por tanto:

$z_{\alpha/2} = z_{0.015} = 2.17$, ya que $1 - 0.015 = 0.9850$.

Los datos que conocemos son: $z_{\alpha/2} = 2.17$; $\sigma = 3$; $E = 0.651$.

La fórmula que debemos usar es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Despejando y sustituyendo:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.651 = 2.17 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \to \sqrt{n} = \frac{0.651}{2.17 \cdot 3} = 10 \to n = 100$$

El tamaño de la muestra que se utilizó en el estudio es de **100** contenedores.

ii) Ahora conocemos la muestra. Calculamos la media muestral:

$$\bar{x} = \frac{20.25 + 17.5 + 21.8 + 15.7 + 14.6 + 17.2 + 23.1 + 11.7 + 18.3}{9} = \frac{160.15}{9} = 17.794$$

Como el nivel de confianza es del 93 % sabemos que $1 - \alpha = 0.93$, luego $\alpha = 1 - 0.93 = 0.03$.

Como $1 - 0.0350 = 0.9650$ entonces $z = 1.81$. Por tanto: $z_{\alpha/2} = z_{0.035} = 1.81$.

Los datos que conocemos son: $z_{\alpha/2} = 1.81$. $\bar{x} = 17.794$; $\sigma = 3$; $n = 9$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Sustituimos los datos:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(17.794 - 1.81 \cdot \frac{3}{\sqrt{9}}, 17.794 - 1.81 \cdot \frac{3}{\sqrt{9}}\right)$$
$$= (17.794 - 1.81, 17.794 - 1.81) = (15.948, 19.604)$$

El intervalo de confianza pedido es de $(\mathbf{15.948}, \mathbf{19.604})$.

EJERCICIO 4:

Una empresa diseña y vende dos tipos de telas (T1 y T2) con un precio de venta de 60 euros/m^2 y 100 euros/m^2 respectivamente. Para cubrir la demanda semanal debe fabricar un total de al menos 15 m^2 de tela. Para elaborar un m^2 de tela T1 se necesitan 2 horas de máquina y 6 carretes de hilo. Para elaborar un m^2 de tela T2 se requieren 4 horas de máquina y 3 carretes de hilo. La disponibilidad de estos dos recursos es de 80 horas de máquina y 150 carretes de hilo. ¿Cuántos m^2 de cada tipo de tela tiene que vende la empresa si busca maximizar el beneficio semanal, sabiendo que el coste de elaborar un m^2 de cada tipo de tela es de 15 y 10 euros, respectivamente?

i) Plantee el problema

ii) Resuélvalo gráficamente

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se quiere elaborar al menos el triple de m^2 de T1 que de tela T2.

Solución:

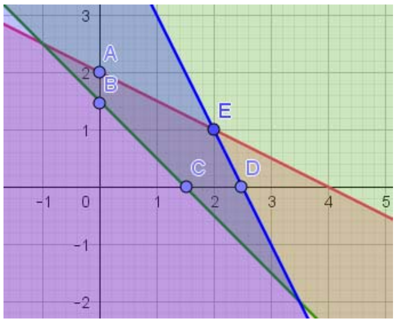
i) Llamamos x a los m^2 de tela T1, e y a los de T2.

- La función objetivo es: $B(x, y) = (60 - 15)x + (100 - 10)y = 45x + 90y$.

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 80 \\ 6x + 3y \leq 150 \\ x + y \geq 15 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 40 \\ 2x + y \leq 50 \\ x + y \geq 15 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

- Representamos la región factible:



Hemos representado los semiplanos dados por las restricciones.

ii) La región factible es el pentágono irregular dado de vértices:

A(0, 20) que es la intersección de la recta $2x + 4y = 80$, con $x = 0$.

B(0, 15) que es la intersección de la recta $x + y = 15$, con $x = 0$.

C(15, 0) que es la intersección de la recta $x + y = 15$, con $y = 0$.

D(150/6, 0) = D(25, 0) que es la intersección de la recta $6x + 3y = 150$, con $y = 0$

E(20, 10) que es la intersección de la recta $6x + 3y = 150$, con $2x + 4y = 80$:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 80 \\ 6x + 3y = 150 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 40 \\ 2x + y = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 40 - 2y \\ 2(40 - 2y) + y = 50 \rightarrow 80 - 50 = 3y \end{cases} \rightarrow E(20,10)$$

Calculamos la función objetivo en cada vértice:

A: B(0, 20) = 90(20) = 1800 euros.

B: B(0, 15) = 90(15) = 1350 euros.

C: B(15, 0) = 45(15) = 670 euros.

D: B(25, 0) = 45(25) =1125 euros.

E: B(20, 10) = 45(20) + 90(10) = 900 + 900 = 1800 euros.

El beneficio es máximo en cualquier punto del intervalo $A(0, 20)$, $E(20, 10)$

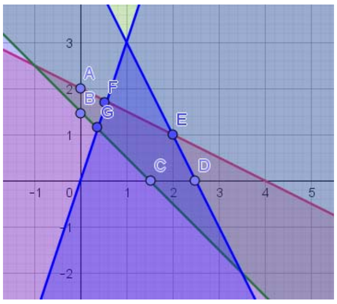
El beneficio máximo es de **1 800** euros, que se produce con 0 m^2 de T1 y 20 de T2; o 20 m^2 de T1 y 10 de T2; o en cualquier punto intermedio, como 10 m^2 de T1 y 15 de T2.

iii) Añadimos la restricción $3x \geq y$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 80 \\ 6x + 3y \leq 150 \\ x + y \geq 15 \\ x \geq 0; y \geq 0; 3x \geq y \end{cases}$$

- Representamos la región factible:



En la nueva región factible eliminamos los vértices A y B, y añadimos: $F(80/14, 80/42)$ intersección de la recta $2x + 4y = 80$ con la recta $y = 3x$, y $G(15/4, 15/12)$ intersección de la recta $x + y = 15$, con la recta $y = 3x$.

Ya vimos que el beneficio era máximo, antes, en el segmento AE, ahora seguirá siéndolo en el segmento FE, y será de 1 800 euros para cualquier punto de dicho segmento:

El beneficio máximo es de **1 800** euros, que se produce con 40/7 m^2 de T1 y 40/21 de T2; o 20 m^2 de T1 y 10 de T2; o en cualquier punto intermedio.

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
www.apuntesmareaverde.org.es

EJERCICIO 5:

Considere la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 5 & 1 < x < 4 \\ 2x - 11 & x \geq 4 \end{cases}$$

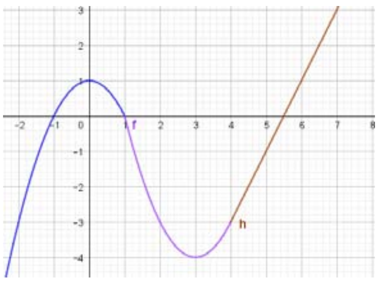
i) Calcule las derivadas laterales de $f(x)$ en $x = 4$, utilizando la definición de derivada.

ii) ¿La función $f(x)$ es derivable en $x = 4$? ¿Es continua en $x = 4$? Justifique la respuesta

iii) Calcule la siguiente integral: $\int \sqrt{6x-1}dx$

Solución:

La función dada es una función definida a trozos formada por 3 funciones polinómicas, por tanto, continuas y derivables en toda la recta real. Los únicos puntos dudosos son los puntos de unión de los trozos: $x = 1$, y $x = 4$. Estudiamos en primer lugar la continuidad en $x = 4$:



$$x^2 - 6x + 5 \to (4)^2 - 6(4) + 5 = 16 - 24 + 5 = -3$$

$$2x - 11 \to 2(4) - 11 = 8 - 11 = -3$$

La función es continua en $x = 4$. Si no fuera continua no podría ser derivable.

i) Aplicamos la definición derivada:

$$f'(4^-) = \lim_{x \to 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4^-} \frac{(x^2 - 6x + 5) - (-3)}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \to 4^-} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \lim_{x \to 4^-} \frac{(x-4)(x-2)}{x - 4} = \lim_{x \to 4^-} (x - 2) = 2$$

$$f'(4^+) = \lim_{x \to 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4^+} \frac{(2x - 11) - (-3)}{x - 4} = \lim_{x \to 4^+} \frac{(2x - 8)}{x - 4} = 2$$

Las derivadas laterales coinciden, luego la función es derivable en $x = 4$.

ii) Ya hemos visto que la función es continua en toda la recta real, luego es continua en $x = 4$. Y hemos visto que es derivable en $x = 4$.

La función es continua en toda la recta real y derivable en $x = 4$

No lo piden, pero sin embargo, en $x = 1$, NO es derivable. La derivada a la izquierda vale: -2, y la derivada a la derecha vale 2.

iii) $\int \sqrt{6x-1}dx = \int (6x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(6x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{(6x+1)^3}}{3} + C$

$$\int \sqrt{6x-1}dx = \frac{2\sqrt{(6x+1)^3}}{3} + C$$

EJERCICIO 6:

En un centro de bachillerato aprobaron la prueba de acceso a la universidad 112 estudiantes de los 140 que se presentaron. En un segundo centro aprobaron la prueba el 60 % de los 110 estudiantes presentados.

i) Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que haya aprobado.

ii) Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que proceda del segundo centro, sabiendo que el estudiante ha suspendido.

iii) Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de que pertenezcan al mismo centro.

Solución:

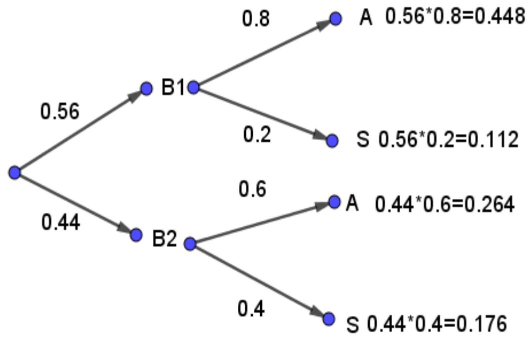
Llamamos A al suceso haber aprobado y S al de haber suspendido. Llamamos $B1$ al suceso ser del primer centro de bachillerato, y $B2$ al ser del segundo centro.

Los datos que nos dan son:

$P(B1) = \frac{140}{140+110} = \frac{140}{250} = \frac{14}{25} = 0.56$; $P(B2) = \frac{110}{140+110} = \frac{11}{25} = 0.44$;

$P(A/B1)$ = 112/140 = 0.8; $P(A/B2)$ = 0.6.

Hacemos un diagrama de árbol, y lo completamos:



i) La probabilidad de que un estudiante haya aprobado vemos que es igual a:

$P(A) = P(B1) * P(A/B1) + P(B2) * P(A/B2) =$

0.56 * 0.8 + 0.44 * 0.6 = 0.448 + 0.264 = 0.712.

La probabilidad de que un estudiante haya aprobado es igual a **0.712**.

ii) Nos piden ahora: $P(B2/S)$.

$$P(B2/S) = \frac{P(B2\cap S)}{P(S)} = \frac{P(B2)\cdot P(S/B2)}{P(B1)\cdot P(S/B1)+P(B2)\cdot P(S/B2)} = \frac{0.176}{0.112+0.176} = \frac{0.176}{0.288} = 0.611.$$

La probabilidad de que el estudiante proceda del segundo centro sabiendo que ha suspendido es **0.611**.

iii) Ahora nos piden la probabilidad de que 3 estudiantes procedan del mismo centro. El diagrama de árbol es distinto. Habría que seguir dos ramas, sin reemplazamiento:

$$P = P(B1) * P(B1) * P(B1) + P(B2) * P(B2) * P(B2) = \frac{140}{250}\cdot\frac{139}{249}\cdot\frac{138}{248} + \frac{110}{250}\cdot\frac{109}{249}\cdot\frac{108}{248} = \frac{2\,685\,480+1\,294\,920}{15\,438\,000} = \frac{3\,980\,400}{15\,438\,000} = 0.25783133.$$

La probabilidad de que 3 estudiantes procedan del mismo centro es aproximadamente **0.26**.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Álvaro Garmendia Antolín

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2020ko OHIKOA	ORDINARIA 2020
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Azterketa honek zortzi ariketa ditu. Haietako LAUri erantzun behar diezu.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketa-orrialde guztietan kodea jartzea.

- Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:
    - pantaila grafikoa
    - datuak igortzeko aukera
    - programatzeko aukera
    - ekuazioak ebazteko aukera
    - matrize-eragiketak egiteko aukera
    - determinanteen kalkulua egiteko aukera
    - deribatuak eta integralak ebazteko aukera
    - datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.
- Orri honen atzealdean, banaketa normalaren taula dago.

Este examen tiene ocho ejercicios. Debes contestar a CUATRO de ellos.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

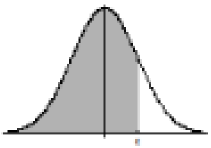
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
    - pantalla gráfica
    - posibilidad de trasmitir datos
    - programable
    - resolución de ecuaciones
    - operaciones con matrices
    - cálculo de determinantes
    - derivadas e integrales
    - almacenamiento de datos alfanuméricos.
- La tabla de la distribución normal está en el anverso de esta hoja.

1

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2020ko OHIKOA	ORDINARIA 2020
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

2

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA · EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2020ko OHIKOA · ORDINARIA 2020

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II · MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

A 1 [$\mathbf{hasta\ 2,5\ puntos}$]

Se considera la ecuación matricial:

$$A \cdot X = A^t \cdot B \qquad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) [$\mathbf{0,5\ puntos}$] ¿Qué dimensión debe tener la matriz X?
b) [$\mathbf{2\ puntos}$] Resuelve la ecuación matricial.

A 2 [$\mathbf{hasta\ 2,5\ puntos}$]

Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ ax + 2 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

a) [$\mathbf{1\ punto}$] Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.
b) [$\mathbf{0,5\ puntos}$] Realiza la representación gráfica de la función cuando $a = 2$.
c) [$\mathbf{1\ punto}$] Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX para $a = 2$.

A 3 [$\mathbf{hasta\ 2,5\ puntos}$]

En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se han extraído dos bolas de la caja como se explica a continuación: se ha extraído una bola, y antes de sacar la segunda se ha devuelto a la caja la primera bola extraída, añadiendo otra bola del mismo color.

a) [$\mathbf{0,75\ puntos}$] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado era azul.
b) [$\mathbf{1\ punto}$] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.
c) [$\mathbf{0,75\ puntos}$] Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

A 4 [$\mathbf{hasta\ 2,5\ puntos}$]

La altura en centímetros de las mujeres de un determinado país sigue una distribución normal de media 163 cm y desviación típica 7 cm.

a) [$\mathbf{1,5\ puntos}$] Si se toma una mujer al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su altura sea superior a 171 cm? ¿Y de que su altura esté comprendida entre 155 y 171 cm?
b) [$\mathbf{1\ punto}$] Una empresa que fabrica disfraces quiere elaborar cuatro tallas en función de la altura, de tal modo que cada una de ellas sea adecuada para el 25 % de las mujeres. ¿Cuáles serán las alturas que marcarán el cambio de una talla a otra?

3

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2020ko OHIKOA — ORDINARIA 2020

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II — MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

B 1 [$\mathbf{hasta\ 2,5\ puntos}$]

Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto, quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espectáculo.

Dos agencias disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 € cada paquete.
- La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 € cada paquete.

¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

B 2 [$\mathbf{hasta\ 2,5\ puntos}$]

Sea la siguiente función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

a) [$\mathbf{1\ punto}$] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función.

b) [$\mathbf{0,5\ puntos}$] Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función.

c) [$\mathbf{0,5\ puntos}$] Representa gráficamente el área comprendida entre la función y la recta $y = \frac{x}{2}$.

d) [$\mathbf{0,5\ puntos}$] Obtén la primitiva de la función $f(x)$, sabiendo que en $x = 0$ toma el valor 1.

B 3 [$\mathbf{hasta\ 2,5\ puntos}$]

Sean A y B dos sucesos compatibles asociados a un experimento aleatorio.

Se sabe que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ y $P(A \cap B) = 0{,}4$. Calcula:

a) [$\mathbf{0,65\ puntos}$] $P(A \cup B)$

b) [$\mathbf{0,6\ puntos}$] $P(A^c \cap B^c)$

c) [$\mathbf{0,6\ puntos}$] $P(A^c \cap B)$

d) [$\mathbf{0,65\ puntos}$] $P(A|B)$

B 4 [$\mathbf{hasta\ 2,5\ puntos}$]

El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos. Únicamente son aptas para la venta aquellas que superan un determinado peso.

a) [$\mathbf{1,25\ puntos}$] ¿Cuál debería ser ese peso si se quiere que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta?

b) [$\mathbf{1,25\ puntos}$] Si dicho peso se establece en 280 gramos y en la piscifactoría hay un total de 6000 truchas, ¿cuántas de ellas se podrán poner a la venta?

4

Ejercicio A1:

Se considera la ecuación matricial $AX = A^tB$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) ¿Qué dimensión debe tener la matriz X?
b) Resuelve la ecuación matricial

Solución:

a) Sea la dimensión de X, m x n. La matriz A es de dimensión 3 x 3, luego para poder multiplicarla por X, m debe valer 3.

La dimensión de AtB es 3 x 1, y esa debe ser la dimensión de AX, que ahora es 3 x n, por lo que n debe vale 1.

La matriz X debe tener dimensión 3 x 1.

b) Sea $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Planteamos el sistema y lo resolvemos:

$$A \cdot X = A^t \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a + 2b - c \\ b + 2c \\ a + 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + 2b - c = 3 \\ b + 2c = 6 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + 2b - c = 3 \\ c = 3 - b/2 \\ a = -1 - 2b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 - 2b + 2b - 3 - b/2 = 3 \\ c = 3 - b/2 \\ a = -1 - 2b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 14 \\ c = -4 \\ a = -29 \end{cases} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -29 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio A2:

Sea *f(x)* la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \le x \le 1 \\ ax + 2 & si \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

a) Determina el valor del parámetro a para que la función sea continua en $x = 1$
b) Realiza la representacíin gráfica de la función cuando $a = 2$.
c) Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX para $a = 2$

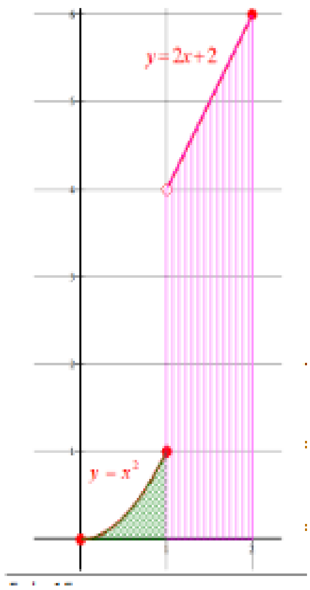
Solución:

a) La función es una función definida por dos trozos, ambos funciones polinómicas, luego siempre continuas. El caso dudoso es el punto de corte de las dos ramas. Para que sea continua basta imponer que para el valor 1 tengan el mismo valor:

$$f(1) = (1)^2 = 1 \to a(1) + 2 = a + 2 = 1 \to a = -1.$$

a = -1 para que la función sea continua.

b) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad 0 \le x \le 1 \\ 2x + 2 & si \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$ está formada por un trozo de parábola en (0, 1) y un segmento de recta de extremos (1, 4) y (2, 6).



c) Planteamos el área:

$$Área = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x + 2)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^2}{2} + 2x\right]_1^2 = \left(\frac{1^3}{3} - 0\right) + \big((4 + 4) - (1 + 2)\big)$$
$$= \frac{1}{3} + 5 = \frac{16}{3}\boldsymbol{u^2}$$

$$\boldsymbol{Área = \frac{16}{3}\, u^2}$$

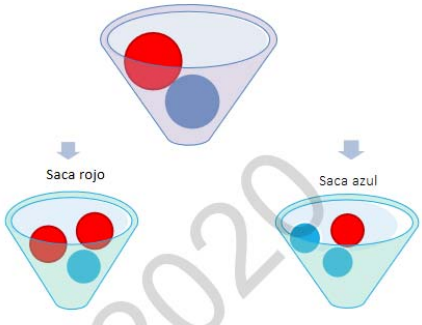
Ejercicio A3:

En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se han extraido dos bolas de la aja como se explica a continación: se ha extraido una bola, y antes de sacar la segunda se ha devuelto a la caja la primera bola extraida, añadiendo otra bola del mismo color.

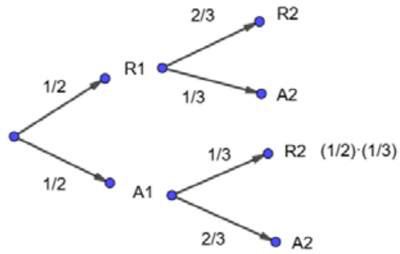
a) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraida sea roja si la primera que se ha sacado era azul.
b) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraida sea azul
c) Si la segunda bola ha sido azul, ¿cual es la probabilidad de que la primera bola extraida haya sido roja?

Solución:

Llamamos $A1$ a que la primera bola extraida sea azul, $R1$ a que sea roja. Llamamos $A2$ a que la seguda bola extraida sea azul, y $R2$ a que sea roja.



Hacemos un diagrama en árbol:



a) Nos piden la probabilidad de que la segunda bola extraida sea roja si la primera que se ha sacado era azul, es decir la probabilidad condicionada $P(R2/A1)$ que según el árbol es 1/3.

$P(R2/A1)$ = P(segunda bola sea roja/primera haya sido azul) = 1/3.

b) Nos piden la probabilidad de que la segunda bola extraida sea azul, P(A2), lo que ocurre en dos de las ramas:

P(segunda azul) = (1/2) · (1/3) + (1/2) · (2/3) = 3/6 = 1/2.

$P(A2)$ = P(segunda azul) = 1/2.

c) Sabiendo que la segunda bola ha sido azul, nos piden determinar la probabilidad de que la primera bola extraida haya sido roja, es decir P(primera roja/segunda azul) = $P(R1/A2)$.

Sabemos que P(primera roja y segunda azul) = P(primera roja/segunda azul) · P(segunda azul), luego

P(primera roja/segunda azul) = P(primera roja y segunda azul)/ P(segunda azul)

Según el árbol P(primera roja y segunda azul) = (1/2) · (1/3), y en el apartado b) hemos calculado P(segunda azul) = 1/2, por lo que:

P(primera roja/segunda azul) = $\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$

$P(R1/A2)$ = P(primera roja/segunda azul) = 1/3.

Ejercicio A4:

La altura en centímetros de las mujeres de un determinado país sigue una distribución normal de media 163 cm y desviación típica 7 cm.

a) Si se toma una mujer al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su altura sea superior a 171 cm? ¿Y de que su altura esté comprendida entre 155 y 171 cm?

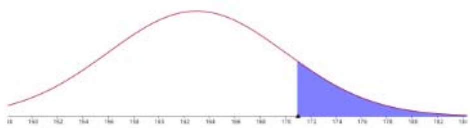
b) Una empresa que fabrica disfrces quiere elaborar cuatro tallas en función de la atura, de tal modo que cada una de ellas sea adecuada para el 25 % de las mujeres. ¿Cuáles serán las alturas que marcarán el cambio de una talla a otra?

Solución:

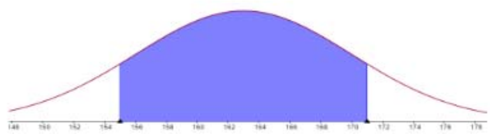
Sabemos que la altura de las mujeres sigue una distribución normal de media 163 y desviación típica 7.

Tipificamos la variable normal: Z: $\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-163}{7}$

a) $P1 = P(X > 171) = P\left(Z > \frac{171-163}{7}\right) = P(Z > 1.14) = 1 - P(Z \leq 1.14) = 1 - 0.8729 = 0.1271$



$$P2 = P(155 \leq X \leq 171) = P\left(\frac{155-163}{7} \leq Z \leq \frac{171-163}{7}\right) = P(-1.14 \leq Z \leq 1.14)$$
$$= P(Z \leq 1.14) - \left(1 - P(Z \leq 1.14)\right) = 0.8729 - (1 - 0.8729) = 0.7428$$

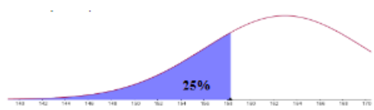


$$P(X > 171) = 0.1271$$
$$P(155 \leq X \leq 171) = 0.7428$$

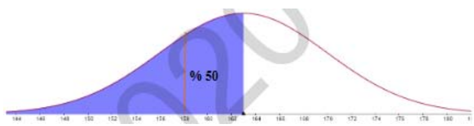
b) Buscamos los puntos a, b y c de paso de unas tallas a otras, siendo

$P(X \leq a) = 0.25$; $(X \leq b) = 0.50$; $P(X \leq c) = 0.75$. Tipificamos:

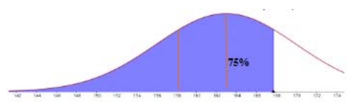
$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a-163}{7}\right) = 0.25 \rightarrow \frac{a-163}{7} = -0.675$$
$$\rightarrow a = 158.275$$



$$P(X \leq b) = P\left(Z \leq \frac{b-163}{7}\right) = 0.50 \rightarrow \frac{b-163}{7} = 0$$
$$\rightarrow b = 163$$



$$P(X \leq c) = P\left(Z \leq \frac{c-163}{7}\right) = 0.75 \rightarrow \frac{c-163}{7} = 0.675$$
$$\rightarrow c = 167.725$$



Las tres alturas que indicarán el paso de una talla a la siguiente son: 158.275 cm, 163 cm y 167.725 cm.

Ejercicio B1:

Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espextáculo. Dos agentes disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 euros cada paquete.
- La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 euros cada paquete.

¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

Solución:

Sea x el número de paquetes de la agencia A y sea y el de la agencia B. Representamos el enunciado en una tabla:

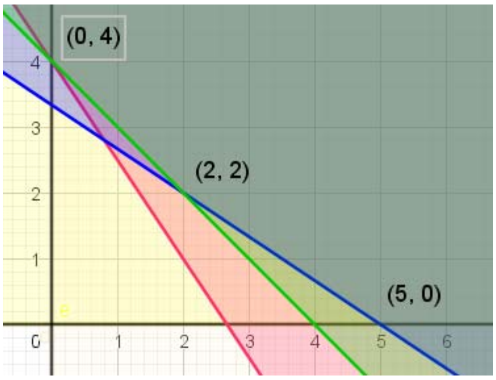
Agencia	Tickets museo	Visita guiada	Espectáculo	Coste	Cantidad
A:	6	4	4	210	x
B:	4	6	4	230	y

La función objetivo es: $C(x, y) = 210x + 230y$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 4y \geq 16 \\ 4x + 6y \geq 20 \\ 4x + 4y \geq 16 \end{cases}$$

Región factible:



Los vértices son: (0, 4); (2, 2); (5, 0)

Evaluamo la función objetivo en los vértices:

$C(0, 4) = 230(4) = 920$

$C(2, 2) = 210(2) + 230(2) = 880$

$C(5, 0) = 210(5) = 1050.$

Luego el coste es mínimo en (2, 2), por lo que

El guía debe comprar **2** paquetes de la agencia A y **2** paquetes de la agencia B, con un coste de **880** euros.

Ejercicio B2:

Sea la siguiente función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función.

b) Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función.

c) Representa graficamente el área comprendida entre la función y la recta $y = x/2$.

d) Obtén la primitiva de la función $f(x)$ sabiendo que en $x = 0$ toma el valor 1.

Solución:

a) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de la derivada primera:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \to f'(x) = \frac{(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

El denominador es siempre positivo, por lo que estudiamos el signo del numerador, que es una parábola de ramas hacia abajo con vértice en (1, 0), y puntos de corte con el eje de abscisas en (–1, 0) y (1, 0).

La función es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y es creciente en $(-1, +1)$.

En -1 la función pasa de ser decreciente a ser creciente, luego tiene un mínimo en el punto $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

En 1 la función pasa de ser creciente a ser decreciente, luego tiene un máximo en el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Máximo relativo: $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Mínimo relativo: $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

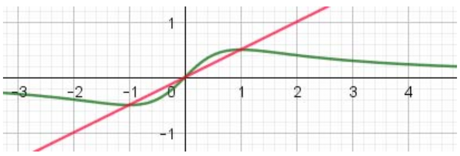
b) Las asíntotas verticales están en los valores en los que se anule, el denominador, que no se anula nunca, luego no hay asíntotas verticales.

Estudiamos el comportamiento en el infinito: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$. Luego $y = 0$ es una asíntota horizontal. Estudiamos la relación entre la función y la asíntota:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0^-; \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0^+.$$

La función no tiene asíntotas verticales. La recta $\boldsymbol{y = 0}$ es una asíntota horizontal.

c) Hallamos los puntos de intersección:



$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{2} \to 2 = x^2+1 \to x^2 = 1 \to x = \pm 1; \left(1, \frac{1}{2}\right); \left(-1, \frac{-1}{2}\right).$$

$$Área = \int_{-1}^{0} \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx + \int_{0}^{1} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{2}\right) dx$$

Al ser ambas funciones de simetría impar podemos asegurar que:

$$Área = 2\int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2+1} - x\right) dx = \left[Ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = Ln2 - \frac{1}{2}$$

d) $F(x) = \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}(Ln(x^2+1) + C \to F(0) = 1 = \frac{1}{2}(Ln(1) + C = C \to C = 1.$

$\boldsymbol{C = 1}$

Ejercicio B3:

Sean A y B dos sucesos compatibles asociados a un experimento aleatorio: Se sabe que $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$ y $P(A \cap B) = 0.4$. Calcula:

a) $P(A \cup B)$.
b) $P(A^C \cap B^C)$.
c) $P(A^C \cap B)$.
d) $P(A/B)$

Solución:

Llevamos los datos dados a una tabla de contingencia o tabla de doble entrada, y completamos los datos que faltan:

	A	A^C	
B	0.4		0.5
B^C			
	0.6		1

	A	A^C	
B	0.4	0.1	0.5
B^C	0.2	0.3	0.5
	0.6	0.4	1

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.5 - 0.4 = 0.7$.

$$P(A \cup B) = 0.7.$$

b) Mirando la tabla vemos que $P(A^C \cap B^C) = 0.3$.

$$P(A^C \cap B^C) = 0.3.$$

c) Mirando la tabla vemos que $P(A^C \cap B) = 0.1$.

$$P(A^C \cap B) = 0.1.$$

d) Sabemos que $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B)$. Luego: $0.4 = 0.5 \cdot P(A/B)$. Despejando: $P(A/B) = 0.4/0.5 = 4/5 = 0.8$.

$$P(A/B) = 0.8$$

Ejercicio B4:

El peso de las truchas de una piscifactoria sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos. Únicamente son aptas para la venta aquellas que superan un determinado peso.

a) ¿Cuál debería ser ese peso si se quiere que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta?

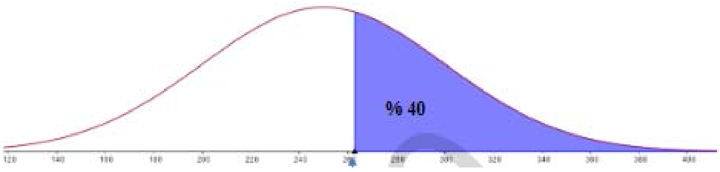
b) Si dicho peso se establece en 280 gramos y en la piscifactoria hay un total de 6000 truchas, ¿cuántas de ellas se pondrán a la venta?

Solución:

Sabemos que el peso de las truchas sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos.

Tipificamos la variable normal: Z: $\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-250}{50}$

a) $P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a-250}{50}\right) = 0.4 = 1 - P\left(Z < \frac{a-250}{50}\right) \rightarrow P\left(Z < \frac{a-250}{50}\right) = 0.6.$



Buscamos en la tabla de la distribución normal el valor 0.6, y obtenemos que:

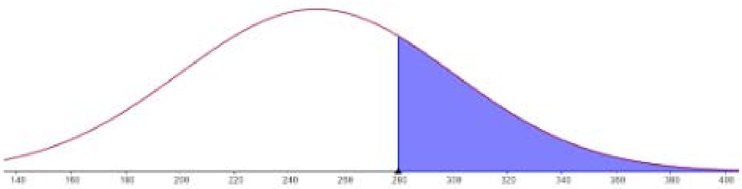
$$\frac{a-250}{50} = 0.255 \rightarrow a = 250 + (0.255)50 = 262.75.$$

El peso mínimo para que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta es de 262.75 gramos.

b) $P(X \geq 280) = P\left(Z \geq \frac{280-250}{50}\right) = P\left(Z \geq \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0.6\right) = 1 - P(Z \leq 0.6) =$

Buscamos en la tabla de la distribución normal:

$1 - P(Z \leq 0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743.$



Se pondrán a la venta en 27.43 % de las truchas. Como hay 6000 truchas, calculamos el 27.43 % de 6000 y se obtiene 1646, luego entonces se pondrán a la venta 1646 truchas.

Se pondrán a la venta **1646** truchas

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2020ko OHIKOA	ORDINARIA 2020
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

B 1 $[[hasta\ 2,5\ puntos]]$

Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto, quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espectáculo.
Dos agencias disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 € cada paquete.
- La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 € cada paquete.

¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

B 2 $[[hasta\ 2,5\ puntos]]$

Sea la siguiente función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

a) $[[1\ punto]]$ Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función.
b) $[[0,5\ puntos]]$ Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función.
c) $[[0,5\ puntos]]$ Representa gráficamente el área comprendida entre la función y la recta $y = \frac{x}{2}$.
d) $[[0,5\ puntos]]$ Obtén la primitiva de la función $f(x)$, sabiendo que en $x = 0$ toma el valor 1.

B 3 $[[hasta\ 2,5\ puntos]]$

Sean A y B dos sucesos compatibles asociados a un experimento aleatorio.
Se sabe que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ y $P(A \cap B) = 0{,}4$. Calcula:

a) $[[0,65\ puntos]]$ $P(A \cup B)$
b) $[[0,6\ puntos]]$ $P(A^c \cap B^c)$
c) $[[0,6\ puntos]]$ $P(A^c \cap B)$
d) $[[0,65\ puntos]]$ $P(A|B)$

B 4 $[[hasta\ 2,5\ puntos]]$

El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos. Únicamente son aptas para la venta aquellas que superan un determinado peso.

a) $[[1,25\ puntos]]$ ¿Cuál debería ser ese peso si se quiere que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta?
b) $[[1,25\ puntos]]$ Si dicho peso se establece en 280 gramos y en la piscifactoría hay un total de 6000 truchas, ¿cuántas de ellas se podrán poner a la venta?

4

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

2020ko EZOHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Azterketa honek zortzi ariketa ditu. Haietako LAUri erantzun behar diezu.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketa-orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:
  - pantaila grafikoa
  - datuak igortzeko aukera
  - programatzeko aukera
  - ekuazioak ebazteko aukera
  - matrize-eragiketak egiteko aukera
  - determinanteen kalkulua egiteko aukera
  - deribatuak eta integralak ebazteko aukera
  - datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.
- Orri honen atzealdean, banaketa normalaren taula dago.

Este examen tiene ocho ejercicios. Debes contestar a CUATRO de ellos.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
  - pantalla gráfica
  - posibilidad de trasmitir datos
  - programable
  - resolución de ecuaciones
  - operaciones con matrices
  - cálculo de determinantes
  - derivadas e integrales
  - almacenamiento de datos alfanuméricos.
- La tabla de la distribución normal está en el anverso de esta hoja.

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

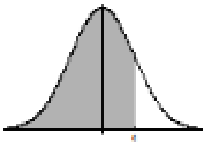
2020ko EZOHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

2020ko EZOHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

A 1 $[hasta\ \ 2,5\ puntos]$

Determina el valor máximo de la función objetivo $F(x,\ \ y) = 5x + 4y$ restringida por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

A 2 $[hasta\ 2,5\ puntos]$

Sea la función $f(x) = ax^3 + bx + 1$.

a) $[0,75\ puntos]$ Calcula los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, -5)$.

b) $[0,75\ puntos]$ Para $a = 2$ y $b = -6$, estudiar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x)$.

c) $[1\ punto]$ Para $a = 2$ y $b = -6$, calcula el área comprendida entre la función y la recta $y = 2x + 1$. Realiza la representación gráfica.

A 3 $[hasta\ 2,5\ puntos]$

En un instituto, el 90 % del alumnado matriculado ha nacido en la ciudad en la que está localizado dicho centro. El 42 % del alumnado son chicos, y el 54 % son chicas nacidas en la ciudad en la que se ubica el instituto.

a) $[1\ punto]$ Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto?

b) $[0,75\ puntos]$ ¿Y la probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad donde se ubica el instituto?

c) $[0,75\ puntos]$ Se ha elegido una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacida en la ciudad donde se ubica el instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?

A 4 $[hasta\ 2,5\ puntos]$

Las notas obtenidas por los estudiantes de un determinado grupo en una asignatura siguen una distribución normal de media 6,2 puntos y desviación típica 2 puntos.

Se elige un estudiante al azar. Calcula:

a) $[1\ punto]$ La probabilidad de que su nota sea superior a 7.

b) $[0,75\ puntos]$ La probabilidad de que haya obtenido una nota comprendida entre 5 y 8 puntos.

c) $[0,75\ puntos]$ Si el 25 % del alumnado con mejor nota, consiguió la calificación de "sobresaliente", ¿cuál es la nota mínima para obtener dicha calificación?

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2020ko EZOHIKOA	EXTRAORDINARIA 2020
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

B 1 $[hasta\ 2,5\ puntos]$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $[1,25\ puntos]$ Calcular la inversa de la matriz $(A \cdot A^t)$.

b) $[0,75\ puntos]$ ¿Admite inversa la matriz $(A^t \cdot A)$?

c) $[0,5\ puntos]$ Calcular, cuando sea posible:

$$A \cdot B \qquad y \qquad A^t \cdot B$$

B 2 $[hasta\ 2,5\ puntos]$

a) $[0,5\ puntos]$ Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función $y = 4 - x^2$.

b) $[0,75\ puntos]$ Representar gráficamente la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ 4 - x & \text{si} \quad 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

c) $[1,25\ puntos]$ Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas.

B 3 $[hasta\ 2,5\ puntos]$

En un centro de enseñanza de Estados Unidos hay 1000 estudiantes y 100 profesores. El 10 % de los profesores son demócratas y el resto republicanos. Entre los estudiantes las proporciones son las contrarias, es decir, el 10 % de ellos son republicanos y el resto son demócratas.

a) $[1,5\ puntos]$ Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea republicana?

b) $[1\ punto]$ Se ha elegido al azar una persona de dicho centro y ha resultado ser republicana. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un estudiante?

B 4 $[hasta\ 2,5\ puntos]$

El tiempo que necesitan los alumnos de un grupo para finalizar el examen de una determinada asignatura se distribuye normalmente, con una media de 60 minutos y una desviación típica de 10 minutos.

a) $[1\ punto]$ Si se dan 75 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos conseguirá finalizarlo?

b) $[0,75\ puntos]$ Si se dan 80 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos no conseguirá finalizarlo?

c) $[0,75\ puntos]$ ¿Qué tiempo hay que dar para la realización de dicho examen si se quiere que el 96 % de los alumnos consiga terminarlo?

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK
PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. **El examen está compuesto de cuatro ejercicios.**
2. El examen se evaluará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
3. **Cada ejercicio se valorará entre 0 y 2,5 puntos.**
4. En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN POSITIVA

- Los planteamientos correctos, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
- La correcta utilización de conceptos, vocabulario y notación científica.
- El conocimiento de técnicas específicas de aplicación directa para el cálculo y/o interpretación de datos numéricos y gráficos.
- La terminación completa del ejercicio y la exactitud del resultado.
- Se considerarán igualmente válidas dos soluciones que solo se diferencien en el grado de exactitud empleado en los cálculos numéricos.
- No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc.…siempre que no sean de tipo conceptual.
- La claridad de las explicaciones de los pasos seguidos.
- Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., … que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución.
- La pulcritud de la presentación, y cualquier otro aspecto que refleje la madurez que cabe esperar de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN NEGATIVA

- Los planteamientos incorrectos.
- La confusión de conceptos.
- La abundancia de errores de cálculo (por ser indicativa de deficiencias de orden básico).
- Los errores aislados, cuando indican falta de reflexión crítica o de sentido común (por ejemplo, decir que la solución a tal problema es -3,7 frigoríficos, o que cierta probabilidad vale 2,5).
- Los errores aislados, cuando conducen a problemas más sencillos que los inicialmente propuestos.
- La ausencia de explicaciones, en particular del significado de las variables que se están utilizando.

EXTRAORDINARIA. Ejercicio A1:

Determina el valor máximo de la función objetivo $F(x, y) = 5x + 4y$ restringida por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

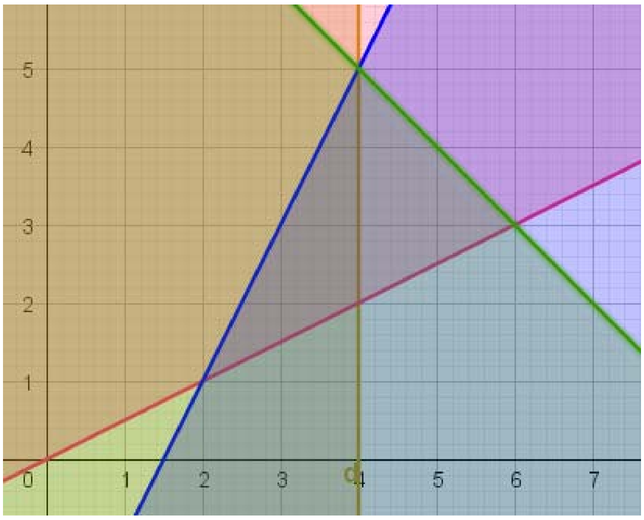
Solución:

La función objetivo es: $F(x, y) = 5x + 4y$.

La región factible es:

Las restricciones son:

$$\begin{cases} \mathbf{2y - x \geq 0} \\ \mathbf{y \leq 2x - 3} \\ \mathbf{x + y \leq 9} \\ \mathbf{x \leq 4} \end{cases}$$



Los vértices de la región factible son: $A(2, 1)$; $B(4, 2)$; $C(4, 5)$.

Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$F(2, 1) = 5(2) + 4(1) = 14.$

$F(4, 2) = 5(4) + 4(2) = 28.$

$F(4, 5) = 5(4) + 4(5) = 40.$

Por tanto el máximo de la función objetivo se alcanza en el punto $C(4, 5)$, siendo ese valor máximo de 40.

Máximo de la función objetivo: **40**, se alcanza en $C(4, 5)$.

EXTRAORDINARIA. Ejercicio A2:

Sea la función $f(x) = ax^3 + bx + 1$.

a) Calcula los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto (1, –5).

b) Para $a = 2$ y $b = -6$, estudiar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x)$.

c) Para $a = 2$ y $b = -6$, calcula el área comprendida entre la función y la recta $y = 2x + 1$. Realiza la representación gráfica.

Solución:

a) Imponemos que la función pase por el punto (1, –5). $f(1) = a + b + 1 = -5$.

Para imponer que el punto sea un extremo relativo, se debe anular la derivada primera en ese punto:

$f'(x) = 3ax^2 + b$. Luego $f'(1) = 3a + b = 0$.

Resolvemos el sistema:

$\begin{cases} a + b = -6 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$. Restamos a la segunda ecuación la primera: $\begin{cases} 2a = 6 \to a = 3 \\ 3a + b = 0 \to b = -\frac{9}{2} \end{cases}$.

El punto (1, –5) es un extremo relativo de la función si $\boldsymbol{a}$ **= 3** y $\boldsymbol{b}$ **= –9/2**.

b) Para los valores dados la función es: $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$. Para estudiar los máximos y mínimos calculamos la derivada y la igualamos a cero; $f'(x) = 6x^2 - 6 = 0$. $x^2 = 1$; $x = \pm 1$;

Los posibles máximos y mínimos relativos están en los puntos:

(1, 2 – 6 + 1) = (1, –3); (–1, –2 + 6 +1) = (–1, 5).

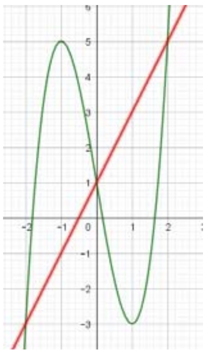
Calculamos la derivada segunda: $f''(x) = 12x$; $f''(1) = 12 > 0$; $f''(-1) = -12 < 0$.

Por lo tanto el punto (1, –3) es un mínimo relativo y (–1, 5) es un máximo relativo. Con la derivada segunda determinamos los puntos de inflexión: $f''(x) = 12x = 0$, si $x = 0$, $f(0) = 1$. El punto (0, 1) es un punto de inflexión.

Mínimo relativo: (1, –3). Máximo relativo: (–1, 5). Punto de inflexión (0, 1).

c) Buscamos los puntos de intersección entre la función y la recta:

$2x^3 - 6x + 1 = 2x + 1$; $2x^3 - 8x = 0 = 2x(x^2 - 4)$; Las raíces son: $x = 0$; $x = 2$; $x = -2$.



En la gráfica se observa que la función va por encima de la recta entre –2 y 0, y por debajo entre 0 y 2. Luego el área pedida es:

$$Área = \int_{-2}^{0}\big((2x^3 - 6x + 1) - (2x + 1)\big)dx + \int_{0}^{2}\big((2x + 1) - (2x^3 - 6x + 1)\big)dx =$$

$$\int_{-2}^{0}(2x^3 - 8x)dx + \int_{0}^{2}(8x - 2x^3)dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{8x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[4x^2 - \frac{2x^4}{4}\right]_{0}^{2}$$
$$= \big(0 - (8 - 16)\big) + (16 - 8) = 16.$$

Área = 16 u²

EXTRAORDINARIA. Ejercicio A3:

En un instituto, el 90 % del alumnado ha nacido en la ciudad en la que está localizado dicho centro. El 42 % del alumnado son chicos y el 54 % son chicas nacidas en la ciudad en la que se ubica el instituto.

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto?
b) ¿Y la probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad donde se ubica el instituto?
c) Se ha elegido una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacidad en la ciudad donde se ubica el instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?

Solución:

Llamamos C al suceso haber nacido en la ciudad en la que está localizado el instituto, y C^c al suceso contrario. Llamamos O al suceso ser chico, y A al suceso ser chica que es el suceso contrario. Llevamos los datos dados a una tabla de contingencia o tabla de doble entrada, y completamos los datos que faltan:

	A	O	
C	0.54		0.9
C^C			
		0.42	1

	A	O	
C	0.54	0.36	0.9
C^C	0.04	0.06	0.1
	0.58	0.42	1

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto?

Nos preguntan $P(C^c)$. Por la tabla vemos que $P(C^c) = 0.1$. El porcentaje de alumnado no nacido en la ciudad es del 10 %.

$$P(C^c) = 0.1$$

b) ¿Y la probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad donde se ubica el instituto?

Nos piden $P(A \cap C^c)$. En la tabla vemos que es $P(A \cap C^c) = 0.04$. El 4 % de las chicas no han nacido en la ciudad.

$$P(A \cap C^c) = 0.04$$

c) Se ha elegido una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacidad en la ciudad donde se ubica el instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?

Nos piden una probabilidad condicionada: $P(O / C)$.

Sabemos que $P(O \cap C) = P(C \cap O) = P(C) \cdot P(O / C) = 0.9 \cdot P(O / C) = 0.36$.

Luego $P(O / C) = P(C \cap O)/P(C) = 0.36/0.9 = 2/5 = 0.04$. La probabilidad de que sea chico es 0.04, es de un 4 %.

$$P(O / C) = 0.04$$

EXTRAORDINARIA. Ejercicio A4:

Las notas obtenidas por los estudiantes de un determinado grupo en una asignatura siguen una distribución normal de media 6.2 puntos y desviación típica 2 puntos. Se elige un estudiante al azar. Calcula:

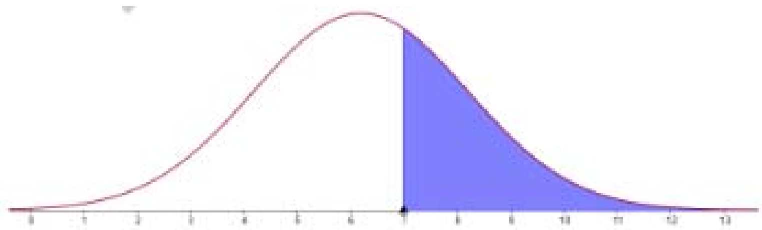
a) La probabilidad de que su nota sea superior a 7.
b) La probabilidad de que haya obtenido una nota comprendida entre 5 y 8 puntos.
c) Si el 25 % del alumnado con mejor nota, consiguió la calificación de sobresaliente, ¿cuál es la nota mínima para obtener dicha calificación?

Solución:

Nos dicen que las notas siguen una distribución normal de media 6.2 y desviación típica 2.

Tipificamos la variable normal: Z: $\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-6.2}{2}$

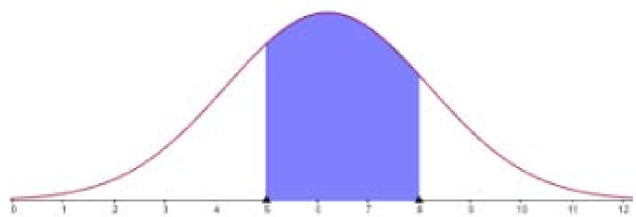
a) $P1 = P(X > 7) = P\left(Z > \frac{7-6.2}{2}\right) = P(Z > 0.4) = 1 - P(Z \leq 0.4) = 1 - 0.6554 = 0.3446$



La probabilidad de que su nota sea superior a 7 es de **0.3446**.

b) $P2 = P(5 \leq X \leq 8) = P\left(\frac{5-6.2}{2} \leq Z \leq \frac{8-6.2}{2}\right) = P(-0.6 \leq Z \leq 0.9) = P(Z \leq 0.9) - \big(1 - P(Z \leq 0.6)\big) = 0.8159 - (1 - 0.7257) = 0.5416.$

La probabilidad de que haya obtenido una nota entre 5 y 8 puntos es de **0.5416**.



c) Buscamos el punto a, que nos lo indique: $P(X > a) = 0.25$.

Tipificamos:

$$P3 = P(X > a) = P\left(Z > \frac{a-6.2}{2}\right) = 0.24 \rightarrow \frac{a-6.2}{2} = 0.675 \rightarrow a = 7.55$$

La nota mínima para tener un sobresaliente es de **7.55**.

EXTRAORDINARIA. Ejercicio B1:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcular la inversa de la matriz $(A \cdot A^t)$
b) ¿Admite inversa la matriz $(A^t \cdot A)$?
c) Calcular, cuando sea posible: $A \cdot B$ y $A^t \cdot B$

Solución:

a) Calculamos en primer lugar $(A \cdot A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$

La matriz tendrá inversa si su determinante es distinto de cero:

$|A \cdot A^t| = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{vmatrix} = 70 - 64 = 6 \neq 0$. Si tiene matriz inversa:

$$(A \cdot A^t)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

b) Calculamos $(A^t \cdot A)$.

$(A^t \cdot A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$.

Calculamos su determinante:

$$|A^t \cdot A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix} = 0.$$

Luego no existe su matriz inversa.

No existe la matriz inversa de $(A^t \cdot A)$.

c) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ no se puede calcular pues B debería tener 3 filas o A, 2 columnas.

$$A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B$ no se puede calcular y $A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

EXTRAORDINARIA. Ejercicio B2:

a) Determina los intervalos de crecimieto y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función $y = 3 - x^2$.

b) Representa graficamente la función dada por: $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si \quad -2 \leq x < 0 \\ 4 - x & si \quad 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

c) Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas.

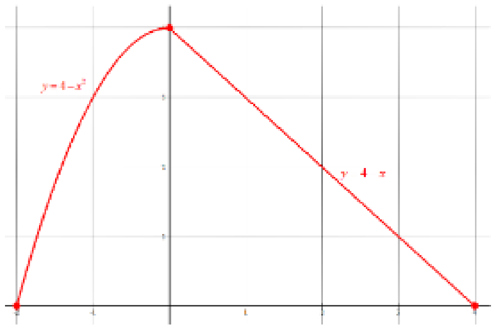
Solución:

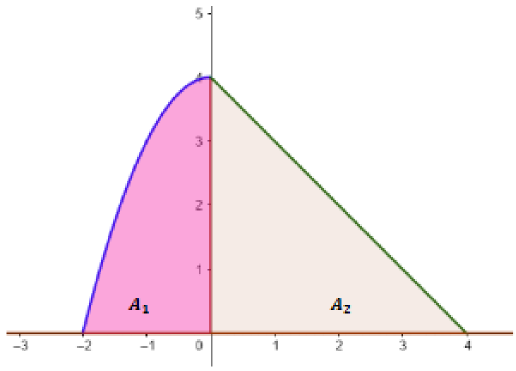
a) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento calculamos la derivada primera:

$y' = -2x$. La derivada primera es positiva si x es negativo, y negativa si x es positivo, por lo que los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: La función es creciente en $(-\infty, 0)$ y es decreciente en $(0, +\infty)$. Para $x = 0$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, luego en ese punto se alcanza un máximo relativo: (0, 3). Como la función es una parábola, y ese máximo es el vértice, es también un máximo absoluto.

En $(-\infty, 0)$ la función es creciente y en $(0, +\infty)$ es decreciente, En (0, 3) alcanza un máximo relativo.

b) Es una función a trozos. La primera rama es una parábola de vértice, que es un máximo, (0, 4). La segunda rama es una recta de ordenada en el origen (0, 4) y pendiente –1.





c) Calculamos el área en cada uno de los intervalos de definición de la función:

$$Área = \int_{-2}^{0} (4 - x^2)dx + \int_{0}^{4} (4 - x)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4}$$
$$= \left(0 - \left(-8 - \frac{-8}{3}\right)\right) + \left(\left(16 - \frac{16}{2}\right) - 0\right) = 8 - \frac{8}{3} + 8 = \frac{40}{3}$$

$$Área = \frac{40}{3} u^2 = 13.33\ u^2$$

EXTRAORDINARIA. Ejercicio B3:

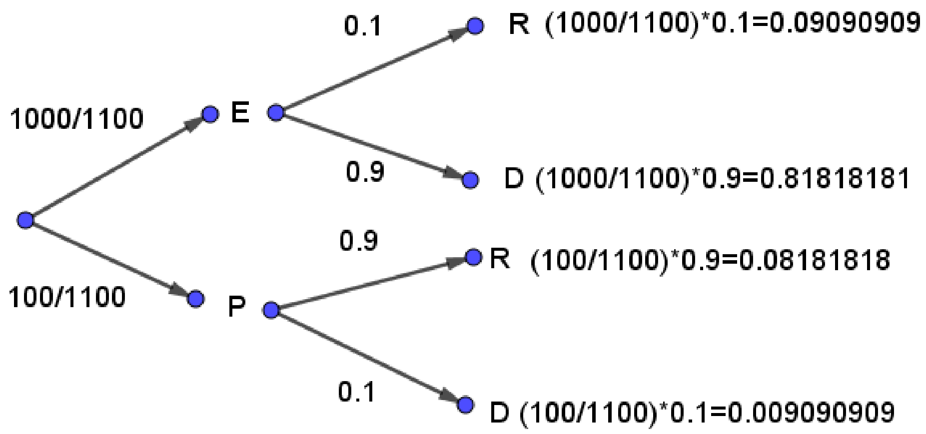
En un centro de enseñanza de Estados Unidos hay 1000 estudiantes y 100 profesores. El 10 % de los profesores son demócratas y el resto republicanos. Entre los estudiantes las proporciones son las contrarias, es decir, un 10 % de ellos son republicanos y el resto son demócratas.

a. Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea republicana?
b. Se ha elegido al azar una persona de dicho centro y ha resultado ser republicana. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un estudiante?

Solución:

Llamamos E al suceso ser estudiante y P al suceso se profesor, D al suceso ser demócrata y R al suceso ser republicano. Podemos resolver el problema haciendo un diagrama de árbol.

Hacemos el diagrama de árbol:



a) Siguiendo el árbol tenemos que:

$P(R) = P(E) \cdot P(R/E) + P(P) \cdot P(R/P) = P(E \cap R) + P(P \cap R)$ = (1000/1100) · 0.1 + (100/1100) · 0.9 = 0.090909090 + 0.081818181 = 0.17272727.

La probabilidad de que una persona elegida al azar sea republicana es de **0.17272727**.

b) Sabemos que $P(E / R) = P(E \cap R)/P(R)$ = (1000/1100) · 0.1 / 0.17272727 = 0.52631579.

Se ha elegido al azar una persona de dicho centro y ha resultado ser republicana. La probabilidad de que se trate de un estudiante es del 0.52631579.

EXTRAORDINARIA. Ejercicio B4:

El tiempo que necesitan los alumnos de un grupo para finaliza el examen de una determinada asignatura se distribuye normalmente, con una media de 60 minutos y una desviación típica de 10 minutos.

a) Si se dan 75 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos conseguirá finalizarlo?
b) Si se dan 80 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos no conseguirá finalizarlo?
c) ¿Qué tiempo hay que dar para la realización de dicho examen si se quiere que el 96 % de los alumnos consiga terminarlo?

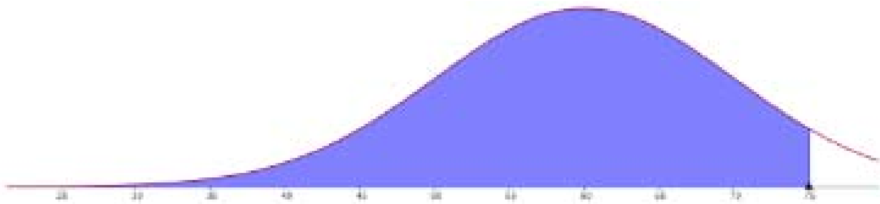
Solución:

Sabemos que el tiempo para finalizar un examen sigue una distribución normal de media 60 y desviación típica 10.

Tipificamos la variable normal: Z: $\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-60}{10}$

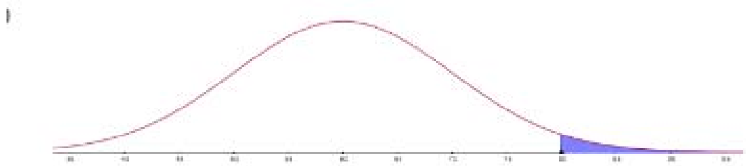
a) $P(X \leq 75) = P\left(Z \leq \frac{75-60}{10}\right) = P(Z \leq 1.5) = 0.9332$

Si se dan 75 minutos para realizar el examen, el **93.32 %** de los alumnos conseguirá finalizarlo



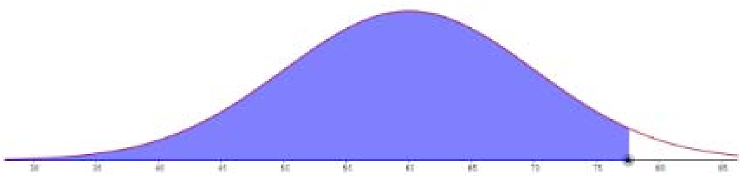
b) $P(X \geq 80) = P\left(Z \geq \frac{80-60}{10}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - \ P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$

Si se dan 80 minutos para realizar el examen, la proporción de alumnos que no conseguirá finalizarlo es del **2.28 %.**



c) $P(X \leq a) = 0.96 = \ P\left(Z \leq \frac{a-60}{10}\right) \ \rightarrow \frac{a-60}{10} = 1.75 \rightarrow a = 60 + 17.5 = 77.5.$

Si se dejan **77.5** minutos para la realización de dicho examen el 96 % de los alumnos conseguirá terminarlo.



Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2020 Comunidad autónoma de

VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Podadera Sánchez

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JULIO

BAREMO DEL EXAMEN: **Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos.** Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1:

Para fertilizar una parcela de cultivo se utilizan dos tipos de fertilizantes, A y B. El cultivo de la parcela necesita un mínimo de 120 kilos de nitrógeno y 110 kilos de fósforo. El fertilizante A contiene un 25% de nitrógeno y un 15% de fósforo, siendo su precio de 1,2 euros el kilo, mientras que el fertilizante B contiene un 16% de nitrógeno y un 40% de fósforo y cuesta 1,6 euros el kilo.

a) ¿Qué cantidad se necesita de cada tipo de fertilizante para que el coste de la fertilización resulte mínimo?

(8 puntos)

b) ¿Cuál es este coste mínimo? (2 puntos)

Problema 2:

Dada la función $f(x) = \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores.

(2 puntos)

Problema 3:

Si un habitante de la ciudad de *Megalópolis* es portador del anticuerpo A, entonces 2 veces de cada 5 es portador del anticuerpo B. Por el contrario, si no es portador del anticuerpo A, entonces 4 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B. Si sabemos que la mitad de la población es portadora del anticuerpo A, calcula:

a) La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo B.

b) La probabilidad de que si un habitante de *Megalópolis* es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A.

c) La probabilidad de que si un habitante de *Megalópolis* no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.

d) La probabilidad de que un habitante de *Megalópolis* sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

(Cada apartado puntúa 2,5 puntos)

Problema 4:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Halla la matriz inversa de A. (3 puntos)

b) Explica por qué la matriz B no tiene inversa. (2 puntos)

c) Razona por qué la matriz AB no tiene inversa. (2 puntos)

d) Resuelve la ecuación matricial $AB-AX=BA$. (3 puntos)

Problema 5:

Una empresa farmacéutica lanza al mercado un nuevo fármaco que se distribuye en cajas de seis unidades. La relación entre el precio de cada caja y el beneficio mensual obtenido en euros viene dada por la función:

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55,$$

donde x es el precio de venta de una caja. Se pide:

a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada caja a 6 euros? (2 puntos)

b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios? (2 puntos)

c) Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo? (2+1 puntos)

d) ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece? (3 puntos)

Problema 6:

Un profesor evalúa a sus estudiantes a través de un trabajo final. El profesor sabe por experiencia que el 5% de los trabajos no son originales, sino que son plagios. El profesor dispone de un programa informático para detectar plagios. La probabilidad de que el programa no clasifique correctamente un trabajo plagiado es 0,04 y la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0,02.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajo final, elegido al azar, sea clasificado como plagio por el programa informático. (3 puntos)

b) Un trabajo es inspeccionado por el programa informático y es clasificado como original. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio? (4 puntos)

c) ¿Qué porcentaje de trabajos finales son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa? (3 puntos)

RESPUESTAS

Problema 1:

Es un problema de programación lineal ya que tenemos dos tipos de fertilizantes (A y B), un objetivo (tener un coste mínimo en la fertilización) y unas restricciones (el mínimo de nitrógeno y fósforo que necesita nuestra parcela).

Variables de decisión: Nos interesa saber qué cantidad de cada tipo de fertilizante hay que comprar por lo que las variables de decisión serán:

x — Kilos de fertilizante A.

y — Kilos de fertilizante B.

Función objetivo: Queremos tener un coste mínimo. Como cada kilo de A cuesta 1.2 euros si compramos x kilos gastamos $1.2x$. Cada kilo de B cuesta 1.6 euros con los y kilos comprados gastamos $1.6y$. Sumando ambas cantidades tenemos que la función objetivo es:

$$C(x,y) = 1.2x + 1.6y$$

Restricciones: En principio nuestras variables no pueden ser negativas por lo que aplicaremos, ya que es posible:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Como necesitamos 120 kilos de nitrógeno como mínimo y el fertilizante A aporta un 25% de su peso tenemos que el aporte será $0.25x$ mientras que el fertilizante B aporta un 16% por lo que el aporte será $0.16y$. Debemos sumar ambas cantidades e imponer que ha de ser mayor o igual a la cantidad mínima que tenemos que poner en nuestra parcela:

$$0.25x + 0.16y \geq 120$$

Como necesitamos 110 kilos de fósforo como mínimo y el fertilizante A aporta un 15% de su peso tenemos que el aporte será $0.15x$ mientras que el fertilizante B aporta un 40% por lo que el aporte será $0.4y$. Debemos sumar ambas cantidades e imponer que ha de ser mayor o igual a la cantidad mínima que tenemos que poner en nuestra parcela:

$$0.15x + 0.4y \geq 110$$

Región factible o solución. Vendrá dada por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 y \geq 0 \\ 0.25x + 0.16y \geq 120 \\ 0.15x + 0.4y \geq 110 \end{cases}$$

Las dos primeras inecuaciones nos informan que la representación será en el primer cuadrante. Para representar la tercera igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la “y”:

$$y = \frac{120-0.25x}{0.16} = \frac{12000-25x}{16}$$ (hemos quitado decimales para simplificar cálculos)

tabla de valores:

x	480	240	0
y	0	375	750

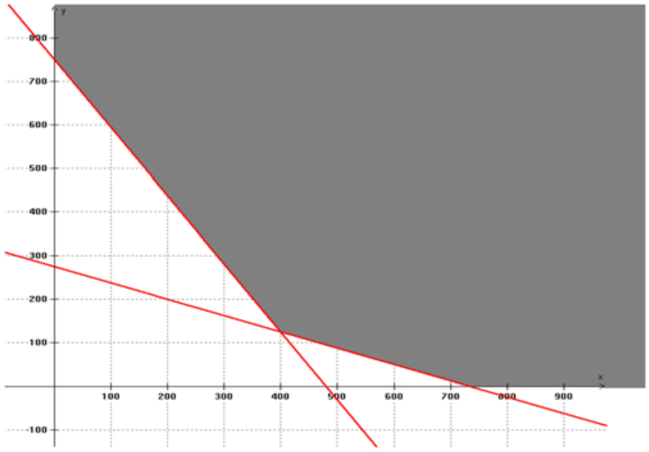
Para representar la cuarta igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la “y”:

$$y = \frac{110 - 0.15x}{0.4} = \frac{11000 - 15x}{40}$$ (hemos quitado decimales para simplificar cálculos)

tabla de valores:

x	0	400	733.33
y	22	125	0

Después de representar cada recta tenemos que sustituir un valor para hallar la región factible, en la tercera y la cuarta podemos sustituir el $(0{,}0)$ y nos sale que la región se extiende hacia el lado contrario a ese punto. Por lo que la representación queda:



Se trata de una región abierta que presenta tres vértices:

- El primero es el $(0{,}750)$ que sale directamente de nuestra representación.
- El segundo es el $(733.33,\ 0)$ que también sale de nuestra representación.
- El tercero es el corte de ambas rectas $y = \frac{12000-25x}{16}$y$y = \frac{11000-15x}{40}$ por lo que igualamos ambas ecuaciones y despejamos la x:

$$\frac{12000 - 25x}{16} = \frac{11000 - 15x}{40}$$
$$40 \cdot (12000 - 25x) = 16 \cdot (11000 - 15x)$$
$$480000 - 1000x = 176000 - 240x$$
$$304000 = 760x$$

$x = 400$

la otra componente la hallamos sustituyendo en cualquiera de las dos:

$y = \frac{12000 - 25 \cdot 400}{16} = 125$ por lo que el punto será $(400{,}125)$

Los 3 vértices a estudiar son: $(0{,}750)$ $(733.33,\ 0)$ y $(400{,}125)$

La función objetivo era: $C(x, y) = 1.2x + 1.6y$ sustituimos los vértices hallados:

$C(0{,}750) = 1.2 \cdot 0 + 1.6 \cdot 750 = 1200$ euros

$C(733.33{,}0) = 1.2 \cdot 733.33 + 1.6 \cdot 0 = 879{,}996$ euros

$C(400{,}125) = 1.2 \cdot 400 + 1.6 \cdot 125 = 680$ euros

Como buscamos el coste mínimo tenemos que se da comprando 400 kilos del fertilizante A y 125 kilos del B y el coste mínimo es de 680 €.

Problema 2:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función polinómica racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$ por lo que no existe en esos puntos.

El **dominio** será: $Dom f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x) = 0$:

$f(x) = \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = 0$ por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$2x^2 - 3x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot 5}}{2\cdot 2} = \frac{3\pm\sqrt{9-40}}{4}$ como la raíz (discriminante) es negativa sabemos que no tiene solución real por lo que la función **NO CORTA al eje OX.**

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de *f(x)* cuando $x = 0$:

$f(0) = \frac{2\cdot 0^2-3\cdot 0+5}{0^2-1} = -5$ por lo que es el punto $(0,\text{-}5)$

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = 2$ luego tiene asíntota horizontal en $y = 2$

Siempre que hay asíntota horizontal es útil (aunque no lo piden) calcular las tendencias (es ver por dónde va la función respecto de la asíntota)

Para ello le damos un valor relativamente grande (positivo) y relativamente pequeño (negativo) y lo comparamos con el valor de la asíntota (2):

$f(100) = \frac{2\cdot 100^2-3\cdot 100+5}{100^2-1} = \frac{19705}{9999} \simeq 1.97$ (va por debajo de la asíntota)

$f(-100) = \frac{2\cdot(-100)^2-3\cdot(-100)+5}{(-100)^2-1} = \frac{20305}{9999} \simeq 2.03$ (va por encima de la asíntota)

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos dos: $x = \pm 1$, calculamos los límites:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = \left(\frac{4}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = +\infty \end{cases}$$ por lo que $x = 1$ es asíntota vertical

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = \left(\frac{10}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{2x^2-3x+5}{x^2-1} = -\infty \end{cases}$$ por lo que $x = -1$ es asíntota vertical

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

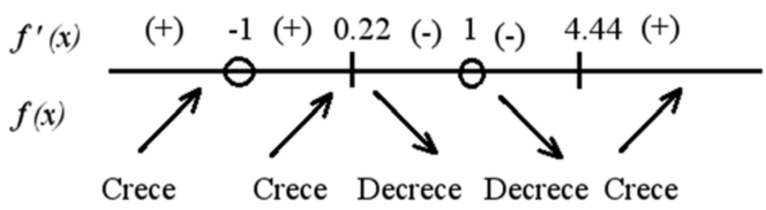
Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

$$f'(x) = \frac{(4x-3)\cdot(x^2-1)-(2x^2-3x+5)\cdot(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2-14x+3}{(x^2-1)^2} = 0$$

Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$3x^2-14x+3=0 \to x = \frac{14\pm\sqrt{14^2-4\cdot3\cdot3}}{2\cdot3} = \frac{14\pm\sqrt{160}}{6} = \begin{cases} \frac{7+2\sqrt{10}}{3} \simeq 4.44 \\ \frac{7-2\sqrt{10}}{3} \simeq 0.225 \end{cases}$ por lo que tiene dos posibles puntos críticos.

Estos puntos son los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Con estos puntos y las discontinuidades del dominio $x=\pm1$ estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores



considerados.

Los valores calculados para establecer el signo han sido:

$$f'(-2) \simeq 3.89 > 0$$
$$f'(0) = 3 > 0$$
$$f'(0.5) \simeq -5.78 < 0$$
$$f'(2) = -13 < 0$$
$$f'(5) \simeq 0.014 > 0$$

Por lo que tenemos que la función crece en]-∞,-1[U]-1,0.22[U]4.44,+∞[

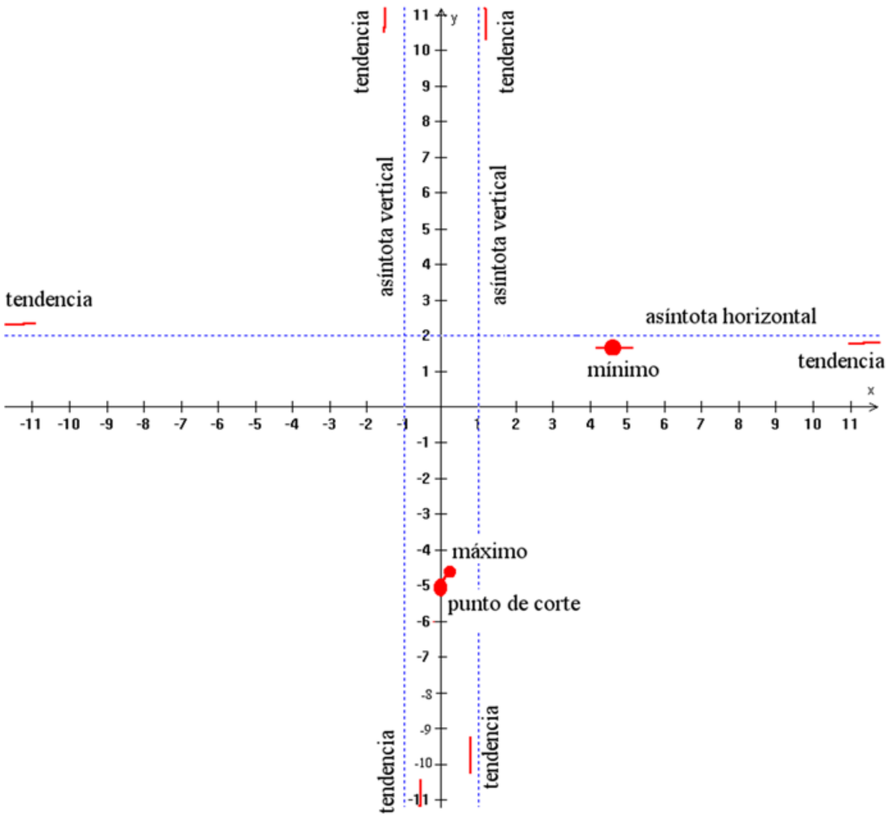
Decrece en]0.22,1[U]1,4.44[

d) Los máximos y mínimos locales.

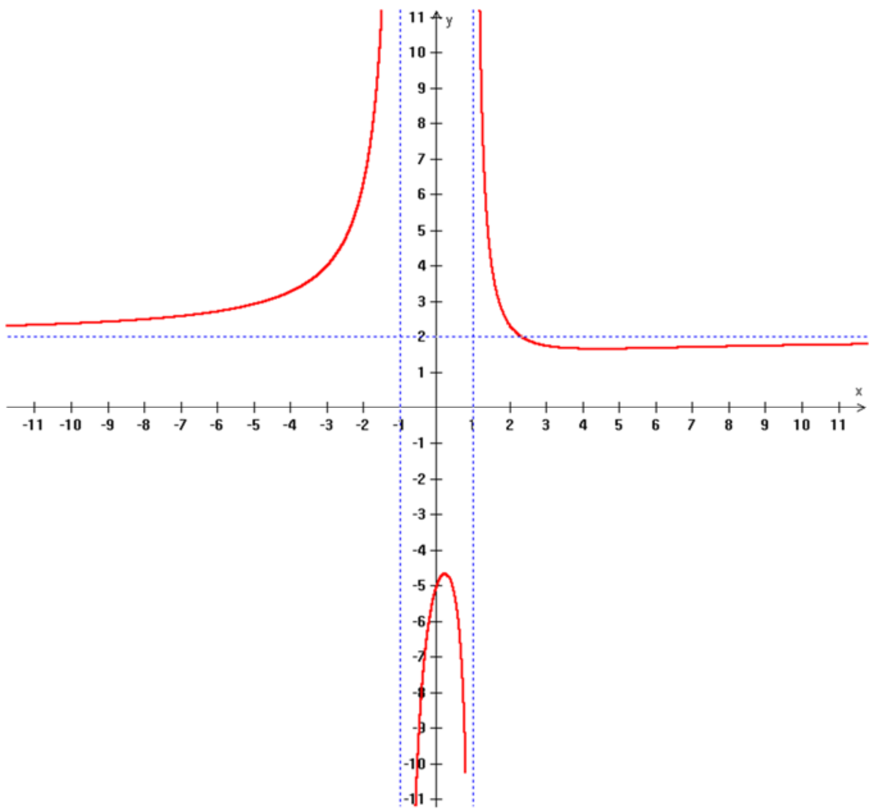
Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un máximo en el punto de abscisa $x = 0.22 \to$ $(0.22,-4.66)$ (hemos calculado $f(0.22)$) y un mínimo en el punto de abscisa $x = 4.44 \to$ $(4.44,1.66)$ (hemos calculado $f(4.44)$)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores.

Dibujamos el punto de corte $(0,-5)$, el mínimo, el máximo, las asíntotas verticales en $x=\pm1$ (con sus tendencias a infinito) y la asíntota horizontal con sus tendencias y obtenemos:



La gráfica queda así:



Problema 3:

Es un problema de probabilidad, definimos los sucesos:

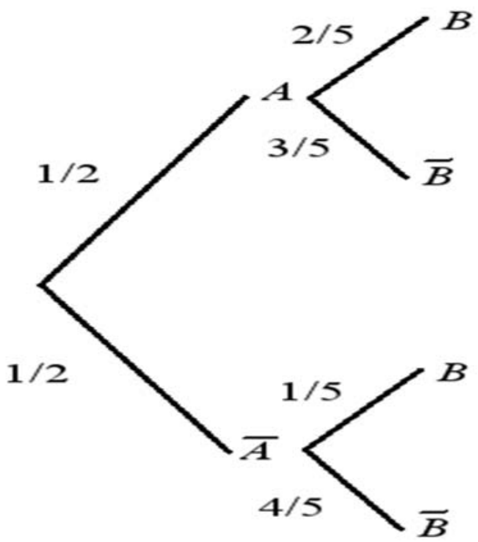
A → "Ser portador del anticuerpo A"

B → "Ser portador del anticuerpo B"

En el enunciado nos dan las siguientes probabilidades:

- Si un habitante de la ciudad de Megalópolis es portador del anticuerpo A, entonces 2 veces de cada 5 es portador del anticuerpo B. Se trata de una probabilidad condicionada: $P(B/A)=\frac{2}{5}=0.4$
- Podemos deducir entonces que, si es portador del anticuerpo A, 3 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B:
$$P(\overline{B}/A)=\frac{3}{5}=0.6$$
- Por otro lado, si no es portador del anticuerpo A, entonces 4 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B. Se trata de nuevo de una condicionada:
$$P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{4}{5}=0.8$$
- Podemos deducir que si no es portador del anticuerpo A, entonces 1 vez de cada 5 es portador del anticuerpo B.
$$P(B/\overline{A})=\frac{1}{5}=0.2$$
- Por último nos dicen que sabemos que la mitad de la población es portadora del anticuerpo A, por lo que tenemos que: $P(A)=\frac{1}{2}=0.5$
- Podemos deducir que la otra mitad de la población no es portadora del anticuerpo A, por lo que tenemos que: $P(\overline{A})=\frac{1}{2}=0.5$

El problema se puede resolver por tabla de contingencias o por árbol, yo lo voy a resolver por árbol. Podemos elaborar el árbol a partir de ser o no portador del anticuerpo A y después si se es o no del B



situamos las probabilidades deducidas anteriormente:

Contestamos ahora a las cuestiones planteadas:

a) La probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo B.

Nos preguntan por $P(B)$aplicando el teorema de la probabilidad total tenemos que la probabilidad del suceso será la suma de las probabilidades que nos llevan a él, es decir:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(\overline{A}) \cdot P(B/\overline{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$$

b) La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A.

Como sabemos que el habitante es portador del anticuerpo B se trata de una probabilidad a posteriori por lo que aplicamos la fórmula de Bayes:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Hallamos $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

La $P(B) = \frac{3}{10}$ (la tenemos del apartado anterior)

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3} \simeq 0.6667 = 66.67\%$$

c) La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.

Como sabemos que el habitante no es portador del anticuerpo B se trata de una probabilidad a posteriori por lo que aplicamos la fórmula de Bayes:

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

Hallamos $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$

La $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ (por el suceso contrario)

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7} \simeq 0.5714 = 57.14\%$$

d) La probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

Aquí la cuestión cambia por la conjunción "y" ya no se trata de una condicionada sino de una intersección:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$$

Problema 4:

a) Halla la matriz inversa de A.

La inversa la podemos hacer por Gauss o determinantes (sólo de una forma):

Por determinantes: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0$ luego $\exists A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si lo hacemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$F_2=2F_2-F_1$ $F_1=F_1+5F_2$ $F_1=F_1/2$ $F_2=F_2/(-1)$

Hay que comprobar que lo hemos hecho bien (no es obligatorio):

$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Como da la identidad está bien calculada.

b) Explica porqué la matriz B no tiene inversa.

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante vale cero.

Calculamos el determinante de B:

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0$ como su determinante es cero $\nexists B^{-1}$

c) Razona porqué la matriz AB no tiene inversa.

Calculamos la matriz producto:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante vale cero.

Calculamos el determinante de AB:

$|AB| = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 9 \cdot 8 - 4 \cdot 18 = 72 - 72 = 0$ como su determinante es cero $\nexists (AB)^{-1}$

d) Resuelve la ecuación matricial $AB - AX = BA$

Resolvemos la ecuación con las letras:

$AB - AX = BA$ (Vamos a pasar la X al otro miembro)

$AB = BA + AX$ (Pasamos la BA al otro miembro)

$AB - BA = AX$ (Premultiplicamos o multiplicamos por la inversa de A)

$A^{-1} \cdot (AB - BA) = A^{-1} \cdot AX$ (Aplicamos que$A \cdot A^{-1} = I$)

$A^{-1} \cdot (AB - BA) = I \cdot X$ (Aplicamos que el producto por la inversa deja igual la matriz)

$$A^{-1} \cdot (AB - BA) = X$$

Por lo que tenemos que: $X = A^{-1} \cdot (AB - BA)$

Tenemos ya calculadas la inversa de A y el producto AB. Calculamos ahora el producto BA:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Hacemos las operaciones indicadas:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9-8 & 18-18 \\ 4-4 & 8-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & -2 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 5:

a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada caja a 6 euros?

Hay que sustituir el valor de cada caja en la función beneficio:

$$B(6) = -(6)^2 + 16 \cdot 6 - 55 = -36 + 96 - 55 = 5$$

Luego el beneficio obtenido es de 5 €

b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios?

Para obtener beneficios se tiene que verificar que:

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55 \geq 0$$

Resolvemos la inecuación de segundo grado. Para ello resolvemos la ecuación y comprobamos el signo antes y después de las soluciones:

$$-x^2 + 16x - 55 = 0 \to x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-55)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-16 \pm \sqrt{36}}{-2} = \begin{cases} \frac{-16+6}{-2} = 5 \\ \frac{-16-6}{-2} = 11 \end{cases}$$

Signo de la función antes del 5: $B(4) = -4^2 + 16 \cdot 4 - 55 = -7 < 0$

Signo de la función entre el 5 y el 11: $B(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 55 = 9 > 0$

Signo de la función después del 11: $B(12) = -12^2 + 16 \cdot 12 - 55 = -7 < 0$

Luego el intervalo donde la función beneficios es positiva es el $[5.11]$

Por lo que debemos fijar el precio de venta entre los valores de 5€ y 11€ para obtener beneficios.

También se puede justificar diciendo que la función beneficio es una parábola invertida y que es positiva entre los puntos de corte con el eje OX.

c) Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo?

Como buscamos un máximo de la función beneficio tenemos que derivar la función e igualar a cero la derivada:

$B'(x) = -2x + 16 = 0 \to \ x = 8$

Para justificar que es máximo calculamos la segunda derivada en el punto crítico calculado:

$B''(x) = -2 \to \ B''(8) = -2 < 0$

Como la segunda derivada es negativa el punto **es un máximo**.

Luego el precio de venta que nos da un beneficio máximo es de 8 €

El beneficio obtenido a ese precio lo hallamos sustituyendo en la función:

$$B(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 55 = 9$$

Si vendemos la caja a 8 € obtenemos un beneficio mensual de 9 €

También se puede buscar el máximo diciendo que la función es una parábola invertida y que, por lo tanto, tiene un máximo en el vértice de la parábola que se sitúa en $x_v = \frac{-b}{2a}$(para nuestro caso sería: $x_v = \frac{-16}{2\cdot(-1)} = 8$)

d) ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece?

La función será creciente si su derivada es positiva y decreciente cuando es negativa. Estudiamos el signo de la derivada antes y después del valor que la hace cero $x = 8$(lo hemos calculado en el apartado anterior)

$$B'(7) = -2 \cdot 7 + 16 = 2 > 0 B'(9) = -2 \cdot 9 + 16 = -2 < 0$$

Luego la función crece en el intervalo]-∞,8[y decrece en el]8,+∞[

Sin embargo, y teniendo en cuenta la naturaleza de la función tenemos dos posibles respuestas:

La función crece en el intervalo [0,8[y decrece a partir del $x = 8$(no tienen sentido precios por unidad negativos)

O bien la función crece en el intervalo [5,8[y decrece en el]8,11] (no tiene sentido comercial vender a precios que generan pérdidas)

Este mismo razonamiento se puede hacer en base a que la función es una parábola invertida y crece antes de su vértice y decrece después del mismo.

Problema 6:

Es un problema de probabilidad. Podemos definir los sucesos de diferentes maneras. Para no liarnos vamos a distinguir entre lo que es el trabajo y lo que dice el programa. Definimos los sucesos de la siguiente manera

O → "Trabajo original" (no es plagio)

O → "Trabajo NO original" (sí es plagio)

C → "El programa dice que es copia" (independientemente de su naturaleza)

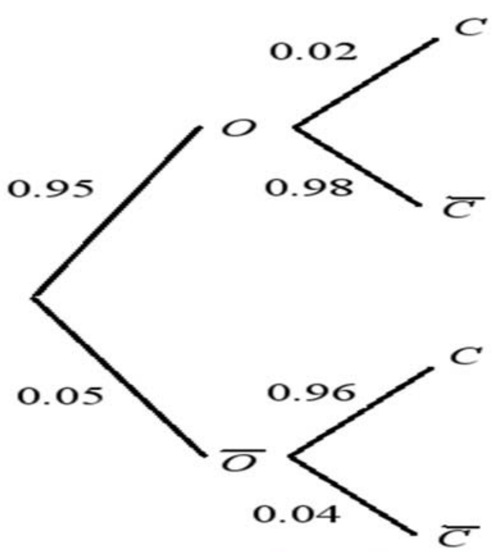
C → "El programa dice que NO es copia" (independientemente de su naturaleza)

En el enunciado nos dan las siguientes probabilidades:

- El 5% de los trabajos no son originales, sino que son plagios. Por lo que tenemos que $P(\overline{O}) = 0.05$
- Por el suceso contrario tenemos que el 95% serán originales por lo que $P(O) = 0.95$
- Si el programa no clasifica correctamente un trabajo plagiado quiere decir que está diciendo que no es copia cuando sí lo es, es decir $P(\overline{C}/\overline{O}) = 0.04$
- Por el suceso contrario podemos deducir que sí clasifica correctamente un trabajo plagiado con una probabilidad de: $P(C/\overline{O}) = 0.96$
- Por último tenemos que nos dicen que la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0.02. Esa probabilidad es: $P(C/O) = 0.02$
- Por el suceso contrario podemos deducir que la probabilidad de que clasifique como no copia un trabajo original es 0.98 → $P(\overline{C}/O) = 0.98$

El problema se puede resolver por tabla de contingencias o por árbol. Yo lo voy a resolver por árbol ya que los datos que tenemos son de condicionadas. Sólo hace falta resolverlo de una forma y los resultados han de ser iguales.

Por diagrama de árbol:



Podemos situar las probabilidades que nos dan como ves en la figura:

Respondemos a las cuestiones:

a) Calcula la probabilidad de que un trabajo final, elegido al azar, sea clasificado como plagio por el programa informático.

Nos preguntan por $P(C)$aplicando el teorema de la probabilidad total tenemos que la probabilidad del suceso será la suma de las probabilidades que nos llevan a él, es decir:

$$P(C) = P(O \cap C) + P(\overline{O} \cap C) = P(O) \cdot P(C/O) + P(\overline{O}) \cdot P(C/\overline{O}) = 0.95 \cdot 0.02 + 0.05 \cdot 0.96 = 0.067 = 6.7\%$$

b) Un trabajo es inspeccionado por el programa informático y es clasificado como original. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio?

Aquí nos dicen que el programa ya lo ha clasificado como original por lo que estamos ante probabilidad a posteriori y utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(\overline{O}/\overline{C}) = \frac{P(\overline{O} \cap \overline{C})}{P(\overline{C})}$$

Calculamos las probabilidades requeridas:

$$P(\overline{O} \cap \overline{C}) = P(\overline{O}) \cdot P(\overline{C}/\overline{O}) = 0.05 \cdot 0.04 = 0.002$$

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0.067 = 0.933$$

$$P(\overline{O}/\overline{C}) = \frac{P(\overline{O} \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{0.002}{0.933} \simeq 0.0021 = 0.21\%$$

c) ¿Qué porcentaje de trabajos finales son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa?

Al aparecer la conjunción “y” nos tenemos que dar cuenta que nos están pidiendo una intersección. La probabilidad pedida es $P(\overline{O} \cap C)$

$$P(\overline{O} \cap C) = P(\overline{O}) \cdot P(C/\overline{O}) = 0.05 \cdot 0.96 = 0.048 = 4.8\%$$

<table>
<tr><td>GENERALITAT VALENCIANA</td><td>EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL
CURSO: 2019–2020
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II</td><td>CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE</td></tr>
<tr><td colspan="3">BAREMO DEL EXAMEN: Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se uti-</td></tr>
</table>

lice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1:

Una fábrica de juguetes artesanales produce camiones, marionetas y rompecabezas de madera. Para fabricar un camión necesita dos kilos de madera y tres horas de trabajo, mientras que para una marioneta necesita quinientos gramos de madera y cuatro horas de trabajo. En el caso de los rompecabezas necesita ochocientos gramos de madera y tres horas y media de trabajo para producir uno. Durante una semana, la empresa ha puesto en el mercado 89 juguetes utilizando exactamente 91 kilos de madera y 313 horas de trabajo. Determina el número de camiones, de marionetas y de rompecabezas producidos.

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Problema 2:

Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (2 puntos)

Problema 3:

De dos sucesos A y B se sabe que satisfacen que $P(A)$=0,4, $P(A \cup B)$=0,8 y $P(A^C \cup B^C)$=0,7, donde A^C y B^C representan los sucesos complementarios de los sucesos A y B, respectivamente. Se pide:

a) ¿Son independientes los sucesos A y B? (2,5 puntos)

b) La probabilidad de que solo se verifique uno de los sucesos. (2,5 puntos)

c) La probabilidad de que se verifique el suceso B^c. (2,5 puntos)

d) La probabilidad de que se verifique el suceso A^c/B. (2,5 puntos)

Problema 4:

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

se pide:

a) Calcula $(AB)^{-1}$. (4 puntos)

b) Calcula C+AB. (2 puntos)

c) ¿Son iguales las matrices C^{-1}+$(AB)^{-1}$ y $(C+AB)^{-1}$? (4 puntos)

Problema 5:

Una tienda de alquiler de bicicletas dispone mensualmente de 350 bicicletas. Haciendo un estudio entre los ingresos y los costes de explotación se ha determinado que los beneficios mensuales, en euros, se ajustan a la función

$$f(x) = 350x - x^2 - 15000,$$

siendo x el número de bicicletas alquiladas en un mes.

a) Calcula el número de bicicletas que hay que alquilar cada mes para obtener un beneficio máximo.

(3 puntos)

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (2 puntos)

c) Determina a partir de qué cantidad de bicicletas alquiladas el taller obtiene beneficios. (2,5 puntos)

d) ¿Puede tener pérdidas a pesar de alquilar una cantidad mayor de bicicletas que la obtenida en el apartado anterior? (2,5 puntos)

Problema 6:

En una determinada ciudad, se sabe que el 80% de los hogares están formados por más de una persona. Se sabe también que el 30% de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal Panoramix. Por último, se sabe que el 20% de los hogares están formados por más de una persona y están suscritos al canal Panoramix. Seleccionamos al azar un hogar de esta ciudad.

a) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado no esté suscrito al canal Panoramix.

b) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado esté formado por una única persona y también esté suscrito al canal Panoramix.

c) Si sabemos que el hogar seleccionado está formado por una única persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito al canal Panoramix?

d) Si sabemos que el hogar seleccionado está suscrito al canal Panoramix, ¿cuál es la probabilidad de que esté formado por más de una persona?

(Cada apartado puntúa 2,5 puntos)

RESPUESTAS

Problema 1:

Aunque está planteado para parecer un problema de programación lineal es de sistema de ecuaciones. Hay que fijarse que son tres incógnitas y que se emplean **exactamente** los kilos de madera y las horas de trabajo.

Como hay que determinar el número de camiones, de marionetas y de rompecabezas producidos las incógnitas son:

x - “número de camiones”

y - "número de marionetas"

z - "número de rompecabezas"

Como el total de juguetes producidos fue de 89 la suma de las tres cantidades ha de ser la cantidad total:

$$x + y + z = 89$$

Nos dicen que se utilizaron exactamente 91 kilos de madera. Producir un camión necesita 2 kilos de madera por lo que para producir x necesitaremos $2x$ kilos. Producir una marioneta necesita 0.5 kilos de madera por lo que para producir y necesitaremos $0.5y$ kilos. Producir un rompecabezas necesita 0.8 kilos de madera por lo que para producir z necesitaremos $0.8z$ kilos. Sumando las tres cantidades debemos obtener el total de madera utilizada:

$$2x + 0.5y + 0.8z = 91$$

Finalmente nos dicen que se utilizaron exactamente 313 horas de trabajo. Producir un camión necesita 3 horas de trabajo por lo que para producir x necesitaremos $3x$ horas. Producir una marioneta necesita 4 horas de trabajo por lo que para producir y necesitaremos $4y$ horas. Producir un rompecabezas necesita 3.5 horas de trabajo por lo que para producir z necesitaremos $3.5z$ horas. Sumando las tres cantidades debemos obtener el total de horas utilizadas:

$$3x + 4y + 3.5z = 313$$

Si juntamos las tres ecuaciones tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 89 \\ 2x + 0.5y + 0.8z = 91 \\ 3x + 4y + 3.5z = 313 \end{cases}$$

La resolución del mismo la podemos hacer por Gauss o Cramer (sólo por un método) yo lo voy a hacer aquí por ambos:

Por Gauss tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 89 \\ 2 & 0.5 & 0.8 & : & 91 \\ 3 & 4 & 3.5 & : & 313 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 89 \\ 0 & -1.5 & -1.2 & : & -87 \\ 0 & 1 & 0.5 & : & 46 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 89 \\ 0 & -1.5 & -1.2 & : & -87 \\ 0 & 0 & -0.45 & : & -18 \end{pmatrix}$$

$F_2 = F_2 - 2F_1$ $\quad$ $F_3 = 1.5F_3 + F_2$

$F_3 = F_3 - 3F_1$

De la última ecuación tenemos que: $-0.45z = -18 \rightarrow z = \frac{-18}{-0.45} = 40$

Con ese valor vamos a la segunda ecuación y tenemos que:

$-1.5y - 1.2 \cdot 40 = -87 \rightarrow -1.5y - 48 = -87 \rightarrow -1.5y = -39 \rightarrow y = 26$

Con ambos valores en la primera ecuación: $x + 26 + 40 = 89 \rightarrow x + 66 = 89 \rightarrow x = 23$

Por lo tanto, los juguetes producidos fueron: cantidades invertidas fueron: 23 camiones, 26 marionetas y 40 rompecabezas.

Ahora lo resolvemos por Cramer. El sistema es de Cramer si tiene las mismas ecuaciones que incógnitas (que lo cumple) y si el determinante de la matriz de los coeficientes es diferente de cero:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0.5 & 0.8 \\ 3 & 4 & 3.5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0.5 \cdot 3.5 + 1 \cdot 0.8 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 0.5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 3.5 - 1 \cdot 4 \cdot 0.8 = 0.45 \neq 0$$

Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 89 & 1 & 1 \\ 91 & 0.5 & 0.8 \\ 313 & 4 & 3.5 \end{vmatrix}}{0.45} = \frac{89 \cdot 0.5 \cdot 3.5 + 1 \cdot 0.8 \cdot 313 + 1 \cdot 91 \cdot 4 - 1 \cdot 0.5 \cdot 313 - 1 \cdot 91 \cdot 3.5 - 4 \cdot 0.8 \cdot 89}{0.45} = 23$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 89 & 1 \\ 2 & 91 & 0.8 \\ 3 & 313 & 3.5 \end{vmatrix}}{0.45} = \frac{1 \cdot 91 \cdot 3.5 + 89 \cdot 0.8 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 313 - 1 \cdot 91 \cdot 3 - 2 \cdot 89 \cdot 3.5 - 1 \cdot 0.8 \cdot 313}{0.45} = 26$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 89 \\ 2 & 0.5 & 91 \\ 3 & 4 & 313 \end{vmatrix}}{0.45} = \frac{1 \cdot 0.5 \cdot 313 + 1 \cdot 91 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 89 - 3 \cdot 0.5 \cdot 89 - 2 \cdot 1 \cdot 313 - 1 \cdot 4 \cdot 91}{0.45} = 40$$

Lógicamente es el mismo resultado que por el método anterior (sólo hay que hacer uno de los dos)

Problema 2:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función polinómica racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$por lo que no existe en ese punto.

El **dominio** será: $Domf(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x) = 0$:

$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = 0$por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$x^2 = 0 \rightarrow x = 0$por lo que la función **CORTA al eje OX en** $(0,0)$**.**

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de *f(x)* cuando $x = 0$:

$f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0$por lo que es el punto $(0,0)$

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$luego **NO tiene asíntota horizontal**.

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos uno: $x = 1$, calculamos el límite:

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{0}\right) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty \end{cases}$ por lo que$x = 1$es asíntota vertical

No lo pide pero por el tipo de función y los grados de los polinomios que intervienen (grado 2 partido grado 1) podemos suponer que tiene una **asíntota oblicua**. Para hallarla basta con realizar la división:

$\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$por lo que la recta $f(x) = x + 1$es asíntota oblicua.

Otra forma de calcularla es suponer que la ecuación de la asíntota es $y = mx + n$y calcular los coeficientes con los límites:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$$

$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^2+x}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$por lo que la asíntota oblicua es: $f(x) = x + 1$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

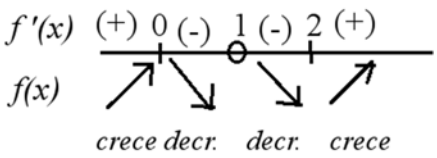
Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0$$

Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 2$ por lo que tiene dos posibles puntos críticos.

Estos puntos son los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Con estos puntos y las discontinuidades del dominio $x = 1$ estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores con-



siderados.

Los valores calculados para establecer el signo han sido:

$$f'(-1) \simeq 0.75 > 0$$
$$f'(0.5) = -3 < 0$$
$$f'(1.5) \simeq -3 < 0$$
$$f'(2.5) \simeq 0.55 > 0$$

Por lo que tenemos que la función crece en]-∞,0[U]2,+∞[

Decrece en]0,1[U]1,2[

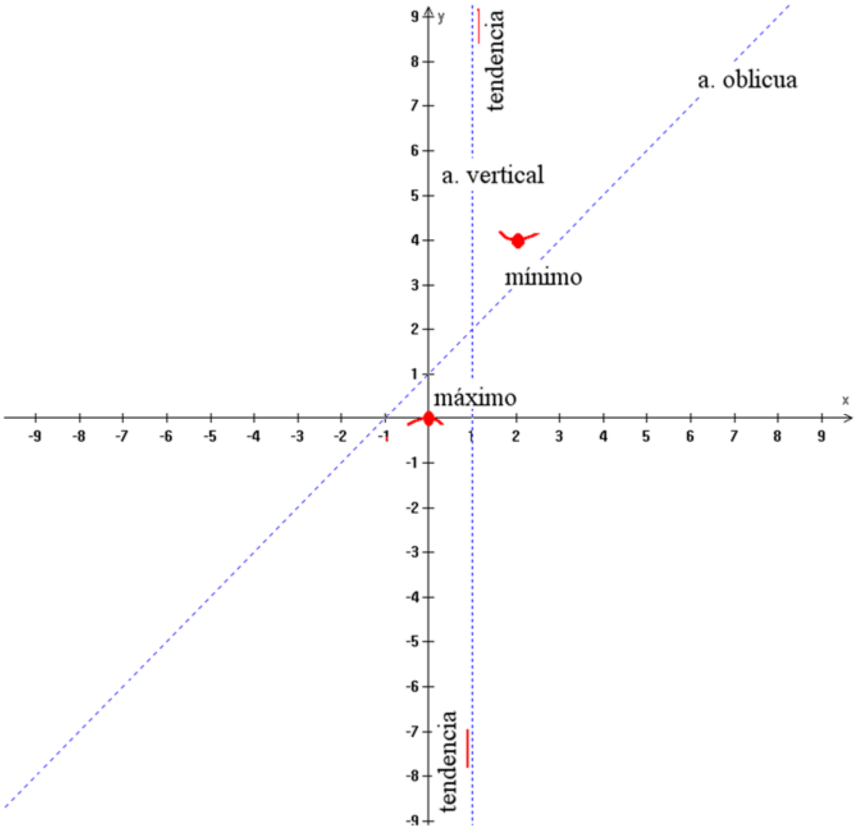
d) Los máximos y mínimos locales.

Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un máximo en el punto de abscisa $x = 0 \rightarrow (0,0)$ (hemos calculado $f(0)$) y un mínimo en el punto de abscisa $x = 2 \rightarrow (2,4)$ (hemos calculado $f(2)$)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores**.**

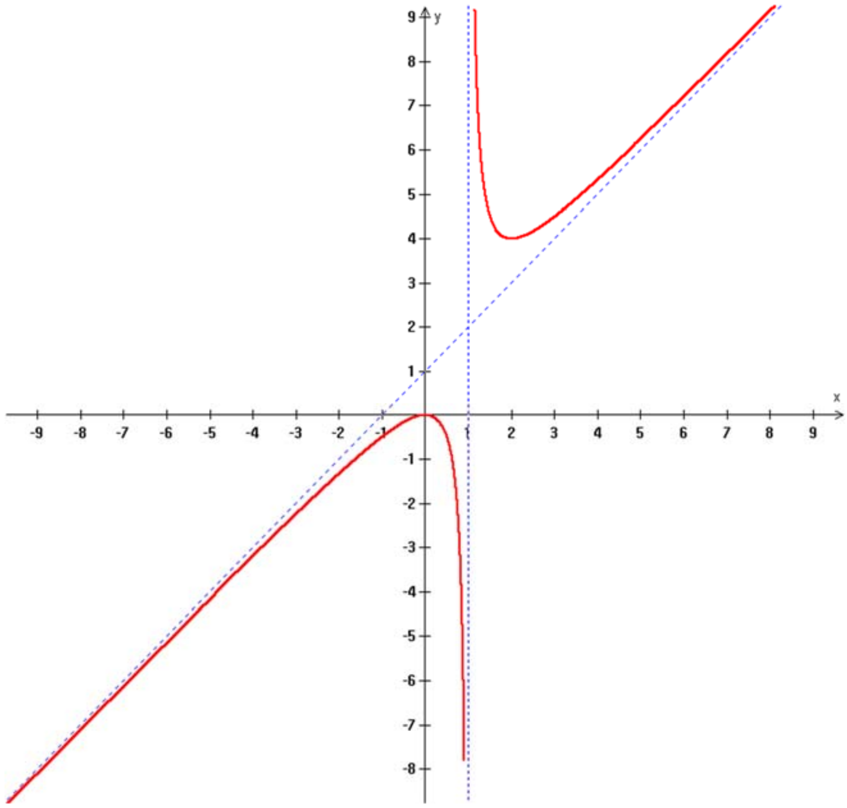
Dibujamos el punto de corte $(0,0)$, el mínimo, el máximo, la asíntota vertical en $x = 1$ (con sus tendencias a infinito) y yo voy a dibujar también la oblicua para que se compruebe su utilidad a la hora de una buena representación, obtenemos:

Autor: Pedro Podadera Sánchez



La gráfica queda así:

Autor: Pedro Podadera Sánchez



Problema 3:

Es un problema de probabilidad de álgebra de sucesos. En el enunciado utiliza "suceso complementario" que muchas veces se llama también "contrario" y se denota por un suprarrayado.

a) ¿Son independientes los sucesos A y B?

Para saber si dos sucesos son independientes tenemos que demostrar que:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

O bien que: $P(A/B) = P(A)$

En el enunciado tenemos $P(A^C \cup B^C) = 0.7$utilizando las leyes de Morgan sabemos que:

$$P(A^C \cup B^C) = P((A \cap B)^C) = 0.7$$

Por el suceso contrario tenemos que: $P(A \cap B) = 1 - P((A \cap B)^C) = 1 - 0.7 = 0.3$

La probabilidad de la unión de dos sucesos es: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Sustituyendo valores: $0.8 = 0.4 + P(B) - 0.3 \rightarrow P(B) = 0.7$

Queríamos demostrar que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow 0.3 \neq 0.4 \cdot 0.7 = 0.28$luego NO son independientes

b) La probabilidad de que solo se verifique uno de los sucesos.

Vamos a utilizar la probabilidad de la diferencia de sucesos:

Si sólo se verifica el suceso A tenemos que calcular:

$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.3 = 0.1$

Si sólo se verifica el suceso B tenemos que calcular:

$P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.3 = 0.4$

Sumando ambas probabilidades tenemos la que buscamos:

$P(A-B) + P(B-A) = 0.4 + 0.1 = 0.5 = 50\%$

c) La probabilidad de que se verifique el suceso B^C .

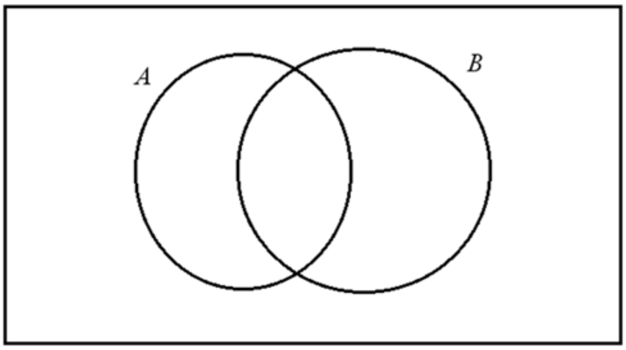
Por el suceso contrario sería: $P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 0.7 = 0.3 = 30\%$

d) La probabilidad de que se verifique el suceso A^C/B.

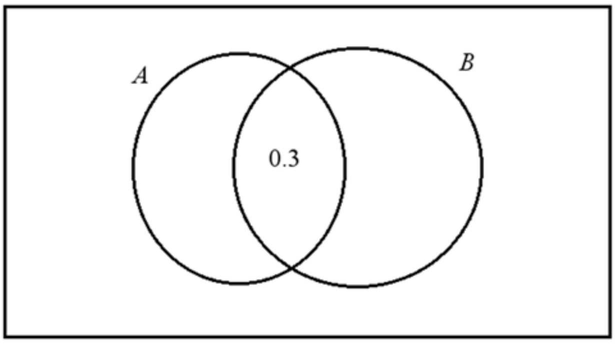
Utilizando la definición de condicionada sabemos que:

$P(A^C/B) = \frac{P(A^C \cap B)}{P(B)}$

Para calcular $P(A^C \cap B)$podemos utilizar un diagrama de Venn para dos sucesos:



Partimos de la intersección de ambos que hemos calculado antes:$P(A \cap B) = 0.3$y la situamos:

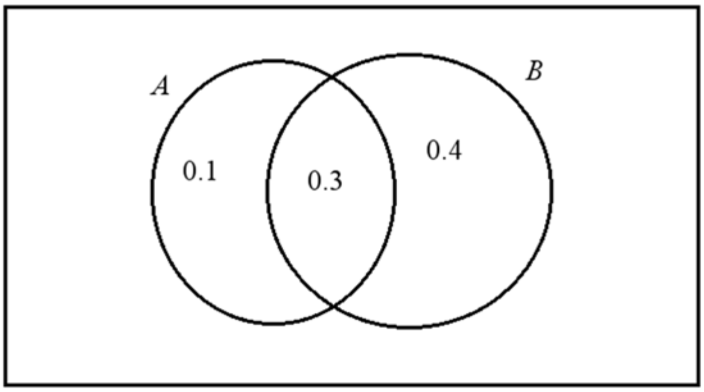


Como la probabilidad de A es 0.4 la parte del círculo A que no es la intersección valdrá:

$0.4 - 0.3 = 0.1$

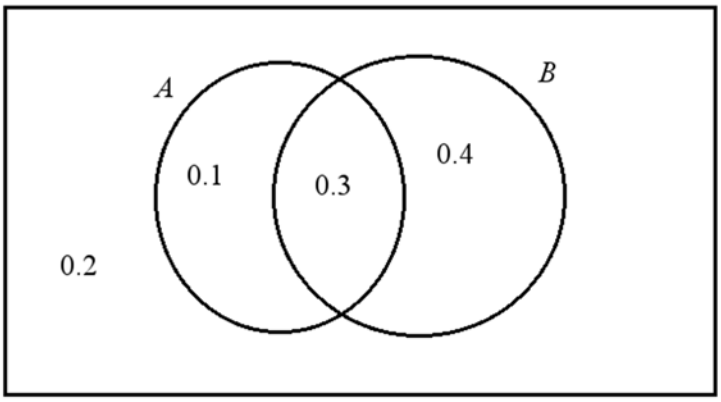
Como la probabilidad de B es 0.7 la parte del círculo B que no es la intersección valdrá:

$0.7 - 0.3 = 0.4$

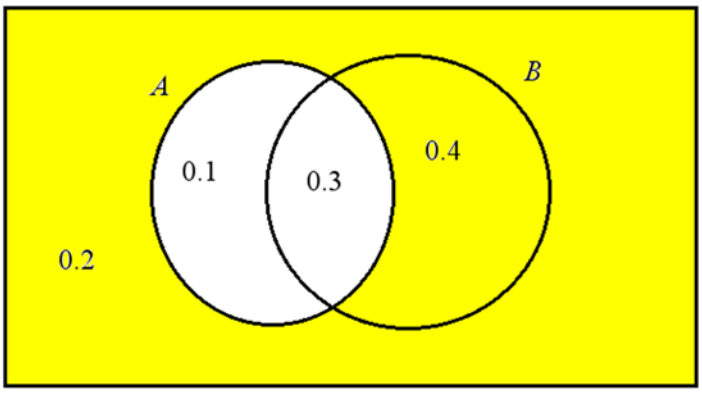


Situamos ambas en el diagrama:

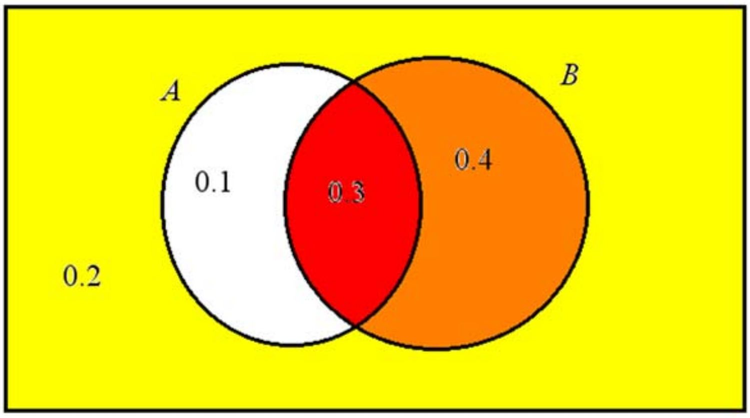
Si sumamos todas las probabilidades tenemos que: $0.3 + 0.4 + 0.1 = 0.8$por lo que la zona de fuera de los círculos es: $1 - 0.8 = 0.2$. Situándolo en el diagrama tenemos que:



Vamos a calcular: $P(A^C \cap B)$Pintamos A^C de amarillo:



Si pintamos ahora B de rojo tenemos que la zona que queda naranja (pintada dos veces) es la probabilidad buscada (la intersección)



Por lo tanto: $P(A^C \cap B) = 0.4$

Queremos calcular: $P(A^C/B) = \frac{P(A^C \cap B)}{P(B)} = \frac{0.4}{0.7} = \frac{4}{7} \simeq 0.5714 = 57.14\%$

Problema 4:

a) Calcula $(AB)^{-1}$

Tenemos que calcular el producto y después la inversa del resultado.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la inversa lo podemos hacer por la definición, Gauss o determinantes. Sólo hay que hacerlo de una forma. Yo lo voy a calcular aquí por Gauss y determinantes:

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \Leftrightarrow F_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1 = F_1 - F_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1 = F_1/(-1)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Luego la inversa es: $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Podemos comprobar el resultado aplicando que el producto de una matriz por su inversa es la identidad: $(AB)^{-1} \cdot (AB) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ahora la calculamos por determinantes (sólo hay que hacerlo de una forma). Aplicamos la fórmula por adjuntos:

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|(AB)|} \left(Adj(AB)\right)^t$$

Calculamos el determinante: $|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 1$luego $\exists (AB)^{-1}$

Aplicamos la fórmula (al ser de dimensión 2 los adjuntos son números)

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El resultado es, lógicamente, el mismo que el anterior.

b) Calcula $C+AB$.

Del apartado anterior sabemos que:$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ por lo que la operación planteada es:

$$C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1}+(AB)^{-1}$ y $(C+AB)^{-1}$? (4 puntos)

Para comprobarlo podemos hacer todos los cálculos que nos dicen o bien podemos fijarnos un poco y utilizar algunas propiedades de las matrices. Por el resultado del apartado a) debemos de fijarnos en que $C=(AB)^{-1}$

Por lo tanto $C^{-1}=((AB)^{-1})^{-1}=AB$

Con lo cual: $C^{-1}+(AB)^{-1}=AB+(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$

Por otro lado tenemos que calcular: $(C+AB)^{-1}$

Por el apartado b) tenemos que $C+AB=I$ por lo que $(C+AB)^{-1}=I^{-1}$

Como la inversa de la identidad es la misma identidad: $(C+AB)^{-1}=I^{-1}=I$

Por lo tanto ambas matrices son iguales a la identidad:

$$C^{-1}+(AB)^{-1}=I=(C+AB)^{-1}$$

Problema 5:

a) Calcula el número de bicicletas que hay que alquilar cada mes para obtener un beneficio máximo.

Tenemos que buscar un máximo a la función beneficios. Para ello se deriva la función y se iguala a cero la derivada:

$f(x) = 350x - x^2 - 15000 \rightarrow f'(x) = 350 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{350}{2} = 175$

Para comprobar que es máximo hacemos la segunda derivada y sustituimos el valor hallado:

$f''(x) = -2 \rightarrow f''(175) = -2 < 0$por lo que se trata de un **máximo**.

Por lo cual, para obtener un beneficio mensual máximo hay que alquilar 175 bicicletas.

El apartado también se puede resolver razonando que la función beneficios es una parábola cóncava (con el vértice hacia arriba) por lo que presenta un máximo en dicho vértice y cuya abscisa se calcula con la fórmula $x = \frac{-b}{2a}$

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Para hallarlo sustituimos el valor hallado en la función beneficio:

$f(x) = 350x - x^2 - 15000 \rightarrow f(175) = 350 \cdot 175 - 175^2 - 15000 = 15625$

Por lo que el máximo beneficio es de 15625 €

c) Determina a partir de qué cantidad de bicicletas alquiladas el taller obtiene beneficios.

Vamos a calcular los ceros de la función, es decir, cuando obtiene beneficio cero:

$$f(x) = 350x - x^2 - 15000 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-350 \pm \sqrt{350^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-15000)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-350 \pm 250}{-2} = \begin{cases} \frac{-350 \pm 250}{-2} = \frac{-100}{-2} = 50 \\ \frac{-350 \pm 250}{-2} = \frac{-600}{-2} = 300 \end{cases}$$

Como es una función continua (es una parábola) vamos a comprobar el signo de la misma antes y después de los ceros:

$$f(0) = 350 \cdot 0 - 0^2 - 15000 = -15000 < 0$$

$$f(60) = 350 \cdot 60 - 60^2 - 15000 = 2400 > 0$$

$$f(310) = 350 \cdot 310 - 310^2 - 15000 = -2600 < 0$$

Eso implica que:

En el intervalo $[0,50]$la función beneficio es negativa por lo que **tiene pérdidas**.

En el intervalo $[50{,}300]$la función beneficio es positiva por lo que **tiene beneficios**.

En el intervalo $[300, +\infty[$ la función beneficio es negativa por lo que **tiene pérdidas**.

Podemos afirmar que, a partir de 50 bicicletas, la empresa obtiene beneficios.

El apartado también se puede resolver razonando que la función beneficios es una parábola cóncava (con el vértice hacia arriba) por lo que entre los puntos de corte con el eje de abscisas es positiva y en el resto negativa.

d) ¿Puede tener pérdidas a pesar de alquilar una cantidad mayor de bicicletas que la obtenida en el apartado anterior?

Este apartado lo hemos contestado en el anterior ya que hemos demostrado que en el intervalo $[300, +\infty[$ la función beneficio es negativa por lo que **tiene pérdidas**.

Así podemos afirmar que si la empresa alquila más de 300 bicicletas podrá tener pérdidas.

Problema 6:

Es un problema de probabilidad. Tenemos que definir los sucesos yo he optado por estas letras:

U – Hogar unifamiliar (formado por una persona)

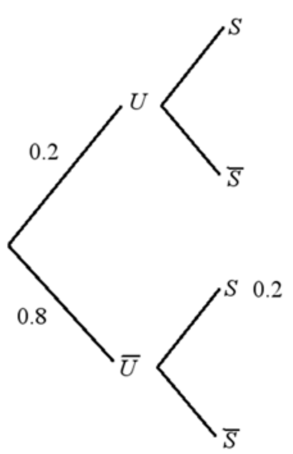
U – Hogar NO unifamiliar (formado por varias personas)

S – Suscritos al canal Panoramix

S – No suscritos al canal Panoramix

A partir de la definición de los sucesos vamos a ver qué probabilidades nos dan en el enunciado:

- El 80% de los hogares están formados por más de una persona eso quiere decir que:
$$P(\overline{U}) = 0.8$$
- Podemos deducir, por el suceso contrario u opuesto, que:
$$P(U) = 1 - P(\overline{U}) = 1 - 0.8 = 0.2$$
- El 30% de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal Panoramix por lo que:
$$P(S) = 0.3$$
- Podemos deducir, por el suceso contrario u opuesto, que:
$$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0.3 = 0.7$$
- Por último, se sabe que el 20% de los hogares están formados por más de una persona y están suscritos al canal Panoramix. Esta es una intersección (aparece la “y”) por lo que la probabilidad que nos dan es:
$$P(\overline{U} \cap S) = 0.2$$



Vamos a situar todas esta probabilidades en un árbol:

Fijémonos en que no podemos utilizar aún el dato de la suscripción, tal y como hemos elaborado el árbol. Vamos a intentar terminar de poner las probabilidades que nos faltan:

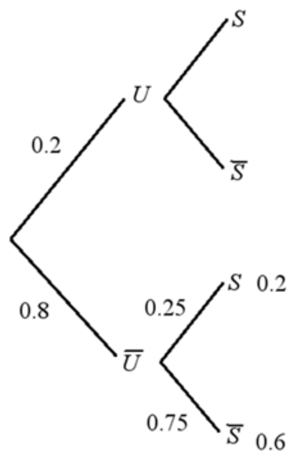
$$P(S/\overline{U}) = \frac{P(\overline{U} \cap S)}{P(\overline{U})} = \frac{0.2}{0.8} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

Por otro lado, como la suma de las probabilidades de un nudo ha de ser 1, tenemos que:

$$P(\overline{S}/\overline{U}) = 1 - 0.25 = 0.75$$

Una vez tenemos la condicionada es fácil sacar la intersección:

$$P(\overline{U} \cap \overline{S}) = P(\overline{U}) \cdot P(\overline{S}/\overline{U}) = 0.8 \cdot 0.75 = 0.6 = 60\%$$



Con esto tenemos toda una rama completa:

Para completar el árbol utilizamos la Probabilidad total. Sabemos que el el 30% de los hogares de esa ciudad están suscritos al canal Panoramix. Por lo que:

$$P(S) = P(S \cap U) + P(S \cap \overline{U}) \rightarrow 0.3 = P(S \cap U) + 0.2 \rightarrow P(S \cap U) = 0.1$$

Como la suma de todas las probabilidades al final del árbol ha de ser la unidad (suceso seguro tenemos que:

$$P(U \cap \overline{S}) = 1 - 0.6 - 0.2 - 0.1 = 0.1$$

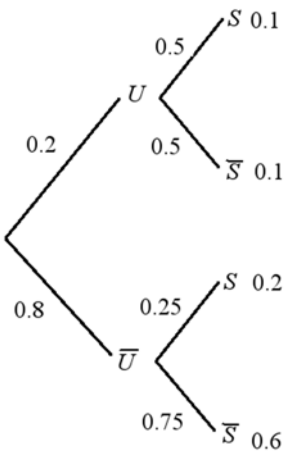
Con esas dos probabilidades podemos deducir las condicionadas correspondientes y acabar nuestro árbol:

$$P(S/U) = \frac{P(S \cap U)}{P(U)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

$$P(\overline{S}/U) = \frac{P(\overline{S} \cap U)}{P(U)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

Nuestro árbol completo es:

Autor: Pedro Podadera Sánchez
www.apuntesmareaverde.org.es



Ahora podemos contestar a las cuestiones planteadas.

a) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado no esté suscrito al canal Panoramix.

La hemos calculado en la introducción del ejercicio:

Por el suceso contrario u opuesto, tenemos que:

$$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0.3 = 0.7 = 70\%$$

b) Calcula la probabilidad de que el hogar seleccionado esté formado por una única persona y también esté suscrito al canal Panoramix.

Nos preguntan por la intersección:$P(U \cap S)$

Lo podemos leer directamente del árbol:$P(U \cap S) = 0.1 = 10\%$

c) Si sabemos que el hogar seleccionado está formado por una única persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté suscrito al canal Panoramix?

Se trata de probabilidad a posteriori por lo que utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(S/U) = \frac{P(S \cap U)}{P(U)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5 = 50\%$$

d) Si sabemos que el hogar seleccionado está suscrito al canal Panoramix, ¿cuál es la probabilidad de que esté formado por más de una persona?

Se trata de probabilidad a posteriori por lo que utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(\overline{U}/S) = \frac{P(\overline{U} \cap S)}{P(S)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3} \simeq 0.6667 = 66.67\%$$

Otras webs con problemas de Selectividad resueltos

En la web puedes encontrar muchos problemas resueltos de los propuestos en selectividad.

https://www.ebaumatematicas.com/

El objetivo de esta página web es ser una herramienta para dar fácil y rápido acceso a los exámenes EBAU de matemáticas II y matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II de todas las comunidades autónomas de España realizados los últimos años: 2017, 2018, 2019.

Aparecen los exámenes oficiales de la comisión organizadora de cada comunidad y dichos exámenes resueltos, a veces, de distintas maneras.

La resolución de los exámenes ha sido labor de Juan Antonio Martínez García, Juan Carlos Alonso Gianonatti, Germán Jesús Rubio Luna, Segundo Pérez, Julio García Galavis, Enrique Castaños García, Antonio Cascales Vicente, Jesus y José María Amorena Erdozáin..

Agradezco la generosa e importante aportación de cada uno de ellos.

Cuando la comisión organizadora de las pruebas EBAU ofrece la resolución o soluciones de las pruebas también se adjuntan esos archivos oficiales.

Tienen la intención de ser una web dinámica e ir creciendo poco a poco, y se agradecen aportaciones para corregir o añadir algún examen que falte en nuestra abundante oferta.

Solo aparecen los exámenes a partir del 2017, año en que se implantó la LOMCE y cambiaron los contenidos de las pruebas.

De distinta autores y de diferentes institutos, con enunciado y problemas resueltos de varios años.

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Con exámenes resueltos de Navarra

http://multiblog.educacion.navarra.es/jamorena/files/2019/09/Examen-ordinario-de-2019.pdf

Con exámenes resueltos de Andalucía

http://matestube.blogspot.com/2019/06/2-bachillerato-examen-matematicas-ii.html

Con exámenes resueltos de Andalucía

https://www.emestrada.org/2019-septiembre-examen-selectividad-matematicas-andalucia/

Con exámenes resueltos de Cataluña
http://universitats.gencat.cat/ca/pau/model_examens/

Autor: Isaac Musat. Problemas de la Comunidad de Madrid. Sólo enunciados, pero de muchos años. Organizados por materias.
http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
Del mismo autor. Problemas resueltos de Madrid y Valencia. Los del año 2019 a partir de la página 503.
http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

Centro aragonés de Tecnologías para la educación
http://catedu.es/matematicas_mundo/PAU/PAU.htm

Exámenes de Selectividad de Extremadura resueltos. De autor: Vicente González Valle. Organizados por materias: Análisis, Álgebra, Geometría y Probabilidad y Estadística
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf

Autor: Pedro Reina. Exámenes de selectividad resueltos de la Comunidad de Madrid hasta el año 2015
http://pedroreina.net/pau/

Página de Orientación Andújar con exámenes resueltos hasta el año 2011.
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/

Selectividad de la Comunidad de Madrid hasta el 2015
http://www.ejerciciosmatematicas.net/selectividad/

Autor: Segundo Pérez. Selectividad en la comunidad valenciana hasta el 2019
http://www.segundoperez.es/

Selectividad del País Vasco hasta el 2019.
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

Varias comunidades, varios exámenes resueltos
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-
tic/18008841a/helvia/aula/archivos/repositorio/0/117/html/selectividadmatematicas/index.html

Vídeos con las soluciones de exámenes
https://www.youtube.com/watch?v=DJFSsrvY1BM

Las universidades en ocasiones editan las soluciones de los problemas que se han propuesto.

SELECTIVIDAD 2020

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

ÍNDICE