Matemáticas II

Selectividad 2021

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Ismael Montero Penido

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención del resultado deben estar suficientemente justificados.

BLOQUE A

Problema 1:

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x)=\frac{ax^2+bx+2}{x-1}$ (para $x\neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $P(1,1)$ y tiene pendiente 2. Calcula los valores de a y b.

Problema 2:

Sea la función continua $f: R\to R$ definida por $f(x)=\begin{cases}(3x-6)e^x & si\ x\le 0\\ \frac{36(sen\,x-ax)}{x^3} & si\ x>0\end{cases}$.

$a)$ Calcula el valor de a.

$b)$ Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto que tiene por abscisa $x=-1$.

Problema 3:

Considera la función continua $f: R\to R$ definida por $f(x)=4x^3-x^4$.

$a)$ Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

$b)$ Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.

Problema 4:

Considera la función $F:[0,+\infty)\to R$ definida por $F(x)=\int_0^x\left(2t+\sqrt{t}\right)\cdot dt$. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x=1$.

BLOQUE B

Problema 5:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}mx+2y-z=1\\ 5x-4y+2z=0\\ x+3my=m+2/5\end{cases}$.

$a)$ Discute el sistema según los valores de m.

$b)$ Resuelve el sistema para $m=0$. ¿Hay alguna solución en la que $x=0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Problema 6:

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. ¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Problema 7:

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x-3y+z-2=0 \\ -3x+2y+2z+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$.

$a)$ Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1,0,-5)$.

$b)$ Calcula el seno del ángulo que forma r con el plano $\pi \equiv -2x+y+2z=0$.

Problema 8:

La recta $r \equiv \frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-3}{3}$ y la recta s, que pasa por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(a,1,0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

BLOQUE A

Problema 1:

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{ax^2+bx+2}{x-1}$ (para $x \neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $P(1,1)$ y tiene pendiente 2. Calcula los valores de a y b.

Solución:

$f(x)$ tiene una asíntota oblicua en una recta $y = mx + n$, que cumple las siguientes condiciones:

Pasa por el punto $(1,1)$, es decir, $\boxed{y(1) = 1}$

Tiene pendiente 2, es decir, $\boxed{m = 2}$

Sabiendo que $y(1) = m + n = 1 \overset{m=2}{\Longrightarrow} 2 + n = 1 \Longrightarrow \boxed{n = -1}$

Luego la asíntota oblicua de la función es $y = 2x - 1$

Por otro lado, se sabe que $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - n)$. Por tanto:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+2}{x^2-x} = a = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+bx+2}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+bx+2-2x^2+2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2+b)x+2}{x-1} = 2 + b = -1 \Longrightarrow b = -3$$

Luego, $\boxed{\boldsymbol{a = 2}}$ y $\boxed{\boldsymbol{b = -3}}$

Problema 2:

Sea la función continua $f: R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} (3x-6)e^x & si\ x \le 0 \\ \frac{36(sen\,x - ax)}{x^3} & si\ x > 0 \end{cases}$.

$a)$ Calcula el valor de a.

$b)$ Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto que tiene por abscisa $x = -1$.

Solución:

a) Vamos a imponer la condición de continuidad en el punto de ruptura $x = 0$

$f(0) = -6$

$\lim\limits_{x\to 0^-} (3x-6)e^x = -6$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{36(sen(x)-ax)}{x^3} = \frac{0}{0} = indeterminación$

Aplicamos la regla de L'Hôpital

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{36(cos(x)-a)}{3x^2} = \frac{36(1-a)}{0}$.

El límite tiene que ser finito, por tanto $1 - a = 0 \iff \boxed{a = 1}$

Seguimos aplicando la regla de L'Hôpital

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{36(-sen(x))}{6x} = \frac{0}{0} = indeterminación$

Vuelvo a aplicar la regla de L'Hôpital

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{36(-\cos(x))}{6} = -\frac{36}{6} = -6$

En efecto, se observa que, como $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -6$, la función es continua.

Luego, para $\boxed{\boldsymbol{a = 1}}$ la función será continua en $\mathbb{R}$

b) Para hallar la recta tangente a f en $x = -1$, debemos coger el primer trozo de función: $f_1(x) = (3x-6)e^x$, por estar definida en $x \le 0$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = -1$ viene dada por:

$y - f_1(-1) = f_1'(-1)(x+1)$

Derivamos la función:

$f_1'(x) = 3e^x + (3x-6)e^x = e^x(3x-3)$

Hallamos $f_1(-1)$ y $f_1'(-1)$:

$f_1(-1) = -\frac{9}{e}$

$f_1'(-1) = -\frac{6}{e}$

Sustituyendo en la ecuación de la recta tangente obtenemos que:

$$y - \left(-\frac{9}{e}\right) = \left(-\frac{6}{e}\right)(x+1);$$

$$y = -\frac{6}{e}x - \frac{6}{e} - \frac{9}{e}$$

La ecuación de la recta tangente es: $\boxed{y = -\frac{6}{e}x - \frac{15}{e}}$

Problema 3:

Considera la función continua $f: R \to R$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^4$.

$a)$ Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

$b)$ Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.

Solución:

a) Para estudiar la monotonía, hay que estudiar el signo de la derivada.

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3$$

$$f'(x) = 0 \iff 12x^2 - 4x^3 = 0 = 4x^2(3 - x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$+$	$+$	$-$
	$\nearrow$ Crece	$\nearrow$ Crece	$\searrow$ Decrece

Por tanto, la función crece en $(-\infty, 3)$ y decrece en $(3, +\infty)$

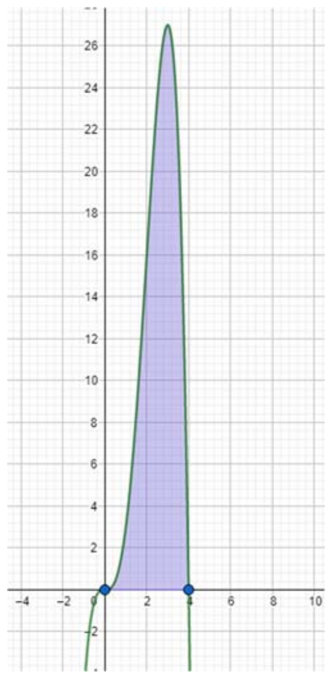
b) Para el esbozo de la gráfica, sería conveniente sacar el punto máximo (aptdo. a) y los puntos de corte con los ejes.

Del apartado anterior, $x = 3$ es un máximo con valor $f(3) = 27$

Calculamos los puntos de corte con el eje OX

$$f(x) = 0 \to x^3(4 - x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son: $O(0,0)$ y $P(4,0)$



Luego el área de la región limitada por la función y el eje de abscisa es:

$$A = \int_0^4 (4x^3 - x^4)\, dx = \left[x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^4 = 4^4 - \frac{4^5}{5} = \frac{256}{5} = 51.2\, u^2$$

Por tanto, el área de la región es $\boxed{\mathbf{51.2\ u^2}}$

Problema 4:

Considera la función $F:[0,+\infty) \to R$ definida por $F(x) = \int_0^x \left(2t+\sqrt{t}\right)\cdot dt$. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto $x = 1$ es:

$$y - F(1) = F'(1)(x-1)$$

Calculamos $F(1)$ y $F'(1)$:

$$F(1) = \int_0^1 \left(2t+\sqrt{t}\right) dt = \left[t^2 + \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_0^1 = \left[t^2 + \frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo de Integral, sabemos que $F'(x) = 2x + \sqrt{x}$, por tanto, $F'(1) = 3$

Luego la ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{5}{3} = 3(x-1);$$

$$y = 3x - 3 + \frac{5}{3};$$

$$y = 3x - \frac{4}{3}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto $x = 1$ es $\boxed{\boldsymbol{y = 3x - \frac{4}{3}}}$

RESPUESTAS BLOQUE B

Problema 5:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx+2y-z=1 \\ 5x-4y+2z=0 \\ x+3my=m+2/5 \end{cases}$.

$a)$ Discute el sistema según los valores de m.

$b)$ Resuelve el sistema para $m=0$. ¿Hay alguna solución en la que $x=0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:

a) Escribimos la matriz ampliada: $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3m & 0 & m+\frac{2}{5} \end{array}\right)$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$|A|=-15m+4-4-6m^2=0 \iff -6m^2-15m=0=-3m(2m+5) \iff \begin{cases} m=0 \\ m=-\frac{5}{2} \end{cases}$

Empezamos la discusión usando el teorema de Rouché – Fröbenius para deducir su clasificación.

CASO 1: Si $m\neq 0\ y\ m\neq -\frac{5}{2} \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow rg(A)=3=rg(A^*)=n^{\underline{o}}\ de\ incógnitas \Longrightarrow$ $Sistema\ compatible\ determinado\ (1\ única\ solución)$

CASO 2: Si $m=-\frac{5}{2} \Longrightarrow |A|=0 \Longrightarrow rg(A)<3$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{5}{2} & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -\frac{15}{2} & 0 & -\frac{21}{10} \end{array}\right)$$

- Calculo el rango de A

  Como $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -\frac{15}{2} & 0 \end{vmatrix}=15\neq 0 \Longrightarrow rg(A)=2$

- Calculo el rango de A^*

  Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -\frac{15}{2} & 0 & -\frac{21}{10} \end{vmatrix}=-\frac{42}{5}+15+\frac{42}{5}=15\neq 0 \Longrightarrow rg(A^*)=3$

Como $rg(A)\neq rg(A^*) \Longrightarrow Sistema\ incompatible\ (no\ tiene\ solución)$

CASO 3: Si $m=0 \Longrightarrow |A|=0 \Longrightarrow rg(A)<3$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2/5 \end{array}\right)$$

- Calculo el rango de A

  Como $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Longrightarrow rg(A) = 2$

- Calculo el rango de A^*

  Como $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \Longrightarrow rg(A^*) = 2$

Como

$$rg(A) = rg(A^*) < nº\ de\ incógnitas \Longrightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado\ (infinitas\ soluciones)$$

Resumiendo:

Si $m \neq 0$ y $m \neq -\frac{5}{2} \Longrightarrow$ Sistema es compatible determinado (única solución)

Si $m = 0 \Longrightarrow$ Sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Si $m = -\frac{5}{2} \Longrightarrow$ Sistema es incompatible (no tiene solución)

b) Para $m = 0$, tendríamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Por lo que $\boxed{x = \frac{2}{5}}$

Sea $\boxed{y = \lambda}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, de la 2º ecuación obtenemos que: $\boxed{z = 2\lambda - 1}$

Comprobamos que la segunda ecuación se verifica para estos tres valores:

$5 \cdot \frac{2}{5} - 4\lambda + 2(2\lambda - 1) = 2 - 4\lambda + 4\lambda - 2 = 0$

Para la segunda parte del apartado, como $x = \frac{2}{5} \neq 0$, no existe ninguna solución en la que la variable x sea nula.

Luego la solución del sistema es $\left(\frac{2}{5}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{2}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{1}\right), \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

No hay solución en la que $x = 0$

Problema 6:

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. ¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Solución:

Sean:
$x = nº\ de\ botellas\ que\ se\ producen\ cada\ hora.$
$y = nº\ de\ garrafas\ que\ se\ producen\ cada\ hora.$
$z = nº\ de\ bidones\ que\ se\ producen\ cada\ hora.$

Una botella necesita 50 gramos de polietileno, lo que equivale a 0.05 kg
Una garrafa necesita 100 gramos de polietileno, lo que equivale a 0.1 kg

Por tanto, el uso del polietileno por cada hora viene dada por la ecuación: $0.05\,x + 0.1\,y + z = 10$
Se debe producir el doble de botellas que de garrafas significa que: $x = 2y \Longrightarrow x - 2y = 0$
Las máquinas producen en total 52 productos cada hora significa que: $x + y + z = 52$

Por tanto, el sistema de ecuaciones que nos queda sería:

$$\begin{cases} 0.05x + 0.1y + z = 10 \\ x - 2y = 0 \\ x + y + z = 52 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera fila por 20 para eliminar decimales:

$$\begin{cases} x + 2y + 20z = 200 \\ x - 2y = 0 \\ x + y + z = 52 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema usando la regla de Cramer:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 20 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 20 + 40 - 2 = 56$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 2 & 20 \\ 0 & -2 & 0 \\ 52 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-400+2080}{56} = \frac{1680}{56} = 30$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 200 & 20 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 52 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1040-200}{56} = \frac{840}{56} = 15$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 200 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 52 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-104+200+400-104}{56} = \frac{392}{56} = 7$$

Por tanto, deben de producirse **30 botellas, 15 garrafas y 7 bidones** cada hora.

Problema 7:

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$.

$a)$ Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1, 0, -5)$.

$b)$ Calcula el seno del ángulo que forma r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$.

Solución:

a) Para calcular un plano perpendicular a la recta s, el vector normal de dicho plano coincide con el vector director de la recta s. Por tanto, $\vec{n} = (-2, 1, 2)$

Teniendo en cuenta que las coordenadas del vector normal son los coeficientes de x, y, z de la ecuación general del plano, tenemos que:

$$-2x + y + 2z + D = 0$$

Como este plano pasa por el punto $P(1, 0, -5)$, sustituyendo obtendríamos el valor del término independiente D:

$-2 - 10 + D = 0;$

$D = 12$

Luego, el plano perpendicular a s y que pasa por P es: $\mathbf{-2x + y + 2z + 12 = 0}$

b) El seno del ángulo entre la recta r y el plano π viene dado por:

$$sen(\widehat{r,\pi}) = \frac{|\overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{d_r}| \cdot |\vec{n}|}$$

donde $\overrightarrow{d_r}$ y $\vec{n}$ son el vector director de la recta r y el vector normal del plano respectivamente.

Calculamos $\overrightarrow{d_r} = (2, -3, 1) \times (-3, 2, 2) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} - 5\vec{k} = (-8, -7, -5)$

El vector normal de π es: $\vec{n} = (-2, 1, 2)$

Luego,

$$sen(\widehat{r,\pi}) = \frac{|\overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{d_r}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|16 - 7 - 10|}{\sqrt{(-8)^2 + (-7)^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{138} \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{3\sqrt{138}}$$

Por tanto, $\boldsymbol{sen(\widehat{r,\pi}) = \frac{1}{3\sqrt{138}}}$

Problema 8:

La recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s, que pasa por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(a,1,0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

Solución:

De la recta r conocemos un punto $A(-3,-4,3)$ y su vector director, $\overrightarrow{d_r} = (2,2,3)$.

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son $\begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = -4 + 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$

De la recta s conocemos los puntos P y Q y su vector director lo hallamos determinando $\overrightarrow{PQ}$

Por tanto, $\overrightarrow{d_s} = (a-1, 1, -2)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta s son $\begin{cases} x = 1 + (a-1)\beta \\ y = \beta \\ z = 2 - 2\beta \end{cases}$

Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} \overrightarrow{d_r} \\ \overrightarrow{d_s} \end{pmatrix}$ y $M^* = \begin{pmatrix} \overrightarrow{d_r} \\ \overrightarrow{d_s} \\ \overrightarrow{AP} \end{pmatrix}$, r y s se cortarán en un punto si $rg(M) = rg(M^*) = 2$

$\overrightarrow{AP} = (4,4,-1)$

Construyo la matriz M y estudio su rango:

$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ a-1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0 \Longrightarrow rg(M) = 2$

Construyo la matriz M^* y estudio su rango:

$M^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ a-1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Esta matriz tendrá rango igual a 2 si $|M^*| = 0$

$|M^*| = -2 + 12a - 12 - 16 - 12 + 16 + 2a - 2 = 14a - 28$

$14a - 28 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

Por tanto, r y s se cortan en un punto si $\boxed{\boldsymbol{a = 2}}$

Para hallar el punto de corte de ambas rectas, igualamos las ecuaciones paramétricas para obtener los valores de λ y β

$$\begin{cases} -3+2\lambda = 1+\beta \\ -4+2\lambda = \beta \\ 3+3\lambda = 2-2\beta \end{cases}$$

Sustituyendo $\beta = -4 + 2\lambda$ en la primera y tercera ecuación, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} -3+2\lambda = 1-4+2\lambda \\ \ 3+3\lambda = 2+8-4\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \text{ (Se verifica la ecuación)} \\ 7\lambda = 7 \end{cases}$$

Por tanto, $\lambda = 1$ y $\beta = -2$

Para sacar el punto de corte, sustituimos λ o β en r o s respectivamente.

$x = -3 + 2 = -1;$

$y = -4 + 2 = -2;$

$z = 3 + 3 = 6$

Por tanto, el punto de corte de r y s es $\mathbf{(-1, -2, 6)}$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención del resultado deben estar suficientemente justificados.

BLOQUE A

Problema 1:

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{a(1-\cos x)+b\cdot sen\, x-2\cdot(e^x-1)}{x^2} = 7$.

Problema 2:

Halla $a > b$ y $b > 0$ sabiendo que la gráfica de la función $f: R \to R$ dada por $f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto $P(1, 2)$ un punto crítico.

Problema 3:

Considera la función continua $f: R \to R$ definida por $f(x) = 1 + \int_0^x t \cdot e^t \cdot dt$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Problema 4:

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ (para $x \neq -1, x \neq 1$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $P(2, 4)$.

BLOQUE B

Problema 5:

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$a)$ Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$.

$b)$ Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica:

$A^4X + B = AC$.

Problema 6:

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

$a)$ Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes de cada ruta. Razona la respuesta.

$b)$ Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta?

Problema 7:

La recta r perpendicular desde el punto $A(1,1,0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

$a)$ Calcula la ecuación del plano π.

$b)$ Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π.

Problema 8:

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 1 \\ z = -3-\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

$a)$ Estudia la posición relativa de r y s.

$b)$ Halla la recta t que corta perpendicularmente a r y a s.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

Problema 1:

Calcula a y b sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a(1-\cos x)+b\cdot sen\, x-2\cdot(e^x-1)}{x^2} = 7$.

Solución:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a(1-cos(x))+bsen(x)-2(e^x-1)}{x^2} = \frac{0}{0} = IND.$

Aplicamos la Regla de L'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{asen(x)+bcos(x)-2e^x}{2x} = \frac{b-2}{0}$

Para que el límite sea finito, es necesario que $b-2=0$, luego $b=2$.

Por tanto:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{asen(x)+2\cos(x)-2e^x}{2x} = \frac{0}{0} = IND.$

Aplicamos la Regla de L'Hôpital.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{acos(x)-2sen(x)-2e^x}{2} = \frac{a-2}{2}$

Para que el límite valga 7, debe de ocurrir que $\frac{a-2}{2} = 7$, luego $a = 16$

Luego, $\boxed{\boldsymbol{a=16}}$ y $\boxed{\boldsymbol{b=2}}$

Problema 2:

Halla $a > b$ y $b > 0$ sabiendo que la gráfica de la función $f: R \to R$ dada por $f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto $P(1,2)$ un punto crítico.

Solución:

Como $f(x)$ tiene en $(1,2)$ un punto crítico, significa que:

$f(1) = 2$

$f'(1) = 0$

Derivamos la función:

$$f'(x) = \frac{2bx\cdot(1+ax^4) - bx^2\cdot 4ax^3}{(1+ax^4)^2} = \frac{2bx + 2bax^5 - 4bax^5}{(1+ax^4)^2} = \frac{2bx - 2bax^5}{(1+ax^4)^2}$$

Aplicamos las condiciones del problema:

- $f(1) = 2 \Leftrightarrow f(1) = \frac{b}{1+a} = 2 \Leftrightarrow b = 2 + 2a$
- $f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = \frac{2b-2ba}{(1+a)^2} = 0 \Leftrightarrow 2b - 2ba = 0 \Leftrightarrow 2b(1-a) = 0 \Leftrightarrow 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Por tanto, $b = 2 + 2 \cdot 1 = 4$

Luego, $\boxed{\boldsymbol{a = 1}}$ y $\boxed{\boldsymbol{b = 4}}$

Problema 3:

Considera la función continua $f: R \to R$ definida por $f(x) = 1 + \int_0^x t \cdot e^t \cdot dt$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Solución:

En primer lugar, veamos cuánto vale $f(x)$:

$$f(x) = 1 + \int_0^x te^t\,dt = 1 + \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{bmatrix}_0^x = 1 + [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt =$$

$$= 1 + [te^t - e^t]_0^x = 1 + xe^x - e^x + 1 = 2 + e^x(x - 1)$$

Para ver la curvatura de la función, vamos a estudiar el signo de la segunda derivada.

Por el teorema fundamental del cálculo integral, tenemos que:

$$f'(x) = xe^x$$

Por tanto:

$$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(x + 1)$$

Igualamos a cero la segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Luego:

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
Signo de $f''(x)$	$-$	$+$
	$\cap$ Cóncava	$\cup$ Convexa

Luego f es cóncava en $(-\infty, -1)$ y convexa en $(-1, +\infty)$

El punto de inflexión se encuentra en $x = -1$, donde $f(-1) = 2 + e^{-1}(-1 - 1) = 2 - \frac{2}{e}$

$f(x)$ es cóncava en $(-\infty, -1)$ y convexa en $(-1, +\infty)$

Cuyo punto de inflexión es $\boldsymbol{P\left(-1, 2 - \frac{2}{e}\right)}$

Problema 4:

Considera la función f definida por $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ (para $x\neq -1, x\neq 1$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $P(2,4)$.

Solución:

$F(x)=\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$

Como el grado del numerador es igual al grado del denominador, dividimos ambos polinomios para expresar la fracción como $cociente(x)+\frac{resto(x)}{divisor(x)}$

$$\begin{array}{rrr|l} x^2+ & 0x & +1 & x^2-1 \\ \cline{4-4} -x^2+ & 0x & +1 & 1 \\ \hline & & 2 & \end{array}$$

Luego:

$$F(x)=\int dx+\int \frac{2}{x^2-1}dx = x+\int \frac{2}{(x+1)(x-1)}dx$$

Expresamos $\frac{2}{(x+1)(x-1)}$ como suma de fracciones simples:

$\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$;

$2=A(x-1)+B(x+1)$

- Si $x=-1 \Longrightarrow 2=-2A \Longrightarrow A=-1$
- Si $x=1 \Longrightarrow 2=2B \Longrightarrow B=1$

Por tanto,

$F(x)=x+\int \frac{2}{(x+1)(x-1)}dx = x+\int \frac{-1}{x+1}dx+\int \frac{1}{x-1}dx = x-\ln|x+1|+\ln|x-1|+C, C\in\mathbb{R}$

Como la primitiva de f pasa por el punto $(2,4)$, entonces $F(2)=4$.

$F(2)=2-\ln 3+\ln 1+C=2-\ln 3+C=4 \Longrightarrow C=2+\ln 3$

Por tanto, $\boldsymbol{F(x)=\ x-\ln|x+1|+\ln|x-1|+2+\ln 3}$

RESPUESTAS BLOQUE B

Problema 5:

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$a)$ Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$.

$b)$ Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica

$A^4X + B = AC$.

Solución:

a) *Si* $A^2 = -A^{-1} \Longrightarrow A^{-1} = -A^2$

Calculamos $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

Luego $-A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Como A^{-1} es una matriz que verifica que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, si $A \cdot (-A^2) = I$, vamos a tener que, efectivamente, $A^2 = -A^{-1}$

Calculamos $A \cdot (-A^2) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Por tanto, queda demostrado que $\boldsymbol{A^2 = -A^{-1}}$

b) $A^4X + B = AC \rightarrow A^4X = AC - B \rightarrow$

$X = (A^4)^{-1}(AC - B) = (A^2 \cdot A^2)^{-1}(AC - B) = \left(-A^{-1} \cdot (-A^{-1})\right)^{-1}(AC - B)$;

$$\boxed{X = A^2(AC - B)};$$

Calculamos

$AC - B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 9 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

Luego:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}}$

Problema 6:

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes de cada ruta. Razona la respuesta.

b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta?

Solución:

Sean:
$A = n^{\underline{o}}\ de\ viajes\ semanales\ por\ la\ ruta\ A$
$B = n^{\underline{o}}\ de\ viajes\ semanales\ por\ la\ ruta\ B$
$C = n^{\underline{o}}\ de\ viajes\ semanales\ por\ la\ ruta\ C$

El enunciado nos plantea las siguientes ecuaciones

- Semanalmente hace un total de 70 viajes: $A + B + C = 70$
- El número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C: $B = A + C$

Con lo que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones de 3 incógnitas con dos ecuaciones:

$$\begin{cases} A + B + C = 70 \\ A - B + C = 0 \end{cases}$$

a) Se sabe que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70:

$$2(A + C) = 70 \rightarrow A + C = 35$$

Luego el sistema de ecuaciones que tenemos que resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} A + B + C = 70 \\ A - B + C = 0 \\ A + C = 35 \end{cases}$$

Vamos a clasificar el sistema usando el Teorema de Rouché – Fröbenius:

Sea $A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 35 \end{array}\right)$

Estudiamos el rango de A

- Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$
- Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Estudiamos el rango de A^*

- Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 35 \end{vmatrix} = -35 + 70 - 35 = 0 \Rightarrow rg(A^*) = 2$

Por tanto, como $rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ de\ incógnitas$, entonces el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

No se puede deducir el número de viajes por cada ruta pues el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

b) El doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5:

$$2C = B - 5 \rightarrow B - 2C = 5$$

El sistema resultante que tenemos que resolver viene dado por:

$$\begin{cases} A + B + C = 70 \\ A - B + C = 0 \\ B - 2C = 5 \end{cases}$$

Resolvemos por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & 0 & -70 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

Luego el sistema asociado es:

$$\begin{cases} A + B + C = 70 \\ -2B = -70 \\ B - 2C = 5 \end{cases}$$

De la segunda ecuación obtenemos que $\boxed{B = 35}$

Sustituyendo en la tercera ecuación tenemos que:

$35 - 2C = 5 \rightarrow 2C = 35 - 5 = 30 \rightarrow \boxed{C = 15}$

De la primera ecuación tenemos que:

$A + 35 + 15 = 70 \rightarrow \boxed{A = 20}$

Por tanto, semanalmente se realizan **20** viajes por la ruta A, **35** viajes por la ruta B y **15** viajes por la ruta C

Problema 7:

La recta r perpendicular desde el punto $A(1,1,0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

$a)$ Calcula la ecuación del plano π.

$b)$ Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π.

Solución:

a) Se sabe que el punto $B \in \pi$

Como la recta que pasa por A y B es perpendicular al plano que queremos obtener, el vector $\overrightarrow{AB}$ es el vector normal al plano, que llamaremos $\vec{n}$

$$\overrightarrow{AB} = \left(1-1,\frac{1}{2}-1,\frac{1}{2}\right) = \left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Tomamos un vector proporcional (multiplicando por 2) al que acabamos de obtener para eliminar las fracciones: $\vec{n} = (0,-1,1)$

Por tanto, la ecuación general del plano viene dado por:

$$-y+z+D=0$$

Sustituto por el punto $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \in \pi$

$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+D=0 \Rightarrow D=0$

Luego, $\boldsymbol{\pi \equiv -y+z=0}$

b) Sea A' el punto simétrico de A respecto del plano, se cumple que $d(A,A') = 2d(A,B)$

Por tanto, $d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \left|\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$

Entonces $d(A,A') = 2d(A,B) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\ u$

Luego, $\boldsymbol{d(A,A') = \sqrt{2}\ u}$

Problema 8:

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

$a)$ Estudia la posición relativa de r y s.

$b)$ Halla la recta t que corta perpendicularmente a r y a s.

Solución:

a) Paso a paramétricas la recta s:

Sea $y = \beta, \forall \beta \in \mathbb{R}$

De la primera ecuación: $x = 1 - \beta$

Luego $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \beta \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases}$

De r conocemos un punto A y un vector director $\overrightarrow{d_r}$: $\begin{cases} A(3, 1, -3) \\ \overrightarrow{d_r} = (1, 0, -1) \end{cases}$

De s conocemos un punto B y un vector director $\overrightarrow{d_s}$: $\begin{cases} B(1, 0, 0) \\ \overrightarrow{d_s} = (-1, 1, 0) \end{cases}$

Construimos las siguientes matrices:

$$M = \begin{pmatrix} \overrightarrow{d_r} \\ \overrightarrow{d_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^* = \begin{pmatrix} \overrightarrow{d_r} \\ \overrightarrow{d_s} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculo el rango de M

- Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 2$

Calculo el rango de M^*

- Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 - 2 = 3 - 3 = 0 \Rightarrow rg(M^*) = 2$

Como $rg(M) = rg(M^*) = 2 \Longrightarrow r\ y\ s\ son\ secantes.$

Por tanto, las **rectas r y s se cortan** en un punto.

b) Como r y s se cortan en un punto, la recta perpendicular a ambas, que llamaremos t, estará formada por el punto de corte de r y s y el vector director que será el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas:

$$t \equiv \begin{cases} C\ es\ el\ punto\ de\ interseccion\ de\ r\ y\ s \\ \overrightarrow{d_t} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte de las rectas:

$$\begin{cases} 3 + \lambda = 1 - \beta \\ 1 = \beta \\ -3 - \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

Sustituyo $\beta = 1$ en las ecuaciones paramétricas de s:

$$\begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Por tanto, el punto de intersección es $C = (0, 1, 0)$

En segundo lugar, calculamos el vector director $\overrightarrow{d_t}$

$$\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1, 1, 1)$$

Luego la recta perpendicular a r y a s es $\boldsymbol{t} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{x = \mu} \\ \boldsymbol{y = 1 + \mu} \\ \boldsymbol{z = \mu} \end{cases}$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

ARAGÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa Asso

Logo de la Comunidad	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Problema 1:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + bx + 2 & si \;\; x \leq 0 \\ \frac{L(x+1)}{ax} & si \;\; x > 0 \end{cases}$, $a, b \in R$; $a, b \neq 0$.

$a)$ Determine los valores de $a, b \in R$ para que la función $f(x)$ sea continua en R.

$b)$ Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x = -1$, y determine el tipo de extremo que es.

Problema 2:

Calcule el valor de $a \in R$ $(a \neq 0)$ para que se verifique $\lim_{x \to 0}(1 - sen^2 x)^{\frac{a}{x^2}} = 2$.

Problema 1:

Calcule: $I = \int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2} \cdot dx$.

Problema 4:

Para la función $f(x) = \frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}$:

$a)$ Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.

$b)$ Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 1$.

Problema 5:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

$a)$ Estudie el rango de la matriz $A - kI$ según los valores de $k \in R$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$b)$ Calcule la inversa de $A - kI$ para $k = 0$.

Problema 6:

$a)$ Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix}$.

$b)$ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $\left(A - \frac{1}{2}A^t\right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.

Problema 7:

$a)$ Resuelva el sistema matricial: $\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$.

$b)$ Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n, n \in N$.

Problema 8:

Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A(0,1,1)$ y es paralela a los planos π_1 que contiene a los siguientes puntos: $B_1(-1,0,2), B_2(1,3,1)\ y\ B_3(2,-1,0)$, y $\pi_2 \equiv x + 2z = 1$.

Problema 9:

Sean los siguientes vectores:

$\vec{u_1} = (-1,1,1),\ \vec{u_2} = (0,3,1),\ \vec{u_3} = (1,-2,0)\ y\ \vec{u_4} = (-2,0,1)$.

$a)$ Compruebe si los vectores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo: $\vec{v_1} = 2\vec{u_1} - \vec{u_2},\ \vec{v_2} = \vec{u_1} + \vec{u_3},\ \vec{v_3} = \vec{u_4}$.

$b)$ Calcule las siguientes expresiones:

$(2\vec{u_1} - \vec{u_2}) \cdot (2\vec{u_1} - \vec{u_2})$, $(\vec{u_4} - \vec{u_1}) \times (\vec{u_4} - \vec{u_1})$, siendo $(\cdot)\ y\ (\times)$ los productos escalar y vectorial de los vectores, respectivamente.

Problema 10:

La cantidad de hierro en suero de una mujer adulta sigue una distribución normal de media 120 $\mu g/d\ell$ y desviación típica 30 $\mu g/d\ell$. Se considera que una mujer tiene un tipo de anemia por falta de hierro si su cantidad de hierro no llega a 75 $\mu g/d\ell$.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro?

$b)$ El 45 % de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a k. Averigüe el valor de k.

RESPUESTAS

Problema 1:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + bx + 2 \;\; si \;\; x \le 0 \\ \frac{L(x+1)}{ax} \;\; si \;\; x > 0 \end{cases}$, $a, b \in R; \;\; a, b \neq 0.$

$a)$ Determine los valores de $a, b \in R$ para que la función $f(x)$ sea continua en R.

$b)$ Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x = -1$, y determine el tipo de extremo que es.

Solución:

La función $y = x^3 + bx + 2$ es continua y derivable en $\mathbb{R} \;\; \forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **f es continua y derivable en $(-\infty, \mathbf{0})$**

La función $y = L(x+1)$ es continua y derivable en $\{x \in \mathbb{R}/x + 1 > 0\} = (-1, \infty) \Rightarrow$

$y = \frac{L(x+1)}{ax}$ es continua y derivable en $(-1,0) \cup (0, \infty) \;\; \forall a \neq 0$

$\Rightarrow$ **f es continua y derivable en $(\mathbf{0}, \infty) \;\; \forall \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$**

a) Por lo razonado anteriormente f es continua $\mathbb{R} - \{0\} \; \forall a \neq 0$

Para que f sea continua en $x = 0$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$:

$$\left\{\begin{array}{c} f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^3 + bx + 2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{L(x+1)}{ax}\right) = \frac{0}{0} \underbrace{=}_{Regla\ de\ l'Hôpital} \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1/_{x+1}}{a}\right) = \frac{1}{a} \end{array}\right\} \underbrace{\Longrightarrow}_{f \text{ continua en } x=0}$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{f \text{ continua en } x=0} \quad 2 = \frac{1}{a} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

Para que f sea continua en $\mathbb{R}$, b puede tomar cualquier valor real y $a = \frac{1}{2}$

b) Como hemos explicado al principio la función f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ si $a \neq 0$

En particular, si $x \in (-\infty, 0)$: $\quad f'(x) = 3x^2 + b$

Si f tiene un extremo relativo en $x = -1$, debe cumplirse $f'(1) = 0 \Longrightarrow 3 + b = 0 \Longrightarrow b = -3$

Existe también la derivada segunda de la función en este intervalo $f''(x) = 6x$

$f''(-1) = -6 \Longrightarrow$ En $x = -1$ hay un máximo relativo

Para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$ y tenga un extremo relativo en $x = -1$

$\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ y $\boldsymbol{b} = -\mathbf{3}$

El punto $(-\mathbf{1}, \mathbf{4})$ **es un mínimo relativo**

Problema 2:

Calcule el valor de $a \in R$ $(a \neq 0)$ para que se verifique $\lim_{x\to 0}(1 - sen^2x)^{\frac{a}{x^2}} = 2$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}(1 - sen^2x)^{\frac{a}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(cos^2x)^{\frac{a}{x^2}} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{a}{x^2}Ln(cos^2x)} = e^L$$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{a}{x^2}\ Ln(cos^2x) = \lim_{x\to 0}\frac{2a\ Ln(cosx)}{x^2} = \frac{0}{0} \underbrace{=}_{Regla\ L'Hôpital} \lim_{x\to 0}\frac{2a\frac{-senx}{cosx}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-a\ senx}{x\ cosx} = \frac{0}{0}$$

$$L \underbrace{=}_{Regla\ L'Hôpital} \lim_{x\to 0}\frac{-a\ cosx}{cosx - x\ senx} = \frac{-a}{1} = -a$$

Entonces: $\lim_{x\to 0}(1 - sen^2x)^{\frac{a}{x^2}} = e^{-a} = 2 \Rightarrow \frac{1}{e^a} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = e^a \Rightarrow a = Ln\left(\frac{1}{2}\right) = -Ln2$

El valor de $a \in R$ $(a \neq 0)$ / $\lim_{x\to 0}(1 - sen^2x)^{\frac{a}{x^2}} = 2$ es $\boldsymbol{a = -Ln2}$

Problema 3:

Calcule: $I = \int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2} \cdot dx$.

Solución:

$$u = x^3 - 3x + 2 \quad \Longrightarrow du = (3x^2 - 3x\,)dx = 3(x^2 - x\,)dx$$

$$I = \int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2} \cdot dx = \frac{1}{3} \int \frac{3(x^2 - 1)}{x^3 - 3x + 2}\, dx = \frac{1}{3} \int \frac{u'}{u}\, dx = \frac{1}{3}\, Ln\, |u| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\, Ln\, |x^3 - 3x + 2| + C$$

$$I = \int \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2} dx \; = \boldsymbol{\frac{1}{3}\, Ln\, \left|x^3 - 3x + 2\right| + C}$$

Problema 4:

Para la función $f(x) = \frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}$:

$a)$ Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.

$b)$ Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 1$.

Solución:

a) $x^2 - x - 2 = 0 \implies x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$

$$Dom\ f = \mathbb{R} - \{-1,2\}$$

- $x = -1$ es una posible asíntota vertical:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} = \frac{-3}{0} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} = \frac{-3}{0} = +\infty$$

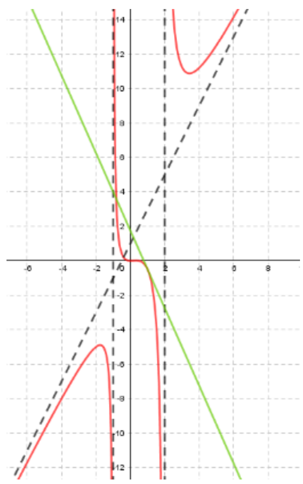
$x = -1$ es asíntota vertical

- $x = 2$ es una posible asíntota vertical:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} = \frac{12}{0} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} = \frac{12}{0} = +\infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} = -\infty \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} = \infty$$



No existen asíntotas horizontales

- Veamos por último si existen asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} : x\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3-x^2}{x^3-x^2-2x} = 2 = \lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} - 2x\right) =$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3-x^2-2x(x^2-x-2)}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+4x}{x^2-x-2} = 1$$

Análogamente $n = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx) = 1$

La recta $\boldsymbol{y = 2x + 1}$ es una asíntota oblicua de f en $-\infty$ y en $+\infty$

b) La ecuación de la recta tangente es $y - y_1 = m(x - x_1)$ siendo (x_1, y_1)un punto de la recta, por ejemplo, el punto de tangencia, y $m = f'(abscisa\ punto\ de\ tangencia) = f'(x_1)$

$$x_1 = 1 \qquad y_1 = \frac{2.1^3 - 1^2}{1^2 - 1 - 2} = -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{(6x^2-2x)(x^2-x-2) - (2x^3-x^2)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = \frac{2x^4-4x^3-11x^2+4x}{(x^2-x-2)^2} \implies$$

$$\implies m = f'(1) = \frac{2.1^4 - 4.1^3 - 11.1^2 + 4.1}{(1^2-1-2)^2} = -\frac{9}{4}$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es entonces:

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{9}{4}(x - 1) \Longrightarrow y = -\frac{9}{4}x + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \Longrightarrow \ y = -\frac{9}{4}x + \frac{7}{4}$$

La solución es: $\mathrm{y} = -\frac{9}{4}\mathrm{x} + \frac{7}{4}$

Problema 5:

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}$:

$a)$ Estudie el rango de la matriz $A-kI$ según los valores de $k\in R$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$b)$ Calcule la inversa de $A-kI$ para $k=0$.

Solución:

$$a)\ A-kI=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k&0&-2\\1&2-k&1\\1&0&3-k\end{pmatrix}$$

El rango máximo posible es 3 y $rango(A-kI)=3\Leftrightarrow Det\ (A-kI)\neq 0$

$$Det\ (A-kI)=\begin{vmatrix}-k&0&-2\\1&2-k&1\\1&0&3-k\end{vmatrix}=(2-k)\begin{vmatrix}-k&-2\\1&3-k\end{vmatrix}=(2-k)(k^2-3k+2)$$

$Det\ (A-kI)=(2-k)(k^2-3k+2)=0\Longrightarrow 2-k=0$ o bien $k^2-3k+2=0\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow k=2 \text{ o bien } k=\tfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\Longrightarrow k=1 \text{ o bien } k=2$$

- Si $k\neq 1,2,\ Det\ (A-kI)\neq 0$ .Existe un menor de orden 3 distinto de 0, luego

$$rango(A-kI)=3$$

- Si $k=1\ rango(A-kI)=rango\ (A-I)\neq 3$

  El menor de orden 2 $\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}=-1$ de la matriz $A-I=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$ es distinto de 0 lo que justifica que en este caso:

$$rango(A-I)=2$$

- Si $k=2\ rango(A-kI)=rango\ (A-2I)\neq 3$

  $rango\ (A-2I)=rango\begin{pmatrix}-2&0&-2\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\underbrace{=}_{\substack{f1'=f2+2f1\\f3'=f3-f1}}rango\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=1$ ya que esta matriz solo tiene un vector fila linealmente independiente

$$rango(A-2I)=1$$

Si $k\neq 1,2$: $rango(A-kI)=3$, $rango\ (A-I)=2$, $rango(A-2I)=1$

b) Para $k=0\ \ A-kI=A$ y $Det\ \ A=(2-0)(0^2-3.0+2)=4\Longrightarrow\exists A^{-1}=\frac{1}{Det\ A}(Adj\ A)^t$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{Det\ A}(Adj\ A)^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 6:

$a)$ Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix}$.

$b)$ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $\left(A - \frac{1}{2}A^t\right)\cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) $$\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{Segunda\ columna \\ suma\ de\ dos\ vectores}} \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \\ a & b & c \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2d & 2f & 2f \\ -g & -i & -i \\ a & c & c \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ tiene\ dos \\ columnas\ iguales}} =$$

$$\underbrace{=}_{\substack{Sacando\ de\ F1 \\ el\ factor\ 2}} 2\begin{vmatrix} d & e & f \\ -g & -h & -i \\ a & b & c \end{vmatrix} \underbrace{=}_{Intercambiando\ F2\ y\ F3} -2\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{=}_{Intercambiando\ F2\ y\ F1} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{Sacando\ de\ F3 \\ el\ factor -1}} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2.5 = -10$$

$$\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix} = -10$$

b) $A - \frac{1}{2}A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema $\left(A - \frac{1}{2}A^t\right)\cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

El determinante de la matriz de coeficientes

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$el sistema es de Cramer y la solución viene dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 9 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{4}{2} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{6}{2} = 3$$

El sistema es compatible determinado y la solución única es:

$$\boldsymbol{x = 2 \qquad y = -1 \qquad z = 3}$$

Problema 7:

$a)$ Resuelva el sistema matricial: $\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix} \\ 3X-2Y=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\end{cases}$.

$b)$ Calcule $\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n, n\in N$.

Solución:

a) : $\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix} \\ 3X-2Y=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\end{cases} \underbrace{\sim}_{\substack{E1'=2E1\\ E2'=3E2}} \begin{cases} 4X+6Y=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 6 & 14\end{pmatrix} \\ 9X-6Y=\begin{pmatrix}15 & 9\\ -6 & 12\end{pmatrix}\end{cases} \underbrace{\sim}_{\substack{E1''=E1\\ E2''=E1'+E2'}} \begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix} \\ 13X=\begin{pmatrix}13 & 13\\ 0 & 26\end{pmatrix}\end{cases}$

$$13X=\begin{pmatrix}13 & 13\\ 0 & 26\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$2X+3Y=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix} \Rightarrow 3Y=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

La solución del sistema es :

$$X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} \quad Y=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

b) Razonamos por inducción:

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^2.\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0\\ -7 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^3.\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0\\ -7 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 0\\ -15 & 1\end{pmatrix}$$

Supongamos que para $k\in\mathbb{N}$ se cumple $\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}2^k & 0\\ -(2^k-1) & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k & 0\\ -2^k+1 & 1\end{pmatrix}$

Se conserva también para $k+1$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^k.\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k & 0\\ -2^k+1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k.2 & 0\\ 2.(-2^k+1)-1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2^{k+1} & 0\\ -2^{k+1}+2-1 & 1\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}2^{k+1} & 0\\ -2^{k+1}+1 & 1\end{pmatrix}$$

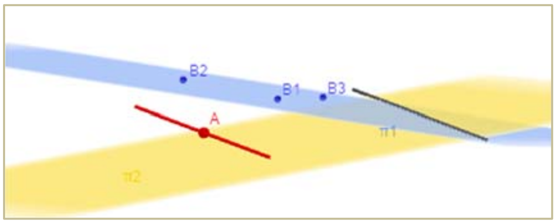
Tal como hemos supuesto. Por tanto:

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\mathbf{2^n} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-2^n+1} & \mathbf{1}\end{pmatrix} \qquad \forall n\in N$$

Problema 8:

Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A(0,1,1)$ y es paralela a los planos π_1 que contiene a los siguientes puntos: $B_1(-1,0,2), B_2(1,3,1)\ y\ B_3(2,-1,0)$, y $\pi_2 \equiv x+2z=1$.

Solución:



La dirección de la recta buscada puede obtenerse como producto vectorial de los dos vectores asociados a π_1y π_2

$\overrightarrow{n_1}$ paralelo a $\overrightarrow{B_1B_2} \times \overrightarrow{B_1B_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-7,1,-11)$

$\overrightarrow{n_2} = (1,0,2)$. El vector $\vec{v}$ paralelo a la recta es también paralelo a $\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -7 & 1 & -11 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2,3,-1)$

La ecuación continua de la recta buscada es entonces $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$

Pasamos a implícitas, igualando primer y segundo términos y primero y tercero:

$$r \equiv \begin{cases} 3x = 2y-2 \\ -x = 2z-2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 3x-2y+2=0 \\ x+2z-2\ =0 \end{cases}$$

Una posible solución es $r \equiv \begin{cases} 3x-2y+2=0 \\ x+2z-2\ =0 \end{cases}$

Es válida la compuesta por cualquier pareja de planos que contengan al punto $A(0,1,1)$ y la dirección $\vec{v} = (2,3,-1)$

Problema 9:

Sean los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u_1} = (-1,1,1),\ \overrightarrow{u_2} = (0,3,1),\ \overrightarrow{u_3} = (1,-2,0)\ y\ \overrightarrow{u_4} = (-2,0,1).$$

$a)$ Compruebe si los vectores $\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo: $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_4}$.

$b)$ Calcule las siguientes expresiones:

$(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \cdot (2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2})$, $(\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) \times (\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1})$, siendo $(\cdot)\ y\ (\times)$ los productos escalar y vectorial de los vectores, respectivamente.

Solución:

a) $$\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = 2(-1,1,1) - (0,3,1) = (-2,-1,1)$$

$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3} = (-1,1,1) + (1,-2,0) = (0,-1,1)$$

$$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_4} = (-2,0,1)$$

$\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}\}$ son linealmente independientes $\Leftrightarrow$ el producto mixto $(\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}) \neq 0$

$$(\overrightarrow{v_1},\quad \overrightarrow{v_2},\quad \overrightarrow{v_3}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow$$

$\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}\}$ son linealmente independientes

b) $(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \cdot (2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) = [2(-1,1,1) - (0,3,1)].[2(-1,1,1) - (0,3,1)]=$

$= (-2,-1,1) . (-2,-1,1) = |(-2,-1,1)|^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 = 4 + 1 + 1 = 6$

$$(\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) \times (\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) = [(-2,0,1) - (-1,1,1)] \times [(-2,0,1) - (-1,1,1)] =$$

$$=(-1,-1,0) \times (-1,-1,0) = \vec{0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

$(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \cdot (2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) = 6$ $\qquad$ $(\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) \times (\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) = \vec{0}$

Problema 10:

La cantidad de hierro en suero de una mujer adulta sigue una distribución normal de media 120 $\mu g/d\ell$ y desviación típica 30 $\mu g/d\ell$. Se considera que una mujer tiene un tipo de anemia por falta de hierro si su cantidad de hierro no llega a 75 $\mu g/d\ell$.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro?

$b)$ El 45 % de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a k. Averigüe el valor de k.

Solución:

Sea X la variable que mide la cantidad de hierro en suero de una mujer adulta $X = N(120{,}30)$

$a)$ $P(\text{“}una\ mujer\ adulta\ tenga\ anemia\ por\ falta\ de\ hierro\text{”}) = P(X < 75) =$

$$= P\left(\frac{X-120}{30} < \frac{75-120}{30}\right) = P(Z < -1.5) = P(Z > 1.5) =$$

$$= 1 - P(Z \le 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

La probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro es 0.0668

$b)$ El 45 % de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a $k \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow P(X > k) = 1 - P(X \le k) = 0.45 \Longrightarrow P(X \le k) = 0.55$$

$$P(X \le k) = P\left(\frac{X-120}{30} \le \frac{k-120}{30}\right) = P\left(Z \le \frac{k-120}{30}\right) = 0.55$$

Los valores en la tabla de $Z = N(0,1)$ más próximos a 0.55 son 0.5478 y 0.5517, correspondientes a los valores 0.12 y 0.13. La media de ambos 0.125 sería 0.54975 que es prácticamente 0.55. Nos quedamos entonces con este valor para $\frac{k-120}{30}$

$$\frac{k-120}{30} = 0.125 \Longrightarrow k = 120 + 30\ .\ 0.125 = 123.75$$

$$k = \mathbf{123.75}$$

Logo de la Comunidad	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Problema 1:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 5 - ax^2 & si \;\; x \leq 1 \\ \frac{6}{ax} & si \;\; x > 1 \end{cases}$, $a \in R$; $a \neq 0$.

$a)$ Calcule los valores de $a \in R$ para que la función $f(x)$ sea continua.

$b)$ Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y la rectas $x = 0$ y $x = e$ sea $6u^2$.

Problema 2:

Calcule el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 1} \left(sen\ \frac{\pi x}{2} \right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}$.

Problema 3:

Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3. El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2, mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2. Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.

Problema 4:

Para la función $f(x) = \frac{e^x}{x^3 - x}$:

$a)$ Estudie la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calcúlelas cuando existan.

$b)$ Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 2$.

Problema 5:

Dada la matriz $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$:

$a)$ Estudie el rango de la matriz $A = I + P$, donde I es la matriz identidad de orden 3, según los valores de $k \in R$.

$b)$ Para $k = 1$, calcule la inversa de la matriz A del apartado anterior.

Problema 6:

Dadas las matrices $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}, C_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $C_2=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$:

$a)$ Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela.

$b)$ Calcule la matriz X que verifica la ecuación matricial $I+B\cdot X=C_1\cdot C_2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Problema 7:

Dado el sistema $\begin{cases}3x-y+2z=1\\ x+4y+z=3\\ 2x-5y+az=-2\end{cases}$:

$a)$ Discuta según los valores de $a\in R$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.

$b)$ Resuelva el sistema para $a=0$.

Problema 8:

Calcule la ecuación de la recta r que pase por el punto $A(1,-2,0)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $B(1,0,1), C(3,1,0)$ y $D(2,-1,1)$. Exprésela como intersección de dos planos.

Problema 9:

En un departamento de calidad se analiza el funcionamiento del software del motor de vehículos eléctricos e híbridos. Se revisaron 85 coches eléctricos y 145 coches híbridos. En total, 43 coches tenían errores en el software de sus motores. Además, de los motores con software defectuoso, 12 corresponden a coches eléctricos.

$a)$ Calcule la probabilidad de que un choche revisado seleccionado al azar, sea híbrido y presente el software de su motor correcto.

$b)$ Calcule la probabilidad de que un coche híbrido seleccionado al azar tenga defectuoso el software del motor.

Problema 10:

Uno de cada 7 deportistas de la selección española de gimnasia deportiva, será elegido para las próximas olimpiadas. Se escogen aleatoriamente y de modo independiente 9 deportistas de dicha selección española.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos exactamente 2 de estos 9 deportistas para las próximas olimpiadas?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que alguno (al menos 1) de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas?

RESPUESTAS

Problema 1:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 5 - ax^2 & si \ \ x \leq 1 \\ \frac{6}{ax} & si \ \ x > 1 \end{cases}$, $a \in R;\ \ a \neq 0.$

$a)$ Calcule los valores de $a \in R$ para que la función $f(x)$ sea continua.

$b)$ Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y la rectas $x = 0\ y\ x = e$ sea $6u^2$.

Solución:

a) La función $y = 5 - ax^2$ es continua y derivable en $\mathbb{R}\ \ \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es continua y derivable en $(-\infty, 1)$

La función $y = \frac{6}{ax}$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}\quad \forall a \neq 0 \Rightarrow$

f es continua y derivable en $(1, \infty)\ \ \forall a \neq 0$

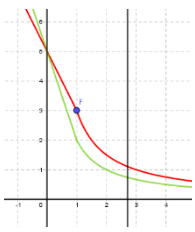
Para que f sea continua en $x = 1$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$:

$$\left. \begin{cases} f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-}(5 - ax^2) = 5 - a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+}\left(\frac{6}{ax}\right) = \frac{6}{a} \end{cases} \right\} \underbrace{\Longrightarrow}_{f \text{ continua en } x=1} 5 - a = \frac{6}{a} \Longrightarrow 5a - a^2 = 6 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Longrightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

f es continua en $\mathbb{R}$ si $a = 2$ o bien $a = 3$

b) $f(x) = 0 \ \Longrightarrow 5 - ax^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{a}}$



No hay valores positivos menores que 1 que anulen f ya que $1 < +\sqrt{\frac{5}{a}}$

Sea A el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y la recta $x = 0\ y\ x = e$

$$A = \left|\int_0^1 f(x)dx\right| + \left|\int_1^e f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 (5 - ax^2)dx\right| + \left|\int_1^e \frac{6}{ax}dx\right| =$$

$$= \left|\left[5x - \frac{ax^3}{3}\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{6}{a}Ln\ x\right]_1^e\right| = \left|5 - \frac{a}{3}\right| + \left|\frac{6}{a}Ln\ e - \frac{6}{a}Ln\ 1\right| = 5 - \frac{a}{3} + \frac{6}{a}$$

- Si $a = 2$ $\quad A = 5 - \frac{2}{3} + \frac{6}{2} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}u^2$
- Si $a = 3$ $\quad A = 5 - \frac{3}{3} + \frac{6}{3} = 5 - 1 + 5 = 6u^2$

El área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y la recta $x = 0\ y\ x = e$ es $6u^2$si $\boldsymbol{a = 3}$

Problema 2:

Calcule el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 1}\left(sen\ \frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\left(sen\ \frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} = 1^{\infty} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}Ln\left(sen\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{L}$$

$$L = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}\ Ln\left(sen\ \frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{Ln\left(sen\ \frac{\pi x}{2}\right)}{(1-x)^2} = \frac{0}{0}\underbrace{=}_{Regla\ L'Hôpital}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{cos\ \frac{\pi x}{2}}{sen\ \frac{\pi x}{2}}}{-2(1-x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{cos\frac{\pi x}{2}}{sen\frac{\pi x}{2}}}{-2(1-x)} = -\frac{\pi}{4}\ .\lim_{x\to 1}\frac{cos\frac{\pi x}{2}}{(1-x)sen\frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0}\underbrace{=}_{Regla\ L'Hôpital} -\frac{\pi}{4}\ .\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{\pi}{2}sen\frac{\pi x}{2}}{-sen\frac{\pi x}{2}+(1-x)\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi x}{2}} =$$

$$= -\frac{\pi}{4}.\frac{-\frac{\pi}{2}sen\ \frac{\pi}{2}}{-sen\ \frac{\pi}{2}+(1-1)\frac{\pi}{2}cos\ \frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4}.\frac{-\frac{\pi}{2}.1}{-1+0.\frac{\pi}{2}.0} = -\frac{\pi}{4}.\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{8}$$

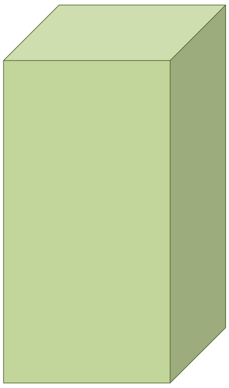
Luego:

$$\lim_{x\to 1}\left(sen\ \frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} = e^{-\frac{\pi^2}{8}}$$

Problema 3:

Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3. El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2, mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2. Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.

Solución:



Sean x , y respectivamente, la longitud del lado de la base y la altura del depósito

Debe cumplirse $V = 64\,m^3 \Longrightarrow x^2y = 64 \Longrightarrow y = \frac{64}{x^2}$

Si pretendemos que el coste sea lo menor posible, la función coste C debe ser mínima:

$C(x) = 140\,.\,x^2 + 280\,.\,xy = 140\,x^2 + 280\,x\,\frac{64}{x^2} = \frac{140x^3+17920}{x}$

C es una función derivable en $(0, \infty)$, luego, podemos estudiar su monotonía y extremos a partir del signo de su derivada:

$$C´(x) = \frac{420x^2.x - (140x^3 + 17920)}{x^2} = \frac{280x^3 - 17920}{x^2}$$

$C´(x) = 0 \Longrightarrow 280x^3 - 17920 = 0 \Longrightarrow x^3 = \frac{17920}{280} = 64 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$

	$(0,4)$	4	$(4, \infty)$
Signo de $C´$	Negativa	0	Positiva
Monotonía de C	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Luego el mínimo coste se alcanza si $x = 4\,m$. Para este valor $y = \frac{64}{4^2} = 4m$

El depósito debe tener forma cúbica con $4\,m$ de arista

Problema 4:

Para la función $f(x) = \frac{e^x}{x^3-x}$:

$a)$ Estudie la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calcúlelas cuando existan.

$b)$ Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 2$.

Solución:

a) $x^3 - x = 0 \Longrightarrow x(x^2-1) = 0 \Longrightarrow x = 0\,, x = -1$ o bien $x = 1$

$$Dom\, f = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$$

- $x = -1$ es una posible asíntota vertical:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{e^x}{x^3-x} = \frac{e^{-1}}{0} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{e^x}{x^3-x} = \frac{e^{-1}}{0} = \infty$$

$x = -1$ es asíntota vertical

- $x = 0$ es una posible asíntota vertical:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x^3-x} = \frac{1}{0} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x^3-x} = \frac{1}{0} = -\infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical

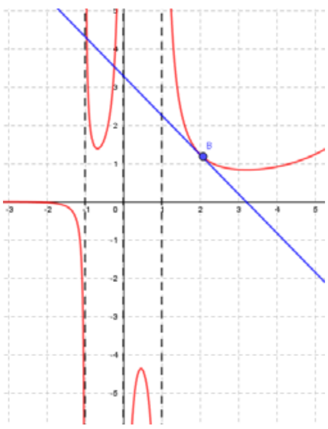
- $x = 1$ es una posible asíntota vertical:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{x^3-x} = \frac{e^1}{0} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{x^3-x} = \frac{e^1}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical

- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x^3-x} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = 0 \Longrightarrow y = 0$ es asíntota horizontal en$-\infty$

  $\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^3-x} = \frac{e^{\infty}}{\infty} = \infty$ ya que e^{∞} es un infinito de orden superior al del denominador



$y = 0$ es asíntota horizontal en -∞

- Veamos por último si existen asíntotas oblicuas. Caso de existir, sería en +∞ ya que en $-\infty$ hay asíntota horizontal

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^x}{x^3-x} : x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^x}{x^4-x^2}\right) = \frac{e^{\infty}}{\infty} = \infty$ ya que e^{∞} es un infinito de orden superior al del denominador

No existen asíntotas oblicuas

b) La ecuación de la recta tangente es $y - y_1 = m(x - x_1)$ siendo (x_1, y_1)un punto de la recta, por ejemplo el punto de tangencia, y $m = f'(abscisa\ punto\ de\ tangencia) = f'(x_1)$

$$x_1 = 2 \qquad y_1 = \frac{e^2}{2^3 - 2} = \frac{e^2}{6}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x^3 - x) - e^x(3x^2 - 1)}{(x^3 - x)^2} = \frac{e^x(x^3 - 3x^2 - x + 1)}{(x^3 - x)^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow m = f'(2) = \frac{e^2(2^3 - 3.2^2 - 2 + 1)}{(2^3 - 2)^2} = -\frac{5e^2}{36}$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es entonces:

$$y - \frac{e^2}{6} = -\frac{5e^2}{36}(x - 2)$$

La recta tangente en $x = 2$ tiene por ecuación: $y = -\frac{5e^2}{36}x + \frac{16e^2}{36}$

Problema 5:

Dada la matriz $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$:

$a)$ Estudie el rango de la matriz $A = I + P$, donde I es la matriz identidad de orden 3, según los valores de $k \in R$.

$b)$ Para $k = 1$, calcule la inversa de la matriz A del apartado anterior.

Solución:

a) $A = I + P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-k & -2k \\ 1 & -k & 1 \end{pmatrix}$

El rango máximo posible es 3 y $rangoA = 3 \Leftrightarrow Det\ \ A \neq 0$

$$Det\ \ A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-k & -2k \\ 1 & -k & 1 \end{vmatrix} = (1-k) - 2k - k - (1-k) - 1 - 2k^2 = -2k^2 - 3k - 1$$

$$Det\ \ A = 0 \Longrightarrow -2k^2 - 3k - 1 = 0 \Longrightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{-4} = \begin{matrix} -1 \\ -1/2 \end{matrix}$$

- Si $k \neq -1, k\ \neq -1/2,\ Det\ \ A \neq 0$ .Existe un menor de orden 3 distinto de 0, luego $rangoA = 3$

- Si $k = -1$

  En este caso: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $rango\ A \neq 3$ dado que $Det\ A = 0$

  El menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ de la matriz A es distinto de 0 lo que justifica que:

  $$rangoA = 2$$

- Si $k = -1/2$

  En este caso: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ y $rango\ A \neq 3$ dado que $Det\ A = 0$

  El menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$ de la matriz A es distinto de 0 lo que justifica que:

  $$rangoA = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq -\frac{1}{2}$: $rangoA = 3$.

$Si\ k = -1\ y\ k = -\frac{1}{2}$: $rango\ \mathrm{A} = 2$

b) Si $k = 1 \Longrightarrow Det\ A = -2.1^2 - 3.1 - 1 = -6 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{Det\ A}(Adj\ A)^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Adj\ A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} == \frac{1}{Det\ A}(Adj\ A)^t = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Problema 6:

Dadas las matrices $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}, C_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ y\ C_2=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$:

$a)$ Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela.

$b)$ Calcule la matriz X que verifica la ecuación matricial $I+B\cdot X=C_1\cdot C_2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $Det\ \ B=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-3+1+1+1-3-1=-4\neq 0 \Longrightarrow \exists B^{-1}$

Utilizamos el método de Gauss para obtener B^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underbrace{\rightarrow}_{\substack{F1'=F2\\ F2'=F1}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underbrace{\rightarrow}_{\substack{F2''=F'2-3F1'\\ F3'=F'1+F3}}$$

$$\underbrace{\rightarrow}_{\substack{F2''=F'2-3F1'\\ F3'=F'1+F3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -2 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\underbrace{\rightarrow}_{F2'''=F3'}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2 & 1 & -3 & 0\end{array}\right)\underbrace{\rightarrow}_{F3''=F3'+2F2'''}$$

$$\underbrace{\rightarrow}_{F3''=F3'+2F2'''}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)\underbrace{\rightarrow}_{\substack{F2''''=1/2F2'''\\ F3'''=-\frac{1}{2}F3''}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\underbrace{\rightarrow}_{F1'''=F1''-F2''''-F3'''}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1\end{array}\right)$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2 & -1\end{pmatrix}$$

b) $I+B\cdot X=C_1\cdot C_2 \Longrightarrow\ B\cdot X=C_1\cdot C_2-I\Longrightarrow B^{-1}BX=B^{-1}(C_1\cdot C_2-I)\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow IX=B^{-1}(C_1\cdot C_2-I)\Longrightarrow X=B^{-1}(C_1\cdot C_2-I)$$

$C_1\cdot C_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -6 & 4 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}\qquad C_1\cdot C_2-I=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ -6 & 3 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

$$X=B^{-1}(C_1\cdot C_2-I)=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ -6 & 3 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ -7/2 & 5/2 & -1\\ -5/2 & -5/2 & 0\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ -7/2 & 5/2 & -1\\ -5/2 & -5/2 & 0\end{pmatrix}$$

Problema 7:

Dado el sistema $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$:

$a)$ Discuta según los valores de $a \in R$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.

$b)$ Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & a & -2 \end{pmatrix}$

$$Det\ A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 12a - 2 - 10 - 16 + 15 + a = 13a - 13 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

a) Utilizamos el teorema de Rouché -Fröbenius para discutir el sistema
- Si $a \neq 1 \Longrightarrow Det\ A$ es un menor de orden 3 distinto de 0, tanto de la matriz A como de la matriz $\bar{A} \Longrightarrow rango\ A = rango\ \bar{A} = 3 =$nº de incógnitas$\Longrightarrow$ El sistema es compatible determinado.
- Si $a = 1\ \ rango\ A \neq 3$

$$rango\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{Intercambio \\ F1\ y\ F2}} rango\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underbrace{\sim}_{\substack{F2'=F2-3F1 \\ F3'=F3-2F1}} rango\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F3''=F3'-F2'} rango\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Existen dos vectores fila linealmente independiente tanto e la matriz A como de $\bar{A} \Longrightarrow rangoA = rango\ \bar{A} = 2 < nº\ de\ incógnitas = 2 \Longrightarrow$El sistema es compatible indeterminado

Si $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado. Si $a = 1$ compatible indeterminado

b) Para $a = 0$, $Det\ A = -13 \Longrightarrow$ El sistema es compatible determinado. Podemos utilizar la regla de Cramer para obtener la solución

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 2 - 30 + 16 + 5 - 0}{-13} = \frac{7}{13}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 1\\ 2 & -5 & 0\end{vmatrix}}=\frac{0+2-4-12+6-0}{-13}=\frac{8}{13}$$

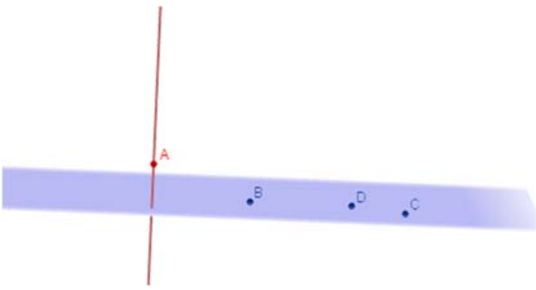
$$z=\frac{\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 4 & 3\\ 2 & -5 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 1\\ 2 & -5 & 0\end{vmatrix}}=\frac{-24-6-5-8+45-2}{-13}=\frac{0}{-13}=0$$

La solución del sistema si $a=0$.es: $x=\frac{7}{13}$ $y=\frac{8}{13}$ $z=0$

Problema 8:

Calcule la ecuación de la recta r que pase por el punto $A(1,-2,0)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $B(1,0,1), C(3,1,0)\ y\ D(2,-1,1)$. Exprésela como intersección de dos planos.

Solución:



El vector asociado al plano que pasa por B, C y D es el vector director de la recta.

$$\overrightarrow{BC} = (2,1,-1) \qquad \overrightarrow{BD} = (1,-1,0)$$

$\vec{v}$ paralelo a $\vec{n}$ paralelo a

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-1,-3)$$

La recta buscada tiene por ecuación continua:

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-3}$$

Igualando por una parte primera y tercera igualdades (π_1)y por otra segunda y tercera (π_2), obtenemos las ecuaciones generales de dos planos del haz que define r

$$\pi_1 \equiv 3x - z - 3 = 0 \qquad \pi_2 \equiv 3y - z + 6 = 0 \qquad r = \pi_1 \cap \pi_2$$

Una posible solución es:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - z - 3 = 0 \\ 3y - z + 6 = 0 \end{cases}$$

Problema 9:

En un departamento de calidad se analiza el funcionamiento del software del motor de vehículos eléctricos e híbridos. Se revisaron 85 coches eléctricos y 145 coches híbridos. En total, 43 coches tenían errores en el software de sus motores. Además, de los motores con software defectuoso, 12 corresponden a coches eléctricos.

$a)$ Calcule la probabilidad de que un coche revisado seleccionado al azar, sea híbrido y presente el software de su motor correcto.

$b)$ Calcule la probabilidad de que un coche híbrido seleccionado al azar tenga defectuoso el software del motor.

Solución:

Resolvemos mediante una tabla de contingencia. En verde están los datos del enunciado. Los otros, se rellenan:

	Con errores	Sin errores	Total
Eléctricos	**12**	**73**	**85**
Híbridos	**31**	**114**	**145**
Total	**43**	**187**	**230**

Utilizamos la regla de Laplace:

$a)\;\; P = \frac{114}{230} = \frac{57}{115} = \mathbf{0.4957}$

$b)\;\; P = \frac{31}{145} = \mathbf{0.2138}$

Problema 10:

Uno de cada 7 deportistas de la selección española de gimnasia deportiva, será elegido para las próximas olimpiadas. Se escogen aleatoriamente y de modo independiente 9 deportistas de dicha selección española.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos exactamente 2 de estos 9 deportistas para las próximas olimpiadas?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que alguno (al menos 1) de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas?

Solución:

Como un deportista puede ser elegido, o no, se trata de una distribución binomial donde:

$n = 9;\ \ p = \frac{1}{7};\ \ q = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$

$P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

$a)\ P(2) = \binom{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^7 = \frac{9!}{(9-2)!\cdot 2!} \cdot 0.0204 \cdot 0.3399 = \frac{9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 2} \cdot 0.0069 = 36 \cdot 0.0069 = 0.2497.$

$P(2) = \mathbf{0.2497}$

$b)$ La probabilidad pedida es el suceso contrario de que no sea elegido ninguno.

$1 - P(0) = 1 - \binom{9}{0} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^9 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0.2497 = 0.7503.$

La probabilidad de que alguno de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas es de $\mathbf{0.7503}$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A Un operador turístico vende a las agencias locales viajes concertados al Caribe, Islas Maldivas y Tailandia. A una primera agencia A le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Maldivas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13.000 euros. Y a una tercera agencia C le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7.000 euros. Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio del viaje a cada uno de los destinos. Y calcula, si es posible, dicho precio. (1.5 puntos)

b) Si le obligasen a rebajar un 20 % el precio del viaje al Caribe dejando los otros iguales, ¿cuánto dinero perdería? (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el precio del viaje a las Islas Maldivas necesario para compensar la bajada del 20 % del viaje al Caribe y así recaudar el mismo dinero? (se mantiene el precio del viaje a Tailandia). (0.5 puntos)

Bloque 1.B Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Escribe el sistema de ecuaciones $AX = X$ en la forma $BX = 0$. (0.5 puntos)

b) Estudia para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones. (1 punto)

c) Para $a = 0$ calcula, si existe, la inversa de A. (1 punto)

Bloque 2.A Sean las parábolas $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = ax^2 + b$

a) Calcula los valores de a y b para que en el punto de abscisa $x = 2$ las dos parábolas tengan la misma recta tangente. Calcula dicha recta tangente. (1 punto)

b) Para $a = 1, b = 1$ esboza el recinto limitado por las parábolas entre el eje Y y el punto de corte entre ellas. Calcula el área del mismo. (1.5 puntos)

Bloque 2.B Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo. (2.5 puntos)

Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

Bloque 3.A Dadas las rectas $r: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = z$ y $s: \begin{cases} x+2y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

a) Comprueba que las rectas se cruzan. (0.75 puntos)

b) Obtenga el plano π que contiene a s y es paralelo a la recta r. Halla la distancia entre el punto $P = (-1, 1, 0)$ de la recta r y el plano π (1.25 puntos)

c) Calcula la distancia entre las rectas. (0.5 puntos)

Bloque 3.B Dados los puntos $A(1,1,0)$ y $B(0,0,2)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$ Halla:

a) Un punto $C \in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en B. (1.25 puntos)

b) El plano π que pasa por A y B y es paralelo a r. (1.25 puntos)

Bloque 4.A En un edificio hay dos ascensores. Cada vecino, cuando utiliza el ascensor, lo hace en el primero el 60 % de las veces y en el segundo el 40 %. El porcentaje de fallos del primer ascensor es del 3 % y del segundo es del 8 %.

a) Un vecino usa un ascensor. ¿Cuál es la probabilidad de que el ascensor falle? (1.25 puntos)

b) Otro día, un vecino coge un ascensor y le falla. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido el segundo? (1.25 puntos)

Bloque 4.B Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 2$. Calcula:

a) La probabilidad de que $X \in [6, 10]$. (1.5 puntos)

b) Se hace una revisión de los datos y se observa que la media coincide pero la probabilidad del 80 % se alcanza en el valor $X \leq 12$. ¿Cuál es la nueva desviación típica? (1 punto)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.8416) = 0.8$, $F(1) = 0.8413$, $F(1.25) = 0.8944$, $F(1.375) = 0.9154$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(2) = 0.9772$)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Un operador turístico vende a las agencias locales viajes concertados al Caribe, Islas Maldivas y Tailandia. A una primera agencia A le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Malvinas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12 000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13 000 euros. Y a una tercera agencia C le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7 000 euros. Se pide:

$a)$ Plantea un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio del viaje a cada uno de los destinos. Y calcula, si es posible, dicho precio.

$b)$ Si le obligasen a rebajar un 20 % el precio del viaje al Caribe dejando los otros iguales, ¿cuánto dinero perdería?

$c)$ ¿Cuál sería el precio del viaje a las Maldivas necesario para compensar la bajada del 20 % del viaje al Caribe y así recaudar el mismo dinero? (se mantiene el precio del viaje a Tailandia).

Solución:

$a)$ Llamamos x, y, z los precios de los viajes al Cairo, las Maldivas o Tailandia, respectivamente.

Con los datos del enunciado escribimos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 10x+10y+10z=12\,000 \\ 10x+20z=13\,000 \\ 10x+10y=7\,000 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} x+y+z=1\,200 \\ x+2z=1\,300 \\ x+y=700 \end{array}$$

Resolvemos utilizando la *regla de Cramer*:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1\,200 & 1 & 1 \\ 1\,300 & 0 & 2 \\ 700 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{100\cdot\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 13 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1+2-2}=\frac{100\cdot(13+14-24)}{1}=100\cdot 3=300.$$

$$y=\begin{vmatrix} 1 & 1\,200 & 1 \\ 1 & 1\,300 & 2 \\ 1 & 700 & 0 \end{vmatrix}=100\cdot\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 1 & 13 & 2 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}=100\cdot(7+24-13-14)=100\cdot 4=400.$$

$$z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\,200 \\ 1 & 0 & 1\,300 \\ 1 & 1 & 700 \end{vmatrix}=100\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 13 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}=100\cdot(12+13-13-7)=100\cdot 5=500.$$

El precio de los viajes es, al Caribe, $\boldsymbol{300\ euros}$, a las Maldivas, $\boldsymbol{400\ euros}$ y a Tailandia, $\boldsymbol{500\ euros.}$

$b)$ Como al Caribe organiza $(10+10+10)=30$ viajes, por los que percibe: $30\cdot 300=9\,000$ euros, si tiene que rebajar el 20 % deja de percibir el 20 % de 9 000: $20\ \%\ de\ 9.000=\frac{20\cdot 9.000}{100}=1\,800$.

Perdería $\boldsymbol{1\,800\ euros}$

$c)$ Como la agencia realiza $(10+10)=20$ viajes a las Maldivas por los cuales percibe $8\,000$ euros, al tener que recuperar las pérdidas por la rebaja de los viajes al Caribe, debe de percibir:

$8\,000+1\,800=9\,800$ euros que para cada uno de los 20 viajes: $\frac{9\,800}{20}=490$.

El precio del viaje a las Maldivas debe ser de $\boldsymbol{490\ euros}$

Problema 2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, a \in R$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$a)$ Escribe el sistema de ecuaciones $AX = X$ en la forma $BX = O$.

$b)$ Estudia para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones.

$c)$ Para $a = 0$ calcula, si existe, la inversa de A.

Solución:

$a)$ Reescribimos el sistema:

$A \cdot X = X \to \ A \cdot X - X = O \to \ A \cdot X - I \cdot X = O \to (A - I) \cdot X = O.$

$$(A - I) \cdot X = O$$

Como nos piden expresar $AX = X$ en la forma $BX = O$ tiene que ser $B = A - I$.

El producto de dos matrices es la matriz nula únicamente cuando alguna de las matrices es nula; como X no es nula, necesariamente debe serlo $B = A - I = O$.

$$B = A - I \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

El sistema homogéneo resulta: $\left.\begin{aligned} (a-1)x - z = 0 \\ -x - y = 0 \\ y + (a-1)z = 0 \end{aligned}\right\}$

$b)$ Al tratarse de un sistema homogéneo para que tenga solución distinta de la solución trivial, la matriz de coeficientes, B, tiene que tener un rango menor que 3, que es el número de incógnita, por lo cual ha, de ser $|B| = 0$:

$$|B| = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = 0 = -(a-1)^2 + 1 = 0 \to \ (a-1)^2 - 1 = a^2 - 2a + 1 - 1 =$$
$$a(a-2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 2.$$

Tiene infinitas soluciones para $a = 0$ y para $a = 2$

$c)$ Para $a = 0$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ entonces A tiene matriz inversa. La calculamos por el método de Gauss.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\{F_1 \leftrightarrow F_2\}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\{F_1 \to -F_1\}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\{F_2 \leftrightarrow F_3\}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\{F_3 \to -F_3\}$

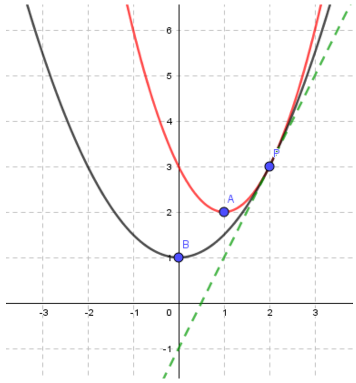
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3:

Sea las parábolas $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = ax^2 + b$.

$a)$ Calcula los valores de a y b para que en el punto de abscisa $x = 2$ las dos parábolas tengan la misma recta tangente. Calcula dicha recta tangente.

$b)$ Para $a = 1, b = 1$ esboza el recinto limitado por las parábolas entre el eje Y y el punto de corte entre ellas. Calcula el área del mismo.



Solución:

$a)$ Para $x = 2$ el punto de tangencia es común a las dos parábolas:

$$y_1(2) = y_2(2) \Rightarrow 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = a \cdot 2^2 + b; \;\; 4a + b = 3.$$

Imponemos que tengan la misma pendiente para $x = 2$:

$$y_1'(2) = y_2'(2) \Rightarrow \begin{Bmatrix} y_1' = 2x - 2 \\ y_2' = 2ax \end{Bmatrix} \Rightarrow y_1'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = y_2'(2) = 2a \cdot 2 \rightarrow$$

$$2 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Sustituimos el valor de a en la ecuación $4a + b = 3$: $4 \cdot \frac{1}{2} + b = 3 = \; 2 + b \Rightarrow b = 1$.

Las parábolas son entonces $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = \frac{1}{2}x^2 + 1$. El punto de tangencia es $P(2, 3)$ y la pendiente es $m = y_1'(2) = 4 - 2 = 2$.

La recta tangente es: $y = 3 + 2(x - 2) = 2x - 1$.

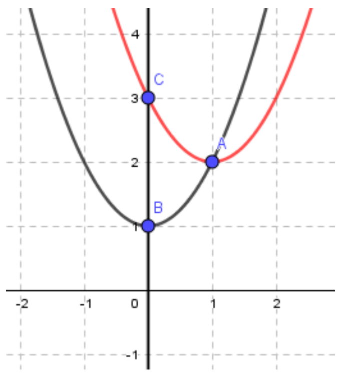
$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$. La $\boldsymbol{b = 1}$. recta tangente es: $\boldsymbol{y = 2x - 1}$

$b)$ Las nuevas parábolas dadas son: $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = x^2 + 1$. Ambas parábolas son convexas ($\cup$) por tener positivos los coeficientes de x^2. Calculamos sus vértices:

$y_1'(x) = 2x - 2 = 0 = 2(x - 1) \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 2)$

El vértice de $y_2 = x^2 + 1$ es $B(0, 1)$.

Las parábolas de cortan en el vértice de la primera: $A(1, 2)$.



Como se puede observar por la gráfica, el recinto limitado por las parábolas entre el eje Y y el punto de corte entre ellas es el limitado por los puntos $A(1, 2), B(0, 1)$ y $C(0, 3)$.

La superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^1 [y_1(x) = y_2(x)] \cdot dx = \int_0^1 [(x^2 - 2x + 3) - (x^2 + 1)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2x + 3 - x^2 - 1) \cdot dx = \int_0^1 (-2x + 2) \cdot dx = \left[-\frac{2x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = [-x^2 + 2x]_0^1 =$$

$$= (-1^2 + 2 \cdot 1) - 0 = -1 + 2 = 1.$$

$\boldsymbol{S = 1\, u^2}$

Problema 4:

Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo.

Solución:

Llamamos a los números $a, b, \frac{a+b}{2}$.

La suma es 90:

$a + b + \frac{a+b}{2} = 90 \rightarrow 2a + 2b + a + b = 180 = 3a + 3b \rightarrow\ a + b = 60 \Rightarrow b = 60 - a.$

El producto queremos que sea máximo: $P = a \cdot b \cdot \frac{a+b}{2}$.

$P(a) = a \cdot (60 - a) \cdot \frac{a+(60-a)}{2} = a \cdot (60 - a) \cdot 30 = 30 \cdot (60a - a^2).$

Una función tiene un máximo relativo cuando, en un punto en el que exista la deriva primera, se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada.

$P'(a) = 15 \cdot (60 - 2a) = 30 \cdot (60 - 2a).$

$P'(a) = 0 = 60 \cdot (30 - a) \Rightarrow a = 30.$

$P''(a) = -60 < 0 \Rightarrow$ Tenemos un máximo para $a = 30$, $b = 60 - a = 30, \frac{a+b}{2} = 30.$

Los tres números son: $\mathbf{30, 30}\ \boldsymbol{y}\ \mathbf{30}$

Problema 5:

Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = z \;\; y \;\; s: \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$:

a) Comprueba que las rectas se cruzan.

b) Obtenga el plano π que contiene a s y es paralelo a la recta r. Halla la distancia entre el punto $P(-1, 1, 0)$ de la recta r y el plano π.

c) Calcula la distancia entre las rectas.

Solución:

a) Escribimos las ecuaciones paramétricas de $s \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son:

Recta r: $P(-1, 1, 0) \; y \; \overrightarrow{v_r} = (3, -2, 1)$. Recta s: $B(-1, 0, 1) \; y \; \overrightarrow{v_s} = (-2, 1, 0)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ no son proporcionales por lo que son linealmente independientes, por tanto, las rectas $r \; y \; s$ se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Consideramos el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $P \in r$ y extremo el punto $B \in s$:

$\vec{w} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = [(-1, 0, 1) - (-1, 1, 0)] = (0, -1, 1)$.

Si los tres vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ no son coplanarios las rectas r y s se cruzan, y si lo son, se cortan.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero.

$Rang \; \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 - 4 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ No son coplanarios, luego:

Las rectas se cruzan.

b) Del plano π sabemos que por contener a s tiene como un vector de orientación: $\overrightarrow{v_s}$ y que contiene al punto $B(-1, 0, 1) \in s$. Por ser paralelo a r tiene como vector de orientación a $\overrightarrow{v_r} \; y \; \overrightarrow{v_s}$:

$\pi(B; \; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 = -(x+1) - 2y - (z-1) \to \;\; x + 1 + 2y + z - 1 = 0.$

$$\pi \equiv x + 2y + z = 0$$

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $P(-1, 1, 0)$ y al plano $\pi \equiv x + 2y + z = 0$:

$d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|-1 + 2 + 0|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

$$d(P, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{6} \; unidades$$

$c)$ Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, y el vector $\overrightarrow{w} = (0, -1, 1)$. Calculamos su volumen, que por una parte es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también es el producto del área de la base por la altura, siendo la altura igual a la distancia d pedida entre las rectas.

$$V = \overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}) = |\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| \cdot h = |\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| \cdot d \Rightarrow d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w})|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|}.$$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w})|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix} \right\|}{\left| \begin{matrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{matrix} \right|} = \frac{|3+2-4|}{|-2j+3k-4k-i|} = \frac{1}{|-i-2j-k|} = \frac{1}{|i+2j+k|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\boldsymbol{d(r,s) = \frac{\sqrt{6}}{6}\ u}$$

Problema 6:

Dados los puntos $A(1,1,0)$ y $B(0,0,2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$. Halla:

$a)$ Un punto $C \in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en B.

$b)$ El plano π que pasa por $A(1,1,0)$ y $B(0,0,2)$ y es paralelo a r.

Solución:

$a)$ Un punto genérico de r es $P(1, 1+\lambda, 1+\lambda)$.

Los puntos $A(1,1,0)$, $B(0,0,2)$ y $P(1,1+\lambda,1+\lambda)$ determinan los siguientes vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BP}$:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,0,2) - (1,1,0)] = (-1,-1,2)$.

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = [(1,1+\lambda,1+\lambda) - (0,0,2)] = (1,1+\lambda,-1+\lambda)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 = (-1,-1,2) \cdot (1,1+\lambda,-1+\lambda) = -1 - 1 - \lambda - 2 + 2\lambda = -4 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 4 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{C(1,5,5)}$$

$b)$ Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (0,1,1)$, que va a ser un vector director del plano π. Como nos dicen que plano π que pasa por $A(1,1,0)$ y $B(0,0,2)$, conocemos un punto, por ejemplo $B(0,0,2)$, y el otro vector de orientación $\overrightarrow{AB} = (-1,-1,2)$:

$$\pi(B;\, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{AB}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 = \; 3x - y + (z-2) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv 3x - y + z - 2 = 0}$$

Problema 7:

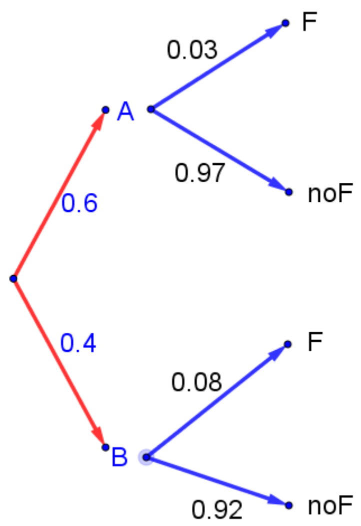
En un edificio hay dos ascensores. Cada vecino, cuando utiliza el ascensor, lo hace en el primero el 60 % de las veces y en el segundo el 40 %. El porcentaje de fallos del primer ascensor es del 3 % y del segundo es del 8 %.

$a)$ Un vecino usa un ascensor. ¿Cuál es la probabilidad de que el ascensor falle?

$b)$ Otro día, un vecino coge un ascensor y le falla. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido el segundo?

Solución:

Llamamos A al suceso usar el primer ascensor, y B al suceso usar el segundo. Llamamos F al suceso que falle el ascensor, y noF a que no falle. Llevamos los datos del enunciado a un diagrama de árbol:



$a)$ $P(F) = P(A) \cdot P(F/A) + P(B) \cdot P(F/B) = 0.6 \cdot 0.03 + 0.4 \cdot 0.08 = 0.018 + 0.032 = 0.05.$

$$P(F) = \mathbf{0.05}$$

$b)$ Es una probabilidad condicionada:

$$P(B/F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{P(B) \cdot P(F/B)}{P(F)} = \frac{0.4 \cdot 0.08}{0.05} = \frac{0.032}{0.05} = 0.64.$$

$$P(B/F) = \mathbf{0.64}$$

Problema 8:

Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 2$. Calcula:

a) La probabilidad de que $X \in [6, 10]$.

b) Se hace una revisión de los datos y se observa que la media coincide pero la probabilidad del 80 % se alcanza en el valor $X \leq 12$. ¿Cuál es la nueva desviación típica?

(Algunos valores de la función de distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x), F(0) = 0.5;\quad F(0.8416) = 0.8;\quad F(1) = 0.8413;\quad F(1.25) = 0.8944;\quad F(1.375) = 0.9154;\quad F(1.5) = 0.9332;\quad F(2) = 0.9772$).

Solución:

a) En el enunciado nos dicen que es una distribución normal de $\mu = 10;\ \sigma = 2$.

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(10, 2)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-10}{2}$.

$$P(X \in [6, 10]) = P(6 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{6-10}{2} \leq Z \leq \frac{10-10}{2}\right) = P(-2 \leq Z \leq 0) =$$

$$P(Z \leq 0) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 0) - [P(Z > 2)] = P(Z \leq 0) - [1 - P(Z < 2)] =$$

$$P(Z \leq 0) - 1 + P(Z < 2) = 0.5 - 1 + 0.9772 = 1.4772 - 1 = 0.4772.$$

$$P(X \in [6, 10]) = \mathbf{0.4772}$$

b) Nos dicen que: $P(X \leq 12) = 0.8$

$P(X \leq 12) = 0.8 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{12-10}{\sigma'}\right) = \left(Z \leq \frac{2}{\sigma'}\right) = 0.8.$

Mirando en la tabla $N(0, 1)$ de forma inversa, al valor 0.8 le corresponde, aproximadamente, 0.84:

$\frac{2}{\sigma'} \cong 0.84 \to \frac{2}{0.84} \cong \sigma' \cong 2.38.$

La nueva desviación típica es aproximadamente $\mathbf{2.38}$.

Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrl} ax & & & + & z & = a \\ 2x & - & y & - & z & = -1 \\ x & & & + & az & = a \end{array}\right\}$ $a \in \mathbb{R}$.

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de a. (1.5 puntos)

b) Resuélvelo para los casos en que el sistema sea compatible indeterminado. (1 punto)

Bloque 1.B Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) Si existe, su inversa. (1 punto)

b) La matriz X cuadrada de orden 3 que verifica:

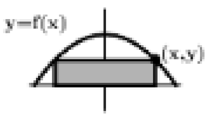
$(X+A)^2 - X^2 - X \cdot A = I_3$ (I_3 matriz identidad de orden 3). (1.5 puntos)

Bloque 2.A Sea la función $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

a) Haz un esbozo de su gráfica determinando: dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y regiones de convexidad y concavidad. (1.5 puntos)

b) Calcula el área de la región limitada por la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$, la recta $y = 1$ y el eje de ordenadas. (1 punto)

Bloque 2.B En una nave industrial se quiere instalar una pantalla de cine (ver figura). La forma de la nave es la descrita por la gráfica de la función $f(x) = 12 - \dfrac{x^2}{3} \geq 0$. Calcula los valores positivos (x, y) que hacen máxima el área de la pantalla. (2.5 puntos)



Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

Bloque 3.A

Sea el tetraedro de la figura formado por $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,6)$ y $D(\alpha,3,1)$. Calcula:

a) El área del triángulo limitado por los puntos A, B y C. (0.5 puntos)

b) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C. (0.75 puntos)

c) El valor de α para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π anterior. (0.75 puntos)

d) Para $\alpha = 5$, el punto D' simétrico de D respecto al plano π. (0.5 puntos)

Bloque 3.B Sean el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ Calcula:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r. (0.75 puntos)

b) La distancia de r a P y el punto $Q \in r$ donde se alcanza dicha distancia. (1 punto)

c) La ecuación del plano π que contiene a r y está a la misma distancia de P que r. (0.75 puntos)

Bloque 4.A Se tienen tres cajas. En la caja A hay 4 bolas negras y 6 bolas rojas. En la caja B, 6 dados negros y 2 dados rojos y en la caja C, 2 dados negros y 4 dados rojos. El suceso consiste en sacar una bola y un dado. En primer lugar se extrae al azar una bola de la caja A. Si es negra, se extrae al azar un dado de la caja B pero, si la bola es roja se extrae al azar un dado de la caja C. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos sin relación entre ellos:

a) La probabilidad de que la bola y el dado sean rojos. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que la bola y el dado sean del mismo color. (0.75 puntos)

c) La probabilidad de que el dado sea rojo. (1 punto)

Bloque 4.B Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 30$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

a) La probabilidad de que $X \leq 20$. (1.25 puntos)

b) Se hace una revisión de los datos y se observa que la probabilidad del 50 % se alcanza en el valor $X \leq 35$. y la probabilidad del 75 % se alcanza en el valor $X \leq 40$. ¿Cuáles son las nuevas media y desviación típica? (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.6745) = 0.75$, $F(0.8416) = 0.8$, $F(1) = 0.8413$, $F(1.375) = 0.9154$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(2) = 0.9772$)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{aligned} ax+z=a \\ 2x-y-z=-1 \\ x+az=a \end{aligned}\right\}, a \in R$.

$a)$ Estudia y clasifica el sistema según los valores de a.

$b)$ Resuélvelo para los casos en que el sistema sea compatible indeterminado.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & a & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}=-a^2+1=0;\ \ a^2=-1 \Rightarrow a_1=-1, a_2=1.$$

Para $a \neq -1$ y para $a \neq 1$ el rengo de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada, e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible determinado.

Para $a=-1$ la matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ de rango 3.

$$\left\{\begin{matrix} F_2 \to F_2+2F_1 \\ F_3 \to F_3+F_1 \end{matrix}\right\}$$

Como el rango de la matriz de los coeficientes es 2, y el de la matriz ampliada es 3, el sistema es incompatible.

Para $a=1$ la matriz ampliada es$M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene la fila primera igual a la tercera, por lo que su rango es 2, igual al rango de la matriz de los coeficientes y menor al número de incógnitas, por lo que el sistema compatible indeterminado.

$b)$ Para $a=1$ el sistema resulta $\left.\begin{aligned} x+z=1 \\ 2x-y-z=-1 \\ x+z=1 \end{aligned}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{aligned} x+z=1 \\ 2x-y-z=-1 \end{aligned}\right\}$. Haciendo $z=\lambda \to\ \ x=1-\lambda \to 2(1-\lambda)-y-\lambda=-1 \to y=3-3\lambda$

$$x=1-\lambda, y=3-3\lambda, z=\lambda, \forall\lambda \in R$$

Problema 2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula:

$a)$ Si existe, su inversa.

$b)$ La matriz X cuadrada de orden 3 que verifica: $(X + A)^2 - X^2 - X \cdot A = I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3.

Solución:

$a)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 - 2 - 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{La matriz es invertible}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

$b)$ $(X + A)^2 - X^2 - X \cdot A = I_3 \rightarrow \ X^2 + 2 \cdot X \cdot A + A^2 - X^2 - X \cdot A = I_3 \rightarrow X \cdot A + A^2 = I_3 \rightarrow$
$X \cdot A = I_3 - A^2 \rightarrow \ X \cdot A \cdot A^{-1} = (I_3 - A^2) \cdot A^{-1} \rightarrow X = (I_3 - A^2) \cdot A^{-1}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$I_3 - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -8 \\ -6 & -4 & -8 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X = (I_3 - A^2) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -8 \\ -6 & -4 & -8 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Problema 3:

Sea la función $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

$a)$ Haz un esbozo de su gráfica determinando: dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y regiones de convexidad y concavidad.

$b)$ Calcula el área de la región limitada por la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$, la recta $y = 1$ y el eje de ordenadas.

Solución:

$a)$ $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.

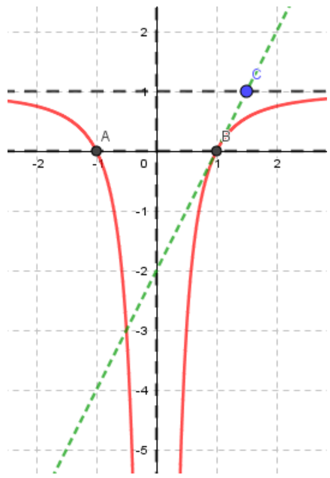
Dominio: Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador: $x^2 = 0 \to x = 0 \ \Rightarrow D(f) \Rightarrow R - \{0\}$.

Los *puntos de intersección* con el eje X son:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2} = 0; \ \ x^2 - 1 = 0; \ \ x_1 = -1 \to A(-1,0); \ \ x_2 = 1 \to B(1,0).$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito. $k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1 \Rightarrow y = 1$.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.



No tiene asíntotas oblicuas.

Una función es *creciente o decreciente* cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 2}{x^3} = \frac{2}{x^3}.$$

$f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$ decreciente. $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, +\infty)$ creciente

Una función tiene un *máximo o mínimo* relativo en un punto en que sea derivable, si se anula su primera derivada en ese punto. $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} = 0$. No hay máximos ni mínimos.

Una función es *cóncava* $(\cap)$ o *convexa* $(\cup)$ cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente. $f''(x) = \frac{-2\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-6}{x^4} < 0, \forall x \in D(f)$. La función es cóncava en todo su dominio.

La función es *simétrica* con respecto al eje de ordenadas, pues $f(-x) = f(x)$.

$b)$ Para $x = 1$ es $f(1) = \frac{1^2-1}{1^2} = 0$, por lo cual el punto de tangencia es $B(1,0)$. La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es el valor de la primera derivada de la función en ese punto: $m = f'(1) = \frac{2}{1^3} = 2$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por: $y = y_0 + m(x - x_0)$:

$y = 0 + 2 \cdot (x - 1) = 2x - 2.$

El punto de intersección de la tangente $y = 2x - 2$ y la recta $y = 1$ es:

$\left.\begin{array}{r} y = 2x - 2 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x - 2 = 1 \Rightarrow \ 2x = 3 \Rightarrow \ x = \frac{3}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}, 1\right).$

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

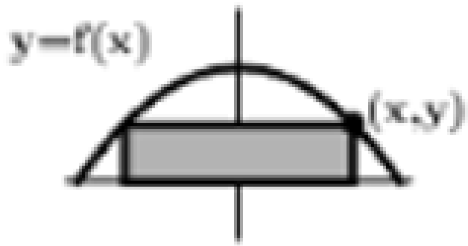
$$\acute{A}rea = \int_0^{\frac{3}{2}} [1 - (2x - 2)] \cdot dx = \int_0^{\frac{3}{2}} (1 - 2x + 2) \cdot dx = \int_0^{\frac{3}{2}} (3 - 2x) \cdot dx = \left[3x - \frac{2x^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{2}} =$$
$$[3x - x^2]_0^{\frac{3}{2}} = \left[3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] - 0 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{18-9}{4} = \frac{9}{4}.$$

O bien, es un triángulo de base 3/2 y altura 3, luego $\acute{A}rea = \left(\frac{\frac{3}{2} \cdot 3}{2}\right) = \frac{9}{4}\ u^2$

$$\acute{A}rea = \boldsymbol{\frac{9}{4}\ u^2} = 2.25\ u^2$$

Problema 4:

En una nave industrial se quiere instalar una pantalla de cine (ver figura). La forma de la nave es la descrita por la gráfica de la función $f(x) = 12 - \frac{x^2}{3} \geq 0$. Calcula los valores positivos (x, y) que hacen máxima el área de la pantalla.



Solución:

Las coordenadas del punto P de la función, son: $P\left(x, 12 - \frac{x^2}{3}\right)$.

Teniendo en cuanta que la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas: $f(-x) = -f(x)$.

La dimensión de la pantalla, en función de x, es:

$S(x) = 2 \cdot x \cdot \left(12 - \frac{x^2}{3}\right) = 24x - \frac{2x^3}{3} = \frac{2}{3} \cdot (36x - x^3)$.

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$S'(x) = \frac{2}{3} \cdot (36 - 3x^2) = 2 \cdot (12 - x^2)$.

$S'(x) = 0 = 2 \cdot (12 - x^2) = 0 \Rightarrow\ 12 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

La raíz negativa no se ha tenido en cuenta por ser una longitud.

$$S''(x) = 2 \cdot (-2x) = -4x \Rightarrow S''\left(2\sqrt{3}\right) = -8\sqrt{3} < 0$$

Por tanto, es un máximo.

$y = 12 - \frac{\left(\sqrt{12}\right)^2}{3} = 12 - 4 = 8$.

Para $\boldsymbol{x = 2\sqrt{3}}\ metros$ y para $\boldsymbol{y = 8}\ metros$ la superficie de la pantalla es máxima.

Problema 5:

Sea el tetraedro de vértices $A(3,0,0), B(0,2,0), C(0,0,6)\ y\ D(a,3,1)$. Calcula:

$a)$ El área del triángulo limitado por los vértices $A(3,0,0), B(0,2,0)\ y\ C(0,0,6)$.

$b)$ La ecuación del plano π que contiene a los puntos $A(3,0,0), B(0,2,0)\ y\ C(0,0,6)$.

$c)$ El valor de α para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π anterior.

$d)$ Para $\alpha = 5$, el punto D' simétrico de D respecto al plano π.

Solución:

$a)$ Los puntos $A(3,0,0), B(0,2,0), C(0,0,6)$ determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,2,0) - (3,0,0)] = (-3,2,0)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(0,0,6) - (3,0,0)] = (-3,0,6)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2} \cdot |12i + 6k + 18j| = |6i + 9j + 3k| = 3 \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = 3 \cdot \sqrt{14}.$$

$$\boldsymbol{S = 3 \cdot \sqrt{14}\, u^2}$$

$$b)\ \pi\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC};\ A\right) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 = 4(x-3) + 2z + 6y = 0 \to 2(x-3) + 3y + z = 0;$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv 2x + 3y + z - 6 = 0}$$

$c)$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(a,3,1) - (3,0,0)] = (a-3,3,1)$.

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n_\pi} = (2,\ 3,1)$. Para que es vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π es necesario que sea linealmente dependiente del vector normal del plano, es decir: que sus componentes sean proporcionales:

$\frac{a-3}{2} = \frac{3}{3} = \frac{1}{1} \to \frac{a-3}{2} = 1 \to\ a - 3 = 2 \to a = 5.$

$$\boldsymbol{a = 5}$$

$d)$ Para $\alpha = 5$ es $D(5,3,1)$. La recta t que pasa por D y es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector normal del plano: $\overrightarrow{n_\pi} = (2.3,1)$. $t \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t es: $\left.\begin{matrix} \pi \equiv 2x + 3y + z - 6 = 0 \\ t \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$2(5+2\lambda)+3(5+3\lambda)+(1+\lambda)=6 \to 10+4\lambda+15+9\lambda+1+\lambda=6;\ \ 14\lambda=-14;\ \ \lambda=-1 \Rightarrow M(3,0,0).$

Tiene que verificarse que $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MD'}$.

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OD}=[(3,0,0)-(5,3,1)]=(-2,-3,-1).$

$\overrightarrow{MD'}=\overrightarrow{OD'}-\overrightarrow{OM}=[(x,y,z)-(3,0,0)]=(x-3,y,z).$

$$(-2,-3,-1)=(x-3,y,z) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-3=-2 \to x=1 \\ y=-3 \\ z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{D'(1,-3,-1)}$$

Problema 6:

Sea el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$. Calcula:

$a)$ Las ecuaciones paramétricas de la recta r.

$b)$ La distancia de r a P y el punto $Q \in r$ donde alcanza dicha distancia.

$c)$ La ecuación del plano π que contiene a r y está a la misma distancia de P que r.

Solución:

$a)$ Llamamos a $z=\lambda$

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda;\ \ x=-\lambda;\ \ y=0 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}}$$

$b)$ Un punto y un vector director de r son $O(0,0,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,0,-1)$.

El haz de planos α perpendiculares a r tiene por expresión $\alpha \equiv x-z+D=0$. De los infinitos planos del haz α, el plano β, que contiene al punto $P(1,0,1)$, es:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv x-z+D=0 \\ P(1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1-1+D=0 \rightarrow \ \ D=0 \Rightarrow \beta \equiv x-z=0.$$

El punto Q, intersección de la recta r y el plano β, es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv x-z=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -\lambda-\lambda=0 \Rightarrow \ \lambda=0 \Rightarrow Q \equiv O(0,0,0).$$

$$d(r,P)=\left|\overrightarrow{QP}\right|=|(1,0,1)|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\,u \Rightarrow \underline{d(r,P)}.$$

$$\boldsymbol{d(r,P)=\sqrt{2}\,u}$$

$c)$ El plano π pedido tiene como vector normal a cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{QP}=(1,0,1)$, por ejemplo, $\vec{n}=\overrightarrow{QP}=(1,0,1)$ y contiene a r, por lo cual, contiene a todos sus puntos, por ejemplo, a $Q(0,0,0) \in r$.

$$\left.\begin{array}{r} x+z+D=0 \\ Q(0,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow D=0 \Rightarrow \pi \equiv x+z=0.$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv x+z=0}$$

Problema 7:

Se tienen tres cajas. En la caja A hay 4 bolas negras y 6 bolas blancas. En la caja B, 6 dados negros y dos dados blancos y en la caja C, dos dados negros y 4 dados blancos. El suceso consiste en sacar una bola y un dado. En primer lugar, se extrae al azar una bola de la caja A. Si es negra, se extrae al azar un dado de la caja B pero, si la bola es blanca se extrae al azar un dado de la caja C. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos sin relación entre ellos:

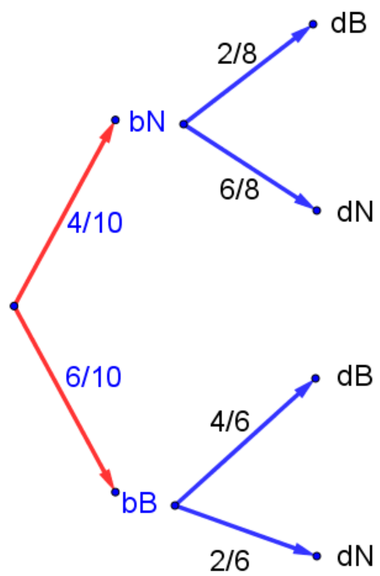
$a)$ La probabilidad de que la bola y el dado sean blancos.

$b)$ La probabilidad de que la bola y el dado sean del mismo color.

$c)$ La probabilidad de que el dado sea blanco.

Solución:

Llamamos bB al suceso sacar una bola blanca, y bN a sacarla negra. Llamamos dB al suceso de sacar un dado blanco, y dN a sacarlo negro. Representamos los datos del enunciado en un diagrama de árbol.



$a)\ P(bB)\cdot P(dB)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{5}.$

La probabilidad de que la bola y el dado sean blancos es **2/5**.

$b)\ P(bN)\cdot P(dN)+P(bB)\cdot P(dB)=\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{8}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{6}=\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}.$

La probabilidad de que la bola y el dado sean del mismo color es **7/10**.

$c)\ P(bN)\cdot P(dB)+P(bB)\cdot P(dB)=\frac{4}{10}\cdot\frac{2}{8}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{10}+\frac{4}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$

La probabilidad de que el dado sea blanco es **1/2**.

Problema 8:

Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 30$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

$a)$ La probabilidad de que $X \leq 20$.

$b)$ Se hace una revisión de los datos y se observa que la probabilidad del 50 % se alcanza en el valor $X \leq 35$ y la probabilidad del 75 % se alcanza en el valor $X \leq 40$. ¿Cuáles son las nuevas media y desviación típica?

Solución:

$a)$ Los datos del enunciado son: $\mu = 30$; $\sigma = 10$; $X \to N(\mu;\ \sigma) = N(30, 10)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-30}{10}$.

$$P(X \leq 20) = P\left(Z \leq \frac{20-30}{10}\right) = P\left(Z \leq \frac{-10}{10}\right) = P(Z \leq -1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

La probabilidad de que $X \leq 20$ es $\mathbf{0.1587}$.

$b)$

$$\left.\begin{array}{r} P(X \leq 35) = 0.5 = P\left(Z \leq \frac{35-\mu}{\sigma}\right) \\ P(X \leq 40) = 0.75 = P\left(Z \leq \frac{40-\mu}{\sigma}\right) \end{array}\right\}.$$

Mirando en la tabla $N(0, 1)$ de forma inversa, al valor 0.5 le corresponde 0 y al valor 0.75 le corresponde, aproximadamente, 0.675:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{35-\mu}{\sigma} = 0 \\ \frac{40-\mu}{\sigma} = 0.675 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{35-\mu}{\sigma'} = 0 \to \mu = 35 \to \frac{40-35}{\sigma} = 0.675;\ \ \sigma = \frac{5}{0.675} \cong 7.41.$$

Las nuevas media y desviación típica son $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{35}$ y $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{0.675}} \cong \mathbf{7.41}$.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

BALEARES

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Barrientos Fernández

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATERIA: MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA *DE JUNIO*

Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix},$$

(a) Estudia el rang de la matriu A segons els valors de a. (6 punts)

(b) Determina per a quins valors de a la matriu A és invertible. (1 punt)

(c) Per al valor de $a = -1$ calcula la solució, X, de l'equació matricial

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ (3 punts)

2. Sigui la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcula A^t, A^2 i A^{-1}, on A^t és la matriu transposada i A^{-1} la inversa. (3 punts)

(b) Sigui I la matriu identitat. Resol X de l'equació

$$A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$ (3 punts)

(c) Calcula totes les matrius B per a les quals es té que

$$A \cdot B = B \cdot A^t$$ (4 punts)

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATERIA: MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORI *DE JUNIO*

3. Considera la funció
$$f(x) = \frac{1}{x^4}.$$
   (a) Representa-la gràficament. (7 punts)
   (b) Comprova que $f(2) = f(-2)$. (1 punt)
   (c) Comprova que no existeix $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$. (1 punt)
   (d) Hi ha una contradicció amb la conclusió del teorema de Rolle? (1 punt)

4. Donada la funció
$$f(x) = \frac{-x}{4 - x^2}.$$
   (a) Calcula una primitiva de $f(x)$. (5 punts)
   (b) Calcula l'àrea delimitada per la gràfica de $f(x)$, les rectes $x = \sqrt{5}$ i $x = \sqrt{6}$, i l'eix X. (5 punts)

5. Considera els punts,
$$A = (5, a, 7), \quad B = (3, -1, 7), \quad C = (6, 5, 4).$$
   (a) Determina el valor del paràmetre a per al qual els punts A, B i C formen un triangle rectangle, amb l'angle recte al punt B. (3 punts)
   (b) Per al valor de $a = -2$, calcula l'àrea del triangle de vèrtexs A, B i C. (3 punts)
   (c) Per al valor de $a = 5$, calcula l'angle format pels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. (4 punts)

6. Donades les rectes
$$r: \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1}, \qquad s: \begin{cases} x = 1, \\ y = 6 + 4\lambda, \\ z = -1 + 2\lambda. \end{cases}$$
   (a) Calcula el valor de m per tal que es tallin en un punt, (7 punts)
   (b) Calcula el punt de tall. (3 punts)

7. Es disposa de dues urnes: U_1 i U_2.
A U_1 hi ha: 4 bolles vermelles i 5 bolles negres.
A U_2 hi ha: 6 bolles vermelles i 3 bolles negres.
A l'atzar es treu una bolla de U_1 i s'introdueix a U_2, a continuació s'extreu a l'atzar una bolla de U_2. Calcula la probabilitat que:
   (a) surti una bolla vermella de U_2 (3 punts)
   (b) la bolla extreta de U_1 sigui negra, sabent que la bolla que ha sortit de U_2 també ha estat negra. (3 punts)
   (c) surti almenys una bolla vermella. (4 punts)

8. Una companyia aèria ha observat que els pesos de les maletes d'un determinat trajecte segueixen una distribució normal de mitjana 7,5 kg i desviació típica de 0,4 kg. Calcula la probabilitat que, escollida una maleta a l'atzar:
   (a) pesi menys de 7,2 kg però més de 7 kg. (4 punts)
   (b) pesi entre 7,8 kg i 8 kg. (3 punts)
   (c) Si en un trajecte hi ha 90 maletes, quantes maletes és d'esperar que pesin almenys 8,1 kg? (3 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$:

a) Estudia el rango de la matriz A según los valores de a.

b) Determina para qué valores de a la matriz A es invertible.

c) Para el valor $a = -1$ calcula la solución, X, de la ecuación matricial $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Determinamos el valor del $|A|$ para conocer su rango, y si es invertible:

$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^6 + a^2 + a^2 - a^4 - a^2 - a^4 = a^6 - 2a^4 + a^2 = a^2(a^4 - 2a^2 + 1) =$
$a^2(a^2-1)^2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = -1.$

Para $a \neq 0$, $a \neq 1$ y para $a \neq -1$ el rango de la matriz A es 3, y como su determinante es distinto de cero, es invertible.

Para $a = 0$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, y el rango de la matriz A es 2, y no es invertible.

Para $a = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ el rango de la matriz A es 1, y no es invertible.

Para $a = -1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ el rango de la matriz A es 1, y no es invertible.

b) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$\forall a \in R - \{0, 1, -1\}$, la matriz A tiene inversa.

c) Para $a = -1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Ya sabemos que el rango de la matriz A es 1

Planteamos la ecuación: $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{matrix}\right\}.$

Sistema homogéneo con el rango de la matriz de coeficientes 1, menor que el número de incógnitas.

Según el teorema de *Rouché-Fröbenius* es un sistema compatible indeterminado, con dos grados de libertad (dos parámetros).

Hacemos $y = \lambda, z = \mu \ \Rightarrow$

$\boldsymbol{x = \lambda + \mu, y = \lambda, z = \mu}, \ \forall \lambda, \mu \in R.$

Problema 2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcula $A^t, A^2\ y\ A^{-1}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} la inversa de A.

$b)$ Sea I la matriz identidad. Resuelve X de la ecuación $A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

$c)$ Calcula todas las matrices B tales que $A \cdot B = B \cdot A^t$.

Solución:

$a)$. $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\{F_2 \to F_2 - 2F_1\}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\{F_2 \to -F_2\}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \underset{\{F_1 \to F_1 - F_2\}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$b)$ Sustituimos los valores ya obtenidos:

$$A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - 2AX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 2AX;\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 2AX;\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = AX.$$

Multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot A \cdot X \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

$c)$ Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = B \cdot A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a+b \\ c+d & 2c+d \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b = c \\ d = 2a \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}, \forall a, b \in R}$$

Problema 3:

Considera la función $f(x) = \frac{1}{x^4}$.

$a)$ Represéntala gráficamente.

$b)$ Comprueba que $f(2) = f(-2)$.

$c)$ Comprueba que no existe $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$.

$d)$ ¿Hay alguna contradicción con las hipótesis del teorema de Rolle?

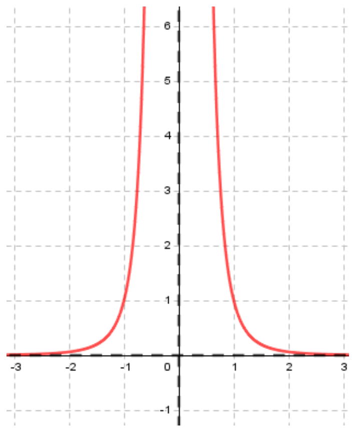
Solución:

$a)$ La función $f(x)$ está definida para todo valor real de x, excepto para $x = 0$, por lo cual: $D(f) = R - \{0\}$.

La función $f(x) = \frac{1}{x^4}$ es simétrica con respecto al eje, por ser $f(-x) = f(x)$ y también verifica que $f(x) > 0, \forall x \in D(f)$.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^4} = 0 \Rightarrow$ El eje $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty \Rightarrow$ El eje $x = 0$ es asíntota vertical de la función.



$b)$ Por ser simétrica la función con respecto al eje de ordenadas se verifica que $f(2) = f(-2)$:

$$\left. f(2) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}; f(-2) = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16} \right\}$$

$c, d)$ El *teorema de Rolle* dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Sabemos que $f(2) = f(-2)$, pero en $x = 0 \in [-2, 2]$ la función no es ni continua ni derivable, por lo que no verifica las condiciones del teorema.

Por otra parte: $f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4} \Rightarrow f'(x) = -4 \cdot x^{-3} = -\frac{4}{x^3} = 0 \Rightarrow x = \pm\infty \notin R$.

No existe $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$, y no hay contradicción con el teorema de Rolle

Problema 4:

Dada la función $f(x) = \frac{-x}{4-x^2}$:

$a)$ Calcula una primitiva de $f(x)$.

$b)$ Calcula el área delimitada por la gráfica de $f(x)$, las rectas $x = \sqrt{5}$ y $x = \sqrt{6}$ y el eje X.

Solución:

$a)$ Es la integral de una función racional, o una integral inmediata de tipo logaritmo.

La derivada de $4 - x^2$ es $-2x$, que podemos completar:

$$F(x) = \int \frac{-x}{4-x^2} \cdot dx = \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{4-x^2} \cdot dx = \frac{1}{2}L(4-x^2) + C = L\sqrt{x^2-4} + C$$

Si queremos hacerla como racional, determinamos los coeficientes:

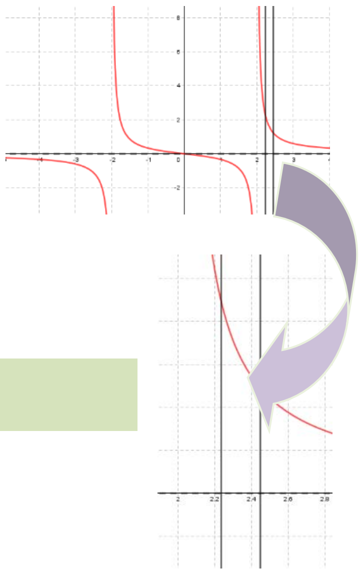
$$\frac{-x}{4-x^2} = \frac{-x}{(2+x)(2-x)} = \frac{A}{2+x} + \frac{B}{2-x} = \frac{2A - Ax + 2B + Bx}{4-x^2} = \frac{(-A+B)x + (2A+2B)}{4-x^2} \Rightarrow$$

$$-A + B = -1;\ 2A + 2B = 0 \Rightarrow A = -B; 2B = -1 \ \Rightarrow B = -\frac{1}{2};\ \ A = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \int \frac{-x}{4-x^2} \cdot dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{2+x} + \frac{-\frac{1}{2}}{2-x} \right) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{2+x} \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x-2} \cdot dx =$$

$\frac{1}{2} \cdot L|x+2| + \frac{1}{2} \cdot L|x-2| + C = \frac{1}{2} \cdot L(|x+2| \cdot |x-2|) = \frac{1}{2} \cdot L|x^2-4| + C = L\sqrt{x^2-4} + C \Rightarrow$

Una primitiva es $\boldsymbol{F(x) = L\sqrt{x^2-4}}$



$b)$ La superficie a calcular es:

$S = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} f(x) \cdot dx = \left[L\sqrt{x^2-4}\right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} = L\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 - 4} - L\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 4} =$

$$= L\sqrt{2} - L\sqrt{1} = L\sqrt{2} - L(1) = L\sqrt{2} - 0 = \frac{1}{2}L(2)u^2 \cong 0.35\ u^2$$

$$S = \boldsymbol{\frac{1}{2}L(2)u^2} \cong 0.35\ u^2$$

Problema 5:

Considera los puntos $A(5, a, 7), B(3, -1, 7)$ y $C(6, 5, 4)$.

$a)$ Determina el valor del parámetro a para que los puntos $A(5, a, 7), B(3, -1, 7)$ y $C(6, 5, 4)$ formen un triángulo rectángulo en B.

$b)$ Para el valor de $a = -2$, calcula el área del triángulo de vértices $A(5, a, 7), B(3, -1, 7)$ y $C(6, 5, 4)$.

$c)$ Para el valor de $a = 5$, calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución:

$a)$ Para que los puntos $A(5, a, 7), B(3, -1, 7)$ y $C(6, 5, 4)$ formen un triángulo es necesario que sean coplanarios. Determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(3, -1, 7) - (5, a, 7)] = (-2, -1 - a, 0)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(6, 5, 4) - (5, a, 7)] = (1, 5 - a, -3)$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = [(6, 5, 4) - (3, -1, 7)] = (3, 6, -3)$.

Los puntos $A(5, a, 7), B(3, -1, 7)$ y $C(6, 5, 4)$ son coplanarios cuando el rango de los vectores que determinan sea menor que tres.

Calculamos el determinante de la matriz que forman y lo igualamos a cero:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1-a & 0 \\ 1 & 5-a & -3 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1+a & 0 \\ 1 & 5-a & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1+a & 0 \\ 1 & 5-a & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 = -2(5-a) - 3(1+a) + 12 + (1+a) = (5-a) + (1+a) - 6 = 6 - 6 = 0$$

Los puntos son coplanarios $\forall a \in R$

Para que formen un triángulo rectángulo los vectores deben ser ortogonales, luego su producto escalar debe ser cero:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 = (-2, -1-a, 0) \cdot (3, 6, -3) = -6 - 6 - 6a - 0 = -12 - 6a = 0 \Rightarrow \ 2 + a = 0$$

El ángulo B es recto cuando $\boldsymbol{a = -2}$

$b)$ Para $a = -2$: $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, 0), \overrightarrow{AC} = (1, 7, -3), \overrightarrow{BC} = (3, 6, -3)$.

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{9+36+9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

El área del triángulo de base $\sqrt{5}$ y altura $3\sqrt{6}$ es $S = \frac{\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{30}\ u^2$

Otra forma de hacerlo: El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |-3i - 14k - k - 6j| = \frac{1}{2} \cdot |-3i - 6j - 15k| = \frac{3}{2} \cdot |i + 2j + 5k| = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{30}.$$

$$S = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{30}}\,\boldsymbol{u^2} \cong 8.22\,u^2$$

$c)$ Para $a = 5$: $\overrightarrow{AB} = (-2, -6, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, 0, -3)$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\alpha \;\Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(-2, -6, 0) \cdot (1, 0, -3)}{\sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{-2 - 0 - 0}{\sqrt{4 + 36} \cdot \sqrt{1 + 9}} = \frac{-2}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-2}{\sqrt{400}} = \frac{-2}{20} = -\frac{1}{10} = -0.1$$

$$\boldsymbol{\alpha = 95° \;\; 44' \, 21''}$$

Problema 6:

Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + 4\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$.

$a)$ Calcula el valor de m para que las rectas se corten en un punto.

$b)$ Calcula el punto de corte.

Solución:

$a)$ Escribimos las ecuaciones paramétricas de $r \equiv \begin{cases} x = m - \mu \\ y = -10 + 4\mu \\ z = -3 + \mu \end{cases}$.

Como las rectas se cortan en un punto, buscamos ese punto: $\left.\begin{array}{r} 1 = m - \mu \\ 6 + 4\lambda = -10 + 4\mu \\ -1 + 2\lambda = -3 + \mu \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} 6 + 4\lambda = -10 + 4\mu \\ -1 + 2\lambda = -3 + \mu \\ m = 1 + \mu \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3 + 2\lambda = -5 + 2\mu \\ -1 + 2\lambda = -3 + \mu \\ m = 1 + \mu \end{array}\right\} \Rightarrow 4 = -2 + \mu; \;\; \mu = 6; m = 1 + \mu = 7.$$

$$\boldsymbol{m = 7}$$

$b)$ Como $\mu = 6$, el punto de corte es: $\begin{cases} x = 7 - 6 = 1 \\ y = -10 + 4 \cdot 6 = 14 \\ z = -3 + \mu = -3 + 6 = 3 \end{cases} \Rightarrow P(1, 14, 3).$

$$\boldsymbol{P(1, 14, 3)}$$

Problema 7:

Se dispone de dos urnas: U_1 *y* U_2. La U_1 contiene 4 bolas blancas y 5 bolas negras; la U_2 contiene 6 bolas blancas y 3 bolas negras. Al azar se extrae una bola de U_1 y se introduce en U_2 y, a continuación, se extrae una bola de U_2. Calcula la probabilidad que:

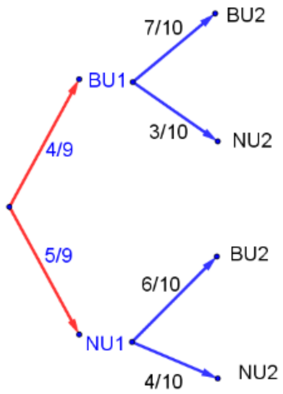
$a)$ Se obtenga una bola blanca.

$b)$ La bola extraída de U_1 sea negra, sabiendo que la bola sacada de U_2 también ha sido negra.

$c)$ Salga al menos una bola blanca.

Solución:

Llamamos BU_1 al suceso sacar una bola blanca de la urna U_1, y NU_1 a sacar una bola negra de dicha urna. Llamamos BU_2 al suceso sacar una bola blanca de la urna U_2, y NU_2 a sacar una bola negra de dicha urna. El diagrama de árbol es:



$a)$ $P(BU_2) = P(BU_1) \cdot P(BU_2/BU_1) + P(NU_1) \cdot P(BU_2/NU_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} = \frac{28+30}{90} = \frac{29}{45} = 0.6444.$

La probabilidad de que se obtenga una bola blanca es de $\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{45}} = \mathbf{0.6444}$

$b)$ Es una probabilidad condicionada

$$P(NU_1/NU_2) = \frac{P(NU_1 \cap NU_2)}{P(NU_2)} = \frac{P(NU_1) \cdot P(NU_2/NU_1)}{1 - P(BU_2)} = \frac{\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{10}}{1 - \frac{29}{45}} = \frac{\frac{10}{45}}{\frac{45-29}{45}} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 0.625.$$

La probabilidad de que la bola extraída de U_1 sea negra, sabiendo que la bola sacada de U_2 también ha sido negra es de $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}} = \mathbf{0.625}$

$c)$ Utilizamos la probabilidad del suceso contrario: La probabilidad de que salga al menos una bola blanca es la unidad menos la probabilidad de que salgan dos bolas negras:

$$P = 1 - P(NU_1) \cdot P\left(\frac{NU_2}{NU_1}\right) = 1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{5} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} = 0.7778.$$

La probabilidad de que salga al menos una bola blanca es $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{9}} = \mathbf{0.7778}$

Problema 8:

Una compañía aérea ha observado que los pesos de las maletas de un determinado trayecto siguen una distribución normal de media 7.5 kg y desviación típica 0.4 kg. Calcula la probabilidad que, escogida una maleta al azar:

$a)$ Pese menos de 7.2 kg pero más de 7 kg.

$b)$ Pese entre 7.8 kg y 8 kg.

$c)$ Si en un trayecto hay 90 maletas, ¿cuántas maletas se debe esperar que pesen al menos 8.1 kg?

Solución:

Nos dice que es una distribución normal de media $\mu = 7.5$ kg y desviación típica $\sigma = 0.4$ kg.

$X \to N(\mu, \sigma) = N(7.5, 0.4)$. Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-7.5}{0.4}$.

$a)$ $P = P(7 \le X \le 7.2) = P\left(\frac{7-7.5}{0.4} \le Z \le \frac{7.2-7.5}{0.4}\right) = P\left(\frac{-0.5}{0.4} \le Z \le \frac{-0.3}{0.4}\right) = P(-1.25 \le Z \le -0.75) = [1 - P(Z < 0.75)] - [1 - P(Z < 1.25)] = P(Z < 1.25) - P(Z < 0.75) = 0.8944 - 0.7734 = 0.1210$

La probabilidad de que pese menos de 7.2 kg pero más de 7 kg es $\mathbf{0.1210}$

$b)$ $P(7.8 \le X \le 8) = P\left(\frac{7.8-7.5}{0.4} \le Z \le \frac{8-7.5}{0.4}\right) = P\left(\frac{0.3}{0.4} \le Z \le \frac{0.5}{0.4}\right) = P(0.75 \le Z \le 1.25) = P(Z < 1.25) - P(Z < 0.75) = 0.8944 - 0.7734 = 0.1210$

La probabilidad de que pese entre 7.8 kg y 8 kg es $\mathbf{0.1210}$

$c)$ $P(X > 8.1) = P\left(Z > \frac{8.1-7.5}{0.4}\right) = P\left(Z > \frac{0.6}{0.4}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \le 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668.$

Utilizamos una distribución binomial:

$n = 90.$ $N = p \cdot n = 0.0668 \cdot 90 = 6.01.$

$\mathbf{6}$ de las maletas pesan más de 8.1 kg.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

Model 1

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1. Considera les matrius:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcula'n els determinants: $\det(\mathbf{A})$, $\det(\mathbf{B})$. (2 punts)

(b) Calcula la matriu producte $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, la matriu transposada $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})^t$. (3 punts)

(c) Perquè es compleixi la relació $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, quantes files i columnes ha de tenir la matriu $\mathbf{X}$? (2 punts)

(d) Calcula la matriu $\mathbf{X}$ que satisfà la relació (3 punts)

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}.$$

2. Una empresa fabrica tres tipus de bombeta: A, B i C. La bombeta tipus A té 10 punts LED, la tipus B té 20 punts LED, i la tipus C té 50 punts LED. El nombre de bombetes de 10 punts LED fabricades diàriament és λ vegades el nombre de bombetes de 50 punts LED. A l'empresa l'interessa saber quantes bombetes de cada tipus pot fabricar diàriament.

(a) Si $\lambda = 2$, i aquesta empresa usa, diàriament, 30000 punts LED amb els quals fabrica 1300 bombetes:

(i) planteja el sistema d'equacions lineals d'aquest problema. (3 punts)

(ii) classifica el sistema d'equacions lineals i, si és possible, determina quantes bombetes de cada tipus es poden fabricar. (4 punts)

(b) Si $\lambda = 3$, i l'empresa fabrica diàriament 1000 bombetes; classifica el sistema d'equacions lineals i determina el nombre de punts LED necessaris. (2 punts)

En aquest cas, quantes bombetes de cada tipus es poden fabricar? (1 punt)

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL
CURSO: **2020–2021**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

3. Considera la funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{2x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ b & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

(a) Estudia la continuïtat de la funció f als punts $x_0 \neq 0$. (3 punts)

(b) Calcula la relació que hi ha d'haver entre a i b perquè f sigui una funció contínua al punt $x_0 = 0$. (5 punts)

(c) Si per als valors de $a = 2$ i $b = 1$, f és una funció derivable al punt $x = 0$, calcula $f'(0)$. (2 punts)

4. El nombre d'individus d'una població en un determinat instant de temps, t, expressat en milions d'individus, ve donat per la funció

$$P(t) = \frac{15 + t^2}{(t+1)^2},$$

on la variable real $t \geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000.

(a) Calcula la població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000. (2 punts)

(b) Prova que el nombre d'individus de la població assoleix un mínim. Quin any s'assoleix aquest mínim? Quants d'individus hi haurà l'any del mínim? (4 punts)

(c) Calcula la grandària de la població, això és el nombre d'individus, que hi haurà a llarg termini. (4 punts)

5. Donades les rectes

$$\text{(I)} \begin{cases} y &= x + 3, \\ z &= 2x + 2, \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} y &= -\frac{1}{2}, \\ x &= 2z + 3, \end{cases}$$

(a) Calcula l'equació vectorial de cada una de les rectes (I) i (II). (1 punt)

(b) Si és possible, calcula el pla paral·lel a la recta (II) que conté a la recta (I).(3 punts)

(c) Calcula el pla perpendicular a la recta (II) que passa pel punt $(-1, 0, 2)$. (3 punts)

(d) Calcula la recta de direcció perpendicular a les de les rectes (I) i (II) que passa per l'origen. (3 punts)

6. Donats els punts

$$P = (1, 0, 1), \quad Q = (1, 1, 0), \quad \text{i} \quad R = (0, 1, 1).$$

(a) Comprova que P, Q i R no estan alineats. (2 punts)

(b) Calcula l'equació vectorial del pla que determinen P, Q i R. (3 punts)

(c) Calcula l'àrea del triangle que té per vèrtexs P, Q i R. (3 punts)

(d) Calcula, de forma raonada, la condició que han de complir a, b i c perquè els punts P, Q, R i $S = (a, b, c)$ pertanyin a un mateix pla. (2 punts)

7. En una urna hi ha 12 bolles vermelles, 8 bolles blanques i 5 bolles blaves. Es realitza l'experiment aleatori d'extreure dues bolles, consecutivament i sense devolució a l'urna. Calcula la probabilitat dels següents esdeveniments:

(a) **A**="les dues bolles són vermelles" (2 punts)

(b) **B**="les dues bolles són del mateix color" (3 punts)

(c) **C**="almenys una bolla és vermella" (3 punts)

(d) **D**="cap de les dues bolles és vermella" (2 punts)

8. L'alçada de les persones d'una classe es distribueix segons una normal de mitjana 160 cm i desviació típica 10 cm. Calcula la probabilitat que, escollida a l'atzar una persona de la classe, la seva alçada:

(a) sobrepassi els 170 cm. (3 punts)

(b) sigui menor que 155 cm. (3 punts)

(c) estigui compresa entre 155 cm i 170 cm (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Considera las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&1\\2&-5\end{pmatrix}$$

a) Calcula los determinantes: det (A), det (B).

b) Calcula la matriz producto $B\cdot A$, la matriz transpuesta $(B\cdot A)^t$.

c) Para que se cumpla la relación $A\cdot X=B\cdot A$, cuántas filas y columnas debe tener la matriz X?

d) Calcula la matriz X que satisface la relación.

Solución:

a) $|A|=\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}=-2;|B|=\begin{vmatrix}3&1\\2&-5\end{vmatrix}=-17.$

det $(A)=-2$, det $(B)=-17$.

b) $B\cdot A=\begin{pmatrix}3&1\\2&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\-3&4\end{pmatrix}$

$$(B\cdot A)^t=\begin{pmatrix}4&-3\\6&4\end{pmatrix}$$

c) Como $A\in M_{2x2}$ y $B\in M_{2x2}$ entonces $B\cdot A\in M_{2x2}$

Si $X\in M_{axb}$, entonces, para poder hacer el producto $A\cdot X$, el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de X, por lo tanto $a=2$. Además, el resultado de este producto es una matriz que tiene el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que X, por tanto $b=2$.

X debe ser una matriz con dos filas y dos columnas.

d) **Primera solución:** Si $X=\begin{pmatrix}m&n\\p&q\end{pmatrix}$

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}m&n\\p&q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m+2p&n+2q\\m&m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6\\-3&4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m+2p=4\\n+2q=6\\m=-3\\n=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-3\\n=4\\p=\frac{7}{2}\\q=1\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-3&4\\\frac{7}{2}&1\end{pmatrix}$$

Segunda solución: Como $A\cdot X=B\cdot A\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B\cdot A$

Cálculo de la matriz inversa:

$|A|=-2; A^t=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}; A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; Resolución de la ecuación matricial

$$X=A^{-1}\cdot B\cdot A=\begin{pmatrix}0&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&6\\-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-3}&\mathbf{4}\\\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}&\mathbf{1}\end{pmatrix}.$$

Problema 2:

Una empresa fabrica tres tipos de bombillas: A, B y C. La bombilla tipo A tiene 10 puntos LED, la de tipo B tiene 20 puntos LED, y la de tipo C tiene 50 puntos LED. El número de bombillas de 10 puntos LED fabricadas diariamente es λ veces el número de bombillas de 50 puntos LED. A la empresa le interesa saber cuántas bombillas de cada tipo puede fabricar diariamente.

$a)$ Si $\lambda = 2$, y esta empresa usa, diariamente, 30 000 puntos LED con los que fabrica 1 300 bombillas:

1-- Plantea el sistema de ecuaciones lineales de este problema.

2-- Clasifica el sistema de ecuaciones lineales y, si es posible, determina cutas bombillas de cada tipo se pueden fabricar.

$b)$ Si $\lambda = 3$, y la empresa fabrica diariamente 1 000 bombillas; clasifica el sistema de ecuaciones lineales y determina el número de puntos LED necesarios. En este caso, ¿cuántas bombillas de cada tipo se pueden fabricar?

Solución:

a) I) Llamando: x = {número de bombillas de 10 puntos LED}; y = {número de bombillas de 20 puntos LED}; z = {número de bombillas de 50 puntos LED }

$$\begin{cases} x = 2z \\ 10x + 20y + 50z = 3000 \\ x + y + z = 1300 \end{cases}$$

II) El sistema tiene solución porque el determinante formado por la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 10 & 20 & 50 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por la regla de Cramer.

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & 50 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A^*\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 10 & 20 & 50 & 30000 \\ 1 & 1 & 1 & 1300 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 30000 & 20 & 50 \\ 1300 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & 50 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-8000}{-10} = 800$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 10 & 30000 & 50 \\ 1 & 1300 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & 50 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1000}{-10} = 100$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 30000 \\ 1 & 1 & 1300 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & 50 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4000}{-10} = 400$$

b) Las ecuaciones son

$$\begin{cases} x = 3z \\ x + y + z = 1300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ x + y + z = 1000 \end{cases}$$

Estudiemos la compatibilidad y soluciones de este sistema

Las matrices asociadas son

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A^*\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1000 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

El rango de la matriz ampliada no puede ser mas de 2, por tanto, al ser la matriz de los coeficientes y la ampliada iguales, por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado (porque su rango es menor que el número de incógnitas).

Para calcular las soluciones, utilizamos la regla de Cramer

Utilizando la variable z como parámetro, el sistema se puede escribir:

$$\begin{cases} x = 3z \\ x + y = 1300 - z \end{cases}$$

actuando z como parámetro.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3z & 0 \\ 1000 - z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3z}{1} = 3z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3z \\ 1 & 1000 - z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1000 - 4z}{1} = 1000 - 4z$$

y las soluciones se pueden poner como

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1000 - 4t. \\ z = t \end{cases}$$

Se pueden fabricar tantas bombillas como se quieran, siempre que la relación entre el número de bombillas de cada clase esté en la anterior. La única limitación es que el número de bombillas sea mayor o igual que cero. En este caso que $t \geq 0$ y que $1000 - 4t \geq 0 \Rightarrow t \leq 250$.

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1000 - 4t\,, t \in [0, 250] \\ z = t \end{cases}$$

En todos estos casos, el número de LEDs necesarios es

$$N = 10x + 20y + 50z = 10 \cdot 3t + 20 \cdot (1000 - 4t) + 50t = 20000$$

Son necesarios 20 000 LEDs, independientemente del número de bombillas fabricadas, siempre que estén en la relación anterior.

Problema 3:

Considera la función $f: R \to R$ definida por: $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{2x} & si \;\; x \neq 0 \\ b & si \;\; x = 0 \end{cases}$:

$a)$ Estudia la continuidad de la función f es los puntos $x_0 \neq 0$.

$b)$ Calcula la relación que ha de haber entre $a \; y \; b$ para que f sea continua para $x = 0$.

$c)$ Si para los valores de $a = 2 \; y \; b = 1, f$ es una función derivable para $x = 0$, calcula $f'(0)$.

Solución:

a) La función $\frac{e^{ax}-1}{2x}$ es el cociente de dos funciones continuas, $e^{ax} - 1$ (que es continua por ser diferencia de dos funciones continuas) y $2x$ que también es una función continua. El único problema de discontinuidad podría ser $x = 0$, que anula el denominador, pero este punto esta fuera de los puntos de continuidad que se quieren analizar.

b) En $x = 0$, utilizando la regla de *L'Hôpital*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{ax}-1}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{ax}}{2} = \frac{a}{2}$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{ax}-1}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{ax}}{2} = \frac{a}{2}$$
$$f(0) = b$$

Para que la función sea continua, estos tres valores deben ser iguales.

$$\frac{a}{2} = b \Rightarrow \boldsymbol{a = 2b}$$

c) La función $f(x)$ es en este caso

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{2x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

que por lo visto anteriormente es continua, puesto que $a = 2b$

Su derivada es

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}2x - (e^{2x}-1)2}{4x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)+1}{2x^2}$$

y utilizando dos veces la regla de L´Hôpital

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}(2x-1)+1}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}(2x-1)+2e^{2x}}{4x} = \lim_{x\to 0} e^{2x} = 1$$

$$\boldsymbol{f'(0) == 1}$$

Problema 4:

El número de individuos de una población en un determinado momento de tiempo, t, expresada en millones de individuos, viene dada por la función $P(t) = \frac{15+t^2}{(t+1)^2}$, con la variable $t \geq 0$ mide el número de años transcurridos desde el 1 de enero de 2000.

$a)$ Calcula la población que había el 1 de enero del año 2000.

$b)$ Prueba que el número de individuos de la población logra un mínimo. ¿Qué año se alcanza este mínimo? ¿Cuántos individuos habrá el año del mínimo?

$c)$ Calcula el número de individuos que habrá a largo plazo.

Solución:

a) El 1 de Enero del 2000 corresponde al momento en que $t = 0$

$$P(0) = \frac{15}{1} = 15$$

Habrá **15 millones** de individuos.

b) $P'(t) = \frac{2t(t+1)^2-(15+t^2)2(t+1)}{(t+1)^4} = \frac{2t(t+1)-2(15+t^2)}{(t+1)^3} = \frac{2t-30}{(t+1)^3}$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{2t-30}{(t+1)^3} = 0 \Rightarrow t = 15$$

$$P''(t) = \frac{2(t+1)^3-(2t-30)3(t+1)^2}{(t+1)^6} = \frac{2(t+1)-3(2t-30)}{(t+1)^4} = \frac{-4t+92}{(t+1)^4}$$

$$P''(15) = \frac{32}{50625} > 0$$

$$P(15) = \frac{15}{16} \sim 0.9375$$

En el punto $\left(\mathbf{15}, \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{16}}\right)$ hay un mínimo. El mínimo se alcanza el año 2015 con una población aproximada de **937 500** individuos.

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{15+t^2}{(t+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{t^2+15}{t^2+2t+1} = 1$

A largo plazo la población se estabilizará alrededor de un **millón** de individuos.

Problema 5:

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} y = x + 3 \\ z = 2x + 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = 2z + 3 \end{cases}$:

$a)$ Calcula las ecuaciones vectoriales de las rectas r y s.

$b)$ Si es posible, calcula el plano paralelo a la recta s que contiene a la recta r.

$c)$ Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(-1, 0, 2)$.

$d)$ Calcula la recta perpendicular a r y s que pasa por el origen.

Solución:

a) Una parametrización de la recta (I) es

$$(x, y, z) = (x, x + 3, 2x + 2) = (0, 3, 2) + x(1, 1, 2)$$

La ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(0, 3, 2\ )$ y tiene como vector director $\vec{v}(1, 1, 2)$ es

$$(x, y, z) = (0, 3, 2) + \lambda(1, 1, 2)$$

En la segunda recta (II): $(x, y, z) = \left(2z + 3, -\frac{1}{2}, z\right) = \left(3, -\frac{1}{2}, 1\right) + z(2, 0, 1)$

La ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $B\left(3, -\frac{1}{2}, 1\right)$ y tiene como vector director $\vec{w}(2, 0, 1)$ es

$$(x, y, z) = \left(2z + 3, -\frac{1}{2}, z\right) = \left(3, -\frac{1}{2}, 1\right) + \lambda(2, 0, 1)$$

b) Un plano paralelo a la recta (II) y que contiene a la recta (I) tendrá como vectores directores $\vec{v}$ y $\vec{w}$; y que pasa por un punto de (I) , por ejemplo $A(0, 3, 2)$

$$\pi = \begin{vmatrix} x & y-3 & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x + 3y - 2z - 5 = 0$$

Este plano contiene a la recta (II), puesto que está construida con un vector director y un punto de (II). Además, el vector $\vec{u}(1, 3, -2)$, que es perpendicular al plano π, es perpendicular a la recta (I), puesto que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. En efecto: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 3, -2\ ) \cdot (\ 1, 1, 2\ ) = 1 + 3 - 4 = 0$

c) Un plano perpendicular a la recta (II) tiene por ecuación $2x + z + k = 0$. Si queremos que pase por el punto $P(-1, 0, 2)$, sustituimos este punto en el haz de planos

$2 \cdot (\ -1\ ) + 2 + k = 0 \;\; \Rightarrow \;\; k = 0\ .$

El plano perpendicular a la recta (II) que pasa por el punto P es $\mathbf{2x + z = 0}$

d) Primeramente hay que hallar una dirección $\vec{r}$ perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$

$$\vec{r} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + 3j - 2k$$

El vector perpendicular es $\vec{r}(\ 1,3, -2\ )$

Una recta con esta dirección y que pase por el origen es $\boldsymbol{\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}}$

Problema 6:

Dados los puntos $P(1,0,1)$, $Q(1,1,0)$ y $R(0,1,1)$:

$a)$ Comprueba que $P(1,0,1)$, $Q(1,1,0)$ y $R(0,1,1)$ no están alineados.

$b)$ Calcula la ecuación vectorial del plano que determina $P(1,0,1)$, $Q(1,1,0)$ y $R(0,1,1)$.

$c)$ Calcula el área del triángulo que tiene por vértices $P(1,0,1)$, $Q(1,1,0)$ y $R(0,1,1)$.

$d)$ Calcula, de forma razonada, la condición que ha de cumplir a, b y c para que los puntos $P(1,0,1)$, $Q(1,1,0)$ y $R(0,1,1)$ y $S(a,b,c)$ pertenecen a un mismo plano.

Solución:

a) Los tres puntos estarán alineados si los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ fueran proporcionales

$\overrightarrow{PQ} = (\ 1{,}1{,}0\ ) - (\ 1{,}0{,}1\ ) = (\ 0{,}1,-1\ )$

$\overrightarrow{PR} = (\ 0{,}1{,}1\ ) - (\ 1{,}0{,}1\ ) = (\ -1{,}1{,}0\ )$

Como no se conserva la proporción ni siquiera entre las dos primeras coordenadas $\left(\frac{0}{-1} \neq \frac{1}{1}\right)$:

Los tres puntos **no** están alineados.

b) El plano π pedido tendrá por los vectores directores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y pasará por uno de los tres puntos, por ejemplo P

$$\pi\ = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{x+y+z-2=0}$$

c) El área del triángulo será $\frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2}$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\ = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = i+j+k$$

Con lo que el área es

$$\frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}{2} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{2}}$$

d) Como ya hemos visto el plano pasa por los puntos $P(1,0,1)$, $Q(1,1,0)$ y $R(0,1,1)$. Para que el punto $S = (a,b,c)$ pertenezca a ese plano, debe cumplir su ecuación, por tanto la condición es que:

$$a+b+c=2$$

Problema 7:

En una urna hay 12 bolas blancas, 8 bolas negras y 5 bolas rayadas. Se realiza el experimento aleatorio de extraer dos bolas, consecutivamente y sin devolución a la urna. Calcula la probabilidad de los siguientes eventos:

a) Las dos bolas son blancas.

b) Las dos bolas son del mismo color.

c) Al menos una bola es blanca.

d) Ninguna de las bolas es blanca.

Solución:

Sacar dos bolas simultáneamente sin devolución es el mismo experimento que sacar dos bolas consecutivamente, sin devolución. Sean los siguientes sucesos:

R_1 = {sacar bola roja en la primera extracción}

B_1 = {sacar bola banca en la primera extracción}

A_1 = {sacar bola azul en la primera extracción}

R_2 = {sacar bola roja en la segunda extracción}

B_2 = {sacar bola banca en la segunda extracción}

A_2 = {sacar bola azul en la segunda extracción}

a) Se pide $p(R_1 \cap R_2)$

Tenemos que $p(R_1) = \frac{12}{25}$ y si extraemos una roja, la probabilidad de extraer otra roja en la segunda extracción es $p(R_2 / R_1) = \frac{11}{24}$ porque hay una bola roja menos y una bola en la urna.

Por tanto

$$p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \cdot p(R_2/R_1) = \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} = \frac{11}{50}$$

La probabilidad de que las dos bolas sean blancas es $\mathbf{\frac{11}{50}}$

b) Hay que calcular $p(R_1 \cap R_2) + p(B_1 \cap B_2) + p(A_1 \cap A_2)$

De la misma manera que hemos razonado en el apartado a) con las dos bolas rojas, calculamos la probabilidad de sacar dos bolas blancas y dos azules.

$$p(R_1 \cap R_2) + p(B_1 \cap B_2) + p(A_1 \cap A_2) =$$
$$= p(R_1) \cdot p(R_2/R_1) + p(B_1) \cdot p(B_2/B_1) + p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) =$$
$$= \frac{11}{50} + \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} = \frac{26}{75}$$

La probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color es $\mathbf{\frac{26}{75}}$

c) Hay que calcular la probabilidad de que alguna sea roja, es decir, $p(R_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap A_2) + p(B_1 \cap R_2) + p(A_1 \cap R_2)$:

$$p(R_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap A_2) + p(B_1 \cap R_2) + p(A_1 \cap R_2) =$$

$$p(R_1) \cdot p(R_2/R_1) + p(R_1) \cdot p(B_2/R_1) + p(R_1) \cdot p(A_2/R_1) + p(B_1) \cdot p(R_2/B_1) + p(A_1) \cdot p(R_2/A_1) =$$

$$\frac{11}{50} + \frac{12}{25} \cdot \frac{8}{24} + \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{12}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{12}{24} = \frac{37}{50}$$

La probabilidad de que alguna sea roja es $\boldsymbol{\frac{37}{50}}$

d) La probabilidad de que ninguna de las dos bolas sea roja es el suceso contrario de que alguna de las dos bolas sea roja, por tanto

$$p(\, ninguna\ de\ las\ bolas\ sea\ roja\,) = 1 - p(\, alguna\ de\ las\ bolas\ sea\ roja\,) = 1 - \frac{37}{50} = \frac{13}{50}$$

La probabilidad de que ninguna sea roja es $\boldsymbol{\frac{13}{50}}$

Problema 8:

La altura de las personas de una clase se distribuye según una normal de media 160 cm y desviación típica 10 cm. Calcula la probabilidad de que, escogida al azar una persona de la clase, su altura:

a) Sobrepase los 170 cm.

b) Sea menor que 155 cm.

c) Está comprendida entre 155 cm y 170 cm.

Solución:

Es una $N(160, 10)$

a)

$$p(X > 170) = p\left(Z > \frac{170 - 160}{10}\right) = p(Z > 1) = 1 - p(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

La probabilidad de que, escogida al azar una persona de la clase, su altura sobrepase los 170 cm es $\mathbf{0.1587}$

b)

$$p(X < 155) = p\left(Z < \frac{155 - 160}{10}\right) = p(Z < -0.5)$$

$$= p(Z > 0.5) = 1 - p(Z \leq 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

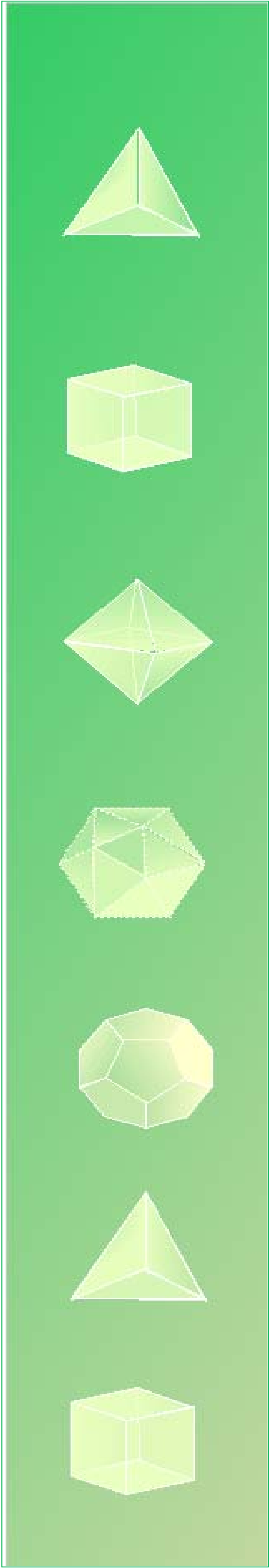
La probabilidad de que, escogida al azar una persona de la clase, su altura sea menor que 155 cm es $\mathbf{0.3085}$

c)

$$p(155 < X < 170) = p\left(\frac{155 - 160}{10} < Z < \frac{170 - 160}{10}\right) = p(-0.5 < Z < 1) =$$

$$= p(Z < 1) - p(Z < -0.5) = 0.8413 - 0.3085 = 0.5328$$

La probabilidad de que, escogida al azar una persona de la clase, su altura esté comprendida entre 155 cm y 170 cm es $\mathbf{0.5328}$



MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

CANARIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2020–2021

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(1)
Convocatoria:	

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenido, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Dada la función $f(x) = \frac{ax^2-2}{b-x}$, donde a y b son dos parámetros con valores reales.

a) Calcular el valor de los parámetros a y b que verifican que $f(-2) = 2$ y que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R} - \{5\}$. 1.25 ptos
Escribir la función resultante $f(x)$ y calcular su derivada $f'(x)$.

b) Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ si los parámetros toman los valores $a = -1$ y $b = -3$ 1.25 ptos

1B. Se desea construir una caja sin tapa superior (ver Figura 1). Para ello, se usa una lámina de cartón de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblándola convenientemente después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada una de sus esquinas (ver Figura 2). Se determina como requisito que la caja a construir contenga el mayor volumen posible. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja y su volumen máximo. 2.5 ptos

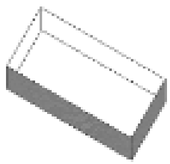


Figura 1

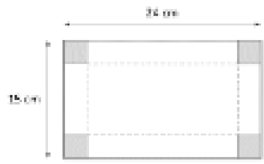


Figura 2

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Calcular el valor de la matriz $M = X^2 - Y^2$, siendo X e Y las matrices que son solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$ 2.5 ptos

2B. Un granjero compra un determinado mes 274€ de pienso para su ganado. Con ese dinero obtiene un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes: A, B y C. Se sabe que el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5€, 4€ y 4€, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas. 2.5 ptos

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. Dados los siguientes puntos en el espacio tridimensional:

$$A(0,-2,3),\ B\ (1,-1,4),\ C\ (2,3,3)\ \text{y}\ D(4,5,5)$$

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios. A continuación, calcular la ecuación del plano que los contiene. 1.5 ptos

b) Calcular la ecuación de la recta r, perpendicular al plano $\pi: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda - 3\mu \end{cases}$ que pasa por el punto A 1 pto

3B. Dadas las ecuaciones de los planos

$$\pi_1: 2x + 3y - z = 9 \quad \text{y} \quad \pi_2: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2 - \lambda + 2\mu \\ z = 3 + 3\lambda - \mu \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(1,-1,0)$ y $B(-1,-3,2)$ 1.25 ptos

b) Calcular el ángulo formado por los planos π_1 y π_2 1.25 ptos

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En un cierto instituto el 50% de su alumnado lleva el desayuno desde casa, el 40% lo compra en la cafetería del instituto, y el resto lo adquiere en un bazar cercano al instituto. Solamente un 5% de los desayunos que se llevan desde casa incluyen bebidas azucaradas, pero en los desayunos comprados en la cafetería este porcentaje es del 60% y en los desayunos comprados en el bazar del 80%.

a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado. 0.5 ptos

b) Justificar si es cierto que más de un 30% de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas. 1 pto

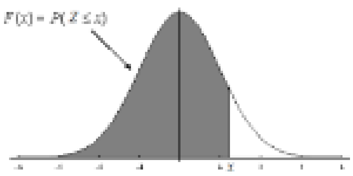
c) Justificar si es cierto que, elegido un desayuno al azar, la probabilidad que un estudiante lo haya traído desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada, es mayor que 0,1 1 pto

4B. Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80 %. Suponiendo independencia de sucesos:

a) Si se lo toman 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes? 1 pto

b) Si se lo toman 225 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe entre 170 y 190 pacientes? 1 pto

c) ¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los que NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes? 0.5 ptos



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1: Análisis

Problema 1.A:

Dada la función $f(x)=\frac{ax^2-2}{b-x}$, donde a y b son dos parámetros con valores reales.

a) Calcular el valor de los parámetros a y b que verifican que $f(-2)=2$ y que $f(x)$ sea continua en $R-\{5\}$. Escribir la función resultante $f(x)$ y calcular su derivada $f'(x)$.

b) Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ si los parámetros toman los valores $a=-1$ y $b=-3$.

Solución:

a) De la condición $f(-2)=2$ se obtiene una ecuación: $f(-2)=2=\frac{a4-2}{b-x}$.

Como $f(x)$ no es continua en x = 5, se deduce que el denominador se anula para ese valor de $x \rightarrow b-5=0 \Rightarrow b=5$

Por tanto $2=\frac{a4-2}{5+2} \rightarrow 14=4a-2 \rightarrow 16=4a \rightarrow a=4$.

Resolviendo la ecuación se obtiene que $a=4$. La función resultante es $f(x)=\frac{4x^2-2}{5-x}$

Por lo tanto, $a=4$ y $b=5$, de donde la función resultante es $f(x)=\frac{4x^2-2}{5-x}$

Su derivada es $f'(x)=\frac{8x\cdot(5-x)-(4x^2-2)\cdot(-1)}{(5-x)^2}=\frac{40x-8x^2+4x^2-2}{(5-x)^2}=\frac{-4x^2+40x-2}{25-10x+x^2}$.

Por lo tanto, $a=4$ y $b=5$, de donde la función resultante es $f(x)=\frac{4x^2-2}{5-x}$ y $f'(x)=\frac{-4x^2+40x-2}{25-10x+x^2}$.

b) La función es $f(x)=\frac{-x^2-2}{-3-x}=\frac{x^2+2}{x+3}$

Asíntotas verticales: $x+3=0 \Rightarrow x=-3 \rightarrow \lim_{x\to -3}\frac{x^2+2}{x+3}=\infty$

Asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+2}{x+3}=+\infty$ $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+2}{x+3}=-\infty$ No hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2}{3+x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2+3x}=\frac{1}{1}=1$$

$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}[\frac{x^2+2}{x+3}-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2-x^2-3x}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-3x}{x+3}=\frac{-3}{1}=-3$.

La asíntota oblicua es $y=x-3$.

Asíntotas verticales: $x=-3$. La asíntota oblicua es $y=x-3$

Problema 1.B:

Se desea construir una caja sin tapa superior (ver figura 1). Para ello, se usa una lámina de cartón de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblándola convenientemente después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada una de sus esquinas (ver figura 2). Se determina como requisito que la caja a construir contenga el mayor volumen posible. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja y su volumen máximo.

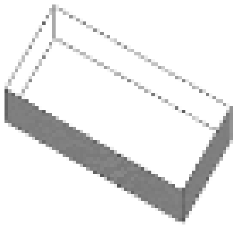


Figura 1

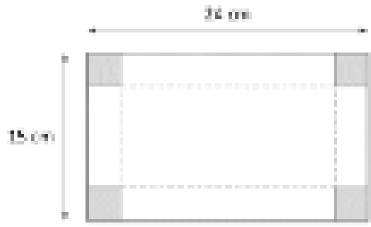


Figura 2

Solución:

Si x es el lado del cuadrado que se recorta en cada esquina, las dimensiones de la caja serán:

$24-2x$ cm de largo, $15-2x$ cm de ancho y x cm de altura. El volumen será, por tanto:

$$V(x)=(24-2x)(15-2x)x=4x^3-78x^2+360x$$

Esta es la función que debemos maximizar, por lo que debemos hallar su derivada:

$$V'(x)=12x^2-156x+360$$

Se iguala a cero la derivada y se resuelve la ecuación resultante:

$$V'(x)=0 \Rightarrow 12x^2-156x+360=0 \Rightarrow x^2-13x+30=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{13\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot 1\cdot 30}}{2a}=\frac{13\pm 7}{2}$$

$x_1=3; x_2=10$ son los posibles extremos de la función. La solución $x_2=10$ no es válida para este problema porque el ancho de la caja sería negativo.

Comprobamos que $x_1=3$ es un máximo mediante la derivada segunda de $V(x)$.

$$V''(x)=24x-156$$

$$V''(3)=24\cdot 3-156=-84<0 \quad \text{por lo tanto } \ x_1=3 \text{ es un máximo}$$

El volumen máximo es $V(3)=(24-2\cdot 3)(15-2\cdot 3)\cdot 3=18\cdot 9\cdot 3=486\ cm^3$

Las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo deben ser, por tanto, 18 cm de largo, 9 cm de ancho y 3 cm de altura.

El volumen máximo es $\mathbf{486\ cm^3}$. Las dimensiones de la caja deben ser **18 cm** de largo, **9 cm** de ancho y **3 cm** de altura.

Hemos cortado 3 cm en cada esquina.

Bloque 2: Álgebra

Problema 2.A:

Calcular el valor de la matriz $M = X^2 - Y^2$, siendo X e Y las matrices que son solución del sistema: $\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}.$

Solución:

$4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

$2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \cdot (-2) \to$ $\qquad$ $-4X - 2Y = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$Y = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

$4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; $2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \cdot (-3) \to -6X - 3Y = \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

Sumando ahora estas ecuaciones: $-2X = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$; $Y^2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz M pedida es: $M = X^2 - Y^2 = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}}$$

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

Problema 2.B:

Un granjero compra un determinado mes 274 euros de pienso para su ganado. Con ese dinero obtiene un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes, A, B y C. Se sabe que, si el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5 euros, 4 euros y 4 euros, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas.

Solución:

Sean A = número de sacos de la marca A ; B = número de sacos de la marca B; C = número de sacos de la marca C.

Total de sacos: 66 $A+B+C=66$

Precios por saco: 5 € marca A, 4 € marca B y 4 € marca C

Precio total: 274 € $5A+4B+4C=274$

El número de sacos de la marca C es el doble que el total de sacos de las otras marcas.

C = 2(A + B); $2A+2B-C=0$

El sistema de ecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{r} A+B+C=66 \\ 5A+4B+4C=274 \\ 2A+2B-C=0 \end{array}\right\}$$

Se puede resolver por el **método de Cramer**:

Matriz de coeficientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix};\text{ Su determinante es: } |M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-4+10+8-8-8+5=3$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 274 & 4 & 4 \\ 66 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-274+528-548+264}{-5+8+8-8-10+4}=\frac{792-822}{12-15}=\frac{-30}{-3}=10.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 274 & 4 \\ 1 & 66 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-330+548-528+274}{-3}=\frac{822-858}{-3}=\frac{-36}{-3}=12.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 274 \\ 1 & 1 & 66 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{548+528-548-660}{-3}=\frac{528-660}{-3}=\frac{-132}{-3}=44.$$

El granjero ha comprado **10** sacos de la marca A, **12** sacos de la marca B y **44** sacos de la marca C.

Otra forma (método de Gauss): Sea M’ la matriz ampliada del sistema:

$$M'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 66 \\ 5 & 4 & 4 & 274 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \to F_2-5F_1;\ \ F_3-2F_1;\ M'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 66 \\ 0 & -1 & -1 & 56 \\ 0 & 0 & -3 & -132 \end{array}\right)$$

$$C=\frac{-132}{-3}=44;\ -B-44=56\Rightarrow B=12;\ A+12+44=66\Rightarrow A=10$$

Bloque 3: Geometría

Problema 3.A:

Dados los siguientes puntos en el espacio tridimensional: $A(0,-2,3), B(1,-1,4)$, $C(2,3,3)$ y $D(4,5,5)$.

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios. A continuación, calcular la ecuación del plano que los contiene.

b) Calcular la ecuación de la recta r, perpendicular al plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda - 3\mu \end{cases}$ que pasa por el punto A.

Solución:

a) Para comprobar si los cuatro puntos son coplanarios se estudia si son linealmente dependientes los tres vectores que determinan:

$\overrightarrow{AB} = (1-0, -1-(-2), 4-3) = (1,1,1)$

$\overrightarrow{AC} = (2-0, 3-(-2), 3-3) = (2,5,0)$

$\overrightarrow{AD} = (4-0, 5-(-2), 5-3) = (4,7,2)$

Calculamos el determinante formado por los tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 14 + 0 - 20 - 0 - 4 = 0$$

El determinante es nulo, por tanto, los tres vectores son linealmente dependientes y los puntos A, B, C y D son coplanarios. El plano al que pertenecen estos puntos se puede calcular utilizando un punto y dos vectores:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-(-2) & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5x + 2(y+2) + 3(z-3) = -5x + 2y + 3z - 5 = 0$$

El plano es: $\mathbf{5x - 2y - 3z + 5 = 0}$

b) Si la recta r es perpendicular al plano π, el vector director de la recta es el vector normal al plano:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$$

Podemos tomar como vector director de la recta el vector $\vec{u} = (1,1,1)$

La ecuación de la recta r que pasa por $A(0,-2,3)$ y es perpendicular al plano π es:

$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$ Despejando λ se expresa en forma continua: $x = y + 2 = z - 3$

La recta r es: $\mathbf{x = y + 2 = z - 3}$

Problema 3.B:

Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + 3y - z = 9 \; y \; \pi_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2 - \lambda + 2\mu \\ z = 3 + 3\lambda - \mu \end{cases}$:

$a)$ Hallar la ecuación de la recta paralela a los planos $\pi_1 \; y \; \pi_2$ que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(1, -1, 0) \; y \; B(-1, -3, 2)$.

$b)$ Calcular el ángulo formado por los planos $\pi_1 \; y \; \pi_2$.

Solución:

a) Si la recta es paralela a los planos tendrá como vector director el producto vectorial de los vectores normales a los planos.

Vector normal a π1: $\overrightarrow{n_1} = (2, 3, -1)$

Vector normal a π2: $\overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k} \;\; \overrightarrow{n_2} = (-5, 4, 3)$

El vector director de la recta será, por tanto:

$\vec{u} = \begin{matrix} \vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k} \\ |23-1| \\ -543 \end{matrix} \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 13\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 23\vec{k} \quad \vec{u} = (13, -1, 23)$

El punto medio del segmento de extremos A(1, –1, 0) y B(–1, –3, 2) es:

$M = (\frac{1-1}{2}, \frac{-1-3}{2}, \frac{0+2}{2}) = (0, -2, 1)$

La ecuación de la recta que pasa por el punto M y es paralela a los planos $\pi_1 y \; \pi_2$ es:

$$r: \begin{cases} x = 13\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 1 + 23\lambda \end{cases}$$

Despejando λ se expresa en forma continua: $\boldsymbol{\frac{x}{13} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{23}}$

b) El ángulo formado por los planos $\pi_1 \; y \; \pi_2$ es el ángulo formado por sus vectores normales

$\overrightarrow{n_1} = (2, 3, -1) \text{y} \overrightarrow{n_2} = (-5, 4, 3)$

$\alpha = \arccos(\frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}) = \arccos(\frac{|2 \cdot (-5) + 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 3^2}}) = \arccos(\frac{1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}}) = 87.83º$

El ángulo formado por los planos $\pi_1 \; y \; \pi_2$ es **87.83º** = **87º 50’ 2’’**

Bloque 4: Estadística

Problema 4.A:

En un cierto instituto el 50 % de su alumnado lleva el desayuno desde casa, el 40 % lo compra en la cafetería del instituto, y el resto lo adquiere en un bazar cercano al instituto. Solamente un 5 % de los desayunos que se llevan desde casa incluyen bebidas azucaradas, pero en los desayunos comprados en la cafetería este porcentaje es del 60 % y en los desayunos comprados en el bazar del 80 %.

a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.

b) Justificar si es cierto que más de un 30 % de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas.

c) Justificar si es cierto que, elegido un desayuno al azar, la probabilidad que un estudiante lo haya traído desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada, es mayor que 0.1.

Solución:

a) Se definen los sucesos:

C = "El alumno o alumna lleva el desayuno desde casa"

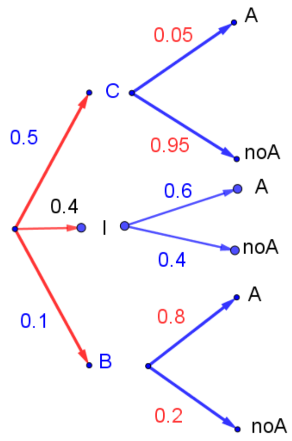
I = "El alumno o alumna compra el desayuno en la cafetería del instituto"

B = "El alumno o alumna compra el desayuno en un bazar cercano al instituto"

A = "El desayuno incluye bebidas azucaradas"

noA = "El desayuno no incluye bebidas azucaradas"

El árbol de probabilidades es:



b) Por el Teorema de la probabilidad total:

$$P(A) = P(C) \cdot P(A/C) + P(I) \cdot P(A/I) + P(B) \cdot P(A/B) = 0.5 \cdot 0.05 + 0.4 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.8 = 0.345$$

La probabilidad de que un desayuno incluya bebidas azucaradas es 0.345, es decir, un 34.5 %.

La afirmación de que más de un 30 % de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas es cierta.

c) Por el Teorema de Bayes:

$$P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(C) \cdot P(A/C)}{P(A)} = \frac{0.5 \cdot 0.05}{0.345} = 0.0724$$

La probabilidad de que un estudiante haya traído el desayuno desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada, es inferior a 0.1, por lo que la afirmación es falsa.

Problema 4.B:

Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80 %. Suponiendo independencia de sucesos:

a) Si se lo toman 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes?

b) Si se lo toman 225 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe entre 170 y 190 pacientes?

c) ¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los qne NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes?

Solución:

a) Sea p = probabilidad de que el medicamento elimine el acné a un paciente = 0.8

$q = 1 - p = 0.2$

n = número de pacientes = 100

Se define la variable X = número de pacientes a los que el medicamento elimina el acné

La variable X sigue una distribución binomial. $X \sim B(100, 0.8)$

Se pide la probabilidad $P(X > 75)$

Como $n \cdot p = 100 \cdot 0.8 = 80 > 5$ y $n \cdot q = 100 \cdot 0.2 = 20 > 5$; se aproxima a una distribución normal:

$\mu = n \cdot p = 80;\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = \sqrt{16} = 4; \quad X' \sim N(80, 4)$

Sin la corrección de Yates:

$$P(X > 75) = P(x' > 75) = P(\frac{x' - 80}{4} > \frac{75 - 80}{4}) = P(Z > -1.25) = P(Z < 1.25) = 0.8944$$

La probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes es 0.8944.

Si se hace la corrección de Yates se obtiene:

$$P(X > 75) = P(x' \geq 75.5) = P(\frac{x' - 80}{4} > \frac{75.5 - 80}{4}) = P(Z > -1.125) = P(Z < 1.125) \approx 0.8708$$

La probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes es $\mathbf{0.8708}$

b) n = número de pacientes = 225

Se define la variable X = número de pacientes a los que el medicamento elimina el acné

La variable X sigue una distribución binomial. $X \sim B(225, 0.8)$

Se pide la probabilidad $P(170 < X < 190)$

Como $n \cdot p = 225 \cdot 0.8 = 180 > 5$ y $n \cdot q = 225 \cdot 0.2 = 45 > 5$; Se aproxima a una distribución normal:

$\mu = n \cdot p = 180;\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{225 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = \sqrt{36} = 6; \quad X' \sim N(180, 6)$

Sin la corrección de Yates:

$$P(170 < X < 190) = P(170 < x' < 190) = P\left(\frac{170-180}{6} < \frac{x'-180}{6} < \frac{190-180}{6}\right)$$
$$= P(-1.67 < Z < 1.67) = P(Z < 1.67) - P(Z < -1.67) = P(Z < 1.67) - P(Z > 1.67)$$
$$= P(Z < 1.67) - [1 - P(Z < 1.67)] = 0.9525 - 1 + 0.9525 = 0.905$$

Con la corrección de Yates:

$$P = P\left(\frac{169.5-180}{6} \le Z \le \frac{190.5-180}{6}\right) = P\left(\frac{-10.5}{6} \le Z \le \frac{10.5}{6}\right) = P(-1.75 \le Z \le 1.75) =$$

$P(Z \le 1.75) - P(Z \le -1.75) = P(Z \le 1.75) - [1 - P(Z \le 1.75)] = 2 \cdot P(Z \le 1.75) - 1 =$

$2 \cdot 0.9599 - 1 = 1.9198 - 1 = 0.9198.$

La probabilidad de que el medicamento actúe en un grupo de entre 170 y 190 pacientes es $\mathbf{0.905}$.

Con la corrección de Yates es $\mathbf{0.9198}$.

c) Si se toman el medicamento 500 pacientes, el número esperado de pacientes sobre los que no se eliminará el acné es $n \cdot q = 500 \cdot 0.2 = 100$

El número esperado de pacientes sobre los que NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes es de $\mathbf{100}$ pacientes

Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2020–2021

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(3)
Convocatoria:	

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenido, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+a}{2x-4} & x \leq 0 \\ 10x^2 + x + b & x > 0 \end{cases}$

Calcular los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$. 2.5 ptos

Dar las expresiones de la función $f(x)$ y de su derivada $f'(x)$.

1B. Dadas las funciones: $f(x) = x^2 - 4x$; $g(x) = 4 - 4x$

a) Esbozar el gráfico del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ 1.25 ptos

b) Determinar el área del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ 1.25 ptos

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Sea la matriz $M = A + c \cdot B$, donde c es un número real cualquiera. Calcular los valores de c de forma que el rango $(M) = 1$ 1 pto

b) Sea la matriz $D = A^2 + B \cdot A$. Averiguar la matriz X que cumple la siguiente ecuación matricial: $D \cdot X = -30\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 1.5 pto

2B. En la liga Mate-Basket, las mujeres matemáticas con mayor puntuación son: Lovelace, Noerther y Germain. Las tres acumulan 17500 puntos. Además, lo que ha anotado Germain más 2500 puntos es equivalente a la mitad de lo anotado por Lovelace. Finalmente, Noerther anotó el doble que Germain. ¿Cuál es el ranking de puntuaciones de la liga Mate-Basket de las jugadoras Lovelace, Noerther y Germain? 2.5 ptos

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. Dadas las siguientes ecuaciones en el espacio tridimensional:

$$r: 5 - x = y - 3 = 5 - z$$

$$\pi: 3x - 4y - 8z + 35 = 0$$

a) Comprobar que la recta r y el plano π se cortan en un punto. 1.5 ptos

Averiguar dicho punto.

b) Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $A\ (2, 2, 2)$, paralelo a la recta r, y perpendicular al plano π 1 pto

3B. Dado el plano $\pi: -x + 3y + 2z + 5 = 0$

y las rectas secantes $r: \frac{x-5}{2} = y + 2 = 1 - z$ y $s: \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = z$

a) Sea A el punto de intersección de las rectas r y s. 1.5 ptos

Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y que pasa por A.

b) Calcular el ángulo que forman las rectas r y s. 1 pto

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Con el objetivo de llevar a cabo el proceso de control de calidad de las arandelas, estas se organizan en lotes de 20 arandelas. Si la probabilidad de que una arandela sea defectuosa es de 0,01 y considerando independencia de sucesos:

a) Determinar si la probabilidad de encontrar en un lote 1 o 2 arandelas defectuosas es mayor del 20% 1.25 ptos

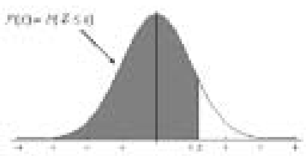
b) Si un lote se rechaza cuando se encuentra al menos una arandela defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de rechazar el lote? 0.75 ptos

c) ¿Cuál es el número esperado de arandelas sin defectos si el lote fuera de 200 arandelas? 0.5 ptos

4B. Suponiendo que el tiempo de espera en la cola de Correos sigue una distribución normal de media 7,5 minutos con 2 minutos de desviación típica.

a) Hallar el porcentaje de personas que esperan más de 9 minutos. 1.25 ptos

b) Correos afirma que: "Menos del 40% de las personas que acuden a Correos esperan entre 7 y 10 minutos". ¿Es correcta la afirmación? 1.25 ptos



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1: Análisis

Problema 1.A:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+a}{2x-4} & x \le 0 \\ 10x^2+x+b & x > 0 \end{cases}$. Calcular los valores de a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en R. Dar las expresiones de la función $f(x)$ y de su derivada $f'(x)$.

Solución:

Se estudia en primer lugar la continuidad de la función. Para x < 0 es continua por ser una función racional en la que el numerador y el denominador son funciones polinómicas, que son continuas. Además, el denominador es distinto de cero para x < 0, ya que se anula para x = 2. Para x > 0 también es continua por ser una función polinómica.

Continuidad en x = 0:

$$f(0) = \frac{0^2+a}{2\cdot 0-4} = -\frac{a}{4}$$

Límites laterales: $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+a}{2x-4} = \frac{0^2+a}{2\cdot 0-4} = -\frac{a}{4}$ $\quad \lim_{x\to 0^+}(10x^2+x+b) = 10\cdot 0^2+0+b = b$

Para que la función sea continua en $\mathbb{R}$ deben coincidir los límites laterales y *f*(0): $\frac{-a}{4} = b \Rightarrow a = -4b$

La derivada de *f*(x) es:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x\cdot(2x-4)-(x^2+a)\cdot 2}{(2x-4)^2}, si x < 0 \\ 20x+1, si x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2x^2-8x-2a}{4x^2-16x+16}, si x < 0 \\ 20x+1, si x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x-a}{2x^2-8x+8}, si x < 0 \\ 20x+1, si x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = \frac{0^2-4\cdot 0-a}{2\cdot 0^2-8\cdot 0+8} = \frac{-a}{8} \qquad f'(0^+) = 20\cdot 0+1 = 1$$

Para que f sea derivable en x = 0 deben ser iguales las derivadas laterales:

$\frac{-a}{8} = 1 \Rightarrow a = -8$De la ecuación$a = -4b$se obtiene el valor de *b*: $-8 = -4b \Rightarrow b = 2$

Para que *f* sea continua y derivable en $\mathbb{R}$ los valores de *a* y *b* son $\boldsymbol{a = -8, b = 2}$

La función *f* y su derivada son:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-8}{2x-4}, & si \ \ x \le 0 \\ 10x^2+x+2, & si \ x > 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+8}{2x^2-8x+8}, & si \quad x < 0 \\ 20x+1, & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Problema 1.B:

Dadas las funciones: $f(x) = x^2 - 4x$; $g(x) = 4 - 4x$.

$a)$ Esbozar el gráfico del recinto limitado por las funciones $f(x)\ y\ g(x)$.

$b)$ Determinar el área del recinto limitado por las funciones $f(x)\ y\ g(x)$.

Solución:

a) Se hallan los puntos de corte de ambas gráficas:

$$\left.\begin{matrix} y = x^2 - 4x \\ y = 4 - 4x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 - 4x = 4 - 4x \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) = 12$ Puntos de corte: $A(-2, 12); B(2, -4)$

Puntos de corte de *f*(x) con los ejes de coordenadas:

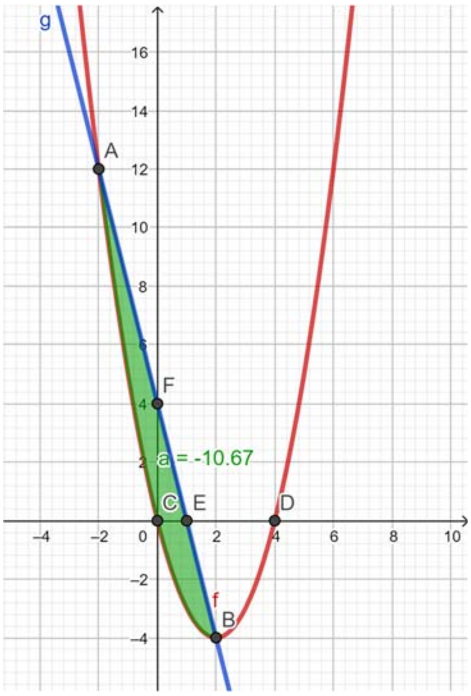
Con el eje OX: $\left.\begin{matrix} y = x^2 - 4x \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 4$

Puntos: $C(0, 0); D(4, 0)$El punto D es también el punto de corte de f(x) con el eje OY.

Puntos de corte de *g*(x) con los ejes de coordenadas:

Con el eje OX: $\left.\begin{matrix} y = 4 - 4x \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4 - 4x = 0 \Rightarrow x = 1$ Punto: $E(1, 0)$

Con el eje OY: $g(0) = 4 - 4 \cdot 0 = 4$ Punto: $F(0, 4)$



Vértice de la parábola *f*(x):

$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ El vértice coincide con uno de los puntos de corte de ambas gráficas: $B(2, -4)$

Se representan las gráficas de ambas funciones:

b) El área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g* viene determinado por la integral definida:

$$\int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)]dx = \int_{-2}^{2} [(4 - 4x) - (x^2 - 4x)]dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$$

$$[4x - \frac{x^3}{3}]|_{-2}^{2} = (4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}) - (4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3})$$
$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} u^2$$

El área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g es* $\boldsymbol{\frac{32}{3} u^2}$

Bloque 2: Álgebra

Problema 2.A:

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Sea la matriz $M = A + c \cdot B$, donde c es un número real cualquiera. Calcular los valores de c de forma que $Rang\ M = 1$.

$b)$ Sea la matriz $D = A^2 + B \cdot A$. Averiguar la matriz X que cumple la siguiente ecuación matricial:

$D \cdot X = -30 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Se calcula la matriz M:

$$M = A + c \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{pmatrix}$$

El determinante de M es:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{vmatrix} = (1+c)\cdot(2-c) - (4+4c)\cdot(-1) = 2 - c + 2c - c^2 + 4 + 4c$$
$$= -c^2 + 5c + 6$$

Para que la matriz M tenga rango 1 su determinante debe ser cero.

$$-c^2 + 5c + 6 = 0 \Rightarrow c = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot(-1)\cdot 6}}{2\cdot(-1)} = \frac{-5 \pm 7}{-2}\ c_1 = -1; c_2 = 6$$

La matriz M tiene rango 1 para $\boldsymbol{c = -1\ y\ c = 6}$

b) Se despeja X en la ecuación:

$$D \cdot X = -30 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = -30 \cdot D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz D y su inversa, si existe:

$$D = A^2 + B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$|D| = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 12 & -6 \end{vmatrix} = 12 + 48 = 60 \neq 0$. La matriz D tiene inversa, ya que su determinante es no nulo.

$$Adj(D) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot (Adj(D))^t = \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -12 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/10 & 1/15 \\ -1/5 & -1/30 \end{pmatrix}$$

$$X = -30 \cdot D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -30 \cdot \begin{pmatrix} -1/10 & 1/15 \\ -1/5 & -1/30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 12 & 7 & 22 \end{pmatrix}$$

La matriz X es $X = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{12} & \mathbf{7} & \mathbf{22} \end{pmatrix}$

Problema 2.B:

En la liga Mate-Basket, las mujeres matemáticas con mayor puntuación son: Lovelace, Noerther y Germain. Las tres acumulan 17.500 puntos. Además, lo que ha anotado Germain más 2.500 puntos es equivalente a la mitad de lo anotado por Lovelace. Finalmente, Noerther anotó el doble que Germain. ¿Cuál es el ranking de puntuaciones de la liga Mate-Basket de las jugadoras Lovelace, Noerther y Germain?

Solución:

Sea L = "puntuación de Lovelace"

N = "puntuación de Noerther"

G = "puntuación de Germain"

En total acumulan 17 500 puntos: $L + N + G = 17\,500$

La puntuación de Germain más 2 500 puntos equivale a la mitad de los puntos de Lovelace:

$$G + 2\,500 = \frac{L}{2} \Rightarrow 2G + 5\,000 = L \Rightarrow L - 2G = 5\,000$$

Noerther anotó el doble que Germain: $N = 2G \Rightarrow N - 2G = 0$

El sistema de ecuaciones que hay que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} L + N + G = 17\,500 \\ L - 2G = 5\,000 \\ N - 2G = 0 \end{array}\right\}$$ Resolvemos por el método de Gauss:

La matriz ampliada del sistema es $M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 17500 \\ 1 & 0 & -2 & 5000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to F_2 - F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 17500 \\ 0 & -1 & -3 & -12500 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to F_3 + F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 17500 \\ 0 & -1 & -3 & -12500 \\ 0 & 0 & -5 & -12500 \end{array}\right) \to$$

$$\left.\begin{array}{r} L + N + G = 17500 \\ -N - 3G = -12500 \\ -5G = -12500 \end{array}\right\} G = \frac{-12500}{-5} = 2\,500 \quad -N - 3 \cdot 2500 = -12500 \Rightarrow N = 5\,000$$

$$L + 5000 + 2500 = 17500 \Rightarrow L = 10\,000$$

Las puntuaciones han sido:

Lovelace: $\mathbf{10\,000}$ puntos

Noerther: $\mathbf{5\,000}$ puntos

Germain: $\mathbf{2\,500}$ puntos

Bloque 3: Geometría

Problema 3.A:

Dadas las siguientes ecuaciones en el espacio tridimensional:

$$r \equiv 5 - x = y - 3 = 5 - z; \ \ \pi \equiv 3x - 4y - 8z + 35 = 0.$$

$a)$ Comprobar que la recta r y el plano π se cortan en un punto. Averiguar dicho punto.

$b)$ Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $A(2,2,2)$, paralelo a la recta r, y perpendicular al plano π.

Solución:

a) Estudiamos la posición relativa del plano π y los planos que determinan la recta r, que son:

$$r\colon \begin{cases} 5 - x = y - 3 \\ y - 3 = 5 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ y + z = 8 \end{cases}$$

El sistema formado por las tres ecuaciones es:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 8 \\ y + z &= 8 \\ 3x - 4y - 8z &= -35 \end{aligned}\right\}$$

La matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -4 & -8 & -35 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = -8 + 3 + 4 = -1 \neq 0$$

El determinante de la matriz A del sistema es no nulo, por tanto, Rango(A) = 3 = Rango(A') y el sistema es compatible determinado, es decir, la recta r y el plano π se cortan en un punto.

Para hallar el punto de corte se puede despejar x y z en la ecuación de la recta y sustituir en el plano π:

$\begin{cases} x + y = 8 \\ y + z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 - y \\ z = 8 - y \end{cases}$, sustituyendo en el plano: $\pi \equiv 3x - 4y - 8z + 35 = 0 \Rightarrow$

$$3(8 - y) - 4y - 8(8 - y) + 35 = 0 \Rightarrow y = 5, x = 8 - 5 = 3; z = 8 - 5 = 3$$

La recta r y el plano π se cortan en el punto **(3, 5, 3)**.

b) Si el plano es paralelo a la recta r, el vector director de la recta debe ser también un vector director del plano. Vector director de r: $\vec{u} = (-1, 1, -1)$. Si el plano es perpendicular al plano π el vector normal a π debe ser un vector director del plano que debemos hallar. Vector normal a π: $\vec{n} = (3, -4, -8)$. Punto A(2,2,2)

El plano viene dado por la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 2 & z - 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -12(x - 2) - 11(y - 2) + z - 2 = 0 \Rightarrow 12x + 11y - z - 44 = 0$$

El plano que pasa por el punto $A(2,2,2)$, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π es

$$\mathbf{12x + 11y - z - 44 = 0}$$

Problema 3.B:

Dado el plano $\pi \equiv -x+3y+2z+5=0$ y las rectas $r \equiv \frac{x-5}{2}=y+2=1-z$ y $s \equiv \frac{x+1}{6}=\frac{y}{-2}=z$.

$a)$ Sea A el punto de intersección de las rectas r y s. Hallar la ecuación de la recta t que es perpendicular al plano π y que pasa por A.

$b)$ Calcular el ángulo que forman las rectas r y s.

Solución:

a) Expresamos las rectas *r* y *s* como intersección de planos:

$$r \equiv \frac{x-5}{2}=y+2=1-z \Rightarrow \begin{cases} x-2y=9 \\ y+z=-1 \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x+1}{6}=\frac{y}{-2}=z \Rightarrow \begin{cases} x+3y=-1 \\ y+2z=0 \end{cases}$$

Se resuelve, por el método de Gauss, el sistema formado por las ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} x-2y=9 \\ y+z=-1 \\ x+3y=-1 \\ y+2z=0 \end{matrix}\right\} \text{ Matriz ampliada del sistema: } \quad M'=\begin{pmatrix} 1-209 \\ 011-1 \\ 130-1 \\ 0120 \end{pmatrix} \to F_3 - F_1$$

$$\begin{pmatrix} 1-209 \\ 011-1 \\ 050-10 \\ 0120 \end{pmatrix} \to F_3 - 5F_2 ;\ F_4 - F_2 \begin{pmatrix} 1-209 \\ 011-1 \\ 00-5-5 \\ 0011 \end{pmatrix} \to 5F_4 + F_3$$

$$\begin{pmatrix} 1-209 \\ 011-1 \\ 00-5-5 \\ 0000 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{matrix} x-2y=9 \\ y+z=-1 \\ -5z=-5 \end{matrix}\right\} \text{ De la tercera ecuación: } z=\frac{-5}{-5}=1$$

Sustituyendo en la segunda ecuación: $y+1=-1 \Rightarrow y=-2$ y de la primera ecuación se obtiene x:

$x-2\cdot(-2)=9 \Rightarrow x=5$

El punto de corte de las rectas es A(5, –2, 1).

Si la recta es perpendicular al plano π, su vector director es el vector normal al plano: $\vec{n}=(-1,3,2)$

La recta *t* es: $\begin{cases} x=5-\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$

b) El ángulo formado por las rectas r y s.es el ángulo formado por sus vectores directores

$\vec{u_r}=(2,1,-1)$y$\vec{u_s}=(6,-2,1)$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{|\vec{u_r}\cdot\vec{u_s}|}{|\vec{u_r}|\cdot|\vec{u_s}|}\right)=\arccos\left(\frac{|2\cdot 6+1\cdot(-2)+(-1)\cdot 1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{6^2+(-2)^2+1^2}}\right)=\arccos\left(\frac{9}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{41}}\right)=54.98º$$

El ángulo formado por las rectas r y s es **54.98º** = **54º 28’**

Bloque 4: Estadística

Problema 4.A:

Con el objetivo de llevar a cabo el proceso de control de calidad de las arandelas, estas se organizan en lotes de 20 arandelas. Si la probabilidad de que una arandela sea defectuosa es de 0.01 y considerando independencia de sucesos:

a) Determinar si la probabilidad de encontrar en un lote 1 o 2 arandelas defectuosas es mayor del 20 %.

b) Si un lote se rechaza cuando se encuentra al menos una arandela defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de rechazar el lote?

c) ¿Cuál es el número esperado de arandelas sin defectos si el lote fuera de 200 arandelas?

Solución:

a) Sea X = número de arandelas defectuosas

La variable X sigue una distribución binomial. $X \sim B(20, 0.01)$; $P(X = k) = \binom{20}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{20-k}$

Se pide la probabilidad $P(1 \leq X \leq 2)$

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{20}{1} \cdot 0.01 \cdot 0.99^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0.01^2 \cdot 0.99^{18}$$
$$= 0.1652 + 0.0159 = 0.1811$$

La probabilidad de encontrar 1 o 2 arandelas defectuosas es 0.1811 = 18.11 %, por tanto, no es mayor del 20 %.

b) La probabilidad de que se rechace un lote es $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{20}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{20} = 1 - 0.8179 = 0.1821$

La probabilidad de rechazar un lote es **0.1821**.

c) Si el lote fuera de 200 arandelas, la variable sería Y=número de arandelas no defectuosas

$Y \sim B(200{,}0.99)$

El número esperado de arandelas no defectuosas sería $n \cdot p = 200 \cdot 0.99 = 198$

El número esperado de arandelas no defectuosas es $\mathbf{198}$.

Problema 4.B:

Suponiendo que el tiempo de espera en la cola de Correos sigue una distribución normal de media 7.5 minutos con 2 minutos de desviación típica.

a) Hallar el porcentaje de personas que esperan más de 9 minutos.

b) Correos afirma que: "Menos del 40 % de las personas que acuden a Correos esperan entre 7 y 10 minutos". ¿Es correcta la afirmación?

Solución:

a) Sea X = tiempo de espera en minutos en la cola de Correos

La variable sigue una distribución normal $X \sim N(7.5{,}2)$

Se calcula la probabilidad $P(X > 9)$y tipificando:

$$P(X > 9) = P\left(\frac{X - 7.5}{2} > \frac{9 - 7.5}{2}\right) = P(Z > 0.75) = 1 - P(z \leq 0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266$$

El porcentaje de personas que esperan más de 9 minutos es **22.66 %**

b) Se calcula la probabilidad $P(7 \leq X \leq 10)$y tipificando:

$$P(7 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{7 - 7.5}{2} \leq \frac{X - 7.5}{2} \leq \frac{10 - 7.5}{2}\right) = P(-0.25 \leq Z \leq 1.25) = P(Z \leq 1.25) - P(Z \leq -0.25)$$

$$P(Z \leq 1.25) - P(Z \geq 0.25) = P(Z \leq 1.25) - [1 - P(Z \leq 0.25)] = 0.8944 - [1 - 0.5987] = 0.4931$$

El 49.31 % de las personas esperan en Correos entre 7 y 10 minutos, por lo que la afirmación no es correcta.

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Logo de la Comunidad	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen. Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden en que aparecen resueltos en el cuadernillo del examen. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

Ejercicio 1:

Considera el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} \in R^2$, y la matriz de rotación $R(\theta)$, siendo $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

$a)$ Comprueba que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R(\theta) \cdot \vec{v}$ rota el vector $\vec{v}$ un ángulo θ en sentido antihorario.

$b)$ Comprueba que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R^2(\theta) \cdot \vec{v}$ rota el vector $\vec{v}$ un ángulo 2θ en sentido antihorario.

$c)$ Comprueba que la matriz $R(\theta)$ es invertible para cualquier valor de θ.

$d)$ Calcula la matriz inversa de $R(\theta)$ y comprueba que $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$.

Ejercicio 2:

Considera la función $f(x) = x^2$.

$a)$ Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Llamaremos a dicha recta $g(x)$.

$b)$ Calcula el área de la región limitada por las rectas $g(x), x = \frac{1}{2}, x = 1$, y el eje OX de abscisas.

$c)$ Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$.

$d)$ Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $g(x)\ y\ x = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 3:

Se dispara un misil en línea recta desde el punto $A(1, 2, 8)$ hacia la posición de la base enemiga $B(3, 4, 0)$.

$a)$ Calcula la ecuación de la recta que contiene la trayectoria del misil.

$b)$ Calcula el punto en el que el misil cruza el plano $z = 4$.

$c)$ Calcula la distancia que recorre el misil desde que se lanza hasta que impacta en B.

$d)$ Calcula un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{OB}\ y\ \overrightarrow{AB}$.

Ejercicio 4:

La testosterona es una hormona que se produce en el cuerpo de los hombres. En ciclismo la testosterona puede utilizarse como sustancia dopante, de forma que niveles elevados se consideran ilegales. En una población dada, la concentración de testosterona en sangre para un hombre adulto que no se haya dopado, sigue una distribución normal con media 600 ng/dl, y desviación típica 200 ng/dl.

$a)$ Calcula la probabilidad de que un ciclista presente más de 1.000 ng/dl de testosterona en sangre sin haberse dopado.

$b)$ ¿Qué nivel de testosterona elegirías como límite en un control antidopaje, para que la probabilidad de acusar a un inocente sea de 1 entre 1.000?

Ejercicio 5:

Considera el sistema $\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 4x - \lambda y = 2\lambda - 2 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

$a)$ Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

$b)$ Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λsi es necesario.

$c)$ Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Ejercicio 6:

En una población, la proporción de personas infectadas por una determinada enfermedad en función del tiempo, $I(t)$, viene dada por la función $I(t) = \begin{cases} ke^{2t} & si \;\; t < 1 \\ \frac{t^2}{3t^2+1} & si \;\; t \geq 1 \end{cases}$, siendo k una constante real, t el tiempo en años desde el inicio de la epidemia y $t = 1$ el inicio de la vacunación.

$a)$ Calcula el valor de k para que $I(t)$ sea continua.

$b)$ Calcula la proporción de personas infectadas cuando $t \to \infty$.

$c)$ Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = \frac{1}{2}$.

$d)$ Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = 2$.

Ejercicio 7:

Considera el plano $\pi \equiv 2x + 3y - 4z = 10$ los puntos $A(1, 2, 1)\ y\ B(2, 3, 3)$.

$a)$ Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

$b)$ Halla el vector normal del plano π.

$c)$ Determina la posición relativa del plano π y la recta que pasa por los puntos A y B.

$d)$ Halla la ecuación del plano paralelo a π que contiene al punto A.

Ejercicio 8:

En ajedrez, la mitad de las partidas se juegan con piezas blancas y la otra mitad con negras. Un determinado jugador gana el 40 % de las partidas oficiales que juega con blancas y el 30 % jugando con negras.

$a)$ Calcula la probabilidad de que gane una partida concreta si no sabemos con qué piezas jugará.

$b)$ Calcula la probabilidad de que haya jugado con blancas una partida concreta, sabiendo que ha ganado.

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

Considera el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} \in R^2$, y la matriz de rotación $R(\theta)$, siendo $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

$a)$ Comprueba que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R(\theta) \cdot \vec{v}$ rota el vector $\vec{v}$ un ángulo θ en sentido antihorario.

$b)$ Comprueba que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R^2(\theta) \cdot \vec{v}$ rota el vector $\vec{v}$ un ángulo 2θ en sentido antihorario.

$c)$ Comprueba que la matriz $R(\theta)$ es invertible para cualquier valor de θ.

$d)$ Calcula la matriz inversa de $R(\theta)$ y comprueba que $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$.

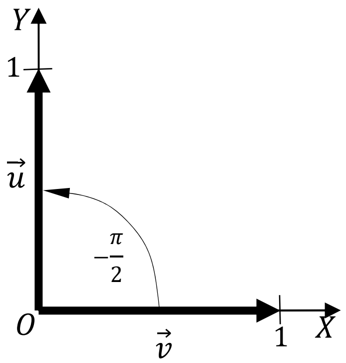
Solución:

$a)$

El vector $\vec{u}$ resultante del producto de la matriz de rotación $R(\theta)$ por el vector dado $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el siguiente:

$$\vec{u} = R\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -sen\,\frac{\pi}{2} \\ sen\,\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



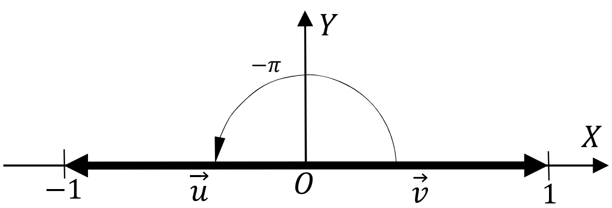
Como se observa en la figura, el vector $\vec{v}$ gira un ángulo $-\frac{\pi}{2}$ respecto al origen para transformarse en el vector $\vec{u}$.

$b)$

$$R^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -sen\,\frac{\pi}{2} \\ sen\,\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -sen\,\frac{\pi}{2} \\ sen\,\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} cos^2\frac{\pi}{2} - sen^2\frac{\pi}{2} & -2 \cdot sen\,\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} \\ 2 \cdot sen\,\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} & cos^2\frac{\pi}{2} - sen^2\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -sen\,\pi \\ sen\,\pi & \cos\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Como se observa en la figura, el vector $\vec{v}$ gira un ángulo $-2\theta = -\pi$ respecto al origen para transformarse en el vector $\vec{u}$.

$c)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|R(\theta)| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = cos^2\theta + sen^2\theta = 1 \neq 0.$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ la\ matriz\ R\ es\ invertible\ \forall\theta \in R}.$

$d)$

$$R^t(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \qquad Adj.de\ R^t(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R^{-1}(\theta) = \frac{Adj.de\ R^t(\theta)}{|R(\theta)|} = \frac{\begin{pmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow \underline{R^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}.$$

$$R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -sen\,(-\theta) \\ sen\,(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ \boldsymbol{R^{-1}(\theta) = R(-\theta)}}.$

Ejercicio 2:

Considera la función $f(x) = x^2$.

$a)$ Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Llamaremos a dicha recta $g(x)$.

$b)$ Calcula el área de la región limitada por las rectas $g(x), x = \frac{1}{2}, x = 1$, y el eje OX de abscisas.

$c)$ Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$.

$d)$ Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $g(x)$ y $x = \frac{1}{2}$.

Solución:

$a)$

Para $x = 1$ es $f(1) = 1$, por lo cual el punto de tangencia es $P(1, 1)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = 2x \Rightarrow m = f'(1) = 2 \cdot 1 \Rightarrow m = 2.$$

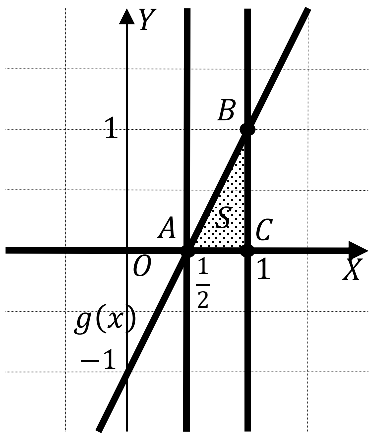
La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(0, 1)$ con $m = -4$ es:

$$y - 1 = 2(x - 1) = 2x - 2.$$

$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ \boldsymbol{y = g(x) = 2x - 1}}.$

$b)$

Los puntos de corte de $g(x) \equiv 2x - y - 1 = 0$ con las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = 1$ son $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $B(1, 1)$, respectivamente.



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} g(x) \cdot dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x - 1) \cdot dx =$$

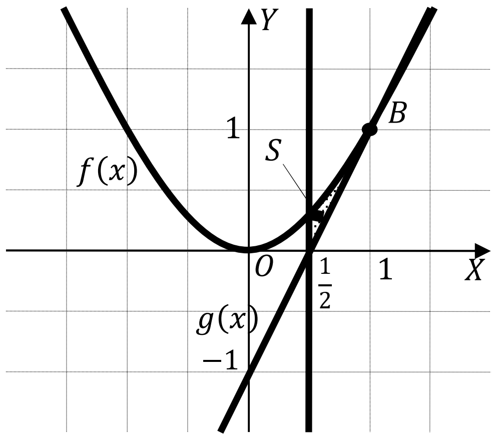
$$= \left[\frac{2x^2}{2} - x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = [x^2 - x]_{\frac{1}{2}}^{1} = (1^2 - 1) - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] = 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{S = \frac{1}{4}\, u^2 = 0.25\, u^2.}}$$

c)

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int x^2 \cdot dx \Rightarrow \underline{F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C.}$$

d)



Los puntos de corte de la función $f(x) = x^2$ y la recta $g(x) = 2x - 1$ tienen por abscisas las raíces reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = 2x - 1;$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0;\ \ (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

El único punto de corte es $B(1, 1)$.

En el intervalo de la superficie a calcular, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, todas las ordenadas de la función $f(x)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x)$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} [x^2 - (2x - 1)]dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x^2 - 2x + 1) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1\right) - \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{3} - 1 + 1 - \frac{1}{24} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{8 - 1 + 6 - 12}{24} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{1}{24}\, u^2 = 0.042\, u^2.}}$$

Ejercicio 3:

Se dispara un misil en línea recta desde el punto $A(1,2,8)$ hacia la posición de la base enemiga $B(3,4,0)$.

$a)$ Calcula la ecuación de la recta que contiene la trayectoria del misil.

$b)$ Calcula el punto en el que el misil cruza el plano $z = 4$.

$c)$ Calcula la distancia que recorre el misil desde que se lanza hasta que impacta en B.

$d)$ Calcula un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$.

Solución:

$a)$ Los puntos $A(1,2,8)$ y $B(3,4,0)$ determinan el vector:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(3,4,0) - (1,2,8)] = (2,2,-8).$$

Un vector director de la recta r que contiene la trayectoria del misil es cualquiera que sea linealmente del vector $\overrightarrow{AB} = (2,2,-8)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_r} = (1,1,-4)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 8 - 4\lambda \end{cases}}}.$$

$b)$ El punto P de corte de la recta r con el plano $z = 4$ es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} z = 4 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 8 - 4\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 8 - 4\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 1;\ \ x = 2;\ \ y = 3 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(2,3,4)}}.$$

$c)$ La distancia que recorre el misil es el módulo del vector $\overrightarrow{AB} = (2,2,-8)$:

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{4 + 4 + 64} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

$$\underline{\boldsymbol{d = 6\sqrt{2}\ u \cong 8.49\ u}}.$$

$d)$ Un vector es perpendicular a dos vectores dados cuando es linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores:

$$\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -32i + 6k - 9k + 24j = -32i + 24j - 3k \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\vec{v} = (32,-24,3)}}.$$

Ejercicio 4:

La testosterona es una hormona que se produce en el cuerpo de los hombres. En ciclismo la testosterona puede utilizarse como sustancia dopante, de forma que niveles elevados se consideran ilegales. En una población dada, la concentración de testosterona en sangre para un hombre adulto que no se haya dopado, sigue una distribución normal con media 600 ng/dl, y desviación típica 200 ng/dl.

a) Calcula la probabilidad de que un ciclista presente más de 1 000 ng/dl de testosterona en sangre sin haberse dopado.

b) ¿Qué nivel de testosterona elegirías como límite en un control antidopaje, para que la probabilidad de acusar a un inocente sea de 1 entre 1 000?

Solución:

a)

$Datos\text{: } \mu = 600;\ \ \sigma = 200.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(600, 200).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-600}{200}$.

$$P = P(X > 1\,000) = P\left(Z > \frac{1\,000-600}{200}\right) = P\left(Z > \frac{400}{200}\right) = P(Z > 2) =$$

$= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = \underline{0.0228}.$

$$\boldsymbol{P(X > 1\,000) = \underline{0.0228}.}$$

b)

Se trata de determinar β tal que:

$$P = P(X > \beta) = 0.001 \Rightarrow P\left(Z > \frac{\beta-600}{200}\right) = 1 - \left(Z < \frac{\beta-600}{200}\right) = 0.001 \Rightarrow$$

$P\left(Z \leq \frac{\beta-600}{200}\right) = 0.999$. Mirando de forma inversa en la tabla $N(0{,}1)$ a 0.999 le corresponde, aproximadamente, 3.08:

$$\frac{\beta-600}{200} = 3.08;\ \beta - 600 = 3.08 \cdot 200;\ \ \beta = 616 + 600 = 1\,216.$$

$$\underline{El\ límite\ de\ testosterona\ sería\ de\ \boldsymbol{1\,216\ ng/dl}.}$$

Ejercicio 5:

Considera el sistema $\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 4x - \lambda y = 2\lambda - 2 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

$a)$ Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

$b)$ Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λsi es necesario.

$c)$ Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 4 & -\lambda & 2\lambda - 2 \end{pmatrix}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 4 = 0; \;\; \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \lambda \neq -2 \\ \lambda \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 = nº\ incóg \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ \lambda = -2 \Rightarrow Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ \lambda = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = 2F_1\} \Rightarrow Rang\ M' = 1.$$

$$\underline{Para\ \lambda = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 1 < nº\ incóg \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve el sistema cuando la solución es única mediante la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2\lambda-2 & -\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix}} = \frac{-\lambda+2\lambda-2}{4-\lambda^2} = \frac{\lambda-2}{-(\lambda+2)(\lambda-2)} = \frac{-1}{\lambda+2}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 4 & 2\lambda-2 \end{vmatrix}}{4-\lambda^2} = \frac{2\lambda^2-2\lambda-4}{4-\lambda^2} = \frac{2\cdot(\lambda^2-\lambda-2)}{4-\lambda^2} = \frac{2\cdot(\lambda+1)(\lambda-2)}{-(\lambda+2)(\lambda-2)} = \frac{-2\cdot(\lambda+1)}{\lambda+2}.$$

$$\underline{Solución: \boldsymbol{x = \frac{-1}{\lambda+2}, y = \frac{-2(\lambda+1)}{\lambda+2}, \forall\lambda \in R - \{-2, 2\}}.}$$

Se resuelve ahora cuando el sistema tiene infinitas soluciones: $\lambda = 2$.

El sistema resulta $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$, equivalente a $2x - y = 1$. Haciendo $x = \mu$:

$$\underline{Solución: \boldsymbol{x = \mu, y = 2\mu - 1, \forall\mu \in R}.}$$

Ejercicio 6:

En una población, la proporción de personas infectadas por una determinada enfermedad en función del tiempo, $I(t)$, viene dada por la función $I(t)=\begin{cases} ke^{2t} & si\ \ t<1 \\ \frac{t^2}{3t^2+1} & si\ \ t\geq 1 \end{cases}$, siendo k una constante real, t el tiempo en años desde el inicio de la epidemia y $t=1$ el inicio de la vacunación.

$a)$ Calcula el valor de k para que $I(t)$ sea continua.

$b)$ Calcula la proporción de personas infectadas cuando $t\to\infty$.

$c)$ Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t=\frac{1}{2}$.

$d)$ Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t=2$.

Solución:

$a)$ La función $I(t)$ es continua en R por ser $3t^2+1\neq 0, \forall t\in R$, excepto para el valor de $t=1$, cuya continuidad se va a forzar determinando los correspondientes valores reales de k.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ t=1\Rightarrow\begin{cases} \lim\limits_{t\to1^-} I(t)=\lim\limits_{t\to1}(ke^{2t})=ke^2 \\ \lim\limits_{t\to1^+} I(t)=\lim\limits_{t\to1}\frac{t^2}{3t^2+1}=\frac{1}{4}=I(1) \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{t\to1^-} I(t)=\lim_{t\to1^+} I(t)=I(1)\Rightarrow ke^2=\frac{1}{4}\Rightarrow \underline{k=\frac{1}{4e^2}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{k=\frac{1}{4e^2}}.}$$

La función resulta $I(t)=\begin{cases} \frac{1}{4e^2}\cdot e^{2t} & si\ \ t<1 \\ \frac{t^2}{3t^2+1} & si\ \ t\geq 1 \end{cases}$.

$b)$ Cuando $t\to\infty$ la función es $I(t)=\frac{t^2}{3t^2+1}\Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^2}{3t^2+1}=\frac{1}{3}$

$$\underline{La\ proporción\ de\ personas\ infectadas\ cuando\ t\to\infty\ es\ \boldsymbol{\frac{1}{3}}.}$$

$c)$ Para $t=\frac{1}{2}$ la función es $I(t)=\frac{1}{4e^2}\cdot e^{2t}$.

El valor de la velocidad de una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto.

$$I'(t)=\frac{1}{4e^2}\cdot 2\cdot e^{2t}=\frac{1}{2}\cdot e^{2t-2}\Rightarrow v\left(\tfrac{1}{2}\right)=I'\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot e^{-1}\Rightarrow \underline{v\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1}{2e}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{v\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1}{2e}}}$$

$d)$ Para $t = 2$ la función es $I(t) = \frac{t^2}{3t^2+1}$.

$$I'(t) = \frac{2t\cdot(3t^2+1)-t^2\cdot 6t}{(3t^2+1)^2} = \frac{6t^3+2t-6t^3}{(3t^2+1)^2} = \frac{2t}{(3t^2+1)^2}.$$

$$v(2) = I'(2) = \frac{2\cdot 2}{(3\cdot 2^2+1)^2} = \frac{4}{13^2} \Rightarrow \underline{v(2) = \frac{4}{169}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{v(2) = \frac{4}{169}}}.$$

Ejercicio 7:

Considera el plano $\pi \equiv 2x + 3y - 4z = 10$ los puntos $A(1, 2, 1)$ y $B(2, 3, 3)$.

$a)$ Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

$b)$ Halla el vector normal del plano π.

$c)$ Determina la posición relativa del plano π y la recta que pasa por los puntos A y B.

$d)$ Halla la ecuación del plano paralelo a π que contiene al punto A.

Solución:

$a)$

Los puntos $A(1, 2, 1)$ y $B(2, 3, 3)$ determinan el vector:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2, 3, 3) - (1, 2, 1)] = (1, 1, 2).$$

Un vector director de la recta r que contiene la trayectoria del misil es cualquiera que sea linealmente del vector $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 2)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}.}$$

$b)$

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, 3, -4)$.

$c)$

Existen varias formas de responder a este apartado; una de ellas es la siguiente.

La expresión de la recta r expresada por don ecuaciones continuas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}; \ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}; \ \left.\begin{matrix} x - 1 = y - 2 \\ 2x - 2 = z - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{matrix} x - y = -1 \\ 2x - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 10 \end{matrix}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M \ y \ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

1º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2º -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 + 3 - 8 = -3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3.$$

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes}.$$

$d)$

El haz de planos β paralelos a π es de la forma $\beta \equiv 2x + 3y - 4z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π' que contiene al punto $A(1, 2, 1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 2x + 3y - 4z + D = 0 \\ A(1, 2, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + D = 0;$$

$$2 + 6 - 4 + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow \underline{\pi' \equiv 2x + 3y - 4z - 4 = 0}.$$

$$\underline{\pi' \equiv 2x + 3y - 4z - 4 = 0}.$$

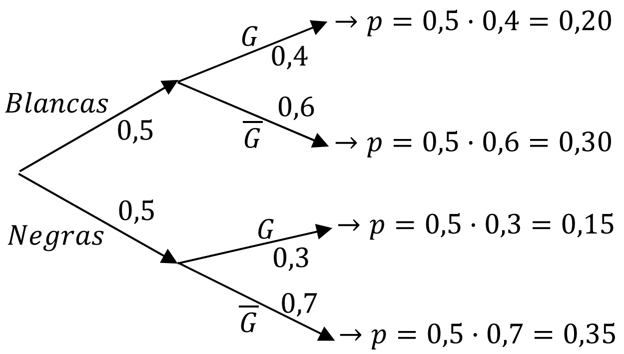
Ejercicio 8:

En ajedrez, la mitad de las partidas se juegan con piezas blancas y la otra mitad con negras. Un determinado jugador gana el 40 % de las partidas oficiales que juega con blancas y el 30 % jugando con negras.

a) Calcula la probabilidad de que gane una partida concreta si no sabemos con qué piezas jugará.

b) Calcula la probabilidad de que haya jugado con blancas una partida concreta, sabiendo que ha ganado.

Solución:



a)

$$P = P(G) = P(B \cap G) + P(N \cap G) = P(B) \cdot P(G/B) + P(N) \cdot P(G/N) =$$

$= 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.20 + 0.15 = \underline{0.35}$.

$$\underline{\mathbf{0.35}}$$

b)

$$P = P(B/G) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{P(B) \cdot P(G/B)}{P(G)} = \frac{0.5 \cdot 0.4}{0.35} = \frac{0.20}{0.35} = \underline{0.5714}.$$

$$\underline{\mathbf{0.5714}}.$$

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2021

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Deben escogerse solo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realizan más de cuatro ejercicios solo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda^2 x + 3y &= 3\lambda \\ 3x + y &= 3 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.

3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.

2) [0.5 PUNTOS] Halla los intervalos de crecimiento, y/o decrecimiento.

3) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 2$.

4) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (-1, 0, 1)$ y el origen de coordenadas O.

1) [0.75 PUNTOS] Calcula la ecuación del plano, Π, que contiene a los puntos A, B y C.

2) [0.25 PUNTOS] Comprueba que el origen de coordenadas, O, está contenido en el plano Π.

3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{OC}$ y que $\overrightarrow{AO}$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$.

4) [1 PUNTO] Calcula el área del paralelogramo $ABCO$.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]
Una determinada especie de aves siempre pone dos huevos, pero a la madre solo le es posible alimentar a un polluelo, el más fuerte de los dos. El polluelo del huevo que primero eclosiona tiene un 60% de probabilidad de ser el superviviente, mientras que el polluelo del huevo que eclosiona en segundo lugar tiene una probabilidad de sobrevivir del 30%.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un polluelo cualquiera sea el superviviente, si no sabemos si eclosionó en primer lugar o en segundo lugar su huevo.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un ave adulta de dicha especie proceda de un huevo eclosionado en segundo lugar.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]
Considera la ecuación matricial $XA - 2X = A$, en donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \end{pmatrix}$, siendo a una constante real.

1) [0.5 PUNTOS] Estudia el rango de A en función del parámetro a.

2) [0.25 PUNTOS] Indica para que valores se puede calcular la inversa de A.

3) [0.75 PUNTOS] Despeja X de la ecuación matricial.

4) [1 PUNTO] Calcula X para $a = 2$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]
Considera la función $f(x) = -x^2 + 4x$.

1) [0.25 PUNTOS] Calcula la derivada de $f(x)$.

2) [0.75 PUNTOS] Halla los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de $f(x)$.

3) [0.5 PUNTOS] Calcula una primitiva de $f(x)$.

4) [1 PUNTO] Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 3$ y el eje OX de abscisas.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]
Considera los puntos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 4, 1)$ y la recta $r = \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta, r', que pase por A y B

2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de las rectas r y r'.

3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y el origen de coordenadas.

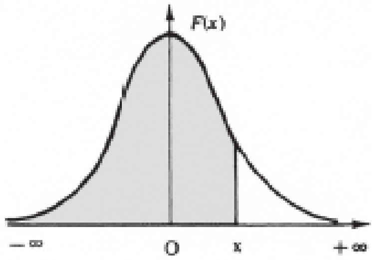
Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]
En una determinada población de adultos sanos, la concentración media de colesterol en sangre sigue una distribución normal con media 190 mg/dl y desviación típica 30 mg/dl. Un nivel elevado de colesterol puede indicar posibles problemas de salud.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un adulto sano de la población tenga un nivel de colesterol superior a 250 mg/dl.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula qué nivel de colesterol solo superan el 1% de adultos sanos de dicha población.

Distribución normal

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	:9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda^2 x + 3y = 3\lambda \\ 3x + y = 3 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

$a)$ Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

$b)$ Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvalo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.

$c)$ Determina para qué valores de λ el sistema no tiene soluciones.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 3 & 3\lambda \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0;\ \ \lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 3.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} \lambda \neq -3 \\ \lambda \neq 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda = -3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -9 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow\ Rang\ M' = 2$$

$$\underline{Para\ \lambda = -3 \Rightarrow Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ \lambda = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_3\} \Rightarrow\ Rang\ M' = 1.$$

$$\underline{Para\ \lambda = 3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 1 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$a)$

Se resuelve para $\lambda = 3$; el sistema resulta: $\begin{cases} 9x + 3y = 9 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$, que es compatible indeterminado (infinitas soluciones), equivalente a $3x + y = 3$.

Haciendo $x = \mu \Rightarrow y = 3 - 3\mu$.

$$\underline{Solución: \boldsymbol{x = \mu, y = 3 - 3\mu, \forall \mu \in R}.}$$

$b)$

Se resuelve para $\left\{\begin{array}{c}\lambda \neq -3 \\ \lambda \neq 3\end{array}\right\}$ mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3\lambda & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda^2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3\lambda-9}{\lambda^2-9} = \frac{3(\lambda-3)}{(\lambda+3)(\lambda-3)} = \frac{3}{\lambda+3}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda^2 & 3\lambda \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\lambda^2-9} = \frac{3\lambda^2-9\lambda}{\lambda^2-9} = \frac{3\lambda(\lambda-3)}{(\lambda+3)(\lambda-3)} = \frac{3\lambda}{\lambda+3}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{3}{\lambda+3}, y = \frac{3\lambda}{\lambda+3}, \forall \lambda \in R.}$$

$c)$

Para $\lambda = -3$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{c} 9x + 3y = -9 \\ 3x + y = 3 \end{array}\right\}$, que es incompatible (no tiene solución).

$$\left.\begin{array}{c} 9x + 3y = -9 \\ 3x + y = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} 3x + y = -3 \\ -3x - y = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = -6??.$$

****

Ejercicio 2:

Considera la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

$a)$ Calcula la derivada primera.

$b)$ Halla los intervalos de crecimiento, y/o decrecimiento.

$c)$ Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

$d)$ Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Solución:

$a)$

$$f'(x) = \frac{1\cdot e^x - x\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} \Rightarrow \underline{f'(x) = \frac{1-x}{e^x}}.$$

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Teniendo en cuenta que $D(f) \Rightarrow R$ y por ser $e^x > 0, \forall x \in R$, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea $(1-x)$.

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-\infty, 1)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (1, +\infty)}.$$

$c)$

Para $x = 2$ es $f(2) = \frac{2}{e^2}$, por lo cual el punto de tangencia es $P\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto: $m = f'(2) = \frac{1-2}{e^2} = \frac{-1}{e^2}$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ con $m = -\frac{1}{e^2}$ es:

$$y - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}\cdot(x-2);\;\; e^2y - 2 = -x + 2.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv x + e^2y - 4 = 0}.$$

$d)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{e^\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = \underline{0}.$$

****

Ejercicio 3:

Considera los puntos $A(1,1,0), B(0,1,1), C(-1,0,1)\ y\ O(0,0,0)$.

$a)$ Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

$b)$ Comprueba que el origen de coordenadas está contenido en el plano π.

$c)$ Comprueba que $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{OC}$ y que $\overrightarrow{AO}$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$.

$d)$ Calcula el área del paralelogramo ABCO.

Solución:

$a)$

Los puntos $A(1,1,0), B(0,1,1)\ y\ C(-1,0,1)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,1)-(1,1,0)] = (-1,0,1)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(-1,0,1)-(1,1,0)] = (-2,-1,1)$.

El plano π que contiene a los puntos A, B y C es el siguiente:

$$\pi(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC};\ A) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$-2(y-1)+z+(x-1)+(y-1)=0;\ (x-1)-(y-1)+z=0;$

$$x-1-y+1+z=0$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{\pi \equiv x-y+z=0.}}$$

$b)$

Un plano, expresado en forma general, contiene al origen cuando carece de término independiente, o de otra forma: el punto $O(0,0,0)$ satisface su ecuación.

$$\underline{Lo\ anterior\ comprueba\ que\ el\ plano\ \pi\ contiene\ al\ origen.}$$

$c)$

Dos vectores son paralelos cuando sus componentes son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1,0,1) \\ \overrightarrow{OC} = (-1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{OC}\ son\ paralelos}.$$

$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = -(1,1,0) = (-1,-1,0)$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = [(-1,0,1)-(0,1,1)] = (-1,-1,0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AO} = (-1,-1,0) \\ \overrightarrow{BC} = (-1,-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\overrightarrow{AO}\ y\ \overrightarrow{BC}\ son\ paralelos}.$$

$d)$

El área de un paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S_{ABCO} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{matrix}\right\| = |-2j + k + i + j| = |i - j + k| =$$

$$= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{S_{ABCO} = \sqrt{3}\, u^2}}.$$

****

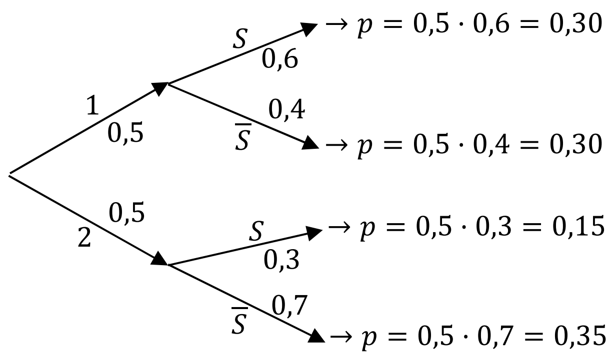
Ejercicio 4:

Una determinada especie de aves siempre pone dos huevos, pero a la madre solo se es posible alimentar a un polluelo, el más fuerte de los dos. El polluelo del huevo que primero eclosiona tiene un 60 % de probabilidad de ser el superviviente, mientras que el polluelo del huevo que eclosiona en segundo lugar tiene una probabilidad de sobrevivir del 30 %.

$a)$ Calcula la probabilidad de que un polluelo cualquiera sea el superviviente, si no sabemos si eclosionó en primer o en segundo lugar su huevo.

$b)$ Calcula la probabilidad de que un ave adulta de dicha especie proceda de un huevo eclosionado en segundo lugar.

Solución:



$a)$

$$P = P(S) = P(1 \cap S) + P(2 \cap S) = P(1) \cdot P(S/1) + P(2) \cdot P(S/2) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}30 + 0{,}15 = \underline{0{,}45 = 45\ \%}.$$

$$\underline{\boldsymbol{P = P(S) = 0,45 = 45\ \%}}$$

$b)$

$$P = P(2/S) = \frac{P(2 \cap S)}{P(S)} = \frac{P(2) \cdot P(S/2)}{P(S)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}3}{0{,}45} = \frac{0{,}15}{0{,}45} = \underline{0{,}3333 = 33{,}33\ \%}.$$

$$\boldsymbol{P = P(2/S) = \underline{0,3333 = 33,33\ \%}.}$$

****

Ejercicio 5:

Considera la ecuación matricial $X \cdot A - 2X = A$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \end{pmatrix}$, siendo a una constante real.

$a)$ Estudia el rango de A en función del parámetro a.

$b)$ Indica para qué valores se puede calcular la inversa de A.

$c)$ Despeja X de la ecuación matricial.

$d)$ Calcula X para $a = 2$.

Solución:

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \end{vmatrix} = -4 + a = 0 \Rightarrow a = 4.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a \neq 4 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ para\ a = 4 \Rightarrow Rang\ A = 1.}}$$

$b)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{4\}.}$$

$c)$

$$X \cdot A - 2X = A;\ \ X \cdot (A - 2I) = A;$$

$$X \cdot (A - 2I) \cdot (A - 2I)^{-1} = A \cdot (A - 2I)^{-1};\ \ X \cdot I = A \cdot (A - 2I)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{X = A \cdot (A - 2I)^{-1}.}}$$

$d)$

Para $a = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. $A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2.\ \ (A - 2I)^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.\ Adj.de\ (A - 2I)^t = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A-2I)^t}{|A-2I|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow\ (A - 2I)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X = A \cdot (A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.}}$$

****

Ejercicio 6:

Considera la función $f(x) = -x^2 + 4x$.

a) Calcula la derivada de $f(x)$.

b) Halla los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de $f(x)$.

c) Calcula una primitiva de $f(x)$.

d) Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$, las rectas $x = 1, x = 3$ y el eje OX.

Solución:

a) $f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{f'(x) = 2 \cdot (-x + 2).}}$$

b) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

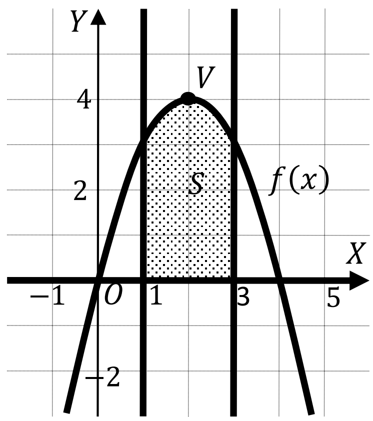
Teniendo en cuenta que $D(f) \Rightarrow R$, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea $(-x + 2)$.

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (2, +\infty)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (-\infty, 2)}.$$

c) $F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (-x^2 + 4x) \cdot dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + C$.

Por ejemplo, para $C = 0$: $\underline{F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2}$.



d) La función $f(x) = -x^2 + 4x$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2 y su vértice es siguiente:

$f'(x) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$.

$\Rightarrow V(2, 4)$.

Los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisa son los siguientes:

$$-x^2 + 4x = 0;\ -x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow O(0, 0) \\ x_2 = 4 \Rightarrow A(4, 0) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es la que expresa la figura adjunta, de la cual se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^3 f(x) \cdot dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_1^3 = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2\right) = -9 + 18 + \frac{1}{3} - 2 = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{22}{3}\ u^2 \cong 7{,}33\ u^2 = S.}$$

Ejercicio 7:

Considera los puntos $A(2,1,5), B(3,4,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$.

$a)$ Calcula la ecuación de la recta r' que pasa por A y B.

$b)$ Determina la posición relativa de las rectas $r \; y \; r'$.

$c)$ Calcula el área del triángulo de vértices A, B y el origen de coordenadas.

Solución:

$a)$

$$\overrightarrow{v_{r'}} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(3,4,1) - (2,1,5)] = (1,3,-4).$$

$$\underline{\boldsymbol{r' \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-5}{-5}}}.$$

$b)$

Un punto y un vector director de la recta r' son $A(2,1,5)$ y $\overrightarrow{v_{r'}} = (1,3,-4)$.

Un punto y un vector director de la recta r son $B(3,4,1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,3,4)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_{r'}}$ y $\overrightarrow{v_r}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r' y r se cortan o se cruzan.

Como quiera que ambas rectas contienen al punto $B(3,4,1)$:

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ r'\ y\ r\ se\ cortan\ en\ el\ punto\ B(3,4,1).}}$$

$c)$

$\overrightarrow{AB} = (1,3,-4)$. $\overrightarrow{OA} = (2,1,5)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{OA}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |15i - 8j + k - 6k + 4i - 5j| = \frac{1}{2} \cdot |19i - 13j - 5k| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{19^2 + (-13)^2 + (-5)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{361 + 169 + 25} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{555}.$$

$$\underline{\boldsymbol{S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{555}\ u^2 \cong 11,78\ u^2.}}$$

****

Ejercicio 8:

En una determinada población de adultos sanos, la concentración media de colesterol en sangre sigue una distribución normal con media 190 mg/dl y desviación típica 30 mg/dl. Un nivel elevado de colesterol puede indicar posibles problemas de salud.

$a)$ Calcula la probabilidad de que un adulto sano de la población tenga un nivel de colesterol superior a 250 mg/dl.

$b)$ Calcula qué nivel de colesterol solo superan el 1 % de adultos sanos de dicha población.

Solución:

$a)$

$Datos\text{: } \mu = 190;\ \ \sigma = 30.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(190, 30).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-190}{30}$.

$P = P(X > 250) = P\left(Z > \frac{250-190}{30}\right) = P\left(Z > \frac{60}{30}\right) = P(Z > 2) =$

$= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = \underline{0{,}0228}.$

La probabilidad de que un adulto sano de la población tenga un nivel de colesterol superior a 250 mg/dl es de 0.0228.

$b)$

Se trata de determinar β tal que:

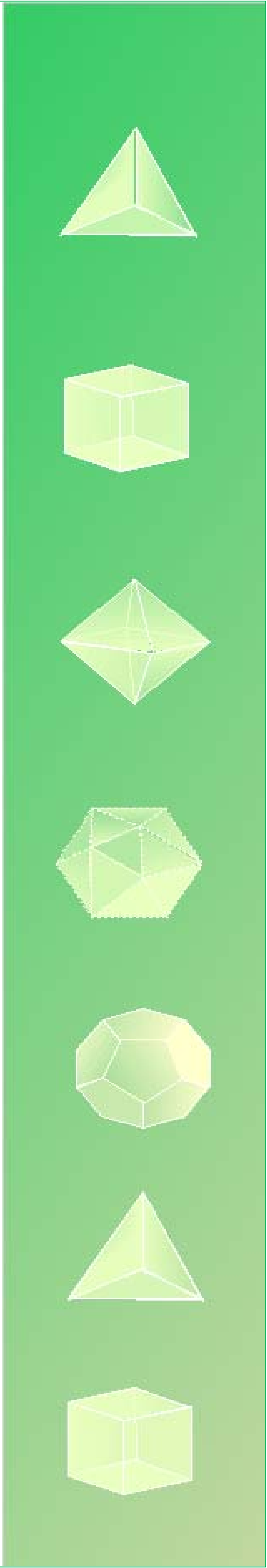
$P = P(X > \beta) = 0{,}01 \Rightarrow P\left(Z > \frac{\beta-190}{30}\right) = 1 - \left(Z < \frac{\beta-190}{30}\right) = 0{,}01 \Rightarrow$

$P\left(Z \leq \frac{\beta-190}{30}\right) = 0{,}99$. Mirando de forma inversa en la tabla $N(0{,}1)$ a 0,99 le corresponde, aproximadamente, 2,33:

$\frac{\beta-190}{30} = 2{,}33;\ \beta - 190 = 2{,}33 \cdot 30;\ \ \beta = 69{,}9 + 190 = 259{,}9.$

$\underline{Solo\ superan\ el\ 1\ \%\ un\ nivel\ de\ colesterol, aproximadamente, de\ 260\ mg/dl}.$

****



MATEMÁTICAS II
Selectividad 2021
Comunidad autónoma de
CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EvAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

Ejercicio 1:

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) [**1 punto**] Calcula razonadamente el determinante de $A^\top$, es decir, la matriz traspuesta de A.

b) [**1,5 puntos**] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.

Ejercicio 2:

2. *a*) [**1,75 puntos**] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & a+1 \\ a \cdot x & & +z & = & a-1 \\ x & -y & +z & = & 3 \end{cases}.$$

b) [**0,75 puntos**] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 0$, si es posible.

Ejercicio 3:

3. *a*) [**1,25 punto**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{2}{3+e^x}dx$.

(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

b) [**1,25 puntos**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx$.

Ejercicio 4:

4. *a*) [**1,25 puntos**] Sea el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r.

b) [**1,25 puntos**] Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 & +2\lambda \\ y = 1 & -2 \cdot a \cdot \lambda \\ z = 0 & +2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

Ejercicio 5:

5. Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(1,1,2)$.

- [**1,25 puntos**] Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
- [**1,25 punto**] Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C, y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D.

Ejercicio 6:

6. *a*) [**1 punto**] Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1,2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

   b) [**1,5 puntos**] Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

Ejercicio 7:

7. *a*) [**1 punto**] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x-2} - 1}{2x - 4}$.

   b) [**1,5 puntos**] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases},$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

Ejercicio 8:

8. *a*) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

   a.1) [**0,5 puntos**] ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

   a.2) [**0,75 puntos**] Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

   b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

   b.1) [**0,5 puntos**] ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

   b.2) [**0,75 puntos**] ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

n	**k \ p**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
4	**0**	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) [**1 punto**] Calcula razonadamente el determinante de $A^\top$, es decir, la matriz traspuesta de A.

   b) [**1,5 puntos**] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.

RESPUESTA

a) El determinante de A y el de $A^\top$ tienen el mismo valor

Calculamos el determinante de A, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 1 - 2 - 0 - 0 = 1$

$$\boldsymbol{|A^T| = |A| = 1}$$

b) $X \cdot A + 3 \cdot A = B$, $X \cdot A = B - 3 \cdot A$, $X = (B - 3 \cdot A) \cdot A^{-1}$

Calculamos $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t)$, $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Como $|A| = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$B - 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

.

$$X = (B - 3 \cdot A) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2:

2. $a)$ **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & a+1 \\ a\cdot x & & +z & = & a-1 \\ x & -y & +z & = & 3 \end{cases}.$$

$b)$ **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 0$, si es posible.

RESPUESTA

a) Escribimos la matriz de coeficientes C y la ampliada A

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, calculamos el determinante de C,

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -a+1+1-a = 2-2a,\ 2-2a = 0$, obtenemos $a = 1$.

Para $\boldsymbol{a = 1}$, sustituimos, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, $r(C) = 2$; como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, $r(A) = 3$.

En resumen,

Si $\boldsymbol{a \neq 1}$	$\boldsymbol{rg(C) = rg(A) = 3}$	**Compatible Determinado (Única solución)**
Si $\boldsymbol{a = 1}$	$\boldsymbol{rg(C) = 2 \neq rg(A) = 3}$	**Incompatible (No hay solución)**

b) Para $a = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $F'_3 = -F_1 + F_3$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Tenemos $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ z = -1 \\ -2y = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-1 = 1 \\ z = -1 \\ x-y-1 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = 2 \\ z = -1 \\ x-y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = 2 \\ z = -1 \\ 2x = 6 \end{cases}$

$$\boldsymbol{x = 3,\quad y = -1,\quad z = -1}$$

Ejercicio 3:

3. *a*) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{2}{3+e^x}dx$.
(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx$.

RESPUESTA

a) $\int \frac{2}{3+e^x}dx \;,\quad e^x = t \;,\; e^x dx = dt \;,\; dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \;,\quad \int \frac{2}{3+e^x}dx = \int \frac{2}{3+t}\frac{dt}{t} \;,$

es una integral racional con raíces simples, descomponemos en fracciones,

$$\frac{2}{(3+t)\cdot t} = \frac{A}{3+t} + \frac{B}{t} \;,\qquad 2 = A\cdot t + B\cdot(3+t),$$

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 3B &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Para $t = 0 \qquad 2 = B\cdot 3 \qquad B = \frac{2}{3}$

$t = -3 \qquad 2 = -3\cdot A \qquad A = -\frac{2}{3}$

luego $\int \frac{2}{3+t}\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}} = \int \frac{-\frac{2}{3}}{3+t}dt + \int \frac{\frac{2}{3}}{t}dt = -\frac{2}{3}\ln|3+t| + \frac{2}{3}\ln|t| = \frac{2}{3}\ln\left|\frac{t}{t+3}\right| + \mathrm{C}\,,$

deshaciendo el cambio $\int \frac{2}{3+e^x}dx = \frac{2}{3}\ln\left|\frac{e^x}{e^x+3}\right| + C$

$$\int \frac{2}{3+\mathbf{e}^x}dx = \frac{2}{3}\cdot\ln\left|\frac{e^x}{e^x+3}\right| + C = \ln\sqrt[3]{\left(\frac{e^x}{3+e^x}\right)^2} + C$$

b) $\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx = \int \frac{-x}{x^2+3}dx + \int \frac{1}{x^2+3}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx + \int \frac{1}{x^2+(\sqrt{3})^2}dx =$

$= -\frac{1}{2}ln|x^2+3| + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$

$$-\frac{1}{2}\cdot L(x^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot arc\;tg\;\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx = -\frac{1}{2}\cdot ln|x^2+3| + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C = -\frac{1}{2}\cdot ln(x^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot arc\;tg\;\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

Ejercicio 4:

4. *a*) **[1,25 puntos]** Sea el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r.

b) **[1,25 puntos]** Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 & +2\lambda \\ y = 1 & -2\cdot a\cdot\lambda \\ z = 0 & +2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

RESPUESTA

a) Dado un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y una recta r la distancia es

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{A_rP} \wedge \overrightarrow{V_r}\right|}{\left|\overrightarrow{V_r}\right|}$$

$P(1, 0, 1)$, $\quad \overrightarrow{V_r} = (1,1,-1)$, $\quad A_r = (-1,0,1)$, $\quad \overrightarrow{A_rP} = (1,0,1) - (-1,0,1) = (2,0,0)$

$$\overrightarrow{A_rP} \wedge \overrightarrow{V_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2k + 2j, \quad \overrightarrow{A_rP} \wedge \overrightarrow{V_r} = (0,2,2), \quad \left|\overrightarrow{A_rP} \wedge \overrightarrow{V_r}\right| = \sqrt{0+2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$\left|\overrightarrow{V_r}\right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ de donde, $\quad d(P,r) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$$\boldsymbol{d(P,r) = \frac{2\sqrt{6}}{3}\,\mathrm{u}.}$$

b) Para que dos rectas sean paralelas sus vectores directores han de ser proporcionales

$$\frac{2}{a} = \frac{-2a}{-1} = \frac{2}{1}$$

Tomando

$$\frac{2}{a} = \frac{2}{1}, \quad a = 1$$

y

$$\frac{-2a}{-1} = \frac{2}{1}, \quad a = 1$$

Las rectas son paralelas cuando *a* = 1

Ejercicio 5:

5. Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(1,1,2)$.

- [**1,25 puntos**] Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
- [**1,25 punto**] Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C, y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D.

RESPUESTA

a) El volumen viene dado por la expresión $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$

formamos los vectores:

$\overrightarrow{AB}=(2,1,-1)$ $\quad\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$ $\quad\overrightarrow{AD}=(1,1,1)$

Por tanto, el volumen es

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}2&1&-1\\1&1&0\\1&1&1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}|1|=\frac{1}{6}\ \mathrm{u}^3.$$

$$\boldsymbol{V=\frac{1}{6}\,u^3\cong 0.17\,u^3}$$

b) Consideramos el punto $A(0,0,1)$ y los vectores $\overrightarrow{AB}=(2,1,-1)$ $\quad\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$

La ecuación del plano viene dada por $\begin{vmatrix}x&y&z-1\\2&1&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=0$

Calculando, $2z-2-y-z+1+x=0$, $\quad x-y+z-1=0$, luego $\quad\pi\equiv x-y+z-1=0$

La recta pedida tendrá como vector director el vector normal al plano: $\overrightarrow{n_\pi}=(1,-1,1)$
junto con el punto $D(1,1,2)$
la ecuación de la recta es $\quad\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}$

La ecuación del plano es: $\boldsymbol{\pi\equiv x-y+z-1=0}$

La ecuación de la recta es: $\boldsymbol{\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}}$

Ejercicio 6:

6. *a*) [**1 punto**] Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

b) [**1,5 puntos**] Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

RESPUESTA

a) $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ al pasar por el punto (1, 2), $f(1) = 2$

Luego $f(1) = a \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + b = a + b - 3 = 2,\ \ a + b = 5$

Como la pendiente de la recta tangente en el punto es 1, $f'(1) = 1$

$f'(x) = 3ax^2 - 4x - 1$ $\quad f'(1) = 3 \cdot a \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = 3a - 5 = 1,\ 3a - 5 = 1 \quad 3a = 6$

Resolvemos el sistema $\begin{cases} a + b = 5 \\ 3a - 5 = 1 \end{cases}$ obtenemos $\begin{matrix} a = 2 \\ b = 3 \end{matrix}$

Los valores son: *a* = 2 y *b* = 3

b) Para $x = 0$, utilizamos la definición de continuidad en un punto.

Primero calculamos el $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y para ello tenemos que tomar límites laterales, ya que por la izquierda del 0 tenemos una función y por la derecha del 0 tenemos otra función.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - ax + 1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} be^x = b$, luego, para que exista el límite y f sea continua en $x = 0$, $b = 1$.

Calculamos la derivada de f: $f'(x) = \begin{cases} 2x - a & x < 0 \\ be^x & x > 0 \end{cases}$ calculamos las derivadas laterales en 0

$$f'_-(0) = 2 \cdot 0 - a = -a$$

$$f'_+(0) = b \cdot e^0 = b = 1$$

Luego para que f sea derivable en $x = 0$, $a = -1$.

***f* es continua y derivable en x = 0 para $a = -1$ y *b* = 1**

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo
www.apuntesmareaverde.org.es

Ejercicio 7:

7. *a*) [**1 punto**] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}-1}{2x-4}$.

b) [**1,5 puntos**] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si} \quad x<1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \\ 2e^x & \text{si} \quad x>3 \end{cases},$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

RESPUESTA

a) $\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}-1}{2x-4} = \frac{0}{0}$ indeterminación, aplicamos regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}-1}{2x-4} = \lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}-1}{2x-4} = \frac{1}{2}$$

b) El dominio es todos los números reales menos en $x = 2$, por anularse el denominador de la función racional definida entre 1 y 3

Sabemos que es continua en todos los números reales por ser una función definida a trozos de funciones continuas, polinómica, racional y exponencial, salvo 1 y 3 por estar definida a izquierda y derecha con diferentes funciones y hay que estudiar si es o no continua y en $x = 2$ que no es continua pues no existe $f(2)$, estudiamos el tipo de discontinuidad.

- En $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$, $f(1) = 1^2 - 2 = -1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2-2) = -1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-1}{x-2} = -1 \end{cases}$$, como los límites laterales son iguales, $\lim_{x\to 1} f(x) = -1$,

Al ser $f(1) = -1 = \lim_{x\to 1} f(x)$, f es continua en $x = 1$.

- En $\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$, no existe $f(2)$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{4}{0} \qquad \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{4}{0^-} - \infty \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{cases} \qquad \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

- En $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$, $f(3) = \frac{2\cdot 3-1}{3-2} = 5$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x-1}{x-2} = 5 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 2e^x = 2\cdot e^3, \end{cases}$$ como los límites laterales son distintos, $\nexists \lim_{x\to 3} f(x)$,

En $x = 2$	***f* presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto infinito**
En $x = 3$	***f* presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito**

Ejercicio 8:

8. *a*) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

   b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

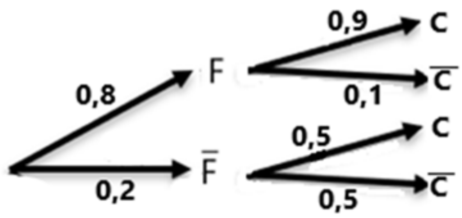
   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

RESPUESTA

a) Para resolver los dos apartados, vamos a realizar un diagrama de árbol, pero antes tenemos que escribir una leyenda:

F: comparte fotografías
$\bar{F}$: no comparte fotografías
C: comenta fotografías
$\bar{C}$: no comenta fotografías



a.1) Aplicamos el teorema de la **probabilidad total**:

$$P(C) = P(F \cap C) + P(\bar{F} \cap C) =$$

$$= P(\mathrm{F}) \cdot P(C/F) + P(\bar{F}) \cdot P(C/\bar{F}) = 0.8 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.5 = 0.82$$

$P(C)$ = 0.82

a.2) Aplicamos el **teorema de Bayes**:

$$P(F/\bar{C}) = \frac{P(\bar{C} \cap \mathrm{F})}{P(\bar{C})} = \frac{P(F) \cdot P(\bar{C}/F)}{P(\bar{C})} = \frac{0.8 \cdot 0.1}{1 - P(C)} = \frac{0.08}{1 - 0.82} = \frac{0.08}{0.18} = 0.4444$$

$$\boldsymbol{P(F/\bar{C}) = 0.4444}$$

b) Sea X la variable, identificar de manera correcta la persona $P(X) = 0.8$
como se procesan 4 fotografías se trata de una distribución Binomial
donde $n = 4$ y $p = 0.8$ $B(4, 0.8)$

b.1) $P(X = 4) = 0.4096$, mirando la tabla $k = 4$ y $p = 0.8$,

Probabilidad de identificar las 4 personas, $P(x = 4) = 0.4096$

b.2) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.0016 = 0.9984$ mirando la tabla $k = 0$ y $p = 0.8$

Probabilidad **de identificar al menos una persona, $P(X \geq 1) = 0.9984$**

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EvAU) FASE GENERAL
CURSO: **2020–2021**
MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE **JULIO**

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

Ejercicio 1:

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) [**1 punto**] Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) [**1,5 puntos**] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + 3I = A$.

Ejercicio 2:

2. *a*) [**1,75 puntos**] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +ay & +z & = & 2 \\ x & & +z & = & a \\ ax & +2y & +z & = & 3 \end{cases}.$$

b) [**0,75 puntos**] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Ejercicio 3:

3. *a*) [**1,25 punto**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int x \cdot cos(3x)dx$.

b) [**1,25 puntos**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+1}$.

Ejercicio 4:

4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0$.

a) [**1 punto**] Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

b) [**1,5 puntos**] Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ al plano π_1.

Ejercicio 5:

5. *a)* **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{e^{x-1}-1}$.

b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases},$$

estudia su continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

Ejercicio 6:

6. Sea la función $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$.

a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Ejercicio 7:

7. *a)* **[1 punto]** Sea la función $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + x - 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(1, 1)$ y tenga aquí un punto de inflexión.

b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = x\,\text{sen}(x) - \cos(x)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función $f(x)$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-1, 1]$.

Ejercicio 8:

8. *a)* En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
8	0	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	0.0004
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	0.0459	0.0046
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	0.0331
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1678	0.4305

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) [**1 punto**] Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) [**1,5 puntos**] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + 3I = A$.

RESPUESTA

a) Calculamos el determinante de A,

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 0 - 3 - 1 = -2$, como es distinto de 0 podemos calcular la inversa.

Calculamos $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t)$, $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Como $|A| = -2$, $\quad A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

b) $A \cdot X + 3 \cdot I = A$, $\;A \cdot X = A - 3 \cdot I$, $\quad X = A^{-1} \cdot (A - 3 \cdot I) = A^{-1} \cdot A - 3 \cdot A^{-1} \cdot I$

$X = I - 3 \cdot A^{-1}$; $\quad X = I - 3 \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2:

2. *a*) [**1,75 puntos**] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +ay & +z & = & 2 \\ x & & +z & = & a \\ ax & +2y & +z & = & 3 \end{cases}.$$

b) [**0,75 puntos**] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

RESPUESTA

a) Escribimos la matriz de coeficientes C y la ampliada A

$C = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ a & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, calculamos el determinante de C,

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + a^2 - 2 - a = a^2 - a,\ a^2 - a = 0$, obtenemos $a = 1 \ \ y \ \ a = 0$.

Para $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$, sustituimos, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,\ r(C) = 2$; como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $r(A) = 2$.

Para $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, sustituimos, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0,\ r(C) = 2$; como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, $r(A) = 3$.

En resumen,

Si $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$ **y** $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$	$\boldsymbol{rg(C) = rg(A) = 3}$	Compatible Determinado (Única solución)
Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$	$\boldsymbol{rg(C) = 2 = rg(A) = 2}$	Compatible Indeterminado (inf. soluciones)
Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$	$\boldsymbol{rg(C) = 2 \neq rg(A) = 3}$	Incompatible (No hay soluciones)

b) Para $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{matrix} F'_2 = -F_1 + F_2 \\ F'_3 = -2F_1 + F_3 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Tenemos $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -2y \qquad = 0 \\ -2y - z \ = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

$$\boldsymbol{x = 1, \quad y = 0, \quad z = 1}$$

Ejercicio 3:

3. *a*) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int x \cdot cos(3x)dx$.

   b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{dx}{2x^2+1}$.

RESPUESTA

a) $\int x \cdot \cos(3x)\, dx$, por partes, $u = x$, $du = dx$; $dv = cos(3x)$, $v = 1/3 \cdot sen(3x)$, de donde,

$$\int x \cdot cos(3x)\, dx = x \cdot \frac{1}{3} \cdot sen(3x) - \frac{1}{3} \cdot \int sen(3x)dx = \frac{x}{3} \cdot sen(3x) + \frac{1}{9} \cdot cos(3x) + C$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{\int x \cdot cos(3x)\, dx = \frac{x}{3} \cdot sen(3x) + \frac{1}{9} \cdot cos(3x) + C}$$

b) $\int \frac{1}{2x^2+1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}x)^2+1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\sqrt{2}x\right) + C$

De la fórmula: $\int \frac{u'}{u^2+1} dx$, donde u es una función de x

Por tanto,

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{2x^2+1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\sqrt{2}x\right) + C}$$

Ejercicio 4:

4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0$.

   a) **[1 punto]** Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

   b) **[1,5 puntos]** Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ al plano π_1.

RESPUESTA

a) Para que los planos sean perpendiculares sus vectores normales también han de serlo,

Vector normal de π_1, $\overline{n_1} = (a, 1, 2)$; Vector normal de π_2, $\overline{n_2} = (2, -1, a)$

Si el producto escalar vale 0, son perpendiculares,

$$\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = (a, 1, 2) \cdot (2, -1, a) = 2a - 1 + 2a = 4a - 1$$

$$4a - 1 = 0, \quad a = \frac{1}{4}$$

Para $a = \frac{1}{4}$ los planos son perpendiculares

b) Dado un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ la distancia es

$$d(P, \pi) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

Para $a = 1$ la ecuación del plano es $\pi_1 \equiv x + y + 2z - 3 = 0$, sustituyendo en la fórmula,

$$d(P, \pi_1) = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} u.$$

$$d(P, \pi_1) = \frac{\sqrt{6}}{6} u.$$

Ejercicio 5:

5. $a)$ [**1 punto**] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{e^{x-1}-1}$.

$b)$ [**1,5 puntos**] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases},$$

estudia su continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

RESPUESTA

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{e^{x-1}-1} = \dfrac{0}{0}$ indeterminación, aplicamos **regla de L'Hôpital**,

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = 1$$

b)

- En $x = 0$, $f(0) = \frac{1}{0-1} = -1$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x-1} = -1 \end{cases}$, como los límites laterales son distintos, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

- En $x = 2$, $f(2) = \frac{1}{2-1} = 1$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x = 2 \end{cases}$, como los límites laterales son distintos, $\nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$,

En $x = 0$ f presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito
En $x = 2$ f presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito

Ejercicio 6:

6. Sea la función $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$.

a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

RESPUESTA

a) $f'(x) = \frac{(4x+2)\cdot(3x^2+3)-(2x^2+2x-2)\cdot(6x)}{(3x^2+3)^2} = \frac{(12x^3+6x^2+12x+6)-(12x^3+12x^2-12x)}{(3x^2+3)^2} =$

$= \frac{-6x^2+24x+6}{(3x^2+3)^2}$, la fracción es 0 si el numerador es 0, igualamos $-6x^2+24x+6=0$,

Obtenemos, $x = 2+\sqrt{5}$ y $x = 2-\sqrt{5}$, estudiamos el signo de la derivada en los intervalos,

$(-\infty, 2-\sqrt{5}\,), f'(-10) < 0$; $(2-\sqrt{5}\,, 2+\sqrt{5}\,)$, $f'(0) > 0$; $(2+\sqrt{5}\,, \infty\,)$, $f'(10) < 0$
Decreciente ; Creciente ; Decreciente ;

$f(2-\sqrt{5}\,) = \frac{20-10\sqrt{5}}{30-12\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; $f(2+\sqrt{5}\,) = \frac{20+10\sqrt{5}}{30+12\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Por tanto, tenemos:

Mínimo relativo en $\left(2-\sqrt{5},\ -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ y máximo relativo en $\left(2+\sqrt{5},\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

b) Ecuación recta tangente: $y = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$, para $a = 1$, $f(1) = 1/3$, $f'(1) = 2/3$, de donde

$y = 1/3 + 2/3\cdot(x-1)$, $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

Recta tangente: $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

Ejercicio 7:

7. *a*) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + x - 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(1,1)$ y tenga aquí un punto de inflexión.

   b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = x\,\text{sen}(x) - \cos(x)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función $f(x)$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-1,1]$.

RESPUESTA

a) Si pasa por el punto (1, 1) entonces, $f(1) = 1$

Si en este punto hay un punto de inflexión entonces, $f''(1) = 0$.

$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + 1$

$f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$, aplicamos las condiciones,

$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 1 - 1 = 1, \quad a + b = 1$

$f''(1) = 6 \cdot a \cdot 1 + 2 \cdot b = 0, \quad 6a + 2b = 0, \; b = -3a, \quad a - 3a = 1$

De donde, $a = -\frac{1}{2}$ y $b = -3(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

Los valores son: $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{3}{2}$

b) Enunciado: Si f es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$ entonces, existe al menos un c perteneciente a (a, b), tal que $f'(c) = 0$.

Al ser la derivada en c igual a 0, en c debe existir un extremo relativo.

$f(x) = x \cdot sen(x) - cos(x)$ es una función continua y derivable en todos los números reales al ser suma y producto de funciones polinómicas y trigonométricas que lo son.

$f(-1) = -1 \cdot sen(-1) - cos(-1) = -(-sen(1)) - cos(1) = sen(1) - cos(1)$

$f(1) = 1 \cdot sen(1) - cos(1) = sen(1) - cos(1)$

Como se cumplen las hipótesis del teorema, en [–1, 1] la función tiene al menos un extremo relativo.

Efectivamente f tiene al menos un extremo relativo en [–1, 1]

Ejercicio 8:

8. *a*) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

   b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

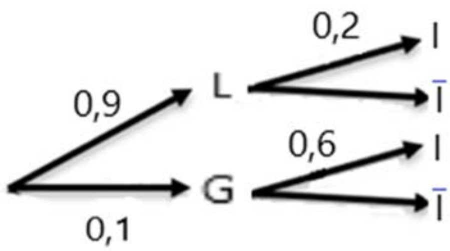
   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

RESPUESTA

a) Para resolver los dos apartados, vamos a realizar un diagrama de árbol, pero antes tenemos que escribir una leyenda:

L: pacientes leves
G: pacientes graves
I: debe ingresar
$\bar{I}$: no debe ingresar



a.1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(I) = P(L \cap I) + P(\mathrm{G} \cap \mathrm{I}) =$$

$$= P(L) \cdot P(I/L) + P(G) \cdot P(I/G) = 0.9 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.6 = 0.24$$

***P*(*I*) = 0.24**

a.2) Aplicamos el **teorema de Bayes**:

$$P(L/I) = \frac{P(L \cap \mathrm{I})}{P(\mathrm{I})} = \frac{P(L) \cdot P(I/L)}{P(I)} = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.24} = \frac{0.18}{0.24} = 0.75$$

$$\boldsymbol{P(L/I) = 0.75}$$

b) Sea X la variable, clasificar al paciente como leve $P(X) = 0.9$
como llegan 8 pacientes se trata de una distribución Binomial
donde $n = 8$ y $p = 0.9$ luego $B(8, 0.9)$

b.1) $P(X = 4) = 0.0046$, mirando la tabla $n = 8$, $k = 4$ y $p = 0.9$

Probabilidad de que 4 pacientes sean leves, $P(X = 4) = 0.0046$

b.2) $P(X \leq 7) = 1 - P(X = 8) = 1 - 0.4305 = 0.5695$ mirando la tabla $k = 8$ y $p = 0.9$

Probabilidad **de que como mucho 7 pacientes sean leves, $P(X \geq 7) = 0.5695$**

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

CASTILLA Y LEÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz Yañez-Barnuevo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuales son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1 .- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda = -1$. **(0,8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de n para los que la matriz A^2 tiene inversa. **(1 punto)**

b) Para $n = 2$, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

E3.- (Geometría)

a) Hallar la recta perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ que pasa por el punto $A = (0,0,0)$. **(0,8 puntos)**

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos $P = (1,1,1)$ y $Q = (1,3,-1)$ son simétricos. **(1,2 puntos)**

E4.- (Geometría)

Dados la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$ y el punto $P = (0,0,0)$, hallar la ecuación del plano π que contiene a r y pasa por el punto P. **(2 puntos)**

E5.- (Análisis)

Representar la función $f(x) = e^{(x^2)}$, determinando antes sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus asíntotas. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos(3x)}{sen^2(x)}$. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

a) Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 8$, hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que $g(x) \geq f(x)$. **(0,5 puntos)**

b) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

E8.- (Análisis)

Hallar los valores de a, b y c para los cuales el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ cumple las siguientes condiciones:

- $P(0) = 1$
- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en $x = 0$ es $m = 1$.
- $\int_0^2 P(x)dx = 12$. **(2 puntos)**

E9.- (Probabilidad y Estadística)

En un club deportivo, el 55% de los socios son hombres y el 45 % mujeres. Entre los socios, el 60% de los hombres practica la natación, así como el 40% de las mujeres.

a) Describir los sucesos y sus probabilidades, y calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar practique la natación. **(1,25 puntos)**

b) Sabiendo que una persona practica la natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer? **(0,75 puntos)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

El tiempo empleado, en minutos, para obtener la respuesta de un test para detectar cierta enfermedad sigue una distribución normal de media 20 y de desviación típica 4.

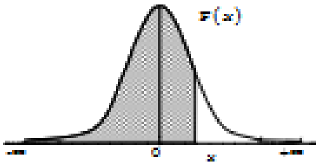
a) ¿En qué porcentaje de test se obtiene el resultado entre 16 y 26 minutos? **(1 punto)**

b) ¿Cuántos minutos son necesarios para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96.41% de los test? **(1 punto)**

MATEMÁTICAS II-Propuesta 2/2021. Página **2** de **3**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

RESPUESTAS DE LA CONVOCATORIA DE JUNIO

Ejercicio 1:

$a)$ Discutir el sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$ según los valores del parámetro λ.

$b)$ Resolverlo para $\lambda = -1$.

Solución:

$a)$ Es un sistema lineal homogéneo por lo que si el rango de la matriz de los coeficientes es 3 entonces sólo tiene la solución trivial, y si es menor que 3 es un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones.

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

Su determinante es:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + 2 + 1 - 1 + 1 + 2\lambda = 0;\ \ 3\lambda = -3;\ \ \lambda = -1.$$

Para $\lambda \neq -1$ el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas por lo que la solución es única, la solución trivial: $x = y = z = 0$, y el sistema es compatible determinado.

Para $\lambda = -1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2, luego el sistema es compatible indeterminado.

$b)$ Para $\lambda = -1$ el sistema es $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Eliminamos la tercera ecuación, y hacemos $z = \lambda$:

$$\left.\begin{matrix} x - y = -\lambda \\ 2x + y = \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow \ \ x = 0;\ \ y = \lambda.$$

$$\boldsymbol{x = 0}, \qquad \boldsymbol{y = \lambda}, \qquad \boldsymbol{z = \lambda}, \qquad \forall \lambda \in R$$

Ejercicio 2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$a)$ Determinar los valores de n para los que la matriz A^2 tiene inversa.

$b)$ Para $n = 2$, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Solución:

$a)$ Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero:

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^2-2n+1 & 0 \\ n-2 & 1 \end{pmatrix}$.

$|A^2| = \begin{vmatrix} n^2-2n+1 & 0 \\ n-2 & 1 \end{vmatrix} = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1.$

La matriz A^2 tiene inversa $\forall n \in R - \{1\}$

$b)$ Para $n = 2$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Despejamos X:

$$A \cdot X + A = 2I \rightarrow \ A \cdot X = 2I - A \rightarrow \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (2I - A) \rightarrow X = A^{-1} \cdot (2I - A)$$

Sustituimos:

$2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Cálculo de A^{-1}:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1;\ \ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};\ A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$X = A^{-1} \cdot (2I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3:

a) Hallar la recta r perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z=1$ que pasa por el punto $A(0,0,0)$.

b) Calcular la ecuación del plano β respecto del cual los puntos $P(1,1,1)$ y $y\,Q(1,3,-1)$ son simétricos.

Solución:

El vector normal del plano $\pi \equiv x+y+z=1$ es $\vec{n}=(1,1,1)$.

Podemos tomar como vector director de la recta, r, el vector normal del plano: $\vec{v_r}=(1,1,1)$.

Conocemos un punto $A(0,0,0)$ y el vector de dirección, por lo que la ecuación paramétrica de r es:

$$\boldsymbol{r} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{x=\lambda} \\ \boldsymbol{y=\lambda} \\ \boldsymbol{z=\lambda} \end{cases}$$

b) El punto medio del segmento de extremos $P\ y\ Q$ es $M(1,2,0)$, que debe ser un punto del plano β.

Los puntos $P(1,1,1)$ y $y\ Q(1,3,-1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=[(1,3,-1)-(1,1,1)]=(0,2,-2)$.

$\overrightarrow{PQ}$ es un vector ortogonal al plano. Tomamos como vector ortogonal: $\vec{n}=(0,1,-1)$

Hallamos la ecuación de dicho plano:

$$\left.\begin{array}{r} y-z+D=0 \\ M(1,2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 2-0+D=0 \Rightarrow \ \ D=-2\ \Rightarrow \beta \equiv y-z-2=0.$$

$$\beta \equiv \boldsymbol{y-z-2=0}$$

Ejercicio 4:

Dada la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$ y el punto $P(0,0,0)$, hallar la ecuación del plano π que contiene a r y pasa por el punto P.

Solución:

Un punto y un vector director de r son $A(-1,2,0)$ y $\vec{v} = (1,-1,2)$.

Los puntos $P(0,0,0)$ y $A(-1,2,0)$ pertenecen al plano, y determinan el vector $\overrightarrow{PA} = (-1,2,0)$.

El plano π tiene como vectores de orientación $\vec{v} = (1,-1,2)$ y $\overrightarrow{PA} = (-1,2,0)$ y contiene al punto $P(0,0,0)$ por lo que su ecuación es:

$$\pi(P;\ \vec{v},\overrightarrow{PA}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 = -4x + 2y + z = 0$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv -4x + 2y + z = 0}$$

Ejercicio 5:

Representar la función $f(x) = e^{(x^2)}$, determinando antes sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus asíntotas.

Solución:

La función $f(x)$es exponencial por lo que es continua y derivable en toda la recta real.

Como $f(-x) = e^{[(-x)]^2} = e^{(x^2)} = f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 2x \cdot e^{(x^2)}$. $\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x \cdot e^{(x^2)} = 0 \Rightarrow \; x = 0.$

$x \epsilon (-\infty, 0) \Rightarrow \; f'(x) < 0$, luego la función es decreciente.

$x \epsilon (0, +\infty) \Rightarrow \; f'(x) > 0$, luego la función es creciente.

En $x = 0$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente luego en ese punto tiene un mínimo.

$f(0) = e^{(0^2)} = e^0 = 1 \to A(0,1)$ es un mínimo relativo (luego comprobamos que es un mínimo absoluto).

Una función es cóncava ($\cap$) o convexa ($\cup$) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$f''(x) = 2 \cdot e^{(x^2)} \cdot (1 + 2x^2) \Rightarrow \begin{cases} e^{(x^2)} > 0, \forall x \in R \\ 1 + 2x^2 > 0, \forall x \in R \end{cases} \Rightarrow f''(x) > 0, \forall x \in R.$$

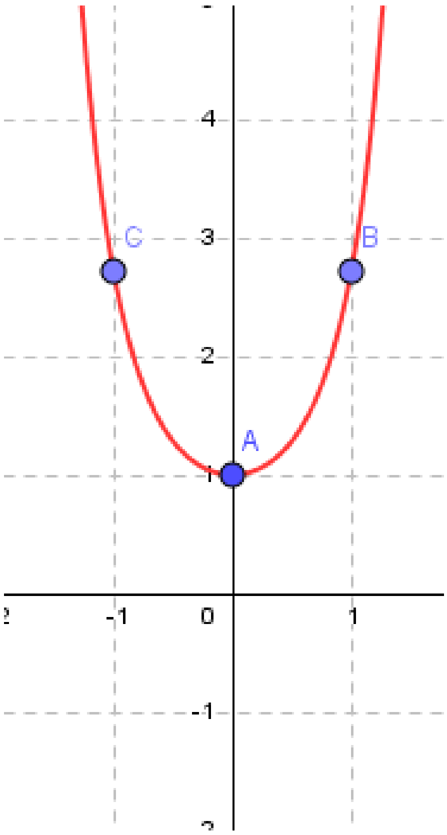
La función es convexa ($\cup$) en todo su dominio.

No tiene asíntotas verticales.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{(x^2)} = e^{+\infty} = +\infty$$

No tiene asíntotas horizontales, ni oblicuas

Otros puntos de la función son: $B(-1, e)$; $C(1, e)$.



Ejercicio 6:

Calcular: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - cos\,(3x)}{sen^2\,x}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - cos\,(3x)}{sen^2\,x} =$$

Para $x = 0$ se anula el numerador y el denominador, por lo que hay una indeterminación, aplicamos la regla de *L'Hôpital*:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + 3 \cdot sen\,(3x)}{2 \cdot sen\,x \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + 3 \cdot sen\,(3x)}{sen\,2x}$$

De nuevo se anula el numerador y el denominador, por lo que hay una indeterminación, aplicamos la regla de *L'Hôpital*:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + 3 \cdot 3 \cdot cos\,(3x)}{2 \cdot cos\,2x} = \frac{e^0 + 9 \cdot cos\,0}{2 \cdot cos\,0} = \frac{1 + 9 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 5.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - cos\,(3x)}{sen^2\,x} = \mathbf{5}$$

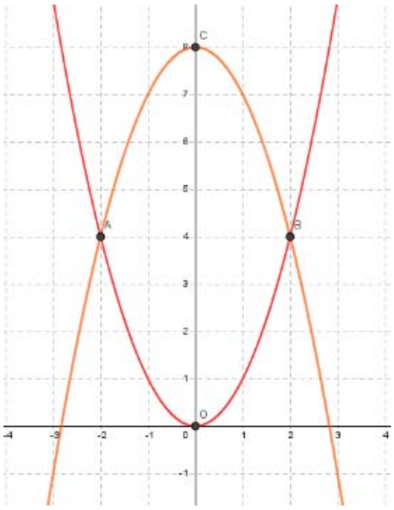
Ejercicio 7:

$a)$Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 8$, hallar los valores $x \in R$ para los que $g(x) \geq f(x)$.

$b)$ Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x)\ y\ g(x)$.

Solución:

$a)$ Ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$ son pares, por ser $f(-x) = f(x)$ y $g(-x) = g(x)$, por lo cual, ambas son simétricas con respecto al eje de ordenadas.



Calculamos sus puntos de intersección:

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = -x^2 + 8 \Rightarrow\ \ 2x^2 = 8 \Rightarrow\ \ x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2 \rightarrow A(-2, 4);\ x_2 = 2 \rightarrow B(2, 4)$.

La función $f(x) = x^2$ es una parábola convexa $(\cup)$ cuyo vértice es $O(0, 0)$.

La función $g(x) = -x^2 + 8$ es una parábola cóncava $(\cap)$ por ser negativo el coeficiente de x^2 cuyo vértice es el punto $C(0, 8)$.

En la representación gráfica se observa que $g(x) \geq f(x), \forall x \in [-2, 2]$.

$$g(x) \geq f(x), \forall x \in [-2, 2]$$

$b)$ Como todas las ordenadas de $g(x)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de $f(x)$, la superficie a calcular es:

$$S = \int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_{0}^{2} [(-x^2 + 8) - x^2] \cdot dx =$$

$$= 2 \int_0^2 (-2x^2 + 8) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{2x^3}{3} + 8x\right]_0^2 = 2 \cdot \left[\left(-\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 8 \cdot 2\right) - 0\right] = -\frac{32}{3} + 32 = \frac{-32+96}{3} = \frac{64}{3}.$$

$$S = \frac{\mathbf{64}}{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{u^2} \cong 21.33\ u^2$$

Ejercicio 8:

Hallar los valores de a, b y c para los que el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ cumpla las siguientes condiciones:

- $P(0) = 1$.
- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en $x = 0$ es $m = 1$.
- $\int_0^2 P(x) \cdot dx = 12$.

Solución:

$P(0) = 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$.

Para $x = 0$ es $P(0) = 1$, por lo cual el punto de tangencia es $P(0, 1)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$P'(x) = 2ax + b \Rightarrow P'(0) = 1 = 2a \cdot 0 + b = b \Rightarrow b = 1.$$

Por ahora $P(x) = ax^2 + x + 1$.

$\int_0^2 P(x) \cdot dx = 12 = \int_0^2 (ax^2 + x + 1) \cdot dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = \left[\frac{a \cdot 2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2\right] - 0 = \frac{8a}{3} + 2 + 2 \rightarrow \frac{8a}{3} = 8 \Rightarrow a = 3$.

$$\boldsymbol{a = 3};\ \boldsymbol{b = 1};\ \boldsymbol{c = 1};\ P(x) = 3x^2 + x + 1$$

Ejercicio 9:

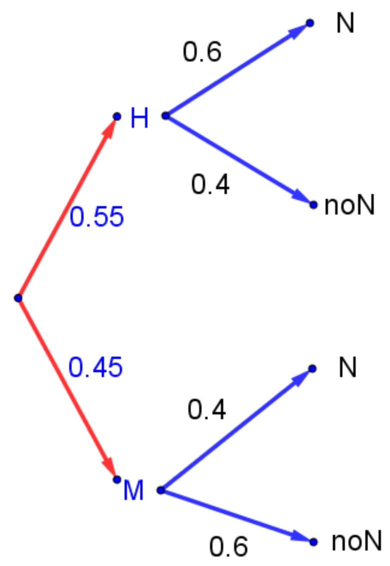
En un club deportivo, el 55 % de los socios son hombres y el 45 % mujeres. Entre los socios, el 60 % de los hombres practica la natación, así como el 40 % de las mujeres.

$a)$ Describir los sucesos y sus probabilidades, y calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar practique la natación.

$b)$ Sabiendo que una persona practica la natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:

$a)$ Llamamos H al suceso ser hombre, y M a ser mujer. Llamamos N al suceso practicar la natación, y noN a no practicarla. Llevamos los datos del enunciado a un diagrama de árbol:



$P(N) = P(H) \cdot P(N/H) + P(M) \cdot P(N/M) = 0.55 \cdot 0.6 + 0.45 \cdot 0.4 = 0.330 + 0.180 = 0.510.$

La probabilidad de que un socio elegido al azar practique la natación es $\mathbf{0.510}$.

$b)$ Ahora es una probabilidad condicionada:

$P(M/N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)} = \frac{P(M) \cdot P(N/M)}{P(N)} = \frac{0.45 \cdot 0.4}{0.510} = \frac{0.180}{0.510} = 0.3529.$

Sabiendo que una persona practica la natación, la probabilidad de que sea mujer es $\mathbf{0.3529}$.

Ejercicio 10:

El tiempo empleado, en minutos, para obtener la respuesta de un test para detectar cierta enfermedad sigue una distribución normal de media 20 y de desviación típica 4.

$a)$ ¿En qué porcentaje de test se obtiene el resultado entre 16 y 26 minutos?

$b)$ ¿Cuántos minutos son necesarios para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96.41 % de los test?

Solución:

$a)$ El enunciado nos dice que: $\mu = 20;\ \sigma = 4; X \to N(\mu, \sigma) = N(20, 4)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-20}{4}$.

$$P(16 < X < 26) = P\left(\frac{16-20}{4} \leq Z \leq \frac{26-20}{4}\right) = P\left(\frac{-4}{4} \leq Z \leq \frac{6}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1.5) =$$

$$P(Z \leq 1.5) - [1 - P(Z \leq 1)] = P(Z \leq 1.5) - 1 + P(Z \leq 1) = 0.9333 - 1 + 0.8413 = 0.7746.$$

En el $\mathbf{77.46}$ % de test se obtiene el resultado entre 16 y 26 minutos.

$b)$ $P(X \leq a) = 0.9641 = P\left(Z \leq \frac{a-20}{4}\right)$.

Buscando en la tabla $N(0, 1)$ a la inversa, a 0.9641 le corresponde 1.8:

$\frac{a-20}{4} = 1.8 \Rightarrow\ \ a - 20 = 7.2 \Rightarrow a = 27.2.$

Para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96.41 % de los test son necesarios $\boldsymbol{27.2\ minutos}$

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuales son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1 .- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-\lambda y=1 \\ 2x+\lambda z=1 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para λ=1. **(0,8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $M=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $N=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, hallar la matriz P que verifica que $M^{-1}PM=N$. **(2 puntos)**

E3. (Geometría)

Dadas las rectas $r\equiv x=y+1=\frac{z-2}{2}$ y $s\equiv\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y s. **(1 punto)**

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y s. **(1 punto)**

E4.- (Geometría)

Dada la recta $r\equiv x-1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$

a) Calcular el plano π_1 que pasa por $A=(1,2,3)$ y es perpendicular a la recta r. **(0,5 puntos)**

b) Calcular el plano π_2 que pasa por $B=(-1,1,-1)$ y contiene a la recta r. **(1,5 puntos)**

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=x^5-5x-1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión. **(2 puntos)**

MATEMÁTICAS II-Propuesta 3/2021. Página **1** de **3**

E6.- (Análisis)

Calcular el valor de $m > 0$ para el cual se verifica que $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(mx)}{x^2} = 2$. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

a) Estudiar la continuidad de la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int x \ln(x^2)\, dx$. **(1 punto)**

E8.- (Análisis)

Se considera la función $f(x) = x - \cos(x)$

a) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0,\pi/2]$. **(1 punto)**

b) Probar que la ecuación $f(x) = 0$ solo puede tener una solución en el intervalo $[0,\pi/2]$, de modo que la solución del apartado anterior es la única. **(1 punto)**

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Dentro de una caja hay bolas de varios colores que tienen todas el mismo tamaño y aspecto, siendo algunas de madera y las otras de metacrilato. Concretamente:

• El 48% son blancas y entre ellas dos tercios son de madera.

• El 24% son rojas, y de ellas las tres cuartas partes son de madera.

• El 28% son verdes, de las cuales la mitad son de madera.

Considerando los sucesos: B = "ser blanca", R = "ser roja", V= "ser verde" y M = "ser de madera"

a) Indicar cuales son los valores de $P(M/B)$, $P(M/R)$ y $P(M/V)$. **(0'3 puntos)**

b) Calcular la probabilidad de que al sacar al azar una de las bolas de la caja, sea de madera. **(0'7 puntos)**

c) Si solo sabemos que una de las bolas de la caja, elegida al azar, es de madera, ¿cual es la probabilidad de que sea blanca? **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Se sabe que el coeficiente intelectual de la población adulta española sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20.

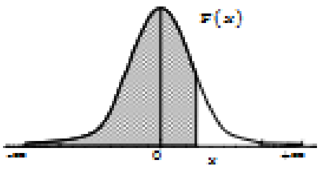
a) ¿Qué porcentaje de españoles adultos se espera que tengan un coeficiente intelectual entre 95 y 105? **(1 punto)**

b) Si se considera que una persona es superdotada cuando su coeficiente intelectual es mayor que 160, calcular el porcentaje de españoles adultos que son superdotados. **(1 punto)**

MATEMÁTICAS II-Propuesta 3/2021. Página **2** de **3**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

MATEMÁTICAS II-Propuesta_3/2021. Página 3 de 3

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Ejercicio 1:

$a)$ Discutir el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-\lambda y=1 \\ 2x+\lambda z=1 \end{cases}$ según los valores del parámetro λ.

$b)$ Resolverlo para $\lambda = 1$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 2\lambda - \lambda = -\lambda^2 + \lambda = -\lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.$$

Si $\lambda \neq 0$ o si $\lambda \neq 1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Para $\lambda = 0$ la matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene el menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0,$$

Por lo que su rango es 3, distinto al rango de la matriz de los coeficientes que es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Para $\lambda = 1$ la matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \qquad \{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\}$$

Al tener una fila de ceros su rango es 2, igual al de la matriz de los coeficientes y menor que el número de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

$b)$ Para $\lambda = 1$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} x+y+z=0 \\ x-y=1 \\ 2x+z=1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado.

Hacemos $x = \mu;\ \ y = -1 + \mu;\ \ z = 1 - 2\mu$.

$$\boldsymbol{x = \mu, y = -1 + \mu, z = 1 - 2\mu}, \forall \mu \in R$$

Ejercicio 2:

Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, hallar la matriz P que verifica que

$M^{-1} \cdot P \cdot M = N$.

Solución:

Despejamos P de la ecuación matricial multiplicando dos veces por M^{-1}:

$M^{-1} \cdot P \cdot M = N \rightarrow M \cdot M^{-1} \cdot P \cdot M \cdot M^{-1} = M \cdot N \cdot M^{-1} \rightarrow \;\; P = M \cdot N \cdot M^{-1}$.

Sustituimos:

$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ luego existe su matriz inversa

$$M^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \;\; Adj.de\,M^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; M^{-1} = \frac{Adj.de\,M^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = M \cdot N \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 3:

Dadas las rectas $r \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$, se pide:

$a)$ Determinar la posición relativa de r y s.

$b)$ Hallar la ecuación del plano que contiene a r y s.

Solución:

$a)$ Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta s:

$$s \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda; \;\; y = 3 + \lambda; \;\; z = 3 + 2\lambda \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta s son $B(0, 3, 3)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1, 1, 2)$.

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0, -1, 2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 2)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son iguales y por tanto linealmente dependientes luego las rectas r y s son paralelas o coincidentes. Si son paralelas, no tienen ningún punto en común, mientras que, si son coincidentes, los tienen todos.

Para diferenciar el caso comprobamos si el punto $A(0, -1, 2) \in r$, también pertenece a la recta s, para lo cual, tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{r} s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \\ A(0, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} \lambda = 0 \\ 3 + \lambda = -1 \\ 3 + 2\lambda = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} \lambda = 0 \\ 3 \neq -1 \\ 3 \neq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow A \notin s.$$

Las rectas $\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{s}$ **son paralelas**

$b)$ Del plano pedido ya conocemos puntos, $A(0, -1, 2)$ y $B(0, 3, 3)$ y un vector de orientación, el vector de dirección de ambas rectas: $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 2)$. Obtenemos otro vector de orientación:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0, 3, 3) - (0, -1, 2)] = (0, 4, 1)$.

$$\pi(A; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{AB}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 = -7x + 4(z-2) - (y+1) = -7x + 4z - 8 - y - 1$$
$$= -7x - y + 4z - 9$$

$$\boldsymbol{7x + y - 4z + 9 = 0}$$

Ejercicio 4:

Dada la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

a) Calcular el plano π_1 que pasa por $A(1, 2, 3)$ y es perpendicular a la recta r.

b) Calcular el plano π_2 que pasa por $B(-1, 1, -1)$ y contiene a la recta r.

Solución:

a) Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 2)$, y por tanto el vector ortogonal al plano buscado, que tendrá la forma: $\pi_1 \equiv x - y + 2z + D = 0$

Imponemos que pase por el punto $A(1, 2, 3)$

$$\pi_1 \equiv x - y + 2z + D = 0 \to 1 - 2 + 2 \cdot 3 + D = 0 = 5 + D = 0 \Rightarrow D = -5$$

$$\boldsymbol{\pi_1 \equiv x - y + 2z - 5 = 0}$$

b) Ahora del plano pedido conocemos dos puntos, $B(-1, 1, -1)$ y un punto de la recta r: $P(1, 2, 1)$. El vector $\overrightarrow{BP}$ es un vector de orientación del plano, así como el vector $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 2)$ de dirección de la recta.

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = [(1, 2, 1) - (-1, 1, -1)] = (2, 1, 2)$.

$$\pi_2\left(B;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{BP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 = -4(x+1) + 2(y-1) + 3(z+1) =$$

$$-4x - 4 + 2y - 2 + 3z + 3 = 4x - 2y - 3z + 3$$

$$\boldsymbol{\pi_2 \equiv 4x - 2y - 3z + 3 = 0}$$

Ejercicio 5:

Dada la función $f(x) = x^5 - 5x - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión.

Solución:

La función dada es polinómica, por lo que es continua y derivable en toda la recta real. Para determinar sus extremos relativos buscamos los puntos dónde se anula la primera derivada:

$f'(x) = 5x^4 - 5 \to f'(x) = 0 = 5x^4 - 5 \to x^4 - 1 = 0 \to x^4 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

Para saber si una función es creciente o decreciente analizamos el signo de su primera derivada.

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, -1), (-1, 1)$ y $(1, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Por ejemplo, para $x = 0 \in (-1, 1)$ es: $f'(0) = -5 < 0$ por lo que la función es decreciente.

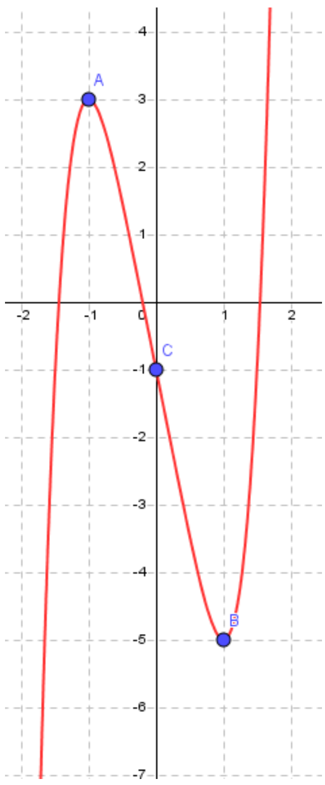
Y para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ la función es creciente.

Si $\boldsymbol{x} \in (\mathbf{-1}, \mathbf{1})$ es **decreciente**, y si $x \in (-\infty, \mathbf{-1}) \cup (\mathbf{1}, +\infty)$ la función es **creciente**

Para $x = -1$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, por lo que en ese punto se alcanza un máximo:

$f(-1) = (-1)^5 - 5 \cdot (-1) - 1 = -1 + 5 - 1 = 3.$

$A(\mathbf{-1}, \mathbf{3})$ es un **máximo** relativo



Para $x = 1$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, por lo que en ese punto se alcanza un mínimo:

$$f(1) = (1)^5 - 5 \cdot (1) - 1 = 1 - 5 - 1 = -5$$

$B(\mathbf{1}, \mathbf{-5})$ es un **mínimo** relativo

Una función es cóncava $(\cap)$ o convexa $(\cup)$ cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$f''(x) = 20x^3$; Si $x < 0$ entonces $f''(x) < 0$; Si $x > 0$ entonces $f''(x) > 0$.

Para $x \in (-\infty, \mathbf{0})$ la función es **cóncava** $(\cap)$.

Y para $x \in (\mathbf{0}, +\infty)$ es **convexa** $(\cup)$.

Una función tiene un punto de inflexión cuando pasa de ser cóncava a convexa o viceversa, por lo que tendrá un punto de inflexión para $x = 0$.

$(\mathbf{0}, \mathbf{-1})$ es punto de inflexión

Autor: Jorge Muñoz Yañez-Barnuevo
www.apuntesmareaverde.org.es

Ejercicio 6:

Calcular el valor de $m > 0$ para el cual se verifica que: $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos\,(mx)}{x^2} = 2$.

Solución:

Indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos *L'Hôpital*.

$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos\,(mx)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m\cdot sen\,(mx)}{2x} =$

Vuelve a ser indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Volvemos a aplicar *L'Hôpital*.

$= \lim_{x\to 0} \frac{m^2\cdot\cos(mx)}{2} = \frac{m^2\cdot\cos 0}{2} = 2 \to \frac{m^2\cdot 1}{2} = 2 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m_1 = -2, m_2 = 2.$

Por ser $m > 0$ la única solución es $m = 2$

Ejercicio 7:

$a)$ Estudiar la continuidad de la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 0\ , & si\ \ x = 0 \end{cases}$.

$b)$ Calcular $I = \int x \cdot L(x^2) \cdot dx$.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, excepto para $x = 0$ cuya continuidad es dudosa, y vamos a estudiar.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

Para $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = f(0) \end{cases}$

- El límite $\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x}$ es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos *L'Hôpital*.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{sen\ 0^-}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$
- $f(0) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

La función es continua en $x = 0$, y por tanto, es continua en toda la recta real.

$b)$ $I = \int x \cdot L(x^2) \cdot dx = \int x \cdot 2 \cdot Lx \cdot dx = 2 \cdot \int x \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow$

La hacemos por partes: $u = Lx \to du = \frac{1}{x} \cdot dx;\ x \cdot dx = dv \to v = \frac{x^2}{2}$

$I = 2 \cdot \int x \cdot Lx \cdot dx = 2 \cdot \left[Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx\right] = 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx\right] = x^2 \cdot Lx - \frac{x^2}{2} + C.$

$$I = \int x \cdot L(x^2) \cdot dx = x^2 \cdot Lx - \frac{x^2}{2} + C.$$

Ejercicio 8:

Se considera la función $f(x) = x - \cos x$.

$a)$ Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

$b)$ Probar que la ecuación $f(x) = 0$ solo puede tener una solución en el intervalo $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, de modo que la solución del apartado anterior sea única.

Solución:

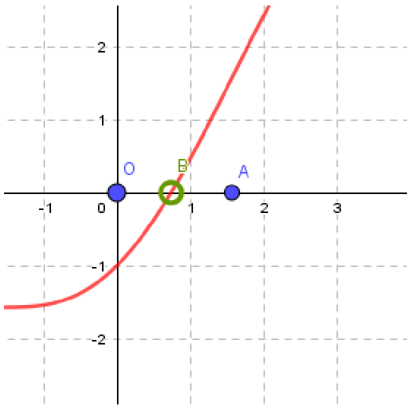
$a)$ El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

Aplicamos el teorema de Bolzano a la función $f(x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

La función $f(x) = x - \cos x$ es continua en R por ser suma algebraica de dos funciones continuas en R.

$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0.$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} > 0.$



Luego por el Teorema de Bolzano la función tiene **al menos una raíz** en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$b)$ En el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la función es creciente ya que:

$$f'(x) = 1 + sen\ x > 0$$

La derivada no se anula nunca por lo que es imposible que haya otra raíz.

La función tiene una **única** raíz en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Ejercicio 9:

Dentro de una caja hay bolas de varios colores que tienen todas el mismo tamaño y aspecto, siendo algunas de madera y las otras de metacrilato. Concretamente: el 48 % son blancas y entre ellas dos tercios son de madera; el 24 % son rojas, y de ellas las tres cuartas partes son de madera y, el 28 % son verdes, de las cuales la mitad son de madera. Considerando que B, R, V y M indican blanca, roja, verde y de madera, respectivamente:

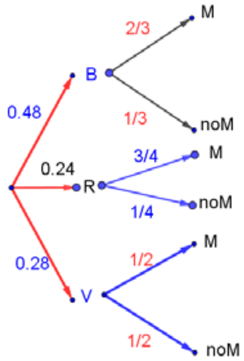
a) Indicar cuales son los valores de $P(M/B)$; $P(M/R)\ y\ P(M/V)$.

b) Calcular la probabilidad de que al sacar al azar una de las bolas de la caja, sea de madera.

c) Si solo sabemos que una de las bolas de la caja, elegida al azar, es de madera, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?

Solución:

Llamamos B, R, V, M y noM al suceso, ser blanca, roja, verde, de madera y no de madera, respectivamente. Y llevamos los datos del enunciado a un diagrama de árbol.



$a)\ P(M/B) = \frac{2}{3} = 0.6667$.

$P(M/R) = \frac{3}{4} = 0.75$.

$P(M/V) = \frac{1}{2} = 0.50$.

$b)\ P(M) = P(B \cap M) + P(R \cap M) + P(V \cap M) = P(B) \cdot P\left(\frac{M}{B}\right) + P(R) \cdot P\left(\frac{B}{R}\right) + P(V) \cdot P\left(\frac{M}{V}\right) =$

$0.48 \cdot \frac{2}{3} + 0.24 \cdot \frac{3}{4} + 0.28 \cdot \frac{1}{2} = 0.32 + 0.18 + 0.14 = 0.64$.

Probabilidad de ser de madera es $\mathbf{0.64}$

$c)\ P(B/M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{P(B) \cdot P(M/B)}{P(M)} = \frac{0.48 \cdot \frac{2}{3}}{0.64} = \frac{032}{0.64} = 0.5$.

Si solo sabemos que una de las bolas de la caja, elegida al azar, es de madera, la probabilidad de que sea blanca es de $\mathbf{0.5}$.

Ejercicio 10:

Se sabe que el coeficiente intelectual de la población adulta española sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20.

$a)$ ¿Qué porcentaje de españoles adultos se espera que tengan un coeficiente intelectual entre 95 y 105?

$b)$ Se considera que una persona es superdotada cuando su coeficiente intelectual es mayor que 160, calcular el porcentaje de españoles adultos que son superdotados.

Solución:

Nos dicen que es una distribución normal de $\mu = 100; \ \ \sigma = 20$:

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(100, 20).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-100}{20}$.

$$a)\ P(95 < X < 105) = P\left(\frac{95-100}{20} < Z < \frac{105-100}{20}\right) = P\left(\frac{-5}{20} < Z < \frac{5}{20}\right) = P(-0.25 < Z < 0.25) = P(Z < 0.25) - [1 - P(Z < 0.25)] = P(Z < 0.25) - 1 + P(Z < 0.25) = 2 \cdot P(Z < 0.25) - 1 =$$

$$2 \cdot 0.5987 - 1 = 1.1974 - 1 = 0.1974 = 19.74\ \%.$$

Se espera que tenga un coeficiente intelectual entre 95 y 105, un $\mathbf{19.74}$ % de españoles adultos.

$$b)\ P(X > 160) = P\left(Z > \frac{160-100}{20}\right) = P\left(Z > \frac{60}{20}\right) = P(Z > 3) = 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013 = 0.13\ \%.$$

El porcentaje de españoles superdotados es de $\mathbf{0.13}$ %.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

CATALUÑA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JAIME CARRASCOSA OROZCO

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 2

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

Problema 1:

1. Considereu la paràbola $y = 4 - x^2$ i un valor $a > 0$.

a) Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = -2ax + a^2 + 4$ i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades.
[1,25 punts]

b) Calculeu el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima.
[1,25 punts]

Problema: 2

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real p:

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2 z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre p.
[1,5 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $p = 2$.
[1 punt]

Problema 3:

3. Considereu el punt $P = (-1, 3, 1)$, el pla $\pi : x = y$ i la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = z - 2$.

a) Trobeu les coordenades del punt P' simètric a P respecte al pla π.
[1,25 punts]

b) De tots els plans que contenen la recta r, trobeu l'equació cartesiana del que és perpendicular al pla π.
[1,25 punts]

Problema 4:

4. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ definida en el domini $x>0$, en què ln és el logaritme neperià.

a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba $y=f(x)$ en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt.
[1 punt]

b) Determineu si la funció $f(x)$ té alguna asímptota horitzontal.
[0,5 punts]

c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y=f(x)$ i les rectes $x=1$ i $x=\text{e}$. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini $0<x<5$, en què quedi representada l'àrea que heu calculat.
[1 punt]

Problema 5:

5. *a*) Donada la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat.
[1,25 punts]

b) Una matriu quadrada $\boldsymbol{M}$ satisfà que $\boldsymbol{M}^3-3\boldsymbol{M}^2+3\boldsymbol{M}-\boldsymbol{I}=0$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat. Justifiqueu que $\boldsymbol{M}$ és invertible i expresseu la inversa de $\boldsymbol{M}$ en funció de les matrius $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{I}$.
[1,25 punts]

Problema:6

6. Considereu la funció $f(x)=\text{e}^{x-1}-x-1$.

a) Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.
[1,25 punts]

b) Demostreu que l'equació $f(x)=0$ té exactament dues solucions entre $x=-1$ i $x=3$.
[1,25 punts]

RESPUESTAS SÈRIE 2

Problema 1:

1. Considereu la paràbola $y = 4 - x^2$ i un valor $a > 0$.

***a*)** Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = -2ax + a^2 + 4$ i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades.

[1,25 punts]

***b*)** Calculeu el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima.

[1,25 punts]

Solución:

a) Para determinar la recta tangente buscamos el punto de tangencia, y con la derivada en ese punto, la pendiente de la recta:

Para $x = a$ es $f(a) = 4 - a^2$, por lo cual el punto de tangencia es $P(a, 4 - a^2)$.

$f'(x) = -2x \rightarrow m = f'(a) = -2a$.

La ecuación de la recta tangente es: $y = y_0 + m(x - x_0)$

$y = (4 - a^2) - 2a(x - a) = 4 - a^2 - 2ax + 2a^2 = -2ax + a^2 + 4$. C.q.d.

La recta tangente corta a los ejes de coordenadas en los puntos:

$$X: \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ y = -2ax + a^2 + 4 \end{array}\right\} \rightarrow -2ax + a^2 + 4 = 0 \rightarrow \ x = \frac{a^2+4}{2a} \rightarrow A\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right).$$

$$Y: \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = -2ax + a^2 + 4 \end{array}\right\} \rightarrow y = a^2 + 4 \rightarrow B(0, a^2 + 4).$$

Queda comprobado que la recta tangente es $\boldsymbol{y = -2ax + a^2 + 4}$, y conta a los ejes coordenados en los puntos: $\boldsymbol{A\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)}$ y $\boldsymbol{B(0, a^2 + 4)}$.

b) El triángulo de vértices OAB es rectángulo, y su área vale: $\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+4}{2a} \cdot (a^2 + 4)$. Imponemos que sea mínima anulando la derivada primera y haciendo positiva la segunda:

$$Área(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+4}{2a} \cdot (a^2 + 4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4)^2}{a}.$$

$$Área'(a) = \frac{1}{4} \cdot \frac{[2\cdot(a^2+4)\cdot 2a]\cdot a - (a^2+4)^2 \cdot 1}{a^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4)\cdot[4a^2 - (a^2+4)]}{a^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4)\cdot(3a^2-4)}{a^2} = 0.$$

$(a^2 + 4) \cdot (3a^2 - 4) = 0$. Es siempre distinto de cero: $a^2 + 4$. Anulamos:

$3a^2 - 4 = 0 \rightarrow \ 3a^2 = 4 \rightarrow a = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. La solución negativa da longitudes negativas luego no tiene sentido geométrico

$$Área''(a) = \frac{1}{4} \cdot \frac{[2a\cdot(3a^2-4) + (a^2+4)\cdot 6a]\cdot a^2 - [(a^2+4)\cdot(3a^2-4)]\cdot 2a}{a^4} = \frac{3a^4+16a^3+16}{2a^3} \rightarrow Área''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0$$

El área del triángulo es mínima para $\boldsymbol{a} =$

Problema: 2

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real p:

$$\begin{cases} px+y+z=2 \\ 2x+py+p^2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre p.
[1,5 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $p=2$.
[1 punt]

Solución:

a) Para discutir el sistema estudiamos los rangos de las matrices de los coeficientes y ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = p^2 + 2 + 2p^2 - 2p - p^3 - 2 = 0 \to \; p^3 - 3p^2 + 2p = 0;$$

$$p(p^2 - 3p + 2) = 0 \to p = 0. \quad \text{y} \quad p^2 - 3p + 2 = 0 \to \; p = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \to p = 1, p = 2.$$

Por lo que si $p \neq 0, p \neq 1,\ p \neq 2$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es **compatible y determinado**.

Para $p = 0 \to M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 4 = 2 \neq 0$, luego su rango es 3, mientras que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es **incompatible**.

Para $p = 1 \to M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 2 - 4 - 1 - 4 = -1 \neq 0$, luego su rango es 3, mientras que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Para $p = 2 \to M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, tiene la primera y la tercera fila iguales, luego su rango es 2, igual al rango de la matriz de los coeficientes y menos que el número de incógnitas, luego el sistema es **compatible e indeterminado**.

La discusión completa del sistema es:

- Si $p = 0$ o bien $p = 1$ el $RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ y el sistema es **incompatible**.
- Si $p = 2$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema es compatible **indeterminado**.
- Si $p \neq 0,\ p \neq 1$ y $p \neq 2$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema es **compatible determinado**.

$b)$ Si $p = 2$ el sistema es: $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 - \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -2x - y = -2 + \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{array}\right\}$$

Hacemos $z = \lambda$, y sumamos: $y = -1 - 3\lambda$.

$$2x + y = 2 - \lambda \rightarrow \ 2x - 1 - 3\lambda = 2 - \lambda \rightarrow \ 2x = 3 + 2\lambda \rightarrow \ x = \frac{3}{2} + \lambda.$$

$$\boldsymbol{x = \frac{3}{2} + \lambda, y = -1 - \lambda, z = \lambda, \forall\lambda \in R}$$

Problema 3:

3. Considereu el punt $P=(-1,3,1)$, el pla $\pi: x=y$ i la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z-2$.

   a) Trobeu les coordenades del punt P' simètric a P respecte al pla π.
   [1,25 punts]

   b) De tots els plans que contenen la recta r, trobeu l'equació cartesiana del que és perpendicular al pla π.
   [1,25 punts]

Solución:

a) La recta t que pasa por $P(-1,3,1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x-y=0$ tiene como vector director al vector normal de π: $\vec{n}=(1,-1,0) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1 \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x-y=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -1+\lambda-(3-\lambda)=0;\ -1+\lambda-3+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow M(1,1,1).$$

Debe verificarse: $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MP'}$.

$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=[(1,1,1)-(-1,3,1)]=(2,-2,0)$.

$\overrightarrow{MP'}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OM}=[(x,y,z)-(1,1,1)]=(x-,y-1,z-1)$.

$$(2,-2,0)=(x-1,y-1,z-1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-1=2 \rightarrow x=3 \\ y-1=-2 \rightarrow y=-1 \\ z-1=0 \rightarrow z=1 \end{array}\right\}.$$

El punto simétrico pedido es: $\boldsymbol{P'(3,-1,1)}$

b) De la recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z-2$ conocemos un punto: $Q(1,0,2)$ y el vector de dirección: $\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)$.

Buscamos un vector perpendicular a $\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)$ y al vector normal al plano π: $(1,-1,0)$

$$\overrightarrow{n'_\gamma}=\overrightarrow{v_r}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-i+3k+2k-j=-i-j+5k \Rightarrow\Rightarrow \overrightarrow{n_\gamma}=(1,1,-5).$$

El haz de planos γ tiene por expresión general: $\gamma \equiv x+y-5z+D=0$. Imponemos que contenga a $Q(1,0,2)$: $\gamma \equiv x+y-5z+D=0 \longrightarrow 1+0-5\cdot 2+D=0;\ \ D-9=0 \Rightarrow D=9$.

El plano pedido es: $\boldsymbol{x+y-5z+9=0}$

Problema 4:

4. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ definida en el domini $x>0$, en què ln és el logaritme neperià.

a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba $y=f(x)$ en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt.
[1 punt]

b) Determineu si la funció $f(x)$ té alguna asímptota horitzontal.
[0,5 punts]

c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y=f(x)$ i les rectes $x=1$ i $x=e$. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini $0<x<5$, en què quedi representada l'àrea que heu calculat.
[1 punt]

Solución:

$a)$ Buscamos un punto en el que la tangente sea horizontal, es decir:

$$f'(x)=0=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}\rightarrow\ 1-\ln(x)=0\rightarrow\ \ln(x)=1\rightarrow x=e\rightarrow f(e)=\frac{\ln(e)}{e}=\frac{1}{e}.$$

El punto buscado tiene de coordenadas: $\boldsymbol{A\left(e,\frac{1}{e}\right)}$

Como ya hemos visto que es un punto de tangente horizontal, podría ser un punto de inflexión si se anulara la derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln(x))\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\ln(x)-3}{x^3}\rightarrow f''(e)=\frac{2\ln(e)-3}{e^3}=\frac{2\cdot 1-3}{e^3}=\frac{-1}{e^3}<0$$

En $\boldsymbol{A\left(e,\frac{1}{e}\right)}$ la función alcanza un **máximo** relativo

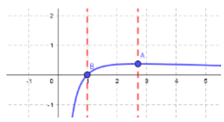
$b)$ Calculamos el comportamiento de la función cuando tiende a infinito

$k=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$ Tanto el numerador como el denominador tienden a infinito por lo que podemos aplicar la regla de *L'Hôpital*.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

La recta $\boldsymbol{y=0}$ es asíntota horizontal cuando $x>0$

$c)$ Para $x=1, y=0$, la curva pasa por el punto $B(1,0)$.



Calculamos el área mediante un cambio de variables: $\ln(x)=t\rightarrow\frac{1}{x}\cdot dx=dt$

$$S=\int_1^e f(x)\cdot dx=\int_1^e\frac{\ln(x)}{x}\cdot dx=\int_0^1 t\cdot dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{1}{2}=0.5\,u^2.$$

Área = $\boldsymbol{\frac{1}{2}=0.5\,u^2}$

Autor: JAIME CARRASCOSA OROZCO
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 5:

5. *a*) Donada la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}$, en què

$\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat.
[1,25 punts]

b) Una matriu quadrada $\boldsymbol{M}$ satisfà que $\boldsymbol{M}^3 - 3\boldsymbol{M}^2 + 3\boldsymbol{M} - \boldsymbol{I} = 0$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat. Justifiqueu que $\boldsymbol{M}$ és invertible i expresseu la inversa de $\boldsymbol{M}$ en funció de les matrius $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{I}$.
[1,25 punts]

Solución:

a) Resolvemos la ecuación:

$$A^2X = A - 3I \to \ (A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot (A - 3I) \to I \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot (A - 3I) \to$$
$$X = (A^2)^{-1} \cdot (A - 3I)$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa de A^2 por el método de Gauss.

$$(A^2|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$
$$\{F_1 \leftrightarrow F_3\} \qquad \{F_1 \leftrightarrow F_3\}$$

$$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

b) $M^3 - 3M^2 + 3M - I = O \to \ M^3 - 3M^2 + 3M - O = I \to \ M \cdot (M^3 - 3M + 3I) = I.$

Por la definición de matriz inversa, la matriz $(M^3 - 3M + 3I)$ es la inversa de la matriz M:

$$\boldsymbol{M^{-1} = M^3 - 3M + 3I}$$

Problema 6:

6. Considereu la funció $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.

a) Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.

[1,25 punts]

b) Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té exactament dues solucions entre $x = -1$ i $x = 3$.

[1,25 punts]

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es suma de una función exponencial y de una función polinómica, ambas continuas en todo su dominio, que es R.

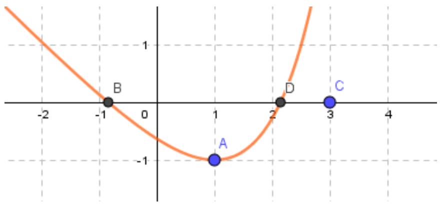
Estudio de los extremos relativos, crecimiento y decrecimiento. Calculamos la derivada primera:

$$f'(x) = e^{x-1} - 1 \to f'(x) = 0 \to e^{x-1} - 1 = 0 \to \quad e^{x-1} = 1 \to x - 1 = 0 \to \quad x = 1.$$

Para $x > 1 \to f'(x) > 0 \to$ La función es creciente si $x \in (1, +\infty)$

Para $x < 1 \to f'(x) < 0 \to$ La función es decreciente si $x \in (-\infty, 1)$

Por lo tanto en $x = 1$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, luego en ese punto alcanza un mínimo.



El punto $\boldsymbol{A(1, -1)}$ es un mínimo relativo.

$b)$ La función es continua en toda la recta real. Vamos a aplicar el teorema de Bolzano en cada uno de los intervalos $(-1, 1)$ y $(1, 3)$.

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

$(-1, 1)$: $\begin{cases} f(-1) = e^{-1-1} - (-1) - 1 = e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0 \\ f(1) = e^{1-1} - 1 - 1 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \end{cases}$ Como $f(x)$ es monótona decreciente en $(-1,1)$,aplicando el *teorema de Bolzano* sabemos que tiene una única raíz en ese intervalo $(-1, 1)$:

$(1, 3)$: $\begin{cases} f(1) = e^{1-1} - 1 - 1 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \\ f(3) = e^{3-1} - 3 - 1 = e^2 - 4 \cong 4{,}39 > 0 \end{cases}$. Como $f(x)$ es monótona creciente en $(1, 3)$,aplicando el *teorema de Bolzano* sabemos que tiene una única raíz en ese intervalo $(1, 3)$

Por tanto $f(x)$ tiene exactamente **dos** raíces en $(-1, 3)$.

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 4

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

Problema 1:

Considere el sistema $\left.\begin{array}{r} x+ky+z=3+k \\ kx+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro real k.

$a)$ Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k.

$b)$ Resuelve, si es posible, el sistema para el caso de $k=1$ y haga una interpretación geométrica.

Problema 2:

$a)$ Dada la función $f(x)=\frac{4}{x}$, calcule la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$. Encuentra también la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en el mismo punto.

$b)$ Haga un esbozo de la gráfica de la curva $y=f(x)$ y de la recta $4x+y=8$, y calcule el área delimitada por estas dos gráficas, el eje de abscisas y la recta $x=3$.

Problema 3:

En R^3 se dan los puntos $A(3,1,1), B(0,0,1), C(4,1,2)\ y\ D(1,1,t)$, en donde t es un valor real.

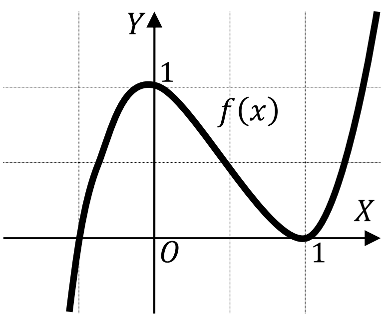
$a)$ ¿Para qué valor real de t los cuatro puntos son coplanarios?

$b)$ Encuentre el valor de t para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de $5\ u^3$.

Nota: El volumen de un tetraedro definidos por los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\ y\ \overrightarrow{v_3}$ es igual a un sexto del valor absoluto del determinante de la matriz formada por los tres vectores.

Problema 4:

$a)$ En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función $f(x)$. Represente de manera esquemática la gráfica de la función derivada de $f(x)$. Explique el razonamiento que ha seguido.



$b)$ Calcule los valores de a y b para que la función $g(x)=ax^3+bx^2+1$ tenga un punto de inflexión en $x=\frac{1}{2}$ y su derivada en este punto sea $-\frac{3}{2}$.

Problema 5:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real.

$a)$ Encuentre los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.

$b)$ Compruebe que, para $a = 3$, la matriz A es invertible y resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B - 3I$, siendo $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Problema 6:

Considere la función $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.

$a)$ Estudie si tiene puntos críticos y, en caso de que los tenga, justifique de qué tipo son. Determine también cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

$b)$ Compruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(-2, 1)$.

RESPUESTAS SÈRIE 4

Problema 1:

Considere el sistema $\left.\begin{matrix} x+ky+z=3+k \\ kx+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{matrix}\right\}$, dependiente del parámetro real k.

$a)$ Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k.

$b)$ Resuelve, si es posible, el sistema para el caso de $k=1$ y haga una interpretación geométrica.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix}1 & k & 1\\ k & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix}1 & k & 1 & 3+k\\ k & 1 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 1 & 5\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es:

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & k & 1\\ k & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=1+3k+k-1-k^2-3=-k^2+4k-3=0;$$

$k^2-4k+3=0;\ \ k=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=2\pm 1\Rightarrow k_1=1, k_2=3.$

Si $k\neq 1$ o si $k\neq 3$ entonces los rangos de ambas matrices es 3, igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $k=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$ la matriz amplaida tiene dos filas iguales por lo que su rango es 2, igual a la matriz de los coeficientes, por lo que el sistema es compatible indeterminado.

Si $k=3\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 6\\ 3 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 1 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 3 & 6\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=5+54+12-6-12-45=8\neq 0$

El rango de la matriz ampliada es 3, distinto del de la matriz de los coeficientes que es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Sistema compatible y determinado si $k\neq 1$ o si $k\neq 3$. Sistema compatible indeterminado si $k=1$. Sistema incompatible si $k=3$.

$b)$ Para $k=1$ el sistema es $\left.\begin{matrix} x+y+z=4 \\ x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{matrix}\right\}$, que sabemos que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{matrix} x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{matrix}\right\}$. Haciendo $z=\lambda$:

$\left.\begin{matrix} x+y=4-\lambda \\ x+3y=5-\lambda \end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix} -x-y=-4+\lambda \\ x+3y=5-\lambda \end{matrix}\right\}\rightarrow 2y=1;\ \ y=\frac{1}{2}; x=4-\lambda-y=4-\lambda-\frac{1}{2}\rightarrow x=\frac{7}{2}-\lambda.$

Geométricamente son dos planos que se cortan en la recta: $x=\frac{7}{2}-\lambda, y=\frac{1}{2}, z=\lambda, \forall\lambda\in R$, y el otro plano coincidente.

Problema 2:

a) Dada la función $f(x) = \frac{4}{x}$, calcule la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Encuentra también la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en el mismo punto.

b) Haga un esbozo de la gráfica de la curva $y = f(x)$ y de la recta $4x + y = 8$, y calcule el área delimitada por estas dos gráficas, el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

Solución:

a) Para $x = 1$ es $f(1) = 4$, por lo cual el punto de tangencia es $A(1, 4)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto: $f'(x) = -\frac{4}{x^2} \Rightarrow m = f'(1) = -\frac{4}{1^2} \Rightarrow m = -4$.

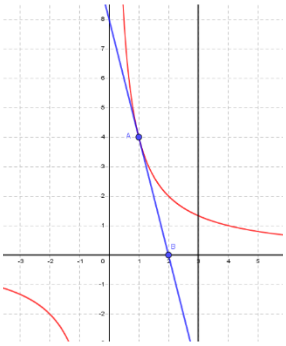
La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $A(1, 4)$ con $m = -4$ es: $y - 4 = -4(x - 1) = -4x + 4$.

Recta tangente en $(1, 4)$: $4x + y - 8 = 0$

La pendiente de la recta normal es inversa y de signo contrario de la pendiente de la tangente: $m' = \frac{1}{4}$.

La recta normal es la siguiente: $y - 4 = \frac{1}{4}(x - 1) \rightarrow \ 4y - 16 = x - 1$.

Recta normal en (1, 4): $x - 4y + 15 = 0$



b) La función $f(x) = \frac{4}{x}$ es una hipérbola equilátera que contiene al punto $A(1, 4)$. La recta dada, $4x + y = 8$, es la tangente a la función en el punto $A(1, 4)$.

En el intervalo $(1, 2)$, todas las ordenadas de la función $f(x)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la recta $t \equiv y = 8 - 4x$, por lo cual:

$$S = \int_1^2 [f(x) - t(x)] \cdot dx + \int_2^3 f(x) \cdot dx = \int_1^2 \left[\frac{4}{x} - (8 - 4x)\right] \cdot dx + \int_2^3 \frac{4}{x} \cdot dx =$$

$$\left[4 \cdot Lx + \frac{4x^2}{2} - 8x\right]_1^2 + [4 \cdot Lx]_2^3 =$$

$$(4 \cdot L2 + 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2) - (4 \cdot L1 + 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1) + 4 \cdot L3 - 4 \cdot L2 =$$

$$4 \cdot L2 - 2 + 4 \cdot L3 - 4 \cdot L2 = (4 \cdot L3 - 2)\ u^2$$

$$Área = \ (\boldsymbol{4 \cdot L3 - 2})\ \boldsymbol{u^2}$$

Problema 3:

En R^3 se dan los puntos $A(3,1,1), B(0,0,1), C(4,1,2)\ y\ D(1,1,t)$, en donde t es un valor real.

$a)$ ¿Para qué valor real de t los cuatro puntos son coplanarios?

$b)$ Encuentre el valor de t para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de $5\ u^3$.

Nota: El volumen de un tetraedro definidos por los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\ y\ \overrightarrow{v_3}$ es igual a un sexto del valor absoluto del determinante de la matriz formada por los tres vectores.

Solución:

$a)$ Los puntos $A(3,1,1), B(0,0,1), C(4,1,2)\ y\ D(1,1,t)$ determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,0,1) - (3,1,1)] = (-3,-1,0).$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(4,1,2) - (3,1,1)] = (1,0,1).$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(1,1,t) - (3,1,1)] = (-2,0,t-1).$

Los puntos A, B, C y D son coplanarios cuando lo sean los tres vectores que determinan, por lo cual, el rango de los tres vectores tiene que ser 2, es decir: que el determinante de la matriz que forman es cero.

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = 2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

$$Los\ puntos\ A, B, C\ y\ D\ son\ coplanarios\ para\ t = -1$$

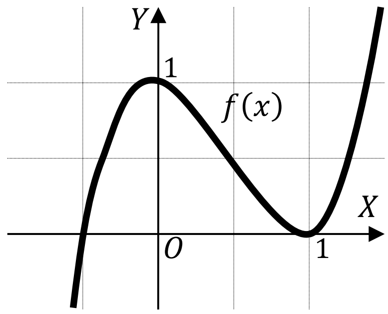
$$b)\ V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right) = 5 \Rightarrow \left|\begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & t-1 \end{vmatrix}\right| = 30 \rightarrow$$

$$|1+t| = 30 \rightarrow \begin{cases} 1 + t = 30 \rightarrow t_1 = 29 \\ -1 - t = 30 \rightarrow t_2 = -31 \end{cases}.$$

$$El\ volumen\ del\ tetraedro\ ABCD\ es\ de\ 5\ u^3\ para\ t = 29\ y\ para\ t = 31$$

Problema 4:

$a)$ En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función $f(x)$. Represente de manera esquemática la gráfica de la función derivada de $f(x)$. Explique el razonamiento que ha seguido.



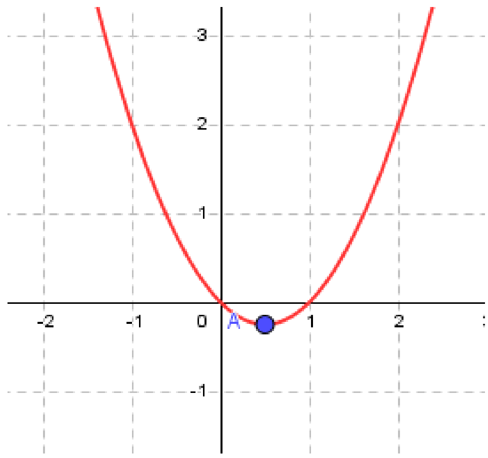
$b)$ Calcule los valores de a y b para que la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ tenga un punto de inflexión en $x = \frac{1}{2}$ y su derivada en este punto sea $-\frac{3}{2}$.

Solución:

$a)$ La derivada de una función representa el valor de la tangente de la función en cada uno de sus puntos. Por tener la función un máximo en $x = 0$ y un mínimo para $x = 1$, la función derivada se anula para estos valores, por lo cual, su expresión es de la forma: $f'(x) = \pm x \cdot (x - 1)$.

Para determinar el signo más o menos se tiene en cuenta, por ejemplo, que la función es decreciente en el intervalo $(0, 1)$, el signo es positivo y la función derivada tiene por expresión $f'(x) = x \cdot (x - 1)$, que es una parábola convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2.

El vértice de la función derivada es el siguiente: $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.



$b)$ $g'(x) = 3ax^2 + 2bx$. Imponemos que la derivada sea $-\frac{3}{2}$

$$g'\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow 3a \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 2b \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2};\ \ \frac{3}{4}a + b = -\frac{3}{2};\ \ 3a + 4b = -6.$$

Para que una función tenga un punto de inflexión en un punto es condición necesaria que se anule la segunda derivada en ese punto.

$g''(x) = 6ax + 2b.$

$g''\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 6a \cdot \frac{1}{2} + 2b = 0;\ \ 3a + 2b = 0.$ (1)

Resolvemos el sistema obtenido:

$$\left.\begin{array}{l} 3a + 4b = -6 \\ 3a + 2b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3a + 4b = -6 \\ -3a - 2b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 2b = -6 \rightarrow b = -3.$$

$3a + 2 \cdot (-3) = 0 \rightarrow\ \ a - 2 = 0 \rightarrow a = 2.$

$$\boldsymbol{a = 2;\ b = -3}$$

Problema 5:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real.

$a)$ Encuentre los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.

$b)$ Compruebe que, para $a = 3$, la matriz A es invertible y resuelve la ecuación matricial

$A \cdot X = B - 3I$, siendo $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución:

$a)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = 0;\ -a(a+1)(a+3) + a(a-1)(2a+1) + 2a(a+3) = 0;$$

$$a(a+3) \cdot [-(a+1)+2] + a(a-1)(2a+1) = 0;\ a(a+3)(1-a) - a(1-a)(2a+1) = 0;$$

$$a(1-a)(2-a) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2.$$

$$La\ matriz\ A\ en\ invertible\ \forall a \in R - \{0, 1, 2\}.$$

$b)$ Del apartado anterior se deduce que la matriz A es invertible para $a = 3$, por lo que su comprobación es superflua; no obstante, se comprueba a continuación.

Para $a = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix} \to |A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -72 + 42 + 36 = 78 - 72 = 6 \neq 0.$

$$La\ matriz\ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}\ es\ invertible$$

$$A \cdot X = B - 3I \to\ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3 \cdot I) \to\ X = A^{-1} \cdot (B - 3 \cdot I)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -72 + 42 + 36 = 6;\ A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$B - 3 \cdot I = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (B - 3 \cdot I) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -30 & -30 & -30 \\ 36 & 36 & 36 \\ -36 & -36 & -36 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Problema 6:

Considere la función $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.

$a)$ Estudie si tiene puntos críticos y, en caso de que los tenga, justifique de qué tipo son. Determine también cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

$b)$ Compruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(-2, 1)$.

Solución:

$a)$ Por tratarse de una función racional la función es continua en toda la recta real excepto los valores de x que anulan el denominador: $x - 2 = 0;\ \ x = 2 \Rightarrow D(f) \Rightarrow R - \{2\}$.

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que son derivables y en los que se anula su primera derivada.

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x-2) - x^3 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{3x^3 - 6x^2 - x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} = 0;\ \ 2x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x) = \frac{(6x^2 - 12x) \cdot (x-2)^2 - 2x^2(x-3) \cdot [2 \cdot (x-2) \cdot 1]}{(x-2)^4} = \frac{(6x^2 - 12x) \cdot (x-2) - 4x^2(x-3)}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{6x^3 - 12x^2 - 12x^2 + 24x - 4x^3 + 12x^2}{(x-2)^3} = \frac{2x^3 - 12x^2 + 24x}{(x-2)^3} = \frac{2x\left(x^2 - 6x + 12\right)}{(x-2)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{2 \cdot 0 \cdot (0^2 - 6 \cdot 0 + 12)}{(0-2)^3} = 0\,; Tiene\ en\ ese\ punto\ un\ punto\ de\ inflexión$$

$$f''(3) = \frac{2 \cdot 3 \cdot (3^2 - 6 \cdot 3 + 12)}{(3-2)^3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 3.\ f(3) = \frac{3^3}{3-2} = \frac{27}{1} = 27 \Rightarrow Mín. \Rightarrow A(3, 27)$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Teniendo en cuenta el dominio de la función y las raíces de su primera derivada, se determinan los intervalos $(-\infty, 0), (0, 2), (2, 3)\ y\ (3, +\infty)$, en los cuales la función es creciente o decreciente. Determinamos cada caso.

Para $x = -1 \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(-1) = \frac{2 \cdot (-1)^2 (-1-6)}{(-1-2)^2} < 0 \Rightarrow Decreciente.$

Para $x = 1 \in (0, 2) \Rightarrow f'(1) = \frac{2 \cdot 1^2 \cdot (1-6)}{(1-2)^2} < 0 \Rightarrow Decreciente.$

Para $x = 2.5 \in (2, 3) \Rightarrow f'(2.5) = \frac{2 \cdot 2.5^2 \cdot (3-3)}{(3-2)^2} < 0 \Rightarrow Decreciente.$

Para $x = 5 \in (3, +\infty) \Rightarrow f'(8) = \frac{2 \cdot 5^2 \cdot (5-3)}{(5-2)^2} > 0 \Rightarrow Creciente.$

$La\ función\ es\ creciente\ si\ x \in (3, +\infty)$ y decreciente en el resto

b) La función $f(x)=\frac{x^3}{x-2}$ es continua en el intervalo $[-2,1]$, por lo cual, podemos aplicar el teorema de Bolzano, que dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$".

$f(-2)=\frac{(-2)^3}{-2-2}=\frac{-8}{-4}=2>0.$ $f(1)=\frac{1^3}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1<0.$

Lo anterior demuestra que la ecuación $f(x)=0$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $(-2,1)$.

Como la función $f(x)$ es monótona decreciente en el intervalo $(-2,1)$, entonces la raíz es única.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas. Es estudiante ha de elegir 5 preguntas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregirá la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas y las soluciones.

Problema 1:

Demostrar que la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $M^2 + \lambda_1 M + \lambda_2 I = O$ y determinar los escalares λ_1 y λ_2 de R (donde I y O son las matrices 2×2 identidad y cero)

Problema 2:

Discutir y resolver (cuando sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $\lambda \in R$: $\left.\begin{matrix} x - y = \lambda \\ x - \lambda y = \lambda \\ \lambda x - y = \lambda \end{matrix}\right\}$.

Problema 3:

Dados el plano $\pi \equiv kx + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

a) Determinar los valores del parámetro $\lambda \in R$ para que el plano π contenga a r.

b) Para $k = 0$, calcular el ángulo que forman π y r.

Problema 4:

Sea el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$. Encontrar un plano β, paralelo a π, tal que el triángulo formado por los puntos de corte de β con los ejes tenga de área $2\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

Problema 5:

Estudiar asíntotas, monotonía (crecimiento y decrecimiento), extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = e^{-x^2}$.

Problema 6:

Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ se cortan en al menos dos puntos. Para cada uno de los puntos de corte, encontrar un intervalo que lo contenga de longitud menor o igual que 1. Razonar las respuestas exponiendo y verificando los resultados (teoremas) que los justifiquen.

Problema 7:

Calcular la integral racional: $I = \int \frac{3x}{x^2+x-2} \cdot dx$.

Problema 8:

Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

$a)$ Representar la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, 2]$.

$b)$ Calcular el área de la región anterior.

Problema 9:

Un mecánico compra ruedas de dos marcas A y B. Compra el 40 % de la marca A que tiene un 3 % de ruedas defectuosas. Y compra el resto a la marca B con un 1 % de defectuosas. El mecánico tiene que cambiar una rueda y elige una al azar.

$a)$ Calcular la probabilidad de que dicha rueda sea defectuosa.

$b)$ Si la rueda es defectuosa, calcular la probabilidad de que sea de la marca A.

Problema 10:

Las notas del examen de Matemáticas II de la EBAU siguen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica 1,5. Se elige al azar un alumno de Matemáticas II de la EBAU:

$a)$ Calcular la probabilidad de que un alumno haya aprobado (≥ 5).

$b)$ Calcular la nota que tiene que sacar un alumno para que su nota sea superior al 97,50 % de las notas.

RESPUESTAS

Problema 1:

Demostrar que la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $M^2 + \lambda_1 M + \lambda_2 I = O$ y determinar los escalares $\lambda_1\ y\ \lambda_2$ de R (donde $I\ y\ O$ son las matrices 2×2 identidad y cero)

Solución:

$$M^2 + \lambda_1 M + \lambda_2 I = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 I = O;$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 2\lambda_1 + \lambda_2 = -5 \\ \underline{\lambda_1 = -4} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\lambda_2 = 3}.$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-8+3 & 4-4 \\ 4-4 & 4-8+3 \end{pmatrix} = O.$$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ M\ verifica\ la\ ecuación\ dada\ para\ \boldsymbol{\lambda_1 = -4}\ y\ \boldsymbol{\lambda_2 = 3}}.$

Problema 2:

Discutir y resolver (cuando sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $\lambda \in R$: $\left.\begin{array}{r} x-y=\lambda \\ x-\lambda y=\lambda \\ \lambda x-y=\lambda \end{array}\right\}$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -\lambda\\ \lambda & -1\end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix}1 & -1 & \lambda\\ 1 & -\lambda & \lambda\\ \lambda & -1 & \lambda\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz ampliada en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M'|=\begin{vmatrix}1 & -1 & \lambda\\ 1 & -\lambda & \lambda\\ \lambda & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ \lambda & -1 & 1\end{vmatrix}=\lambda\cdot(-\lambda-1-\lambda+\lambda^2+1+1)=$$

$$=\lambda\cdot(\lambda^2-2\lambda+1)=\lambda(\lambda-1)^2=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=1.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix}\lambda\neq 0\\ \lambda\neq 1\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ \lambda=0\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ \lambda=0\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'=Rang\ M=1.$$

$$\underline{Para\ \lambda=1\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=1<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

Problema 3:

Dados el plano $\pi \equiv kx + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

$a)$ Determinar los valores del parámetro $\lambda \in R$ para que el plano π contenga a r.

$b)$ Para $k = 0$, calcular el ángulo que forman $\pi\ y\ r$.

Solución:

$a)$ Para que la recta r esté contenida en el plano π es condición necesaria que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares.

El vector director de la recta es $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, -1)$ y un vector normal del plano π es $\vec{n} = (k, 1, -1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (2, 1, -1) \cdot (k, 1, -1) = 0;\ \ 2k + 1 + 1 = 0;\ \ 2k + 2 = 0;$$

$$k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1.$$

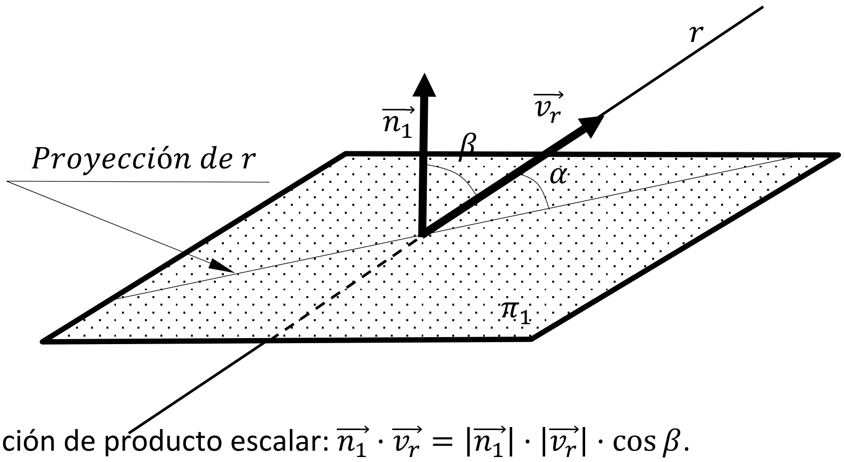
El plano resulta $\pi \equiv -x + y - z = 0$. Si el plano contiene a la recta tiene que contener a todos sus puntos. Un punto de r es $P(4, 2, -2)$.

Si el plano π contiene al punto P tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv -x + y - z = 0 \\ P(4, 2, -2) \end{array}\right\} \Rightarrow -4 + 2 - (-2) = -2 + 2 = 0 \Rightarrow Se\ satisface.$$

$$\underline{El\ plano\ \pi\ contiene\ a\ la\ recta\ r\ para\ k = -1.}$$

$b)$ Para $k = 0$ el plano es $\pi_1 \equiv y - z = 0$ y su vector normal es $\overrightarrow{n_1} = (0, 1, -1)$.



Por definición de producto escalar: $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{v_r} = |\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \cos\beta$.

$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{v_r}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{v_r}|}$. Por ser $\alpha\ y\ \beta$ complementarios: $sen\ \alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{v_r}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{v_r}|}$.

$$sen\ \alpha = \frac{(0,1,-1)\cdot(2,1,-1)}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{0+1+1}{\sqrt{0+1+1}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774 \Rightarrow \alpha = arc\ sen\ 0{,}5774 = 35°\ \ 15'\ 52''.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ ángulo\ de\ 35°\ \ 15'\ 52''.}$$

Problema 4:

Sea el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$. Encontrar un plano β, paralelo a π, tal que el triángulo formado por los puntos de corte de β con los ejes tenga de área $2\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

Solución:

El plano β tiene por expresión $\beta \equiv x + y + z + D = 0$.

Los puntos de corte con les ejes del plano β son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \beta \equiv x + y + z + D = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x + D = 0;\ \ x = -D \Rightarrow A(-D, 0, 0).$$

$$Eje\ Y \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \beta \equiv x + y + z + D = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y + D = 0;\ \ y = -D \Rightarrow B(0, -D, 0).$$

$$Eje\ Z \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \beta \equiv x + y + z + D = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z + D = 0;\ \ z = -D \Rightarrow C(0, 0, -D).$$

Los puntos $A(-D, 0, 0)$, $B(0, -D, 0)$ y $C(0, 0, -D)$ determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0, -D, 0) - (-D, 0, 0)] = (D, -D, 0)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(0, 0, -D) - (-D, 0, 0)] = (-D, 0, D)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{3};\ \ \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ D & -D & 0 \\ -D & 0 & D \end{matrix}\right\| = 4\sqrt{3};$$

$$D^2 \cdot \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = 4\sqrt{3};\ \ D^2 \cdot |-i - k - j| = 4\sqrt{3};\ \ D^2 \cdot |-i - j - k| = 4\sqrt{3};$$

$$D^2\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = 4\sqrt{3};\ D^2 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3};\ D^2 = 4 \Rightarrow D_1 = -2, D_2 = 2.$$

Cumplen la condición pedida los siguientes planos:

$$\underline{\beta_1 \equiv x + y + z - 2 = 0\ \ y\ \ \beta_2 \equiv x + y + z + 2 = 0}.$$

Problema 5:

Estudiar asíntotas, monotonía (crecimiento y decrecimiento), extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = e^{-x^2}$.

Solución:

El dominio de $f(x) = e^{-x^2}$ es $\boldsymbol{R}$ por ser una función exponencial.

Por ser $f(-x) = f(x)$ la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X) es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales\ ni\ asíntotas\ oblicuas}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$.

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 0)}.\ \underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x\epsilon(0, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow e^{-x^2} \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow x = 0.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = -2 \cdot \left[1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2}\right] = -2 \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2).$

$f''(0) = -2 \cdot e^0(1 - 0) = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$

$f(0) = f(x) = e^{-0} = 1 \Rightarrow$

$$\underline{Máximo\ relativo: A(0, 1)}.$$

Una función tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada y es distinta de cero su tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$f''(x) = -2 \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2).$

$f''(x) = 0 \Rightarrow -2 \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0;\ \ e^{-x^2} \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0;$

$2x^2 = 1;\ \ x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$f'''(x) = -2 \cdot \left[-2x \cdot e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2) + e^{-x^2} \cdot (-4x)\right] =$

$= -2 \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} \cdot [(1 - 2x^2) + 2] = 4x \cdot e^{-x^2} \cdot (3 - 2x^2).$

$f'''\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow Puntos\ de\ inflexión\ para\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ y\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}.$

$$Puntos\ de\ inflexión: \underline{P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)\ y\ Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)}.$$

Problema 6:

Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ se cortan en al menos dos puntos. Para cada uno de los puntos de corte, encontrar un intervalo que lo contenga de longitud menor o igual que 1. Razonar las respuestas exponiendo y verificando los resultados (teoremas) que los justifiquen.

Solución:

Los puntos de corte de dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - x^2 = e^x \Rightarrow h(x) = e^x + x^2 - 2.$

Demostrar que las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ se cortan al menos en dos puntos es equivalente a demostrar que la función $h(x) = e^x + x^2 - 2$ tiene al menos dos raíces reales.

La función $h(x) = e^x + x^2 - 2$ es continua y derivable en su dominio, que es ***R***, por lo cual lo será en cualquier intervalo finito que se considere.

El **teorema de Bolzano** dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

Considerando, por ejemplo, los intervalos $[-2, 0]\ y\ [0, 1]$ y aplicando el teorema de Bolzano a cada uno de ellos, resulta:

$$[-2, 0] \Rightarrow \begin{cases} h(-2) = e^{-2} + (-2)^2 - 2 = \frac{1}{e^2} + 4 - 2 = \frac{1}{e^2} + 2 > 0 \\ h(0) = e^0 + 0^2 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \end{cases}.$$

$$[0, 1] \Rightarrow \begin{cases} h(0) = -2 < 0 \\ h(1) = e^1 + 1^2 - 2 = e + 1 - 2 = e - 1 > 0 \end{cases}.$$

$\underline{Las\ funciones\ f(x)\ y\ g(x)\ se\ cortan\ en\ los\ intervalos\ [-2, 0]\ y\ [0, 1]}.$

Para obtener intervalos menores o iguales que la unidad consideramos, en primer lugar, el intervalo $[-1, 0]$ en el cual, aplicamos de nuevo el teorema de Bolzano:

$$[-1, 0] \Rightarrow \begin{cases} h(-1) = e^{-1} + (-1)^2 - 2 = \frac{1}{e} + 1 - 2 = \frac{1}{e} - 1 < 0 \\ h(0) = e^0 + 0^2 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \end{cases}.$$

$\underline{Las\ funciones\ f(x)\ y\ g(x)\ se\ cortan\ en\ el\ intervalo\ [-2, -1]}.$

Se considera, ahora, el intervalo $[0, 1/2]$ al cual se aplica el teorema de Bolzano:

$$[0, 1/2] \Rightarrow \begin{cases} h(0) = -2 < 0 \\ h\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \sqrt{e} + \frac{1}{4} - 2 = \sqrt{e} - \frac{7}{4} \cong 1{,}65 - \frac{7}{4} < 0 \end{cases}.$$

$\underline{Las\ funciones\ f(x)\ y\ g(x)\ se\ cortan\ en\ el\ intervalo\ [0, 1/2]}.$

Problema 7:

Calcular la integral racional: $I = \int \frac{3x}{x^2+x-2} \cdot dx$.

Solución:

$$x^2 + x - 2 = 0; \;\; x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1.$$

$$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1).$$

$$\frac{3x}{x^2+x-2} = \frac{M}{x+2} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx-M+Nx+2N}{(x+2)(x-1)} = \frac{(M+N)x+(-M+2N)}{x^2+x-2} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=3 \\ -M+2N=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3N = 3; \;\; N = 1; \;\; M + 1 = 3 \;\Rightarrow M = 2.$$

$$I = \int \frac{3x}{x^2+x-2} \cdot dx = \int \left(\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-1}\right) \cdot dx = 2 \cdot L|x+2| + L|x-1| + C =$$

$$= L\sqrt{\frac{(x+2)^2}{|x-1|}} + C \Rightarrow$$

$$\underline{I = \int \frac{3x}{x^2+x-2} \cdot dx = L|(x+2)^2 \cdot (x-1)| + C.}$$

Problema 8:

Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

$a)$ Representar la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, 2]$.

$b)$ Calcular el área de la región anterior.

Solución:

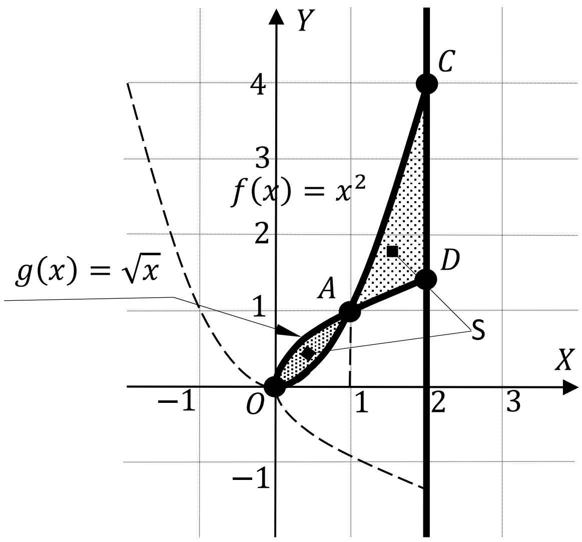
$a)$ Los puntos de corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen por abscisas las soluciones reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = \sqrt{x} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = \sqrt{x};\;\; x^4 = x^2;\;\; x^4 - x^2 = 0;\;\; x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$. ($x = -1$ carece de sentido lógico).

Los puntos de corte son $O(0, 0)$ y $A(1, 1)$.

$f(2) = 2^2 = 4 \Rightarrow C(2, 4)$. $\qquad g(2) = +\sqrt{2} \Rightarrow D(2, \sqrt{2})$.



La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la expresada en la figura adjunta.

$b)$ De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) \cdot dx + \int_1^2 \left(x^2 - \sqrt{x}\right) \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2\right) \cdot dx + \int_1^2 \left(x^2 - x^{\frac{1}{2}}\right) \cdot dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1^3}{3}\right) - 0\right] + \left[\left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\right] = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} - \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{2 \cdot \left(5 - 2\sqrt{2}\right)}{3}\, u^2 \cong 1{,}45\, u^2.}$$

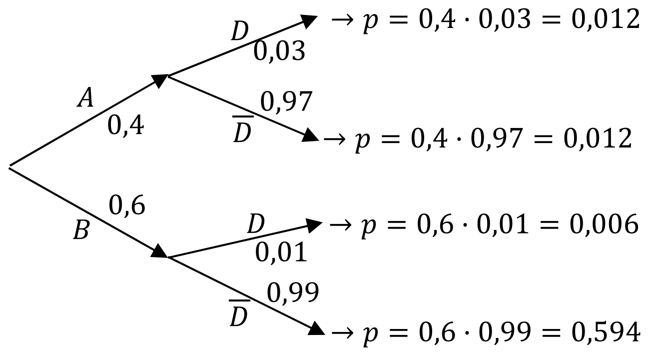
Problema 9:

Un mecánico compra ruedas de dos marcas A y B. Compra el 40 % de la marca A que tiene un 3 % de ruedas defectuosas. Y compra el resto a la marca B con un 1 % de defectuosas. El mecánico tiene que cambiar una rueda y elige una al azar.

$a)$ Calcular la probabilidad de que dicha rueda sea defectuosa.

$b)$ Si la rueda es defectuosa, calcular la probabilidad de que sea de la marca A.

Solución:



$a)$

$$P = P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) =$$

$$= 0,4 \cdot 0,03 + 0,6 \cdot 0,01 = 0,012 + 0,006 = \underline{0,018}.$$

La probabilidad de que la rueda sea defectuosa es 0,018

$b)$

$$P = P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(D)} = \frac{0,4 \cdot 0,03}{0,018} = \frac{0,012}{0,018} = \underline{0,6667}.$$

Si la rueda es defectuosa, la probabilidad de que sea de la marca A es 0,6667.

Problema 10:

Las notas del examen de Matemáticas II de la EBAU siguen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica 1,5. Se elige al azar un alumno de Matemáticas II de la EBAU:

$a)$ Calcular la probabilidad de que un alumno haya aprobado (≥ 5).

$b)$ Calcular la nota que tiene que sacar un alumno para que su nota sea superior al 97,50 % de las notas.

Solución:

$a)\ Datos:\ \mu = 6{,}5;\ \ \sigma = 1{,}5.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(6{,}5;\ 1{,}5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-6{,}5}{1{,}5}$.

$$P = P(X \geq 5) = P\left(Z \geq \frac{5-6{,}5}{1{,}5}\right) = P\left(Z \geq \frac{-1{,}5}{1{,}5}\right) = P(Z \geq -1) = P(Z < 1) =$$

$= \underline{0{,}8413}.$

La probabilidad de que un alumno haya aprobado es 0,8413

$b)$ Se debe hallar γ tal que: $P = P(X < \gamma) = 0{,}9750 \Rightarrow P\left(Z < \frac{\gamma-6{,}5}{1{,}5}\right) = 0{,}9750.$

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0{,}1)$ a 0,9750 le corresponde 1,96:

$\frac{\gamma-6{,}5}{1{,}5} = 1{,}96;\ \gamma - 6{,}5 = 2{,}94;\ \ \gamma = 6{,}5 + 2{,}94 = 9{,}44.$

$\underline{El\ alumno\ tiene\ que\ sacar\ una\ nota\ de\ 9{,}44}.$

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2020-2021

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min.

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. El estudiante ha de **elegir 5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo **se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas**. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar las respuestas y las soluciones**

PREGUNTAS

1. Sea la igualdad matricial $M \cdot X = N$, donde $M = \begin{pmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz X? (Justicar la respuesta). (0,5 puntos)

b) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ es la matriz M invertible? (1 punto)

c) ¿Puede ser $M \cdot N$ invertible para algún valor de $k \in \mathbb{R}$? (0,5 puntos)

2. Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$: (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{rcrl} ax & + & y & = 1 \\ x & + & ay & = a \\ ax & + & 2y & = 1 \end{array}\right\}$$

3. Sean las rectas r y s dadas por $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases}$, $s : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$.

a) Obtener un plano Π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s. (1 punto)

b) Calcular la distancia entre las dos rectas. (1 punto)

4. Calcular un vector de módulo 3 que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$. (2 puntos)

5. a) Estudiar la continuidad de la siguiente función $f(x)$ para $x \neq 0$ (con $a \in \mathbb{R}$): (0,5 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) Calcular el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$. (1,5 puntos)

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2020-2021

Materia: **Matemáticas II** — Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min.

6. Sea la función $f(x) = \dfrac{2-x^2}{x^2-4}$.

a) Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de la función $f(x)$. (1,5 puntos)

b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$. (0,5 puntos)

7. Resolver la integral $\displaystyle\int \ln^2(x)\,dx$. (2 puntos)

8. Dadas las funciones $f(x) = 3x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$, calcular el área de la región limitada por sus gráficas. (2 puntos)

9. En un estudio a 1000 estudiantes europeos, 500 saben hablar inglés, 300 saben hablar español, y 100 de ellos hablan los dos idiomas. Se elige un estudiante al azar del estudio:

a) Calcular la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas. (1 punto)

b) Calcular la probabilidad de que hable español, sabiendo que habla inglés. (1 punto)

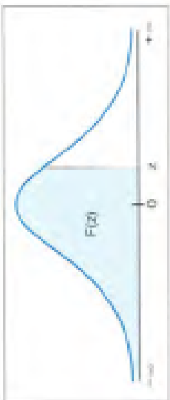
10. La duración de un Smartphone se ajusta a una normal de media 3 años y desviación típica de 1 año. El fabricante da una garantía de 3,5 años a sus Smartphone.

a) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure menos que la garantía. (1 punto)

b) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure más de 5 años. (1 punto)

Tabla de distribución normal $N(0,1)$

$F(z) = P(Z \le z)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

RESPUESTAS

Problema 1:

Sea la igualdad matricial $M \cdot X = N$, donde $M = \begin{pmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $y\ N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz X? Justificar la respuesta.

$b)$ ¿Para qué valores de $k \in R$ es la matriz M invertible?

$c)$ ¿Puede ser $M \cdot N$ invertible para algún valor de $k \in R$?

Solución:

$a)$

Para que pueda efectuarse el producto de dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual que el número de filas de la segunda matriz y, la matriz producto, tiene las mismas filas de la primera y las mismas columnas de la segunda: $M_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}$.

En el caso que nos ocupa: $M_{(3,3)} \cdot X_{(3,2)} = N_{(3,2)}$

$\underline{La\ matriz\ X\ tiene\ que\ tener\ 3\ filas\ y\ 2\ columnas}.$

$b)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 2 - 2k + 2k - k + 2k = k^2 + k - 2 = 0;$$

$k = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow k_1 = -2, k_2 = 1.$

$\underline{La\ matriz\ M\ es\ invertible\ \forall k \in R - \{-2, 1\}}.$

$c)$

Para que una matriz sea invertible tiene que ser cuadrada.

Según se ha expresado en el apartado $a)$: $M_{(3,3)} \cdot N_{(3,2)} = P_{(3,2)}$.

Por lo expresado anteriormente y para cualquier valor de $k \in R$:

$\underline{M \cdot N\ no\ es\ invertible\ por\ no\ ser\ su\ producto\ una\ matriz\ cuadrada}.$

****

Problema 2:

Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in R$: $\left.\begin{array}{r} ax+y=1 \\ x+ay=a \\ ax+2y=1 \end{array}\right\}$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|M'|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix}=a^2+2+a^2-a^2-2a^2-1=-a^2+1=0;\; a^2=1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1=-1, a_2=1.$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=2;\; Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Para $a=-1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M=2.$

Para $a=1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M=2.$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a=-1 \\ a=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

Resolvemos para $a=-1$ y para $a=1$.

Para $a=-1$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} -x+y=1 \\ x-y=-1 \\ -x+2y=1 \end{array}\right\}$, equivalente al siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=-1 \\ -x+2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{x=-1;\, y=0.}$$

Para $a=1$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ x+y=1 \\ x+2y=1 \end{array}\right\}$, equivalente al siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ x+2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y=-1 \\ x+2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{x=1;\, y=0.}$$

****

Problema 3:

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$.

$a)$ Obtener un plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

$b)$ Calcular la distancia entre las dos rectas.

Solución:

$a)$

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow z = \mu \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y = 2 - \mu \\ x - y = 4 + \mu \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x = 6;\ \ x = 3;\ \ 3 + y = 2 - \mu;$$

$$y = -1 - \mu \ \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 - \mu \\ z = \mu \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $A(1, 2, 1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, -3, 0)$.

Un punto y un vector director de s son $B(3, -1, 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (0, -1, 1)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-3(x - 1) - (z - 1) - (y - 2) = 0;\ -3x + 3 - z + 1 - y + 2 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv 3x + y + z - 6 = 0}.$$

$b)$

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(3, -1, 0) - (1, 2, 1)] = (2, -3, -1)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

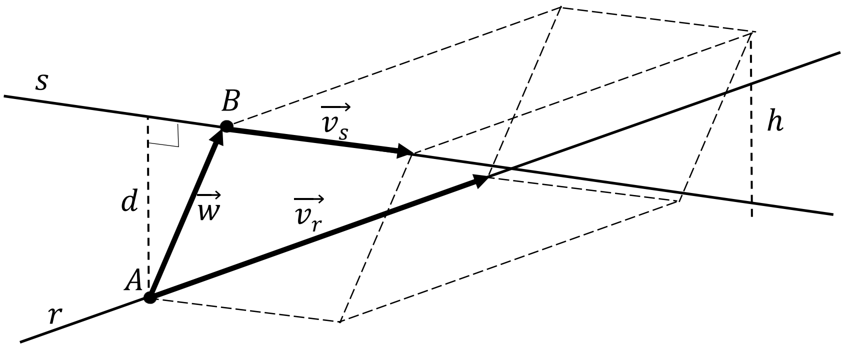
$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 6 + 3 = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3\ \Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$$

Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, y el vector $\overrightarrow{w} = (2, -3, -1)$ hallado en el apartado anterior.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}) = |\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| \cdot h = |\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| \cdot d \Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w})|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|}.$$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w})|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}\right|}{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{|-2|}{|-3i-k-j|} = \frac{2}{\sqrt{3^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{11}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{d(r,s) = \frac{\sqrt{11}}{2}\,u.}}$$

****

Problema 4:

Calcular un vector de módulo 3 que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

Solución:

Un vector, $\vec{w}$, perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es su producto vectorial:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2j + k - 2k + i = i - 2j - k = (1, -2, -1).$$

Un vector unitario de $\vec{w}$, $\overrightarrow{w'}$, (versor) es el que se obtiene al dividirlo por su módulo: $\overrightarrow{w'} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} =$ $\frac{\vec{w}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{\vec{w}}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{\vec{w}}{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{-\sqrt{6}}{6}\right)$.

El vector pedido, $\vec{z}$, es $\vec{z} = \pm 3 \cdot \overrightarrow{w'}$:

$$\underline{\overrightarrow{z_1} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \ \ y \ \ \overrightarrow{z_2} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right).}$$

****

Problema 5:

5º) a) Estudiar la continuidad de la siguiente función $f(x)$ para $x \neq 0$ (con $a \in R$):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ a & si\ x = 0 \end{cases}.$$

b) Calcular el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$.

Solución:

a)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, excepto para $x = 0$ cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \ \ (*) \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} a = a = f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{\frac{1}{2} = a}.$$

$$(*) \ \ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{e^0 - 1 - 0}{0^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hotipal\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} =$$

$$= \frac{e^0 - 1}{2 \cdot 0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hotipal\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}.}$$

b)

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = 0\ para\ a = \frac{1}{2}}.$$

****

Problema 6:

Sea la función $f(x)=\frac{2-x^2}{x^2-4}$.

$a)$ Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de la función $f(x)$.

$b)$ Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$.

Solución:

$a)$

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$x^2-4=0 \Rightarrow x_1=-2, x_2=2 \Rightarrow D(f) \Rightarrow R-\{-2,2\}$.

Corte con el eje Y: $x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2} \Rightarrow A\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

Cortes con el eje X: $f(x)=0 \Rightarrow f(x)=\frac{2-x^2}{x^2-4}=0;\ \ 2-x^2=0;\ \ x^2=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=-\sqrt{2} \rightarrow B(-\sqrt{2},0)\ y\ x_2=\sqrt{2} \rightarrow C(\sqrt{2},0)$.

Por ser $f(-x)=f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje Y.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-x^2}{x^2-4}=-1.$$

$\underline{La\ recta\ y=-1\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función.}$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$\underline{Las\ rectas\ x=-2\ y\ x=2\ son\ asíntotas\ verticales}.$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{-2x\cdot(x^2-4)-(2-x^2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x^3+8x-4x+2x^3}{(x^2-4)^2}=\frac{4x}{(x^2-4)^2}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{4x}{(x^2-4)^2}=0;\ \ 4x=0;\ \ x=0.$$

Como es denominador es siempre positivo para los valores pertenecientes al dominio de la función, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea su numerador, por lo cual, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$\underline{Decrecimiento: f'(x)<0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty,-2)\cup(-2,0)}.$

$\underline{Crecimiento: f'(x)>0 \Rightarrow x\epsilon(0,2)\cup(2,+\infty)}.$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{4\cdot(x^2-4)^2-4x\cdot[2\cdot(x^2-4)\cdot 2x]}{(x^2-4)^4} = \frac{4\cdot(x^2-4)-16x}{(x^2-4)^3} = \frac{4x^2-16-16x}{(x^2-4)^3} = \frac{4\cdot(x^2-4x-4)}{(x^2-4)^3}.$$

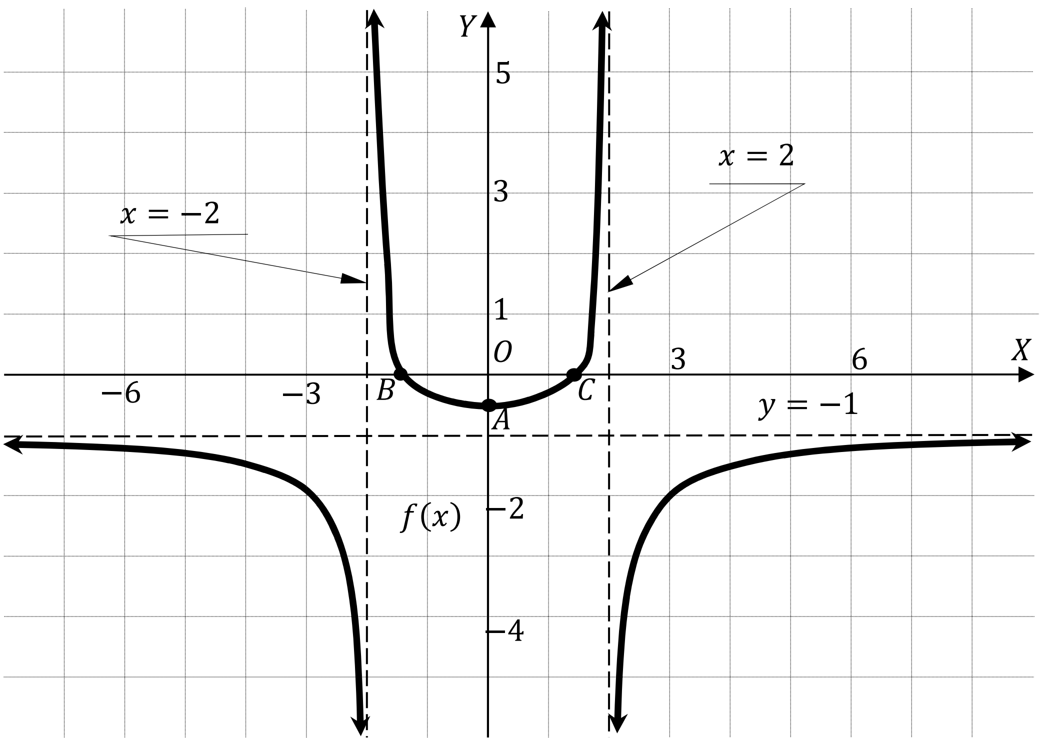
$$f''(0) = \frac{4\cdot(-4)}{(-4)^3} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mín.: A\left(0, -\frac{1}{2}\right).}}$$

$b)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

Problema 7:

7º) Calcular la integral racional: $I = \int L^2x \cdot dx$.

Solución:

$$I = \int L^2x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = L^2x \to du = 2 \cdot Lx \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx \to v = x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^2x \cdot x - \int x \cdot 2 \cdot Lx \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot L^2x - 2 \cdot \int Lx \cdot dx = x \cdot L^2x - 2I_1 = I. \quad (*)$$

$$I_1 = \int Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = Lx \to du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx \to v = x \end{array} \right\} \Rightarrow Lx \cdot x - \int x \cdot dx = x \cdot Lx - \frac{x^2}{2} = I_1.$$

Sustituyendo el valor hallado de I_1 en (*):

$$I = x \cdot L^2x - 2 \cdot \left(x \cdot Lx - \frac{x^2}{2}\right) + C = x \cdot L^2x - 2x \cdot Lx + x^2 + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\underline{I \int L^2x \cdot dx = x \cdot (L^2x - 2 \cdot Lx + x) + C.}}$$

****

Problema 8:

Dadas las funciones $f(x) = 3x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$, calcular el área de la región limitada por sus gráficas.

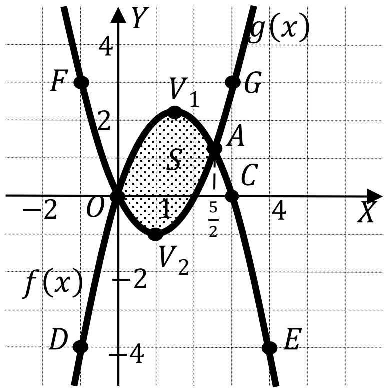
Solución:

Los puntos de corte de dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 3x - x^2 = x^2 - 2x;\ 2x^2 - 5x = 0;\ \ x(2x-5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \to O(0,0);\ \ x_2 = \frac{5}{2} \to g\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} \to A\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right).$$

La función $f(x) = 3x - x^2$ es una parábola cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el punto siguiente:



$$f'(x) = 3 - 2x. \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 3 - 2x = 0;\ \ x = \frac{3}{2}.$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow V_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right).$$

Otros puntos de la parábola son $C(0,3), D(-1,-4)$ y $E(4,-4)$.

La función $g(x) = x^2 - 2x$ es una parábola convexa $(\cup)$, por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el punto siguiente:

$$g'(x) = 2x - 2. \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0;\ \ x - 1 = 0;\ \ x = 1.$$

$$g(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow V_2(1, -1).$$

Otros puntos de la parábola son $F(-1,3)$ y $G(3,3)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, $\left(0, \frac{5}{2}\right)$, todas las ordenadas de $f(x)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de $g(x)$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{5}{2}} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_0^{\frac{5}{2}} [(3x - x^2) - (x^2 - 2x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^{\frac{5}{2}} (3x - x^2 - x^2 + 2x) \cdot dx = \int_0^{\frac{5}{2}} (-2x^2 + 5x) \cdot dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right]_0^{\frac{5}{2}} =$$

$$= \left[-\frac{2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3}{3} + \frac{5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2}{2}\right] - 0 = -\frac{250}{24} + \frac{125}{8} = \frac{-250 + 375}{24} = \frac{125}{24}.$$

$$\boldsymbol{S = \frac{125}{24}\ u^2 \cong 5.21\ u^2.}$$

****

Problema 9:

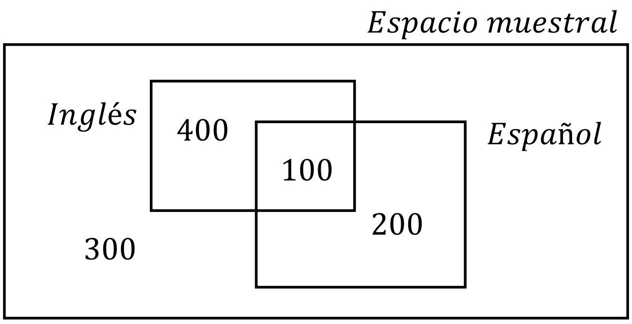
En un estudio a 1 000 estudiantes europeos, 500 saben hablar inglés, 300 saben hablar español, y 100 de ellos hablan los dos idiomas. Se elige un estudiante al azar del estudio:

$a)$ Calcular la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas.

$b)$ Calcular la probabilidad de que hable español, sabiendo que habla inglés.

Solución:

Una forma sencilla de resolver este ejercicio es mediante un diagrama de Venn.



Aplicando la regla de Laplace:

$a)$

$$P=\frac{700}{1.000}=\underline{\frac{7}{10}=0.7.}$$

$b)$

$$P=P(E/I)=\frac{P(I\cap E)}{P(I)}=\frac{100}{500}=\underline{\frac{1}{5}=0.2.}$$

Otra forma de resolver el ejercicio es la siguiente:

$$Datos\text{: } N=1.000;\;\; I=500;\;\; E=300;\;\; I\cap E=100.$$

$a)$

$$P=P(I\cup E)=\frac{700}{1.000}=\underline{\frac{7}{10}=0.7.}$$

$$P(I\cup E)=\underline{\frac{7}{10}=0.7.}$$

$b)$

$$P=P(E/I)=\frac{P(I\cap E)}{P(I)}=\frac{\frac{100}{1.000}}{\frac{500}{1.000}}=\frac{100}{500}=\underline{\frac{1}{5}=0.2.}$$

$$P(E/I)=\underline{\frac{1}{5}=0.2.}$$

****

Problema 10:

La duración de un Smartphone se ajusta a una normal de media 3 años y desviación típica de 1 año. El fabricante da una garantía de 3.5 años a sus Smartphone.

a) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure menos que la garantía.

b) Calcular la probabilidad de un Smartphone dure más de 5 años.

Solución:

$Datos: \ \mu = 3; \ \ \sigma = 1.$

$X \rightarrow N(\mu; \ \sigma) = N(3,1).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-3}{1}$.

a)

$$P = P(X < 3.5) = P\left(Z < \frac{3.5-3}{1}\right) = P(Z < 0.5) = \underline{0.6915}.$$

$$P(X < 3.5) = \underline{0.6915}.$$

b)

$$P = P(X > 5) = P\left(Z > \frac{5-3}{1}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = \underline{0.0228}.$$

$$P(X > 5) = \underline{0.0228}.$$

****

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

GALICIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Paula Orta

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade 2021

Código: 20

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álxebra:

Sexa $A=(a_{ij})$ a matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{se} \quad i=2,\\ (-1)^j(i-1) & \text{se} \quad i\neq 2.\end{cases}$ Explique se A e $A+I$ son ou non invertibles e calcule as inversas cando existan. (Nota: a_{ij} é o elemento de A que está na fila i e na columna j, e I é a matriz identidade.)

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} x + 2y = m,\\ my + 3z = 1,\\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1.\end{cases}$

3. Análise:

De entre todos os rectángulos situados no primeiro cuadrante que teñen dous lados sobre os eixes de coordenadas e un vértice sobre a recta $x+2y=4$, determine os vértices do que ten maior área.

4. Análise:

Dada a función $f(x)=\begin{cases}x^2-x-1 & \text{se} \quad x\leq 0,\\ -x^2-x-1 & \text{se} \quad x>0,\end{cases}$ calcule a área da rexión encerrada pola gráfica de f e as rectas $y=4x-7$ e $y=1$.

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa polos puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,3)$.

b) Calcule o punto simétrico de $P(10,-5,5)$ con respecto ao plano $\pi: 6x+3y+2z-6=0$.

6. Xeometría:

a) Ache o valor de a se o plano $\pi: ax+y+z=0$ é paralelo á recta $r: \begin{cases}x=1+\lambda,\\ y=1+\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R}.\\ z=2+\lambda,\end{cases}$

b) Estude a posición relativa dos planos $\pi_1: 2x+y+mz+m=0$ e $\pi_2: (m-1)x+y+3z=0$ en función do parámetro m.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcule $P(A)$ sabendo que $P(B)=2P(A)$, $P(A\cap B)=0.1$ e $P(A\cup B)=0.8$.

b) Diga se os sucesos A e B son ou non independentes, se se sabe que

$$P(A)=0.6, \quad P(B)=0.3 \quad \text{e} \quad P(\bar{A}\cup\bar{B})=0.82.$$

8. Estatística e Probabilidade:

O portador dunha certa enfermidade ten un 10% de probabilidades de contaxiala a quen non estivo exposto a ela. Se entra en contacto con 8 persoas que non estiveron expostas, calcule:

a) A probabilidade de que contaxie a un máximo de 2 persoas.

b) A probabilidade de que contaxie a 2 persoas polo menos.

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade 2021

Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

1. Números y Álgebra:

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = 2, \\ (-1)^j(i-1) & \text{si} \quad i \neq 2. \end{cases}$ Explique si A y $A + I$ son o no invertibles y calcule las inversas cuando existan. (Nota: a_{ij} es el elemento de A que está en la fila i y en la columna j, e I es la matriz identidad.)

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema $\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$

3. Análisis:

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

4. Análisis:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$ calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.
b) Calcule el punto simétrico de $P(10,-5,5)$ con respecto al plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

6. Geometría:

a) Halle el valor de a si el plano $\pi: ax + y + z = 0$ es paralelo a la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$.
b) Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ y $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$ en función del parámetro m.

7. Estadística y Probabilidad:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule $P(A)$ sabiendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ y $P(A \cup B) = 0.8$.
b) Diga si los sucesos A y B son o no independientes, si se sabe que

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.3 \quad \text{y} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82.$$

8. Estadística y Probabilidad:

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10% de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestas, calcule:
a) La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.
b) La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de dimensión $tres \times tres$ definida de la forma siguiente:

$a_{ij} = \begin{cases} 1 \;\; si \;\; i = 2 \\ (-1)^j (i-1) \; si \; i \neq 2 \end{cases}$. Explique si A y $A + I$ son o no invertibles y calcula las inversas cuando existan.

Nota: a_{ij} es el elemento de A que está en la fila i y en la columna j, e I es la matriz identidad.

Solución:

$a_{11} = (-1)^1 \cdot 0 = 0$; $a_{12} = (-1)^2 \cdot 0 = 0$; $a_{13} = (-1)^3 \cdot 0 = 0$

$a_{21} = 1$; $a_{22} = 1$; $a_{23} = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$a_{31} = (-1)^1 \cdot 2 = -2$; $a_{32} = (-1)^2 \cdot 2 = 2$; $a_{33} = (-1)^3 \cdot 2 = -2$

A no tiene inversa ya que tiene una fila de ceros $\Rightarrow |A| = 0$

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \; |A+I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0 \Rightarrow$$

$A + I$ si tiene inversa.

$$(A+I)^{-1} = \frac{[Ad(A+I)]^t}{|A+I|}$$

$$Ad(A+I) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \; [Ad(A+I)]^t = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Problema 2:

Discuta el sistema: $\begin{cases} x + 2y = m \\ my + 3z = 1 \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1 \end{cases}$ según los valores del parámetro m.

Solución:

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 & m+1 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes y la ampliada respectivamente.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = m(m+1) + 6 - 3(m+2) = m^2 + m + 6 - 3m - 6 = m^2 - 2m$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m(m-2) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \quad o \quad m = 2$$

- $Si \quad m \neq 0 \quad y \quad m \neq 2 \quad \Rightarrow \quad rg(A) = rg(\overline{A}) = 3$
- Si m = 0 $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2;\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow rg(\overline{A}) = 3$
- Si m = 2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \\ & & 2 \\ 0 & 3 & \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2;\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 2 - 4 - 4 = 0 \Rightarrow rg(\overline{A}) = 2$

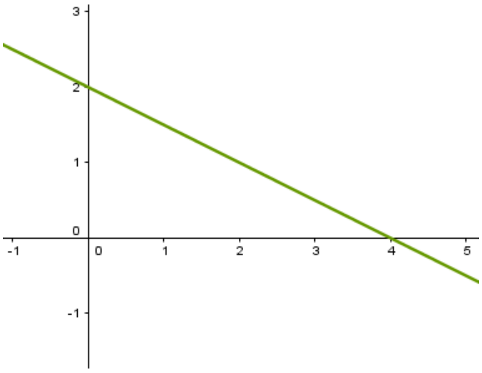
DISCUSIÓN:

- $Si \quad m \neq 0 \quad y \quad m \neq 2 \quad \Rightarrow \quad rg(A) = rg(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Una única solución).
- Si m = 0 $\Rightarrow$ rg(A) $\neq$ rg($\overline{A}$) $\Rightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución).
- Si m = 2 $\Rightarrow$ rg(A) = rg($\overline{A}$) = 2 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones).

Problema 3:

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados en los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

Solución:



Sea el rectángulo formado por los vértices: A(0, 0); B(x, 0); C(x, y) y D(0, y) con x $\in$ (0, 4).

Como C(x, y) $\in$ r: $x + 2y = 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$

$A = x \cdot y = x(-\frac{1}{2}x + 2) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

$A' = -x + 2; A' = 0 \Leftrightarrow -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2; y = -1 + 2 = 1;$

A'' = -1 < 0 por lo que en x = 2 hay un máximo.

Por tanto, los vértices pedidos son:

A(0, 0); B(2, 0); C(2, 1) y D(0, 1)

Problema 4:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & si \;\; x \leq 0 \\ -x^2 - x - 1 & si \;\; x > 0 \end{cases}$, calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

Solución:

$f(x)$ es una función continua en todo su dominio. $f(0) = -1$.

$y = x^2 - x - 1$ es una parábola abierta hacia arriba.

Su vértice es: $V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ no pertenece al dominio.

$y = -x^2 - x - 1$ es una parábola abierta hacia abajo.

Su vértice es: $V = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ no pertenece al dominio.

Calculo los puntos de corte de la función con las rectas.

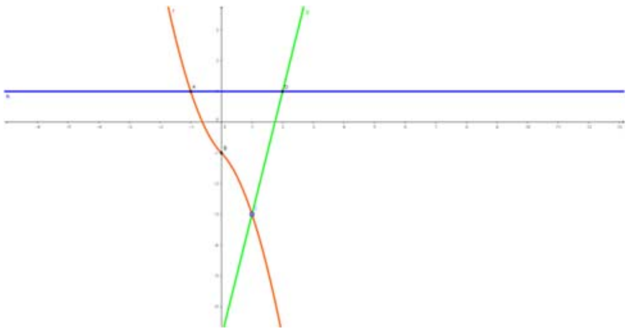
Con la recta $y = 1$, el punto de corte es: (-1, 1)

La recta $y = 4x - 7$ es una recta creciente que pasa por los puntos (0, -7), (1, -3), (2, 1), siendo este último el punto de intersección de las dos rectas.

El punto de corte de la función con la recta $y = 4x - 7$ es:

$-x^2 - x - 1 = 4x - 7$; $x^2 + 5x - 6 = 0$; x = 1 y x = -6; Por lo que el punto de corte es (1, -3).

Ahora puedo representar las funciones:



$$A = \int_{-1}^{0} [1 - (x^2 - x - 1)]dx + \int_{0}^{1} [1 - (-x^2 - x - 1)]dx + \int_{1}^{2} [1 - (4x - 7)]dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (1 - x^2 + x + 1)dx + \int_{0}^{1} (1 + x^2 + x + 1)dx + \int_{1}^{2} (1 - 4x + 7)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x^2 + x + 2)dx + \int_{0}^{1} (x^2 + x + 2)dx + \int_{1}^{2} (-4x + 8)dx = \left.\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{0} + \left.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{1} + (-2x^2 + 8x)]_1^2$$

$$= (0 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2)) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 - 0) + ((-8 + 16) - (-2 + 8)) =$$

$$= -\frac{2 + 3 - 12}{6} + \frac{2 + 3 + 12}{6} + 8 - 6 = \frac{7}{6} + \frac{17}{6} + 2 = \frac{24}{6} + 2 = 4 + 2 = 6u^2$$

$$A = 6u^2$$

Problema 5:

$a)$ Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por los puntos: $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.

$b)$ Calcule el punto simétrico de $P(10,-5,5)$ con respecto al plano de ecuación general

$\pi \equiv 6x+3y+2z-6=0.$

Solución:

a) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$ y $\vec{v}=\overrightarrow{AC}=(-1,0,3)$ son dos vectores directores del plano pedido.

$$\pi:\begin{vmatrix}-1 & -1 & x-1\\ 2 & 0 & y\\ 0 & 3 & z\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 6(x-1)+3y+2z=0 \Leftrightarrow 6x-6+3y+2z=0$$

El plano pedido es $\pi: 6x+3y+2z-6=0$

b) Primero calculo la proyección ortogonal de P sobre π: Q, este punto será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, donde P’ es el simétrico de P.
Para calcular Q, primero calculo la ecuación de la recta r, perpendicular al plano, pasando por P.
$\vec{n}=(6,3,2)$ vector normal del plano es un vector director de r.

$$r:\begin{cases}x=10+6t\\ y=-5+3t \quad t\in\mathbb{R}\\ z=5+2t\end{cases}$$

6(10+6t) + 3(-5+3t) + 2(5+2t) – 6 = 0; 60 + 36t – 15 + 9t + 10 + 4t – 6 = 0;
49t + 49 = 0; 49t = -49; t = -1
Por tanto $Q=r\cap\pi$; Q = (4,-8,3).
Sea P’(x’, y’, z’) el simétrico pedido.

$$\frac{10+x'}{2}=4 \Rightarrow x'=-2$$

$$\frac{-5+y'}{2}=-8 \Rightarrow y'=-11$$

$$\frac{5+z'}{2}=3 \Rightarrow z'=1$$

El simétrico pedido es: **P’= (-2, -11, 1)**

Problema 6:

$a)$ Halle el valor de a si el plano $\pi \equiv ax + y + z = 0$ es paralelo a la recta r de ecuación: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda, \lambda \in R. \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

$b)$ Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + mz + m = 0$ y $\pi_2 \equiv (m-1)x + y + 3z = 0$ en función del parámetro m.

Solución:

a) $\vec{n} = (a,1,1)$ vector normal del plano.

$\vec{d} = (1,1,1)$ vector director de la recta.

$\pi \| r \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{d} = 0$

(a,1,1) · (1,1,1) = 0 $\Leftrightarrow$ a + 1 + 1 = 0 $\Leftrightarrow$ a + 2 = 0 $\Leftrightarrow$

***a* = -2**

b) $\dfrac{2}{m-1} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{m}{3} \Leftrightarrow m = 3$

- Si m = 3

$\left.\begin{array}{l} \pi_1 : 2x + y + 3z + 3 = 0 \\ \pi_2 : 2x + y + 3z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Los planos son paralelos (no coincidentes).

- Si $m \neq 3 \Rightarrow$ Los planos son secantes (se cortan en una recta).

- Si m = 3; Los planos son paralelos (no coincidentes).
- Si $m \neq 3 \Rightarrow$ Los planos son secantes (se cortan en una recta).

Problema 7:

$a)$ Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule $P(A)$ sabiendo que $P(B) = 2P(A), P(A \cap B) = 0.1$ y $P(A \cup B) = 0.8$.

$b)$ Diga si los sucesos A y B son o no independientes, si se sabe que: $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ y

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.82$.

Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

0.8 = P(A) + 2P(A) – 0.1 $\Leftrightarrow$ 0.8 + 0.1 = 3P(A) $\Leftrightarrow$ 3P(A) = 0.9 $\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{P(A)}$ **= 0.3**

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

$0.82 = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0.82 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.18$

P(A) · P(B) = 0.6 · 0.3 = 0.18

Por tanto, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$

Los sucesos A y B son **independientes**.

Problema 8:

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10 % de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestos, calcula:

$a)$ La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.

$b)$ La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

Solución:

X = "nº de personas contagiadas" $x \in B(n, p)$ donde n = 8; p = 0.1 y q = 0.9

a) $P(x \le 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = \binom{8}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^8 + \binom{8}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^7 + \binom{8}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^6 =$

$= 0.9^8 + 8 \cdot 0.1 \cdot 0.9^7 + 28 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^6 = 0.9619$

Por tanto, $\boldsymbol{P(x \le 2) = 0.9619}$

b) $P(x \ge 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - [P(x=0) + P(x=1)] = 1 - (0.9^8 + 8 \cdot 0.1 \cdot 0.9^7) = 0.1869$

Por tanto, $\boldsymbol{P(x \ge 2) = 0.1869}$

CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade
2021

Código: 20

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira.

1. Números e Álxebra:
Despexe X na ecuación matricial $B(X-I)=A$, onde I é a matriz identidade e A e B son matrices cadradas, con B invertible. Logo, calcule X se

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. Números e Álxebra:
Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$

3. Análise:
a) Enuncie o teorema de Bolzano.
b) Obteña os valores de a, b e c que fan que $f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$ cumpra $f(0)=1$ e teña extremos relativos en $x=\pm 1$. Dicir logo se os extremos son máximos ou mínimos.

4. Análise:
a) Enuncie o teorema de Rolle.
b) Calcule a área da rexión encerrada polas gráficas de $f(x)=x+6$ e $g(x)=\begin{cases} -2x & \text{se} \quad x<0, \\ x^2 & \text{se} \quad x\geq 0. \end{cases}$

5. Xeometría:
a) Obteña a ecuación implícita do plano π con ecuacións paramétricas $\pi: \begin{cases} x=1-\lambda, \\ y=2+\mu, \\ z=1+\lambda+2\mu, \end{cases} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$
b) Calcule o valor de m para que os seguintes puntos sexan coplanarios: $A(0,m,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ e $D(2,0,2)$. Obteña a ecuación implícita do plano π que os contén.

6. Xeometría:
Calcule o punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto ao plano $\pi: 2x-y+z+3=0$.

7. Estatística e Probabilidade:
Nunha determinada cidade, o 8% da poboación practica ioga, o 20% ten mascota e o 3% practica ioga e ten mascota. Se nesa cidade se elixe unha persoa ao azar, calcule:
a) A probabilidade de que non practique ioga e á vez teña mascota.
b) A probabilidade de que teña mascota sabendo que practica ioga.

8. Estatística e Probabilidade:
O grosor das pranchas de aceiro que se producen nunha certa fábrica segue unha distribución normal de media 8 mm e desviación típica 0.5 mm. Calcule a probabilidade de que unha prancha elixida ao azar teña un grosor comprendido entre 7.6 mm e 8.2 mm.

CiUG
COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade
2021

Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera.

1. Números y Álgebra:

Despeje X en la ecuación matricial $B(X-I)=A$, donde I es la matriz identidad y A y B son matrices cuadradas, con B invertible. Luego, calcule X si

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$

3. Análisis:

a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Obtenga los valores de a, b y c que hacen que $f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$ cumpla $f(0)=1$ y tenga extremos relativos en $x=\pm1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

4. Análisis:

a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x)=x+6$ y $g(x)=\begin{cases} -2x & \text{si} \quad x<0, \\ x^2 & \text{si} \quad x\geq 0. \end{cases}$

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita del plano π con ecuaciones paramétricas $\pi: \begin{cases} x=1-\lambda, \\ y=2+\mu, \\ z=1+\lambda+2\mu, \end{cases} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$

b) Calcule el valor de m para que los siguientes puntos sean coplanarios: $A(0,m,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ y $D(2,0,2)$. Obtenga la ecuación implícita del plano π que los contiene.

6. Geometría:

Calcule el punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto al plano $\pi: 2x-y+z+3=0$.

7. Estadística y Probabilidad:

En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:

a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.

b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

8. Estadística y Probabilidad:

El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Despeja X en la ecuación matricial $B(X-I)=A$, siendo I la matriz identidad de orden tres y $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-2&2&-2\end{pmatrix}$ $y\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}$. Luego, calcula el valor de la matriz X.

Solución:

B(x – I) = A; $B^{-1}\cdot B(X-I)=B^{-1}\cdot A$; $X-I=B^{-1}\cdot A$;

$$\boldsymbol{X = B^{-1} \cdot A + I}$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix};\ B^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&2&2\\-6&6&-6\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&2&2\\-6&6&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&2\\-6&6&-5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&2\\-6&6&-5\end{pmatrix}}$$

Problema 2:

Discuta el sistema: $\begin{cases} mx + y + z = 2m \\ mx + (m+1)y + z = 1 \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1 \end{cases}$ según los valores del parámetro m.

Solución:

Sean $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ la matriz de coeficientes y la ampliada respectivamente.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{vmatrix} = 2m(m+1) + m + m(m+1) - m(m+1) - m(m+1) - 2m = 2m^2 + 2m + m - m^2 - m - 2m = m^2$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

- $Si \quad m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 3 = r(\overline{A})$
- Si m = 0; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 2 - 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow r(\overline{A}) = 3$.

DISCUSIÓN:

- $Si \quad m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = r(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Existe una única solución).
- $Si \quad m = 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) \neq r(\overline{A}) \Rightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución).

Problema 3:

a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Obtenga los valores de a, b y c de manera que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ cumpla $f(0) = 1$ y tenga extremos relativos en $x = \pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

Solución:

a) Teorema de Bolzano:

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado [a, b] y signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$ (f(a) · f(b) < 0), entonces existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

b) $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3$

Por ser x = 1 un extremo $\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b - 3 = 0$

Por ser x = -1 un extremo $\Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b - 3 = 0$

Resolviendo el sistema, obtenemos que a = 1 y b = 0.

Por tanto a = 1; b = 0 y c = 1.

$f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$

x = 1 es un mínimo.

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$

x = -1 es un máximo.

Problema 4:

a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Calcule el área de la región encerrado por las gráficas de las $f(x) = x + 6$ y $g(x) = \begin{cases} -2x & si\ \ x < 0 \\ x^2 & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$.

Solución:

a) Teorema de Rolle:

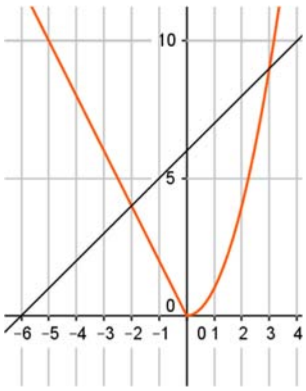
Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y derivable en el abierto (a, b).

Si f(a) = f(b) , entonces existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

b) Primero calculo los puntos de corte de las dos funciones:

- $x + 6 = -2x \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$
- $x + 6 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (La solución x = -2 no nos interesa por ser negativa).

Por tanto los puntos de corte de las gráficas son (-2, 4) y (3, 9).



$$A = \int_{-2}^{0} [x + 6 - (-2x)]dx + \int_{0}^{3} (x + 6 - x^2)dx = \int_{-2}^{0} (3x + 6)dx + \int_{0}^{3} (-x^2 + x + 6)dx =$$

$$\left. \frac{3x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^{0} + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{0}^{3} = 0 - (6 - 12) + (-9 + \frac{9}{2} + 18) - 0 = 6 + 9 + \frac{9}{2} = \frac{39}{2} u^2$$

Por tanto: $A = \dfrac{39}{2} u^2$

Problema 5:

$a)$ Obtenga la ecuación implícita del plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \end{cases}$ $, \lambda, \mu \in R.$

$b)$ Calcule el valor de m para que sean coplanarios los puntos $A(0, m, 0)$, $B(0, 2, 2)$, $C(1, 4, 3)$ y $D(2, 0, 2)$. Obtenga la ecuación implícita del plano β que los contiene.

Solución:

a) π pasa por el punto P(1, 2, 1) y está generado por los vectores $\vec{u} = (-1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$.

$$\pi : \begin{vmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & y-2 \\ 1 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

-(x-1) + 2(y-2) – (z-1) = 0; -x + 1 + 2y – 4 – z + 1 = 0

Por tanto: $\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{-x + 2y - z - 2 = 0}$

b) $\overrightarrow{BC} = (1, 2, 1)$ y $\overrightarrow{BD} = (2, -2, 0)$ son linealmente independientes, por lo que determinan un plano.

Calculo la ecuación implícita del plano que pasa por B y está generado por estos dos vectores. Después obligaré a A a pertenecer a ese plano, así los cuatro puntos serán coplanarios.

$$\beta : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & -2 & y-2 \\ 1 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

2x + 2(y-2) – 6(z-2) = 0; 2x + 2y – 4 – 6z +12 = 0; 2x + 2y – 6z + 8 = 0

Por tanto: $\beta : x + y - 3z + 4 = 0$

$A \in \beta \Leftrightarrow m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -4$

Por tanto, si $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{4}$; A, B, C y D son coplanarios.

Problema 6:

Calcule el punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto al plano $\pi \equiv 2x - y + z + 3 = 0$.

Solución:

Primero calculo la proyección ortogonal de P sobre π: Q; Q será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ donde P' es el simétrico pedido.

Para calcular Q, calculo la ecuación de la recta r perpendicular al plano pasando por P.

Q = $r \cap \pi$.

$\vec{n} = (2,-1,1)$ vector normal del plano es un vector director de la recta r.

Por tanto: $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

2(1 + 2t) – (1 - t) + (2 + t) + 3 = 0; 2 + 4t – 1 + t + 2 + t + 3 = 0; 6t + 6 = 0 $\Rightarrow$ t = -1

Sustituyendo en las ecuaciones de la recta, obtenemos Q = (-1, 2, 1).

Sea P' (x',y',z') el simétrico pedido.

$$\frac{x'+1}{2} = -1 \Rightarrow x' = -2 - 1 = -3$$

$$\frac{y'+1}{2} = 2 \Rightarrow y' = 4 - 1 = 3$$

$$\frac{z'+2}{2} = 1 \Rightarrow z' = 2 - 2 = 0$$

Por tanto el simétrico de P es **P' (-3, 3, 0)**

Problema 7:

En una determinada ciudad, el 8 % de la población practica yoga, el 20 % tiene mascota y el 3 % practica yoga y tiene mascota. Se elige una persona al azar de esa ciudad, calcule:

$a)$ La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.

$b)$ La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

Solución:

Considero los sucesos Y = "practicar yoga" y M = "tener mascota".

P(Y) = 0.08; P(M) = 0.20; P($Y \cap M$) = 0.03

a) P($\overline{Y} \cap M$) = P(M) – P($Y \cap M$) = 0.20 – 0.03 = 0.17

La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota es **0.17**

b) $P(M/Y) = \dfrac{P(M \cap Y)}{P(Y)} = \dfrac{0.03}{0.08} = 0.375$

La probabilidad de que tanga mascota sabiendo que practica yoga es **0.375.**

Problema 8:

El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

Solución:

Sea X = "grosor en mm de una plancha de acero". $x \in N(8, 0.5)$

$P(7.6 \leq x \leq 8.2) = P\left(\frac{7.6-8}{0.5} \leq z \leq \frac{8.2-8}{0.5}\right) = P(z \leq 0.4) - [1 - P(z \leq 0.8)] = 0.6554 - 1 + 0.7881 = 0.4435$

$$\boldsymbol{P(7.6 \leq x \leq 8.2) = 0.4435}$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS** II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumno contestará a SÓLO CINTO ejercicios de entre los planteados. En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero. Es necesario justificar las respuestas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Problema 1:

Sea la función $f(x) = x \cdot e^{1/x^3}$. Determinar el dominio, las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

Problema 2:

Sea f una función continua cuya derivada es la siguiente: $f'(x) = \begin{cases} x+1, & x<0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$. Halla la expresión de las funciones f y las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en el punto $x = 0$.

Problema 3:

Calcular el área del recinto limitado por la función $f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.

Problema 4:

Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} x+y+az=1 \\ 2x+ay=-1 \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\}$, según el valor del parámetro real a. Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a = 0$.

Problema 5:

Hallar A y B, matrices soluciones del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3A-5B=C \\ -A+3B=D \end{cases}$, donde C y D son las matrices: $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinar la matriz inversa de $C^t \cdot D$, donde C^t es la matriz traspuesta de C.

Problema 6:

Sabiendo que $|A| = 1$, donde $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular el determinante de la matriz $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{bmatrix}$. Calcular $|4 \cdot B^{-1} \cdot A^t|^2$.

Problema 7:

Hallar la ecuación de una recta s, tal que:

1) Pasa por el punto $P(0,1,1)$.

2) Está contenida en el plano $\pi \equiv x + y + 3z - 4 = 0$.

3) Es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = z + 3 \\ y = -z + 4 \end{cases}$.

Problema 8:

Hallar las ecuaciones de la recta s que pasa por el punto $P(2,-1,1)$ y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$.

Problema 9:

La duración de un cierto modelo de máquina de aire acondicionado sigue una distribución normal, con media 20 años y desviación típica 5 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de la máquina por un periodo de 25 años.

Problema 10:

Una bolsa M contiene 4 bolas negras y 2 blancas. Otra bolsa N contiene 2 bolas negras y 6 blancas. Se elige una de las bolsas al azar y se extrae una bola.

a) Calcular la probabilidad de que la bola sea blanca.

b) Sabiendo que la bola es blanca, calcular la probabilidad de que sea de la bolsa M.

RESPUESTAS

Problema 1:

Sea la función $f(x) = x \cdot e^{1/x^3}$. Determinar el dominio, las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

Solución:

La función está definida para cualquier valor real de x, excepto para $x = 0$, por lo cual:

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{0\}.}$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x \cdot e^{1/x^3}\right) = -\infty \cdot e^{-0} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x \cdot e^{1/x^3}\right) = +\infty \cdot e^{0} = \infty. \qquad \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x \cdot e^{\frac{1}{x^3}}\right) = 0 \cdot e^{\frac{1}{0}} = 0 \cdot \infty \Rightarrow Indeterminado\ \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{3x^2}{x^6}\cdot e^{\frac{1}{x^3}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{3}{x^4}\cdot e^{\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x^2}} = 3 \cdot \lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x^3}}}{x^2} = 3 \cdot \frac{e^{\frac{1}{0}}}{0} = \frac{3}{0} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(x \cdot e^{\frac{1}{x^3}}\right) = -0 \cdot e^{-\frac{1}{0}} = -0 \cdot e^{-\infty} = -\frac{0}{\infty} = 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ x = 0\ (Eje\ Y)\ es\ asíntota\ vertical\ en\ su\ parte\ positiva}}\ .$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\ \text{y}\ n = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx].$$

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e^{\frac{1}{x^3}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x^3}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty}\left(x \cdot e^{\frac{1}{x^3}} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left[x \cdot \left(e^{\frac{1}{x^3}} - 1\right)\right] =$$

$$= \infty \cdot \left(e^{\frac{1}{\infty}} - 1\right) = \infty \cdot (e^0 - 1) = \infty \cdot (1 - 1) = \infty \cdot 0 \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^3}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^4}\cdot e^{\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x^2}} = 3 \cdot \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^3}}}{x^2} = 3 \cdot \frac{e^{\frac{1}{\infty}}}{\infty} = \frac{3\cdot e^0}{\infty} = \frac{3\cdot 1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ y = x\ es\ asíntota\ oblicua.}}$$

Problema 2:

Sea f una función continua cuya derivada es la siguiente: $f'(x) = \begin{cases} x+1, & x<0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$. Halla la expresión de las funciones f y las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en el punto $x=0$.

Solución:

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \int (x+1) \cdot dx = \frac{x^2}{2} + x + C_1 \;\; si \;\; x<0 \\ f(x) = \int e^x \cdot dx = e^x + C_2 \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + C_1, & x<0 \\ e^x + C_2, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Como quiera que $f(x)$ es continua, para $x=0$ sus límites laterales tienen que ser iguales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right) = C_1.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(e^x + C_2) = e^0 + C_2 = 1 + C_2 = f(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right) = C_1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(e^x + C_2) = e^0 + C_2 = 1 + C_2 = f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = 1 + C_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_2 = C_1 - 1.$

$$\underline{\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + C, & x<0 \\ e^x - 1 + C, & x \geq 0 \end{cases}}}.$$

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$m = f'(0) = 0 + 1 = e^0 = 1.$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(0) = C \Rightarrow P(0, C).$

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - C = 1 \cdot (x - 0).$

$$\underline{\boldsymbol{Recta\ tangente: t \equiv x - y + C = 0.}}$$

Problema 3:

Calcular el área del recinto limitado por la función $f(x)=\frac{x+3}{(x+2)^2}$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=5$.

Solución:

En el intervalo $(0,5)$ todas las ordenadas de la función $f(x)=\frac{x+3}{(x+2)^2}$ son positivas, por lo cual, el área a calcular es la siguiente:

$$S=\int_0^5 f(x)\cdot dx=\int_0^5 \frac{x+3}{(x+2)^2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x+2=t \\ x+3=t+1 \\ dx=dt \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} x=5\rightarrow t=7 \\ x=0\rightarrow t=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\int_2^7 \frac{t+1}{t^2}\cdot dt=\int_2^7\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\cdot dt=\int_2^7\left(\frac{1}{t}+t^{-2}\right)\cdot dt=\left[Lt+\frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^7=$$

$$=\left[Lt+\frac{t^{-1}}{-1}\right]_2^7=\left[Lt-\frac{1}{t}\right]_2^7=\left(L7-\frac{1}{7}\right)-\left(L2-\frac{1}{2}\right)=L7-\frac{1}{7}-L2+\frac{1}{2}=$$

$$=L\frac{7}{2}-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}=L3.5-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}=\frac{14\cdot L3.5-2+7}{14}=\frac{14\cdot L3.5+5}{14}.$$

$$\underline{\boldsymbol{S=\frac{1}{14}\cdot(14\cdot L3.5+5)\ u^2\cong 1.61\ u^2.}}$$

Problema 4:

Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{matrix} x+y+az=1 \\ 2x+ay=-1 \\ ax+y+z=1 \end{matrix}\right\}$, según el valor del parámetro real a. Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a=0$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & a & 0 & -1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=a+2a-a^3-2=0;$$

$$a^3-3a+2=0.$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Resolviendo por la regla de Ruffini: $a_1=a_2=1, a_3=-2$.

$$\boldsymbol{Para\ \left\{\begin{matrix} a\neq 1 \\ a\neq -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D}$$

$$.Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a=-2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2+2+2-4+1-2=-3\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=-2 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Para $a=0$ es $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\quad |M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2.\ M^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$Adj.de\ M^t=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1}=\frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow \boldsymbol{M^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Problema 5:

Hallar A y B, matrices soluciones del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3A - 5B = C \\ -A + 3B = D \end{cases}$, donde C y D son las matrices: $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinar la matriz inversa de $C^t \cdot D$, donde C^t es la matriz traspuesta de C.

Solución:

$$\left.\begin{matrix} 3A - 5B = C \\ -A + 3B = D \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 9A - 15B = 3C \\ -5A + 15B = 5D \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4A = 3C + 5D \Rightarrow A = \frac{1}{4}(3C + 5D).$$

$$A = \frac{1}{4}\left[3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 21 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 0 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 36 & 12 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{matrix} 3A - 5B = C \\ -A + 3B = D \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3A - 5B = C \\ -3A + 9B = 3D \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4B = C + 3D \Rightarrow B = \frac{1}{4}(C + 3D).$$

$$B = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 16 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

$$C^t \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 6 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}. \quad (C^t \cdot D)^t = \begin{pmatrix} 26 & 2 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}.$$

$$|C^t \cdot D| = \begin{vmatrix} 26 & 6 \\ 2 & -12 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-26 - 1) = -324.$$

$$Adj.de\ (C^t \cdot D)^t = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -2 & 26 \end{pmatrix}.$$

$$(C^t \cdot D)^{-1} = \frac{Adj.de\ (C^t \cdot D)^t}{|C^t \cdot D|} = \frac{\begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -2 & 26 \end{pmatrix}}{-324} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{(C^t \cdot D)^{-1} = \frac{1}{162} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -13 \end{pmatrix}}}.$$

Problema 6:

Sabiendo que $|A| = 1$, donde $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular el determinante de la matriz $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{bmatrix}$. Calcular $|4 \cdot B^{-1} \cdot A^t|^2$.

Solución:

$$|B| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ x+a & y+b & z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot |A| = -2 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \underline{|\boldsymbol{B}| = -\mathbf{2}.}$$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumando, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

Para determinar $|4 \cdot B^{-1} \cdot A^t|$ se tiene en cuenta que $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|}$ y que el determinante de una matriz es igual que el determinante de su traspuesta: $|A^t| = |A|$, con lo que la expresión $|4 \cdot B^{-1} \cdot A^t|$ quedaría de la forma $\left|\frac{4 \cdot A}{B}\right|$. Teniendo en cuenta que el producto de una matriz por un número es el producto del número por todos y cada uno de los elementos de la matriz y que, si se multiplica un línea de una matriz por un número el valor de su determinante queda multiplicado por dicho número y, también, que la matriz A tiene de dimensión 3×3, resulta que $|4 \cdot A| = 4^3 \cdot |A|$.

De lo anterior se deduce que:

$$|4 \cdot B^{-1} \cdot A^t|^2 = \left(\left|\frac{4 \cdot A}{B}\right|\right)^2 = \left(\frac{4^3 \cdot |A|}{|B|}\right)^2 = \left(\frac{64 \cdot 1}{-2}\right)^2 = (-32)^2.$$

$$\underline{\left|\boldsymbol{4 \cdot B^{-1} \cdot A^t}\right|^{\mathbf{2}} = \mathbf{1.024.}}$$

Problema 7:

Hallar la ecuación de una recta s, tal que:

1) Pasa por el punto $P(0,1,1)$.

2) Está contenida en el plano $\pi \equiv x+y+3z-4=0$.

3) Es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x=z+3 \\ y=-z+4 \end{cases}$.

Solución:

La expresión de $r \equiv \begin{cases} x=z+3 \\ y=-z+4 \end{cases}$ dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x=z+3 \\ y=-z+4 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,1)$ y un vector normal del plano π es $\vec{n}=(1,1,3)$.

El vector director de la recta s es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,1)$ y $\vec{n}=(1,1,3)$, que es su producto vectorial:

$$\overrightarrow{v_r} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3i+j+k+k-i-3j=-4i-2j+2k=$$

$$=(-4,-2,2) \Rightarrow \overrightarrow{v_s}=(2,1,-1).$$

Teniendo en cuanta que $P \in \pi$ por satisfacer su ecuación, como se comprueba a continuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x+y+3z-4=0 \\ P(0,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 0+1+3-4=0 \Rightarrow Comprobado\ que\ P \in \pi.$$

Teniendo en cuanta lo anterior, la expresión de s dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x=2\mu \\ y=1+\mu \\ z=1-\mu \end{cases}}$$

Problema 8:

Hallar las ecuaciones de la recta s que pasa por el punto $P(2,-1,1)$ y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$.

Solución:

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2,2,1)$.

El haz de planos, β, perpendiculares a la recta r tiene la siguiente expresión general: $\beta \equiv 2x + 2y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene al punto $P(2,-1,1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 2x + 2y + z + D = 0 \\ P(2,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 + D = 0;$$

$4 - 2 + 1 + D = 0;\ \ 3 + D = 0;\ \ D = -3 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0.$

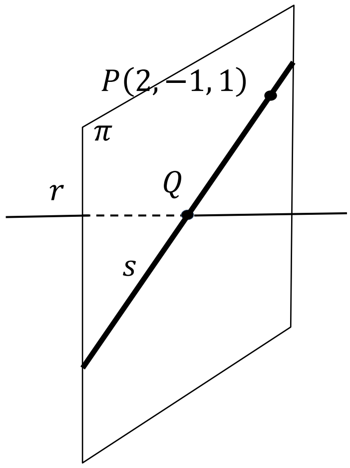
La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

El punto Q de intersección de la recta y el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot (2 + 2\lambda) + 2(1 + 2\lambda) + \lambda - 3 = 0;$$

$4 + 4\lambda + 2 + 4\lambda + \lambda - 3 = 0;\ \ 9\lambda + 3 = 0;$

$3\lambda + 1 = 0;\ \ \lambda = -\frac{1}{3}.$



$$Q \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow Q\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Los puntos $Q\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ y $P(2,-1,1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \left[(2,-1,1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right] = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$

Un vector de la recta pedida, s, es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{QP} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_s} = (1,-2,2)$.

La expresión de s dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = -1 - 2\mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}.}$$

Problema 9:

La duración de un cierto modelo de máquina de aire acondicionado sigue una distribución normal, con media 20 años y desviación típica 5 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de la máquina por un periodo de 25 años.

a) ¿Qué porcentaje de máquinas se espera que no cumplan la garantía?

b) ¿Qué proporción de máquinas tienen una duración comprendida entre 15 y 21 años?

Solución:

$Datos\text{: } \mu = 20; \;\; \sigma = 5.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(20, 5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-20}{5}$.

$a)\ P = P(X < 25) = P\left(Z < \frac{25-20}{5}\right) = P\left(Z < \frac{5}{5}\right) = P(Z < 1) = 0.8413 =$

$= \underline{84.13\ \%}.$

Se espera que no cumplan la garantía un $\underline{\mathbf{84.13}\ \%}$.

$b)\ P = P(15 \leq X \leq 21) = P\left(\frac{15-20}{5} \leq Z \leq \frac{21-20}{5}\right) = P\left(\frac{-5}{5} \leq Z \leq \frac{1}{5}\right) =$

$= P(-1 \leq Z \leq 0.2) = P(Z \leq 0.2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0.2) - 1 + P(Z \leq 1) =$

$= 0.5792 - 1 + 0.8413 = 1.4205 - 1 = \underline{0.4205}.$

La proporción de máquinas que tienen una duración comprendida entre 15 y 21 años es de $\underline{\mathbf{0.4205}}$.

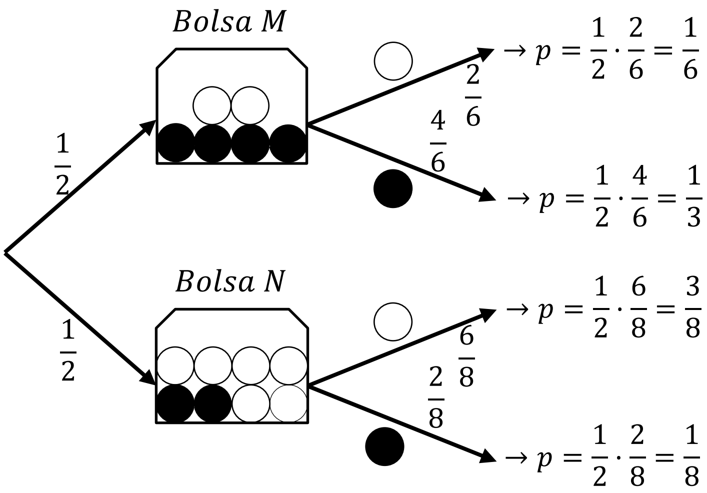
Problema 10:

Una bolsa M contiene 4 bolas negras y 2 blancas. Otra bolsa N contiene 2 bolas negras y 6 blancas. Se elige una de las bolsas al azar y se extrae una bola.

a) Calcular la probabilidad de que la bola sea blanca.

b) Sabiendo que la bola es blanca, calcular la probabilidad de que sea de la bolsa M.

Solución:



$$a)\ P = P(B) = P(M \cap B) + P(N \cap B) = P(M) \cdot P(B/M) + P(N) \cdot P(B/N) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} = \frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{4+9}{24} = \underline{\frac{13}{24} = 0.5417}.$$

La probabilidad de que la bola sea blanca es $\underline{\mathbf{\frac{13}{24} = 0.5417}}$

$$b)\qquad P = P(M/B) = \frac{P(M) \cdot P(B/M)}{P(M) \cdot P(B/M) + P(N) \cdot P(B/N)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{3}{8}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4+9}{24}} = \frac{24}{6 \cdot 13} =$$

$$= \underline{\frac{4}{13} = 0.3077}.$$

Sabiendo que la bola es blanca, la probabilidad de que sea de la bolsa M es de $\underline{\mathbf{\frac{4}{13} = 0.3077}}$.

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020–2021
Convocatoria: Extraordinaria
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.– (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{2 - e^{-x}}.$$

Determinar el dominio, extremos relativos y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

2.– (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \cos x.$$

Hallar el área de la superficie encerrada por la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = -\frac{\pi}{4}$, la gráfica de f y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

3.– (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

b) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x - 1}{4x}\right)^{x}$.

4.– (2 puntos) Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y + z &= 2 \\ 2x + ay + a^2 z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \end{cases}$$

según el valor del parámetro real a.

5.– (2 puntos) Hallar las matrices $A - B$, A y B, sabiendo que las matrices A y B, satisfacen las siguientes identidades:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.– (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3 = -I$, donde I es la matriz identidad.

7.– (2 puntos) Hallar la ecuación de la recta, tal que:

a) pasa por el punto $P(1, 1, 1)$,

b) es paralela al plano $\pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0$,

c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x &= 3 + \lambda, \\ y &= 2 - \lambda, \\ z &= 1 - 2\lambda, \end{cases}$

8.– (2 puntos) Calcular el valor del parámetro real a para que las rectas r y s se corten y calcular este punto.

$$r \equiv \begin{cases} 4x + z &= a, \\ x + y &= 2, \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z &= 0, \\ x + 2z &= 2a. \end{cases}$$

9.– (2 puntos) El tiempo que una persona tarda en llegar a su lugar de trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos. Se ha comprobado que el 84,1 % de los días llega antes de 22 minutos. Si durante el año acude a su lugar de trabajo 290 días, ¿cuántos días puede estimar que tardará menos de 18 minutos en llegar?.

10.– (2 puntos) Sofía va al teatro, cine o de concierto con probabilidades 0,5, 0,2 y 0,3. El 60 % de las veces que va al cine se encuentra con amigos y se va de cena con los amigos. Lo mismo le ocurre el 10 % de las veces que va al teatro y el 90 % de las que va de concierto.

a) ¿Qué probabilidad hay de que se vaya de cena con los amigos?.

b) Si vuelve a casa después del espectáculo, ¿qué probabilidad hay de que haya ido al cine?.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)** **Curso 2020–2021** **Convocatoria: Ordinaria / Extraordinaria** **ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II**

CRITERIOS GENERALES DE CORRECCIÓN

(1) Se sugiere un tipo de corrección positivo, es decir, partiendo de cero y sumando puntos por los aciertos que el alumno vaya obteniendo.

(2) Como excepción al apartado anterior, los errores muy graves, del tipo

$$\sqrt{a^2+b^2} = a+b\,, \quad \frac{\ln x}{x} = \ln\,, \quad \int \frac{x}{x^2+3} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{3}\right),$$

se penalizarán especialmente, y pueden suponer un 0 en el apartado en el que se hayan cometido.

(3) Se deberá valorar la exposición lógica y la coherencia de las respuestas, tanto en cuestiones teóricas como prácticas. Algunos ejemplos:

(a) Si al resolver un sistema de ecuaciones, el alumno comete un error **numérico**, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se prestará especial atención siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial.

(b) En la representación gráfica de funciones, se valorará la coherencia del dibujo con los datos obtenidos previamente por el alumno. (Vale aquí la misma excepción que en el párrafo anterior.)

(4) La puntuación máxima que se puede obtener en cada ejercicio viene señalada en la copia del examen que se entrega al alumno. Si alguno de los apartados tiene a su vez subapartados, se deberá distribuir razonablemente el número de puntos entre los mismos (no necesariamente debe darse el mismo peso a cada subapartado).

(5) Si un alumno da una respuesta acertada a un problema escribiendo sólo los resultados, sin el desarrollo lógico de cómo los ha obtenido, la puntuación en este apartado no podrá ser superior al 40 % de la nota máxima prevista.

(6) La calificación será la suma de las puntuaciones obtenidas en cada ejercicio de una sola propuesta.

RESPUESTAS

Problema 1:

Sea la función $f(x)=\frac{x^2}{2-e^{-x}}$. Determinar el dominio, extremos relativos y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

Solución:

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$2-e^{-x}=0;\ \ 2=e^{-x}=\frac{1}{e^x};\ \ e^x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=L\frac{1}{2}=L1-L2=-L2.$$

$$\underline{D(f)\Rightarrow R-\{-L2\}}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f(x)=\frac{x^2}{2-e^{-x}}=\frac{x^2}{2-\frac{1}{e^x}}=\frac{x^2}{\frac{2e^x-1}{e^x}}=\frac{x^2\cdot e^x}{2e^x-1}.$$

$$f'(x)=\frac{(2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x)(2e^x-1)-(x^2\cdot e^x)\cdot 2e^x}{(2e^x-1)^2}=\frac{e^x\cdot[(x^2+2x)(2e^x-1)-2x^2\cdot e^x]}{(2e^x-1)^2}=$$

$$=\frac{e^x\cdot(2x^2\cdot e^x-x^2+4x\cdot e^x-2x-2x^2\cdot e^x)}{(2e^x-1)^2}=\frac{e^x\cdot(-x^2+4x\cdot e^x-2x)}{(2e^x-1)^2}=\frac{-x\cdot e^x\cdot(x-4\cdot e^x+2)}{(2e^x-1)^2}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-x\cdot e^x\cdot(x-4\cdot e^x+2)}{(2e^x-1)^2}=0;\ \ -x\cdot e^x\cdot(x-4\cdot e^x+2)=0;\ \ x_1=0;$$

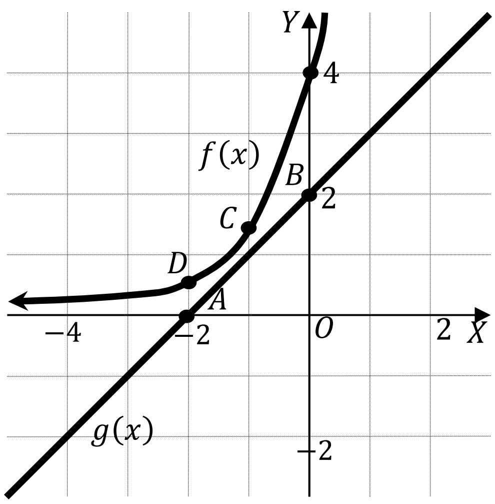
$x-4\cdot e^x+2=0;\ \ x+2=4\cdot e^x$. Las soluciones de esta ecuación son los puntos de corte de las funciones $g(x)=x+2$ y $h(x)=4\cdot e^x$. Se hace un esquema, aproximado, de las gráficas de las funciones.

La función $g(x)=x+2$ es una recta que pasa por los puntos $A(-2,0)\ y\ B(0,2)$.

La función $h(x)=4\cdot e^x$ es una función exponencial, creciente, que corta el eje de ordenadas en el punto $C(0,4)$; tiene como asíntota horizontal al eje de abscisas en su parte negativa y contiene los puntos siguientes:

$h(-1)=4\cdot e^{-1}=\frac{4}{e}\cong 1.47\Rightarrow C(-1,1.47)$.

$h(-2)=4\cdot e^{-2}=\frac{4}{e^2}\cong 0.54\Rightarrow D(-2,0.54)$.



Como se puede observar en la figura adjunta, las funciones $g(x)=x+2$ y $h(x)=4\cdot e^x$ no tienen puntos en común, lo que supone que $(x-4\cdot e^x+2)<0$, para cualquier valor real de x, y como consecuencia, la única raíz real de la derivada es $x=0$.

Para: $\left.\begin{array}{l}x<0\Rightarrow f'(x)<0\\ x>0\Rightarrow f'(x)>0\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)\ tiene\ un\ mínimo\ relativa\ para\ x=0.$

$f(0)=\frac{x^2}{2-e^{-x}}=0 \Rightarrow$

$\underline{Mínimo\ relativo: O(0,0)}.$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2-e^{-x}}=\frac{(-\infty)^2}{2-e^{-(-\infty)}}=\frac{\infty}{2-e^{\infty}}=\frac{\infty}{2-\infty}=-\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}}=0.$$

$$k=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2-e^{-x}}=\frac{\infty^2}{2-e^{-\infty}}=\frac{\infty}{2-0}=\frac{\infty}{2}=\infty.$$

$\underline{La\ recta\ y=0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ su\ parte\ negativa}.$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$\underline{La\ recta\ x=-L2\ es\ asíntota\ vertical}.$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

****

Problema 2:

Sea la función $f(x) = \cos x$. Halla el área de la superficie encerrada por la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = -\frac{\pi}{4}$, la gráfica de f y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución:

Para $x = -\frac{\pi}{4}$ es $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ Punto de tangencia: $P\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

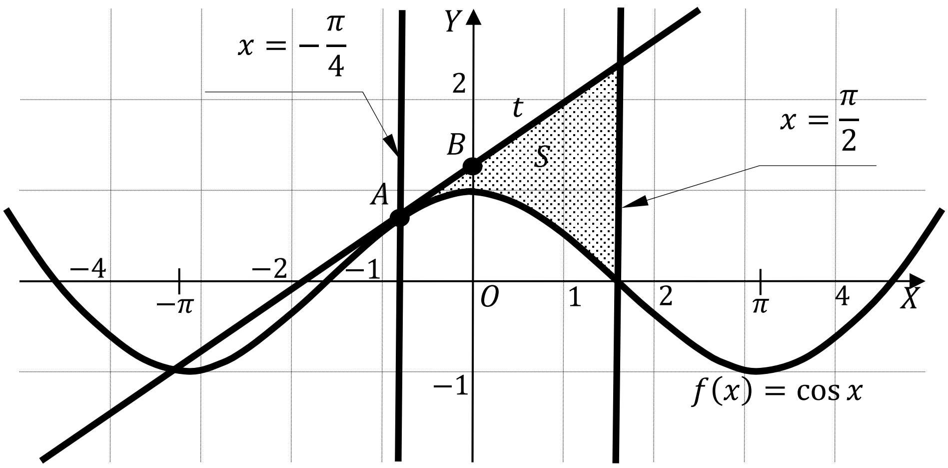
$$f'(x) = -sen\ x \Rightarrow m = f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -sen\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow m = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(0, 1)$ con $m = -4$ es:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{2}}{8};\ \ 8y - 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}x + \pi\sqrt{2};$$

$$8y = 4\sqrt{2}x + \pi\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\ \Rightarrow t \equiv y = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot (4x + \pi + 4).$$

Para la representación de la recta tenemos en cuenta el punto de tangencia y haciendo $x = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot (\pi + 4) \cong 1.26 \Rightarrow Q(0, 1.26)$.



La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta.

En la figura se observa que en el intervalo de la superficie a calcular, $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, las ordenadas de la recta tangente son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $f(x) = \cos x$, por lo cual la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t(x) \cdot dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot (4x + \pi + 4) \cdot dx - [sen\ x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \left[\frac{4x^2}{2} + \pi \cdot x + 4x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[sen\ \frac{\pi}{2} - sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot [x \cdot (2x + \pi + 4)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - sen\ \frac{\pi}{2} + sen\ \left(-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \left[\frac{\pi}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \pi + 4\right)\right] - \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \left[-\frac{\pi}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{-\pi}{4} + \pi + 4\right)\right] - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{16} \cdot (2\pi + 4) + \frac{\pi\sqrt{2}}{32} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 4\right) - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \cdot (\pi + 2) + \frac{\pi\sqrt{2}}{32} \cdot \frac{8+\pi}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{32} \cdot \left(4\pi + 8 + \frac{8+\pi}{2}\right) - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{32} \cdot \frac{8\pi+16+8+\pi}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{64} \cdot (9\pi + 24) - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 3.629 - 1.707 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = 1.922\ u^2}$$

****

Problema 3:

Calcular los siguientes límites: $a)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x}$. $b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^{x}$.

Solución:

$a)$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x} = \left(\frac{1}{0}\right)^0 = \infty^0 \Rightarrow Indet. \Rightarrow A = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LA = L\left[\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x}\right] \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left[\mathrm{L}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x}\right] = \lim_{x\to 0^+}[(L1 - Lx^2)^{tag\,x}] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}[(-2\cdot Lx)^{tag\,x}] = \lim_{x\to 0^+}(-2\cdot tag\,x\cdot Lx) = \lim_{x\to 0^+}\left(-2\cdot\frac{sen\,x}{\cos x}\cdot Lx\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{-2}{\cos x}\cdot(sen\,x\cdot Lx)\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0^+}(sen\,x\cdot Lx) =$$

$$= \frac{-2}{1}\cdot\lim_{x\to 0^+}(sen\,x\cdot Lx) = -2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{Lx}{\frac{1}{sen\,x}} = -2\cdot\frac{-\infty}{\frac{1}{0}} = -2\cdot\frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow -2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{sen^2 x}} = 2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{cox\,x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{sen^2 x}{x} = 2\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{sen^2 0}{0} =$$

$$= 2\cdot\frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow 2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cdot sen\,x\cdot\cos x}{1} = 2\cdot\lim_{x\to 0^+}(sen\,2x) =$$

$$= 2\cdot sen\,0 = 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow LA = 0 \Rightarrow A = \underline{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x} = 1}.$$

$$\underline{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x} = 1}$$

$b)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{4x}\right)^{x} = \left(1+\frac{-1}{\infty}\right)^{\infty} = 1^{\infty} \Rightarrow Indet.\,n^{\underline{o}}\ e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-4x}\right)^{x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-4x}\right)^{x\cdot(-4x)\cdot\frac{1}{-4x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-4x}\right)^{-4x}\right]^{\frac{x}{-4x}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-4x}\right)^{-4x}\right]^{-\frac{1}{4}} = e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}.$$

$$\underline{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^{x} = \frac{\sqrt[4]{e^3}}{e}}.$$

****

Problema 4:

Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} ax+y+z=2 \\ 2x+ay+a^2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{array}\right\}$, según el valor del parámetro real a.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2+2+2a^2-2a-a^3-2=-a^3+3a^2-2a=0;$$

$$=-a(a^2-3a+2)=0 \Rightarrow a_1=0;\ \ a^2-3a+2=0;\ \ a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=$$

$$=\frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow a_2=1, a_3=2.$$

$$\underline{Para\ \begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq 1 \\ a\neq 2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M'=\{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4+2-4=2\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2+4+2-4-1-4=-1\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=2 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve en primer lugar para $a \neq 0, a \neq 1$ y $a \neq 2$:

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{2a+1+2a^2-2a-2a^2-1}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{0}{-a(a-1)(a-2)} = 0.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a^2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{a+4+4a^2-2-2a^3-4}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{-2a^3+4a^2+a-2}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{-(a-2)(2a^2-1)}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{2a^2-1}{a(a-1)}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{2a^2+4+2-4a-a-4}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{2a^2-5a+2}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{(a-2)(2a-1)}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{-2a+1}{a(a-1)}.$$

$$\underline{Solución: x = 0;\ \ y = \frac{2a^2-1}{a(a-1)};\ \ z = \frac{-2a+1}{a(a-1)}, \forall a \in R - \{0, 1, 2\}.}$$

Resolvemos ahora para $a = 2$; el sistema resulta $\left\{\begin{array}{l} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right.$, que es compatible indeterminado y equivalente a $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{array}\right\}$. Haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 - \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x - y = -2 + \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y = -1 - 3\lambda.$$

$$2x - 1 - 3\lambda = 2 - \lambda;\ \ 2x = 3 + 2\lambda \Rightarrow x = \frac{3}{2} + \lambda.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{3}{2} + \lambda;\ \ y = -1 - 3\lambda;\ \ z = \lambda,\ \forall \lambda \in R.}$$

****

Problema 5:

Hallar las matrices $A-B, A\ y\ B$, sabiendo que las matrices $A\ y\ B$, satisfaces las siguientes identidades:

$$A+B=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix}-2&0&-2\\-2&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Solución:

$A^2-AB+BA-B^2=A\cdot(A-B)+B\cdot(A-B)=(A+B)(A-B).$

Multiplicando por la izquierda los dos términos por $(A+B)^{-1}$:

$(A+B)^{-1}\cdot(A^2-AB+BA-B^2)=(A+B)^{-1}\cdot(A+B)\cdot(A-B);$

$(A+B)^{-1}\cdot(A^2-AB+BA-B^2)=I\cdot(A-B)\Rightarrow$

$(A^2-AB+BA-B^2)\cdot(A-B)^{-1}=(A+B)\cdot I\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{A-B=(A+B)^{-1}\cdot(A^2-AB+BA-B^2)}.$$

Se obtiene la inversa de $(A+B)$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(A+B|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&-1&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_1\leftrightarrow F_3\\F_2-F_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&-1&1&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\to -F_3\}\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to F_1-F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&0\end{array}\right)\Rightarrow(A+B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

$$A-B=(A+B)^{-1}(A^2-AB+BA-B^2)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&-2\\-2&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A-B=\begin{pmatrix}-2&0&-2\\2&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}}.$$

$$A+B+(A-B)=2A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0&-2\\2&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A=\tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&-3\\2&0&0\\3&0&3\end{pmatrix}}.$$

$$A+B=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}-A=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&-3\\2&0&0\\3&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0&-\frac{3}{2}\\1&0&0\\\frac{3}{2}&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\-1&-1&0\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{B=\tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}}.$$

Problema 6:

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad: $A^3=-I$, donde I es la matriz identidad.

Solución:

$$|A|=\begin{vmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{vmatrix}=12+15-16-12=-1. \qquad A^t=\begin{pmatrix}0&1&-1\\3&-4&3\\4&-5&4\end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-4&3\\-5&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&3\\4&4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&-4\\4&-5\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&-1\\-5&4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&-1\\4&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\4&-5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&-1\\-4&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&-1\\3&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\3&-4\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}}{-1}\Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&-4&-4\\1&3&3\end{pmatrix}.}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}.$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=-I.$$

$$A^{20}=A^{18+2}=A^{6\cdot 3}\cdot A^2=(A^3)^6\cdot A^2=(-I)^6\cdot A^2=I^6\cdot A^2\Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow A^{20}=A^2=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}.}$$

****

Problema 7:

Hallar la ecuación de una recta s, tal que:

1) Pasa por el punto $P(1,1,1)$.

2) Es paralela al plano $\pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0$.

3) Es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$.

Solución:

Un vector normal del plano $\pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0$ es $\vec{n} = (1,1,-2)$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1,-1,-2)$.

El vector director de la recta s pedida es perpendicular, simultáneamente, a los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$, o sea: es linealmente dependiente del producto vectorial $\overrightarrow{v_r} \times \vec{n}$.

$$\overrightarrow{v_r} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2i - 2j + k + k + 2i + 2j = 4i + 2k = (4,0,2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (2,0,1)$.

$$\underline{\boldsymbol{s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}}}.$$

****

Problema 8:

Calcular el valor del parámetro real a para que las rectas $r \equiv \begin{cases} 4x + z = a \\ x + y = 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2z = 2a \end{cases}$ se corten y calcular este punto.

Solución:

Las rectas r y s determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} 4x + z = a \\ x + y = 2 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2z = 2a \end{array}\right\}$.

Para que las rectas r y s se corten en un punto es condición necesaria que el sistema que forman sea compatible determinado, que, según el teorema de Rouché-Fröbenius, los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen que tener el mismo rango, que ha de ser igual al número de incógnitas, que es tres, por lo cual, el determinante de la matriz ampliada tiene que ser cero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2a \end{vmatrix} = 0; \;\; 8a - 2 - a + 16 = 0; \;\; 7a = -14 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a = -2}}.$$

Para determinar el punto de corta consideramos el sistema $\left.\begin{array}{r} 4x + z = -2 \\ x + y = 2 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} z = -2 - 4x \\ y = 2 - x \end{array}\right\} \Rightarrow x + (2 - x) + (-2 - 4x) = 0; \;\; x + 2 - x - 2 - 4x = 0;$$

$$-4x = 0; \;\; x = 0; \;\; y = 2; \;\; z = -2 \;\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(0, 2, -2)}}.$$

****

Problema 9:

El tiempo que una persona tarda en llegar a su lugar de trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos. Se ha comprobado que el 84.1 % de los días llega antes de 22 minutos. Si durante el año acude a su lugar de trabajo 290 días, ¿cuántos días puede estimar que tardará menos de 18 minutos en llegar?

Solución:

$Datos\colon\ \mu = 20;\ \ P(X < 22) = 0.8410.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(20, \sigma).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-20}{\sigma}$.

Se trata de determinar σ tal que:

$P = P(X < 22) = 0.8410 \Rightarrow P\left(Z < \frac{22-20}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 0.8410.$

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0,1)$ a 0.8410 le corresponde, aproximadamente, el valor 1: $\frac{2}{\sigma} = 1 \Rightarrow \underline{\sigma = 2}$.

$$\underline{\sigma = 2}$$

$P = P(X < 18) = P\left(Z < \frac{18-20}{2}\right) = P\left(Z < -\frac{2}{2}\right) = P(Z < -1) =$

$= 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$

$n = P \cdot N = 0.1587 \cdot 290 = 46.023.$

$$\underline{Se\ estima\ que\ tardará\ menos\ de\ 18\ minutos\ en\ llegar\ al\ trabajo\ 46\ días.}$$

****

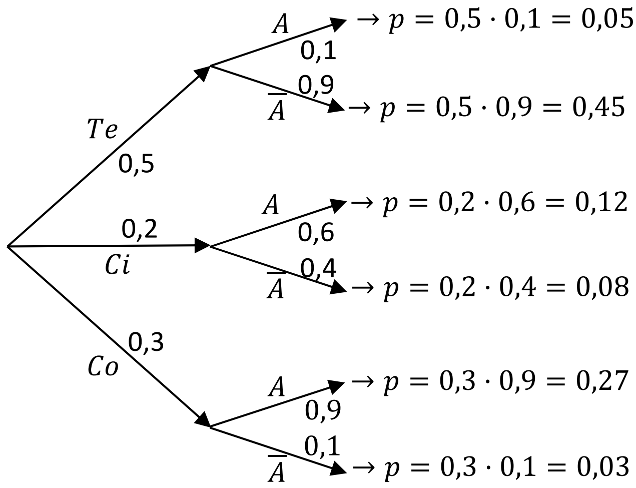
Problema 10:

Sofía va al teatro, cine o de concierto con probabilidades 0.5; 0.2 y 0.3. El 60 % de las veces que va al cine se encuentra con amigos y se va de cena con los amigos. Lo mismo le ocurre el 10 % de las veces que va al teatro y el 90 % de las que va de concierto.

a) ¿Qué probabilidad hay de que se vaya de cena con los amigos?

b) Si vuelve a casa después del espectáculo, ¿qué probabilidad hay de que haya ido al cine?

Solución:



a)

$$P = P(A) = P(Te \cap A) + P(Ci \cap A) + P(Co \cap A) =$$

$$= P(Te) \cdot P(A/Te) + P(Ci) \cdot P(A/Ci) + P(Co) \cdot P(A/Co) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.9 = 0.05 + 0.12 + 0.27 = \underline{0.44}.$$

$$\boldsymbol{P(A) = \underline{0.44}}$$

b)

$$P = P\left(Ci/\overline{A}\right) = \frac{P\left(Ci \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{P(Ci) \cdot P\left(\overline{A}/Ci\right)}{1 - P(A)} = \frac{0.2 \cdot 0.4}{1 - 0.44} = \frac{0.08}{0.56} = \underline{0.1429}.$$

$$\boldsymbol{P\left(Ci/\overline{A}\right) = \underline{0.1429}.}$$

****

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

MADRID

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2020-2021** **MATERIA: MATEMÁTICAS II**	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A,B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2 + x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x.$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π.

b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$.

c) (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especimenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} ax - 2y + (a-1)z &= 4 \\ -2x + 3y - 6z &= 2 \\ -ax + y - 6z &= 6 \end{aligned}\right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para $a = 1$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ x\,e^{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.

c) (0.75 puntos) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

a) (1.5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) (0.5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2.

c) (0.5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

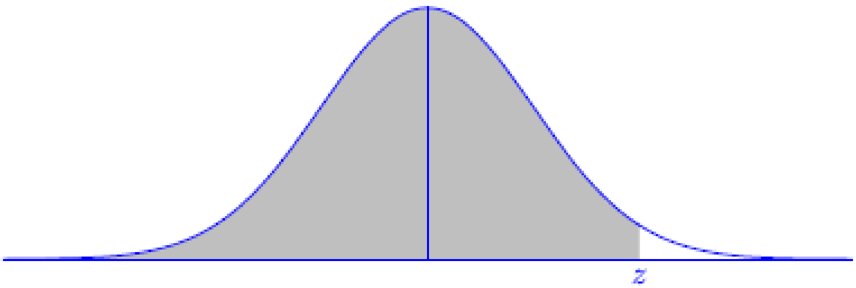
a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2" y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?

d) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución N(0, 1), $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

Por cada ecuación bien planteada: 0.5 puntos. Por la solución del sistema: 1 punto. Si se resuelve correctamente un sistema incorrecto: hasta 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

A.2.

Por hallar los puntos de corte: 0.75 puntos. Por plantear la integral correcta: 0.5 puntos. Por calcular la primitiva: 0.5 puntos. Por aplicar la Regla de Barrow: 0.5 puntos. Por el resultado correcto: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

A.4.

a) Planteamiento modelo: 0.5 puntos. Por cada porcentaje pedido: 0.25 puntos.
b) Reconocer la binomial: 0.25 puntos. Parámetros correctos: 0.25 puntos. Expresión de la probabilidad: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo correcto: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

RESPUESTAS OPCIÓN A

Problema A.1:

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1 560 euros, que corresponden a tres empresas, A, B y C. Sabiendo que el valor actual de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acciones que le corresponde a cada hermano.

Solución

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/9iMcwbp14VI

Llamamos x al número de acciones A, y al número de acciones B, y z al número de acciones C.

Con los datos del enunciado planteamos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=540\\ 3x+y+6z&=1\,560\\ y&=2z \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x+y+z&=540\\ 3x+y+6z&=1\,560\\ y-2z&=0 \end{aligned}\right\}$$

Lo resolvemos usando la **Regla de Cramer**:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 540 & 1 & 1\\ 1560 & 1 & 6\\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 6\\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-1080+1560-3240+3.120}{-2+3-6+6}=\frac{4680-4320}{1}=360.$$

$$y=\begin{vmatrix} 1 & 540 & 1\\ 3 & 1560 & 6\\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-3120+3240=120.$$

$$z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 540\\ 3 & 1 & 1560\\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1620-1560=60.$$

Lo que le corresponde a cada hermano:

$$\boldsymbol{x=\frac{360}{3}=120;\ \ y=\frac{120}{3}=40;\ \ z=\frac{60}{3}=20.}$$

Problema A.2:

Calcula el área de la región limitada por las gráficas de las siguientes funciones:

$f(x) = 2 + x - x^2$ y $g(x) = 2x^2 - 4x$.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: [***https://youtu.be/LJsWgHYpRHQ***](https://youtu.be/LJsWgHYpRHQ)

Buscamos los puntos de intersección de ambas funciones:

$$f(x) = g(x) \rightarrow 2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x \rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} \rightarrow x = -\frac{1}{3};\ \ x = 2.$$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{18-3-1}{9} = \frac{14}{9} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{3}, \frac{14}{9}\right)$.

$f(2) = 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow B(2, 0)$.

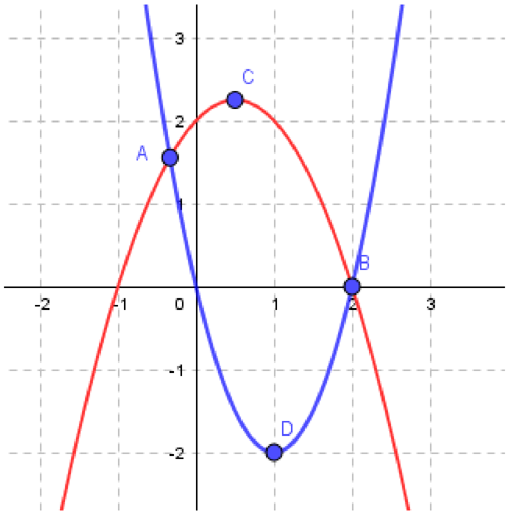
Las funciones se cortan en los puntos: $A\left(-\frac{1}{3}, \frac{14}{9}\right)$ y $B(2, 0)$

Buscamos sus extremos:

$f'(x) = 1 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} \rightarrow C\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

$g'(x) = 4x - 4 = 4(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow D(1, -2)$.

El punto $C\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ es un máximo de $f(x)$ y el punto $D(1, -2)$ es un mínimo de $g(x)$



Representamos las gráficas, con lo que:

$$S = \int_{-\frac{1}{3}}^{2} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{2} [(2 + x - x^2) - (2x^2 - 4x)] \cdot dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{2} (-3x^2 + 5x + 2) \cdot dx$$

$$= \left[-\frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 2x\right]_{-\frac{1}{3}}^{2} = \left[-x^3 + \frac{5x^2}{2} + 2x\right]_{-\frac{1}{3}}^{2}$$

$$= \left(-2^3 + \frac{5 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2\right) - \left[-\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = -8 + 10 + 4 - \frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3}$$

$$= 6 - \frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3} = \frac{324 - 2 - 15 + 36}{54} = \frac{360 - 17}{54} = \frac{343}{54} \cong 6.35\ u^2.$$

El área es: $S = \mathbf{\frac{343}{54}} \cong \mathbf{6.35\ u^2}$.

Problema A.3:

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

$a)$ Calcular el ángulo que forman r y π.

$b)$ Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $\beta \equiv z - y = 0$.

$c)$ Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Solución:

video

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/3ytiu1fmSqU

$a)$ Vectores ortogonales a la recta r son: $(-1, -1, 1)$ y $(2,\ 3, -1)$. Hallamos su producto vectorial para obtener el vector de dirección de la recta r.

$$\overrightarrow{v_r'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = i + 2j - 3k + 2k - 3i - j = -2i + j - k \rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2, -1, 1).$$

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, 1, -1)$.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \cos\beta.$$

Podemos calcular el ángulo que forman dos vectores:

$$\cos\beta = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}|}.$$

Por ser los ángulos α y β complementarios sabemos que: $sen\ \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}|}$.

$$sen\ \alpha = \frac{(2, 1, -1) \cdot (2, -1, 1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{4 - 1 - 1}{\sqrt{4 + 1 + 1} \cdot \sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333 \rightarrow$$

La recta r y el plano π forman un ángulo $\boldsymbol{\alpha = arc\ sen\ 0.3333 = 19^\circ\ 28'\ 16''}$.

$b)$ Calculamos el punto P de intersección de la recta r y el plano π:

$$\left.\begin{matrix} r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases} \\ \pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ 2x + y - z = -3 \end{matrix}\right\}.$$

El punto de corte es $P(-3, 1, -2)$.

La recta s que pasa por $P(-3, 1, -2)$ y es perpendicular al plano $\beta \equiv y - z = 0$ tiene como vector director al vector normal del plano: $\overrightarrow{n_\beta} = (0, 1, -1)$.

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es $s \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano β con la recta s es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} \beta \equiv y - z = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \rightarrow 1 + \lambda - (-2 - \lambda) = 0 \rightarrow 1 + \lambda + 2 + \lambda = 0 \rightarrow\ \ 2\lambda = -3 \rightarrow \lambda = -\frac{3}{2} \rightarrow$$

$$\to \begin{Bmatrix} x=-3 \\ y=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \\ z=-2+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \to M\left(-3,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

Calculamos los vectores:

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=\left[\left(-3,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)-(-3,1,-2)\right]=\left(0,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{MP'}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OM}=\left[(x,y,z)-\left(-3,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).\right]=\left(x+3,y+\frac{1}{2},z+\frac{1}{2}\right).$$

Para que P' sea el simétrico de P' se debe verificar que:

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MP'}\to\left(0,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\left(x+3,y+\frac{1}{2},z+\frac{1}{2}\right)\to\begin{Bmatrix} x+3=0\to x=-3 \\ y+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}\to y=-2 \\ z+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\to z=1 \end{Bmatrix}\to P'(-3,-2,1).$$

El simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $\beta\equiv z-y=0$ es $\boldsymbol{P'(-3,-2,1)}$

c) Sabemos que: $P(-3,1,-2)$, punto de intersección de la recta r y el plano π. Buscamos un punto de la recta r.

$$r\equiv\begin{matrix}-x-y+z=0\\2x+3y-z=-1\end{matrix}\Big\}\to z=\lambda\Rightarrow\begin{matrix}x+y=\lambda\\2x+3y=-1+\lambda\end{matrix}\Big\}\to r\equiv\begin{cases}x=1+2\lambda\\y=-1-\lambda.\\z=\lambda\end{cases}$$

Por ejemplo, para $\lambda=0$: $Q(1,-1,0)$.

La recta q que pasa por ese punto y tiene por vector director al normal del plano π, que es $\vec{n}=(2,1,-1)$; es la siguiente: $q\equiv\begin{cases}x=1+2\mu\\y=-1+\mu.\\z=-\mu\end{cases}$

El punto Q' es la intersección de q y π:

$$\begin{Bmatrix}\pi\equiv 2x+y-z=-3\\ q\equiv\begin{cases}x=1+2\mu\\y=-1+\mu\\z=-\mu\end{cases}\end{Bmatrix}\to 2\cdot(1+2\mu)-1+\mu-(-\mu)=-3\to\ \mu=-\frac{2}{3}\to\begin{Bmatrix}x=-\frac{1}{3}\\y=-1-\frac{2}{3}=-\frac{5}{3}\\z=\frac{2}{3}\end{Bmatrix}\to$$

$$Q'\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right).$$

La recta r' pedida, proyección ortogonal de r sobre π es la que pasa por los puntos $P(-3,1,-2)$ y $Q'\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$.

$$r'\equiv\frac{x+3}{-\frac{1}{3}+3}=\frac{y-1}{-\frac{5}{3}-1}=\frac{z+2}{\frac{2}{3}+2}\to\ \frac{x+3}{\frac{8}{3}}=\frac{y-1}{-\frac{8}{3}}=\frac{z+2}{\frac{8}{3}}.$$

La recta r' pedida, proyección ortogonal de r sobre π es: $\boldsymbol{x+3=1-y=z+2}$

Problema A.4:

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal de media 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

$a)$ ¿Qué porcentaje de individuos de esta espacie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

$b)$ Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que el menos uno no supere los 10 meses de vida?

$c)$ ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8-c, 8.8+c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/E08i7gHUeaw

$a)$ Nos dicen que: $X \to N(\mu;\ \sigma) = N(8.8;\ 3)$. Tipificamos: $Z = \frac{X-8.8}{3}$.

$$P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10-8.8}{3}\right) = P\left(Z > \frac{1.2}{3}\right) = P(Z > 0.4) = 1 - P(Z \leq 0.4) = 1 - 0.6554 = 0.3446.$$

El porcentaje de individuos de esta especie que supera los 10 meses es de $\mathbf{34.46}$ **%**

$$P(7 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{7-8.8}{3} \leq Z \leq \frac{10-8.8}{3}\right) = P\left(\frac{-1.8}{3} \leq Z \leq \frac{1.2}{3}\right) = P(-0.6 \leq Z \leq 0.4)$$
$$= P(Z < 0.4) - [1 - P(Z < 0.6)] == P(Z < 0.4) - 1 + P(Z < 0.6)$$
$$= 0.6554 - 1 + 0.7257 = 1.3811 - 1 = 0.3811$$

El porcentaje de individuos que ha vivido entre 7 y 10 meses es de $\mathbf{38.11}$ %

$b)$ La probabilidad de que un individuo no supere los 10 meses de vida es la siguiente:

$$P(X \leq 10) = 1 - P(X > 10) = 1 - 0.3446 = 0.6554.$$

Distribución binomial: $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$, siendo $n = 4;\ \ p = 0.6554;\ \ q = 1 - p = 0.3446;\ \ r \geq 1.$

$$P(r \geq 1) = 1 - P(r = 0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot 0.6554^0 \cdot 0.3446^{4-0} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0.3446^4 = 1 - 0.0141 = 0.9859.$$

Si se toman al azar 4 especímenes, la probabilidad de que el menos uno no supere los 10 meses de vida es de $\mathbf{0.9859}$

$c)$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-8.8}{3}$.

$$P(8.8 - c \leq X \leq 8.8 + c) = P\left(\frac{8.8-c-8.8}{3} \leq Z \leq \frac{8.8+c-8.8}{3}\right) = 0.98 \to$$
$$P\left(\frac{-c}{3} \leq Z \leq \frac{c}{3}\right) = P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - \left[1 - P\left(Z < \frac{c}{3}\right)\right] = P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - 1 + P\left(Z < \frac{c}{3}\right) =$$
$$= 2 \cdot P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - 1 = 0.98;\ \ P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = \frac{1.98}{2} = 0.9900.$$

Buscamos ese valor en la tabla $N(0,1) \to 2.33 \to \frac{c}{3} \cong 2.33 \to c \cong 7$.

El valor de c tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluya el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie es de $\boldsymbol{c} \cong \mathbf{7}$

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} ax-2y+(a-1)z=4 \\ -2x+3y-6z=2 \\ -ax+y-6z=6 \end{array}\right\}.$$

$a)$ Discuta el sistema según los diferentes valores de a.

$b)$ Resuelva el sistema para $a=1$.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/aGJuoPVALdI

$a)$ Escribimos las matrices de coeficientes y ampliada:

$$M=\begin{pmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los rangos:

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{vmatrix}=-18a-2(a-1)-12a+3a(a-1)+6a+24=-24a-2a+2+$$
$$3a^2-3a+24=3a^2-29a+26=0;\ \ x=\frac{29\pm\sqrt{29^2-12\cdot 26}}{2\cdot 3}=\frac{29\pm 23}{6}\Rightarrow a_1=1,\ \ a_2=\frac{26}{3}.$$

Por lo tanto, para $a\neq 1$ y para $a\neq\frac{26}{3}$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada, e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Calculamos los rangos para $a=1$. El rango de la matriz de los coeficientes es 2, pues $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}\neq 0$

Calculamos el rango de la matriz ampliada:

$$rango\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}=rango\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \end{pmatrix}=2$$
$$\begin{Bmatrix} F_2\to F_2+2F_1 \\ F_3\to F_3+F_1 \end{Bmatrix} \qquad \{F_2=F_3\}$$

El rango de la matriz ampliada es 2, igual al rango de la matriz de los coeficientes y menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible e indeterminado.

Calculamos los rangos para $a=\frac{26}{3}$. El rango de la matriz de los coeficientes es 2, pues $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}\neq 0$

Calculamos el rango de la matriz ampliada:

$$rango\begin{pmatrix} \frac{26}{3} & -2 & \frac{23}{3} & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -\frac{26}{3} & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} 26 & -6 & 23 & 12 \\ -6 & 9 & -18 & 6 \\ -26 & 3 & -18 & 18 \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} 13 & -2 & 23 & 2 \\ -3 & 3 & -18 & 1 \\ -13 & 1 & -18 & 3 \end{pmatrix} = 3.$$

Ya que: $\begin{vmatrix} 13 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ -13 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 117 - 6 + 26 + 78 - 13 - 18 = 221 - 35 \neq 0 \Rightarrow 221 - 37 \neq 0$

El rango de la matriz ampliada es 3, distinto al rango de la matriz de los coeficientes, por lo que el sistema es incompatible.

La discusión completa del sistema es:

- Si $a = \frac{26}{3}$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2, distinto del de la matriz ampliada que es 3, el sistema es **incompatible**.
- Si $a = 1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2, igual al de la matriz ampliada y menor que el número de incógnitas que es 3 sistema es compatible **indeterminado**.
- Si $a \neq \frac{26}{3}$ y $a \neq 1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada, y al número de incógnitas el sistema es **compatible determinado**.

$b)$ Si $a = 1$ el sistema es $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -x + y - 6z = 6 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado, como acabamos de ver. Haciendo $z = -\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -x + y - 6z = 6 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x - 2y = 4 \\ -x + y = 6 + 6\lambda \\ -2x + 3y = 6\lambda + 2 \end{array} \; z = -\lambda \right\} \to \begin{array}{r} x = 2y + 4 \\ -y = 10 + 6\lambda \\ z = -\lambda \end{array}$$

$\to x - 2 \cdot (-10 - 6\lambda) = 4 \to \; x = -16 - 12\lambda.$

$$\boldsymbol{x = -16 - 12\lambda; -y = 10 + 6\lambda \,; z = -\lambda, \forall \lambda \in R}$$

Autor: Javier Rodrigo Hitos
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema B.2:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} sen\, x & si \ \ x < 0 \\ x \cdot e^x & si \ \ x \geq 0 \end{cases}$:

$a)$ Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

$b)$ Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.

$c)$ Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x) \cdot dx$.

video

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/py-Zo0AzgW0

$a)$ La función es definida a trozos, formada por la función seno, continua y derivable en toda la recta real, y por una función exponencial, también continua y derivable en toda la recta real. El único punto dudoso es por tanto el de unión de ambos trozos, $x = 0$.

Para estudiar la continuidad en $x = 0$, estudiamos el valor de la función en ese punto y el valor de los límites laterales:

$$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} sen\, x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (x \cdot e^x) = 0$$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ sabemos que la función es continua para $x = 0$

Ya hemos visto que también el único punto dudoso para la derivabilidad es el punto de unión de ambas ramas, $x = 0$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$f'(x) = \begin{cases} \cos x & si \ x < 0 \\ e^x(x+1) & si \ \ x \geq 0 \end{cases}$

Luego $f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \cos x = \cos 0 = 1 = f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x \ (x+1) = e^0 \ (0+1) = 1$

por lo que $f'(0^-) = f'(0^+) = 1$

$$\boldsymbol{f(x) \ es \ continua \ y \ derivable \ en \ x = 0}$$

$b)$ Si la primera derivada de una función es positiva o negativa entonces la función es creciente o decreciente, respectivamente.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & si \ x < 0 \\ e^x(x+1) & si \ \ x \geq 0 \end{cases}.$$

En el intervalo $(-\pi, 0)$: la función $f'(x) = \cos x$ es negativa en el intervalo $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ y es positiva en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. En el intervalo $(0, 2)$: $f'(x) = e^x \cdot (x+1) > 0$. Por lo tanto:

Si $\boldsymbol{x} \in \left(-\boldsymbol{\pi}, -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$ entonces $f'(x) < 0$, luego la función es **decreciente**

Si $\boldsymbol{x} \in \left(-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \mathbf{2}\right)$ entonces $f'(x) > 0$ y la función es **creciente**

El Teorema de los valores intermedios o **desigualdad de Darboux** dice que "si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)\ y\ f(b)$"

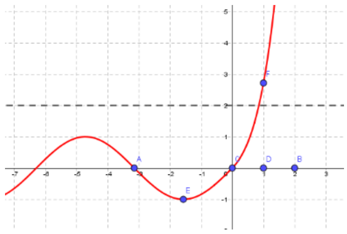
Para demostrar que existe un punto $x_0 \in [0,1]$ de manera que $f(x_0) = 2$ se tiene en cuenta que la función es continua en $[0,1]$, que $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$ y que $f(1) = 1 \cdot e^1 = e > 2$, por lo que como $0 < 2 < e$, queda demostrado que:

$$Existe\ al\ menos\ un\ x_0 \in [0,1]\ de\ manera\ que\ \ f(x_0) = 2$$

También se puede demostrar usando el **teorema de Bolzano** que dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$":

Probar que existe un punto $x_0 \in [0,1]$ de manera que $f(x_0) = 2$ es equivalente a probar que la función $g(x) = f(x) - 2$ tiene una raíz real en el intervalo $[0,1]$. En el intervalo $[0,1]$ la función:

$$g(x) = f(x) - 2 = x \cdot e^x - 2.$$



Es continua en el intervalo $[0,1]$,

$g(0) = 0 \cdot e^0 - 2 = 0 - 2 = -2 < 0$,

$g(1) = 1 \cdot e^1 - 2 = e - 2 > 0$. Tiene distinto signo en los extremos. Luego $g(x)$ tiene al menos una raíz real en $[0,1]$. Por lo tanto

$$Existe\ al\ menos\ un\ x_0 \in [0,1]\ de\ manera\ que\ \ f(x_0) = 2$$

c) Debemos integrar la función en cada uno de los subintervalos:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x) \cdot dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sen\ x \cdot dx + \int_{0}^{1} x \cdot e^x \cdot dx$$

La primera integral es inmediata y la segunda la hacemos por partes:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sen\ x \cdot dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -\cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 0 = -1$$

$$-\cos 0 + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 0 = -1$$

Utilizamos el método de integración por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

I	$u = x$	$du = dx$
	$v = \int e^x dx = e^x$	$dv = e^x dx$

Sustituimos:

$\int_0^1 x \cdot e^x \cdot dx = [x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx]_0^1 = [x \cdot e^x - e^x]_0^1 = (1 \cdot e^1 - e^1) - (0 \cdot e^0 - e^0) = 1.$

Por lo tanto: $\quad I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x) \cdot dx = -1 + 1 = 0.$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x) \cdot dx = \mathbf{0}$$

Problema B.3:

Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

a) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) Halle la recta que pasa por el punto $P(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2.

c) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes X e Y.

video

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/LQ_4yL6udS0

a) La distancia del origen de coordenadas al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula:

$$d(O, \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Todos los planos paralelos al plano $\pi_1 \equiv x + y - 1 = 0$ tienen por expresión general:

$$\pi \equiv x + y + D = 0.$$

Aplicamos la fórmula al plano $\pi \equiv x + y + D = 0$:

$$d(O, \pi) = 2 \to \frac{|D|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |D| = 2\sqrt{2} \to D_1 = -2\sqrt{2}, D_2 = 2\sqrt{2}.$$

Los planos pedidos son:

$$\boldsymbol{\pi' \equiv x + y - 2\sqrt{2} = 0 \text{ y } \pi'' \equiv x + y + 2\sqrt{2} = 0}$$

b) Un vector normal del plano π_2 es $\overrightarrow{n_2} = (1, 0, 1)$, por lo que la recta r pedida lo tendrá como vector director. Como además conocemos un punto $P(0, 2, 0)$, sus ecuaciones paramétricas son:

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}}$$

c) Buscamos los puntos de intersección del plano $\pi_1 \equiv x + y - 1 = 0$ con los ejes X e Y:

$$Eje\ X: \quad \left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv x + y - 1 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \to x - 1 = 0;\ \ x = 1 \to A(1, 0, 0).$$

$$Eje\ Y: \quad \left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv x + y - 1 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \to y - 1 = 0;\ \ y = 1 \to B(0, 1, 0).$$

La distancia entre los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0, 1, 0) - (1, 0, 0)] = (-1, 1, 0).$$

$$d\left(\overline{AB}\right) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{d\left(\overline{AB}\right) = \sqrt{2}\ u}$$

Problema B.4:

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

$c)$ ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2" y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?

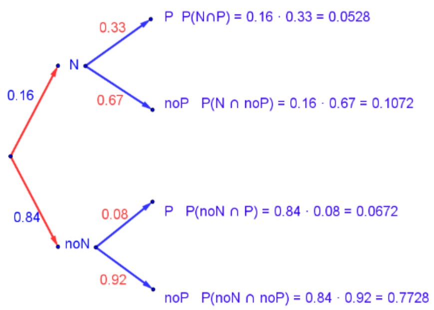
$d)$ ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Solución:

video **Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/VIK1B2OO7Bg**

Denominamos por N a superar el nivel permitido de NO_2, y P a superar el nivel permitido de partículas. Llevamos a un diagrama de árbol los datos del enunciado. Comprobamos operaciones viendo que las probabilidades en cada nudo suman 1, y que:

$$0.0528 + 0.1072 + 0.0672 + 0.7728 = 1.$$



$a)$ Debemos calcular:

$$P(N \cap P) = P(N) \cdot P(P/N) = 0.16 \cdot 0.33 = 0.0528$$

La probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos es de $\mathbf{0.0528}$.

$b)$ Utilizamos el suceso contrario. La probabilidad pedida es igual a la unidad menos la probabilidad de que no se supere ninguno de los dos niveles:

$$1 - P(noN \cap noP) = 1 - 0.84 \cdot 0.02 = 1 - 0.7728 = 0.2272$$

La probabilidad de que se supere al menos uno de los dos niveles es $\mathbf{0.2272}$

$c)$ Dos sucesos $A\ y\ B$ son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(N) = 0.16; P(N \cap P) = 0.0528; P(P) = P(N \cap P) + P(noN \cap P) = 0.0528 + 0.0672 = 0.1200.$$

$$P(N) \cdot P(P) = 0.16 \cdot 0.12 = 0.0192 \neq 0.0528 = P(N \cap P).$$

Los sucesos **NO** son independientes

$d)$ Nos piden una probabilidad condicionada:

$$P(N|noP) = \frac{P(N \cap noP)}{P(noP)} = \frac{P(N) \cdot P(noP|N)}{1 - P(P)} = \frac{0.16 \cdot 0.67}{1 - 0.12} = \frac{0.1072}{0.88} = 0.1218.$$

La probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas es de $\mathbf{0.1218}$

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2020-2021**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (1.25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1) (0.5 puntos) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\operatorname{sen} x}$ a.2) (0.75 puntos) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}\right)$

(**Indicación**: use el cambio de variable $t = 1/x$ donde sea necesario).

b) (1.25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b.1) (0.5 puntos) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$ b.2) (0.75 puntos) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv x-1 = y+1 = \dfrac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

b) (0.75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.

c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

b) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (0.75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y, que tenga como soluciones $\{x=1, y=2\}$ y $\{x=0, y=0\}$.

b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & \lambda \\ y & = & \lambda - 2 \\ z & = & \lambda - 1 \end{array}\right.$$

c) (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, que solo tenga como solución a $x=1$ e $y=2$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = x^3 - |x| + 2.$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.

c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abcisas $y=0$, y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \qquad s \equiv \left\{\begin{array}{l} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{array}\right.$$

a) (1.5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.

b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s.

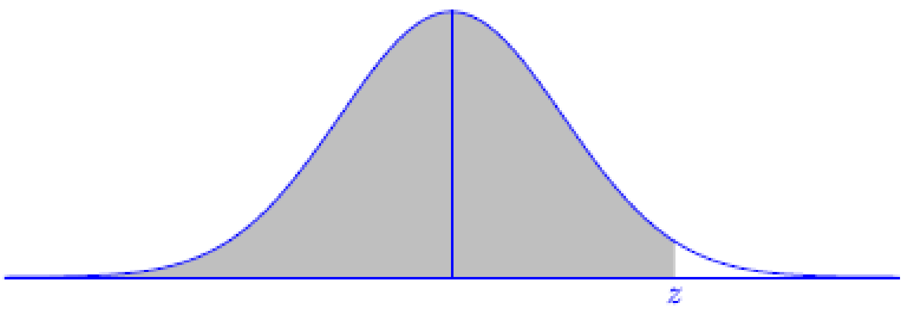
B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

b) (1.5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

Por plantear correctamente cada ecuación: 0.5 puntos. Resolución correcta del sistema planteado: 1 punto. Se darán como máximo 0.5 puntos si se resuelve correctamente un sistema que esté mal planteado.

Estándares de aprendizaje evaluados: Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

A.2.

a.1) Por cada aplicación correcta de L'Hôpital:0.25 puntos.
a.2) Por el cambio de variable: 0.5 puntos. Aplicación de L'Hôpital: 0.25 puntos.
b.1) Por resolver correctamente la integral: 0.5 puntos.
b.2) Por cada integración por partes correcta: 0.25 puntos. Por aplicar correctamente la regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

A.4.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Uso correcto de las fórmulas de Bayes y de la probabilidad total: 1 punto. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

B.1.

En los apartados **a)** y **c)**, dar el ejemplo 0.5 puntos; justificación de que cada ejemplo cumple el enunciado, 0.25 puntos. En el apartado **b)**, llegar al sistema 0.75 puntos; justificación, 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.

B.2.

a) Continuidad: 0.25 puntos. Derivabilidad: 0.5 puntos (repartidos en 0.25 por el planteamiento, y 0.25 por los cálculos).
b) Decidir que $x = 0$ es extremo: 0.25 puntos. Hallar el otro punto crítico: 0.5 puntos. Demostrar que es mínimo: 0.25 puntos.
c) Hallar la primitiva: 0.25 puntos. Aplicar la regla de Barrow: 0.25 puntos. Resultado: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

B.3.

a) Planteamiento: 1 punto. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

B.4.

a) Por identificar la binomial 0.5 puntos. Por expresar la probabilidad 0.5 puntos.
b) Cálculo de parámetros de la normal: 0.5 puntos. Cálculo de la probabilidad: 1 punto (planteamiento: 0.5 puntos; resolución: 0.5 puntos).

Estándares de aprendizaje evaluados: Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar. Conoce las características y los parámetros de la distribución Normal y valora su importancia en el mundo científico. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

RESPUESTAS OPCIÓN A

Problema A.1:

Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

Solución:

video

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/p4XUv7lK4NU

Llamamos x, y, z al número de seguidores que tienen en la red social Sara, Cristina y Jimena, respectivamente.

Escribimos un sistema de ecuaciones lineales siguiendo el enunciado

$$\left.\begin{aligned} x+y+z=15\,000 \\ (1-0.25)z=3x \\ \tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{5}y=\tfrac{1}{4}z \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x+y+z=15\,000 \\ 0.75z=3x \\ 10x+4y=5z \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x+y+z=15\,000 \\ 4x-z=0 \\ 10x+4y-5z=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z=4x.$$

Como $z=4x$ eliminamos la incógnita z del sistema:

$$\left.\begin{aligned} x+y+4x=15\,000 \\ 10x+4y-20x=0 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 5x+y=15\,000 \\ -5x+2y=0 \to 2y=5x \end{aligned}\right\} \to 3y=15\,000 \to \quad y=5\,000.$$

Sustituimos el valor de y en la ecuación: $5x+y=15\,000$

$$5x+5\,000=15\,000 \to \quad 5x=10\,000 \to \quad x=2\,000. \qquad z=8\,000.$$

Sara tiene $2\,000$ seguidores, Cristina tiene $5\,000$, y Jimena $8\,000$

Problema A.2:

a) (1.25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1) (0.5 puntos) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\text{sen}\, x}$ a.2) (0.75 puntos) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{\text{sen}\,\frac{1}{x}}\right)$

(**Indicación**: use el cambio de variable $t = 1/x$ donde sea necesario).

b) (1.25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b.1) (0.5 puntos) $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$ b.2) (0.75 puntos) $\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$

Solución:

video

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/DC2b9f2Lzyk

$a_1)$ $L = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-sen\,x} = \frac{0^2\cdot(1-0)}{0-2\cdot 0^2-sen\,0}$, se anulan tanto el numerador como el denominador por lo que aplicamos la **Regla de L'Hôpital**, derivando numerador y denominador:

$L = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot(1-2x)+x^2\cdot(-2)}{1-4x-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-4x^2-2x^2}{1-4x-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-6x^2}{1-4x-\cos x} = \frac{0}{1-0-1}$

Vuelve a salir una indeterminación del mismo tipo, por lo volvemos a aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2-12x}{-4+sen\,x} = \frac{2-0}{-4+sen\,0} = \frac{2}{-4+0} = -\frac{1}{2}$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-sen\,x} = -\frac{1}{2}$$

$a_2)$ $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{sen\,\frac{1}{x}}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x\cdot sen\,\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2} - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x\cdot sen\,\frac{1}{x}} = 0 - \frac{2}{\infty\cdot 0}$

El límite del primer sumando es 0, y el segundo tiene una indeterminación del tipo $\infty\cdot 0$. Para calcularlo hacemos operaciones y aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x\cdot sen\,\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{sen\,\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cdot cos\,\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to\infty}\frac{2}{cos\,\frac{1}{x}} = -\frac{2}{\cos 0} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{sen\,\frac{1}{x}}\right)\right] = -2$$

$b_1)$ Es una integral inmediata de tipo logaritmo. Podemos hacer el cambio de variable

$$x^2-1=t \;\rightarrow 2x\cdot dx = dt$$

$$I=\int \frac{x}{x^2-1}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{t}\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot Lt+C=\frac{1}{2}\cdot L|x^2-1|+C\ \Rightarrow$$

$$I=\int \frac{x}{x^2-1}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot L|x^2-1|+C$$

$b_2)$ $I=\int_0^1 x^2e^{-x}\cdot dx$. Hacemos la integral indefinida

La segunda integral se puede resolver por partes.

Utilizamos el método de integración por partes: $\int udv=uv-\int vdu$

I	$u=x^2$	$du=2x\cdot dx$
	$v=-e^{-x}$	$dv=e^{-x}\cdot dx$

Sustituimos:

$$\int x^2\cdot e^{-x}\cdot dx=x^2\cdot(-e^{-x})-\int -e^{-x}\cdot 2x\cdot dx=-x^2\cdot e^{-x}+2\int x\cdot e^{-x}\cdot dx$$

El segundo sumando volvemos a hacerlo por partes: $\int x\cdot e^{-x}\cdot dx$

I	$u=x$	$du=dx$
	$v=-e^{-x}$	$dv=e^{-x}\cdot dx$

$$\int x\cdot e^{-x}\cdot dx=x\cdot(-e^{-x})-\int -e^{-x}\cdot dx=-x\cdot e^{-x}+\int e^{-x}\cdot dx=-x\cdot e^{-x}-e^{-x}+C=-e^{-x}(x+1)+C$$

Sustituimos el valor de esta integral:

$$\int x^2\cdot e^{-x}\cdot dx=-x^2\cdot e^{-x}+2\cdot\int x^2\cdot e^{-x}\cdot dx=-x^2\cdot e^{-x}+2\cdot[-e^{-x}(x+1)]+C=$$

$$=-x^2e^{-x}-2\cdot e^{-x}(x+1)+C\Rightarrow I=\int x^2e^{-x}\cdot dx=-e^{-x}(x^2+2x+2)+C.$$

Aplicamos los límites de integración:

$$I=\int_0^1 x^2e^{-x}\cdot dx=[-e^{-x}(x^2+2x+2)]_0^1=-[e^{-1}(1^2+2\cdot1+2)]+[e^{-0}(0^2+2\cdot0+2)]=$$

$$=-\frac{1+2+2}{e}+2=2-\frac{5}{e}\Rightarrow$$

$$I=\int_0^1 x^2e^{-x}\cdot dx=2-\frac{5}{e}$$

Problema A.3:

Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv x-1=y+1=\frac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

b) (0.75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.

c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.

Solución:

video

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente *https://youtu.be/Px6bNWm1k9Y*

$a)$ Un vector director de la recta r es $\vec{v_r}=(1,1,2)$, que es, a su vez, el vector normal del plano perpendicular a la recta.
Un vector normal del plano $\pi \equiv x+y-z=6$ es $\vec{n}=(1,1,-1)$.
El ángulo que forman los dos planos es el mismo que el que forman sus vectores normales.
Hallamos el producto escalar de los dos vectores normales encontrados:

$$\vec{v_r}\cdot\vec{n}=1\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot(-1)=0$$

Como el producto escalar es cero, los vectores son ortogonales.

Los planos son perpendiculares, forman un ángulo de $\mathbf{90°}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ radianes

$b)$ Al ser el vector de dirección de la recta ortogonal al vector normal al plano, recta y plano son paralelos por lo que tiene sentido calcular la distancia entre recta y plano, para ello podemos calcular la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. Un punto de la recta es $P(1,-1,2)$

La distancia de un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ a un plano $Ax+By+Cz+D=0$ es: $d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Por tanto:

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|1\cdot 1+1\cdot(-1)-1\cdot 2-6|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|1-1-2-6|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{8}{\sqrt{3}}.$$

$$\boldsymbol{d(r,\pi)=\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}u.}$$

$c)$ Buscamos una recta s que no corte al plano π por lo que debe ser paralela a él, es decir, el vector director de s tiene que ser perpendicular al vector normal de π, $\vec{n}=(1,1,-1)$. También sabemos que el vector director de s es perpendicular al vector director de r, $\vec{v_r}=(1,1,2)$, por lo cual, el vector director de s tiene la misma dirección que el producto vectorial $\vec{n}\times\vec{v_r}$:

$$\vec{n}\times\vec{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2i-j+k-k+i-2j=3i-3j\to(3.-3.0)\to\vec{v_s}=(1,-1,0)$$

La recta pedida pasa por $A(1,0,-1)$ y tiene de vector de dirección: $\vec{v_s}=(1,-1,0)$, luego su ecuación paramétrica es:

$$s\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-1 \end{cases}\to\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1};z=\ -1$$

Problema A.4:

En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

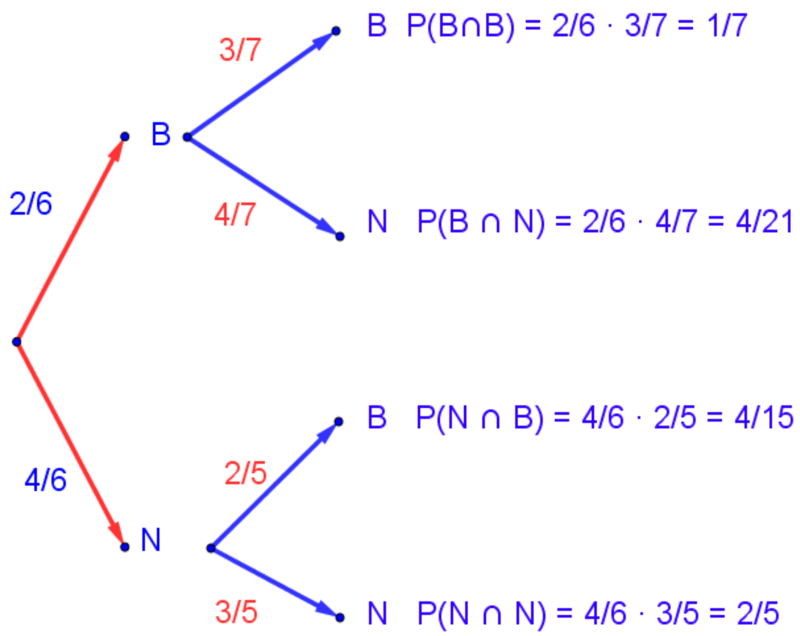
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

b) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente [*https://youtu.be/wTM9DjSwHfU*](https://youtu.be/wTM9DjSwHfU)

Llamamos A al suceso sacar bola blanca y N a sacar bola negra. Dibujamos un diagrama de árbol con los datos del problema:



$a)$ Para que las dos bolas extraídas sean de distinto color tiene que ser

$$P = P(B,N) + P(N,B) = \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{7} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{21} + \frac{4}{15} = \frac{20+28}{105} = \frac{48}{105} = \frac{16}{35} \cong 0.45714.$$

La probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color es $\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{35}} \cong \mathbf{0.45714}$

$b)$ Ahora es una probabilidad condicionada a que la segunda bola sea blanca. Miramos las probabilidades en el árbol:

$$P = P(N/B) = \frac{P(N\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{7}+\frac{4}{15}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{15+28}{105}} = \frac{4\cdot7\cdot15}{15\cdot43} = \frac{4\cdot7}{43} = \frac{28}{43} \cong 0.65116.$$

La probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra sabiendo que la segunda bola ha sido blanca es $\frac{\mathbf{28}}{\mathbf{43}} \cong \mathbf{0.65116}$

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

a) (0.75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y, que tenga como soluciones $\{x = 1, y = 2\}$ y $\{x = 0, y = 0\}$.

b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x &= \lambda \\ y &= \lambda - 2 \\ z &= \lambda - 1 \end{cases}$$

c) (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, que solo tenga como solución a $x = 1$ e $y = 2$.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/jGrr0i6er5g

$a)$ Por dos puntos pasa una recta, en este caso $y = 2x$. Por tanto, se trata de encontrar un sistema compatible e indeterminado, con lo que sus dos ecuaciones deben ser linealmente dependientes.

$$\left.\begin{aligned} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{aligned}\right\}$$

$b)$ Ahora buscamos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, compatible indeterminado, ya que su solución debe la recta dada, que pasa por el punto $(0, -2, -1)$. Llamamos a x el valor del parámetro y tenemos:

$$\left.\begin{aligned} y = x - 2 \\ z = x - 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x - y = 2 \\ x - z = 1 \end{aligned}\right\}$$

$c)$ Se trata de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, dos de las cuales son linealmente independientes y con soluciones $x = 1$ e $y = 2$, y la tercera es combinación lineal de las dos primeras. Podría ser el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2\,x - y = 0 \\ x + y = 3 \\ x - 2y = -3 \end{aligned}\right\}$$

Pero hay infinitas soluciones

Problema B.2:

Sea la función

$$f(x) = x^3 - |x| + 2.$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.

c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abcisas $y = 0$, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

video

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/-HCRhLIu6A8

La función valor absoluto es continua pero no es derivable en el origen. Su definición es:

$|x| = \begin{cases} -x & si\ \ x < 0 \\ x & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$, la función $f(x)$ puede redefinirse de la forma: $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2 & si\ \ x < 0 \\ x^3 - x + 2 & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$.

$a)$ La función $f(x)$ es suma de funciones continuas luego es una función continua en toda la recta real. Si la consideramos una función definida a trozos, formada por dos funciones polinómicas es único caso dudoso es el de unión de los trozos. Estudiamos la derivabilidad en el origen:

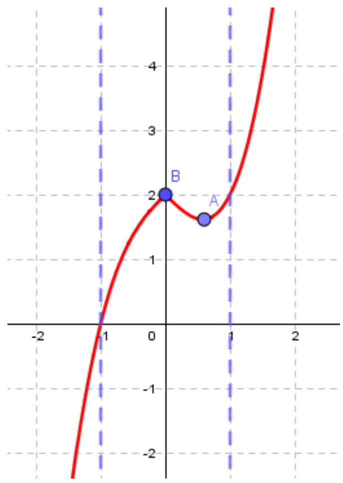
Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 \ si\ x < 0 \\ 3x^2 - 1 \ si\ x > 0 \end{cases}$, luego para $x = 0$, $f'(0) = \begin{cases} 1 & si\ x < 0 \\ -1 & si\ x > 0 \end{cases}$ por lo que no es derivable en 0.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

La función es continua en toda la recta real. La función NO es derivable en $x = 0$. Por tanto $f(x)$ es derivable en $R - \{0\}$

$b)$ Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto en el que exista la derivada, es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.



$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x \notin R \\ 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Usamos la segunda derivada

$f''(x) = \begin{cases} 6x & si\ \ x < 0 \\ 6x & si\ \ x > 0 \end{cases} \rightarrow f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} > 0 \rightarrow$ Hay un mínimo en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 = \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 18}{9} = \frac{18 - 2\sqrt{3}}{9}$$

El punto $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{18-2\sqrt{3}}{9}\right) \approx A(0.6, 1.62)$ es un mínimo relativo

Estudiamos el punto $B(0,2)$ en el que no existe la derivada.

Como $f'(0) = \begin{cases} 1 & si\ \ x < 0 \\ -1 & si\ \ x > 0 \end{cases}$, antes de $B(0,2)$ la función es creciente, y después es decreciente, luego el punto $B(0,2)$ es un máximo relativo.

$A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{18-2\sqrt{3}}{9}\right) \approx A(0.6, 1.62)$ es un mínimo relativo y $B(0,2)$ es un máximo relativo

$c)$ En $(-1,1)$ todas las ordenadas de la función $f(x)$ son positivas, por lo que la superficie pedida es:

$$S = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{0} (x^3 + x + 2) \cdot dx + \int_{0}^{1} (x^3 - x + 2) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{1}$$

$$= 0 - \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1)\right] + \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) - 0 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 = 4 - 1 = 3.$$

$$\boldsymbol{S = 3\ u^2}$$

Problema B.3:

Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.

b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/FcKSWKmKi0U

a) De las rectas r y s sabemos: Un punto y un vector director de la recta r son $A(2,-1,-4)$ y $\vec{v_r} = (1,1,-3)$. Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta s

$$s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases} \rightarrow z=\lambda;\;\; x=2-\lambda;\;\; y=1+2x+2z;\, y=1+4-2\lambda+2\lambda=5 \;\rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=5 \\ z=\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta s son $B(2,5,0)$ y $\vec{v_s} = (1,0,-1)$.

Como los vectores $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$ son linealmente independientes, las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso buscamos un vector de origen $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$:

$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2,5,0)-(2,-1,-4)] = (0,6,4) = \;\vec{w}.$

Según que los vectores $\{\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan.

$Rang\ \{\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{w}\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -18+6-4 \neq 0 \rightarrow Rang\ \{\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{w}\} = 3 \rightarrow$ Los vectores son NO coplanarios por lo que las rectas se cruzan.

El vector director de la recta t perpendicular a r y s es uno de igual dirección que el producto vectorial de los vectores directores de las rectas $r\ y\ s$.

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -i-3j-k+j = -i-2j-k \Rightarrow \vec{v_t} = (1,2,1).$$

Buscamos los planos que tengan a dicho vector como vector de orientación, a) π_1 pase por un punto de r y tenga como el otro vector de orientación el vector de dirección de r, y b) π_2 pase por un punto de s y tenga como el otro vector de orientación el vector de dirección de s:

$$\pi_1(A;\, \vec{v_r}, \vec{v_t}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$(x-2)-3(y+1)+2(z+4)-(z+4)+6(x-2)-(y+1) = 0 =$

$7(x-2)-4(y+1)+(z+4)=7x-14-4y-4+z+4=0$

$\pi_1 \equiv 7x-4y+z-14=0.$

$$\pi_2(B;\ \overrightarrow{v_s},\overrightarrow{v_t}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$-(y-5)+2z+2(x-2)-(y-5)=0=\ 2(x-2)-2(y-5)+2z=$

$$2x-4-2y+10+2z=0=\ 2x-2y+2z+6$$

$\pi_2 \equiv x-y+z+3=0.$

La recta pedida es la intersección de los planos π_1 y π_2:

$$\begin{cases} 7x-4y+z-14=0 \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$$

$b)$ Las ecuaciones paramétricas de las rectas tienen las siguientes expresiones:

$$r \equiv \begin{cases} x=2+\mu \\ y=-1+\mu \\ z=-4-3\mu \end{cases} \quad y\ s \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=5 \\ z=\lambda \end{cases}.$$

Un punto cualquiera de cada una de las rectas es:

$P \in r \Rightarrow P(2+\mu,-1+\mu,-4-3\mu)\ y\ Q \in s \Rightarrow Q(2-\lambda,5,\lambda).$

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(\mu+\lambda,-6+\mu,-4-3\mu-\lambda).$

Imponemos que este vector sea perpendicular a ambas rectas:

$$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{v_r}=0 \rightarrow (\mu+\lambda,-6+\mu,-4-3\mu-\lambda)\cdot(1,1,-3)=0=\mu+\lambda-6+\mu+12+9\mu+3\lambda$$

$$11\mu+4\lambda=-6.$$

$$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{v_s}=0 \rightarrow (\mu+\lambda,-6+\mu,-4-3\mu-\lambda)\cdot(1,0,-1)=0=\mu+\lambda+4+3\mu+\lambda=\ 4\mu+2\lambda+4$$

$$2\mu+\lambda=-2.$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 11\mu+4\lambda=-6 \\ 2\mu+\lambda=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 11\mu+2\lambda=-6 \\ -8\mu-4\lambda=8 \end{array}\right\} \rightarrow 3\mu=2 \rightarrow \mu=\tfrac{2}{3}.\rightarrow \tfrac{4}{3}+\lambda=-2 \rightarrow\ 4+3\lambda=-6 \rightarrow \lambda=-\tfrac{10}{3}.$$

Los puntos resultan ser:

$$P(2+\mu,-1+\mu,-4-3\mu) \approx P\left(2+\tfrac{2}{3},-1+\tfrac{2}{3},-4-2\right) \approx P\left(\tfrac{8}{3},-\tfrac{1}{3},-6\right).$$

$$Q(2-\lambda,5,\lambda) \approx Q\left(2+\tfrac{10}{3},5,-\tfrac{10}{3}\right) \approx Q\left(\tfrac{16}{3},5,-\tfrac{10}{3}\right).$$

La distancia pedida es el módulo del vector $\overrightarrow{QP}$:

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\left(\tfrac{8}{3},-\tfrac{1}{3},-6\right)-\left(\tfrac{16}{3},5,-\tfrac{10}{3}\right)=\left(-\tfrac{8}{3},-\tfrac{16}{3},-\tfrac{8}{3}\right).$

$d_{(r,s)}=\left|\overrightarrow{QP}\right|=\tfrac{8}{3}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\tfrac{8}{3}\cdot\sqrt{6}=\tfrac{8\cdot\sqrt{6}}{3}.$

$$d(r,s)=\mathbf{\frac{8\sqrt{6}}{3}} \approx \mathbf{6.532}\ u$$

Problema B.4:

Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

b) (1.5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

Solución:

video **Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/2RMh10drD6w**

a) Como o llueve o no llueve, se trata de una distribución binomial de la que sabemos que:

$p = 0.45;\;\; q = 1 - p = 0.55;\;\; n = 100;\;\; r = 40.$

En una distribución binomial, la probabilidad de que de n elementos, r sean favorables es:

$$P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$$

$$P(40) = \binom{100}{40} \cdot 0.45^{40} \cdot 0.55^{60} = 1.3746 \cdot 10^{28} \cdot 0.45^{40} \cdot 0.55^{60}.$$

La probabilidad de que haya 40 días de lluvia es:

$$P(40) = \binom{100}{40} \cdot 0.45^{40} \cdot 0.55^{60} = 1.3746 \cdot 10^{28} \cdot 0.45^{40} \cdot 0.55^{60}.$$

b) Vamos a aproximar la distribución binomial $B(n,p) = B(100, 0.45)$ por una distribución normal, ya que $n \cdot p > 5 \text{ y } nq > 5 \to \begin{Bmatrix} 100 \cdot 0.45 = 45 \\ 100 \cdot 0.55 = 55 \end{Bmatrix}$.

$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0.45 = 45.\qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0.45 \cdot 0.55} = \sqrt{24.75} \cong 4.98.$

$X = B(100,\; 0.45) \approx N(45,\; 4.98).$

Tipificamos la variable: $Z \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-45}{4.98}$ y consideramos la corrección de Yates:

$$P = P(39.5 \le X \le 40.5) = P\left(\frac{39.5-45}{4.98} \le Z \le \frac{40.5-45}{4.98}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-5.5}{4.98} \le Z \le \frac{-4.5}{4.98}\right) = P(-1.10 \le Z \le -0.90) = P(0.90 \le Z \le 1.10)$$

$$= P(Z \le 1.10) - P(Z \le 0.90) = = 0.8665 - 0.8159 = 0.0506.$$

La probabilidad de que llueva 40 días es aproximadamente de $\mathbf{0.05}$ días

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

MURCIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Sánchez

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II

EBAU2021 - **JUNIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 4 \\ x & - & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & a+2 \end{array}\right.$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

2: Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **[1,5 p.]** Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

b) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX - B = C^t$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C.

3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).

Se quiere diseñar una lata de refresco de forma cilíndrica, con tapas inferior y superior. El material para las tapas tiene un coste de 5 euros cada cm^2 y el material para el resto del cilindro tiene un coste de 3 euros cada cm^2.

a) **[1 p.]** Si denotamos por x el radio de las tapas y por y la altura de la lata, demuestre que el coste total del material necesario para construir dicha lata viene dado por $10\pi x^2 + 6\pi xy$.

b) **[1,5 p.]** Si el volumen de la lata es 90π cm^3, determine sus dimensiones (radio y altura) para que el coste del material sea mínimo.

El examen continúa por detrás

UNIVERSIDAD DE MURCIA · Región de Murcia · Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2021 - **JUNIO**

4: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

a) **[1 p.]** Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

b) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int x^2\ln(x)\,dx$. Determine la primitiva de la función $f(x)=x^2\ln(x)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(1,0)$.

5: Considere los planos de ecuaciones $\pi_1: x-y+z=0$ y $\pi_2: x+y-z=2$.

a) **[1 p.]** Compruebe que los planos se cortan y calcule la ecuación de la recta r determinada por la intersección de ambos planos.

b) **[1,5 p.]** Compruebe que el punto $A=(3,2,1)$ no está en π_1 ni en π_2 y calcule la ecuación del plano π_3 que contiene a la recta r y pasa por el punto A.

6: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

Considere los puntos $A=(a,4,3)$, $B=(0,0,5)$ y $C=(0,3,-1)$.

a) **[1 p.]** Calcule los valores de a para los cuales el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en el vértice A.

b) **[1,5 p.]** Tomando el valor de $a=3$, determine la ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es paralelo a la recta dada por $\begin{cases} x-y+z = 0 \\ 2x+y = 3 \end{cases}$

7: Un estudio revela que el 10 % de los hombres son daltónicos y que el 1 % de las mujeres son daltónicas. Según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5 % de hombres y un 49,5 % de mujeres. Determine:

a) **[1 p.]** La probabilidad de que una persona elegida al azar sea daltónica.

b) **[1 p.]** Si una persona es daltónica, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) **[0,5 p.]** ¿Son independientes los sucesos "ser una persona daltónica" y "ser mujer"?

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La velocidad de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 120 km/h sigue una distribución normal de media μ km/h y desviación típica σ =10 km/h. Se sabe que el 69,15 % de los vehículos no sobrepasan la velocidad de 130 km/h.

a) **[0,75 p.]** Calcule la media de esta distribución.

b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es el porcentaje de vehículos que no sobrepasan la velocidad máxima permitida?

c) **[1 p.]** La DGT establece una multa de 100 euros a los vehículos que viajan entre 120 y 150 km/h ¿Cuál es la probabilidad de ser sancionado con dicha multa?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x-ay+z=1 \\ x+y+z=a+2 \end{cases}$ en función del parámetro a.

$a)$ Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.

$b)$ Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

$c)$ Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-a^2+1+1+a-a-1=0;\ \ 1-a^2=0 \Rightarrow a_1=-1, a_2=1.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a, es 3 si $a \neq -1$ o si $a \neq 1$. Luego para esos casos el sistema tiene igual rango, 3, para la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada, e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema tiene solución única, es compatible y determinado.

$b)$ Para $a=-1$, $M'=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene dos filas iguales por lo que su rango es 2, igual al rango de la matriz de los coeficientes y menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

Para $a=-1$ el sistema es $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$. Hacemos $z=-\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} -x+y=4-\lambda \\ x+y=1-\lambda \end{array}\right\} \to 2y=5-2\lambda \to \ \ y=\tfrac{5}{2}-\lambda;\ \left.\begin{array}{r} x-y=-4+\lambda \\ x+y=1-\lambda \end{array}\right\} \to 2x=-3 \to \ \ x=-\tfrac{3}{2}.$$

$$x=-\frac{3}{2};\ \ y=\frac{5}{2}-\lambda;\ \ z=\lambda, \forall \lambda \in R$$

$c)$ Para $a=1, M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-3+4+1+4-1-3=2 \neq 0$

Para $a=1$, luego su rango es 3, distinto del de la matriz de los coeficientes que es 2, por lo que el sistema es incompatible, no tiene solución.

Problema 2:

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su inversa.

$b)$ Resuelva la ecuación matricial $AX - B = C^t$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C.

Solución:

$a)$ Una matriz cuadrada es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Luego A es regular, tiene inversa.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$b)\ A \cdot X - B = C^t \rightarrow\ A \cdot X = C^t + B \rightarrow\ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C^t + B) \rightarrow\ X = A^{-1} \cdot (C^t + B)$

$$C^t + B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (C^t + B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 3:

En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado $a)$ para realizar el apartado $b)$, aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado $a)$.

Se quiere diseñar una lata de refresco de forma cilíndrica, con tapas inferior o superior. El material para las tapas tiene un coste de 5 euros cada cm^2 y el material para el resto del cilindro tiene un coste de 3 euros cada cm^2.

$a)$ Si denotamos por x el radio de las tapas y por y la altura de la lata, demuestre que el coste total del material necesario para construir dicha lata viene dado por la expresión $10\pi x^2 + 6\pi xy$.

$b)$ Si el volumen de la lata es $90\pi\ cm^3$, determine sus dimensiones (radio y altura) para que el coste del material sea mínimo.

Solución:

$a)$ La superficie de las tapas en cm^2 es: $S_{Tapas} = 2 \cdot \pi \cdot x^2$.

La superficie lateral en cm^2 es: $S_{Lateral} = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot y$.

$$Coste = 5 \cdot S_{Tapas} + 3 \cdot S_{Lateral} = 5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x^2 + 3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x \cdot y = 10\pi x^2 + 6\pi xy$$

Como había que demostrar.

$b)$ $V = S_{Base} \times Altura = \pi \cdot x^2 \cdot y = 90 \cdot \pi \to y = \frac{90}{x^2}$.

Sustituimos el valor obtenido de y en la expresión del coste:

$Coste = C(x) = 10\pi x^2 + 6\pi x \cdot \frac{90}{x^2} = \frac{10 \cdot \pi \cdot x^3 + 540 \cdot \pi}{x} = 10\pi \cdot \frac{x^3+54}{x}$.

La condición necesaria para que el coste sea mínimo es que se anule su primera derivada:

$C'(x) = 10\pi \cdot \frac{3x^2 \cdot x - (x^3+54) \cdot 1}{x^2} = 10\pi \cdot \frac{3x^3 - x^3 - 54}{x^2} = 10\pi \cdot \frac{2x^3-54}{x^2} = 20\pi \cdot \frac{x^3-27}{x^2}$.

$C'(x) = 0 \Rightarrow 20\pi \cdot \frac{x^3-27}{x^2} = 0;\ \ x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x = 3$.

$y = \frac{90}{x^2} = \frac{90}{3^2} = \frac{90}{9} = 10$.

El coste es mínimo con radio de 3 cm y altura de 10 cm

Veamos que se trata de un mínimo. La segunda derivada del coste tiene que ser positiva para $x = 3$:

$C''(x) = 20\pi \cdot \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3-27) \cdot 2x}{x^4} = 20\pi \cdot \frac{3x^3 - 2x^3 + 54}{x^3} = 20\pi \cdot \frac{2x^3+54}{x^3} = 40\pi \cdot \frac{x^3+27}{x^3}$.

$$C''(3) = 40\pi \cdot \frac{3^3 + 27}{3^3} = 80\pi > 0$$

En efecto es un mínimo.

Problema 4:

En este ejercicio las cuestiones $a)$ y $b)$ son totalmente independientes.

$a)$ Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

$b)$ Calcule la integral indefinida: $I=\int x^2\cdot ln(x)\cdot dx$. Determine la primitiva de la función $f(x)=x^2\cdot ln(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $P(1,0)$.

Solución:

$a)$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$$

$b)$ Integramos por partes: $u=Lx\to du=\frac{1}{x}\cdot dx;\ x^2\cdot dx=dv\to v=\frac{x^3}{3}$

$I=\int x^2\cdot ln(x)\cdot dx=Lx\cdot\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=\frac{x^3}{3}\cdot Lx-\frac{1}{3}\cdot\int x^2\cdot dx=\frac{x^3}{3}\cdot Lx-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C=\frac{x^3}{9}\cdot(3Lx-1)+C.$

Las funciones primitivas son:

$F(x)=\frac{x^3}{9}\cdot(3Lx-1)+C.$

Imponemos que pase por el punto $P(1,0)$, por lo que $F(1)=0$:

$F(1)=\frac{1^3}{9}\cdot(3\cdot L1-1)+C=0=\ \frac{1}{9}\cdot(3\cdot 0-1)+C\Rightarrow C=\frac{1}{9}.$

$$F(x)=\frac{x^3}{9}\cdot(3Lx-1)+\frac{1}{9}$$

Problema 5:

Considere los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y - z = 2$.

$a)$ Compruebe que los planos se cortan y calcule la ecuación de la recta r determinada por la intersección de ambos planos.

$b)$ Compruebe que el punto $A(3,2,1)$ no está en π_1 ni en π_2 y calcule la ecuación del plano π_3 que contiene a la recta r y pasa por el punto A.

Solución:

$a)$

Dos planos son secantes (se cortan en una recta) cuando sus vectores ortogonales son linealmente independientes.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (1,-1,1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,1,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes, por lo que los planos dados son secantes.

La recta r que determinan los planos π_1 y π_2, expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas, es:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left. \begin{matrix} x - y = -\lambda \\ x + y = 2 + \lambda \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2x = 2;\ \ x = 1 \to 1 - y = -\lambda;\ \ y = 1 + \lambda\ \Rightarrow \underline{\ \ }.$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de r son $P(1,1,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (0,1,1)$.

$b)$ Un punto pertenece a un plano cuando satisface su ecuación:

$$\left. \begin{matrix} \pi_1 \equiv x - y + z = 0 \\ A(3,2,1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow 3 - 2 + 1 \neq 0 \Rightarrow A \notin \pi_1.$$

$$\left. \begin{matrix} \pi_2 \equiv x + y - z = 2 \\ A(3,2,1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow 3 + 2 - 1 \neq 2 \Rightarrow A \notin \pi_2.$$

Los puntos $P(1,1,0)$ y $A(3,2,1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = [(3,2,1) - (1,1,0)] = (2,1,1).$

Ecuación del plano π_3:

$$\pi_3(A;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{PA}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = (x-3) + 2(y-2) - 2(z-1) - (x-3) =$$
$$2(y-2) - 2(z-1) \to (y-2) - (z-1) = 0 = \ \ y - 2 - z + 1 = 0 = y - z - 1\ \ \Rightarrow \underline{= 0}.$$

$$\pi_3 \equiv y - z - 1 = 0$$

Problema 6:

En este ejercicio las cuestiones $a)\ y\ b)$ son totalmente independientes. Considere los puntos $A(a,4,3), B(0,0,5)\ y\ C(0,3,-1)$.

$a)$ Calcule los valores de a para los cuales el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en el vértice A.

$b)$ Tomando el valor de $a=3$, determine la ecuación del plano π que pasa por los puntos A y B y es paralelo a la recta $s \equiv \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$.

Solución:

$a)$ Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, de vértice en A, para comprobar si son ortogonales:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,0,5)-(a,4,3)] = (-a,-4,2)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(0,3,-1)-(a,4,3)] = (-a,-1,-4)$.

Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 = (-a,-4,2)\cdot(-a,-1,-4) = \ a^2+4-8 = a^2-4 = 0 \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = 2$.

$$El\ triángulo\ \widehat{ABC}\ es\ rectángulo\ en\ A\ para\ a=-2\ y\ a=2$$

$b)$ Para $a=3, A(3,4,3)\ y\ \overrightarrow{AB} = (-3,-4,2)$.

Un vector director de la recta s es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (1,-1,1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2,1,0)$.

$$\overrightarrow{v_s'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2j+k+2k-i = -i+2j+3k \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (1,-2,-3).$$

Para determinar la ecuación del plano escogemos el punto $A(3,4,3)$ y los vectores de orientación del plano: $\overrightarrow{v_s} = (1,-2,-3)$ y $\overrightarrow{AB} = (-3,-4,2)$. La ecuación del plano es:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{AB}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 = -16(x-3)+7(y-4)-10(z-3)$$

$$16x-48-7y+28+10z-30 = 16x-7y+10z-50 = 0$$

$$\pi \equiv 16x-7y+10z-50=0$$

Problema 7:

Un estudio revela que el 10 % de los hombres son daltónicos y que el 1 % de las mujeres son daltónicas. Según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50.5 % de hombres y un 49.5 % de mujeres. Determine:

a) La probabilidad de que una persona elegida al azar sea daltónica.

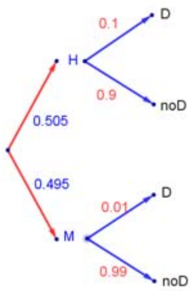
b) Si una persona es daltónica, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) ¿Son independientes los sucesos "ser una persona daltónica" y "ser mujer"?

Solución:

Llamamos H al suceso ser hombre, y M a ser mujer. Llamamos D al suceso ser daltónico.

Llevamos los datos del enunciado a un diagrama en árbol.



a) $P(D) = P(H \cap D) + P(M \cap D) = P(H) \cdot P(D/M) + P(M) \cdot P(D/M)$

$= 0.505 \cdot 0.10 + 0.495 \cdot 0.01 = 0.05050 + 0.00495 = 0.05545.$

La probabilidad de que una persona elegida al azar sea daltónica es de 0.05545

b) Es una probabilidad condicionada:

$$P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{P(M) \cdot P(D/M)}{0.05545} = \frac{0.495 \cdot 0.01}{0.05545} = \frac{0.00495}{0.05545} = 0.08927.$$

Si una persona es daltónica, la probabilidad de que sea mujeres de 0.08927.

c) Sabemos que dos sucesos D y M son independientes cuando $P(D \cap M) = P(D) \cdot P(M)$.

$P(D) \cdot P(M) = 0.05545 \cdot 0.495 = 0.02745 \neq P(D \cap M) = P(M) \cdot P(D/M) = 0.495 \cdot 0.01 = 0.00495.$

Los sucesos "ser una persona daltónica" y "ser mujer" no son sucesos independientes

Problema 8:

En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La velocidad de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 120 km/h sigue una distribución normal de media μ km/h y desviación típica $\sigma = 10$ km/h. Se sabe que el 69.15 % de los vehículos no sobrepasan la velocidad de 130 km/h.

$a)$ Calcule la media de esta distribución.

$b)$ ¿Cuál es el porcentaje de vehículos que no sobrepasan la velocidad máxima permitida?

$c)$ La DGT establece una multa de 100 euros a los vehículos que viajan entre 120 y 150 km/h. ¿Cuál es la probabilidad de ser sancionado con dicha multa?

Solución:

$a)$ El enunciado nos da los siguientes datos:

$\sigma = 10;\ \ P(X \le 130) = 69.15\ \% = 0.6915.$

Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-\mu}{10}$.

$P\left(Z \le \frac{X-\mu}{10}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{130-\mu}{10}\right) = 0.6915.$

Buscamos en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, a 0.6915 le corresponde el valor 0.500, por lo cual:

$\frac{130-\mu}{10} = 0.5;\ \ 130 - \mu = 5 \Rightarrow \mu = 125\ km/h.$

$$\mu = 125\ km/h$$

$b)$ Conocemos $\mu = 125\ km/h$ y $\sigma = 10$;

$$P(X \le 120) = P\left(Z \le \frac{120-125}{10}\right) = P\left(Z \le \frac{-5}{10}\right) = P(Z \le -0.5) = P(Z > 0.5) = 1 - P(Z \le 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085.$$

El 30.85 % de los vehículos no sobrepasa los 120 km/h.

$c)$ $P(120 \le X \le 150) = P\left(\frac{120-125}{10} \le Z \le \frac{150-125}{10}\right) = P\left(\frac{-5}{10} \le Z \le \frac{25}{10}\right) = P(-0.5 \le Z \le 2.5) = P(Z \le 2.5) - [1 - P(Z \le 0.5)] = P(Z \le 2.5) - 1 + P(Z \le 0.5) = 0.9938 - 1 + 0.6915 = 0.6853$

La probabilidad de ser sancionado es de 0.6853

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II

EBAU2021 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & az & = & 0 \\ x & + & 5y & - & az & = & a+1 \end{array}\right.$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Si se denota por $\text{tr}(A)$ la traza de la matriz A (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) y por $|A|$ el determinante de A, compruebe que, para cualquier valor de a, se cumple la ecuación $A^2 = \text{tr}(A)A - |A|I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.

b) **[0,5 p.]** Determine para qué valores de a la matriz A es regular (o inversible).

c) **[1 p.]** Para $a = -3$, resuelva la ecuación matricial $AX - A^t = A$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

3: Dada la función $f(x) = x^2e^{-x}$ definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, se pide:

a) **[1,5 p.]** Calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos) y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4: a) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int x\,\text{sen}(x^2)\,dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución).

b) **[1 p.]** Determine el menor valor de $a > 0$ para el cual se cumple $\int_0^a x\,\text{sen}(x^2)\,dx = 1$.

El examen continúa por detrás

UNIVERSIDAD DE MURCIA Región de Murcia Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2021 - **JULIO**

5: Considere las rectas de ecuaciones

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}$$

a) **[0,75 p.]** Compruebe que las rectas se cortan en un punto y calcule su punto de corte.

b) **[1 p.]** Determine el ángulo que forman las dos rectas.

c) **[0,75 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

6: Los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C se encuentra en la recta r dada por

$$r: \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del tercer vértice C sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por A y C.

b) **[1 p.]** Determine si el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en A y calcule su área.

7: Una urna contiene cinco bolas negras, numeradas del 1 al 5, y siete bolas blancas, numeradas del 1 al 7. Se saca de la urna una bola al azar. Calcule:

a) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola sea blanca.

b) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola esté numerada con un número par.

c) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola esté numerada con un número par, sabiendo que es una bola blanca.

d) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola sea blanca y esté numerada con un número par.

e) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola sea blanca, sabiendo que está numerada con un número par.

8: Juan es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Él se defiende diciendo que no es para tanto y que la tutora le tiene manía. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 9 días Juan llega tarde como mucho 2 días, la tutora le sube 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Juan llegue tarde a clase cada día es 0,45, determine:

a) **[1 p.]** El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Juan llega tarde a clase en los próximos 9 días. ¿Cuáles son sus parámetros?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que Juan consiga la ansiada subida de 1 punto en la nota final?

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II

EBAU2021 - **JULIO**

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

OBSERVACIONES GENERALES:

El corrector deberá ajustarse a los criterios de evaluación establecidos en este documento y en la reunión correspondiente. En ningún caso se podrá puntuar por encima de la valoración indicada en cada apartado. Se procurará que, en lo posible, los errores en un apartado no afecten a otros apartados.

Los errores simples de cálculo restarán entre 0,1 y 0,25 puntos. Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar puntuación 0 en ese apartado. Si un error simple ha llevado a un problema más sencillo se disminuirá la puntuación.

Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución serán valoradas con 0 puntos.

Se valorará el correcto uso del vocabulario y de la notación. El alumno puede elegir el método que considere más oportuno para la resolución de una cuestión pero, si esto demuestra la falta de comprensión de conocimientos básicos, la puntuación final puede ser menor que la indicada para dicha cuestión.

OBSERVACIONES PARTICULARES:

CUESTIÓN 1: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene solución única (SCD) para todo valor de a distinto de 3 y de -1 **[0,75 p.]**.
Apartado b) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene infinitas soluciones (SCI) cuando $a=-1$ **[0,5 p.]**. Cálculo correcto de dicha solución dependiente de un parámetro **[0,5 p.]**.
Apartado c) Justificación correcta y razonada de que el sistema no tiene solución (SI) cuando $a=3$ **[0,75 p.]**.

CUESTIÓN 2: [2,5 p.]
Apartado a) Comprobación correcta y razonada de que A cumple la ecuación $A^2=\mathrm{tr}(A)A-|A|I$ para todo valor de a **[1 p.]**.
Apartado b) Justificación de que A es una matriz regular si $a\neq -4$ **[0,5 p.]**.
Apartado c) Expresión correcta de X en términos A, A^{-1} y de A^t **[0,5 p.]**. Cálculo correcto de la solución numérica **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 3: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto de la derivada de la función $f(x)$ **[0,25 p.]**. Cálculo correcto de los dos puntos críticos de la función (y candidatos a ser extremos) $x=0$ y $x=2$ **[0,25 p.]**. Justificación de que la función alcanza un mínimo relativo en $x=0$ **[0,25 p.]** y un máximo relativo en $x=2$ **[0,25 p.]**. Justificación de que la función es decreciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ **[0,25 p.]** y creciente en $(0,2)$ **[0,25 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto y justificado del límite cuando x tiende a $-\infty$ **[0,25 p.]**. Cálculo correcto y justificado del límite cuando x tiende a $+\infty$, resolviendo la indeterminación $\infty\cdot 0$ **[0,75 p.]**.

UNIVERSIDAD DE MURCIA · Región de Murcia · Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2021 - **JULIO**

CUESTIÓN 4: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida **[1,5 p.]**.
Apartado b) Determinación correcta del valor $a=\sqrt{\pi}$ para que la integral definida tenga el valor 1 **[1 p.]**.

CUESTIÓN 5: [2,5 p.]
Apartado a) Comprobación correcta de que las dos rectas se cortan en una punto y cálculo del punto de corte **[0,75 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto del ángulo de corte **[1 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto de la ecuación del plano pedido **[0,75 p.]**.

CUESTIÓN 6: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y razonado de las coordenadas del vértice C **[1,5 p.]**.
Apartado b) Justificación correcta y razonada de que el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en A **[0,5 p.]**.
Cálculo correcto del área del triángulo **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 7: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[0,5 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[0,5 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[0,5 p.]**.
Apartado d) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[0,5 p.]**.
Apartado e) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 8: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación de que se trata de una distribución binomial de parámetros $n=9$ y $p=0,45$ **[1 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto de la media **[0,25 p.]** y de la desviación típica **[0,25 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto de la probabilidad pedida **[1 p.]**.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+ay-z=0 \\ 2x+y+az=0 \\ x+5y-az=a+1 \end{cases}$ en función del parámetro a.

a) Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.

b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 5 & -a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 1 & 5 & -a & a+1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 5 & -a \end{vmatrix}=-a-10+a^2+1-5a+2a^2=3a^2-6a-9=0;$$

$a^2-2a-3=0;\ \ a=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm4}{2}=1\pm2 \Rightarrow a_1=-1, a_2=3.$

El sistema tiene solución única cuando es compatible y determinado, es decir, si: $\begin{Bmatrix} a\neq-1 \\ a\neq3 \end{Bmatrix}$ pues $Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.$

El sistema tiene solución única si: $\begin{Bmatrix} a\neq-1 \\ a\neq3 \end{Bmatrix}$

b) Para $a=-1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+5y+z=0 \end{array}\right\}$, que es homogéneo y también

$Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg.$ Por lo que es compatible indeterminado. Para su resolución se desprecia una ecuación, por ejemplo, la tercera, y se parametriza, por ejemplo, $z=3\lambda$;

$$\left.\begin{array}{r} x-y=\lambda \\ 2x+y=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=6\lambda;\ \ x=2\lambda.\ \ y=x-\lambda=2\lambda-3\lambda=-\lambda.$$

$$x=2\lambda;\ \ y=-\lambda;\ \ z=3\lambda, \forall\lambda\in R$$

c) $Para\ a=3 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}=4-24\neq0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$

$$Para\ a=3 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible$$

Problema 2:

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$a)$ Si se denota por $tr(A)$ la traza de la matriz A (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) y por $|A|$ el determinante de A, compruebe que, para cualquier valor de a, se cumple la ecuación $A^2 = tr(A) \cdot A - |A| \cdot I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.

$b)$ Determine para qué valores de a la matriz A es regular (o inversible).

$c)$ Para $a = -3$, resuelva la ecuación matricial $AX - A^t = A$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución:

$a)\ A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & 4a \\ -4 & 4-a \end{pmatrix}$.

$$tr(A) \cdot A - |A| \cdot I = (2+2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4a \\ -4 & 8 \end{pmatrix} - (4+a) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4a \\ -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+a & 0 \\ 0 & 4+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & 4a \\ -4 & 4-a \end{pmatrix}$$

$$\forall a \in R \ es\ A^2 = tr(A) \cdot A - |A| \cdot I$$

$b)$ Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4.$

No es invertible si $a = -4$

$$A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{-4\}.$$

$c)\ AX - A^t = A \to AX = A + A^t \to\ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A + A^t) \to I \cdot X = A^{-1} \cdot (A + A^t) \Rightarrow$

$$X = A^{-1} \cdot (A + A^t)$$

Para $a = -3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};\ A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};\ A + A^t = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.\ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\ A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1} \cdot (A + A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3:

Dada la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ definida para todo valor real de $x \in R$, se pide:

$a)$ Calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos) y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$b)$ Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R por ser producto de dos funciones continuas en toda la recta real, una función exponencial y una función polinómica.

Una función es creciente o decreciente en un punto en que exista la derivada, cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x) = 0;\ \ e^{-x} > 0, \forall x \in R \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Por ser $f(x)$ continua en R, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, 0), (0, 2)\ y\ (2, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 2)$ es: $f'(1) = 1 \cdot e^{-1} \cdot (2 - 1) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow Creciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow Creciente\ si\ x \in (0, 2)$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow Decreciente\ si\ x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty).$$

Los posibles máximos y mínimos relativos son los puntos de abscisa $x_1 = 0, x_2 = 2$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x) = e^{-x} \cdot (2x - x^2) \to f''(x) = -e^{-x} \cdot (2x - x^2) + e^{-x} \cdot (2 - 2x) = e^{-x} \cdot (-2x + x^2 + 2 - 2x) = e^{-x} \cdot (x^2 - 4x + 2).$

$f''(0) = e^{-0} \cdot (0^2 - 4 \cdot 0 + 2) = 2 > 0; f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0 \Rightarrow Mín. O(0, 0)$

$f''(2) = e^{-2} \cdot (2^2 - 4 \cdot 2 + 2) = \frac{-2}{e^2} < 0;\ f(2) = 2^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \Rightarrow Máx. A\left(2, \frac{4}{e^2}\right).$

$$Mín. O(0, 0);\ Máx. A\left(2, \frac{4}{e^2}\right).$$

$b)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 \cdot e^{-x}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{(-\infty)^2}{e^{-\infty}} = \frac{\infty}{0} = +\infty.$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 \cdot e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty^2}{e^\infty};\ Ind. \Rightarrow$ Aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces:

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{2\cdot\infty}{e^\infty}; Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^\infty} = \frac{2}{\infty} = 0.$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Problema 4:

$a)$ Calcule la integral indefinida $I = \int x \cdot sen\,(x^2) \cdot dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución).

$b)$ Determine el menor valor de $a > 0$ para el cual se cumple $\int_0^a x \cdot sen^2 x \cdot dx = 1$.

Solución:

$a)$ Hacemos el cambio de variable: $\left\{ \begin{matrix} x^2 = t \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{matrix} \right\}$

$I = \int x \cdot sen\,(x^2) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int sen\, t \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \cos t + C = -\frac{1}{2} \cdot \cos\,(x^2) + C$

$$I = \int x \cdot sen\,(x^2) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos\,(x^2) + C$$

$b)$ $\int_0^a xsen^2 x \cdot dx = 1 = \left[-\frac{1}{2}\cos\,(x^2)\right]_0^a = \; -\frac{1}{2} \cdot \cos\,(a^2) + \frac{1}{2} \cdot \cos 0 = -\frac{1}{2} \cdot \cos\,(a^2) + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1;$

$-\cos\,(a^2) + 1 = 2;\;\; \cos\,(a^2) = -1 \Rightarrow a^2 = k\pi \Rightarrow a = \pm\sqrt{k\pi}, k \in N.$

Por ser a el menor valor tal que $a > 0 \Rightarrow k = 1$.

$$a = +\sqrt{\pi}$$

Problema 5:

Considere las rectas $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$.

$a)$ Compruebe que las rectas se cortan en un punto y calcule su punto de corte.

$b)$ Determine el ángulo que forman las dos rectas.

$c)$ Calcule la ecuación del plano π que contiene a las dos rectas.

Solución:

$a)$ Escribimos las ecuaciones paramétricas de las dos rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(1, 0, 1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, -1)$

$$s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \mu \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 1 - \mu \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta s son $B(-1, 0, 1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2, 1, -1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan.

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$:

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-1, 0, 1) - (1, 0, 1)] = (-2, 0, 0).$$

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente. Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} < 3 \ \Rightarrow \ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ son\ coplanarios.$$

$$Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ en\ un\ punto$$

Como $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$, buscamos el punto sustituyendo:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 1 + \lambda - 2\lambda = -1 \\ \lambda + 1 - \lambda = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 2 = \lambda \\ 1 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \to P(3, 2, -1)$$

$$P(3, 2, -1)$$

$b)$ El ángulo que forman las dos rectas es el que forman sus vectores directores.

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = |\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_s}| \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_s}|} = \frac{|(1, 1, -1) \cdot (2, 1, -1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{18}} = 0.9428$$

$$\beta = 19° \ \ 28' \ 16'$$

$$c)\ \pi(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s};\ A) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to 0(x - 1) - y - (z - 1) = \ -y - (z - 1) = 0$$

$$\pi \equiv y + z - 1 = 0$$

Problema 6:

Los puntos $A(2,0,0)$ y $B(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice, C, se encuentra en la recta $r \equiv \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$.

$a)$ Calcule las coordenadas del tercer vértice C sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por A y C.

$b)$ Determine si el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en A y calcule su área.

Solución:

$a)$ Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-1,12,4)-(2,0,0)] = (-3,12,4).$

Escribimos la expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x=3\mu;\ \ 12\mu+3z=33 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=3\mu \\ y=0 \\ z=11-4\mu \end{cases}.$$

Por tanto, un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (3,0,-4)$ y un punto C genérico de la recta tiene como expresión general, dependiendo del parámetro μ: $C(3\mu, 0, 11-4\mu)$.

Nos dicen que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por A y C, por lo que: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(3\mu,0,11-4\mu)-(2,0,0)] = (3\mu-2,0,11-4\mu).$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 = (3\mu-2,0,11-4\mu)\cdot(3,0,-4) = 9\mu-6-44+16\mu = 25\mu-50=0;\ \ \mu=2 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{C(6,0,3)}$$

$b)$ Calculamos sabiendo que $\mu = 2$

$\overrightarrow{AC} = (3\mu-2,0,11-4\mu) = (4,0,3).$

Para que el triángulo $\widehat{ABC}$ sea rectángulo en A debe anularse el producto escalar: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$:

$$(-3,12,4)\cdot(4,0,3) = -12+12 = 0 \Rightarrow$$

$$El\ triángulo\ es\ rectángulo\ en\ A$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-3)^2+12^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+0^2+3^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{9+144+16}\cdot\sqrt{16+9} =$$
$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{169}\cdot\sqrt{25} = \frac{1}{2}\cdot 13\cdot 5 = \frac{65}{2}\ u^2 = 32.5\ u^2.$$

$$Área = \boldsymbol{\frac{65}{2}\ u^2 = 32.5\ u^2}$$

Problema 7:

Una urna contiene cinco bolas negras numeradas del 1 al 5, y siete bolas blancas, numeradas del 1 al 7. Se saca de la urna una bola al azar. Calcule:

a) La probabilidad de que la bola sea blanca.

b) La probabilidad de que la bola esté numerada con un número par.

c) La probabilidad de que la bola esté numerada con un número par, sabiendo que es blanca.

d) La probabilidad de que la bola sea blanca y esté numerada con número par.

e) La probabilidad de que la bola sea blanca, sabiendo que está numerada con un número par.

Solución:

Para la resolución de este ejercicio se utiliza la regla de Laplace.

a) P(blanca) = 7/12 = 0.5833

b) P(par) = (2 + 3)/12 = 5/12 = 0.4167

$c)\ P(par/blanca) = \frac{P(par \cap blanca)}{P(blanca)} = \frac{\frac{3}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7} = 0.4286.$

$d)\ P(par \cap blanca) = \frac{3}{12} = 0.25$

$e)\ P(blanca/par) = \frac{P(blanca \cap par)}{P(par)} = \frac{\frac{3}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5} = 0.6.$

Problema 8:

Juan es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Él se defiende diciendo que no es para tanto y que la tutora le tiene manía. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 9 días Juan llega tarde como mucho 2 días, la tutora le sube 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Juan llegue tarde a clase cada día es 0.45, determine:

$a)$ El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Juan llega tarde a clase en los próximos 9 días. ¿Cuáles son sus parámetros?

$b)$ ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

$c)$¿Cuál es la probabilidad de que Juan consiga la ansiada subida de 1 punto en la nota final?

Solución:

$a)$ Es una distribución binomial, ya que o llega tarde o no llega tarde, con los siguientes parámetros:

$$p = 0.45;\ \ q = 1 - p = 0.55;\ \ n = 9$$

$b)$ $\mu = n \cdot p = 9 \cdot 0.45 = 40.5.$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{9 \cdot 0.45 \cdot 0.55} = \sqrt{2.2275} = 1.49.$$

$$\mu = 40.5;\ \sigma = 1.49.$$

$c)$ $P = P(0) + P(1) + P(2) = \binom{9}{0} \cdot 0.45^0 \cdot 0.55^9 + \binom{9}{1} \cdot 0.45^1 \cdot 0.55^8 + \binom{9}{2} \cdot 0.45^2 \cdot 0.55^7 =$

$= 1 \cdot 1 \cdot 0.0046 + 9 \cdot 0.45 \cdot 0.0084 + \frac{9\,!}{7\,!\cdot 2\,!} \cdot 0.2025 \cdot 0.0152 =$

$= 0.0046 + 0.0339 + 36 \cdot 0.0031 = 0.0046 + 0.0339 + 0.1110 = 0.1495.$

La probabilidad de que Juan consiga la ansiada subida de 1 punto en la nota final es de $\mathbf{0.1495}$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2020-2021
ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS II**

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a-1)x - y = 3 \\ (a-1)x + (a+1)y - (2-a)z = -2a \\ (-2a+2)x - ay + (a^2-a-2)z = 3a-1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A^3| = 8$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Encuentra la ecuación general del plano π que es paralelo a las rectas

$$r = \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{1}$$

y equidista de ambas.

(2.5 puntos)

P4) Un lado de un paralelogramo está sobre la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Otro lado lo determinan los puntos $A(-1,-2,3)$ y $B(2,-2,-1)$. Calcula los otros dos vértices del paralelogramo sabiendo que su perímetro mide $16\ u$.

(2.5 puntos)

P5) Sea la función $f(x) = (x^2 - 3x + 10)^{\log\left[2^{x-1}\cdot\sin\frac{\pi(x+2)}{6}\right]}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

(1.25 puntos)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \dfrac{3}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.25 puntos)

P6) Calcula las asíntotas de esta función y estudia la posición de la curva respecto a ellas:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4}$$

(2.5 puntos)

P7) Sea la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{5x - 2 - x\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2 - 4x + 6}\right)$.

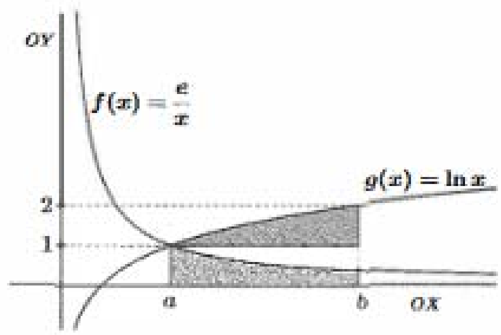
a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = 3/2\ \ln 2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P8) Calcula los valores de las abcisas a y b que aparecen en el gráfico, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales:



(2.5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Estudia el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$$\begin{cases}(a-1)x-y=3\\(a-1)x+(a+1)y-(2-a)z=-2a\\(-2a+2)x-ay+(a^2-a-2)z=3a-1\end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}a-1 & -1 & 0\\ a-1 & a+1 & a-2\\ -2a+2 & -a & a^2-a-2\end{pmatrix}\ y$$

$$M'=\begin{pmatrix}a-1 & -1 & 0 & 3\\ a-1 & a+1 & a-2 & -2a\\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 & 3a-1\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente, teniendo en cuenta que $a^2-a-2=(a+1)(a-2)$:

$$|M|=\begin{vmatrix}a-1 & -1 & 0\\ a-1 & a+1 & a-2\\ -2(a-1) & -a & (a+1)(a-2)\end{vmatrix}=$$

$$=(a-1)(a-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & a+1 & 1\\ -2 & -a & a+1\end{vmatrix}=$$

$$=(a-1)(a-2)\cdot[(a+1)^2+2+a+(a+1)]=$$

$$=(a-1)(a-2)\cdot(a^2+2a+1+3+2a)=(a-1)(a-2)\cdot(a^2+4a+4)=$$

$$(a-1)(a-2)\cdot(a+2)^2=0\Rightarrow a_1=1, a_2=2, a_3=a_4=-2.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$Para\ \begin{Bmatrix}a\neq 1\\ a\neq 2\\ a\neq -2\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.$$

$$Para\ a=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & -1 & -2\\ 0 & -1 & -2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow \{C_2,C_3,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & -2 & 2\end{vmatrix}=2-12-3+4=-11\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ a=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 0 & -4\\ -2 & -2 & 0 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow \{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 6 - 8 + 18 - 8 + 5 = 16 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a = 1 \\ a = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & -4 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = -F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = -2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq 1\ y\ a \neq 2$:

$$\begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ a-1 & a+1 & a-2 & -2a \\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 & 3a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & -a-2 & a^2-a-2 & 3a+5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow F_3 \to \frac{F_3}{a+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (a-2)z = 1;\ \ z = \frac{1}{a-2}.$$

$$(a+2)y + (a-2)z = -2a - 3;\ \ (a+2)y + (a-2) \cdot \frac{1}{a-2} = -2a - 3;$$

$$(a+2)y + 1 = -2a - 3;\ \ (a+2)y = -2a - 4 = -2(a+2) \Rightarrow y = -2 \qquad .$$

$$(a-1)x - y = 3;\ \ (a-1)x + 2 = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{a-1}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{1}{a-1}, y = -2, z = \frac{1}{a-2}, \forall a \in R - \{-2, 1, 2\}.}$$

Resolvemos ahora para $a = -2$. El sistema resulta $\left.\begin{matrix} -3x - y = 3 \\ -3x - y - 4z = 4 \\ 6x + 2y + 4z = -7 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación, por ejemplo, la tercera, y haciendo $x = \lambda$:

$y = -3 - 3\lambda$. Restando a la segunda ecuación la primera: $-4z = 1 \Rightarrow z = -\frac{1}{4}$.

$$\underline{Solución: x = \lambda, y = -3 - 3\lambda, z = -\frac{1}{4}, \forall \lambda \in R.}$$

****

Problema 2:

Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A^3| = 8$, siendo $A = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix}$.

Solución:

$|A^3| = 8 \Rightarrow |A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = (|A|)^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow |A| = 2.$

$\begin{vmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{vmatrix} = 2;\ \begin{vmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t(t-1) & t(t+2) & t \\ -(t-1) & -1-t & -2 \end{vmatrix} = 2;$

$(t-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ t & t^2+2t & t \\ -1 & -1-t & -2 \end{vmatrix} = 2.$ (*)

El valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ t & t^2+2t & t \\ -1 & -1-t & -2 \end{vmatrix}$ es el siguiente:

$-2(t^2+2t) - 3t(1+t) - t(t+1) + 3(t^2+2t) + t(1+t) + 2t(1+t) =$

$= (t^2+2t) - t(1+t) = t^2 + 2t - t - t^2 = t.$

Sustituyendo en (*) teniendo en cuanta el valor del determinante:

$(t-1) \cdot t = 2;\ \ t^2 - t - 2 = 0;\ \ t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow$

$\underline{t_1 = -2, t_2 = 2.}$

****

Problema 3:

Encuentra la ecuación general del plano π que es paralelo a las rectas de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{1}$ y equidista de ambas.

Solución:

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases} \Rightarrow y=\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+z=-3-2\lambda \\ x-z=7-6\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x = 4-8\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2-4\lambda;\quad \left.\begin{matrix} x+z=-3-2\lambda \\ -x+z=-7+6\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2z=-10+4\lambda:\ z=-5+2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2-4\lambda \\ y=\lambda \\ z=-5+2\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $P(2,0,-5)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-4,1,2)$.

Un punto y un vector director de s son $Q(3,-2,-2)$ y $\overrightarrow{v_s} = (3,3,1)$.

El vector normal del plano π es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas, por lo cual, es linealmente dependiente del producto vectorial de sus vectores directores:

$$\vec{n} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = i+6j-12k-3k-6i+4j =$$

$$= -5i+10j-15k \Rightarrow \vec{n} = (1,-2,3).$$

El plano π es de la forma $\pi \equiv x-2y+3z+D=0$.

Por ser paralelo el plano a las rectas, la distancia del plano a cada una de las rectas es equivalente a la distancia del plano a cualquier punto de las rectas.

Teniendo en cuente lo anterior y por ser equidistante de las rectas se cumple que:

$$\left.\begin{matrix} d(\pi,r) = d(\pi,P) \\ d(\pi,s) = d(\pi,Q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(\pi,r) = d(\pi,s) \Rightarrow d(\pi,P) = d(\pi,Q).$$

La distancia del punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al plano $Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv x-2y+3z+D=0$ y a los puntos $P(2,0,-5)$ y $Q(3,-2,-2)$:

$$d(\pi,P) = \frac{|1\cdot 2-2\cdot 0+3\cdot(-5)+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{|2-0-15+D|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|-13+D|}{\sqrt{14}}.$$

$$d(\pi,Q) = \frac{|1\cdot 3-2\cdot(-2)+3\cdot(-2)+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{|3+4-6+D|}{\sqrt{14}} = \frac{|1+D|}{\sqrt{14}}.$$

$$d(\pi,P) = d(\pi,Q) \Rightarrow \frac{|-13+D|}{\sqrt{14}} = \frac{|1+D|}{\sqrt{14}};\quad |-13+D| = |1+D| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -13+D=1+D \\ -13+D=-1-D \end{matrix}\right\}$. La solución de la primera ecuación carece de sentido lógico, por lo cual:

$$-13+D=-1-D;\quad 2D=12 \Rightarrow D=6.$$

$$\underline{\pi \equiv x-2y+3z+6=0}.$$

****

Problema 4:

Un lado de un paralelogramo está sobre la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Otro lado lo determinan los puntos $A(-1,-2,3)\ y\ B(2,-2,-1)$. Calcula los otros dos vértices del paralelogramo sabiendo que su perímetro mide 16 unidades.

Solución:

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2,1,-2)$.

Los puntos $A(-1,-2,3)\ y\ B(2,-2,-1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2,-2,-1) - (-1,-2,3)] = (3,0,-4)$.

La longitud del lado $\overline{AB}$ es la siguiente:

$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5\ unidades$.

Como el perímetro del paralelogramo es de 16 unidades, la longitud del lado $\overline{BC}$ es la siguiente:

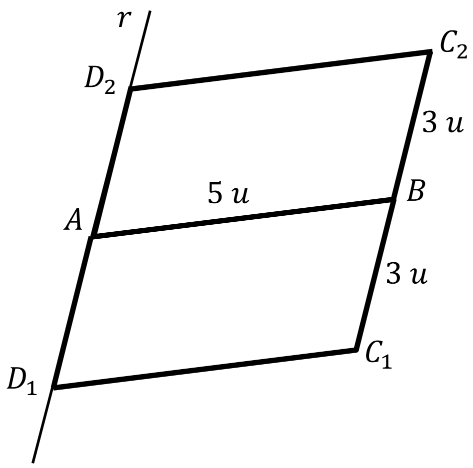
$16 = 2 \cdot (5 + \overline{BC});\ \ 8 = 5 + \overline{BC} \Rightarrow \overline{BC} = 3\ unidades$.

Se comprueba a continuación si alguno de los puntos, A o B, pertenecen a la recta r:

$$\left.\begin{array}{c} r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2} \\ A(-1,-2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1-1}{-2} = \frac{-2+1}{-1} = \frac{3-1}{2} \Rightarrow A \in R.$$

Evidentemente, el punto $B \notin r$, por ser linealmente independientes los vectores $\overrightarrow{v_r} = (2,1,-2)$ y $\overrightarrow{AB} = (3,0,-4)$.

La situación, aproximada, es la que indica el gráfico adjunto.



La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de la recta r es el siguiente: $D(1-2\lambda, -1-\lambda, 1+2\lambda)$.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(1-2\lambda, -1-\lambda, 1+2\lambda) - (-1,-2,3)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = (2-2\lambda, 1-\lambda, -2+2\lambda)$.

$\overline{AD} = |\overrightarrow{AD}| = 3\,u \Rightarrow \sqrt{(2-2\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 + (-2+2\lambda)^2} \Rightarrow$

$3^2 = 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 - 8\lambda + 4\lambda^2;\ \ 9 = 9\lambda^2 - 18\lambda + 9;$

$9\lambda^2 - 18\lambda = 0;\ \ \lambda^2 - 2\lambda = 0;\ \ \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_1 = 2.$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow D_1(1, -1, 1)$. $\qquad \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BC_1}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{OD_1} - \overrightarrow{OA} = [(1,-1,1) - (-1,-2,3)] = (2,1,-2) \\ \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OB} = [(x,y,z) - (2,-2,-1)] = (x-2, y+2, z+1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2,1,-2) = (x-2, y+2, z+1) \Rightarrow \begin{cases} x-2=2 \rightarrow x=4 \\ y+2=1 \rightarrow y=-1 \\ z+1=-2 \rightarrow z=-3 \end{cases} \Rightarrow C_1(4\,,-1\,,-3).$$

$$\textit{Primera solución}: \underline{C_1(4\,,-1\,,-3)\ y\ D_1(1,-1\,,1)}.$$

$\lambda_2 = 2 \Rightarrow D_2(-3\,,-3\,,5).$ $\qquad \overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{BC_2}.$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{OD_2} - \overrightarrow{OA} = [(-3\,,-3\,,5) - (-1,-2,3)] = (-2,-1,2) \\ \overrightarrow{BC_2} = \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OB} = [(x,y,z) - (2,-2,-1)] = (x-2, y+2, z+1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2,-1,2) = (x-2, y+2, z+1) \Rightarrow \begin{cases} x-2=-2 \rightarrow x=0 \\ y+2=-1 \rightarrow y=-3 \\ z+1=2 \rightarrow z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_2(0\,,-3\,,1).$

$$\textit{Segunda solución}: \underline{C_2(0,-3,1)\ y\ D_2(-3\,,-3\,,5)}.$$

****

Problema 5:

Sea la función $f(x) = (x^2 - 3x + 10)^{\log\left[2^{x-1} \cdot sen\, \frac{\pi(x+2)}{6}\right]}$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

$b)$ Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

$a)$

La función $f(x)$ es la expresión de la potencia de dos funciones de la forma: $f(x) = g(x)^{h(x)}$. Para que $f(x)$ sea continua en $[1, 3]$ tienen que serlo $f(x)$ y $g(x)$.

La función $g(x) = x^2 - 3x + 10$ es continua en R, por lo cual lo será en cualquier intervalo finito que se considere.

La función $h(x)$ es logarítmica y, por ello, continua en $[0, \infty)$.

Siendo $h(x) = m(x) \cdot n(x)$, con $m(x) = 2^{x-1}\ y\ n(x) = sen\, \frac{\pi(x+2)}{6}$, para que sea $h(x)$ estrictamente positiva es necesario que $m(x)\ y\ n(x)$ sean estrictamente positivas o estrictamente negativas.

$m(x) = 2^{x-1} > 0, \forall x \in R$.

Estudiamos ahora el signo de la función $n(x) = sen\, \frac{\pi(x+2)}{6}$ en el intervalo $[1, 3]$, para lo cual se estudia su signo en los puntos $x = 1, 2\ y\ 3$:

$n(1) = sen\, \frac{\pi(1+2)}{6} = sen\, \frac{3\pi}{6} = sen\, \frac{\pi}{2} = 1 > 0.$

$n(2) = sen\, \frac{\pi(2+2)}{6} = sen\, \frac{4\pi}{6} = sen\, \frac{2\pi}{3} = sen\, 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$

$n(3) = sen\, \frac{\pi(3+2)}{6} = sen\, \frac{5\pi}{6} = sen\, 150° = sen\, 30° = \frac{1}{2} > 0.$

Como quiera que en el intervalo $[1, 3]$ es $m(x) > 0\ y\ n(x) > 0$:

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ f(x)\ es\ continua\ en\ [1, 3].}$

$b)$

Para demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$ se tiene en cuenta que la función $f(x)$ es continua en $[1, 3]$, como se demostró en el apartado anterior.

Teniendo en cuanta el teorema de los valores intermedios o desigualdad de Darboux, que dice que, "si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)\ y\ f(b)$ al menos una vez".

$f(1) = (1^2 - 3 \cdot 1 + 10)^{\log\left[2^{1-1} \cdot sen\, \frac{\pi(1+2)}{6}\right]} = 8^{\log\left(2^0 \cdot sen\, \frac{\pi}{2}\right)} = 8^{\log(1 \cdot 1)} =$

$= 8^{\log 1} = 8^0 = 1.$

$$f(3) = (3^2 - 3 \cdot 3 + 10)^{\log\left[2^{3-1} \cdot sen\, \frac{\pi(3+2)}{6}\right]} = 10^{\log\left(2^2 \cdot sen\, \frac{5\pi}{6}\right)} =$$

$$= 10^{\log(4 \cdot sen\, 150°)} = 10^{\log(4 \cdot sen\, 30°)} = 10^{\log\left(4 \cdot \frac{1}{2}\right)} = 10^{\log 2} = 2.$$

$1 < \frac{3}{2} < 2 \Rightarrow$

$$\underline{Existe\ al\ menos\ un\ \alpha \in (1, 3)\ tal\ que\ \ f(\alpha) = \frac{3}{2}, c.q.d.}$$

También se puede resolver este apartado de la forma siguiente:

Demostrar que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$ es equivalente a demostrar que la función $g(x) = f(x) - \frac{3}{2}$ tiene una raíz real en el intervalo $[0, 1]$.

$$g(x) = (x^2 - 3x + 10)^{\log\left[2^{x-1} \cdot sen\, \frac{\pi(x+2)}{6}\right]} - \frac{3}{2}.$$

El teorema de Bolzano dice que “si $g(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$”.

A la función $g(x)$ le es aplicable el teorema de Bolzano en el intervalo $[1, 3]$:

$g(1) = f(1) - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} < 0.$ $\qquad$ $g(3) = f(3) - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0.$

Lo anterior demuestra que $g(x)$ tiene al menos una raíz real en $[1, 3]$ y también los pedido, o sea, que:

$$\underline{Existe\ al\ menos\ un\ \alpha \in (1, 3)\ tal\ que\ \ f(\alpha) = \frac{3}{2}, c.q.d.}$$

****

Problema 6:

Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3-4x-1}{x^2-4}$ y estudia la posición de la curva respecto de ellas.

Solución:

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-4x-1}{x^2-4} = \pm\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$

$$\underline{Las\ rectas\ x = -2\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{-8+8-1}{0^-\cdot(-4)} = \frac{-1}{0^+} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty}.$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{-8+8-1}{0^+\cdot(-4)} = \frac{-1}{0^-} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty}.$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{8-8-1}{4\cdot0^-} = \frac{-1}{0^-} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty}.$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{8-8-1}{4\cdot0^+} = \frac{-1}{0^+} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3-4x-1}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4x-1}{x^3-4x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-4x-1}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4x-1-x^3+4}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+3}{x^2-4} = 0.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y = x}.$$

****

Problema 7:

Sea la función $f(x) = L\frac{5x-2-x\cdot sen\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,3]$.

$b)$ Demuestra que exista $a \in (1,3)$ tal que $f'(a) = \frac{3}{2}\cdot L2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

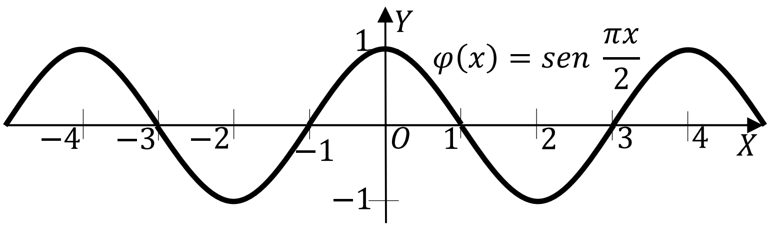
$a)$

Por ser $f(x)$ una función logarítmica es necesario que en el intervalo $[1,3]$ sea positiva la expresión $\frac{5x-2-x\cdot sen\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}$, para lo cual tienen que ser positivas en el mismo intervalo las funciones $g(x) = 5x - 2 - x\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}$ y $h(x) = x^2 - 4x + 6$.

La función $g(x) = 5x - 2 - x\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}$ es continua en R por ser suma, resta o producto de funciones continuas en R y la función $h(x) = x^2 - 4x + 6$ es continua en R por ser polinómica, por lo cual, ambas funciones son continuas en cualquier intervalo finito que se considere, en particular, en el intervalo $[1,3]$.

Para estudiar el signo de la función $g(x) = 5x - 2 - x\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}$ en el intervalo $[1,3]$ se estudia, en particular, el valor de $sen\,\frac{\pi x}{2}$.

La función $\varphi(x) = sen\,\frac{\pi x}{2} < 0$ en $(1,3)$, como se observa en la representación gráfica, aproximada de $\varphi(x)$, que es la figura adjunta.



Siendo $sen\,\frac{\pi x}{2} < 0$ en $(1,3)$, la función $g(x) = 5x - 2 - x\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}$ es estrictamente positiva.

Se estudia ahora la función $f(x)$.

$x^2 - 4x + 6 = 0;\ \ x = \frac{4\pm\sqrt{16-24}}{2} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow x^2 - 4x + 6 > 0, \forall x \in R,$ lo que significa que $h(x) = x^2 - 4x + 6 > 0, \forall x \in R$.

<u>*Lo anterior demuestra que $f(x)$ es continua en* $[1,3]$</u>.

$b)$

El teorema del valor medio o de Lagrange dice que "si una función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a, b), entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

Aplicando el teorema de Lagrange a la función $f(x) = L\frac{5x-2-x\cdot sen\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}$ en el intervalo $[1, 3]$:

$f(3) = L\frac{5\cdot 3-2-3\cdot sen\frac{3\pi}{2}}{3^2-4\cdot 3+6} = L\frac{15-2-3\cdot(-1)}{9-12+6} = L\frac{16}{3} = L16 - L3.$

$f(1) = L\frac{5\cdot 1-2-1\cdot sen\frac{\pi}{2}}{1^2-4\cdot 1+6} = L\frac{5-2-1\cdot 1}{9-12+6} = L\frac{2}{3} = L2 - L3.$

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{L16-L3-(L2-L3)}{2} = \frac{L16-L3-L2+L3}{2} =$

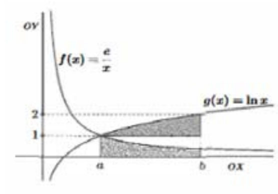
$= \frac{L16-L2}{2} = \frac{L2^4-L2}{2} = \frac{4\cdot L2-L2}{2} = \frac{3L2}{2}.$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ \exists a \in (1, 3)\ tal\ que\ f'(a) = \frac{3}{2}\cdot L2.}$

****

Problema 8:

Calcula los valores de las abscisas $a\ y\ b$ que aparecen en el gráfico adjunto, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreados son iguales.



Solución:

El valor de a se obtiene haciendo: $g(a) = La = 1 \Rightarrow \underline{a = e}$.

El valor de b se obtiene haciendo: $g(b) = Lb = 2 \Rightarrow \underline{b = e^2}$.

$$S_1 = \int_a^b [g(x) - 1]\, dx = \int_e^{e^2} (Lx - 1) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = Lx - 1 \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dx = dv \rightarrow v = x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[(Lx - 1) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \right]_e^{e^2} = \left[x(Lx - 1) - \int dx \right]_e^{e^2} = \left[x(Lx - 1) - x \right]_e^{e^2} =$$

$$= [xLx - x - x]_e^{e^2} = [xLx - 2x]_e^{e^2} = (e^2 \cdot Le^2 - 2e^2) - (eLe - 2e) =$$

$$= e^2 \cdot 2Le - 2e^2 - e + 2e = 2e^2 - 2e^2 + e \Rightarrow \underline{S_1 = e\, u^2}.$$

$$S_2 = \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_e^{e^2} \frac{e}{x} \cdot dx = [eLx]_e^{e^2} = e \cdot Le^2 - e \cdot Le = e \cdot 2Le - e =$$

$$= 2e - e \Rightarrow \underline{S_2 = e\, u^2}.$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ S_1 = S_2}.$

****

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
Curso: 2020-2021
Asignatura: MATEMÁTICAS II

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} ax + (a-2)y = a-2 \\ ax + (a^2-2a)y + 2z = a \\ 3ax + (a^2-4)y + z = 4a-4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores de t para que se cumpla $|A \cdot B^{-1}| = 1$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Calcula la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2}$$

(2.5 puntos)

P4) Halla un plano que sea tangente a la esfera de radio 3 y centro $(0,0,0)$, y que corte perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2}$$

Encuentra el punto de tangencia del plano con la esfera, y calcula la ecuación continua de la recta que pasa por ese punto y corta perpendicularmente a r.

(2.5 puntos)

P5) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}$$

(1.25 puntos)

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x}$$

(1.25 puntos)

P6) Se considera la función $f(x)=\log_2\left[\sin\frac{\pi(x+1)}{4}+2^{\frac{x-7}{2}}\right]$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[6,7]$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha\in(6,7)$ tal que $f(\alpha)=0$. Enuncia el/los resulatdo(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P7) Se considera la función $f(x)=\sqrt{x+\sin\frac{\pi x}{2}}$.

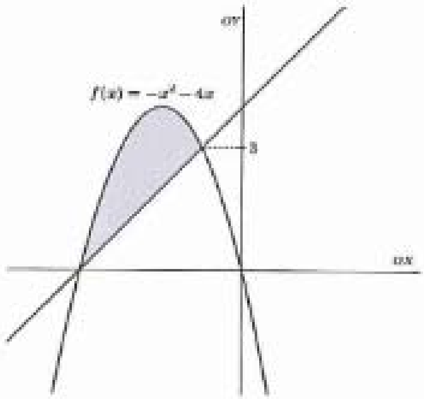
a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,3]$.

(0.75 puntos)

b) Demuestra que existen dos valores $\alpha\in(1,2)$ y $\beta\in(2,3)$ tales que $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$. Enuncia el/los resulatdo(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.75 puntos)

P8) Teniendo en cuenta los datos que aparecen en el siguiente gráfico, calcula el área de la región sombreada.



(2.5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Estudia el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax+(a-2)y=a-2 \\ ax+(a^2-2a)y+2z=a \\ 3ax+(a^2-4)y+z=4a-4 \end{cases}$ dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} a & a-2 & 0 & a-2 \\ a & a^2-2a & 2 & a \\ 3a & a^2-4 & 1 & 4a-4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{vmatrix}=a(a-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 3 & a+2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=a(a-2)[a+6-2(a+2)-1]=a(a-2)(a+6-2a-4-1)=$$

$$=a(a-2)\cdot(-a+1)=0\Rightarrow a_1=0;\ \ a_2=1, a_3=2.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq 1 \\ a\neq 2 \end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \end{pmatrix}\Rightarrow\{C_2=C_4\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=0\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1=-C_2\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{C_1,C_3,C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-1+6-1=4\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ a=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_3,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}=16-4=12\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a=1 \\ a=2 \end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq 0, a \neq 1\ y\ a \neq 2$:

$$\begin{pmatrix} a & a-2 & 0 & a-2 \\ a & a^2-2a & 2 & a \\ 3a & a^2-4 & 1 & 4a-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & a-2 & 0 & a-2 \\ 0 & a^2-3a+2 & 2 & 2 \\ 0 & a^2-3a+2 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & a-2 & 0 & a-2 \\ 0 & a^2-3a+2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow z = -a \Rightarrow$$

$(a^2-3a+2)y - 2a = 2;\ \ y = \frac{2a+2}{a^2-3a+2} = \frac{2(a+1)}{(a-1)(a-2)}$.

$ax + (a-2) \cdot \frac{2(a+1)}{(a-1)(a-2)} = a-2;\ \ ax + \frac{2(a+1)}{a-1} = a-2;\ \ ax = a-2-\frac{2a+2}{a-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow ax = \frac{(a-2)(a-1)-2a-2}{a-1} = \frac{a^2-3a+2-2a-2}{a-1} = \frac{a^2-5a}{a-1} = a \cdot \frac{a-5}{a-1} \Rightarrow x = \frac{a-5}{a-1}$.

<u>$Solución: x = \frac{a-5}{a-1}, y = \frac{2(a+1)}{(a-1)(a-2)}, z = -a, \forall a \in R - \{0, 1, 2\}$.</u>

Resolvemos ahora para $a = -2$. El sistema resulta $\begin{cases} -2y = -2 \\ 2z = 0 \\ -4y = -4 \end{cases}$, que es compatible indeterminado cuya solución es la siguiente:

<u>$Solución: x = \lambda, y = 1, z = 0, \forall \lambda \in R$.</u>

****

Problema 2:

Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B^{-1}| = 1$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_1 \to C_1 - C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1+t & t & -t \\ t-1 & t-1 & t \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-2) \cdot \begin{vmatrix} 1+t & t \\ t-1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2) \cdot (t-1) \cdot \begin{vmatrix} 1+t & t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-2) \cdot (t-1) \cdot (1+t-t) = (t-2) \cdot (t-1).$$

$$|B| = \begin{vmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_2 \to C_2 + C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -t \\ 1-2t & 2t-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2t-1) \cdot \begin{vmatrix} t-1 & -t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2t-1) \cdot (t-1).$$

$$|A \cdot B^{-1}| = 1; \;\; \left|\frac{A}{B}\right| = 1; \;\; \frac{|A|}{|B|} = 1; \;\; |A| = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t-2) \cdot (t-1) = (2t-1) \cdot (t-1); \;\; t-2 = 2t-1 \Rightarrow$$

$$\underline{t = -1}.$$

****

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 3:

Calcula la ecuación general de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2}$.

Solución:

$a)$

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda; \;\; x = -\lambda; \;\; z = -2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0,0,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,-1,2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(6,6,2)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-1,5,2)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} = [(6,6,2) - (0,0,2)] = (6,6,0)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -12 - 12 - 60 - 12 = -96 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios \Rightarrow$$

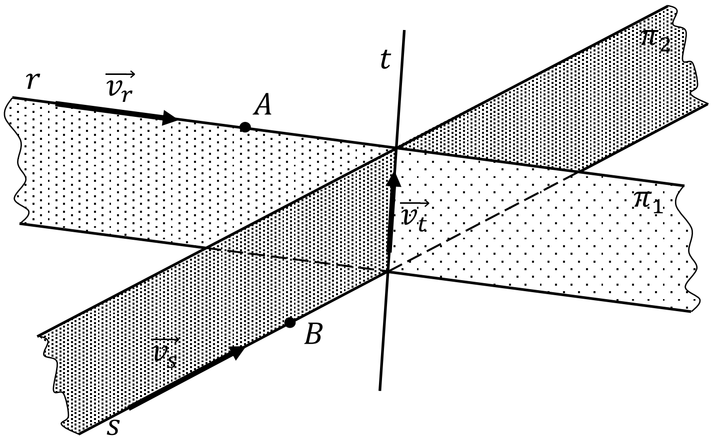
$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$$

El vector director de la recta t es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas $r\ y\ s$.

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 2j + 5k - k - 10i - 2j =$$

$$= -12i - 4j + 4k \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (3,1,-1).$$

Para facilitar la comprensión del desarrollo del ejercicio se acompaña el gráfico adjunto.



Se determinan los planos π_1 y π_2 de las siguientes características:

$$\pi_1(A;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_t}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ \ x + 6y + z + 3z - 2x + y = 0;$$

$-x + 7y + 4z = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x - 7y - 4z = 0.$

$$\pi_2(B;\ \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_t}) \equiv \begin{vmatrix} x-6 & y-6 & z-2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$-5(x-6) + 6(y-6) - (z-2) - 15(z-2) - 2(x-6) - (y-6) = 0;$

$-7(x-6) + 5(y-6) - 16(z-2) = 0;\ -7x + 42 + 5y - 30 - 16z + 32 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_2 \equiv 7x - 5y + 16z + 44 = 0.$

La recta pedida t es la intersección de los planos obtenidos, π_1 y π_2:

$$\underline{t \equiv \begin{cases} x - 7y - 4z = 0 \\ 7x - 5y + 16z + 44 = 0 \end{cases}.}$$

****

Problema 4:

Halla un plano π que sea tangente a la esfera de radio 3 y centro $O(0,0,0)$, y que corte perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2}$. Encuentra el punto de tangencia del plano con la esfera, y calcula la ecuación continua de la recta que pasa por ese punto y corta perpendicularmente a r.

Solución:

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (2,1,-2)$.

El haz de planos, β, perpendiculares a la recta r tienen la siguiente expresión general: $\beta \equiv 2x + y - 2z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, existes dos planos, $\pi_1\ y\ \pi_2$, que distan 3 unidades del origen y que son tangentes a la esfera de centro en el origen y radio 3.

La distancia del origen de coordenadas al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(O,\pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al $\beta \equiv 2x + y - 2z + D = 0$, sabiendo que la distancia es de 3 unidades:

$$d(P,\pi) = \frac{|D|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 3;\ \ \frac{|D|}{\sqrt{4+1+4}} = 3;\ \ \frac{|D|}{\sqrt{9}} = 3 \Rightarrow D_1 = -9, D_2 = 9.$$

Los planos que cumplen la condición pedida son los siguientes:

$$\underline{\pi_1 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0\ \ y\ \ \pi_2 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0}.$$

La recta r', paralela a r, que pasa por el origen de coordenadas, expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r' \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$.

Los puntos de tangencia pedidos son las intersecciones de la recta r' y los planos π_1 y π_2.

$$\left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0 \\ r' \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 4\lambda + \lambda + 4\lambda - 9 = 0;\ \ 9\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 2 \cdot 1 = 2 \\ y = 1 \\ z = -2 \cdot 1 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P_1(2,1,-2)}.$$

$$\left.\begin{array}{r} \pi_2 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0 \\ r' \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 4\lambda + \lambda + 4\lambda + 9 = 0;\ \ 9\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \cdot (-1) = -2 \\ y = -1 \\ z = -2 \cdot (-1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P_2(-2,-1,2)}.$$

$$\underline{P_1(2,1,-2)};\ \ \underline{P_2(-2,-1,2)}.$$

****

Problema 5:

Calcula los límites: $a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}$.

$b)\ \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot sen\ \frac{1}{x}\right)$.

Solución:

$a)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}=\frac{\infty}{\infty-\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}{\left(\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}\right)\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}{\left(\sqrt{3x^3+2x^2}\right)^2-\left(\sqrt{3x^3}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}{3x^3+2x^2-3x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x}\right)}{2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x}\right)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3}\cdot x}{2x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3}\cdot x}{x}}{\frac{2x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{3x^2+2x}}{x}+\sqrt{3}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{3x^2+2x}{x^2}}+\sqrt{3}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{2}{x}}+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3+\frac{2}{\infty}}+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3+0}+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underline{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}=\sqrt{3}}.$$

$b)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot sen\ \frac{1}{x}\right)=\infty\cdot sen\ \frac{1}{\infty}=\infty\cdot 0\Rightarrow Ind.\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{sen\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{sen\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=$$

$$=\frac{sen\ 0}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}=\cos\frac{1}{\infty}=\cos 0\Rightarrow$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot sen\ \frac{1}{x}\right)=1}.$$

****

Problema 6:

Se considera la función $f(x) = \ell og_2\left[sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}}\right]$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $[6, 7]$.

$b)$ Demuestra que existe un valor $\alpha \in (6, 7)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

$a)$

La función $f(x)$ es logarítmica, por lo cual, es continua en su dominio, que es $(0, +\infty)$.

Demostrar que $f(x)$ es continua es equivalen a demostrar que es positiva la expresión $sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}}$.

El recorrido de la función seno es $[-1, 1]$, por lo cual: $-1 \le sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} \le 1$.

La expresión $2^\alpha > 0, \forall \alpha \in R$; también se cumple que: $\begin{cases} \alpha \ge 0 \Rightarrow 2^\alpha \ge 1 \\ \alpha < 0 \Rightarrow 0 < 2^\alpha < 1 \end{cases}$.

La expresión $2^{\frac{x-5}{2}}$ en el intervalo $(6, 7)$ vale: $\begin{cases} x = 6 \Rightarrow 2^{\frac{6-5}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ x = 7 \Rightarrow 2^{\frac{7-5}{2}} = 2^1 = 2 \end{cases}$. De lo anterior se deduce que: $\sqrt{2} \le 2^{\frac{x-5}{2}} \le 2$.

$$-1 + \sqrt{2} \le sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \le 1 + 2 \Rightarrow 0.414 \le sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \le 3.$$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ la\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ [6, 7]}.$

$b)$

Sabiendo que la función $f(x)$ es continua en $[6, 7]$ le es aplicable el teorema de Bolzano en el intervalo $(6, 7)$.

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

$$f(6) = \ell og_2\left(sen\ \frac{7\pi}{4} + 2^{\frac{6-5}{2}}\right) = \ell og_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 2^{\frac{1}{2}}\right) = \ell og_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right) =$$

$$= \ell og_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \ell og_2 \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} = \ell og_2 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} < 0.$$

$$f(7) = \ell og_2\left(sen\ \frac{8\pi}{4} + 2^{\frac{7-5}{2}}\right) = \ell og_2[sen\ (2\pi) + 2^1] = \ell og_2(0 + 2) =$$

$$= \ell og_2 2 = 1 > 0.$$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ \exists \alpha \in (6,\ 7)\ tal\ que\ f(\alpha) = 0}.$

****

Problema 7:

Se considera la función $f(x) = \sqrt{x + sen\,\frac{\pi x}{2}}$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,3]$.

$b)$ Demuestra que existen dos valores $\alpha \in (1,3)$ y $\beta \in (2,3)$ tales que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

$a)$

La función $f(\alpha) = sen\,\alpha \geq 0, \forall \alpha \in [0, 2\pi]$, por lo cual, la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[1,3]$ por ser la raíz cuadrada de dos funciones continuas y cuya suma es positiva en el intervalo considerado.

$b)$

La función $f(x)$ es derivable en $(1,3)$, siendo: $f'(x) = \frac{1+\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}}{2\cdot\sqrt{x+sen\,\frac{\pi x}{2}}}$.

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), con $a,b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en los intervalos $[1,2]\ y\ [2,3]$:

$$[1,2] \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(1) = \sqrt{1 + sen\,\frac{\pi}{2}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ f(2) = \sqrt{2 + sen\,\pi} = \sqrt{2+0} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) = f(2).$$

$$[2,3] \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(2) = \sqrt{2 + sen\,\pi} = \sqrt{2+0} = \sqrt{2} \\ f(3) = \sqrt{3 + sen\,\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(2) = f(3).$$

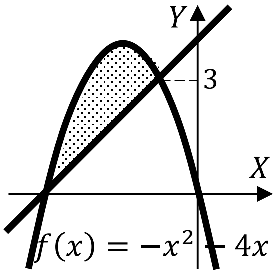
Queda demostrado que:

$$\underline{Existen\ \alpha \in (1,3), \beta \in (2,3)\ tales\ que\ f'(\alpha) = f'(\beta) = 0}.$$

****

Problema 8:

Teniendo en cuenta los datos que aparecen en el gráfico, calcula el área de la región sombreada.



Solución:

La función $f(x) = -x^2 - 4x$ corta al eje de abscisas en los puntos siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x = 0;\ -x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0,0) \\ x_2 = -4 \rightarrow A(-4,0) \end{cases}.$$

Los puntos de corte de $f(x)$ con la recta horizontal $y = 3$ tienen por abscisas las raíces de la ecuación que se forma al igualar sus expresiones.

$$-x^2 - 4x = 3;\ \ x^2 + 4x + 3 = 0;\ \ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} =$$

$$= -2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = -1.$$

De las dos raíces halladas, para el cálculo del área pedida, la que nos interesa es el valor $x = -1$. El punto de corte es $B(-1,3)$.

El vector director de la recta es $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1,3) - (-4,0) = (3,3)$, cuya pendiente es $m = 1$, por lo cual, la ecuación de la recta es la siguiente, considerando el punto $A(-4,0)$:

$$y - 0 = 1 \cdot (x+4) \Rightarrow y = x + 4.$$

En el intervalo de la superficie a calcular, $(-4,-1)$, las ordenadas de la función son mayores que las correspondientes ordenadas de la recta, por lo que la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-4}^{-1}[f(x) - y(x)] \cdot dx = \int_{-4}^{-1}[(-x^2 - 4x) - (x+4)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-4}^{-1}(-x^2 - 5x - 4) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_{-4}^{-1} =$$

$$= \left[-\frac{(-1)^3}{3} - \frac{5\cdot(-1)^2}{2} - 4\cdot(-1)\right] - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - \frac{5\cdot(-4)^2}{2} - 4\cdot(-4)\right] =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 - \frac{64}{3} + 40 - 16 = 28 - \frac{63}{3} - \frac{5}{2} = 28 - 21 - \frac{5}{2} = 7 - \frac{5}{2} = \underline{4.5\ u^2}.$$

$$S = \underline{4.5\ u^2}$$

****

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Álvaro Garmendia Antolín

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES CACIÓN

Ese examen tiene cinco partes. En cada parte debes responder a una única pregunta.

Primera parte

Problema 1:

Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax - y + z = 1 \\ 3x - y + az = a \\ x + (a-1)z = 1 \end{cases}$ en función del parámetro a. Resolver el sistema para $a = 3$, si es posible.

Problema 2:

Sea la matriz $M(a) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determinar para qué valores del parámetro a la matriz A no tiene inversa.

$b)$ Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Segunda parte

Problema 3:

Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, a, -1)$ y $B(b, 1, 1)$ y el plano π de ecuación $x + y - 2z = 2b$.

$a)$ Calcular los valores de los parámetros a y b para que la recta r sea perpendicular al plano π.

$b)$ Calcular los valores de los parámetros a y b para que la recta r esté contenida en el plano π.

Problema 4:

Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(-2, 1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta r de ecuaciones paramétricas $\{x = 1 - 2t, y = 1 + t, z = t\}$. Calcular la distancia de P al punto de corte de ambas rectas.

Tercera parte

Problema 5:

Estudiar los máximos, los mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 5 + 8x^2 - x^4$. Representar la gráfica de f.

Problema 6:

Sea la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$.

$a)$ Obtener los valores de los parámetros A, B y C para que la gráfica de f pase por el punto $P(0, 1)$ y tenga un mínimo en el punto $Q(1, 1)$.

$b)$ ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos? En caso afirmativo, encontrarlos.

Cuarta parte

Problema 7:

Sean las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2, h(x) = \frac{x^2}{8}$.

$a)$ Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de esas tres funciones.

$b)$ Calcular el área de dicho recinto.

Problema 8:

Calcular, explicando los métodos utilizados, las integrales $I = \int (x+2) \cdot sen\ (2x) \cdot dx$ y

$J = \int \frac{x+7}{x^2-4x-5} \cdot dx$.

Quinta parte

Problema 9:

En una farmacia se ha recibido un lote de medicamentos de los tipos A, I y M. El 80 % corresponde al medicamento A, el 10 % al I y el resto al M. En la revisión realizada por la farmacéutica se ha observado que hay medicamentos caducados en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de I y el 5 % de M. Se elige una caja de medicamentos al azar. Hallar:

$a)$ La probabilidad de coger un medicamento caducado.

$b)$ Si sabemos que el medicamento está caducado, la probabilidad de que sea del tipo A.

Problema 10:

En una ciudad se han elegido al azar 3.900 personas. Hallar:

$a)$ La probabilidad que al menos 15 de ellas cumplan años el día del patrón de la ciudad.

$b)$ La probabilidad de que el número de personas que cumplan años el día del patrón esté comprendido entre 5 y 15, ambos incluidos.

Solución: Primera parte

Problema 1:

Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax - y + z = 1 \\ 3x - y + az = a \\ x + (a-1)z = 1 \end{cases}$ en función del parámetro a. Resolver el sistema para $a = 3$, si es posible.

Solución:

Cuando nos piden discutir el sistema se refieren a que lo discutamos utilizando el **Teorema de Rouché-Fröbenius**. Para ello tenemos que estudiar los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$(M) = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \\ 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \text{ y } (M|b) = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & a & a \\ 1 & 0 & a-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz de los coeficientes se trata de una matriz 3x3 su mayor rango es 3 por lo que calculamos el valor del menor de orden 3 (el determinante de toda la matriz). Calculamos el valor del determinante:

Matriz de los coeficientes: $M = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \\ 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$

$$|M| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = -a(a-1) - a + 1 + 3(a-1) = -a^2 + a - a + 1 + 3a - 3 = -a^2 + 3a - 2;$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

Igualamos a cero para encontrar los valores que anulan el determinante:

$$a^2 - 3a + 2 = 0;\ a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 2.$$

La primera conclusión que podemos sacar es que si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el $RgM = 3$ y como la matriz ampliada es de dimensión 3x4 y su mayor rango es 3 tenemos que:

$\forall a \in R - \{1,\ 2\}$ el $RgM = 3 = Rg(M|b) = n =$ *número de incógnitas* el sistema es un Sistema Compatible Determinado.

$$Para\ a = 1 \Rightarrow (M|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 1 + 3 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ (M|b) = 3.$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ (M|b) = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow (M|b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = C_4\}.$$

Las columnas tercera y cuarta son iguales luego: $Rang\ (M|b) = 2$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M^* = 2 < nº\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ e\ Indeterminado$$

La discusión completa del sistema es:

- Si $a = 1$ el $RgM = 2 \neq Rg(M|b) = 3$ y el sistema es $Sistema\ Incompatible$
- Si $a = 2$ el $RgM = 2 = Rg(M|b) < nº\ incógnitas$ y el sistema es $Sistema\ Compatible\ Indeterminado$
- $\forall a \in R - \{1,\ 2\}$ el $RgM = 3 = Rg(M|b) = n$ y el sistema es Compatible Determinado

Para $a = 3$ el sistema es por tanto $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 3x - y + 3z = 3 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$, que es compatible determinado. Vamos a resolver utilizando la **Regla de Cramer** ya que sabemos que el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de los coeficientes no es cero. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-3^2+3\cdot 3-2} = \frac{-2-3+1+6}{-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{18+3+3-3-9-6}{-2} = \frac{6}{-2} = -3.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-3+1+3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Luego la solución queda: $\boldsymbol{x = -1}$; $\boldsymbol{y = -3}$; $\boldsymbol{z = 1}$

Vamos a resolverlo también usando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & a & a \\ 1 & 0 & a-1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to (F'_2 = F_2 - F_1);\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema queda:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} z = 1 \\ x = 1 - 2z = -1 \\ y = 3x + z - 1 = -3 + 1 - 1 = -3 \end{cases} \to$$

La solución es: $\boldsymbol{x = -1}$; $\boldsymbol{y = -3}$; $\boldsymbol{z = 1}$

Problema 2:

Sea la matriz $M(a) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determinar para qué valores del parámetro a la matriz A no tiene inversa.

$b)$ Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Solución:

$a)$

Una matriz cuadrada es invertible cuando su determinante es diferente de cero. Calculamos su determinante.

$$|M(a)| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = -2a + a^2 - 2a + 3 = \ a^2 - 4a + 3;$$

Igualamos a cero:

$a^2 - 4a + 3 = 0 \to a = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 3.$

El determinante vale cero para $a = 1$ y para $a = 3$. Por lo que:

$$\boldsymbol{La\ matriz\ M(a)\ no\ tiene\ inversa\ para\ a = 1\ y\ para\ a = 3}$$

$b)$ Acabamos de ver que para $a = 2$ la matriz en invertible, por lo que es posible calcularla.

Podemos calcular la inversa por el Método de Gauss o por determinantes.

Vamos a calcularla aplicando la definición: $M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|}$

Para $a = 2$ es $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\qquad |M| = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \to M^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$Adj. de\ M^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}}$$

Podemos comprobar si el cálculo está bien hecho (es opcional pero recomendable) aplicando que: $A \cdot A^{-1} = I$.

Segunda parte

Problema 3:

Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, a, -1)\ y\ B(b, 1, 1)$ y el plano π de ecuación $x + y - 2z = 2b$.

$a)$ Calcular los valores de los parámetros $a\ y\ b$ para que la recta r sea perpendicular al plano π.

$b)$ Calcular los valores de los parámetros $a\ y\ b$ para que la recta r esté contenida en el plano π.

Solución:

$a)$ Para que la recta sea perpendicular al plano debe tener su vector de dirección proporcional al vector ortogonal al plano. Es decir: La recta r y el plano π son perpendiculares cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son linealmente dependientes, por lo tanto, cuando sus componentes son proporcionales:

Los puntos de la recta $A(1, a, -1)\ y\ B(b, 1, 1)$ determinan el vector director:

$$\vec{v_r} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(b, 1, 1) - (1, a, -1)] = (b - 1, 1 - a, 2).$$

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, 1, -2)$

Imponemos que sus componentes sean proporcionales

$$\frac{b-1}{1} = \frac{1-a}{1} = \frac{2}{-2} \Rightarrow \frac{b-1}{1} = \frac{1-a}{1} = -1$$

Por lo que:

$$\boldsymbol{a = 2} \text{ y } \boldsymbol{b = 0}$$

$b)$ Ahora, para que la recta r esté contenida en el plano π, es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares, es decir, que su producto escalar sea cero.

Calculamos el producto escalar:

$$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (b - 1, 1 - a, 2) \cdot (1, 1, -2) = 0 = \ b - 1 + 1 - a - 4 \Rightarrow -a + b = 4.$$

Además, si el plano π contiene a la recta r contiene a todos sus puntos y, por lo tanto, imponemos que, por ejemplo, que contenga al punto $A(1, a, -1)$, es decir, imponemos que el punto satisfaga la ecuación del plano.

$$A(1, a, -1)\ \in\ x + y - 2z = 2b \to 1 + a - 2 \cdot (-1) = 2b\ \to\ 1 + a + 2 = 2b$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones encontradas:

$$\left.\begin{array}{r} -a + b = 4 \\ a - 2b = -3 \end{array}\right\}$$

$Sumamos\ las\ ecuaciones \to -b = 1 \to\ \ b = -1 - a - 1 = 4 \to a = -5.$

Para que la recta r esté contenida en el plano π los parámetros deben valer:

$$\boldsymbol{a = -5} \text{ y } \boldsymbol{b = -1}$$

Problema 4:

Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(-2,1,0)$ y corta perpendicularmente a la recta r de ecuaciones paramétricas $\{x=1-2t, y=1+t, z=t\}$. Calcular la distancia de P al punto de corte de ambas rectas.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}.$$

Por lo que un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (-2,1,1)$.

Hay infinitas direcciones de vectores ortogonales a $\overrightarrow{v_r}$. Por ese motivo vamos a buscar todos los planos perpendiculares a la recta r, que tienen la siguiente ecuación:

$$-2x+y+z+D=0.$$

Imponemos que dicho plano pase por el punto $P(-2,1,0)$

$$-2\cdot(-2)+1+0+D=0 \to D=-5 \Rightarrow$$

El plano que pasa por $P(-2,1,0)$ y es perpendicular a r es:

$$-2x+y+z-5=0.$$

Buscamos ahora el punto Q de intersección entre este plano y de la recta r:

$$\left.\begin{array}{r} -2x+y+z-5=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=1-2t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} \end{array}\right\} \to -2(1-2t)+(1+t)+t-5=0 \to$$

$$-2+4t+1+t+t-5=0 \to \quad 6t-6=0; \quad t-1=0 \to \quad t=1 \to \left.\begin{cases} x=1-2=-1 \\ y=1+1=2 \\ z=1 \end{cases}\right\}$$

El punto buscado es: $Q(-1,2,1)$.

Calculamos la distancia entre dos puntos: $P(-2,1,0)$ y $Q(-1,2,1)$..

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(-1,2,1)-(-2,1,0)] = (1,1,1).$

$$d = \overline{PQ} = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} \ \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{\mathbf{3}}\ unidades$$

Nos piden también la recta s que pasa por el punto $P(-2,1,0)$ y tiene como vector director a $\overrightarrow{PQ} = (1,1,1)$, que no hemos utilizado. Su ecuación paramétrica es:

$$\boldsymbol{s} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{x = -2+t} \\ \boldsymbol{y = 1+t} \\ \boldsymbol{z = t} \end{cases}$$

Tercera parte

Problema 5:

Estudiar los máximos, los mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 5 + 8x^2 - x^4$. Representar la gráfica de f.

Solución:

Observamos en primer lugar que $f(-x) = f(x)$, la función es par, simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Tenemos que hacer la derivada primera e igualar a cero para conocer los puntos críticos. Y determinar el signo de la derivada pues una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 16x - 4x^3 = 4x(4 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2.$$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2)\ y\ (2, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 2)$ es:

$$f'(1) = 4 \cdot 1 \cdot (4 - 1^2) = 12 > 0 \Rightarrow creciente.$$

Por lo que los intervalos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow Decrece\ si\ x \in (\mathbf{-2, 0}) \cup (\mathbf{2}, +\infty)$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow Crece\ si\ x \in (-\infty, \mathbf{-2}) \cup (\mathbf{0, 2}).$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto en el que la función sea derivable es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo. También podemos observar si la función pasa de ser creciente a decreciente o viceversa: Así, antes de $x_1 = -2$, la función crece y después decrece, $f(-2) = f(2) = 5 + 8 \cdot 2^2 - 2^4 = 5 + 32 - 16 = 21$ luego en $x_1 = -2$ hay un máximo: $Máximo: (-2, 21)$. En $x_2 = 0$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente luego es un mínimo y $f(0) = 5 \Rightarrow\ Mínimo: (0, 5)$. Al ser la función par ya podemos asegurar que para $x_3 = 2$ hay un máximo: $Máximo: (2, 21)$.

También podemos calcular el signo de la derivada segunda obteniendo lo mismo:

$$f''(x) = 16 - 12x^2.$$

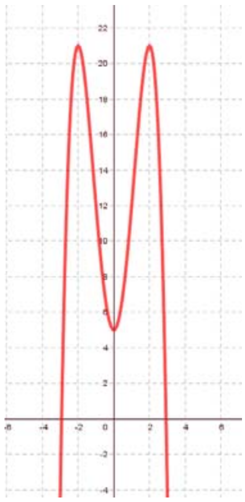
$f''(-2) < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2;$

$f''(0) = 16 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0;$

$f''(2) < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 2.$

$$\boldsymbol{Máximo: (-2, 21)\ y\ (2, 21).\ Mínimo: (0, 5)}$$

Con los datos obtenidos se puede hacer una representación gráfica, aproximada, de la función, que es la indicada en el gráfico adjunto.



Problema 6:

Sea la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$.

$a)$ Obtener los valores de los parámetros A, B y C para que la gráfica de f pase por el punto $P(0,1)$ y tenga un mínimo en el punto $Q(1,1)$.

$b)$ ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos? En caso afirmativo, encontrarlos.

Solución:

$a)$ Imponemos que pase por el punto $P(0,1) \to f(0) = A = 1 \to\ A = 1$

La función es: $f(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + 1$.

Imponemos que pase por el punto $Q(1,1) \to f(1) = 1 \to$

$$f(1) = 1^3 + B\cdot 1^2 + C\cdot 1 + 1 = 1 + B + C + 1 = 1\ \to\ B + C = -1.$$

Para imponer que tenga un mínimo relativo en $Q(1,1)$ debemos hacer que se anule la derivada primera en ese punto:

$f'(1) = 0 \to f'(x) = 3x^2 + 2Bx + C \to f'(1) = 3\cdot 1^2 + 2B\cdot 1 + C = 0\ \to\ 2B + C = -3.$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} B + C = -1 \\ 2B + C = -3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -B - C = 1 \\ 2B + C = -3 \end{array}\right\} \to B = -2\ \to -2 + C = -1 \to C = 1.$$

Hemos cambiado el signo de la primera ecuación y las hemos sumado.

$\boldsymbol{A = 1; B = -2; C = 1}$. La función es $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1}$

$b)$ La función es una función polinómica, por tanto, continua en toda la recta real. Por lo que, para que tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \to f'(x) = 0 \to 3x^2 - 4x + 1 = 0;\ \ x = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6} = \frac{4\pm 2}{6} \to x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1.$

Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto pues en ese caso podría ser un punto de inflexión.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

Calculamos la derivada segunda:

$$f''(x) = 6x - 4.$$

Sustituimos los puntos encontrados:

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6\cdot\frac{1}{3} - 4 = -2 < 0\ \to f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{1-6+9+27}{27} = \frac{31}{27}$

$$\to \mathit{Máximo\ relativo\ para}\ x = \frac{1}{3}: \to \left(\frac{1}{3}, \frac{31}{27}\right)$$

$f''(1) = 6\cdot 1 - 4 = 2 > 0\ \to f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 1 + 1 = 1 \to$

$$\to \mathit{Mínimo\ relativo\ para}\ x = 1: \to (1,1).$$

La función obtenida tiene, además del mínimo $Q(1,1)$ un máximo en $\boldsymbol{A\left(\frac{1}{3}, \frac{31}{27}\right)}$

Cuarta parte

Problema 7:

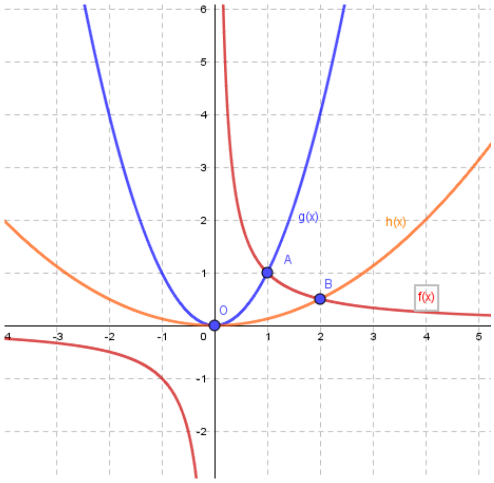
Sean las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2, h(x) = \frac{x^2}{8}$.

a) Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de esas tres funciones.

b) Calcular el área de dicho recinto.

Solución:

a) Dibujamos las gráficas de las tres funciones. $f(x) = \frac{1}{x}$ es la función inversa, una hipérbola. $g(x) = x^2$ y , $h(x) = \frac{x^2}{8}$ son parábolas. Las funciones $f(x)\ y\ g(x)$ se cortan en el punto $A(1,1)$; las funciones $f(x)\ y\ h(x)$ se cortan en el punto $B\left(2,\frac{1}{2}\right)$ y las funciones $g(x)\ y\ h(x)$ se cortan en el punto $O(0,0)$. El recinto pedido es el limitado por los tres puntos: $A(1,1)$, $B\left(2,\frac{1}{2}\right)$ y $O(0,0)$.



b) La superficie a calcular observamos que es:

$$S = \int_0^1 [g(x) - h(x)] \cdot dx + \int_1^2 [f(x) - h(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{8}\right) \cdot dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{8}\right) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{24}\right]_0^1 + \left[Ln(x) - \frac{x^3}{24}\right]_1^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^3}{24}\right) - 0\right] + \left[\left(Ln(2) - \frac{2^3}{24}\right) - \left(Ln(1) - \frac{1^3}{24}\right)\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} + Ln(2) - \frac{1}{3} - Ln(1) + \frac{1}{24} = Ln(2)\ u^2$$

El área del recinto vale: $\boldsymbol{Ln(2)\ u^2 \cong 0.69\ u^2}$

Problema 8:

Calcular, explicando los métodos utilizados, las integrales $I = \int (x+2) \cdot sen\ (2x) \cdot dx$ y

$J = \int \frac{x+7}{x^2-4x-5} \cdot dx.$

Solución:

La primera integral se puede resolver por partes.

Utilizamos el método de integración por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

I	$u = x+2$	$du = dx$
	$v = \int sen\ (2x)dx = -\frac{1}{2}cos\ (2x) =$	$dv = sen\ (2x)dx$

Sustituimos:

$I = \int (x+2) \cdot sen\ (2x) \cdot dx = -(x+2) \cdot \frac{1}{2} \cdot cos\ (2x) + \int \frac{1}{2} \cdot cos\ (2x) \cdot dx =$

$= -\frac{1}{2} \cdot (x+2) \cdot cos\ (2x) + \frac{1}{2} \cdot \int cos\ (2x) \cdot dx =$

$= -\frac{1}{2} \cdot (x+2) \cdot cos\ (2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot sen\ (2x) + C \Rightarrow$

$$I = \int (x+2) \cdot sen\ (2x) \cdot dx = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot (\boldsymbol{x}+\mathbf{2}) \cdot \boldsymbol{cos}\ (\mathbf{2}\boldsymbol{x}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \cdot \boldsymbol{sen}\ (\mathbf{2}\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$$

La segunda integral es racional.

Hallamos las raíces del denominador:

$J = \int \frac{x+7}{x^2-4x-5} \cdot dx.$

$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 5.$

$$x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5).$$

Descomponemos en fracciones simples. Identificando los numeradores calculamos los coeficientes:

$\frac{x+7}{x^2-4x-5} = \frac{M}{x+1} + \frac{N}{x-5} = \frac{Mx-5M+Nx+N}{(x+1)(x-5)} = \frac{(M+N)x+(-5M+N)}{x^2-4x-5} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=1 \\ -5M+N=7 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=1 \\ 5M-N=-7 \end{array}\right\} \Rightarrow 6M = -6;\ \ M = -1;\ -1+N = 1 \Rightarrow N = 2.$

Sustituimos. Las integrales obtenidas son inmediatas de tipo logaritmo:

$$J = \int \frac{x+7}{x^2-4x-5} \cdot dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x-5}\right) \cdot dx = -ln|x+1| + 2 \cdot ln|x-5| + C = L\frac{(x-5)^2}{|x+1|} + C$$

$\Rightarrow$

$$J = \int \frac{x+7}{x^2-4x-5} \cdot dx = -\boldsymbol{ln}|\boldsymbol{x}+\mathbf{1}| + \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{ln}|\boldsymbol{x}-\mathbf{5}| + \boldsymbol{C} = L\frac{(x-5)^2}{|x+1|} + C \Rightarrow$$

Quinta parte

Problema 9:

En una farmacia se ha recibido un lote de medicamentos de los tipos A, I y M. El 80 % corresponde al medicamento A, el 10 % al I y el resto al M. En la revisión realizada por la farmacéutica se ha observado que hay medicamentos caducados en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de I y el 5 % de M. Se elige una caja de medicamentos al azar. Hallar:

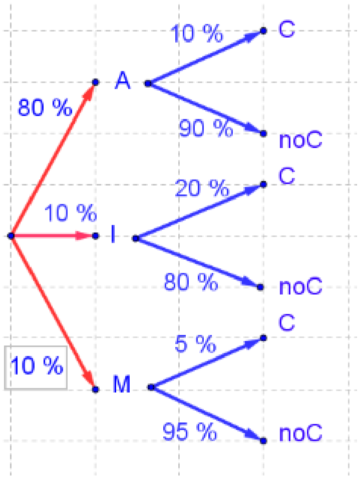
$a)$ La probabilidad de coger un medicamento caducado.

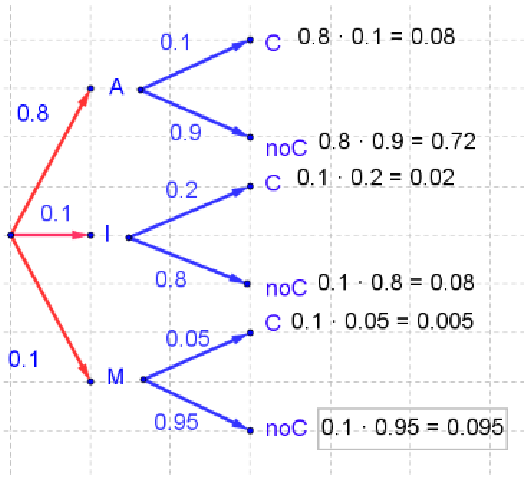
$b)$ Si sabemos que el medicamento está caducado, la probabilidad de que sea del tipo A.

Solución:

Llamamos C al suceso que el medicamento esté caducado y noC si no lo está. Hacemos un diagrama de árbol con los datos que tenemos. Sabemos que en cada nudo la suma de porcentajes es 100. Pasamos los porcentajes a probabilidades:

Multiplicando la rama obtenemos la probabilidad de, por ejemplo, sea de A y además esté caducado: 0.8 · 0.1 = 0.08





$a)$ Para calcular la probabilidad de que un medicamento esté caducado deberemos sumas las probabilidades de las tres ramas:

$$P = P(C) = P(A \cap C) + P(I \cap C) + P(M \cap C) =$$
$$= P(A) \cdot P(C/A) + P(I) \cdot P(C/I) + P(M) \cdot P(C/M) =$$
$$= 0.8 \cdot 0.10 + 0.1 \cdot 0.20 + 0.1 \cdot 0.05 = 0.080 + 0.020 + 0.005 = 0.105.$$

La probabilidad de coger un medicamento caducado es de $\mathbf{0.105}$.

$b)$ Nos piden ahora una probabilidad condicionada. Usamos $P(A \cap C) = P(C) \cdot P(A/C)$, despejamos:

$$P = P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A) \cdot P(C/A)}{P(C)} = \frac{0.8 \cdot 0.10}{0.105} = \frac{0.080}{0.105} = 0.7619.$$

Si sabemos que el medicamento está caducado, la probabilidad de que sea del tipo A es de $\mathbf{0.7619}$

Problema 10:

En una ciudad se han elegido al azar 3 900 personas. Hallar:

a) La probabilidad que al menos 15 de ellas cumplan años el día del patrón de la ciudad.

b) La probabilidad de que el número de personas que cumplan años el día del patrón esté comprendido entre 5 y 15, ambos incluidos.

Solución:

a) Como o cumplen años ese día o no lo cumplen, se trata de una distribución binomial con:

$$n = 3\,900;\ \ p = \frac{1}{365};\ \ q = 1 - \frac{1}{365} = \frac{364}{365}.$$

Por ser $\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 3\,900 \cdot \frac{1}{365} > 5 \\ n \cdot q = 3\,900 \cdot \frac{527}{600} > 5 \end{array}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

Media: $\mu = n \cdot p = 3\,900 \cdot \frac{1}{365} = 10.68.$

$Desviación\ típica$: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{3\,900 \cdot \frac{1}{365} . \frac{364}{365}} = \sqrt{10.66} \cong 3.26.$

La distribución binomial anterior puede aproximarse por una distribución normal $N(10.68, 3.26)$

$$X = B(3\,900, 1/365) \approx N(10.68, 3.26).$$

Queremos calcular $P(X \geq 15)$. Tipificamos la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-10.68}{3.26}$. Aplicamos la corrección de Yates usando 14.5 en lugar de 15:

$$P = P(X \geq 15) = P\left(Z \geq \frac{14.5 - 10.68}{3.26}\right) = P\left(Z \geq \frac{3.82}{3.26}\right) \cong P(Z \geq 1.17) = 1 - P(Z < 1.17) =$$

Buscamos en la tabla:

$= 1 - 0.8790 = 0.1210.$

La probabilidad que al menos 15 de ellas cumplan años el día del patrón de la ciudad es de $\mathbf{0.1210}$.

b) Ahora queremos calcular $P = P(5 \leq X \leq 15)$. Procedemos de igual modo: Usamos la distribución normal. Tipificamos. Usamos la corrección de Yates

$P = P(5 \leq X \leq 15) = P\left(\frac{4.5-10.68}{3.26} \leq Z \leq \frac{15.5-10.68}{3.26}\right) = P\left(\frac{-6.18}{3.26} \leq Z \leq \frac{4.82}{3.26}\right) =$

$= P(-1.90 \leq Z \leq 1.48) = P(Z \leq 1.48) - P(Z \leq -1.90) =$

Buscamos en la tabla:

$= P(Z \leq 1.48) - [1 - P(Z \leq 1.90)] = P(Z \leq 1.48) - 1 + P(Z \leq 1.90) =$

$= 0.9306 - 1 + 0.9713 = 1.9019 - 1 = 0.9019.$

La probabilidad de que el número de personas que cumplan años el día del patrón esté comprendido entre 5 y 15, ambos incluidos es de $\mathbf{0.9019}$.

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Ese examen tiene cinco partes. En cada parte debes responder a una única pregunta.

Primera parte

Problema 1:

Discutir el sistema $S(a)$ en función de a siendo $S(a) = \begin{cases} ax - y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ x + 2y + az = 3 \end{cases}$. Resolver en función de a, mediante la regla de Cramer, en los casos en que sea posible.

Problema 2:

Sea la matriz $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determinar para qué valores de a la matriz no tiene inversa.

$b)$ Calcular, si es posible, la matriz inversa para $a = 0$, y en caso de que no sea posible razonar por qué no es posible.

Segunda parte

Problema 3:

$a)$ Hallar la ecuación del plano π que pasa por el punto $A(-1, 2, 3)$ y es paralelo a los vectores

$\vec{v} = (-1, -2. -3)\ y\ \vec{v} = (1, 3, 5)$.

$b)$ Halla el valor de A para que el plano π calculado en el apartado anterior y el plano

$\beta \equiv Ax - y + 5z = 8$ sean perpendiculares.

Problema 4:

Sea el plano $\pi \equiv 2x - y + Az = 0$. Sea la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$. Hallar A para que $r\ y\ \pi$ sean paralelos. Además, obtener el plano β perpendicular a r y que pasa por el origen.

Tercera parte

Problema 5:

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de $a, b\ y\ c$ para que su gráfica pase por $P(0, 2)$ y tenga un extremo en $Q(1, -1)$. ¿Tiene f más extremos?

Problema 6:

Sea $f(x) = x^2 + 9$, y P el punto exterior a su gráfica de coordenadas $P(0, 0)$. Calcular razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica de f que pasen por el punto P.

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
www.apuntesmareaverde.org.es

Cuarta parte

Problema 7:

Dibuja la región encerrada por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5$, y calcular el área de dicha región.

Problema 8:

Calcular las integrales indefinidas I y J, explicando los métodos utilizados para su resolución:

$I = \int x \cdot cos\ (2x) \cdot dx$ y $J = \int \frac{1}{x^2+2x-3} \cdot dx$.

Quinta parte

Problema 9:

En una empresa el 70 % de sus trabajadoras están satisfechas con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 % gana más de 1 000 euros. Entre las que no están satisfechas solo el 20 % gana más de 1 000 euros. Si se elige una trabajadora al azar:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que gane más de 1 000 euros?

$b)$ Si gana más de 1 000 euros, ¿cuál es la probabilidad que esté satisfecha con su contrato?

$c)$ ¿Cuál es la probabilidad de que gane menos de 1 000 euros y esté satisfecha con su contrato?

Problema 10:

En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de 0.4, se pide:

$a)$ Identificar y describir este modelo de probabilidad.

$b)$ Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.

$c)$ Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

RESPUESTAS

Primera parte

Problema 1:

Discutir el sistema $S(a)$ en función de a siendo $S(a) = \begin{cases} ax - y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ x + 2y + az = 3 \end{cases}$. Resolver en función de a, mediante la regla de Cramer, en los casos en que sea posible.

Solución:

Para analizar el sistema estudiamos los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \text{ y } M|b = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{pmatrix}.$$

Para determinar el rango de la matriz de coeficientes, calculamos su determinante en función del parámetro a:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + 4 + 1 + 4 + 2a + a = -2a^2 + 3a + 9$$

Igualamos a cero, para saber para que valores de a se anula:

$2a^2 - 3a - 9 = 0 \to \ a = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{3 \pm 9}{4} \to a = -\frac{3}{2}, a = 3.$

$\forall a \in R - \{-\frac{3}{2},\ 3\}$ el rango de M es 3, y el rango de la matriz ampliada lo mayor que puede ser es también 3, por lo que ambos son iguales, y por el **Teorema de Rouché Frobenius** sabemos que el sistema es compatible y determinado.

Estudiamos ahora el comportamiento para los otros valores del parámetro:

Para $a = -\frac{3}{2} \to M|b = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$

Estudiamos su rango calculando el determinante de las dos primeras columnas y la cuarta:

$\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 - 1 + 4 + 3 + 3 = 22 \neq 0$. Por lo tanto, el rango de la matriz ampliada es 3, mientras que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Para $a = 3 \to M|b = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Estudiamos su rango calculando el determinante de las dos primeras columnas y la cuarta:

$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 4 - 1 + 4 - 6 + 3 = -14 \neq 0$. El rango de la matriz ampliada es 3, mientras que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

La discusión completa del sistema es:

- Si $a = -\frac{3}{2}$ o bien $a = 3$, el $RgM = 2 \neq RgM|b = 3$ y el sistema es incompatible
- $\forall a \in R - \{-\frac{3}{2},\ 3\}$ el $RgM = 3 = RgM|b = n$ y el sistema es Compatible Determinado

Utilizamos la **regla de Cramer** para resolverlo cuando $a \neq -\frac{3}{2}$ y $a \neq 3$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix}}{-2a^2+3a+9} = \frac{-4a+4+3+12+4+a}{-2\cdot\left(a+\frac{3}{2}\right)(a-3)} = \frac{-3a+23}{-(2a+3)(a-3)} = \frac{3a-23}{(2a+3)(a-3)}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix}}{-(2a+3)(a-3)} = \frac{a^2+6-2-2+3a-2a}{-(2a+3)(a-3)} = -\frac{a^2+a+2}{(2a+3)(a-3)}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-(2a+3)(a-3)} = \frac{-6a+4-1+4-2a+3}{-(2a+3)(a-3)} = \frac{-8a+10}{-(2a+3)(a-3)} = \frac{2(4a-5)}{(2a+3)(a-3)}.$$

$$\boldsymbol{\forall a \in R - \left\{-\frac{3}{2}, 3\right\}, \qquad x = \frac{3a-23}{(2a+3)(a-3)}; y = -\frac{a^2+a+2}{(2a+3)(a-3)}; z = \frac{2(4a-5)}{(2a+3)(a-3)}}$$

Problema 2:

Sea la matriz $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determinar para qué valores de a la matriz no tiene inversa.

$b)$ Calcular, si es posible, la matriz inversa para $a = 0$, y en caso de que no sea posible razonar por qué no es posible.

Solución:

$a)$ Una matriz cuadrada tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero. Calculamos su determinante y lo igualamos a cero:

$$|M(a)| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 - a^2 - a^2 = 1 - a^2 = 0 \to a = -1, a = 1.$$

La matriz $M(a)$ **no** tiene inversa si $\boldsymbol{a = -1}$ o si $\boldsymbol{a = 1}$.

$b)$ Cuando $a = 0$ la matriz es $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que ya hemos comprobado que es invertible por ser su determinante distinto de cero.

Podemos calcular la matriz inversa por dos procedimientos, por el método de Gauss, y por determinantes: $M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|}$

Por el método de Gauss-Jordan:

$$(M|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\{F_1 \to F_1 - F_3\}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} \qquad M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$Adj. de\ M^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Naturalmente obtenemos la misma matriz inversa por los dos métodos.

$$\boldsymbol{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Segunda parte

Problema 3:

a) Hallar la ecuación del plano π que pasa por el punto $A(-1,2,3)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v} = (-1,-2.-3)\ y\ \vec{v} = (1,3,5)$.

b) Halla el valor de A para que el plano π calculado en el apartado anterior y el plano $\beta \equiv Ax - y + 5z = 8$ sean perpendiculares.

Solución:

a) Al conocer un punto y dos vectores de orientación, escribimos directamente la ecuación del plano:

$$\pi(\vec{v},\vec{u},A) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \to$$

$-10(x+1) - 3(y-2) - 3(z-3) + 2(z-3) + 9(x+1) + 5(y-2) = 0 \to$

$-(x+1) + 2(y-2) - (z-3) = 0 \to\ -x - 1 + 2y - 4 - z + 3 = 0 \to$

$$\boldsymbol{\pi \equiv x - 2y + z + 2 = 0}$$

b) Para que los planos sean perpendiculares debemos imponer que sus vectores normales sean ortogonales, es decir, que su producto escalar sea cero.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_\pi} = (1,-2,1), \overrightarrow{n_\beta} = (A,-1,5)$.

$$\overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{n_\beta} = 0 = (1,-2,1) \cdot (A,-1,5) = A + 2 + 5 = 0 \to A = -7.$$

$$\boldsymbol{A = -7}$$

Problema 4:

Sea el plano $\pi \equiv 2x - y + Az = 0$. Sea la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$. Hallar A para que r y π sean paralelos. Además, obtener el plano β perpendicular a r y que pasa por el origen.

Solución:

Para que la recta r y el plano π serán paralelos debemos imponer que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares.

Para obtener el vector directo de la recta, escribimos sus ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases} \to z = \lambda \to \left.\begin{matrix} 4x - 3y = -1 - 4\lambda \\ 3x - 2y = -3 - \lambda \end{matrix}\right\} \to$$

Eliminamos la incógnita y:

$$\left.\begin{matrix} -8x + 6y = 2 + 8\lambda \\ 9x - 6y = -9 - 3\lambda \end{matrix}\right\} \to x = -7 + 5\lambda \to \;\; 2y = 3x + 3 + \lambda = -21 + 15\lambda + 3 + \lambda \to$$

$$2y = -18 + 16\lambda \to y = -9 + 8\lambda \;\to r \equiv \begin{cases} x = -7 + 5\lambda \\ y = -9 + 8\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un vector director de la recta r: $\overrightarrow{v_r} = (5, 8, 1)$ y el vector normal del plano π: $\overrightarrow{n_\pi} = (2, -1, A)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0 = (5, 8, 1) \cdot (2, -1, A) = 10 - 8 + A = 0 \to A = -2$.

$$\boldsymbol{A = -2}$$

Buscamos ahora el plano β perpendicular a r y que pasa por el origen. La ecuación de todos los planos perpendiculares a la recta tiene como vector normal el vector de dirección de la recta: $\overrightarrow{v_r} = (5, 8, 1)$. Su expresión general es por lo tanto: $5x + 8y + z + D = 0$.

Imponemos que pase por el origen, con lo que $D = 0$. Por tanto:

$$\boldsymbol{\beta \equiv 5x + 8y + z = 0}$$

Tercera parte

Problema 5:

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de a, b y c para que su gráfica pase por $P(0, 2)$ y tenga un extremo en $Q(1, -1)$. ¿Tiene f más extremos?

Solución:

Imponemos a la función que pase por el punto $P(0, 2) \to f(0) = 2$: $\quad \to f(0) = c = 2 \to c = 2$.

Por pasar por el punto $Q(1, -1)$ imponemos que verifique la ecuación:

$f(1) = -1 \to f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 2 = -1 \to \; a + b = -3$.

Debe tener un extremo en $Q(1, -1)$, por lo que se debe anular su derivada

$f'(1) = 0 \to f'(x) = 3ax^2 + 2bx \to f'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 0 \to \; 3a + 2b = 0$.

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, que resolvemos:

$\left.\begin{array}{r} a + b = -3 \\ 3a + 2b = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -2a - 2b = 6 \\ 3a + 2b = 0 \end{array}\right\} \to a = 6 \to 6 + b = -3 \to b = -9$.

$$\boldsymbol{a = 6;\; b = -9;\; c = 2}$$

Hemos obtenido la función: $f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 2$.

Para que una función derivable en un punto tenga un máximo o mínimo relativo en dicho punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x) = 18x^2 - 18x = 18x(x-1) \to f'(x) = 0 \to 18x(x-1) = 0; \;\; x = 0, \;\; x = 1.$$

Observamos que la unción tiene dos posibles extremos, en $Q(1, -1)$, y en $x = 0, f(0) = 2 \to A(0, 2)$

Para diferenciar si esos extremos son máximos o mínimos utilizamos la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 36x - 18.$$

$f''(0) = -18 < 0$

Por tanto, en $\boldsymbol{A(0, 2)}$ hay un **máximo relativo**

$f''(1) = 36 \cdot 1 - 18 = 18 > 0$.

Por tanto, en $\boldsymbol{Q(1, -1)}$ hay un **mínimo relativo**

Problema 6:

Sea $f(x) = x^2 + 9$, y P el punto exterior a su gráfica de coordenadas $P(0,0)$. Calcular razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica de f que pasen por el punto P.

Solución:

La ecuación de cualquier recta que pase por el punto $P(0,0)$ $es\ y - 0 = m(x - 0) \to y = mx$.

Imponemos que corte a la función en los puntos de tangencia: $\left(x, f(x)\right) = (x, x^2 + 9)$. En esos puntos la pendiente de la recta debe coincidir con la derivada de la función:

$m = f'(x) = 2x$.

Por tanto:

$$2x = \frac{x^2+9}{x} \to \ 2x^2 = x^2 + 9 \to \ x^2 = 9 \to x = 3; x = -3 \begin{cases} x_1 = -3 \to m_1 = -6 \\ x_2 = 3 \to m_2 = 6 \end{cases}.$$

Para $x = 3, f(3) = 3^2 + 9 = 18, m = f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$

El punto de tangencia es $A(3, 18)$ y la recta tangente en ese punto: $y = 6x$.

Para $x = -3, f(3) = (-3)^2 + 9 = 18, m = f'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$

El punto de tangencia es $B(-3, 18)$ y la recta tangente en ese punto: $y = -6x$.

Hay dos rectas tangentes a la función por el punto $P(0,0)$: las rectas $\boldsymbol{y = 6x}$ y $\boldsymbol{y = -6x}$.

Cuarta parte

Problema 7:

Dibuja la región encerrada por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5$, y calcular el área de dicha región.

Solución:

Buscamos los puntos de intersección de las dos funciones igualándolas:

$$f(x) = g(x) \to x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 5 \to$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \to \;\; x^2 - x - 2 = 0 \to$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \to x = -1, x = 2 \to A(-1, 4), B(2, 1)\ .$$

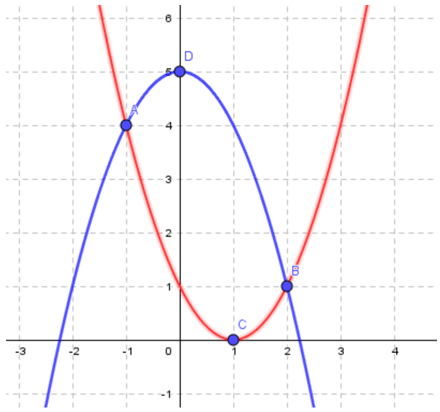
Las dos funciones dadas son parábolas, $f(x) = x^2 - 2x + 1$ es una parábola convexa $(\cup)$ cuyo vértice es:

$f'(x) = 2x - 2 = 0 \to x = 1, f(1) = 0 \to Vértice: C(1, 0).$

La función $g(x) = -x^2 + 5$ es una parábola cóncava $(\cap)$ cuyo vértice es:

$g'(x) = -2x = 0 \to x = 0,\;\; g(0) = 5 \to Vértice: D(0, 5).$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo $[-1, 2]$ todas las ordenadas de $g(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de $f(x)$, por lo cual la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-1}^{2} [(-x^2 + 5) - (x^2 - 2x + 1)] \cdot dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4) \cdot dx =$$

Es un integra inmediata de una función polinómica:

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{2} = \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = \left(-\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 2^2 + 4 \cdot 2\right) - \left[-\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4 \cdot (-1)\right] =$$

$$= -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \frac{2}{3} - 1 + 4 = 15 - \frac{18}{3} = 15 - 6 = 9.$$

$$\boldsymbol{S = 9\ u^2}$$

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 8:

Calcular las integrales indefinidas I y J, explicando los métodos utilizados para su resolución:

$I = \int x \cdot \cos(2x) \cdot dx$ y $J = \int \frac{1}{x^2+2x-3} \cdot dx$.

Solución:

La primera integral se puede resolver por partes.

Utilizamos el método de integración por partes: $\int u dv = uv - \int v du$

I	$u = x$	$du = dx$
	$v = \int \cos(2x)dx = \frac{1}{2} sen(2x) =$	$dv = \cos(2x)dx$

Sustituimos:

$I = \int x \cdot \cos(2x) \cdot dx = x \cdot \frac{1}{2} \cdot sen(2x) - \int \frac{1}{2} \cdot sen(2x) \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot sen(2x) - \frac{1}{2} \cdot \int sen(2x) \cdot dx =$

$= \frac{x}{2} \cdot sen(2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) + C = \frac{1}{4} \cdot [2x \cdot sen(2x) + \cos(2x)] + C.$

$$I = \int x \cdot \cos(2x) \cdot dx = \boldsymbol{\frac{x}{2} \cdot sen(2x) + \frac{1}{4} \cdot \cos(2x) + C}$$

La segunda integral $J = \int \frac{1}{x^2+2x-3} \cdot dx$ es racional. Hallamos las raíces del denominador:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \rightarrow x = -3, x = 1$$

Por tanto:

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1).$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{M}{x+3} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx - M + Nx + 3N}{(x+3)(x-1)} = \frac{(M+N)x + (-M+3N)}{x^2+2x-3}$$

Calculamos los coeficientes igualando: $(M+N)x + (-M+3N) = 1 \rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=0 \\ -M+3N=1 \end{array}\right\} \rightarrow$

$4N = 1;\ \ N = \frac{1}{4};\ \ M = -\frac{1}{4}.$

Sustituyendo obtenemos dos integrales inmediatas de tipo logaritmo:

$J = \int \frac{1}{x^2+2x-3} \cdot dx = \int \left(\frac{-1/4}{x+3} + \frac{1/4}{x-1}\right) \cdot dx = \frac{1}{4} L|x+3| - \frac{1}{4} L|x-1| + C = \frac{1}{4} L\left|\frac{x+3}{x-1}\right| + C.$

$$J = \int \frac{1}{x^2+2x-3} \cdot dx = \boldsymbol{\frac{1}{4} L\left|\frac{x+3}{x-1}\right| + C}$$

Quinta parte

Problema 9:

En una empresa el 70 % de sus trabajadoras están satisfechas con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 % gana más de 1 000 euros. Entre las que no están satisfechas solo el 20 % gana más de 1 000 euros. Si se elige una trabajadora al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane más de 1 000 euros?

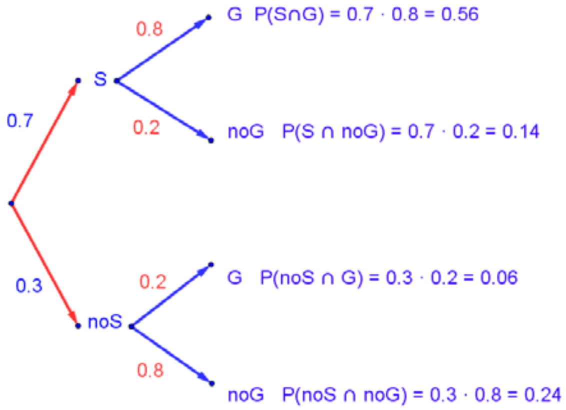
b) Si gana más de 1 000 euros, ¿cuál es la probabilidad que esté satisfecha con su contrato?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane menos de 1 000 euros y esté satisfecha con su contrato?

Solución:

Llamamos S al suceso estar satisfecha con su trabajo, y llamamos G a ganar más de 1 000 euros.

Nos dan los siguientes datos: $P(S) = 0.7$; $P(G/S) = 0.8$; $P(G/noS) = 0.2$. Los llevamos a un diagrama de árbol, que completamos sabiendo que en cada nudo la suma de probabilidades es 1.



Comprobamos que en efecto: 0.56 + 0.14 + 0.06 + 0.24 = 1

a) Para calcular la probabilidad de que gane más de 1 000 euros tenemos que sumar las probabilidades del árbol que terminan en G.

$$P = P(G) = P(S \cap G) + P(noS \cap G) = 0.7 + 0.8 + 0.3 + 0.2 = 0.56 + 0.06 = 0.62$$

La probabilidad de ganar más de mil euros es $\mathbf{0.62}$

b) Nos piden ahora una probabilidad condicionada: $P(S/G)$. Usamos la definición:

$$P(S/G) = \frac{P(S \cap G)}{P(G)} = \frac{0.7 \cdot 0.8}{0.62} = \frac{0.56}{0.62} = 0.9032$$

Si gana más de 1 000 euros, la probabilidad que esté satisfecha con su contrato es $\mathbf{0.9032}$

c) Nos piden ahora una probabilidad de la intersección, que vemos directamente en el árbol: $P(S \cap noG)$.

$$P = P(S \cap noG) = 0.7 \cdot 0.2 = 0.14.$$

La probabilidad de que gane menos de 1 000 euros y esté satisfecha con su contrato es de $\mathbf{0.14.}$

Problema 10:

En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de 0.4, se pide:

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.

b) Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.

c) Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

Solución:

a) En una plaza de aparcamiento únicamente pueden ocurrir dos cosas, que esté ocupado o que no lo esté, por tanto, es el modelo de probabilidad es una distribución binomial de las siguientes características:

$$p = 0.4;\ \ q = 0.6;\ \ n = 30\ \Rightarrow X \sim \boldsymbol{B(30; 0.4)}$$

b) La probabilidad de que de n elementos r sean favorables es la siguiente: $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

En este caso: $n = 30, r = 8\ , p = 0.8, q = 0.6$.

$$P = \binom{30}{8} \cdot 0.4^8 \cdot 0.6^{22} = \frac{30!}{22! \cdot 8!} \cdot 0.4^8 \cdot 0.6^{22} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0.4^8 \cdot 0.6^{22} =$$
$$29 \cdot 27 \cdot 13 \cdot 25 \cdot 23 \cdot 0.4^8 \cdot 0.6^{22} = 5.852.925 \cdot 8.6260 \cdot 10^{-9} = 0.0505$$

c) En lugar de sumar muchas binomiales nos conviene transformar la distribución binomial en una normal:

$\mu = n \cdot p = 30 \cdot 0.4 = 12.\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{30 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = \sqrt{7.2} \cong 2.68$.

$$X = B(30;\ 0.4) \approx N(12;\ 2.68).$$

Tipificamos la variable: $Z \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-12}{2.68}$, y usamos la corrección de Yates sumando al intervalo 0.5 a cada lado:

$P = P(10 \le B \le 20) = P(9.5 \le X \le 20.5) = P\left(\frac{9.5-12}{2.68} \le Z \le \frac{20.5-12}{2.68}\right) = P\left(\frac{-2.5}{2.68} \le Z \le \frac{8.5}{2.68}\right) =$

$= P(-0.93 \le Z \le 3.17) = P(Z < 3.17) - [1 - P(Z < 0.93)] =$

$= P(Z < 3.17) - 1 + P(Z < 0.93) = 0.9992 - 1 + 0.8238 = 1 - 1.8230 = 0.8230.$

La probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados es de $\mathbf{0.8230}$.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

VALENCIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Ramón Podadera Sánchez

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumnado contestará solo TRES problemas entre los seis propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema 1:

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+(a+1)z=2 \\ x+(a-1)y+2z=1 \\ 2x+ay+z=-1 \end{cases}$

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a. (5 puntos)

b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible (5 puntos)

Problema 2:

Se dan los planos: $\pi_1: x+y+z=a-1$, $\pi_2: 2x+y+az=a$ y $\pi_3: x+ay+z=1$

a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a. (4 puntos)

b) Para $a=1$ calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 (3 puntos)

c) Para $a=2$ calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 (3 puntos)

Problema 3:

Consideramos la función $f(x)=\frac{x-1}{x(x+2)}$. Obtened:

a) El dominio y las asíntotas de la función. (2 puntos)

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (4 puntos)

c) La integral $\int f(x)dx$ (4 puntos)

Problema 4:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m. (4 puntos)

b) Explicad cuando la matriz A es invertible. (2 puntos)

c) Resolved la ecuación $XA = I$ donde I es la matriz identidad en el caso $m = 1$ (4 puntos)

Problema 5:

Dados el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano $\pi: 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

a) Calculad la distancia del punto P al plano π. (2 puntos)

b) Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π. (5 puntos)

c) Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π. (3 puntos)

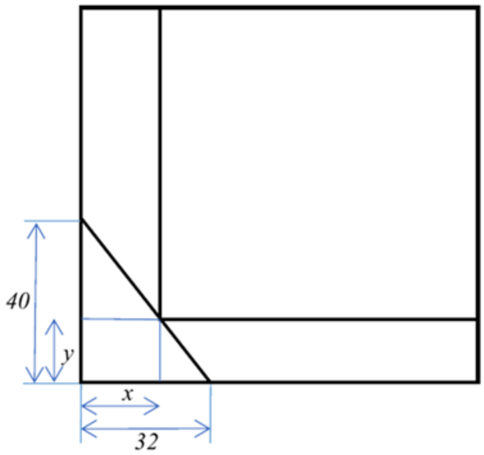
Problema 6:

Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R, uno de cuyos vértices es el punto(x, y) (véase la figura).

a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando $0 \leqslant x \leqslant 32$. (4 puntos)

b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima. (4 puntos)

c) Calculad el valor de dicha área máxima. (2 puntos)



RESPUESTAS

Problema 1:

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+(a+1)z=2 \\ x+(a-1)y+2z=1 \\ 2x+ay+z=-1 \end{cases}$

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a.

b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

Solución:

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a.

Cuando nos piden un estudio se refieren a que lo discutamos utilizando el **Teorema de Rouché-Fröbenius**. Para ello tenemos que estudiar los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada.

Matriz de los coeficientes: $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

Como se trata de una matriz $3x3$ su mayor rango es 3 por lo que calculamos el valor del menor de orden 3 (toda la matriz). Calculamos el valor del determinante:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(a-1)\cdot 1+1\cdot 2\cdot 2+1\cdot a\cdot(a+1)-2\cdot(a+1)\cdot(a-1)-1\cdot 1\cdot 1-1\cdot 2\cdot a=$$

$$=a-1+4+a^2+a-2a^2+2-1-2a=-a^2+4$$

Igualamos a cero para encontrar los valores que anulan el determinante:

$-a^2+4=0 \to a^2=4 \to a=\pm 2$

La primera conclusión que podemos sacar es que si $a\neq 2$ y $a\neq -2$ el $RgM=3$ y como la matriz ampliada es de dimensión $3x4$ y su mayor rango es 3 tenemos que:

Si $a\neq 2$ y $a\neq -2$ el $RgM=3=RgM^*=n$ y el sistema es un *Sistema Compatible Determinado*.

Vamos a estudiar los casos $a=-2$ y $a=2$

- Caso $a=-2$, sustituyendo el valor tenemos que:

  $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Como la 1^a y 2^a fila, al sumarlas, nos da la 3^a dará cero el determinante de orden 3 comprobamos si existe algún menor de orden 2 diferente de cero:

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-3-1=-4\neq 0$ y, por lo tanto, su rango es 2.

  Estudiamos, para este caso, el rango de la matriz ampliada:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Comprobamos si hay un menor de orden 3 diferente de cero, de las cuatro posibilidades hay una que sabemos que vale cero, comprobamos si alguna de las otras tres da:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 6 + 8 + 3 - 1 = 4 \neq 0$, con lo cual es de rango 3, con lo que concluimos que:

Si $a = -2$ el $RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ y el sistema es un *Sistema Incompatible.*

- Caso $a = 2$, sustituyendo el valor tenemos que: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Como la 1ª y 2ª columna son iguales dará cero el determinante de orden 3 comprobamos si existe algún menor de orden 2 diferente de cero:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$ y, por lo tanto, su rango es 2.

Estudiamos, para este caso, el rango de la matriz ampliada:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Comprobamos si hay un menor de orden 3 diferente de cero, de las cuatro posibilidades hay una que sabemos que vale cero, comprobamos si alguna de las otras tres da diferente de cero:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 6 + 2 - 8 + 3 - 1 = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 6 + 2 - 8 + 3 - 1 = 0$;

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + 4 - 4 + 1 - 2 = 0$

Como no hay ningún menor de orden 3 diferente de cero podemos concluir que la matriz ampliada también tiene rango 2 por lo que:

Si $a = 2$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema es un *sistema Compatible Indeterminado*.

La discusión completa del sistema es:

- Si $a = -2$ el $RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ y el sistema será SI
- Si $a = 2$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema será SCI
- Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema será SCD

Por lo que el sistema es compatible para cualquier valor $a \neq -2$

b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible

Tenemos dos casos en los que el sistema es compatible:

- Si $a = 2$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema será SCI
- Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema será SCD

Tenemos que resolver para los dos casos.

Si $a = 2$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema será SCI

Como sabemos que la matriz de los coeficientes tiene rango 2 tomamos las ecuaciones e incógnitas que nos han dado ese rango y, las ecuaciones que quedan fuera las quitamos y las incógnitas que quedan fuera las igualamos a parámetros. El sistema es:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

El menor que nos da diferente de cero es: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$, por lo que quitamos la última ecuación y hacemos $x = \lambda$. El sistema queda:

$$\begin{cases} \lambda + y + 3z = 2 \\ \lambda + y + 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y + 3z = 2 - \lambda \\ y + 2z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Podemos resolver el sistema por reducción (es lo más fácil). Restando las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y + 3z = 2 - \lambda \\ y + 2z = 1 - \lambda \end{cases} \rightarrow z = 1;\ E_1\text{-}E_2$$

Sustituyendo el valor: $y + 3 \cdot 1 = 2 - \lambda \rightarrow y = -1 - \lambda$.

Por lo que la solución para $a = 2$ es $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{\lambda}, -\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{1})$

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema será SCD

El sistema lo tenemos que resolver en función del parámetro que contiene. Vamos a resolver utilizando la **Regla de Cramer** ya que sabemos que el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de los coeficientes no es cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 4 \neq 0, \text{ ya que } a \neq -2 \text{ y } a \neq 2$$

Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 4} = \frac{2 \cdot (a-1) - 2 + a \cdot (a+1) + (a+1) \cdot (a-1) - 1 - 4a}{-a^2 + 4} = \frac{2a^2 - a - 6}{-a^2 + 4}$$

Tenemos que simplificar la expresión:

$$-a^2 + 4 = (2 - a) \cdot (2 + a) \text{ y } 2a^2 - a - 6 = (2a + 3) \cdot (a - 2)$$

$$x=\frac{(2a+3)\cdot(a-2)}{(2-a)\cdot(2+a)}=\frac{-2a-3}{2+a}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & a+1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}}{-a^2+4}=\frac{1+8-(a+1)-2\cdot(a+1)-2+2}{-a^2+4}=\frac{-3a+6}{-a^2+4}=\frac{3\cdot(2-a)}{(2-a)\cdot(2+a)}=\frac{3}{2+a}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & a-1 & 1\\ 2 & a & -1\end{vmatrix}}{-a^2+4}=\frac{-a+1+2+2a-4a+4+1-a}{-a^2+4}=\frac{-4a+8}{-a^2+4}=\frac{4\cdot(2-a)}{(2-a)\cdot(2+a)}=\frac{4}{2+a}$$

Luego la solución queda: $\boldsymbol{x=\frac{-2a-3}{a+2};\ \ y=\frac{3}{a+2};\ \ z=\frac{4}{a+2}, \forall a\in R-\{-2,2\}}$

Problema 2:

Se dan los planos: $\pi_1: x+y+z=a-1$, $\pi_2: 2x+y+az=a$ y $\pi_3: x+ay+z=1$

a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a.

b) Para $a=1$ calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 .

c) Para $a=2$ calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 .

Solución:

a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a.

Para determinar la posición relativa de los mismos tenemos que discutir el sistema que forman las tres ecuaciones de los planos:

$$\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

Utilizamos el **Teorema de Rouché-Fröbenius**. La matriz de los coeficientes es:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Como es una matriz $3x3$ su mayor rango es 3. Sabemos que tendrá, al menos, rango 2 puesto que es fácil encontrar un menor de orden 2 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1-2\cdot 1=-1\neq 0$$

Calculamos el determinante de orden 3 para saber cuándo es diferente de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1\cdot a+2\cdot 1\cdot a-1\cdot 1\cdot 1-2\cdot 1\cdot 1-1\cdot a\cdot a=1+a+2a-1-2-a^2$$
$$=-a^2+3a-2$$

Igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$-a^2+3a-2=0 \to a^2-3a+2=0$(al estar igualada a cero podemos multiplicar por -1)

$$a=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases} \frac{3+1}{2}=2 \\ \frac{3-1}{2}=1 \end{cases}$$

Con lo que tenemos que si $a=1$ o $a=2$ el determinante de la matriz de los coeficientes es cero por lo que su rango será 2 en esos casos y 3 en los demás casos.

Estudiamos ahora la matriz ampliada de los coeficientes:

$$M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Por tratarse de una matriz $3x4$ su mayor rango es 3 por lo que coincidirá con el rango de la matriz de los coeficientes en el caso $a \neq 1$ y $a \neq 2$

Tenemos que estudiar su rango para los casos si $a = 1$ y $a = 2$

- Caso si $a = 1$. Sustituimos en la matriz ampliada el valor y tenemos que:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como las columnas 2ª y 3ª son iguales cualquier menor que las incluya a ambas valdrá cero. Calculamos el valor del menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot1 + 2\cdot1\cdot0 - 1\cdot1\cdot0 - 2\cdot1\cdot1 - 1\cdot1\cdot1 = -1 \neq 0$$

Por lo que si $a = 1, Rg(M^*) = 3$

- Caso si $a = 2$. Sustituimos en la matriz ampliada el valor y tenemos que:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

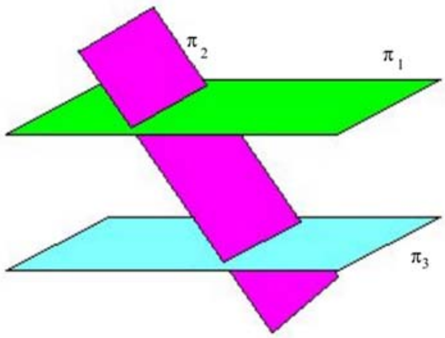
Como las columnas 4ª que hemos añadido es igual a la 1ª y 3ª el rango de la matriz ampliada coincide con el de la matriz de los coeficientes.

Por lo que si $a = 2, Rg(M^*) = 2$

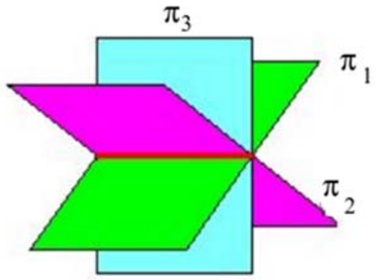
Con estos datos discutimos la posición relativa de los tres planos:

- Si $a = 1 \rightarrow Rg(M) = 2 \neq Rg(M^*) = 3$por lo que el sistema formado por los tres planos es SI (sistema incompatible) los tres planos no tienen ningún punto en común. Si observamos las ecuaciones de los tres planos tenemos que:

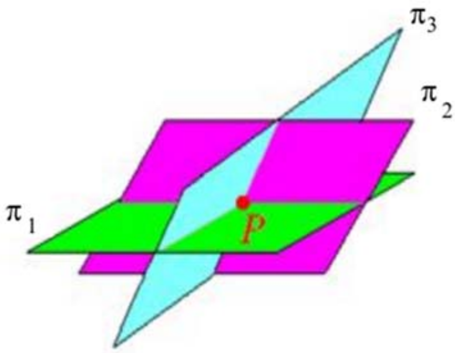
$\pi_1: x + y + z = 0,\ \pi_2: 2x + y + z = 1$ y $\pi_3: x + y + z = 1$ las ecuaciones de los planos π_1 y $\pi_3$tienen el mismo vector normal pero diferente término independiente, esto nos indica que ambos planos son paralelos. Como el otro plano NO es paralelo a esos necesariamente los corta según una recta. La representación sería la de la figura. Son **dos planos paralelos cortados por un tercero mediante dos rectas**.



- Si $a = 2 \rightarrow Rg(M) = 2 = Rg(M^*)$ por lo que el sistema formado por los tres planos es SCI (sistema compatible indeterminado) los tres planos se cortan en infinitos puntos con un grado de libertad (puesto que el rango es 2) eso nos indica que **los tres planos se cortan en una recta común**. La posición sería como la de la figura:



- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \rightarrow Rg(M) = 3 = Rg(M^*)$ por lo que el sistema formado por los tres planos es SCD (sistema compatible determinado) **los tres planos son secantes, se cortan en un punto** que será la solución determinada del sistema. Por lo que la posición relativa es como la de la figura:



b) Para $a = 1$ calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3

Si $a = 1$acabamos de ver que los planos π_1 y $\pi_3$tienen el mismo vector normal pero diferente término independiente, esto nos indica que ambos planos **son paralelos**.

Como son paralelos **NO tienen ninguna recta de corte entre ambos** planos.

c) Para $a = 2$ calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2

Para $a = 2$ hemos visto en el apartado a) que esos dos planos se cortan según una recta. La ecuación de la misma es la solución del sistema formado por las ecuaciones de ambos planos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases} \text{es un } SCI$$

Matriz de los coeficientes: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada: $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$

Buscamos un menor diferente de cero:$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$

Como el menor era con las dos primeras variables hacemos la tercera parámetro$z = \lambda$ y la pasamos al otro miembro para resolver:

$$\begin{cases} x + y = 1 - \lambda \\ 2x + y = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

Podemos resolver por cualquier método. Yo creo que lo más fácil es hacerlo por reducción. Restamos ambas ecuaciones:

$-x = -1 + \lambda \rightarrow x = 1 - \lambda$

Multiplicamos la primera por -2 y sumamos ambas ecuaciones:

$-y = 0 \rightarrow y = 0$

La ecuación pedida, en ecuación paramétrica, es: $r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

Si queremos la ecuación implícita es:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x + z = 1} \\ \boldsymbol{y = 0} \end{cases}$$

Autor: Pedro Podadera Sánchez

Problema 3:

Consideramos la función $f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}$. Obtened:

a) El dominio y las asíntotas de la función.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) La integral $\int f\,(x)dx$.

Solución:

a) El dominio y las asíntotas de la función.

La función es una racional polinómica por lo que estarán fuera del dominio los puntos que anulan el denominador. Para saber el dominio tenemos que resolver la ecuación:

$$x \cdot (x+2) = 0$$

Cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = -2$

El dominio de la función será: $Domf(x)$ =]-∞,-2[U] -2,0[U]0, +∞[o bien:

$$\boldsymbol{Domf(x) = \mathbb{R} - \{-2, 0\}}$$

Asíntotas horizontales. Se encuentran en el valor, si existe, de los límites:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\,(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = 0$ (por ser el grado del denominador mayor que el del numerador) luego tiene asíntota horizontal en $y = 0$ por +∞

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\,(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = 0$ (por ser el grado del denominador mayor que el del numerador) luego tiene asíntota horizontal en $y = 0$ por -∞ .

$$\boldsymbol{La\ recta\ y = 0\ es\ asíntota\ horizontal.}$$

Asíntotas verticales. Las buscamos en las discontinuidades del dominio, el valor del límite a esos puntos tiene que ser un infinito. Tenemos dos valores candidatos: $x = -2$ y $x = 0$ calculamos los límites a esos puntos.

$$\lim_{x\to-2} f\,(x) = \left(\frac{-3}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to-2+} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-2-} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = -\infty \end{cases} \text{ luego } x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x\to0} f\,(x) = \left(\frac{-1}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to0+} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0-} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = +\infty \end{cases} \text{ luego } x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

Las rectas $\boldsymbol{x = -2}$ y $\boldsymbol{x = 0}$ son asíntotas verticales

Como tiene asíntotas horizontales no tiene oblicua.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Para calcularlos tenemos que hacer la derivada e igualar a cero para conocer los puntos críticos. Creo que es más fácil derivar si hacemos el producto del denominador antes de derivar propiamente:

$$f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{x-1}{x^2+2x}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+2x) - (x-1)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x)^2} = \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2} = 0$$

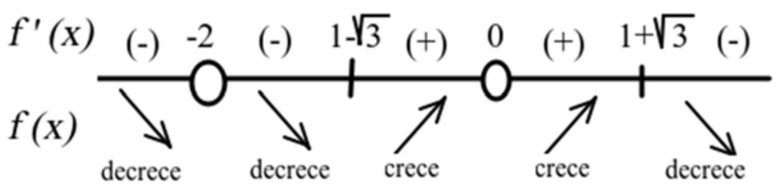
Como es una función racional se hace cero cuando lo es el numerador. Igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$-x^2+2x+2=0$ (multiplicamos por (-1) por estar igualada a cero)

$\rightarrow x^2-2x-2=0 \rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1} = \frac{2\pm\sqrt{12}}{2} = \frac{2\pm2\sqrt{3}}{2} = 1\pm\sqrt{3}$

Por lo que tiene dos posibles puntos críticos: $x_1 = 1+\sqrt{3}$ y $x_2 = 1-\sqrt{3}$

Analizamos el signo de la derivada antes y después de los puntos críticos. En el análisis hay que incluir las discontinuidades del dominio.



Los valores calculados han sido:

$$f'^{(-3)} \simeq -1.44;\ f'^{(-1)} = -1;\ f'^{(-0.5)} \simeq 1.33;\ f'^{(1)} \simeq 0.33;\ f'(3) \simeq -0.004$$

Observando el gráfico tenemos que los intervalos de crecimiento y decrecimiento son:

Crece en $(1-\sqrt{3},\ 0)\ \cup (0, 1+\sqrt{3})$ y decrece en $(-\infty, -2)\ \cup (-2, 1-\sqrt{3})\ \cup\ (1+\sqrt{3}, +\infty)$

$$\mathit{Decrecimiento}: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup \left(-2, 1-\sqrt{3}\right) \cup \left(1+\sqrt{3}, +\infty\right)$$

$$\mathit{Crecimiento}: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(1-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(0, 1+\sqrt{3}\right)$$

c) La integral $\int f\,(x)dx$

Tenemos que realizar la integral: $\int \frac{x-1}{x(x+2)}dx$

Como es una racional polinómica cuyo denominador admite descomposición factorial (nos lo dan descompuesto) vamos a descomponer la fracción como suma de fracciones de denominador más simple en la forma:

$$\frac{x-1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}$$

Para hallar A y B realizamos la operación e igualamos los numeradores (es una identidad):

$$\frac{x-1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)}=\frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)}$$

De la expresión se deduce que:

$A+B=1$ y $2A=-1$

Con lo que: $A=\frac{-1}{2}$ y $B=\frac{3}{2}$

La descomposición es: $\frac{x-1}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{\frac{-1}{2}}{x}+\frac{\frac{3}{2}}{x+2}$

La integral a resolver queda: $\int\frac{x-1}{x(x+2)}dx=\int\left(\frac{\frac{-1}{2}}{x}+\frac{\frac{3}{2}}{x+2}\right)dx$

Que podemos resolver como suma de dos integrales del tipo logaritmo neperiano:

$$\int\frac{x-1}{x(x+2)}dx=\int\left(\frac{\frac{-1}{2}}{x}+\frac{\frac{3}{2}}{x+2}\right)dx=\frac{-1}{2}\int\frac{1}{x}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x+2}dx=\frac{-1}{2}lnx+\frac{3}{2}ln(x+2)+C$$

Si utilizamos las propiedades del logaritmo podemos agrupar el resultado:

$$\frac{-1}{2}lnx+\frac{3}{2}ln(x+2)=ln\sqrt{(x+2)^3}-ln\sqrt{x}=ln\sqrt{\frac{(x+2)^3}{x}}$$

$$\int\frac{x-1}{x(x+2)}dx=\boldsymbol{ln}\left|\sqrt{\frac{(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})^3}{\boldsymbol{x}}}\right|+\boldsymbol{C}$$

Problema 4:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m.

b) Explicad cuando la matriz A es invertible.

c) Resolved la ecuación $XA = I$donde I es la matriz identidad en el caso$m = 1$.

Solución:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m.

Para conocer el rango tenemos que obtener el orden del mayor menor no nulo de la misma. Como es una matriz de dimensión 3x3 el mayor rango es 3.

Estudiamos el determinante de orden 3:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \cdot m \cdot (m^2+1) + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot m - 2 \cdot m^2 - 0 \cdot 2 \cdot (m^2+1) + 1 \cdot 1 \cdot 0$$
$$= -m^3 - 2m^2 - m$$

Debemos saber cuándo este determinante es cero para lo que tenemos que resolver la ecuación:

$-m^3 - 2m^2 - m = 0 \rightarrow -m \cdot (m^2 + 2m + 1) = 0$

Como tenemos dos factores multiplicados e igualados a cero las soluciones son igualar a cero cada factor:

$-m = 0 \rightarrow m = 0$ (primera solución)

$m^2 + 2m + 1 = 0 \rightarrow m = -1$ (segunda solución)

Por lo tanto, ya tenemos que si $m \neq -1$ y $m \neq 0$ el determinante no será cero y, por lo tanto, el rango de la matriz será 3.

Estudiamos los casos $m = 0$ y $m = -1$:

- Si $m = 0$ la matriz queda:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0^2+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante vale cero por tener una fila de ceros. Si tomamos un menor de orden 2 que no tenga elementos de esa fila, por ejemplo: $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$ comprobamos que no es cero y, por lo tanto, el rango de la matriz en este caso es 2.

- Si $m = -1$ la matriz queda:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & (-1)^2+1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

El determinante vale cero por tener dos columnas iguales. Si tomamos un menor de orden 2 que no tenga elementos de esas columnas a la vez, por ejemplo: $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1-0=1\neq 0$ comprobamos que no es cero y, por lo tanto, el rango de la matriz en este caso es 2.

El $Rg(A)=2$ si $m=0$ o $m=-1$ y $Rg(A)=3$ en caso que $m\neq 0$ y $m\neq -1$

b) Explicad cuando la matriz A es invertible.

Una matriz es invertible cuando su determinante es diferente de cero. Por lo estudiado en el apartado anterior podemos afirmar que:

La matriz A es invertible cuando $m\neq 0$ y $m\neq -1$

c) Resolved la ecuación $XA=I$ donde I es la matriz identidad en el caso $m=1$

Como estamos en el caso $m=1$ sabemos que $|A|\neq 0$ y que, por lo tanto, $\exists A^{-1}$

Resolvemos la ecuación con las letras:

$$XA=I$$
$$XAA^{-1}=I\cdot A^{-1}$$
$$X\cdot I=A^{-1}$$
$$X=A^{-1}$$

Por lo cual la matriz buscada es la inversa de la matriz A para el caso $m=1$:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1^2+1\end{pmatrix}\rightarrow A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Podemos calcular la inversa por el Método de Gauss o por determinantes. Yo lo voy a resolver por los dos métodos, pero en el examen basta con uno de ellos.

Por el **Método de Gauss**:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 4 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 2 & -5 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$F_3=F_3+2\cdot F_1$ $\quad F_1=F_1-2\cdot F_2$ $\quad F_1=4\cdot F_1-F_3$

$F_3=F_3-5\cdot F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-4 & 0 & 0 & 2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 2 & -5 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{4} & \frac{1}{4}\end{array}\right)$$

$F_1=F_1/(-4)$

$F_3=F_3/4$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{-5}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix} \text{ o bien } A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & -5 & 1\end{pmatrix}$$

Podemos comprobar si el cálculo está bien hecho (es opcional pero recomendable) aplicando que: $A\cdot A^{-1}=I$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & -5 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2+0+2 & -3+8-5 & -1+0+1\\ 0+0+0 & 0+4+0 & 0+0+0\\ -4+0+4 & 6+4-10 & 2+0+2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Por lo que el cálculo es correcto.

Hacemos el mismo cálculo por determinantes (el resultado será el mismo):

Para calcular la inversa lo hacemos con la fórmula: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=-2+0+0-2-0-0=-4\neq 0$; por lo que $\exists A^{-1}$

Aplicando la fórmula tenemos:

$$A^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -3 & -4 & 5\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}^t=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 0 & -4 & 0\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix}$$

Que es el mismo resultado que el anterior.

Como $X=A^{-1}$ tenemos que:

$$X=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{-5}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix} \text{ o bien } \boldsymbol{X}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Problema 5:

Dados el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano $\pi: 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

a) Calculad la distancia del punto P al plano π.

b) Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π.

c) Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π.

Solución:

a) Calculad la distancia del punto P al plano π.

Para calcular la distancia de un punto a un plano utilizamos la fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

donde el punto es: $P(x_0, y_0, z_0)$y el plano $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

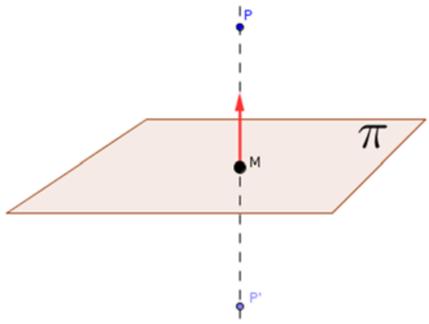
Sustituyendo valores tenemos que:

$$d(P, \pi) = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 + 4}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}\, u.l.$$

$$\boldsymbol{d(P, \pi) = \sqrt{14}}\ unidades\ de\ longitud$$

b) Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π.

Primero hay que saber lo que nos están pidiendo. En principio podemos ver una representación en la figura de la derecha.



Para hallar el simétrico vamos a hallar primero el punto de proyección M del punto sobre el plano. Para ello tenemos que obtener la ecuación de la recta r perpendicular al plano (vector director el normal del plano) y que pasa por el punto:

en forma continua será r: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$

La pasamos a forma general:

r: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1} \to$ tomando la primera y la segunda:

$2x - 2 = 3y - 6 \to 2x - 3y + 4 = 0$

Tomando la primera y la tercera: $x - 1 = 3z - 9 \to x - 3z + 8 = 0$

Por lo que la recta es: $r: \begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ x - 3z + 8 = 0 \end{cases}$

El punto M que buscamos es el punto de corte entre la recta r y el plano π.

Para hallarlo tenemos que resolver el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ x - 3z + 8 = 0 \\ 3x + 2y + z + 4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x - 3z = -8 \\ 3x + 2y + z = -4 \end{cases}$$

Voy a resolverlo por la Regla de Cramer (se puede resolver por cualquier otro método). Determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot(-3)\cdot(-3) + 1\cdot 2\cdot 0 - 3\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot(-3)\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot(-3) = 42 \neq 0$$

Por lo que puede resolverse por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -3 & 0 \\ -8 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{42} = \frac{0 - 36 + 0 - 0 - 24 - 24}{42} = \frac{-84}{42} = -2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -8 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{42} = \frac{-16 + 36 + 0 - 0 + 4 - 24}{42} = \frac{0}{42} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{42} = \frac{0 + 72 - 8 - 0 - 12 + 32}{42} = \frac{84}{42} = 2$$

Luego el punto es $M(-2, 0, 2)$ que es la proyección sobre el plano.

Para calcular el punto pedido podemos hacerlo de diversas formas:

- Utilizando la fórmula del punto medio de dos puntos:

  $$x_M = \frac{x_2 + x_1}{2};\ y_M = \frac{y_2 + y_1}{2};\ z_M = \frac{z_2 + z_1}{2}$$

  Sustituyendo valores: $-2 = \frac{1+x_{P'}}{2} \to x_{P'} = -5$

  $$0 = \frac{2+y_{P'}}{2} \to y_{P'} = -2$$

  $$2 = \frac{3+z_{P'}}{2} \to z_{P'} = 1$$

  Por lo que el punto buscado es el $P' = (-5, -2, 1)$

- Otra forma es calculando el vector $\overrightarrow{PM}$ y aplicarlo en el punto M:

  $\overrightarrow{PM} = (-2 - 1, 0 - 2, 2 - 3) = (-3, -2, -1)$

  Lo aplicamos en el punto: $(-2, 0, 2) + (-3, -2, -1) = (-5, -2, 1)$que es el mismo resultado que el anterior.

El punto simétrico es: $\boldsymbol{P'(-5, -2, 1)}$

c) Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π.

Si es paralelo al plano tendrá su mismo vector normal por lo que su ecuación será (salvo por el coeficiente D): π: $3x + 2y + z + 4 = 0 \to \pi' : 3x + 2y + z + D' = 0$

Como tiene que pasar por el punto P' ha de cumplir su ecuación por lo que sustituyendo las coordenadas del punto hallamos el coeficiente D':

$$3\cdot(-5) + 2\cdot(-2) + 1 + D' = 0 \to -18 + D' = 0 \to D' = 18$$

Por lo que el plano buscado es: $\boldsymbol{\pi' : 3x + 2y + z + 18 = 0}$

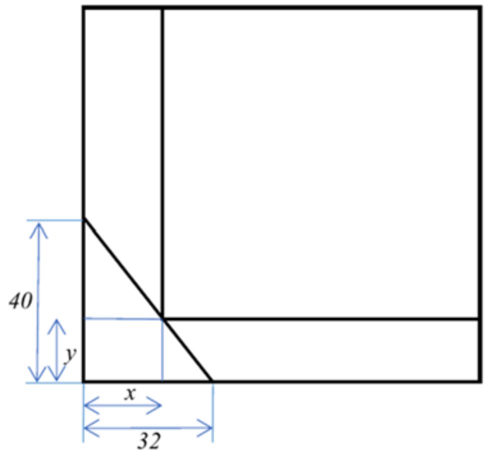
Problema 6:

Un espejo plano, cuadrado, de $80\ \mathrm{cm}$ de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos $32\ \mathrm{cm}$ y $40\ \mathrm{cm}$ respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R, uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura).

a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando$0 \leqslant x \leqslant 32$.

b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima.

c) Calculad el valor de dicha área máxima.



Solución:

a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando $0 \leqslant x \leqslant 32$.

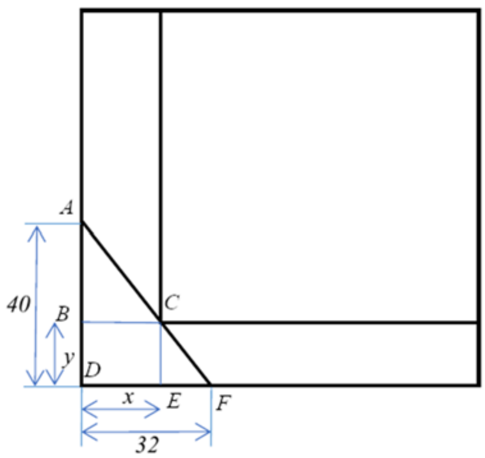
Nos dan un dibujo del problema para hacernos idea de lo que se nos está pidiendo.

Es fácil ver que el área de la pieza que nos piden es: $A(x, y) = (80 - x) \cdot (80 - y)$

(es la anchura o altura del cuadrado menos el trozo que quitamos)

Ahora tenemos que relacionar x e y. Yo lo voy a hacer aquí de dos maneras (en el examen basta con una de ellas).

- Por semejanza de triángulos: En el trozo desprendido podemos apreciar tres triángulos rectángulos semejantes y que, por lo tanto, tienen sus lados correspondientes proporcionales:



Tenemos los triángulos: $A\hat{B}C$; $\hat{A}DF$ y $C\hat{E}F$

Las dimensiones de los lados que forman el ángulo recto, en función de x e y son:

$$\overline{AB} = 40 - y;\ \overline{BC} = x$$

$$\overline{AD} = 40;\ \overline{DF} = 32$$

$$\overline{CE} = y;\ \overline{EF} = 32 - x$$

Podemos establecer la relación de muchas formas ya que, al ser semejantes, cualquier cociente de las dimensiones de los lados es igual en los tres triángulos. Yo voy a utilizar que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DF}} \rightarrow \frac{40-y}{x} = \frac{40}{32} \rightarrow 1280 - 32y = 40x \rightarrow y = \frac{1280-40x}{32} \rightarrow y = \frac{160-5x}{4}$$

Como antes hemos visto que el área es: $A(x,y) = (80-x)\cdot(80-y)$

Sustituyendo la expresión de y: $A(x) = (80-x)\cdot\left(80 - \frac{160-5x}{4}\right)$

Agrupamos términos:

$$A(x) = (80-x)\cdot\left(\frac{160+5x}{4}\right) \rightarrow A(x) = \frac{12800+400x-160x-5x^2}{4} = \frac{12800+240x-5x^2}{4}$$

Por lo que la expresión buscada es:

$$\boldsymbol{A(x) = \frac{12800 + 240x - 5x^2}{4};\ 0 \leqslant x \leqslant 32}$$

- Otra forma de hacer el problema es utilizando geometría analítica. Para ello situamos el espejo en un eje de coordenadas bidimensional con el origen en el punto D. El punto A tiene de coordenadas: $A(0,40)$ y el F tiene de coordenadas $F(32,0)$

  El punto C tiene de coordenadas: $C(x,y)$ y pertenece a la recta que pasa por A y F.

  La ecuación de la recta que pasa por A y F es (ecuación de la recta que pasa por dos puntos):

  $$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \rightarrow \frac{x-32}{0-32} = \frac{y-0}{40-0} \rightarrow 40x - 1280 = -32y \rightarrow y = \frac{1280-40x}{32}$$

  que es la misma relación que hemos hallado anteriormente con la semejanza.

b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima.

Queremos que el área sea máxima. Por lo que tenemos que buscar un máximo para la función:

$$A(x) = \frac{12800 + 240x - 5x^2}{4};\ 0 \leqslant x \leqslant 32$$

Para ello derivamos e igualamos a cero:

$$A'^{(x)} = \frac{240-10x}{4} = 0 \rightarrow 240 - 10x = 0 \rightarrow x = 24 \text{ (es un punto del intervalo}[0,32])$$

Para demostrar que es máximo tenemos que hallar la segunda derivada y comprobar que su valor en el punto es negativo:

$A''(24) = \frac{-10}{4} = -2.5 < 0$; luego es un máximo

Como toda función continua (se trata de una polinómica) definida en un intervalo cerrado, ($[0, 32]$) alcanza el máximo y mínimo absoluto en los máximos y mínimos relativos o en los extremos del intervalo, por lo que comprobamos su valor en el punto hallado y en los extremos:

$A(0) = \frac{12800+240\cdot 0-5\cdot 0^2}{4} = \frac{12800}{4} = 3200$

$$A(24) = \frac{12800 + 240 \cdot 24 - 5 \cdot 24^2}{4} = \frac{15680}{4} = 3920$$

$$A(32) = \frac{12800 + 240 \cdot 32 - 5 \cdot 32^2}{4} = \frac{15360}{4} = 3840$$

Por lo que el máximo absoluto se alcanza en $x = 24$. Hallamos la otra coordenada:

$$y = \frac{1280-40x}{32} \rightarrow y = \frac{1280-40\cdot 24}{32} = \frac{320}{32} = 10$$

El punto $C(x, y)$ es $C(24, 10)$

Las dimensiones de la pieza R son: $80 - 24 = 56$ y $80 - 10 = 70$ es decir: $56 \times 70\ cm$

$$El\ área\ R\ es\ máxima\ cuando\ sus\ dimensiones\ son\ \mathbf{56 \times 70\ cm}$$

c) Calculad el valor de dicha área máxima.

El área será: $A = 56 \times 70 = 3920\ cm^2$

$$El\ área\ máxima\ de\ R\ es\ de\ \mathbf{3\,920\ cm^2}$$

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE JULIO

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumnado contestará solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema 1:

Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$ donde m es un parámetro real. Se pide:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m. (4 puntos)

b) La solución del sistema cuando $m = 1$ (3 puntos)

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado (3 puntos)

Problema 2:

Se dan las rectas $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$, $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi: x + my + z = 2$ que depende del parámetro real m. Obtened:

a) La posición relativa de las rectas r y s. (4 puntos)

b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π (3 puntos)

c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m = 2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P\ (2, 2, 2)$ (3 puntos)

Problema 3:

Dada la función $f(x) = xe^{1-x^2}$, calculad:

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos (4 puntos)

b) Las asíntotas y la gráfica de f. (3 puntos)

c) La integral $\int f(x)dx$ (3 puntos)

Problema 4:

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Obtened

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a. (3 puntos)

b) Una matriz C tal que $AC = 16I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$ (4 puntos)

c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución (3 puntos)

Problema 5:

Dados los puntos $P(1,1,0)$, $Q(2,-1,1)$ y $R(\alpha,3,-1)$, se pide:

a) La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas. (3 puntos)

b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s. (4 puntos)

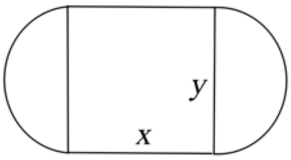
c) Los valores deαpara los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene. (3 puntos)

Problema 6:

Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $(4+\pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo. (5 puntos)

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima. (5 puntos)



RESPUESTAS

Problema 1:

Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$ donde m es un parámetro real. Se pide:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m.

b) La solución del sistema cuando $m = 1$.

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

Solución:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m.

Cuando nos piden una discusión se refieren a que utilicemos el **Teorema de Rouché-Fröbenius**. Para ello tenemos que estudiar los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada.

Matriz de los coeficientes: $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{pmatrix}$

Como se trata de una matriz $3x3$ su mayor rango es 3 (podemos darnos cuenta enseguida que hay menores de orden 2 diferentes de cero) por lo que calculamos el valor del menor de orden 3 (toda la matriz). Calculamos el valor del determinante:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{vmatrix} = 2m - 15 - 4 - 5 + m + 24 = 3m$$

Igualamos a cero para ver los valores que anulan el determinante:

$$3m = 0 \rightarrow m = 0$$

La primera conclusión que podemos sacar es que si $m \neq 0$ el $RgM = 3$ y como la matriz ampliada es de dimensión 3x4 y su mayor rango es 3 tenemos que:

Si $m \neq 0$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema es *Compatible y Determinado*

Si $m = 0$ el $RgM = 2$ ya que el menor de orden 3 es cero pero existen menores de orden 2 que no son nulos: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$

Vamos a estudiar para el caso $m = 0$ el rango de la matriz ampliada:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nos damos cuenta que se trata de un **sistema homogéneo** y debemos saber que un sistema homogéneo sólo puede tener una solución compatible determinada que es la solución trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

El rango de la matriz ampliada con una columna de ceros nunca puede ser mayor que el de la matriz de los coeficientes por lo que tenemos que:

Si $m = 0$ el $RgM = 2 = RgM^* < nºincógnitas$ y el sistema es un Sistema Compatible Indeterminado.

La discusión completa es:

Si $m \neq 0$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ el sistema es Compatible Determinado

Si $m = 0$ el $RgM = 2 = RgM^* < nº\ incógnitas$ el sistema es un Sistema Compatible Indeterminado

b) La solución del sistema cuando $m = 1$.

El sistema queda:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + z = 1 \end{cases}$$

Como $m \neq 0$ sabemos que el sistema es *Compatible y Determinado*

El valor del determinante de la matriz de los coeficientes es:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 15 - 4 - 5 + 1 + 24 = 3 \neq 0$$

Como tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (3) y el determinante de la matriz de los coeficientes no es cero podemos aplicar la **regla de Cramer**:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1 - 3 + 0 - 1 - 0 + 12}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{0 + 15 + 1 - 0 - 1 - 6}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2 + 0 - 4 - 5 + 1 - 0}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

Luego la solución es $\boldsymbol{x = 3;\ y = 3;\ z = -2}$

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

El sistema es Compatible Indeterminado si $m = 0$. En ese caso el sistema queda:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases}$$

Se trata de un sistema homogéneo. Como hemos dicho antes un sistema homogéneo sólo puede tener una solución compatible determinada que es la solución trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Aquí tenemos que buscar una solución indeterminada.

Para ello tomamos el menor que nos daba el rango 2: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

Como vemos es el menor formado por las dos primeras ecuaciones y dos primeras incógnitas. Para resolver quitamos la 3ª ecuación (que es la que queda fuera del menor) y le damos a la tercera incógnita el valor de un parámetro:$z = \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}$

Ahora el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 2x - y + \lambda = 0 \\ x + y + 3\lambda = 0 \end{cases}$$

Pasamos el parámetro al segundo miembro:$\begin{cases} 2x - y = -\lambda \\ x + y = -3\lambda \end{cases}$

Ahora tiene tantas ecuaciones como incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes no es nulo por lo que podemos aplicar la regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -3\lambda & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-\lambda - 3\lambda}{3} = \frac{-4}{3}\lambda;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 1 & -3\lambda \end{vmatrix}}{3} = \frac{-6\lambda + \lambda}{3} = \frac{-5}{3}\lambda$$

Luego la solución es: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \left(\frac{-4}{3}\boldsymbol{\lambda}, -\frac{5}{3}\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}\right);\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

Problema 2:

Se dan las rectas $r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$, $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi: x+my+z=2$ que depende del parámetro real m. Obtened:

a) La posición relativa de las rectas r y s.

b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π.

c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m=2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2,2,2)$.

Solución:

a) La posición relativa de las rectas r y s.

Para estudiar la posición relativa de dos rectas podemos hacerlo estudiando directamente los rangos de las matrices formadas por sus ecuaciones implícitas (con lo que tendremos que manejar determinantes de orden 4x4) o bien estudiando el rango de las matrices formadas por sus vectores directores y un vector obtenido a partir de un par de puntos de las mismas, con lo que estudiaremos sólo determinantes de rango a lo sumo 3x3. Yo voy a hacerlo de la segunda manera.

Necesitamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$$

Como se trata de una recta en forma general para hallar un vector y un punto podemos resolver el sistema compatible indeterminado que forman sus ecuaciones.

Matriz de los coeficientes: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Necesitamos un menor de orden 2 diferente de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0-2=-2 \neq 0$

Hacemos parámetro la coordenada que queda fuera del determinante: $z=\lambda$ y la pasamos al miembro de la derecha:

$$r: \begin{cases} x+y=1 \\ 2x=\lambda+1 \end{cases}$$

Para resolver el sistema no hace falta ningún método especial de resolución ya que tenemos la x casi despejada en la segunda ecuación:

$$x = \frac{\lambda+1}{2}$$

Sustituyendo el valor hallado despejamos la y:

$$\frac{\lambda+1}{2} + y = 1 \rightarrow y = 1 - \frac{\lambda+1}{2} = \frac{2-\lambda-1}{2} = \frac{1-\lambda}{2}$$

Por lo que la ecuación, en paramétricas, es: $r: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases}$

Ahora es fácil obtener un punto y un vector director de la recta:

$$P_r\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right);\ \overrightarrow{v_r}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

$s: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ la recta s está en forma continua por lo que la obtención de un punto y un vector director es inmediata:

$$P_s(1,0,0);\ \overrightarrow{v_s}=(1,-1,2)$$

Hallamos ahora el vector que une ambos puntos:

$$\overrightarrow{P_rP_s}=\left(1-\frac{1}{2},0-\frac{1}{2},0-0\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$$

Formamos ahora una matriz con ambos vectores directores y el vector hallado y tenemos que estudiar el rango de dicha matriz:

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-1}{2}\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

En esta matriz si observamos las dos primeras columnas podemos ver que son proporcionales lo cual nos dice que ambos vectores directores son proporcionales y las rectas son paralelas o coincidentes (ya que tienen la misma dirección).

Sin embargo, al analizar la matriz con la tercera columna (la que contiene al vector de los puntos), podemos apreciar que no es proporcional a las anteriores por lo que la matriz, con esa columna, tendrá rango 2 y las rectas **serán paralelas**. (Si hubiese sido también proporcional serían coincidentes).

Las rectas r y s son paralelas.

b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π

Este apartado podemos abordarlo también de diversas formas. Para que una recta esté contenida en un plano se tienen que dar dos condiciones: su vector director es perpendicular al vector normal del plano y un punto de la recta está en el plano o bien dos puntos están dentro del plano.

$\pi: x+my+z=2$ su vector normal es: $\vec{n}=(1,m,1)$

$$\overrightarrow{v_r}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

Para que sean perpendiculares su producto escalar ha de ser cero:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}=(1,m,1)\cdot\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)=\frac{1}{2}-\frac{m}{2}+1=\frac{3}{2}-\frac{m}{2}\rightarrow\frac{3}{2}-\frac{m}{2}=0\rightarrow\frac{m}{2}=\frac{3}{2}\rightarrow m=3.$$

Con ese valor tenemos que comprobar que un punto de la recta está contenido en el plano:

$P_r\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ queremos saber si pertenece al plano $\pi: x+3y+z=2$ para lo cual sustituimos el punto en la ecuación del plano y comprobamos si se verifica:

$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+0=2$ como podemos observar el punto pertenece al plano y como el vector es ortogonal al plano podemos afirmar que, para el valor $m=3$ la recta r está contenida en el plano π.

Para $\boldsymbol{m}$ **= 3**, la recta r está contenida en el plano π.

c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m=2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2,2,2)$

Como nos dicen que $m=2$ la ecuación del plano es: $\pi: x+2y+z=2$

Tenemos que buscar ahora los puntos de intersección del plano con los ejes coordenados. Las ecuaciones de los ejes son:

Eje OX: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ Eje OY: $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ Eje OZ: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Para encontrar los puntos de intersección basta con resolver los sistemas que forman las ecuaciones de cada eje con la ecuación del plano:

Eje OX: $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow x=2$ luego el punto es: $A(2,0,0)$

Eje OY: $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow y=1$ luego el punto es: $B(0,1,0)$

Eje OZ: $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow z=2$ luego el punto es: $C(0,0,2)$

Ahora tenemos que hallar el volumen del tetraedro formado por esos tres puntos y $P(2,2,2)$Tomamos un punto como origen y hallamos los tres vectores desde ese punto a los otros tres vértices:

$\overrightarrow{PA}=(2-2,0-2,0-2)=(0,-2,-2)$

$\overrightarrow{PB}=(0-2,1-2,0-2)=(-2,-1,-2)$

$\overrightarrow{PC}=(0-2,0-2,2-2)=(-2,-2,0)$

Debemos conocer que el volumen del tetraedro es 1/6 del valor absoluto producto mixto de los tres vectores que forman sus aristas con un vértice común:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left|\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}\right)\right|\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}|0-8-8+4-0-0|=2\,u^3$$

El volumen del tetraedro mide: $\boldsymbol{V=2u^3}$

Problema 3:

Dada la función $f(x) = xe^{1-x^2}$, calculad:

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos

b) Las asíntotas y la gráfica de f.

c) La integral $\int f(x)dx$

Solución:

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos

Se trata de una función polinómica por una exponencial de exponente polinómico. Tanto una como la otra no presenta problemas de dominio (su dominio son todos los reales). Por lo que tenemos que:

El dominio de la función será: $\boldsymbol{Dom f(x)} = \mathbb{R}$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Para calcularlos tenemos que hacer la derivada e igualar a cero para conocer los puntos críticos. Se trata de un producto de dos funciones por lo que la derivada será:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x^2} + x \cdot e^{1-x^2} ln e \cdot (-2x) = e^{1-x^2} - 2x^2 e^{1-x^2} = e^{1-x^2} \cdot (1 - 2x^2) = 0$$

Tenemos un producto de dos funciones igualado a cero. Las soluciones se obtienen al igualar a cero cada una de las funciones, pero una exponencial nunca puede ser cero, por lo que la primera función no nos proporciona ninguna solución:

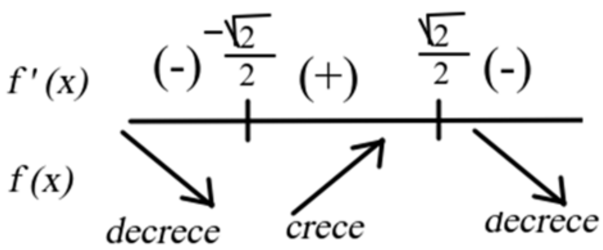
$$e^{1-x^2} \neq 0 \qquad 1 - 2x^2 = 0 \rightarrow -2x^2 = -1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$$

Por lo que tenemos dos posibles puntos críticos: $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Analizamos el signo de la derivada antes y después de los puntos críticos. En el análisis hay que incluir las discontinuidades del dominio, pero en este caso no hay ninguna:

Los valores calculados han sido:

$$f'(-1) = -1 < 0$$
$$f'(0) = e > 0$$
$$f'(1) = -1 < 0$$



Observando el gráfico tenemos que los intervalos de crecimiento y decrecimiento son:

Crece en $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ y decrece en $\left]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$

Por el gráfico podemos observar que tiene un máximo en $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y un mínimo en $x_2=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

Hallando la segunda coordenada:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}\simeq 1.1658$$

$$f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}e^{1-\frac{1}{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}\simeq -1.1658$$

El máximo es: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}\right)$ y el mínimo es: $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}\right)$

b) Las asíntotas y la gráfica de f.

Asíntotas horizontales. Se encuentran en el valor, si existe de los límites:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{1-x^2}=0$ (ya que, al tender a infinito, quitamos el 1 del exponente y pasamos toda la exponencial al denominador, el cociente de un polinomio entre una exponencial, por comparación de infinitos es cero) luego tiene asíntota horizontal en $y=0$ por +∞

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{1-x^2}=0$ por la misma razón que el anterior tiene asíntota horizontal en $y=0$ por -∞.

Veamos las tendencias (cómo se acerca la función a la asíntota) para ello calculamos un valor relativamente grande y comprobamos si sale un valor algo mayor o menor que el de la asíntota:

$f(10)=10e^{1-10^2}=1.011\cdot 10^{-42}>0$ luego va por encima de la asíntota en +∞

$f(-10)=-10e^{1-(-10)^2}=-1.011\cdot 10^{-42}<0$ luego va por debajo de la asíntota en -∞

Asíntotas verticales. Las buscamos en las discontinuidades del dominio, el valor del límite a esos puntos tiene que ser un infinito. Como en este caso el dominio es $Domf(x)=\mathbb{R}$ y no presenta discontinuidades la función **no tiene asíntotas verticales.**

Como tiene asíntotas horizontales no tiene oblicuas.

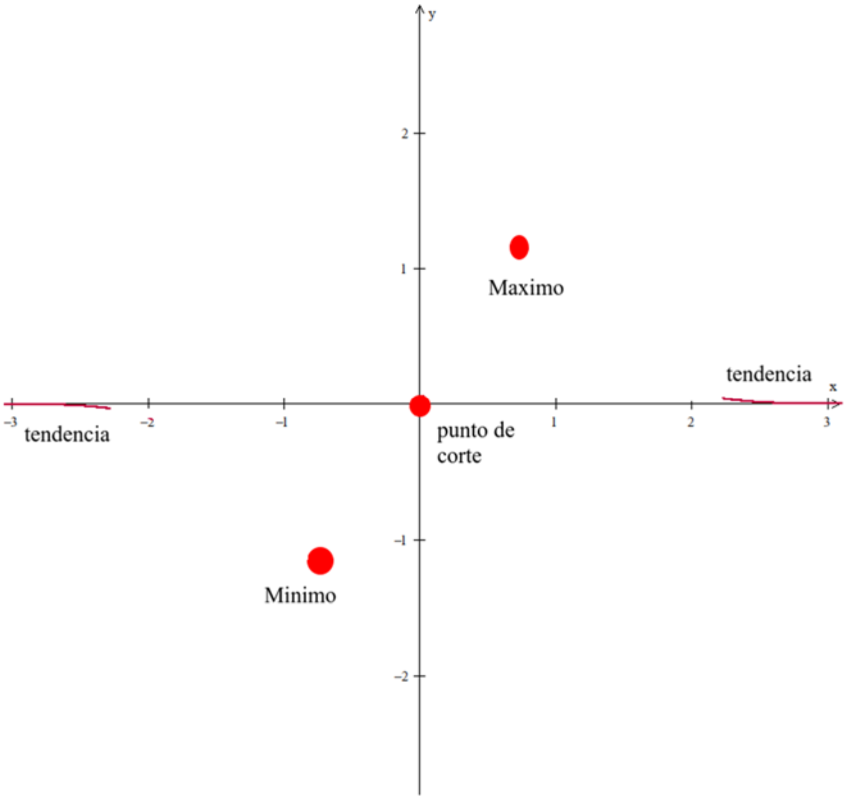
Asíntota horizontal y = 0

Para dibujar la gráfica nos basamos en las asíntotas, sus tendencias, el máximo y mínimo hallados y la monotonía:

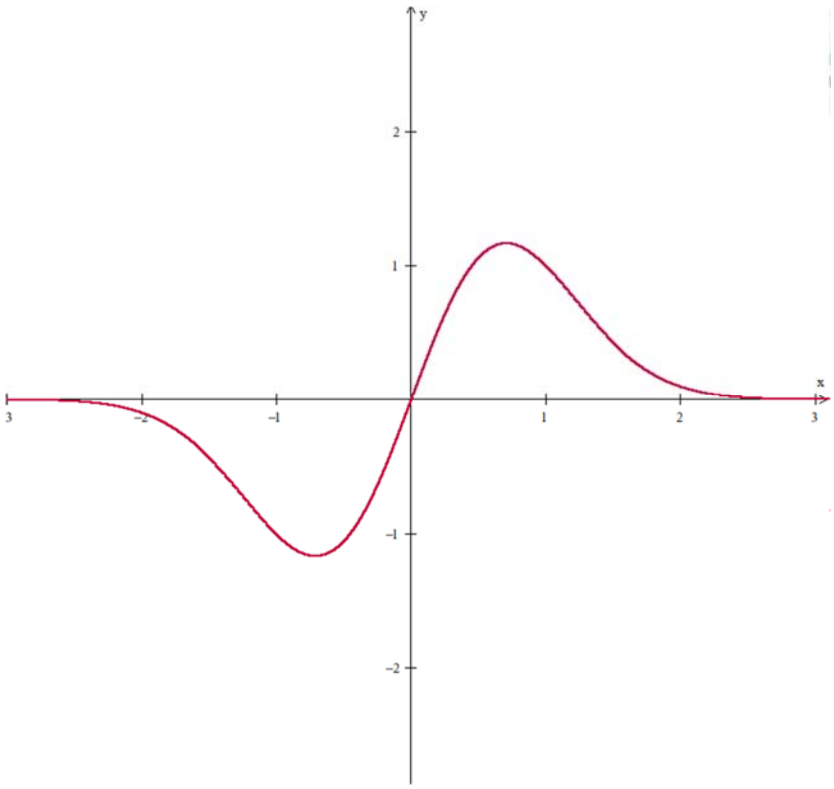
También podemos hallar el punto de corte de la gráfica con los ejes que es (para ambos casos) el (0, 0):

$$f(0)=0e^{1-0^2}=0$$

$$xe^{1-x^2}=0\to x=0$$



La gráfica queda:



c) La integral $\int f\,(x)dx$

Tenemos que realizar la integral:

$$\int f\,(x)dx = \int x\,e^{1-x^2}dx$$

Por tratarse de una exponencial y un polinomio podríamos pensar que se trata de una integral por partes. Sin embargo, para que esto fuese así, la integral de la parte exponencial ha de ser inmediata y, en este caso, no lo es, puesto que el exponente es un polinomio de segundo grado.

Procede hacer un **cambio de variable** ya que el polinomio del exponente es de segundo grado (su derivada será de primer grado) y hay un polinomio de primer grado multiplicando a la diferencial.

Hacemos el cambio: $1 - x^2 = t$

$$\int f\,(x)dx = \int x\,e^{1-x^2}dx = \left| \begin{matrix} 1-x^2 = t \\ -2xdx = dt \to xdx = \dfrac{dt}{-2} \end{matrix} \right| = \int e^t \frac{dt}{-2} = \frac{-1}{2}\int e^t\,dt = \frac{-1}{2}e^t + C$$
$$= \frac{-1}{2}e^{1-x^2} + C$$

Luego la integral pedida es:

$$\boldsymbol{\int f\,(x)dx = \frac{-1}{2}e^{1-x^2} + C}$$

Problema 4:

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}(1 \quad 2 \quad 3)$. Obtened

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

b) Una matriz C tal que $AC = 16I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$.

c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución.

Solución:

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

La matriz A es una matriz de dimensión 3x3 por lo que puede tener hasta rango 3. Analizamos el valor del determinante de mayor orden (3):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 2 - 3(a^2-2) - 3a + 6 - (a^2-2) = -4a^2 + 16$$

Vamos a analizar cuándo vale cero:

$$-4a^2 + 16 = 0 \rightarrow -4a^2 = -16 \rightarrow a^2 = \frac{-16}{-4} \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2$$

Luego el rango de la matriz A será 3 si $a \neq \pm 2$. Veamos qué pasa cuando $a = \pm 2$:

Existe un menor de orden 2 que no depende de a y que no es cero:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0$ por lo que el rango de A es 2.

Tenemos que $\boldsymbol{RgA = 3 \; si \; a \neq \pm 2}$ y $\boldsymbol{RgA = 2 \; si \; a = \pm 2}$.

b) Una matriz C tal que $AC = 16I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$

Despejamos con las letras:

$AC = 16I$	Multiplicamos por la izquierda por la inversa de A
$A^{-1} \cdot AC = A^{-1} \cdot 16I$	Utilizamos que $A^{-1} \cdot A = I$ y que los números conmutan
$I \cdot C = 16A^{-1} \cdot I$	Utilizamos que cualquier matriz por la identidad es la misma matriz
$C = 16A^{-1}$	Que es la matriz que tenemos que hallar.

Tenemos que calcular la inversa de A. Podemos hacerlo por el Método de Gauss o por determinantes. Yo lo voy a hacer de las dos maneras, pero en el examen basta con una de ellas.

Como nos dicen que $a = 0$ tenemos que la matriz es ahora: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Por el Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$F_2 = F_2 + F_1$
$F_3 = F_3 - F_1$

$F_1 = F_1 - F_2$
$F_3 = F_3 + 2F_2$

$F_1 = 8F_1 + F_3$
$F_2 = 2F_2 - F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$F_1 = F_1/8$
$F_2 = F_2/4$
$F_3 = F_3/8$

Por lo que tenemos que: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

No es obligatorio, pero sí conveniente comprobar el resultado utilizando que: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8} & \frac{1}{4}+0-\frac{1}{4} & \frac{3}{8}-\frac{3}{4}+\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4}-0-\frac{1}{4} & \frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} & \frac{3}{4}+0-\frac{3}{4} \\ \frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8} & \frac{1}{4}+0-\frac{1}{4} & \frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que es correcto el resultado.

Por determinantes:

Utilizamos la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 6 - 0 + 6 + 2 = 16 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Aplicando la fórmula tenemos:

$$A^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -12 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Lógicamente es el mismo resultado que por el anterior método por lo que no vamos a comprobarlo.

Tenemos que hallar la matriz C.

$$C=16A^{-1} \rightarrow C=16\cdot A^{-1}=16\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo que: $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-12} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución.

Como nos dicen que: $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}(1 \quad 2 \quad 3)$ tenemos que hacer la operación para conocer sus elementos:

$$B=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}(1 \quad 2 \quad 3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Para conocer el rango tenemos que determinar el número máximo de filas o columnas linealmente independientes. Sin embargo, nos podemos dar cuenta fácilmente que, en este caso, la segunda fila es igual a la primera multiplicada por -1 y la tercera fila es el doble que la primera por lo que **sólo una fila es independiente** y el rango es 1.

$$\boldsymbol{RgB=1}$$

Ahora tenemos que determinar si el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución. Aplicando el Teorema de

Rouché-Fröbenius sabemos que tendrá solución si los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada son coincidentes.

Por el subapartado anterior sabemos que la matriz de los coeficientes (B) tiene de rango 1.

Tomamos ahora la matriz ampliada del sistema:

$$B^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

Podemos de nuevo observar que la segunda fila es igual a la primera multiplicada por -1 y la tercera fila es el doble que la primera por lo que **sólo una fila es independiente** y el rango es 1 de nuevo.

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius $RgB = RgB^* = 1 < nº\ incógnitas \Rightarrow SCI$

Luego **el sistema tiene solución** (es compatible) indeterminado (por ser menor el rango que el número de incógnitas).

El sistema es compatible indeterminado, por lo que **sí tiene solución**.

Problema 5:

Dados los puntos $P(1,1,0)$, $Q(2,-1,1)$ y $R(\alpha,3,-1)$, se pide:

a) La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas.

b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s.

c) Los valores de α para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene.

Solución:

a) La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas.

Como sabemos para determinar la ecuación de un plano hacen faltan un punto y dos vectores directores. Vamos a tomar el punto de referencia P y los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{PQ} = (2-1, -1-1, 1-0) = (1,-2,1)$

$\overrightarrow{PR} = (1-1, 3-1, -1-0) = (0,2,-1)$

Para determinar la ecuación implícita calculamos el determinante formado por el punto y los vectores directores en la forma: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2(x-1) + 0(y-1) + 2(z-0) - 0(z-0) + 1(y-1) - 2(x-1) = 0 \rightarrow$

$\boldsymbol{y + 2z - 1 = 0}$ que es la ecuación buscada.

Ahora tenemos que determinar la distancia de ese plano al origen.

Para calcular la distancia de un punto a un plano utilizamos la fórmula:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

donde el punto es: $O(0,0,0)$ y el plano $y + 2z - 1 = 0$

Sustituyendo valores tenemos que:

$$d(O,\pi) = \frac{|0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 - 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} u.l.$$

$$\boldsymbol{d(O,\pi) = \frac{\sqrt{5}}{5} u.l.}$$

b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s.

Para determinar la ecuación de una recta nos hace falta un punto y un vector director.

El punto lo tenemos ya que la recta r pasa por R cuando $\alpha = 1$, es decir, el punto $R(1,3,-1)$

Como es paralela a la recta s que pasa por P y Q ha de tener su mismo vector director (el que une ambos puntos):

$\overrightarrow{PQ} = (2-1,-1-1,1-0) = (1,-2,1)$

Damos la ecuación de la recta r en forma continua:

$$\boldsymbol{r}: \frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{y}-\mathbf{3}}{-\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{z}+\mathbf{1}}{\mathbf{1}}$$

Ahora tenemos que calcular la distancia entre ambas rectas. Como son paralelas la distancia entre ellas es la misma que la de cualquier punto de una a la otra recta.

Vamos a utilizar el punto que tenemos de la recta r que es el punto$R(1,3,-1)$y la recta s.

Fórmula de la distancia de un punto a una recta:

$d(R,s) = \frac{|\overrightarrow{PR}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$ donde P es un punto de s y $\vec{v}$ es un vector director de s.

Tomamos como punto de s el P por lo que:

$\overrightarrow{PR} = (1-1,3-1,-1-0) = (0,2,-1)$

Y como vector director el hallado anteriormente: $\vec{v} = (1,-2,1)$

Hallamos los valores necesarios para aplicar la fórmula: $|\vec{v}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6}$

$$\overrightarrow{PR}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} - 2\vec{k} = (0,-1,-2)$$

$|\overrightarrow{PR}\times\vec{v}| = \sqrt{0^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$

Por lo que la distancia pedida es:

$$d(R,s) = \frac{|\overrightarrow{PR}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}\ u.l.$$

c) Los valores de α para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene.

Para hacer el ejercicio más corto podemos trazar la recta que pasa por P y Q y después comprobar el valor de α que hace que pertenezca a esa recta. Si lo hacemos así la segunda parte estará resuelta.

Para determinar la ecuación de una recta nos hace falta un punto y un vector director.

El punto lo tenemos ya que la recta t pasa por P, es decir, el punto $P(1,1,0)$

Como pasa por P y Q ha de tener como vector director el que une ambos puntos:

$\overrightarrow{PQ} = (2-1, -1-1, 1-0) = (1, -2, 1)$

Damos la ecuación de la recta en forma continua:

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}$$

Ahora el punto $R(\alpha, 3, -1)$ ha de pertenecer a esa recta por lo que tiene que verificar su ecuación, es decir:

$$\frac{\alpha-1}{1} = \frac{3-1}{-2} = \frac{-1-0}{1} \to \alpha - 1 = -1 = -1$$

Como vemos la última ecuación se cumple para que lo hagan las otras dos basta con que se cumpla que:

$\alpha - 1 = -1 \to \alpha = 0$

Por lo que para el valor $\alpha = 0$ los tres puntos están alineados y los contiene la recta:

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}$$

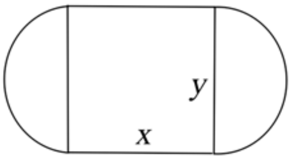
Para el valor $\boldsymbol{\alpha = 0}$ los tres puntos están alineados

Problema 6:

Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $(4+\pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo.

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima.



Solución:

a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo.

La figura está formada por un rectángulo y una circunferencia (si unimos las dos semicircunferencias forman una única figura).

La longitud de las líneas del rectángulo es: $L_r = 2x + 2y$

La longitud de la circunferencia (el radio es $y/2$): $LC = 2\pi \cdot \frac{y}{2} = \pi y$

Sumando ambas longitudes tenemos la longitud total:

$$L = L_r + L_c = 2x + 2y + \pi y = 2x + (2+\pi)y$$

Como queremos que esté sólo en función de la altura y del rectángulo tenemos que buscar una relación entre ambas variables.

El dato que tenemos adicional que las relaciona es la superficie del campo: $(4+\pi)$

Esta superficie se obtiene sumando el área del rectángulo y de la circunferencia:

$$S = S_r + S_c = x \cdot y + \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 = x \cdot y + \pi \cdot \frac{y^2}{4}$$

Ahora tenemos que sustituir la superficie por su valor y despejar la x:

$$4+\pi \ = x \cdot y + \pi \cdot \frac{y^2}{4} \ \rightarrow \ 4+\pi-\pi \cdot \frac{y^2}{4} = x \cdot y \ \rightarrow \ \frac{16+4\pi-\pi \cdot y^2}{4} = x \cdot y \ \rightarrow \ \frac{16+4\pi-\pi \cdot y^2}{4y} = x$$

Ahora hay que sustituir la expresión hallada en la de la longitud que teníamos:

$$L = 2x + (2+\pi)y \ \rightarrow L = 2 \cdot \left(\frac{16+4\pi-\pi \cdot y^2}{4y}\right) + (2+\pi)y$$

Debemos simplificar la expresión:

$L = 2 \cdot \left(\frac{16+4\pi-\pi\cdot y^2}{4y}\right) + (2+\pi)y \rightarrow L = \frac{16+4\pi-\pi\cdot y^2}{2y} + (2+\pi)y \rightarrow$

$\rightarrow L = \frac{16+4\pi-\pi\cdot y^2+4y^2+2\pi y^2}{2y} \rightarrow L = \frac{16+4\pi+(4+\pi)y^2}{2y}$

Si lo separamos en términos:

$$\boldsymbol{L(y) = \frac{8+2\pi}{y} + 2y + \frac{\pi}{2}y}$$

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima.

Como queremos usar la menor cantidad de pintura posible tenemos que buscar las dimensiones del campo de forma que la longitud sea mínima.

Es decir, tenemos que buscar un mínimo a la función:

$$L(y) = \frac{8+2\pi}{y} + 2y + \frac{\pi}{2}y$$

Para ello derivamos en función de y, igualamos a cero y despejamos el valor de y:

$L'(y) = \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + 2 + \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + \frac{4+\pi}{2} = 0 \rightarrow \frac{4+\pi}{2} = \frac{8+2\pi}{y^2} \rightarrow$

$\rightarrow (4+\pi)\cdot y^2 = 16+4\pi \rightarrow y^2 = \frac{16+4\pi}{4+\pi} \rightarrow y^2 = \frac{4\cdot(4+\pi)}{4+\pi} = 4 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$

Fijémonos que sólo nos interesa estudiar el valor positivo $y = 2$ puesto que la variable es una dimensión de un campo (no puede ser negativa):

Para demostrar que es mínimo tenemos que hallar la segunda derivada y comprobar que su valor en el punto es positivo:

$L'(y) = \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + 2 + \frac{\pi}{2} \rightarrow L''(y) = \frac{2(8+2\pi)}{y^3} \rightarrow L''(y) = \frac{16+4\pi}{y^3}; L''(2) = \frac{16+4\pi}{2^3} \simeq 3.57 > 0$

Luego $y = 2$ es un mínimo.

La función $L(y)$ es continua en el intervalo $(0, +\infty)$ y el único extremo relativo en ese intervalo ha sido el $y = 2$. Como la función decrece para los valores menores y crece para los mayores está claro que será un extremo absoluto puesto que no ha salido ningún cambio de la monotonía en ese intervalo.

Por lo que el mínimo absoluto es en $y = 2$ hallamos la otra coordenada:

$x = \frac{16+4\pi-\pi\cdot y^2}{4y} \rightarrow x = \frac{16+4\pi-\pi\cdot 2^2}{4\cdot 2} = 2$

Por lo que los valores de las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima son:

$$\boldsymbol{x = 2; y = 2}$$

Es un cuadrado de lado 2 y las semicircunferencias laterales tienen radio 1.

Otras webs con problemas de Selectividad resueltos

En la web puedes encontrar muchos problemas resueltos de los propuestos en selectividad.

https://www.ebaumatematicas.com/

El objetivo de esta página web es ser una herramienta para dar fácil y rápido acceso a los exámenes EBAU de matemáticas II y matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II de todas las comunidades autónomas de España realizados los últimos años: 2017, 2018, 2019.

Aparecen los exámenes oficiales de la comisión organizadora de cada comunidad y dichos exámenes resueltos, a veces, de distintas maneras.

La resolución de los exámenes ha sido labor de Juan Antonio Martínez García, Juan Carlos Alonso Gianonatti, Germán Jesús Rubio Luna, Segundo Pérez, Julio García Galavis, Enrique Castaños García, Antonio Cascales Vicente, Jesus y José María Amorena Erdozáin..

Agradezco la generosa e importante aportación de cada uno de ellos.

Cuando la comisión organizadora de las pruebas EBAU ofrece la resolución o soluciones de las pruebas también se adjuntan esos archivos oficiales.

Tienen la intención de ser una web dinámica e ir creciendo poco a poco, y se agradecen aportaciones para corregir o añadir algún examen que falte en nuestra abundante oferta.

Solo aparecen los exámenes a partir del 2017, año en que se implantó la LOMCE y cambiaron los contenidos de las pruebas.

De distinta autores y de diferentes institutos, con enunciado y problemas resueltos de varios años.

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Con exámenes resueltos de Navarra

http://multiblog.educacion.navarra.es/jamorena/files/2019/09/Examen-ordinario-de-2019.pdf

Con exámenes resueltos de Andalucía

http://matestube.blogspot.com/2019/06/2-bachillerato-examen-matematicas-ii.html

Con exámenes resueltos de Andalucía

https://www.emestrada.org/2019-septiembre-examen-selectividad-matematicas-andalucia/

Con exámenes resueltos de Cataluña
http://universitats.gencat.cat/ca/pau/model_examens/

Autor: Isaac Musat. Problemas de la Comunidad de Madrid. Sólo enunciados, pero de muchos años. Organizados por materias.
http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
Del mismo autor. Problemas resueltos de Madrid y Valencia. Los del año 2019 a partir de la página 503.
http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

Centro aragonés de Tecnologías para la educación
http://catedu.es/matematicas_mundo/PAU/PAU.htm

Exámenes de Selectividad de Extremadura resueltos. De autor: Vicente González Valle. Organizados por materias: Análisis, Álgebra, Geometría y Probabilidad y Estadística
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf

Autor: Pedro Reina. Exámenes de selectividad resueltos de la Comunidad de Madrid hasta el año 2015
http://pedroreina.net/pau/

Página de Orientación Andújar con exámenes resueltos hasta el año 2011.
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/

Selectividad de la Comunidad de Madrid hasta el 2015
http://www.ejerciciosmatematicas.net/selectividad/

Autor: Segundo Pérez. Selectividad en la comunidad valenciana hasta el 2019
http://www.segundoperez.es/

Selectividad del País Vasco hasta el 2019.
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

Varias comunidades, varios exámenes resueltos
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-
tic/18008841a/helvia/aula/archivos/repositorio/0/117/html/selectividadmatematicas/index.html

Vídeos con las soluciones de exámenes
https://www.youtube.com/watch?v=DJFSsrvY1BM

Las universidades en ocasiones editan las soluciones de los problemas que se han propuesto.

SELECTIVIDAD 2021

Matemáticas II

ÍNDICE