Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Textos Marea Verde

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

Textos Marea Verde

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Javier Ros Castellón

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

Problema 1:

Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A. Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6.000 euros a la semana para el coste total de producción. Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, ¿cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio total sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

Problema 2:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con m un parámetro real.

$a)$ ¿Para qué valores del parámetro m existe la inversa de A?

$b)$ Para $m = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - A^2 = I_3$.

BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

$a)$ Estudie su monotonía y calcule sus extremos.

$b)$ Represente gráficamente la función.

$c)$ Calcule $I = \int f(x) \cdot dx$.

$d)$ Calcule el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Problema 4:

$a)$ Calcule la derivada de las funciones: $f(x) = L\frac{x-1}{x+1}$ y $g(x) = x^3 \cdot e^{2x^2}$.

$b)$ Represente gráficamente la parábola $h(x) = x^2 + x + 1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

$c)$ Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x) = x^2 + x + 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 0$.

BLOQUE C

Problema 5:

Se desea probar la eficacia de dos tipos de vacunas, A y B, contra un virus determinado. Para ello, se seleccionan 500 voluntarios sin anticuerpos para este virus, a los que se les administra una de las vacunas o un placebo, resultando que 300 reciben la vacuna A, 150 la B y el resto el placebo. Se comprueba que el 90 % de los vacunados con la A y el 95 % de los vacunados con la B, generan anticuerpos, no generando anticuerpos de los que han recibido el placebo. Se selecciona uno de esos voluntarios al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya generado anticuerpos?

b) Si dicho voluntario no ha generado anticuerpos, ¿qué probabilidad hay de que se le haya administrado placebo?

Problema 6:

De las compras realizadas en el último período de rebajas del pasado año, el 55 % se dedicaron a productos electrónicos, el 72 % se hicieron a través de Internet y, de las compras que se hicieron por Internet, el 64 % fueron de productos electrónicos. Se elige una compra al azar,

a) Calcule la probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por Internet.

b) Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por Internet o que se hayan comprado productos electrónicos.

c) Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de Internet.

BOQUE D

Problema 7:

a) En una Escuela Politécnica hay matriculados en el último curso 60 estudiantes de Ingeniería Eléctrica, 40 en Ingeniería Informática, 30 en Ingeniería Civil, 50 en Ingeniería Mecánica y 20 en Ingeniería Aeronáutica. Se quiere hacer una encuesta al 20 % de estos estudiantes, de manera proporcional al número de matriculados en cada titulación.

1.- ¿Qué tipo de muestreo se debe emplear?

2.- ¿Cuántos alumnos debe haber en la muestra y cuántos de cada titulación?

b) Dada la población $\{a, 10, 12, 11, 18\}$, ¿cuánto debe valer a, sabiendo que la media de las medias muestrales de tamaño 3, obtenidas mediante muestreo aleatoria simple, es 13.2?

Problema 8:

Se desea estimar la proporción de individuos mayores de edad de una localidad que están en contra de la construcción de una central nuclear en su término municipal. Para ello, se pregunta a 100 individuos mayores de edad de esa localidad, elegidos de forma aleatoria, resultando que 45 de ellos rechazan la construcción de la central.

a) Calcule un intervalo de confianza al 92 % para estimar la proporción real de individuos de esa localidad que están en contra de la construcción de la central?

b) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar, para que al estimar la proporción de individuos de esa localidad que rechazan la construcción de la central, el error cometido sea inferior al 5 %.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO DEL BLOQUE A

Problema 1:

Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A. Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6 000 euros a la semana para el coste total de producción. Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, ¿cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio total sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

Solución:

Estamos ante un problema de *Programación Lineal*. Debemos obtener, por tanto, la *función objetivo* a optimizar (en este caso maximizar) y las *restricciones* a las que está sujeta.

Los puntos del plano que cumplan todas las restricciones estarán en una región del plano llamada *región factible*. La *solución óptima* será aquella que optimice la función objetivo. Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

Dispongamos los datos del problema en una tabla:

	Número de baterías	Gastos de producción	Beneficio
Batería A	x	$150x$	$130x$
Batería B	y	$100y$	$140y$

Nuestra **función objetivo** a maximizar es:

$$F(x, y) = 130x + 140y$$

Y las **restricciones** a las que debe estar sujeta son:

$$\left.\begin{array}{c} x + y \geq 10 \\ \mathrm{y} \leq \mathrm{x} + 10 \\ 150\mathrm{x} + 100\mathrm{y} \leq 6000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

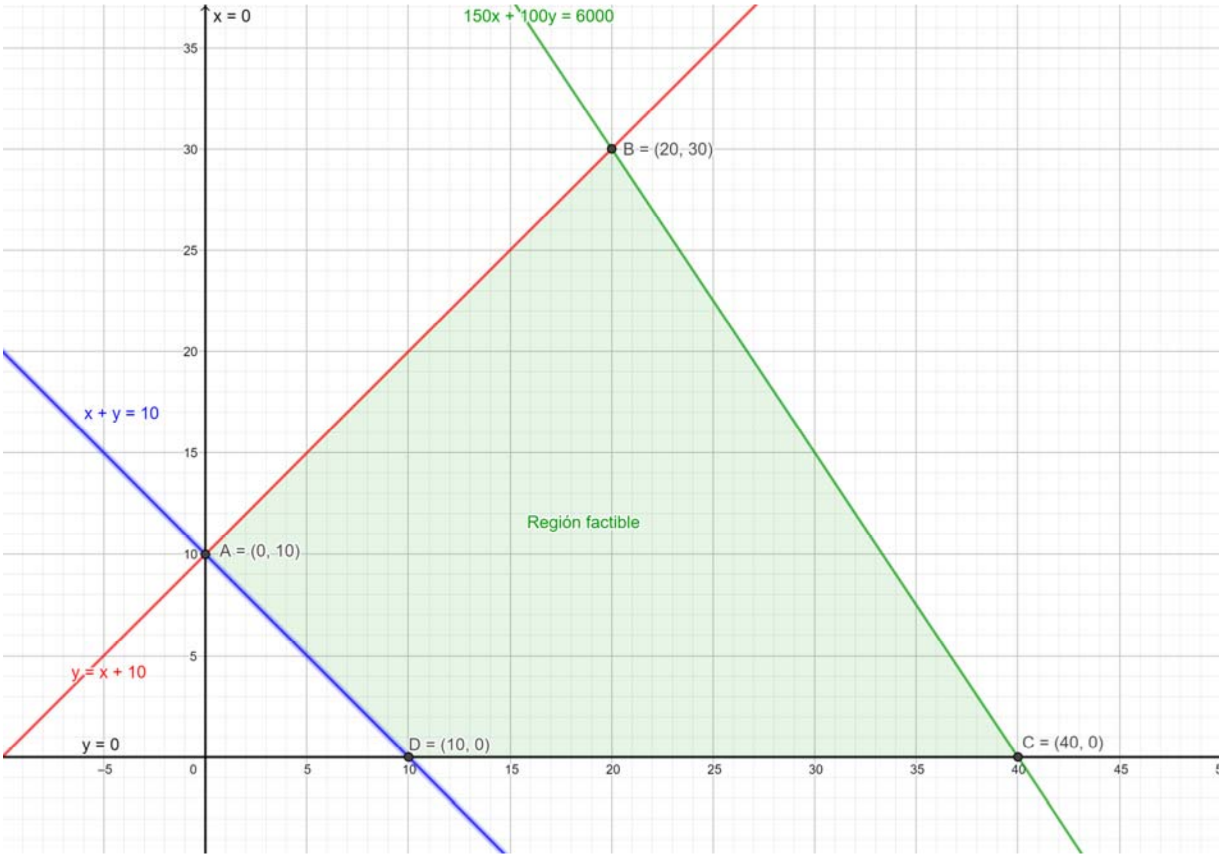
El recinto definido por las inecuaciones dadas es:

Los vértices del recinto son los puntos: $A(0, 10)$, $B(20, 30)$, $C(40, 0)$, $D(10, 0)$

Estos puntos se obtienen como intersección de las rectas correspondientes. Así, por ejemplo, el punto $B(20, 30)$ se obtiene como intersección de las rectas $y = x + 10$, $150x + 100y = 6000$; etc.

Vértice A	Vértice B	Vértice C	Vértice D
$\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ x = 0 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} y = x + 10 \\ 150x + 100y = 6000 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} 150x + 100y = 6000 \\ y = 0 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ y = 0 \end{array}\right\}$
$A(0, 10)$	$B(20, 30)$	$C(40, 0)$	$D(10, 0)$

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
www.apuntesmareaverde.org.es



Sabemos que el máximo se encuentra en algún vértice del recinto[1], por lo que evaluamos la función objetivo $F(x, y) = 130x + 140y$ en cada uno de ellos.

$$F(A) = F(0, 10) = 130 \cdot 0 + 140 \cdot 10 = 1\,400 \text{ €}$$

$$F(B) = F(20, 30) = 130 \cdot 20 + 140 \cdot 30 = 6\,800 \text{ €}$$

$$F(C) = F(40, 0) = 130 \cdot 40 + 140 \cdot 0 = 5\,200 \text{ €}$$

$$F(D) = F(10, 0) = 130 \cdot 10 + 140 \cdot 0 = 1\,300 \text{ €}$$

Por tanto, tendría que producir $\mathbf{20}$ baterías de tipo A y $\mathbf{30}$ de tipo B para obtener un beneficio máximo de $\mathbf{6\,800}$ €.

[1] Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

Problema 2:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con m un parámetro real.

$a)$ ¿Para qué valores del parámetro m existe la inversa de A?

$b)$ Para $m = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - A^2 = I_3$.

Solución:

a) Una matriz cuadrada A de orden n tiene inversa si, y sólo si, su determinante es distinto de cero. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3m - 2m^2 + 3 = -2m^2 + 3m + 5$$

entonces,

$$2m^2 - 3m - 5 = 0 \Rightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{3+7}{4} = \dfrac{10}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3-7}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

Por tanto, si $\boldsymbol{m \neq \frac{5}{2}, -1}$ existe la inversa de A.

b) Despejamos X en la ecuación matricial dada.

$$X \cdot A - A^2 = I_3 \Rightarrow X \cdot A = A^2 + I_3 \Rightarrow X = (A^2 + I_3) \cdot A^{-1} = A^2 \cdot A^{-1} + I_3 \cdot A^{-1} = A + A^{-1}$$

Así, $\boxed{X = A + A^{-1}}$. Como para $m = 2$ la matriz A tiene inversa[2], calculamos A^{-1}.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = 3$$

Luego

$$A^{-1} = \frac{[Adj(A)]^t}{|A|} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 & -4 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & -1/3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Y finalmente,

$$X = A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & -1/3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = A + A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{8/3} & \mathbf{0} & \mathbf{5/3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2/3} & \mathbf{0} & \mathbf{5/3} \end{pmatrix}$

[2] Recordemos que por el apartado *a)* la matriz A tiene inversa para todos los valores de m distintos de $5/2$ y -1.

RESPUESTAS DEL BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

$a)$ Estudie su monotonía y calcule sus extremos.

$b)$ Represente gráficamente la función.

$c)$ Calcule $I = \int f(x) \cdot dx$.

$d)$ Calcule el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución:

a) Para el estudio de la monotonía y cálculo de sus extremos debemos obtener previamente la función derivada y calcular los valores en los que se anula.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} 2 \\ 2/3 \end{cases}$$

Obtenemos así los puntos de posible cambio de signo de la derivada. En aquellos intervalos o semirrectas en los que el signo de la derivada primera sea positivo la función será creciente; y en los que tenga signo negativo, será decreciente.

	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, 2\right)$	$(2, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

Así, la función es creciente en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ y decreciente en $\left(\frac{2}{3}, \mathbf{2}\right)$.

Y, como

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}$$

$$f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 0$$

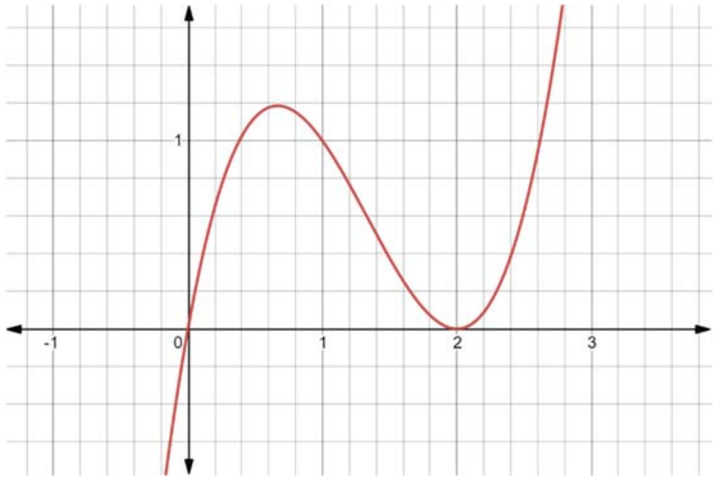
Alcanza un máximo relativo en $\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)$ y un mínimo relativo en $(\mathbf{2}, \mathbf{0})$.

b) Para la representación gráfica de la función calcularemos, en primer lugar, los puntos de corte con los ejes.

Puntos de corte con el eje X: Hacemos $y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = 0$
Así,

$$y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2\ (doble) \end{cases}$$

Luego la gráfica corta al eje X en los puntos $(0,0)$ y $(2,0)$. Como, además, conocemos la monotonía y extremos del apartado anterior la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ sería la siguiente.



c) $\int f(x)dx = \int (x^3 - 4x^2 + 4x\,)dx = \frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$

$$\int f(x)dx = \boldsymbol{\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C}$$

d) Para el cálculo del área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas tenemos:

$$A = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2\right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - 4\cdot\frac{2^3}{3} + 2\cdot 2^2 = \frac{4}{3}u^2$$

El área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas es $\boldsymbol{A = \frac{4}{3}u^2}$.

Problema 4:

a) Calcule la derivada de las funciones: $f(x) = L\frac{x-1}{x+1}$ y $g(x) = x^3 \cdot e^{2x^2}$.

b) Represente gráficamente la parábola $h(x) = x^2 + x + 1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x) = x^2 + x + 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 0$.

Solución:

a) Calculemos las derivadas pedidas

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1\cdot(x+1)-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{2}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{2}{x^2-1}$$

$$g(x) = x^3 \cdot e^{2x^2} \Rightarrow g'(x) = 3x^2 \cdot e^{2x^2} + x^3 \cdot e^{2x^2} \cdot 4x =$$

$$= 3x^2 e^{2x^2} + 4x^4 e^{2x^2} =$$

$$= (3x^2 + 4x^4)e^{2x^2} =$$

$$= x^2(3 + 4x^2)e^{2x^2}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{2}{x^2-1} \quad ; \quad g'(x) = x^2(3+4x^2)e^{2x^2}}$$

b) Represente gráficamente la parábola $h(x) = x^2 + x + 1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

<u>Cálculo del vértice</u>

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$

$$y_v = h\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4}$$

El vértice viene dado, por tanto, por el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

<u>Puntos de corte con el eje X</u>

$$y = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

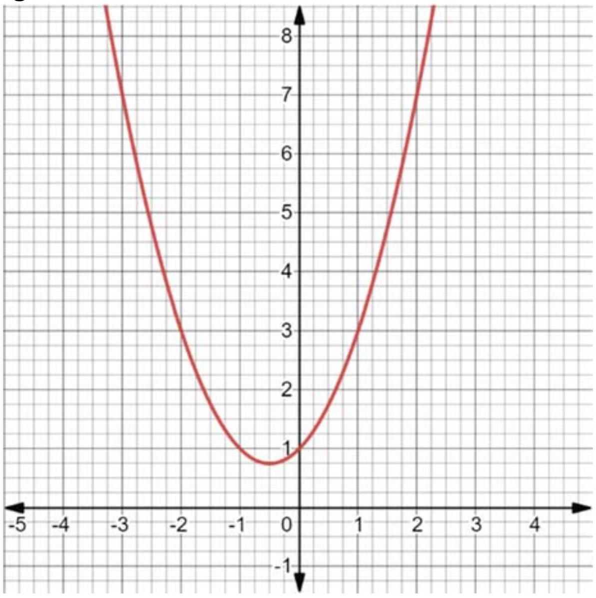
No tiene puntos de corte con el eje X.

Puntos de corte con el eje Y

$$x = 0 \Rightarrow h(0) = 1$$

Y así la gráfica de la función $h(x)$ corta al eje Y en el punto $(0, 1)$.

La gráfica quedaría de la siguiente forma:



c) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x) = x^2 + x + 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 0$.

$$A = \int_{-1/2}^{0} h(x)dx = \int_{-1/2}^{0} (x^2 + x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = 0 - \left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{5}{12}u^2$$

El área del recinto es $\boldsymbol{A = \frac{5}{12} u^2}$.

RESPUESTAS DEL BLOQUE C

Problema 5:

Se desea probar la eficacia de dos tipos de vacunas, A y B, contra un virus determinado. Para ello, se seleccionan 500 voluntarios sin anticuerpos para este virus, a los que se les administra una de las vacunas o un placebo, resultando que 300 reciben la vacuna A, 150 la B y el resto el placebo. Se comprueba que el 90 % de los vacunados con la A y el 95 % de los vacunados con la B, generan anticuerpos, no generando anticuerpos de los que han recibido el placebo. Se selecciona uno de esos voluntarios al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya generado anticuerpos?

b) Si dicho voluntario no ha generado anticuerpos, ¿qué probabilidad hay de que se le haya administrado placebo?

Solución:

Sean los sucesos:

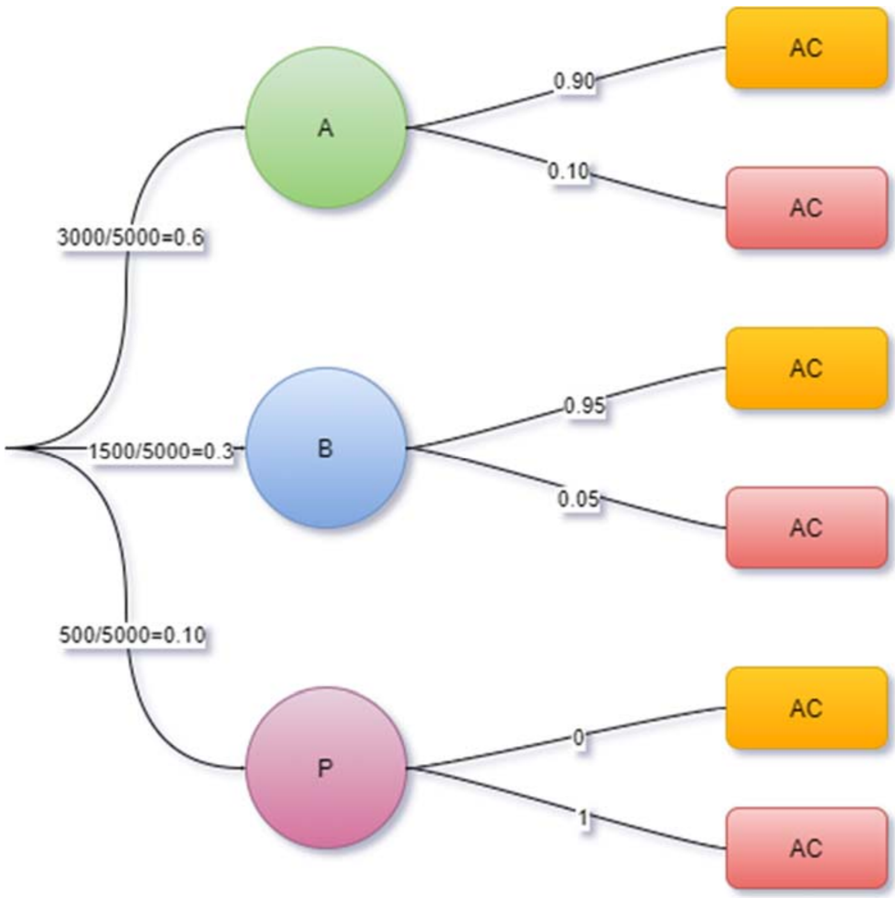
A: *"El voluntario recibe la vacuna A"*

B: *"El voluntario recibe la vacuna B"*

P: *"El voluntario recibe placebo"*

AC: *"El voluntario genera anticuerpos"*

En primer lugar, construiremos el árbol para identificar cada una de las probabilidades que se indican en el enunciado.



Así, resulta sencillo identificar las siguientes probabilidades:

$$p(A)=\frac{3000}{5000}=0.6 \quad p(AC/A)=0.90 \quad p(\overline{AC}/A)=0.10$$
$$p(B)=\frac{1500}{5000}=0.3 \quad p(AC/B)=0.95 \quad p(\overline{AC}/B)=0.05$$
$$p(P)=\frac{500}{5000}=0.10 \quad p(AC/P)=0 \quad p(\overline{AC}/P)=1$$

a) Por el Teorema de la Probabilidad Total

$$\begin{aligned} p(AC) &= p(A)\cdot p(AC/A)+p(B)\cdot p(AC/B)+p(P)\cdot p(AC/P)= \\ &= 0.6\cdot 0.90+0.3\cdot 0.95+0.10\cdot 0=0.825 \end{aligned}$$

La probabilidad de que haya generado anticuerpos es $\boldsymbol{p(AC)=0.825}$

b) Si dicho voluntario no ha generado anticuerpos, ¿qué probabilidad hay de que se le haya administrado placebo? Teorema de Bayes

$$p(P/\overline{AC})=\frac{p(P\cap\overline{AC})}{p(\overline{AC})}=\frac{p(P)\cdot p(\overline{AC}/P)}{1-p(AC)}=\frac{0.10\cdot 1}{1-0.825}=0.5714$$

$$\boldsymbol{p(P/\overline{AC})=0.5714}$$

También podría haberse planteado el problema como una tabla de contingencia:

	AC	$\overline{AC}$	Totales
A	2700	300	3000
B	1425	75	1500
P	0	500	500
Totales	4125	875	5000

Así,

a) $p(AC)=\frac{4125}{5000}=0.825$

b) $p(P/\overline{AC})=\frac{500}{875}=0.5714$

Problema 6:

De las compras realizadas en el último período de rebajas del pasado año, el 55 % se dedicaron a productos electrónicos, el 72 % se hicieron a través de Internet y, de las compras que se hicieron por Internet, el 64 % fueron de productos electrónicos. Se elige una compra al azar,

a) Calcule la probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por Internet.

b) Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por Internet o que se hayan comprado productos electrónicos.

c) Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de Internet.

Solución:

Sean los sucesos:

E: *''Compra realizada en productos electrónicos"*

I: *"Compra realizada a través de Internet"*

Entonces, según el enunciado:

$$p(E) = 55\% = 0.55$$
$$p(I) = 72\% = 0.72$$
$$p(E/I) = 64\% = 0.64$$

a) Como

$$p(E/I) = \frac{p(E \cap I)}{p(I)} = 0.64 \Rightarrow p(E \cap I) = 0.64 \cdot p(I) = 0.64 \cdot 0.72 = 0.4608$$

La probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por Internet es $\boldsymbol{p(E \cap I) = 0.4608}$

b) Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por Internet o que se hayan comprado productos electrónicos.

$$\boldsymbol{p(I \cup E)} = p(I) + p(E) - p(I \cap E) = 0.72 + 0.55 - 0.4608 = \boldsymbol{0.8092}$$

c) Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de Internet.

$$\boldsymbol{p(\bar{I}/\bar{E})} = \frac{p(\bar{I} \cap \bar{E})}{p(\bar{E})} = \frac{p(\overline{I \cup E})}{1 - p(E)} = \frac{1 - p(I \cup E)}{1 - p(E)} = \frac{1 - 0.8092}{1 - 0.55} = \boldsymbol{0.424}$$

RESPUESTAS DEL BLOQUE D

Problema 7:

$a)$ En una Escuela Politécnica hay matriculados en el último curso 60 estudiantes de Ingeniería Eléctrica, 40 en Ingeniería Informática, 30 en Ingeniería Civil, 50 en Ingeniería Mecánica y 20 en Ingeniería Aeronáutica. Se quiere hacer una encuesta al 20 % de estos estudiantes, de manera proporcional al número de matriculados en cada titulación.

1.- ¿Qué tipo de muestreo se debe emplear?

2.- ¿Cuántos alumnos debe haber en la muestra y cuántos de cada titulación?

$b)$ Dada la población $\{a, 10, 12, 11, 18\}$, ¿cuánto debe valer a, sabiendo que la media de las medias muestrales de tamaño 3, obtenidas mediante muestreo aleatoria simple, es 13.2?

Solución:

a) Recordemos brevemente algunos conceptos básicos sobre tipos de muestreo.

Muestreo aleatorio simple. Se realiza este tipo de muestreo cuando cada miembro de la población tiene la misma probabilidad de ser escogido en la muestra.

Muestreo aleatorio estratificado. Consiste en dividir previamente la población en grupos homogéneos o estratos, en los que los individuos comparten alguna característica común, y elegir muestras aleatorias simples en cada estrato.

Cuando hay k estratos cada uno con diferentes poblaciones: $N_1, N_2, \ldots, N_k$, entonces para conformar una muestra de tamaño n tomamos $n_1, n_2, \ldots, n_k$ individuos en cada estrato de modo que

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

y además cada uno de los números $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ha de ser proporcional a los tamaños de los estratos: $N_1, N_2, \ldots, N_k$.

1. En nuestro caso, por tanto, debemos emplear el muestreo aleatorio estratificado.

Se debe emplear **muestreo aleatorio estratificado**.

2. Para el cálculo del número de alumnos en la muestra y en cada uno de los estratos (cada titulación) procederemos de la siguiente manera.

Como tenemos

60 estudiantes de Ingeniería Eléctrica

40 estudiantes de Ingeniería informática

30 estudiantes de Ingeniería Civil

50 estudiantes de Ingeniería Mecánica

20 estudiantes de Ingeniería Aeronáutica

el total de la población será $60 + 40 + 30 + 50 + 20 = 200$ estudiantes.

Como se quiere hacer una encuesta al $20\,\%$ de estos estudiantes, el tamaño de la muestra debe ser el 20 % de estos 200 estudiantes; es decir, 40 estudiantes.

El tamaño de la muestra debe ser de $\mathbf{40}$ estudiantes.

Basta ahora hacer reglas de tres para obtener el número de estudiantes de cada titulación que debe hacer en la muestra, resultando:

12 estudiantes de Ingeniería Eléctrica

8 estudiantes de Ingeniería informática

6 estudiantes de Ingeniería Civil

10 estudiantes de Ingeniería Mecánica

4 estudiantes de Ingeniería Aeronáutica

b) Según el Teorema Central del Límite, dada una variable aleatoria X de una población de media μ y desviación típica σ, entonces se verifica que:

1. La distribución de medias muestrales de tamaño n tiene media μ y desviación típica $\sigma/\sqrt{n}$.
2. La distribución de medias muestrales se aproxima a una normal a medida que crece el tamaño de la muestra n.

Como sabemos que la media de las medias muestrales de tamaño $n = 3$, obtenidas mediante muestreo aleatorio simple, es $\bar{X} = \mu = 13.2$, entonces:

$$\bar{X} = \frac{a + 10 + 12 + 11 + 18}{5} = 13.2$$

De donde,

$$\frac{a + 51}{5} = 13.2 \Rightarrow a + 51 = 66 \Rightarrow a = 15$$

$$a = \mathbf{15}$$

Problema 8:

Se desea estimar la proporción de individuos mayores de edad de una localidad que están en contra de la construcción de una central nuclear en su término municipal. Para ello, se pregunta a 100 individuos mayores de edad de esa localidad, elegidos de forma aleatoria, resultando que 45 de ellos rechazan la construcción de la central.

a) Calcule un intervalo de confianza al 92 % para estimar la proporción real de individuos de esa localidad que están en contra de la construcción de la central?

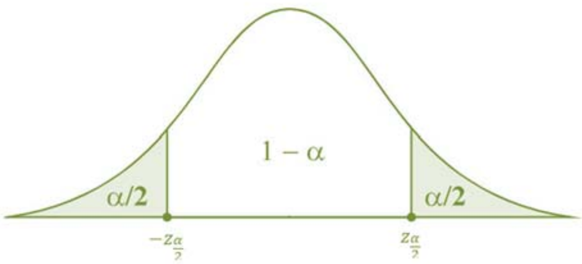
b) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar, para que al estimar la proporción de individuos de esa localidad que rechazan la construcción de la central, el error cometido sea inferior al 5 %.

Solución:

El **intervalo de confianza para la proporción** de individuos que cumplen una determinada característica en una población, con un nivel de confianza $1-\alpha$ construido a partir de una muestra de tamaño n, es:

$$I.C.(p) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

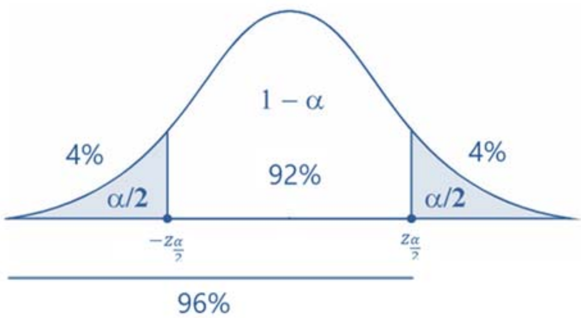
donde $z_{\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $\mathcal{Z} \backsim \mathcal{N}(0,1)$ que verifica $P(-z_{\alpha/2} \leq \mathcal{Z} \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$



El **error máximo admisible** en la estimación de la proporción, utilizando el intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza $1-\alpha$, es:

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

a) En nuestro caso el tamaño de la muestra es $n = 100$ y la proporción muestral es $\hat{p} = \frac{45}{100} = 0.45$. Además, el nivel de confianza es $1-\alpha = 92\ \% = 0.92$, luego $z_{\alpha/2} = 1.75$



Por tanto,

$$\begin{aligned} I.C.(p) &= \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \\ &= \left(0.45 - 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{100}}; 0.45 - 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{100}}\right) = \\ &= (0.45 - 0.0871;\ 0.45 + 0.0871) = \\ &= (0.3629;\ 0.5371) \end{aligned}$$

$$I.C.(p) = (\mathbf{0.3629}, \mathbf{0.5371})$$

b) Como el error máximo admisible viene dado por la expresión:

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Según los datos del enunciado, tendremos que:

$$0.05 = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{n}}$$

De donde,

$$0.05 = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.2475}{n}} \Rightarrow (0.05)^2 = \left(1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.2475}{n}}\right)^2$$

Y despejando n, obtenemos que

$$(0.05)^2 = (1.75)^2 \cdot \frac{0.2475}{n} \Rightarrow n = (1.75)^2 \cdot \frac{0.2475}{(0.05)^2} \Rightarrow n = 303.19$$

Así, el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar para que, al estimar la proporción de individuos de esa localidad que rechazan la construcción de la central, el error cometido sea inferior al 5 %, es de **304** individuos.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

Problema 1:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$.

$a)$ Determine para qué valores del parámetro a, la matriz A tiene inversa.
$b)$ Para $a = 1$, calcule la inversa de A.
$c)$ Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B^t$, siendo $B = (0 \quad 1 \quad -1)$.

Problema 2:

Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x - 4y \le -19; \;\; 3x - 4y \le -13; \;\; x \ge -7; \;\; -x - y \ge 2.$$

$a)$ Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.
$b)$ ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanzan el mínimo y el máximo de la función $G(x,y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$ en la citada región factible? ¿Cuál es su valor? $c)$ Responda de forma razonada si la función $G(x,y)$ puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}$ en la región factible hallada.

BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & si \;\; x < 0 \\ x^2 - 2x & si \;\; x \ge 0 \end{cases}$.

$a)$ Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f en su dominio. $b)$ Estudie la monotonía de la función f y calcule el mínimo. $c)$ Calcule $I = \int_{-2}^{2} f(x) \cdot dx$.

Problema 4:

El número de diagnosticados de COVID-19 por PCR en Andalucía, medido en miles de personas, se aproxima por la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t - 0.3 & si \;\; 0.2 \le t \le 1.8 \\ 0.1t - 0.12 & si \;\; 1.8 < t \le 5 \\ -0.5t^2 + 8.3t - 28.62 & si \;\; 5 < t \le 10 \end{cases}$$

donde t es el tiempo, medido en meses, a partir del inicio de conteo en el mes de marzo de 2020.
$a)$ Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.
$b)$ ¿En qué instante o instantes es máximo el número de diagnosticados? ¿Cuál es su número?

BLOQUE C

Problema 5:

En una población, se sabe que el 15 % de las personas padece una enfermedad. Si la persona está enferma, un test da positivo en el 92 % de los casos, mientras que si la persona está sana, el test da positivo en el 4 % de los casos (falso positivo). Se elige una persona al azar de esa población.

$a)$ Calcule la probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma.

$b)$ Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo.

$c)$ Calcule la probabilidad de que saliendo el test negativo, la persona esté enferma.

Problema 6:

En una comunidad de vecinos, el 90 % de sus miembros tiene vehículo propio, el 40 % hace uso del transporte público y un 3 % ni tiene vehículo propio ni usa el transporte público. Se elige al azar un miembro de la comunidad.

$a)$ Calcule la probabilidad de que tenga vehículo propio o use el transporte público.

$b)$ Calcule la probabilidad de que use el transporte público y no tenga vehículo propio.

$c)$ Calcule la probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio.

BLOQUE D

Problema 7:

Para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la Unión Europea (UE), se toma una muestra aleatoria de 250 de estos residentes, obteniéndose que 115 estaban a favor de dejar de pertenecer a la UE.

$a)$ Calcule un intervalo de confianza al 99.5 %, para estimar la proporción real de esos residentes que está a favor de la salida del Reino Unido de la UE.

$b)$ Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra, para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la UE, con un error inferior al 5 %.

Problema 8:

Sea X una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 4.

$a)$ ¿Cuál es la desviación típica de la distribución de las medias de las muestral de tamaño 12 de la variable aleatoria X?

$b)$ Para estimar la media poblacional de la variable X, se toma una muestra aleatoria de tamaño 12, obteniéndose los siguientes resultados:

$$11.8;\ \ 10;\ \ 9.8;\ \ 12;\ \ 9.7;\ \ 10.8;\ \ 9.6;\ \ 11.3;\ \ 10.4;\ \ 12.2;\ \ 9.1;\ \ 10.5.$$

Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

$c)$ Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra, para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que 1.2.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

Problema 1:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$.

$a)$ Determine para qué valores del parámetro a, la matriz A tiene inversa.

$b)$ Para $a = 1$, calcule la inversa de A.

$c)$ Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B^t$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Una matriz cuadrada A de orden n tiene inversa si, y sólo si, su determinante es distinto de cero. En nuestro caso,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = -a - 8 = 8 \Leftrightarrow a = -8$$

Por tanto, la matriz A tiene inversa si, y solo si, $\boldsymbol{a \neq -8}$.

b) Para $a = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Así tenemos que $|A| = -1 - 8 = -9 \neq 0$, luego existe la inversa de A.

Como la matriz adjunta de A, es:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{4}{9}} & \mathbf{\frac{1}{9}} & -\mathbf{\frac{2}{9}} \\ \mathbf{\frac{1}{9}} & -\mathbf{\frac{2}{9}} & \mathbf{\frac{4}{9}} \\ -\mathbf{\frac{2}{9}} & \mathbf{\frac{4}{9}} & \mathbf{\frac{1}{9}} \end{pmatrix}$$

c) Multiplicando la ecuación $A \cdot X = B^t$ por A^{-1} a la izquierda, se obtiene que: $X = A^{-1} \cdot B^t$. Por tanto,

$$X = A^{-1} \cdot B^t = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/3} \\ \mathbf{-2/3} \\ \mathbf{1/3} \end{pmatrix}$$

Problema 2:

Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x - 4y \leq -19;\ \ 3x - 4y \leq -13;\ \ x \geq -7;\ -x - y \geq 2.$$

$a)$ Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

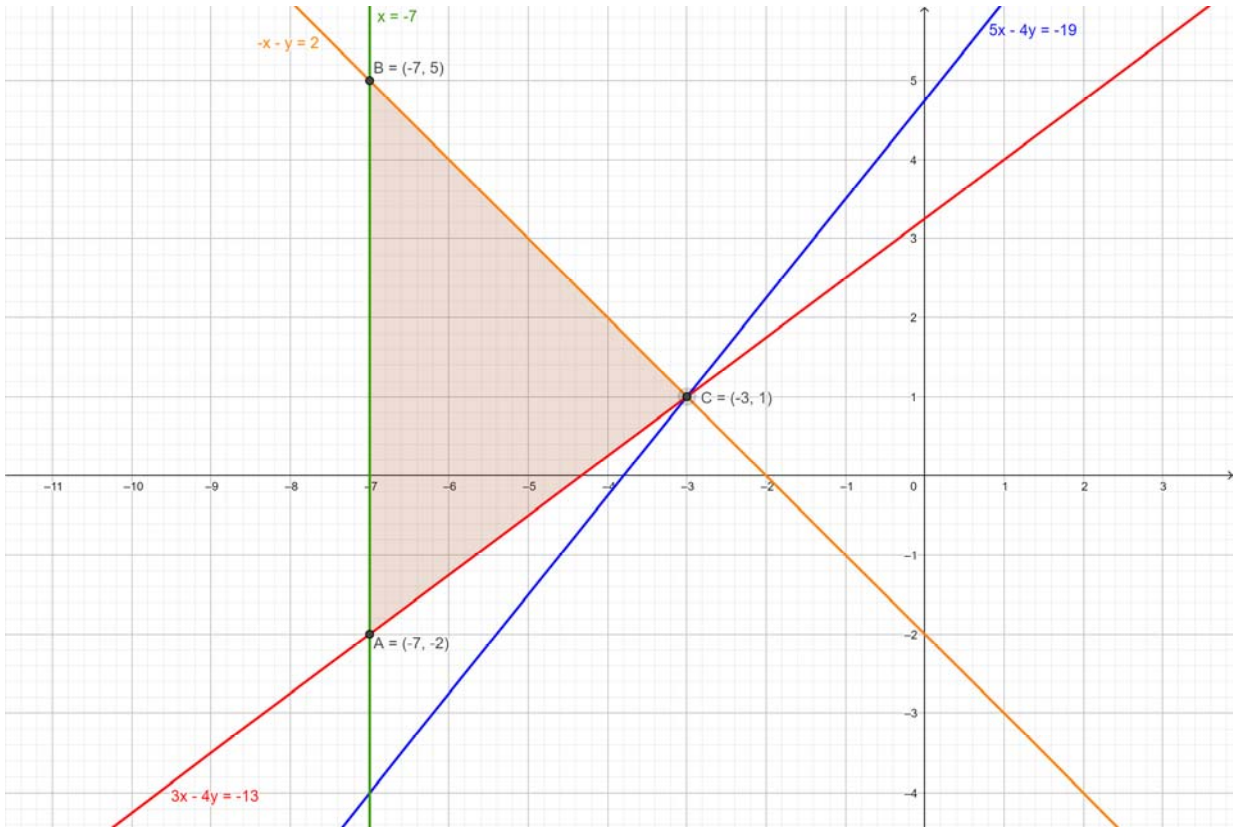
$b)$ ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanzan el mínimo y el máximo de la función

$G(x, y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$ en la citada región factible? ¿Cuál es su valor?

$c)$ Responda de forma razonada si la función $G(x, y)$ puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}$ en la región factible hallada.

Solución:

a) La región factible definida por las inecuaciones dadas es:



Los vértices del recinto son los puntos $A(-7, -2)$, $B(-7, -5)$ y $C(-3, 1)$

Estos vértices se obtienen como intersección de las rectas correspondientes. Así, por ejemplo, el punto $A(-7, -2)$ se obtiene como intersección de las rectas $x = -7$, $3x - 4y = -13$; etc.

Vértice A	Vértice B	Vértice C
$\left.\begin{matrix} x = -7 \\ 3x - 4y = -13 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} x = -7 \\ -x - y = 2 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} 3x - 4y = -13 \\ -x - y = 2 \end{matrix}\right\}$
$A(-7, -2)$	$B(-7, -5)$	$C(-3, 1)$

b) Para averiguar en qué puntos se alcanzan el mínimo y el máximo de la función objetivo $G(x,y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$ en la región factible sustituimos cada vértice en dicha función:

$$\begin{aligned} G(A) = G(-7,-2) &= -\frac{1}{5}\cdot(-7) + \frac{5}{2}\cdot(-2) = -\frac{18}{5} = -3.6 \\ G(B) = G(-7,5) &= -\frac{1}{5}\cdot(-7) + \frac{5}{2}\cdot 5 = \frac{139}{10} = 13.9 \\ G(C) = G(-3,1) &= -\frac{1}{5}\cdot(-3) + \frac{5}{2}\cdot 1 = \frac{31}{10} = 3.1 \end{aligned}$$

Por tanto, la función $G(x,y)$ alcanza su mínimo en el vértice $A(-7,-2)$ con un valor de $-18/5$ y un máximo en el vértice $B(-7,-5)$ con un valor de $139/10$.

c) La función $G(x,y)$

no puede alcanzar el valor $\frac{47}{3} \cong 15.66$ ya que es superior al valor máximo que alcanza la función, 13.9.

RESPUESTAS DEL BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & si\ \ x < 0 \\ x^2 - 2x & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$.

$a)$ Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f en su dominio.

$b)$ Estudie la monotonía de la función f y calcule el mínimo.

$c)$ Calcule $I = \int_{-2}^{2} f(x) \cdot dx$.

Solución:

a) La función 2^{x+1} es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, por tanto, la función $f(x)$ también será continua y derivable para $x < 0$.

Además, la función $x^2 - 2x$ es también continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo que la función $f(x)$ también lo será para $x \geq 0$.

Falta, por tanto, estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 0$.

<u>Continuidad en $x = 0$</u>

Sabemos que una función $y = f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si, y solo si,

$$f(a) = \lim_{\mathrm{x}\to\mathrm{a}^-} \mathrm{f(x)} = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Como

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\mathrm{x}\to 0^-} 2^{x+1} = 2^{0+1} = 2 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 - 2x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

y, por tanto, la función $f(x)$ no es continua en $x = 0$, donde presenta una discontinuidad de salto finito.

Así, la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

<u>Derivabilidad en $x = 0$</u>

Como la función no es continua en $x = 0$, tampoco es derivable en dicho punto. Luego, la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

En definitiva, la función $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}$.

b) Para el estudio de la monotonía de una función (determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento) debemos estudiar el signo de la derivada primera $f'(x)$. En los puntos en los que $f'(x) > 0$ la función será creciente (↗) y en los puntos en los que $f'(x) < 0$ la función será decreciente (↘).

En nuestro caso, la derivada primera viene dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} 2^{x+1} \ln 2 & si \quad x < 0 \\ 2x - 2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Veamos dónde se anula dicha derivada.

- Si $x < 0$, $2^{x+1} \ln 2 \neq 0$.
- Si $x > 0$, $2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$

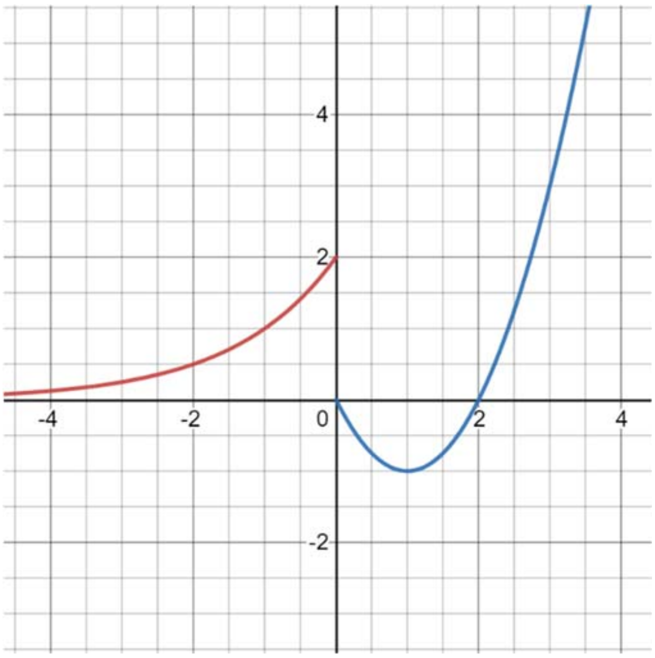
Por tanto,

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Signo de f'	$+$	$-$	$+$
	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

Así, la función es creciente en $(-\infty,\mathbf{0})\cup(\mathbf{1},+\infty)$ y decreciente en $(\mathbf{0},\mathbf{1})$.

La función tiene un **mínimo** en $\left(1, f(1)\right)$, es decir, en $(\mathbf{1},-\mathbf{1})$.

Mostramos la gráfica de la función para visualizar los resultados obtenidos.



c) Calculemos la integral pedida:

$$I=\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{0} 2^{x+1}dx+\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx \;=\; \left[\frac{2^{x+1}}{\ln 2}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}=$$

$$=\frac{1}{ln2}(2-2^{-1})+\left(\frac{2^3}{3}-2^2\right)=$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{8}{3}-4\right)=$$

$$=\frac{3}{2\ln 2}-\frac{4}{3}$$

$$I=\int_{-2}^{2} f(x)dx=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2\ln 2}}-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

Problema 4:

El número de diagnosticados de COVID-19 por PCR en Andalucía, medido en miles de personas, se aproxima por la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t - 0.3 \;\; si \;\; 0.2 \le t \le 1.8 \\ 0.1t - 0.12 \;\; si \;\; 1.8 < t \le 5 \\ -0.5t^2 + 8.3t - 28.62 \;\; si \;\; 5 < t \le 10 \end{cases}$$

donde t es el tiempo, medido en meses, a partir del inicio de conteo en el mes de marzo de 2020.

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.

b) ¿En qué instante o instantes es máximo el número de diagnosticados? ¿Cuál es su número?

Solución:

a) El dominio de la función es el intervalo $[0.2, 10]$.

Cada uno de los trozos que forman parte de la función $f(t)$ es un polinomio y, por tanto, la función será continua y derivable en esos intervalos. Falta comprobar la continuidad y derivabilidad en $t = 1.8$ y en $t = 5$.

Continuidad en $t = 1.8$

$$f(1.8) = -1.8^2 + 2 \cdot 1.8 - 0.3 = 0.06$$
$$\lim_{x \to 1.8^-} f(t) = -1.8^2 + 2 \cdot 1.8 - 0.3 = 0.06$$
$$\lim_{x \to 1.8^+} f(t) = 0.1 \cdot 1.8 - 0.12 = 0.06$$

Por tanto, la función $f(t)$ es continua en $t = 1.8$

Continuidad en $t = 5$

$$f(5) = 0.1 \cdot 5 - 0.12 = 0.38$$
$$\lim_{x \to 5^-} f(t) = 0.1 \cdot 5 - 0.12 = 0.38$$
$$\lim_{x \to 5^+} f(t) = -0.5 \cdot 5^2 + 8.3 \cdot 5 - 28.62 = 0.38$$

Así, la función $f(t)$ es continua en $t = 5$.

En definitiva, la función $f(t)$ es continua en $[0.2, 10]$.

Pasemos a estudiar la derivabilidad de la función $f(t)$.

La derivada de la función es:

$$f'(t) = \begin{cases} -2t + 2 & si & 0.2 \le t < 1.8 \\ 0.1 & si & 1.8 < t < 5 \\ -t + 8.3 & si & 5 < t \le 10 \end{cases}$$

Derivabilidad en $t = 1.8$

$$f'(1.8^-) = \lim_{t \to 1.8^-} f'(t) = \lim_{t \to 1.8^-} (-2t + 2) = -2 \cdot 1.8 + 2 = -1.6$$
$$f'(1.8^+) = \lim_{t \to 1.8^+} f'(t) = \lim_{t \to 1.8^+} 0.1 = 0.1$$

Como $f'(1.8^-) \neq f'(1.8^+)$, la función no es derivable en $t = 1.8$

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
www.apuntesmareaverde.org.es

Derivabilidad en $t = 5$

$$f'(5^-) = \lim_{t\to 5^-} f'(t) = \lim_{t\to 5^-} 0.1 = 0.1$$
$$f'(5^+) = \lim_{t\to 5^+} f'(t) = \lim_{t\to 5^+} (-t + 8.3) = -5 + 8.3 = 3.3$$

Como $f'(5^-) \neq f'(5^+)$, la función no es derivable en $t = 5$

Así pues, la función $f(t)$ es derivable en $[0.2, 10] - \{1.8, 5\}$.

En resumen, la función $f(t)$ es **continua en** $[\mathbf{0.2},\ \mathbf{10}]$ y **derivable en** $[\mathbf{0.2}, \mathbf{10}] - \{\mathbf{1.8}; \mathbf{5}\}$.

b) Para obtener el máximo de nuestra función, estudiaremos los cambios de signo de su primera derivada $f'(t)$.

Como

$$f'(t) = \begin{cases} -2t + 2 & si \quad 0.2 \leq t < 1.8 \\ 0.1 & si \quad 1.8 < t < 5 \\ -t + 8.3 & si \quad 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

Si $0.2 < t < 1.8$, entonces $-2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Si $1.8 < t < 5$, entonces la derivada es 0.1 y, por tanto, no se anula.

Si $5 < t < 10$, $-t + 8.3 = 0 \ \Leftrightarrow t = 8.3$

Por tanto,

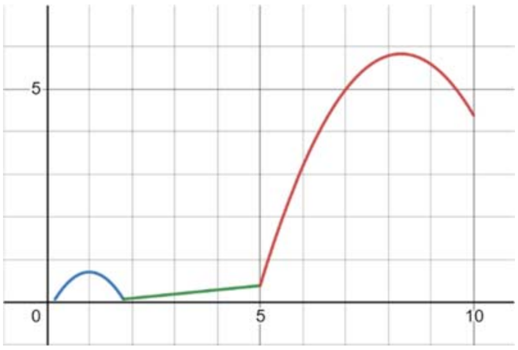
	$(0.2, 1)$	$(1, 1.8)$	$(1.8, 5)$	$(5, 8.3)$	$(8.3, 10)$
Signo de f'	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗	Creciente ↗	Decreciente ↘

Así, los máximos relativos de la función se encuentran en los puntos de abscisas $t = 1$ y $t = 8.3$. Como

$$f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 - 0.3 = 0.7$$
$$f(8.3) = -0.5 \cdot 8.3^2 + 8.3 \cdot 8.3 - 28.62 = 5.825$$

El máximo absoluto de la función se alcanza a los $\mathbf{8.3}$ meses y es de $\mathbf{5\ 825}$ personas.

Mostramos la gráfica de la función para visualizar los resultados obtenidos.



RESPUESTAS DEL BLOQUE C

Problema 5:

En una población, se sabe que el 15 % de las personas padece una enfermedad. Si la persona está enferma, un test da positivo en el 92 % de los casos, mientras que si la persona está sana, el test da positivo en el 4 % de los casos (falso positivo). Se elige una persona al azar de esa población.

$a)$ Calcule la probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma.

$b)$ Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo.

$c)$ Calcule la probabilidad de que saliendo el test negativo, la persona esté enferma.

Solución:

Sean los sucesos:

E: *"La persona padece la enfermedad en estudio"*

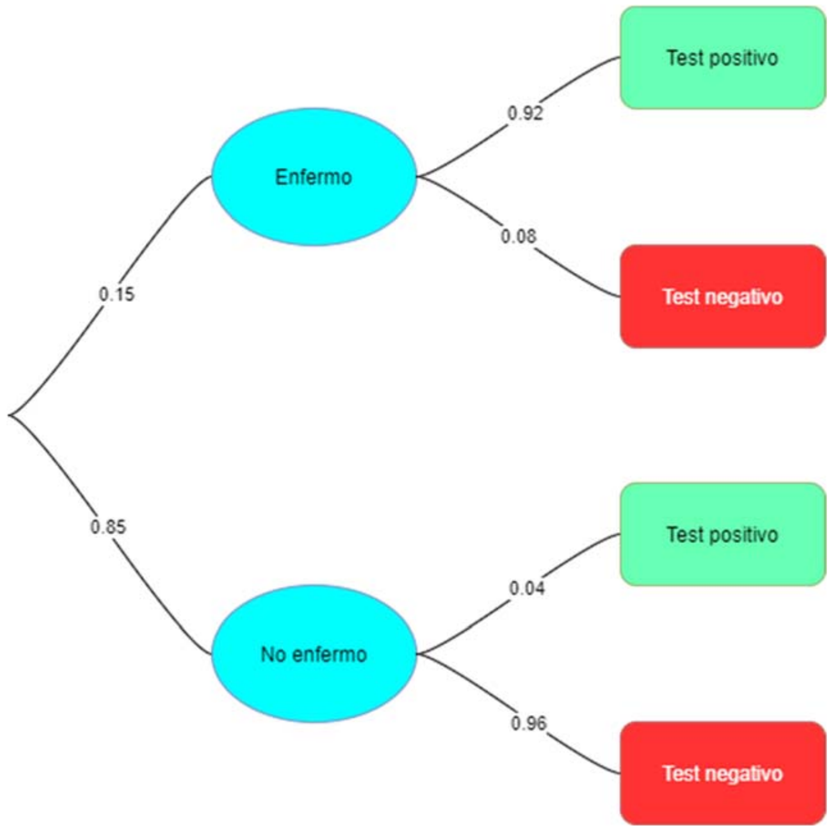
P: *"El test da positivo"*

N: *"El test da negativo"*

Según el enunciado, sabemos que:

$$p(E) = 0.15$$
$$p(P/E) = 0.92$$
$$p(P/\bar{E}\ ) = 0.04$$

Podemos construir el siguiente diagrama en árbol:



a) Por el teorema de la probabilidad total, tenemos que:

$$p(P) = p(E) \cdot p(P/E) + p(\bar{E}) \cdot p(P/\bar{E}) = 0.15 \cdot 0.92 + 0.85 \cdot 0.04 = 0.172$$

Luego, aplicando el teorema de Bayes:

$$p(E/P) = \frac{p(E \cap P)}{p(P)} = \frac{p(E) \cdot p(P/E)}{p(E) \cdot p(P/E) + p(\bar{E}) \cdot p(P/\bar{E})} = \frac{0.15 \cdot 0.92}{0.172} = 0.8023$$

La probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma es $\mathbf{0.8023}$

b) $p(E \cap N) = p(E) \cdot p(N/E) = 0.15 \cdot (1 - 0.92) = 0.15 \cdot 0.08 = 0.012$

La probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo es $\mathbf{0.012}$

c) Por el teorema de Bayes:

$$p(E/N) = \frac{p(E \cap N)}{p(N)} = \frac{0.012}{1 - 0.172} = \frac{0.012}{0.828} = 0.0145$$

La probabilidad de que, saliendo el test negativo, la persona esté enferma es $\mathbf{0.0145}$

Problema 6:

En una comunidad de vecinos, el 90 % de sus miembros tiene vehículo propio, el 40 % hace uso del transporte público y un 3 % ni tiene vehículo propio ni usa el transporte público. Se elige al azar un miembro de la comunidad.

$a)$ Calcule la probabilidad de que tenga vehículo propio o use el transporte público.

$b)$ Calcule la probabilidad de que use el transporte público y no tenga vehículo propio.

$c)$ Calcule la probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio.

Solución:

Sean los sucesos:

A: *"Tener vehículo propio"*

B: *"Hacer uso del transporte público"*

Según el enunciado:

$$p(A) = 0.90$$
$$p(B) = 0.40$$
$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.03$$

a) Sabemos que, por las leyes de Morgan, $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$. Por tanto,
$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.03 \Rightarrow p(\overline{A \cup B}) = 0.03 \Rightarrow 1 - p(A \cup B) = 0.03 \Rightarrow p(A \cup B) = 1 - 0.03 = 0.97$

La probabilidad de que tenga vehículo propio o use el transporte público es $\boldsymbol{p(A \cup B) = 0.97}$

b) La probabilidad de que use el transporte público y no tenga vehículo propio puede expresarse de la siguiente manera:

$$p(B \cap \bar{A}) = p(B - A) = p(B) - p(A \cap B)$$

Como

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

entonces,

$$0.97 = 0.90 + 0.40 - p(A \cap B)$$

de donde $p(A \cap B) = 0.90 + 0.40 - 0.97 = 0.33$, luego:

$$p(B \cap \bar{A}) = p(B - A) = p(B) - p(A \cap B) = 0.40 - 0.33 = 0.07$$

La probabilidad de que use el transporte público y no tenga vehículo propio es $\boldsymbol{p(B \cap \bar{A}) = 0.07}$

c) La probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio se expresa como:

$$p(B/\bar{A}) = \frac{p(B \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{0.07}{1 - 0.90} = \frac{0.07}{0.10} = 0.7$$

La probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio es
$\boldsymbol{p(B/\bar{A}) = 0.7}$

RESPUESTAS DEL BLOQUE D

Problema 7:

Para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la Unión Europea (UE), se toma una muestra aleatoria de 250 de estos residentes, obteniéndose que 115 estaban a favor de dejar de pertenecer a la UE.

a) Calcule un intervalo de confianza al 99.5 %, para estimar la proporción real de esos residentes que está a favor de la salida del Reino Unido de la UE.

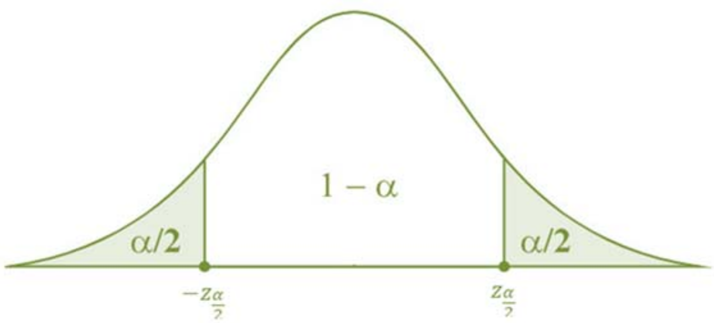
b) Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra, para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la UE, con un error inferior al 5 %.

Solución:

El **intervalo de confianza para la proporción** de individuos que cumplen una determinada característica en una población, con un nivel de confianza $1-\alpha$ construido a partir de una muestra de tamaño n, es:

$$I.C.(p)=\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $\mathcal{Z}\leadsto\mathcal{N}(0,1)$ que verifica $P\left(-z_{\alpha/2}\le\mathcal{Z}\le z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$

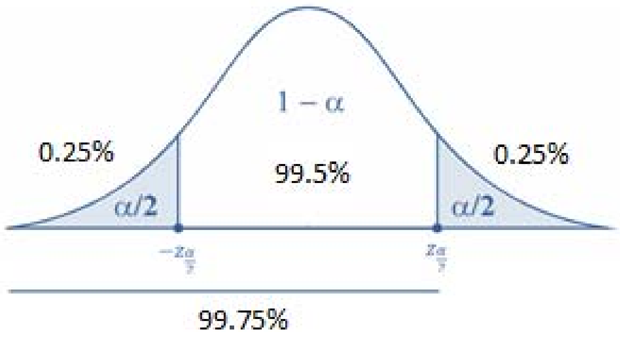


El **error máximo admisible** en la estimación de la proporción, utilizando el intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza $1-\alpha$, es:

$$\mathcal{E}=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

a) En nuestro caso el tamaño de la muestra es $n=250$ y la proporción muestral es $\hat{p}=\frac{115}{250}=0.46$.

   Además, el nivel de confianza es $1-\alpha=99.5\ \%=0.995$; luego, observando la tabla de la distribución Normal tipificada, obtenemos que $z_{\alpha/2}=2.805$.



Por tanto,

$$\begin{aligned} I.C.(p) &= \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \\ &= \left(0.46 - 2.805 \cdot \sqrt{\frac{0.46 \cdot 0.54}{250}}; 0.45 - 2.805 \cdot \sqrt{\frac{0.46 \cdot 0.54}{250}}\right) = \\ &= (0.46 - 0.0884, 0.45 + 0.0884) = \\ &= (0.3716, 0.5484) \end{aligned}$$

$$I.C.(p) = (\mathbf{0.3716, 0.5484})$$

b) Como el error máximo admisible viene dado por la expresión:

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Según los datos del enunciado, tendremos que:

$$0.05 = 2.805 \cdot \sqrt{\frac{0.46 \cdot 0.54}{n}}$$

De donde,

$$0.05 = 2.805 \cdot \sqrt{\frac{0.2484}{n}} \Rightarrow (0.05)^2 = \left(2.805 \cdot \sqrt{\frac{0.2484}{n}}\right)^2$$

Y despejando n, obtenemos que

$$(0.05)^2 = (2.805)^2 \cdot \frac{0.2484}{n} \Rightarrow n = (2.805)^2 \cdot \frac{0.2484}{(0.05)^2} \Rightarrow n = 781.77$$

Así, el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar para que, al estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la UE, el error cometido sea inferior al 5 %, es de $\mathbf{782}$ individuos.

Problema 8:

Sea X una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 4.

a) ¿Cuál es la desviación típica de la distribución de las medias de las muestral de tamaño 12 de la variable aleatoria X?

b) Para estimar la media poblacional de la variable X, se toma una muestra aleatoria de tamaño 12, obteniéndose los siguientes resultados:

$$11.8;\ \ 10;\ \ 9.8;\ \ 12;\ \ 9.7;\ \ 10.8;\ \ 9.6;\ \ 11.3;\ \ 10.4;\ \ 12.2;\ \ 9.1;\ \ 10.5.$$

Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

c) Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra, para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que 1.2.

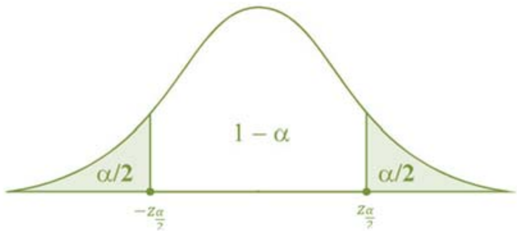
Solución:

Como sabemos, si la variable X sigue una distribución Normal, $X \backsim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$, entonces la variable aleatoria de las medias muestrales $\bar{X}$ sigue también una distribución Normal $\bar{X} \backsim \mathcal{N}\left(\mu;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

También es sabido que el intervalo de confianza para estimar la media viene dado por la expresión:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable Normal tipificada $\mathcal{Z} \backsim \mathcal{N}(0;1)$ que verifica que $p(\mathcal{Z} \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.



Además, el error máximo de la estimación para el intervalo de la media poblacional es:

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

de donde el tamaño mínimo de la muestra necesario para estimar la media poblacional con un error menor que $\mathcal{E}$ es:

$$n = \left(z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2$$

a) En nuestro caso, la variable X sigue una $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ con desviación típica $\sigma = 4$. Como sabemos que las medias de las muestras de tamaño $n = 12$ de la variable X sigue la distribución

$$\bar{X} \backsim \mathcal{N}\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Entonces, $\bar{X} \backsim \mathcal{N}\left(\mu,\frac{4}{\sqrt{12}}\right) \equiv \mathcal{N}\left(\mu,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Por tanto, la desviación típica de la distribución de las medias de las muestras de tamaño 12 de la variable aleatoria X es $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

b) Como el intervalo de confianza pedido viene dado por la expresión:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

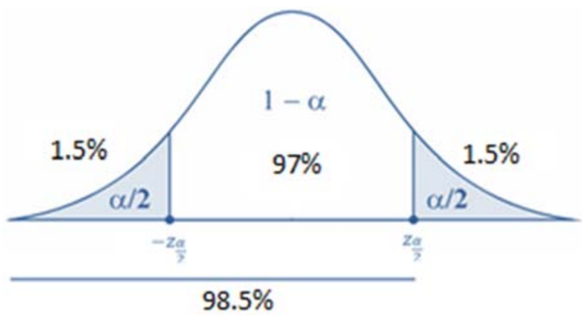
vamos a calcular cada uno de los elementos de dicha expresión.

La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{11.8 + 10 + 9.8 + 12 + 9.7 + 10.8 + 9.6 + 11.3 + 10.4 + 12.2 + 9.1 + 10.5}{12} = 10.6$$

Como el nivel de confianza es del 97 %, $1 - \alpha = 97\ \% = 0.97$, de donde $\alpha = 0.3$ y:

$$p(\mathcal{Z} \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.03}{2} = 0.985$$



Por tanto, observando la tabla de la distribución Normal tipificada obtenemos que $z_{\alpha/2} = 2.17$.

Ya tenemos todo lo necesario para aplicar la fórmula del intervalo de confianza:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(10.6 - 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{12}},\quad 10.6 + 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{12}}\right)$$
$$= (10.6 - 2.5057, 10.6 + 2.5057) = (8.0943, 13.1057)$$

$$I.C.(\mu) = (\mathbf{8.0943}, \mathbf{13.1057})$$

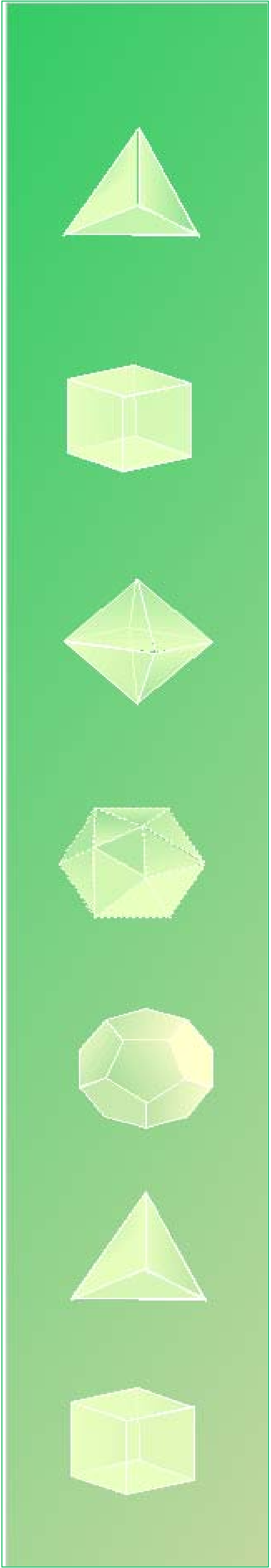
c) En la fórmula del error máximo, despejamos n:

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \Rightarrow n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2$$

Por tanto, el tamaño de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que 1.2, es:

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2 = \left(2.17 \cdot \frac{4}{1.2}\right)^2 = 52.321$$

Luego el tamaño mínimo de la muestra es $n = \mathbf{53}$



Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de ARAGÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa Asso

Universidad Zaragoza

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2021
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- *(10 puntos)* Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3\\3&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\-1&1&-2\end{pmatrix}$, se pide:

a.- *(3 puntos)* Calcula $(B-A)^{-1}$.

b.- *(3 puntos)* Calcula la matriz X que verifica: $2X-AB=BA$.

c.- *(4 puntos)* Resuelve el sistema de ecuaciones: $C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

2.- *(10 puntos)* Un mayorista de zapatos pone a la venta su stock, en concreto, 800 pares de botas, 1.200 pares de mocasines y 2.100 pares de zapatillas. Lanza dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en 1 par de botas, 3 pares de mocasines y 7 pares de zapatillas y se vende a 360 euros. La oferta B consiste en 2 pares de botas y 2 pares de mocasines que vende a 120 euros. Se pide:

a.- *(8 puntos)* Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada oferta que maximiza el ingreso obtenido con la venta. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- *(2 puntos)* Razona cuántos pares de botas, mocasines y zapatillas quedarán sin vender en la solución óptima.

3.- *(10 puntos)* Un grupo de jóvenes emprendedores valoran abrir una empresa y, para ello, han encargado un estudio de mercado en el que estimaron que los beneficios para los próximos años, en cientos de miles de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t)=\frac{2t-6}{t+4},$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a.- *(2 puntos)* ¿En qué intervalo la empresa tendrá pérdidas?

b.- *(4 puntos)* En qué momento $t\in[3,10]$ se alcanza el máximo beneficio y a cuántos euros asciende su valor. Justifica la respuesta.

c.- *(2 puntos)* ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener un beneficio de 150.000 €?

d.- *(2 puntos)* En un horizonte infinito de tiempo, ¿existe límite para el beneficio? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

4.- *(10 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{a}{1-x} & \text{si} \quad x\le 0\\ bx^2+2x+c & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$ donde a,b,c son parámetros reales. Se pide:

a.- *(5 puntos)* Determina los valores de los parámetros para que $f(x)$ sea continua en $x=0$, la función tenga un extremo relativo en $x=1$ y $f'(-1)=-1$. Caracteriza si el extremo es máximo o mínimo.

b.- *(2 puntos)* Calcula, para los valores $a=1,\ b=-2,\ c=3$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c.- *(3 puntos)* Calcula, para los valores $a=1,\ b=-2,\ c=3$; $\int_1^2 f(x)dx$.

CONTINÚA AL DORSO

unizar.es

5.- *(10 puntos)* Al terminar el bachillerato los 100 alumnos de un Centro, de las modalidades de *Ciencias* y *Artes*, planean viajar por Italia, Francia o Portugal. Entre los 55 alumnos de Ciencias se sabe que 10 quieren ir a Italia, 25 a Francia y 20 a Portugal. En el grupo de Artes hay 30 que quieren ir a Italia y 15 a Portugal. Elegido un alumno al azar, calcula:

a.- *(2,5 puntos)* La probabilidad de que quiera ir a Portugal.

b.- *(2,5 puntos)* Probabilidad de que un alumno que quiera ir a Italia sea de Artes.

c.- *(2,5 puntos)* Probabilidad de que un alumno quiera ir a Francia y sea de Ciencias.

d.- *(2,5 puntos)* Probabilidad de que un alumno de Ciencias quiera ir a Francia.

6.- *(10 puntos)* Se quiere estimar el tiempo diario de conexión a redes sociales de los universitarios. Se sabe que dicho tiempo tiene una distribución normal con desviación típica de 33 minutos (0,55 horas). Se desea construir un intervalo de confianza para la media diaria de conexión a redes sociales. Se pide:

a.- *(6 puntos)* ¿A cuántos estudiantes debemos entrevistar para garantizar que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual a 0,16 horas?

b.- *(3 puntos)* Se ha encuestado a 100 universitarios y se ha obtenido una media de 4 horas al día. Calcula el intervalo de confianza al 97% para la media poblacional.

c.- *(1 punto)* Un informe de cierto Ministerio afirma que la media del tiempo que los universitarios pasan conectados a las redes sociales es de 5 horas al día. Razona, a la vista del apartado b.- si hay motivos para dudar de su afirmación.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

Universidad Zaragoza

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2021

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

– En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio.

– En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.

– Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 pts. Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Ejercicio 1

a) **(3 puntos)** Calcular $(B-A)$ **(0,6 ptos)** y calcular $(B-A)^{-1}$ **(2,4 ptos)**. Las puntuaciones intermedias para el cálculo de la inversa son:

1. Si se ha calculado haciendo operaciones elementales: transformar cada (a_{ij}) inicial a la matriz identidad (0,6 ptos cada coeficiente).
2. Si se ha calculado aplicando la fórmula $(B-A)^{-1} = \frac{1}{|B-A|}\left(Adj(B-A)\right)^t$ las calificaciones intermedias serán: $|B-A|$ (0,5 ptos), $Adj(B-A)$ (0,9 ptos), traspuesta (0,5 ptos), y llegar al resultado (0,5 ptos).

b) **(3 puntos)** Puntuaciones intermedias:

1. Despejar X de la ecuación: $X = \frac{BA+AB}{2}$ (1 pto), calcular los productos: $BA,\ AB$ (1 pto) y realizar las operaciones $\frac{BA+AB}{2}$ (1 pto).
2. Si se ha supuesto una matriz genérica $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se valorará con (1 pto) realizar las operaciones de la izquierda de la igualdad, (1 pto) realizar las operaciones de la derecha de la igualdad y (1 pto) obtener el valor de las incógnitas a, b, c, d.

c) **(4 puntos)** Las puntuaciones intermedias son:
Calcular $rg(C)$ (1,5 ptos), concluir que se trata de un sistema compatible indeterminado (1 pto) y obtener la solución (1,5 ptos, 0,5 cada incógnita).

Ejercicio 2

a) **(8 puntos)**

i. **(1 pto)** Definir las variables de decisión y la función objetivo.
ii. **(1 pto)** Definir las tres restricciones del enunciado (0,25 ptos cada una) y la condición de no negatividad de las variables $x, y \geq 0$ (0,25 ptos).
iii. **(3 ptos)** Representar la región factible (0,5 ptos por cada una de las cinco restricciones y 0,5 ptos por la intersección de todas ellas).

Para evaluar el cálculo de la solución óptima (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un problema mucho más sencillo que el original) se procederá como sigue:

1. Si se ha optado por evaluar la función objetivo en los vértices:

i. **(1,5 ptos)** Calcular las coordenadas de los vértices (cada vértice 0,3).
ii. **(1 pto)** Evaluar la función objetivo en los vértices (cada vértice 0,2).
iii. **(0,5 ptos)** Determinar el vértice donde se alcanza el máximo (0,25) y su valor (0,25).

unizar.es

2. Si se ha optado por curvas de nivel:

i. **(2 ptos)** Representar dos rectas de nivel e identificar la dirección de crecimiento (la primera recta 1 pto, una paralela 0,5 ptos, identificar la dirección de mejora 0,5 ptos).
ii. **(0,5 ptos)** Razonar gráficamente el vértice solución.
iii. **(0,5 ptos)** Determinar analíticamente el máximo (0,25 ptos) y su valor (0,25 ptos).

b) (2 puntos) Razonamiento (1 pto) y la respuesta (1 pto).

Ejercicio 3

a) (2 puntos) Identificar la pregunta con el signo $B(t) < 0$ (1 pto) y resolver la inecuación (1 pto).
b) (4 puntos) Calcular la derivada de $B(t)$ (1,5 ptos), signo $B'(t) > 0$ (1 pto), calcular la coordenada t del máximo absoluto (1 pto). Calcular, en la unidad solicitada (0,1 ptos), el beneficio máximo (0,4 ptos).
c) (2 puntos) Expresar que hay que resolver $B(t) = 1{,}5$ (1 pto) y resolver la ecuación (1 pto).
d) (2 puntos) Identificar la pregunta con $\lim_{t\to\infty} B(t)$ (1 pto) y calcular dicho límite (1 pto).

Ejercicio 4

a) (5 puntos)
i. **(3 ptos)** Condición de continuidad en $x = 0$ (1 pto), condición de extremo (1 pto) y condición en la derivada (1 pto).
ii. **(1 pto)** Calcular correctamente los coeficientes a, b, c.
iii. **(1 pto)** Caracterizar el extremo.

b) (2 puntos) Cada límite se calificará con 1 pto.
c) (3 puntos)
(1,5 ptos) Cálculo de primitivas (0,5 ptos cada sumando).
(1,5 ptos) Aplicar la Regla de Barrow y llegar al resultado (0,5 ptos cada sumando).

Ejercicio 5

Para obtener la máxima calificación no se necesita tanto detalle como aparece en la pauta de corrección. La falta de notación puede ser sustituida por la explicación, diagramas o tablas. **Si la respuesta no es correcta** o es incompleta pueden aplicarse las siguientes calificaciones intermedias.

a) (2,5 puntos)
i. **(1 pto)** Definir los sucesos I= Viajar a Italia, P= Viajar a Portugal, F= Viajar a Francia, A= alumno de artes, C= alumno de ciencias.
ii. **(0,5 ptos)** Llevar datos a una tabla de contingencia.
iii. **(1 pto)** Calcular $P(P)$.

b) (2,5 puntos)
i. **(1 pto)** Expresar la probabilidad a calcular como $P(A/I)$.
ii. **(1,5 ptos)** Calcular $P(A/I)$.

c) (2,5 puntos)
i. **(1 pto)** Expresar la probabilidad a calcular como $P(F \cap C)$.
ii. **(1,5 ptos)** Calcular $P(F \cap C)$.

d) (2,5 puntos)
i. **(1 pto)** Expresar la probabilidad a calcular como $P(F/C)$.
ii. **(1,5 ptos)** Calcular $P(F/C)$.

Ejercicio 6

a) (6 puntos)
i. **(1,5 ptos)** Saber qué cuantil buscar.
ii. **(1,5 ptos)** Calcularlo.
iii. **(3 ptos)** Poner la fórmula del error (1,5 ptos). Sustituir y calcular (1,5 ptos).

Si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior, se restan 0,5 ptos. Si el cálculo se realiza tomando el error (semiamplitud) como 0,16 h. en vez de 0,08 h., se resta 1 pto.

b) (3 puntos)
i. **(1,5 ptos)** Calcular el error (semiamplitud del intervalo).
En esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado a.-, aunque no lo sea.
ii. **(1,5 ptos)** Poner la fórmula del intervalo de confianza y calcularlo.

c) (1 punto) Es suficiente con argumentar que, al no estar el valor 5 dentro del intervalo, hay motivos para dudar –con los datos del problema- de la afirmación del Ministerio.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

$a)$ Calcula $(B-A)^{-1}$.

$b)$ Calcula la matriz X que verifica: $2X - AB = BA$.

$c)$ Resuelve el sistema de ecuaciones: $C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $B - A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$Det\ (B-A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow \exists (B-A)^{-1}$$

$$(B-A)^{-1} = \frac{1}{Det\ (B-A)} \left(Adj(B-A)\right)^t = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{(B-A)^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

b) $BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

$$2X - AB = BA \Rightarrow 2X = BA + AB \Rightarrow X = \frac{1}{2}(BA + AB) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ 5/2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{7/2} \\ \mathbf{5/2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

c) $C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Transformamos el sistema en otro equivalente triangular, utilizando el método de Gauss. Trabajamos con la matriz de coeficientes. Por ser el sistema homogéneo, la columna correspondiente a términos independientes en la matriz ampliada, no presenta variaciones frente a cualquier combinación lineal de sus filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{F2'=F2-2F1 \\ F3'=F3+F1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F3''=F3'+2F2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema $S \equiv C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es equivalente a $S' \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

S' es compatible indeterminado. Lo resolvemos:

$S' \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$ de solución general: $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{\lambda} \end{cases} \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$$

Problema 2:

Un mayorista de zapatos pone a la venta su stock, en concreto, 800 pares de totas, 1 200 pares de mocasines y 2 100 pares de zapatillas. Lanza dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en un par de botas, 3 pares de mocasines y 7 pares de zapatillas y se vende a 360 euros. La oferta B consiste en 2 pares de botas y 2 pares de mocasines y se vende a 120 euros. Se pide:

$a)$ Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada oferta que maximiza el ingreso obtenido con la venta. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

$b)$ Razona cuántos pares de botas, mocasines y zapatillas quedarán sin vender en la solución óptima.

Solución:

a) Sean x = nº de lotes A y = nº de lotes B

Nuestro objetivo es maximizar $z = f(x, y) = 360x + 120y$ sometida a las restricciones

$$\begin{cases} I_1: x + 2y \leq 800 \\ I_2: 3x + 2y \leq 1200 \\ I_3: 7x \qquad \leq 2100 \\ I_4: x \geq 0 \\ I_5: y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la solución del sistema

La intersección de los semiplanos que representan las dos últimas inecuaciones limitan la solución al primer cuadrante.

El semiplano solución de la inecuación I_1 está definido por la recta $x + 2y = 800$ que pasa por los puntos (0, 400) y (800, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_1 (0 + 2.0 $\leq 800) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $x = 300$, paralela al eje de ordenadas. El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_3 $(7.0 \leq 2100) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 contiene a O.

La región factible es el polígono OABCD. Las coordenadas de sus vértices son las intersecciones:

$$A \equiv \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 800 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ 2y = 800 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ y = 400 \end{cases} \Rightarrow \quad A = (0, 400)$$

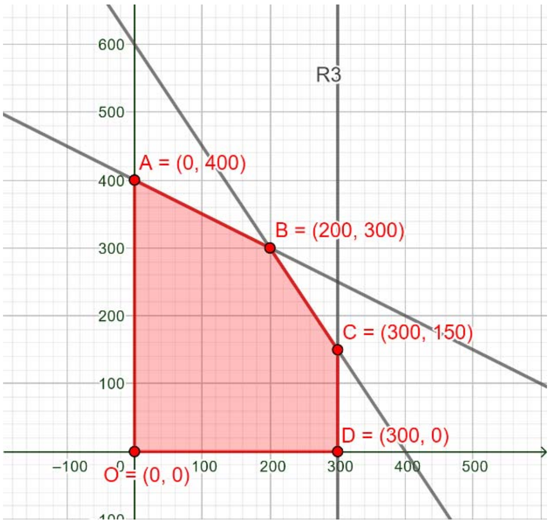
$$B \equiv \begin{cases} \begin{cases} x + 2y = 800 \\ 3x + 2y = 1200 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 800 \\ -3x - 2y = -1200 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 800 \\ -2x = -400 \end{cases} \sim \begin{cases} y = \dfrac{800 - x}{2} \\ x = 200 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad y = \dfrac{600}{4} = 300, \;\; x = 200 \Longrightarrow B = (200, 300) \end{cases}$$

$$C \equiv \begin{cases} \begin{cases} x = 300 \\ 3x + 2y = 1200 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 300 \\ y = \dfrac{1200 - 3x}{2} = 150 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow C = (300, 150) \end{cases}$$

$$D \equiv \begin{cases} x = 300 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D = (300,0)$$

$O \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow O = (0,0\ )$

Según el teorema fundamental de la programación lineal, la solución, si existe, se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Valoremos la función objetivo en cada uno de ellos:



$z(O)\ = F(0,0) = 360.0 + 120.0 = 0$

$z(A) = F(0,400\ ) = 360.0 + 120.400 = 48000$

$z(B) = F(200,400\ ) = 360.200 + 120.400 = 120000$

$z(C) = F(300,150\ ) = 360.300 + 120.150 = 126000$

$z(D) = F(300,0\ ) = 360.300 + 120.0 = 108000$

La solución se alcanza en el vértice C. Por tanto, debe vender 300 lotes del tipo A y 150 del tipo B para maximizar el beneficio y será en este caso de 126 000 €

b) Si vende 300 lotes de la oferta A y 150 del tipo B, vende los siguientes artículos:

Botas: 300. 1 + 2 . 150 = 600 pares de botas.

Le quedarían sin vender 800 – 600 = 200 pares de botas.

Mocasines: 300. 3+ 2 . 150 = 1200 mocasines.

Le quedarían sin vender 1200 – 1200 = 0,es decir, vende todos los mocasines.

Zapatillas: 300 . 7 = 2100 zapatillas.

Vende todas las zapatillas

Si consigue alcanzar la solución óptima le quedarían sin vender 200 pares de botas exclusivamente

Problema 3:

Un grupo de jóvenes emprendedores valoran abrir una empresa y, para ello, han encargado un estudio de mercado en el que estimaron que los beneficios para los próximos años, en cientos de miles de euros, vendrán dador por la función $B(t) = \frac{2t-6}{t+4}$, donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

$a)$ ¿En qué intervalo la empresa tendrá pérdidas?

$b)$ En qué momento $t \in [3, 10]$ se alcanza el máximo beneficio y a cuántos euros asciende su valor. Justifica la respuesta.

$c)$ ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener un beneficio de 150 000 euros?

$d)$ En un horizonte infinito de tiempo, ¿existe límite para el beneficio? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

Solución:

La función beneficio $B(t) = \frac{2t-6}{t+4}$ es una función de dominio $[0, \infty)$, (restricción de $f(t) = \frac{2t-6}{t+4}$ de dominio de $\mathbb{R} - \{-4\}$)

a) Resolvemos la inecuación $B(t) = \frac{2t-6}{t+4} < 0$

B puede cambiar de signo si se anula el numerador o el denominador de su expresión analítica $2t - 6 = 0 \Longrightarrow t = 3$

$t + 4 = 0 \Longrightarrow t = -4$

	$[0,3)$	3	$[3,\infty)$
Signo B	-	0	+

La empresa tiene pérdidas los tres primeros años

b) B es continua y derivable en $[0, \infty)$. Estudiemos su crecimiento a partir del signo de su derivada

$B'(t) = \frac{2(t+4)-(2t-6)}{(t+4)^2} = \frac{14}{(t+4)^2} > 0 \quad \forall t \in [0, \infty) \Rightarrow$ B es estrictamente creciente en $[0, \infty)$.

B estrictamente creciente en $[0, \infty) \Rightarrow B(3) < B(10) = \frac{2.10-6}{10+4} = 1$

El máximo beneficio en este periodo se alcanza a los **10 años** y es de 100 000 €

c) 150000 € = 1.5 cientos de miles de €

$$B(t) = \frac{2t-6}{t+4} = 1.5 \Rightarrow \frac{2t-6}{t+4} = \frac{1.5(t+4)}{t+4} \Rightarrow 2t - 6 = 1.5t + 6 \Longrightarrow 0.5\,t = 12 \;\Rightarrow t = 24$$

Se alcanza un beneficio de 150 000 € al cabo de **24** años

d) $\lim_{t\to\infty} B(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{2t-6}{t+4} = 2.$

B es una función estrictamente creciente y su límite en el infinito es 2. Por lo tanto:

El beneficio de la empresa no superará nunca los **200 000 €**

Problema 4:

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{1-x} & si\ \ x \le 0 \\ bx^2 + 2x + c & si\ x > 0 \end{cases}$ donde a, b, c son parámetros reales. Se pide:

$a)$ Determina los valores de los parámetros para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y $f'(-1) = -1$. Caracteriza si el extremo es máximo o mínimo.

$b)$ Calcula, para los valores $a = 1, b = -2, c = 3$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$c)$ Calcula, para los valores $a = 1, b = -2, c = 3$; $I = \int_1^2 f(x) \cdot dx$.

Solución:

a) La función $y = \frac{a}{1-x}$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$ $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es continua y derivable en $(-\infty, 0)$

La función $y = bx^2 + 2x + c$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ $\forall b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f es continua y derivable en $(0, \infty)$

- Para que f sea continua en $x = 0$, debe cumplirse: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{a}{1-x}\right) = a = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (bx^2 + 2x + c\ ) = c$$

- Por otra parte $f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{(1-x)^2} & si\ \ x < 0 \\ 2bx + 2 & si\ x > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow f'(-1) = \frac{a}{4} =$ -1 $\Rightarrow$ $a = -4$

$$a = c \Rightarrow c = -4$$

- f tiene un extremo relativo en $x = 1$ y es derivable en este valor$\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(1) = 2b + 2 = 0\ \Rightarrow b = -1$$

Con estos valores calculados

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-4}{1-x} & si\ \ x \le 0 \\ -x^2 + 2x - 4 & si\ x > 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-4}{(1-x)^2} & si\ \ x < 0 \\ -2x + 2 & si\ x > 0 \end{cases}$$

f' es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y $f''(x) = \begin{cases} \frac{-8}{(1-x)^3} & si\ \ x < 0 \\ -2 & si\ x > 0 \end{cases}$

$f''(1) = -2 < 0 \Rightarrow$en $x = 1$ f presenta un máximo relativo

Para que se cumplan las condiciones pedidas $a = -4, b = -1\ , c = -4$.

El extremo relativo en $x = 1$ es un máximo. Es el punto (1, -3)

b) Para estos valores $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & si\ \ x \le 0 \\ -2x^2 + 2x + 3 & si\ x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{\infty} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-2x^2 + 2x + 3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

c) En este apartado, f tiene la misma expresión analítica que en el anterior y en el intervalo $[1,2]$, $f(x) = -2x^2 + 2x + 3$. Entonces:

$$I = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \int_1^2 (-2x^2 + 2x + 3\ ) \cdot dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{-2.2^3}{3} + 2^2 + 3.2\right) - \left(\frac{-2.1^3}{3} + 1^2 + 3.1\right) = \frac{-16}{3} + 4 + 6 + \frac{2}{3} - 1 - 3 = \frac{-14}{3} + 6 = \frac{4}{3}$$

$$I = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

Problema 5:

Al terminar el bachillerato los 100 alumnos de un Centro, de las modalidades de Ciencias y Artes, plantean viajar por Italia, Francia o Portugal. Entre los 55 alumnos de Ciencias se sabe que 10 quieren ir a Italia, 25 a Francia y 20 a Portugal. En el grupo de Artes hay 30 que quieren ir a Italia y 15 a Portugal. Elegido un alumno al azar, calcula:

$a)$ La probabilidad de que quiera ir a Portugal.

$b)$ Probabilidad de que un alumno que quiera ir a Italia sea de Artes.

$c)$ Probabilidad de que un alumno que quiera ir a Francia y sea de Ciencias.

$d)$ Probabilidad de que un alumno de Ciencias quiera ir a Francia.

Solución:

Sean los sucesos: A_1 = "el alumno elegido al azar quiere viajar a Italia"

A_2 = "el alumno elegido al azar quiere viajar a Francia"

A_3 = "el alumno elegido al azar quiere viajar a Portugal"

B = "el alumno elegido al azar es de Ciencias"

B^c = "el alumno elegido al azar es de Artes"

a) $P(A_3) = P(A_3/B)P(B) + P(A_3/B^c)P(B^c) = \frac{20}{55} \cdot \frac{55}{100} + \frac{15}{45} \cdot \frac{45}{100} = \frac{35}{100} = 0.35$

La probabilidad de que un alumno, elegido al azar, quiera ir a Portugal es **0.35**

b) $P(B^c/A_1) = \frac{P(B^c)\,P(A_1/B^c)}{p(A_1)} = \frac{\frac{45}{100}\cdot\frac{30}{45}}{P(B)\,P(A_1/B)+P(B^c)\,P(A_1/B^c)} = \frac{\frac{45}{100}\cdot\frac{30}{45}}{\frac{55}{100}\cdot\frac{10}{45}+\frac{45}{100}\cdot\frac{30}{45}} = \frac{\frac{30}{100}}{\frac{10}{100}+\frac{30}{100}} = \frac{30}{40} = 0.75$

La probabilidad de que un alumno que quiera ir a Italia sea de Artes es **0.75**

c) $P(A_2 \cap B) == P(A_2/B)P(B) = \frac{25}{55} \cdot \frac{55}{100} = \frac{25}{100} = 0.25$

La probabilidad de que un alumno quiera ir a Francia y sea de Ciencias es **0.25**

d) $P(A_2/B) = \frac{25}{55} = 0.45$

La probabilidad de que un alumno de Ciencias quiera ir a Francia es de **0.45**

Problema 6:

Se quiere estimar el tiempo diario de conexión a redes sociales de los universitarios. Se sabe que dicho tiempo tiene una distribución normal con desviación típica de 33 minutos (0.55 horas). Se desea construir un intervalo de confianza para la media diaria de conexión a redes sociales. Se pide:

$a)$ ¿A cuántos estudiantes debemos entrevistar para garantizar que el intervalo de confianza del 97 % tenga una amplitud menor o igual a 0.16 horas?

$b)$ Se ha encuestado a 100 universitarios y se ha obtenido una media de 4 horas al día. Calcula el intervalo de confianza al 97 % para la media poblacional.

$c)$ Un informa de cierto Ministerio afirma que la media del tiempo que los universitarios pasan conectados a las redes sociales es de 5 horas al día. Razona, a la vista del apartado $b)$ si hay motivos para dudar de su afirmación.

Solución:

Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 97 %:

$$1-\alpha = 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 0{,}03 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.985$$

El valor más cercano en la tabla es 0.9850 correspondiente a $z\alpha/_2 = 2.17$

a) La amplitud del intervalo debe ser menor que 0.16 horas ⇒el error máximo admisible $E \leq 0.08$.

$$E = z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.08 \Rightarrow 2.17 \cdot \frac{0.55}{\sqrt{n}} \leq 0.08 \Rightarrow 1.1935 \leq 0.08\ \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1.1935}{0.08} \leq \sqrt{n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{n} \geq 14.91875 \Rightarrow n \geq 14.91875^2 \Rightarrow n \geq 222.5691016$$

El tamaño de la muestra debe ser por lo menos de **223** universitarios

b) $\left(\bar{x} - z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \bar{x} + z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(4 - 2{,}17\ \frac{0.55}{\sqrt{100}}\ , 4 + 2{,}17\ \frac{0.55}{\sqrt{100}}\right) = (3.88065\ ,\ \ 4.11935)$

El intervalo de confianza es: $(\mathbf{3.88065},\ \ \mathbf{4.11935})$

c)

Existen motivos para dudar de la afirmación del Ministerio dado que 5 horas está fuera del intervalo obtenido para la media

Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2021
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Se pide:

a.- (*3 puntos*) Determina los valores del parámetro m para que A tenga inversa. Para $m = 2$, calcula A^{-1}.

b.- (*7 puntos*) Discute y resuelve, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones:

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.- (*10 puntos*) El nutricionista de una fábrica de piensos aconseja a los granjeros dedicados a la cría de cerdos una ingesta de, al menos, 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal. El nutricionista sabe que cada kilo de soja proporciona 5 unidades de proteína y 3 unidades de grasa y cada kilo de maíz proporciona 1 u. de proteína y 3 u. de grasa. Los precios del kilo de soja y maíz son 3€ y 2€, respectivamente y el granjero dispone de un presupuesto de 60€.

a.- (*8 puntos*) Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular la cantidad de soja y maíz que deben consumir los cerdos de manera que se minimice el coste de la alimentación. Obtén dicho valor mínimo.

b.- (*2 puntos*) Si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg. de soja y 15 kg. de maíz?

3.- (*10 puntos*) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^3 - 6x^2 + 9x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a.- (*3 puntos*) Estudia si $f(x)$ es continua en $x = 0$, ¿$f(x)$ es continua en la recta real?

b.- (*3 puntos*) Halla los mínimos y máximos absolutos de $f(x)$ en $x \in [1,4]$.

c.- (*1 punto*) Analiza la concavidad ($\frown$) - convexidad ($\smile$) de $f(x)$ cuando $x > 0$.

d.- (*3 puntos*) Calcula $\int_1^2 f(x)dx$.

4.- (*10 puntos*) Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 16}{x + 3}$$

a.- (*4 puntos*) Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b.- (*6 puntos*) Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en su dominio.

CONTINÚA AL DORSO

unizar.es

5.- *(10 puntos)* Los profesores Alvarado, Benítez y Cadiñanos, han corregido el 25%, 30% y 45%, respectivamente, de los exámenes de una oposición. Los porcentajes de cometer algún fallo en la corrección son 1%, 2% y 3%, respectivamente. Si se selecciona un examen al azar:

a.- *(3 puntos)* Calcula la probabilidad de que esté mal corregido.

b.- *(3 puntos)* El examen tiene un error de corrección, calcula la probabilidad de haber sido corregido por Benítez.

c.- *(4 puntos)* El examen tiene un error de corrección ¿qué corrector tiene mayor probabilidad de haber corregido mal el examen?

6.- *(10 puntos)* Se desea estimar la proporción de estudiantes que viven en un colegio mayor a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de estudiantes.

a.- *(6 puntos)* Por estudios previos se sabe que el porcentaje de estudiantes alojados en un colegio mayor es del 20%. ¿De qué tamaño debemos elegir la muestra para que el error de la estimación de la proporción sea menor de 0,1 con un nivel de confianza del 98%?

b.- *(4 puntos)* Se toma una muestra de 50 estudiantes y se observa que 12 se alojan en un colegio mayor, calcula el intervalo de confianza al 98% para la proporción de estudiantes alojados en un colegio mayor.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

- En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio.
- En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.
- Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 pts. Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Ejercicio 1

a) (**3 puntos**) Determinar los valores de m para que la matriz tenga inversa se valorará con (1 pto) y calcular A^{-1} (2 ptos). Las puntuaciones intermedias para el cálculo de la inversa serán:

1. Si se ha calculado haciendo operaciones elementales: transformar cada (a_{ij}) inicial a la matriz identidad (0,5 ptos cada coeficiente).
2. Si se ha calculado aplicando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(Adj(A))^t$ las calificaciones intermedias serán: $|A|$ (0,1 ptos), $Adj(A)$ (0,9 ptos), traspuesta (0,5 ptos), y llegar al resultado (0,5 ptos).

b) (**7 puntos**) Discusión (**3 ptos**) y resolución (**4 ptos**). Las puntuaciones intermedias son:

(**3 ptos**) Discusión:
(1 pto) Calcular $rg(B)$.
(1 pto) Calcular rango de matriz ampliada.
(1 pto) Valor de m que hace incompatible el sistema (0,5 ptos) y valores de m para SCD (0,5 ptos).

(**4 ptos**) Resolución:
Método de Gauss:
(1 pto) Escalonar las matrices.
(3 ptos) Obtener la solución (1 pto determinar el valor de cada incógnita).

Regla de Cramer:
(1 pto) Plantear la solución aplicando la regla de Cramer.
(3 ptos) Obtener la solución por determinantes (1 pto determinar el valor de cada incógnita).

Ejercicio 2

a) (**8 puntos**)

i. (**1 pto**) Definir las variables de decisión y la función objetivo.
ii. (**1 pto**) Definir las restricciones del enunciado (0,25 ptos cada una) y la condición de no negatividad de las variables $x, y \geq 0$ (0,25 ptos).
iii. (**3 ptos**) Representar cada una de las cinco restricciones (0,5 ptos cada una) y la intersección de todas ellas (0,5 ptos).

Para evaluar el cálculo de la solución óptima (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un problema mucho más sencillo que el original) se procederá como sigue:

Si se ha optado por evaluar la función objetivo en los vértices:

i. (**1,5 ptos**) Calcular las coordenadas de los vértices (cada vértice 0,3 ptos).
ii. (**1 pto**) Evaluar la función objetivo en los vértices (cada vértice 0,2 ptos).
iii. (**0,5 ptos**) Determinar el vértice donde se alcanza el mínimo (0,25 ptos) y su valor (0,25 ptos).

unizar.es

Si se ha optado por curvas de nivel:

i. **(2 ptos)** Representar dos rectas de nivel e identificar la dirección de crecimiento (la primera recta 1 pto, la paralela 0,5 ptos, identificar la dirección de mejora 0,5 ptos).

ii. **(0,5 ptos)** Razonar gráficamente el vértice solución.

iii. **(0,5 ptos)** Determinar analíticamente el mínimo (0,25 ptos) y su valor (0,25 ptos).

b) **(2 puntos)** El razonamiento (**1 pto**) y la respuesta correcta (**1 pto**).

Ejercicio 3

a) **(3 puntos)**

i. **(2 ptos)** Se valorará con (1 pto) el cálculo de los límites laterales y valor de $f(0)$ y (1 pto) concluir que es continua en $x = 0$ a partir del análisis anterior.

ii. **(1 pto)** La continuidad en el resto de la recta real.

b) **(3 puntos)** Las puntuaciones intermedias son: hallar la derivada de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ (0,5 ptos), puntos críticos (0,5 ptos). Calcular la coordenada x del mínimo absoluto (1 pto) y las coordenadas de los dos máximos (0,5 ptos cada uno). Si sólo han calculado los extremos relativos se calificará con 0,75 ptos el mínimo y 0,75 ptos el máximo.

c) **(1 punto)** No se ofrecen calificaciones intermedias.

d) **(3 puntos)**

i. **(1,5 ptos)** Cálculo de primitivas (0,5 ptos cada sumando).

ii. **(1,5 ptos)** Aplicar la Regla de Barrow y llegar al resultado (0,5 ptos cada sumando).

Ejercicio 4

a) **(4 puntos)** Dominio (0,5 ptos), estudio de asíntotas horizontales (0,75 ptos), estudio de asíntotas verticales (0,75 ptos). Estudio de asíntotas oblicuas (1 pto para el término m y 1 pto para n).

b) **(6 puntos)** Calcular $f'(x)$ (2 ptos), calcular los puntos críticos (1 pto) y analizar el carácter de los puntos críticos (1,5 ptos cada uno).

Ejercicio 5

Para obtener la máxima calificación no se necesita tanto detalle como aparece en la pauta de corrección. La falta de notación puede ser sustituida por la explicación, diagramas o tablas.

a) **(3 puntos)**

i. **(1 pto)** Definir los sucesos que intervienen en el enunciado: A = examen corregido por Alvarado, B = examen corregido por Benítez, C = examen corregido por Cadiñanos.

ii. **(1 pto)** Identificar que hay que aplicar el teorema de la probabilidad total y extraer del enunciado las probabilidades.

iii. **(1 pto)** Aplicar la fórmula y obtener el resultado.

b) **(3 puntos)**

i. **(1 pto)** Expresar la probabilidad a calcular como $P(B/M)$.

ii. **(1 pto)** Identificar que hay que aplicar el teorema de Bayes y extraer del enunciado los datos.

iii. **(1 pto)** Aplicar la fórmula y obtener el resultado.

c) **(4 puntos)**

i. **(1 pto)** Identificar que hay que calcular $P(A/M), P(C/M)$ y comparar el valor con $P(B/M)$.

ii. **(2 ptos)** Calcular $P(A/M), P(C/M)$ (1 pto cada una).

iii. **(1 pto)** Comparar resultados y concluir.

Ejercicio 6

a) **(6 puntos)**

i. **(1,5 ptos)** Saber qué cuantil buscar.

ii. **(1,5 ptos)** Calcularlo.

iii. **(3 ptos)** Poner la fórmula del error (1,5 ptos). Sustituir y calcular n (1,5 ptos).

Si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior, se restan 0,5 ptos.

b) **(4 puntos)**

i. **(1,5 ptos)** Calcular $\hat{p}$, $\hat{q}$.

ii. **(1 pto)** Calcular $Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\,\hat{q}}{n}}$ (error o semiamplitud del intervalo). En esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado a.-, aunque no lo sea.

iii. **(1,5 ptos)** Poner la fórmula del intervalo de confianza y calcularlo.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Se pide:

$a)$ Determina los valores del parámetro m para que A tenga inversa. Para $m = 2$ calcula A^{-1}.

$b)$ Discute y resuelve, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones:

$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) La matriz A admite inversa si su determinante es distinto de 0. Por tanto:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & m \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{9}{6} \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$$

Para $m = 2$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ $|A| = -3$

$$A^{-1} == \frac{1}{Det\ A}(Adj\ A)^t = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para que A admita inversa $m \neq \frac{3}{2}$. Si $m = 2$ $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2/3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

b) La matriz de coeficientes es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & m & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{9}{6} \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$$

- Si $m \neq \frac{3}{2}$ $|B| \neq 0$ es un menor no nulo de orden máximo tanto de la matriz de coeficientes como de la matriz ampliada luego

  Rango B = Rango $\bar{B}$= nº de incógnitas =3⟹ Sistema es compatible determinado.

  Escribimos su solución, utilizando la regla de Cramer:

  Para cada $m \neq \frac{3}{2}$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{9-6m} = \frac{2}{2m-3} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{9-6m} = \frac{-1}{2m-3} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{9-6m} = \frac{2}{2m-3}$$

- Para $m = \frac{3}{2}$ $|B| = 0 \Longrightarrow Rango\ B\ \neq 2$

$\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & {}^{3}/_{2} & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $M_{134} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & {}^{3}/_{2} & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$ es un menor de orden 3 de la matriz ampliada. Luego $Rango\ \bar{B} = 3\ \neq 2 = Rango\ B \Longrightarrow$ El sistema es incompatible

Para $\boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ el sistema es incompatible

Problema 2:

El nutricionista de una fábrica de piensos aconseja a los granjeros dedicados a la cría de cerdos una ingesta de, al menos, 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal. El nutricionista sabe que cada kilo de soja proporciona 5 unidades de proteína y 3 unidades de grasa y cada kilo de maíz proporciona 1 unidad de proteína y 3 unidades de grasa. Los precios del kilo de soja y maíz son 3 euros y 2 euros, respectivamente y el granjero dispone de un presupuesto de 60 euros.

$a)$ Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular la cantidad de soja y maíz que deben consumir los cerdos de manera que se minimice el coste de la alimentación. Obtén dicho valor mínimo.

$b)$ Si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg de soja y 15 kg de maíz?

Solución:

Sean: $x =$ nº de Kg de soja

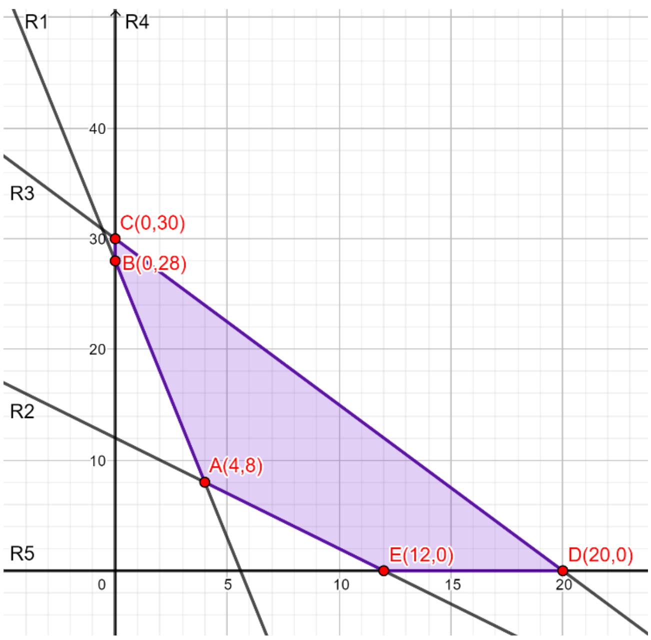
$y =$ nº de kg de maiz

Nuestro objetivo es minimizar la función objetivo, que representa el coste total

$$Z \ = F(x, y) = 3x + 2y$$

con las siguientes restricciones:

$$S \equiv \begin{cases} I_1: 5x + y \geq 28 \\ I_2: 3x + 3y \geq 36 \\ I_3: 3x + 2y \leq 60 \\ I_4: x \geq 0 \\ I_5: y \geq 0 \end{cases}$$



La región factible es la solución de este sistema de inecuaciones. Lo resolvemos gráficamente:

Las dos últimas inecuaciones restringen esta solución al primer cuadrante.

El semiplano solución de la inecuación I_1 está definido por la recta $3x + y = 28$ que pasa por los puntos (0, 28) y (8, 4). El punto O (0, 0) no cumple la inecuación I_1 $(3.0 \ + \ 0 \leq 28) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 **no** contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_2 está definido por la recta $3x + 3y = 36$ que pasa por los puntos (0, 12) y (12, 0). El punto O (0, 0) no cumple la inecuación I_2 $(3.0 \ + \ 3.0 \leq 36) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_2 **no** contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $3x + 2y = 60$ que pasa por los puntos (0, 30) y (20, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_3 $(0 + 0 \leq 60) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 contiene a O.

La región factible es el polígono ABCDE, intersección de estos semiplanos y la solución óptima se encuentra en uno de sus vértices.

Determinamos sus coordenadas

$$A \equiv \begin{cases} 5x + y = 28 \\ 3x + 3y = 36 \end{cases} \sim \begin{cases} -15x - 3y = -84 \\ 3x + 3y = 36 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x + y = 28 \\ -12x = -48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 4 \end{cases} \quad A = (4,8)$$

$$B \equiv \begin{cases} 5x + y = 28 \\ x = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 28 \\ x = 0 \end{cases} \sim B = (0, 28\,)$$

$$C \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 60 \\ x = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 30 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \; C = (0, 30\,)$$

$$D \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 60 \\ y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 20 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \; D = (20, 0\,)$$

$$E \equiv \begin{cases} 3x + 3y = 36 \\ y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \; E = (12, 0\,)$$

Según el teorema fundamental de la programación lineal, la solución, si existe, se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Valoremos la función objetivo en cada uno de ellos:

$$z(A) \;= F(4,8) = 3.4 + 2.8 = 28$$

$$z(B) = F(0, 28\,) = 3.0 + 2.28 = 56$$

$$z(C) = F(0, 30\,) = 3.0 + 2.30 = 60$$

$$z(D) = F(20, 0\,) = 3.20 + 2.0 = 60$$

$$z(E) = F(12, 0\,) = 3.12 + 2.0 = 36$$

La solución se alcanza en el vértice A. Por tanto, la dieta debe contener 4 kg de soja y 8 kg de maíz para minimizar el coste de la nutrición de los animales de la granja y será de 28 €

b) El planteamiento del problema sería el mismo para localizar el coste máximo. Se alcanza en todos los puntos de la recta $3x \; + 2y = 60$ y sería de 60 €.

Si se adquieren 12 Kg de soja y 15 de maíz, el coste sería de 3.12 + 15.2 = 66 €. Esta alternativa no es una solución óptima. Se encuentra fuera del conjunto de soluciones

Problema 3:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & si \ \ x < 0 \\ x^3 - 6x^2 + 9x & si \ \ x \geq 0 \end{cases}$:

$a)$ Estudia si $f(x)$ es continua en $x = 0$. ¿$f(x)$ es continua en la recta real?

$b)$ Halla los mínimos y máximos absolutos de $f(x)$ en $x \in [1, 4]$.

$c)$ Analiza la concavidad (∩) y la convexidad (∪) de $f(x)$ cuando $x > 0$.

$d)$ Calcula $I = \int_1^2 f(x) \cdot dx$.

Solución:

a) La función es: $y = -x^2 - 2x$ así como $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ son continuas en $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Veamos si f es continua en $x = 0$

$$\begin{cases} f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^3 - 6x^2 + 9x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

También f es continua en $x = 0$

f es continua en la recta real

b) La función es: $y = -x^2 - 2x$, $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ son derivables en $\mathbb{R} \Rightarrow f$ es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & si \ \ x < 0 \\ 3x^2 - 12x + 9 & si \ \ x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0, x \in (0, \infty) \Longrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6} = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$$

	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, \infty)$
Signo f'	+	0	-	0	+
Crecimiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Los máximos y mínimos absolutos de f en el intervalo $[1, 4]$pueden alcanzarse en los extremos relativos que presenta en el mismo, o bien en los extremos. Evaluamos f estos puntos:

$f(1) = 1^3 - 6.1^2 + 9.1 = 4$ $\quad f(3) = 3^3 - 6.3^2 + 9.3 = 0$ $\quad f(4) = 4^3 - 6.4^2 + 9.4 = 4$

El máximo absoluto es 4 y se alcanza en los dos extremos del intervalo. El mínimo absoluto es 0, coincide con el relativo y se alcanza en $x = 3$

c) La función es: $y = -x^2 - 2x$, $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ son derivables dos veces en $\mathbb{R} \Rightarrow f$ es dos veces derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & si \ \ x < 0 \\ 6x - 12 & si \ \ x > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = 0, x \in (0, \infty) \Longrightarrow 6x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
Signo f''	-	0	+
Curvatura de f	$\cap$	Punto de inflexión	$\cup$

f es cóncava en el intervalo $(0,2)$ y convexa en $(2,\infty)$

d) $I=\int_1^2 f(x)\cdot dx = \int_1^2 (x^3-6x^2+9x)dx = \left[\frac{x^4}{4}-6\frac{x^3}{3}+9\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{8x^3}{4}+\frac{18x^2}{4}\right]_1^2 \cdot =$

$=\left[\frac{2^4}{4}-\frac{8.2^3}{4}+\frac{18.2^2}{4}\right]-\left[\frac{1}{4}-\frac{8}{4}+\frac{18}{4}\right]=\frac{13}{4}$

$$I=\int_1^2 f(x)\cdot dx=\mathbf{\frac{13}{4}}$$

Problema 4:

Dada la función: $f(x) = \frac{2x^2-16}{x+3}$:

$a)$ Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

$b)$ Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en su dominio.

Solución:

a) f es una función racional. Existe en todo valor que no anule el denominador de su expresión analítica

$$\boldsymbol{Dom\, f = \mathbb{R} - \{-3\}}$$

- $x = -3$ es una posible asíntota vertical:

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{2x^2-16}{x+3} = \frac{2}{0} = -\infty \qquad \lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{2x^2-16}{x+3} = \frac{2}{0} = +\infty$$

$\boldsymbol{x = -3}$ **es asíntota vertical**

- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-16}{x+3} = -\infty \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{2x^2-16}{x+3} = \infty$

No existen asíntotas horizontales

- Veamos por último si existen asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x^2-16}{x+3} : x\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-16}{x^2+3x} = 2 = \lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x^2-16}{x+3} - 2x\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-16-2x(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-6x-16}{x+3} = -6$$

Análogamente $n = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx) = -6$

La recta $\boldsymbol{y = 2x - 6}$ es una asíntota de f en $-\infty$ y en $+\infty$

b) f es derivable en su dominio y su derivada es $f'(x) = \frac{4x(x+3)-(2x^2-16)}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+12x+16}{(x+3)^2}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144-128}}{4} = \frac{-12 \pm 4}{4} = \begin{matrix} -2 \\ -4 \end{matrix}$$

Podemos estudiar su monotonía y posibles extremos relativos de f a partir del signo de su derivada:

	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, -3)$	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, \infty)$
Signo f'	+	0	-	$\nexists$	+	0	+
Crecimiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	$\nexists$	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

f tiene un mínimo relativo en el punto $(\mathbf{-2, -8})$ y un máximo relativo en el punto $(\mathbf{-4, -16})$

Problema 5:

Los profesores Alvarado, Benítez y Cadiñanos, han corregido el 25 %, 30 % y 45 %, respectivamente, de los exámenes de una oposición. Los porcentajes de cometer algún fallo en la corrección son 1 %, 2 % y 3 %, respectivamente. Si se selecciona un examen al azar:

a) Calcular la probabilidad de que esté mal corregido.

b) El examen tiene un error de corrección, calcula la probabilidad de haber sido corregido por Benítez.

c) El examen tiene un error de corrección, ¿qué corrector tiene mayor probabilidad de haber corregido mal el examen?

Solución:

Nombramos los sucesos:

A = "Alvarado ha corregido un examen de la oposición" $P(A) = 0.25$

B= "Benítez ha corregido un examen de la oposición" $P(B) = 0.3$

C = "Cadiñanos ha corregido un examen de la oposición" $P(C) = 0.45$

F = "El profesor ha cometido un fallo en la corrección"

$$P(F/A) = 0.01 \qquad P(F/B) = 0.02 \qquad P(F/C) = 0.03$$

A, B y C constituyen un sistema completo de sucesos, dado que son incompatibles dos a dos y la unión de los tres es el espacio muestral.

a) Probabilidad de que un examen, elegido al azar, esté mal corregido = $P(F)$

Por el teorema de la probabilidad total

$$P(F) = P(F/A) \,.\, P(A) + P(F/B) \,.\, P(B) + P(F/C) \,.\, P(C)$$

$$P(F) = 0.01 \,.\, 0.25 + 0.02 \,.\, 0.3 + 0.03 \,.\, 0.45 = 0.022$$

La probabilidad de que un examen, elegido al azar, esté mal corregido es **0.022**

b) Tal como hemos nombrado los sucesos, nos piden $P(B/F)$.

$$P(B/F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{P(B) \,.\, P(F/B)}{P(F)} = \frac{0.3 \;.\; 0.02}{0.022} = 0.2727$$

La probabilidad de que si un examen, elegido al azar, presenta un fallo, haya sido corregido por Benítez es de **0.2727**

c) Calculemos también $P(A/F)$ y $P(C/F)$

$$P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A) \,.\, P(F/A)}{P(F)} = \frac{0.25 \;.\; 0.01}{0.022} = 0.1136$$

$$P(C/F) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{P(C) \,.\, P(F/C)}{P(F)} = \frac{0.45 \;.\; 0.03}{0.022} = 0.6136$$

El profesor que tiene mayor probabilidad de haber corregido el examen, si el examen elegido al azar presenta un fallo, es Cadiñanes

Problema 6:

Se desea estimar la proporción de estudiantes que viven en un colegio mayor a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de estudiantes.

a) Por estudios previos se sabe que el porcentaje de estudiantes alojados en un colegio mayor es del 20 %. ¿De qué tamaño debemos elegir la muestra para que el error de la estimación de la proporción sea menor de 0.1 con un nivel de confianza del 98 %?

b) Se toma una muestra de 50 estudiantes y se observa que 12 se alojan en un colegio mayor, calcula el intervalo de confianza al 98 % para la proporción de estudiantes alojados en un colegio mayor.

Solución:

Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 98 %:

$$1-\alpha = 0.98 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.99$$

El valor más cercano en la tabla es 0,9901 correspondiente al valor $z_{\alpha/2} = 2.33$

a) En este caso $p_r = 0.2$ .El error máximo admisible $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}} \leq 0.1$.

$$E \leq 0.1 \Longrightarrow 2.33\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{n}} \leq 0.1 \Longrightarrow \sqrt{\frac{0.16}{n}} \leq \frac{0.1}{2.33}, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \frac{0.16}{n} \leq \left(\frac{0.1}{2.33}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow n \geq \frac{0.16}{0.00184} \cong 86.86$$

La muestra debe ser de **87** estudiantes por lo menos

d) En este caso $p_r = \frac{12}{50} = 0.24$

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por

$$\left(p_r - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}, p_r + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}\right) = \left(0.24 - 2.33\sqrt{\frac{0.24\cdot 0.76}{50}},\ 0.24 + 2.33\sqrt{\frac{0.24\cdot 0.76}{50}}\right) =$$

$$= (0.24 - 0.0604,\ 0.24 + 0.0604) = (0.1796,\ 0.3004)$$

El intervalo de confianza para la proporción pedido es $(\mathbf{0.1796},\ \mathbf{0.3004})$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1.A:

Un hotel compra azúcar y sal a su proveedor habitual. El azúcar lo compra a 7*m* euros el kilogramo y la sal a 2 *m* euros el kilogramo. La última compra ha sido de 22.5 kilogramos en total, entre azúcar y sal, y por ella ha pagado 98 *m* euros.

a) **[0.5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) donde las incógnitas $\boldsymbol{x}$ e *y* sean las cantidades de azúcar y sal compradas.

b) **[2 puntos]** Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el precio de la sal fuese de 0.2 euros el kilogramo? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el precio de la sal. ¿Cuántos kilogramos compró de azúcar en tal caso?

Problema 1.B:

Una empresa monta dos tipos de palés. Cada palé de tipo *A* requiere 3 horas de preparación en el taller *T*1 y 4 horas de preparación en el taller *T*2. Cada palé de tipo *B* requiere 1 hora de preparación en el taller *T*1 y 3 horas de preparación en el taller *T*2. Cada semana se dispone de un total de 30 horas para uso del taller *T*1 y de 60 horas de uso del taller *T*2. Cada palé de tipo *A* contiene una caja y cada palé de tipo *B* contiene dos cajas, existiendo el compromiso comercial de entregar al menos 4 cajas semanales.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos palés de cada tipo puede preparar en una semana para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría preparar cuatro palés de cada tipo en una semana?

b) **[0.75 puntos]** Si se obtiene un beneficio neto de 2 000 euros por la venta de cada panel de tipo *A* y de 1000 euros por cada palé de tipo *B* ¿cuántos debería preparar de cada tipo para maximizar el beneficio neto? ¿A cuánto ascendería dicho beneficio?

Problema 2.A:

Dada la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{a\cdot x}{3x^2+1}}$ se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar el valor de $\boldsymbol{a}$ que verifica que $\boldsymbol{F(0) = 0}$ y $\boldsymbol{F(1) = \frac{4}{3}\cdot ln(4)}$ donde $\boldsymbol{F}$ denota una primitiva de $\boldsymbol{f}$.

b) **[2 puntos]** Considerando el valor de $\boldsymbol{a}$ obtenido en el apartado anterior, estudiar y representar gráficamente la función $\boldsymbol{f}$ en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje *OX* entre $\boldsymbol{x = -1}$ y $\boldsymbol{x = 1}$.

Problema 2.B:

Se ha investigado el tiempo en minutos (f) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento en días (x) de los deportistas, obteniéndose que:

$$f(x) = 2 + \frac{300}{x+30}, x \geq 0$$

a) **[2 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio ¿Aumenta en algún momento el tiempo que se tarda en realizar la prueba?

b) **[0.5 puntos]** Por mucho que entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de dos minutos? ¿Cuánto tiempo hay que entrenar para hacer la prueba en menos de 4 minutos?

Problema 3.A:

Cierto estudio de mercado revela que el 45 % de los entrevistados consume el producto *A* y el 60 % de los entrevistados consume el producto *B*. Además, se obtiene que el porcentaje de entrevistados que consume ambos productos es del 20 %. Si seleccionamos al azar un individuo de los entrevistados.

a) **[1.25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que consuma el producto A pero no consuma el producto *B*?

b) **[1.25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que consuma alguno de los dos productos?

Problema 3.B:

Los estudiantes de un instituto pueden optar por cursar inglés o francés. En un determinado curso hay 500 estudiantes de los que 460 estudian inglés y el resto francés. La mitad de los estudiantes que estudian inglés son mujeres. De los que estudian francés, el 75 % son mujeres.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) **[1.25 puntos]** Elegida una estudiante al azar entre mujeres ¿cuál es la probabilidad de que estudie francés?

Problema 4A:

Antes de un referéndum, se desea realizar un estudio para estimar los resultados del mismo.

a) **[1 punto]** ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de personas que votarán *SÍ* a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.04 y un nivel de confianza del 99 %?

b) **[1.5 puntos]** En una muestra aleatoria de 500 votantes se obtuvo que 100 de ellos tienen la intención de votar *SÍ*. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de personas que votarán *SÍ* en el referéndum

Problema 4B:

El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede expresar mediante una distribución normal con desviación típica 0.4 años.

a) **[1.5 puntos]** Si se toma una muestra aleatoria de 600 usuarios y se obtiene que el tiempo medio de renovación de sus teléfonos fue de 1.8 años, construye a partir de dicha muestra un intervalo de confianza para el tiempo medio de renovación, al 90 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo de renovación a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.3 años y un nivel de confianza del 90 %?

*Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1.28) = 0.90; F(1.64) = 0.95; F(1.96) = 0.975; F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1.A:

Un hotel compra azúcar y sal a su proveedor habitual. El azúcar lo compra a 7m euros el kilogramo y la sal a 2 m euros el kilogramo. La última compra ha sido de 22.5 kilogramos en total, entre azúcar y sal, y por ella ha pagado 98 m euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades de azúcar y sal compradas.

b) Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el precio de la sal fuese de 0.2 euros el kilogramo? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el precio de la sal. ¿Cuántos kilogramos compró de azúcar en tal caso?

SOLUCION

Sean x los kilogramos de azúcar e y los de sal.

El sistema es $\begin{cases} x+y=22.5 \\ 7mx+2my=98m \end{cases}$

donde la primera ecuación representa el total kilogramos y la segunda su precio.

Resolvemos. Tenemos dos casos

Caso 1. Si $m \neq 0$. Podemos entonces dividir por m. Tenemos dos casos

$$\begin{cases} x+y=22.5 \\ 7mx+2my=98m \end{cases} \text{ equivale a } \begin{cases} x+y=22.5 \\ 7x+2y=98 \end{cases}$$

Despejando y en la primera ecuación queda $7x+2(22.5-x)=98$ que operando resulta

$5x=98-45$ y finalmente $x=10.6$. De la otra ecuación $y=22.5-10.6=11.9$

Es un sistema con solución única (compatible y determinado).

Caso 2. Si $m=0$. En estas circunstancias, el sistema es $\begin{cases} x+y=22.5 \\ 0=0 \end{cases}$

La segunda ecuación no aporta nada y podemos eliminarla. Hay infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado). Podría añadirse que solo tienen sentido cantidades positivas, luego x puede tomar cualquier valor con $0 \leq x \leq 22.5$ en tanto $y=22.5-x$.

Podemos ya responder a las cuestiones del enunciado. Si el precio de la sal fuera 0.2 entonces 0.2 = 2m de donde m = 0.1.

Sí, es posible que el precio de la sal fuese 0.2 euros por kilogramo.

En tal caso compraría 10.6 kilogramos de azúcar. De hecho, hay solución única siempre que el precio sea no nulo y las cantidades que compra serías exactamente las mismas.

Problema 1.B:

Una empresa monta dos tipos de palés. Cada palé de tipo A requiere 3 horas de preparación en el taller T1 y 4 horas de preparación en el taller T2. Cada palé de tipo B requiere 1 hora de preparación en el taller T1 y 3 horas de preparación en el taller T2. Cada semana se dispone de un total de 30 horas para uso del taller T1 y de 60 horas de uso del taller T2. Cada palé de tipo A contiene una caja y cada palé de tipo B contiene dos cajas, existiendo el compromiso comercial de entregar al menos 4 cajas semanales.

¿Cuántos palés de cada tipo puede preparar en una semana para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría preparar cuatro palés de cada tipo en una semana?

Si se obtiene un beneficio neto de 2 000 euros por la venta de cada panel de tipo A y de 1 000 euros por cada palé de tipo B ¿cuántos debería preparar de cada tipo para maximizar el beneficio neto? ¿A cuánto ascendería dicho beneficio?

SOLUCION

Sean x los palés de tipo A e y los de tipo B. Sea:

La restricción de tiempo en el taller T1 viene dada por $r: 3x + y \leq 30$ en tanto la restricción de tiempo en el taller T2 es $s: 4x + 3y \leq 60$. En cuanto al número mínimo de cajas, corresponde a $s: x + 2y \geq 4$. Hacemos las tablas respectivas para dibujarlas

$r: 3x + y = 30$

x	y
0	30
10	0

$s: 4x + 3y = 60$

x	y
0	20
15	0

$t: x + 2y = 4$

x	y
4	0
0	2

Calculamos los puntos de corte. Uno de ellos debe ser la solución.

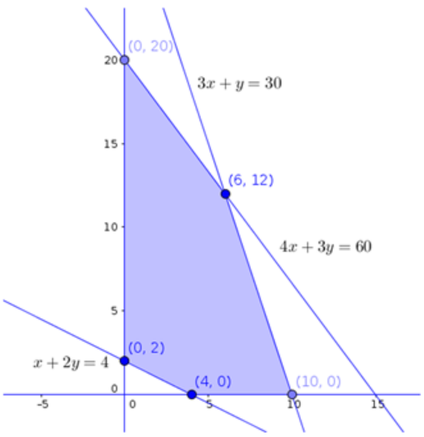
$P = t \cap OX, Q = t \cap OY, R = s \cap OY$

$S = r \cap s = \begin{cases} 3x + y = 30 \\ 4x + 3y = 60 \end{cases} \begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \end{cases}$

$$T = s \cap OX$$

De donde P(4, 0), Q(0, 2), R(0, 20), S (6, 12) y T (10, 0).

La región factible es pues la siguiente:



Se ve gráficamente que los otros puntos de corte no están en el primer cuadrante. Podrían calcularse también sin dificultad.

El punto x = 4, y = 4 cumple todas las restricciones. Por tanto:

Sí, podrían preparase **4** palés de cada tipo.

Sea $B(x, y) = 2\ 000x + 1\ 000y$ el beneficio en euros.

Para maximizarlo, calculamos cuánto vale en los puntos extremos.

$$B(4, 0) = 8\ 000$$

$$B(0, 2) = 2\ 000$$

$$B(0, 20) = 20\ 000$$

$$B(6, 12) = 24\ 000$$

$$B(10, 0) = 20\ 000$$

Es claro pues que el beneficio máximo se alcanza en el punto (6, 12). En conclusión:

El beneficio máximo se alcanza produciendo **6** palés de tipo A y **12** palés de tipo B.

Dicho beneficio son **24 000 euros**.

Problema 2.A:

Dada la función $f(x) = \frac{a \cdot x}{3x^2+1}$ se pide:

Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = \frac{4}{3} \cdot ln(4)$ donde F denota una primitiva de f.

Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje OX entre $x = -1$ y $x = 1$.

SOLUCION

Calculamos la primitiva de f.

$$F(x) = \int \frac{a \cdot x}{3x^2+1} dx = \frac{a}{6} ln|3x^2 + 1| + k$$

$$\begin{cases} F(0) = \frac{a}{6} ln(1) + k \\ F(1) = \frac{a}{6} ln(4) + k \end{cases}$$

$$F(0) = \frac{a}{6} 0 + k = 0 \Longrightarrow k = 0$$

$$F(1) = \frac{a}{6} ln(4) = \frac{4}{3} ln(4) \Longrightarrow a = 8$$

La solución es $\boldsymbol{a = 8}$

Sea $a = 8$

$$y = \frac{8x}{3x^2 + 1}$$

Estudiemos primero su dominio. El único problema aparecería si se anulara el denominador. Ahora bien, eso no puede ocurrir pues la ecuación $3x^2 + 1 = 0$ no tiene solución alguna. El dominio son todos los reales. Es fácil notar que la función es impar $f(-x) = -f(x)$ por lo que bastaría estudiarla en $(0, \infty)$. No obstante, vamos a hacer el estudio en todos los reales, el hecho de ser impar nos servirá de comprobación.

Calculamos los límites en los infinitos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

que nos da una asíntota horizontal $y = 0$ en ambos infinitos. No hay, por tanto, asíntota oblicua.

La función f es continua y derivable en todo su dominio D, corta al eje OY en el punto (0, 0) y al eje OX también en (0, 0)

Para estudiar su crecimiento, calculamos su derivada.

$$f'(x) = \frac{8(3x^2+1)-8x(6x)}{(3x^2+1)^2} = \frac{-24x+8}{(3x^2+1)^2}.$$

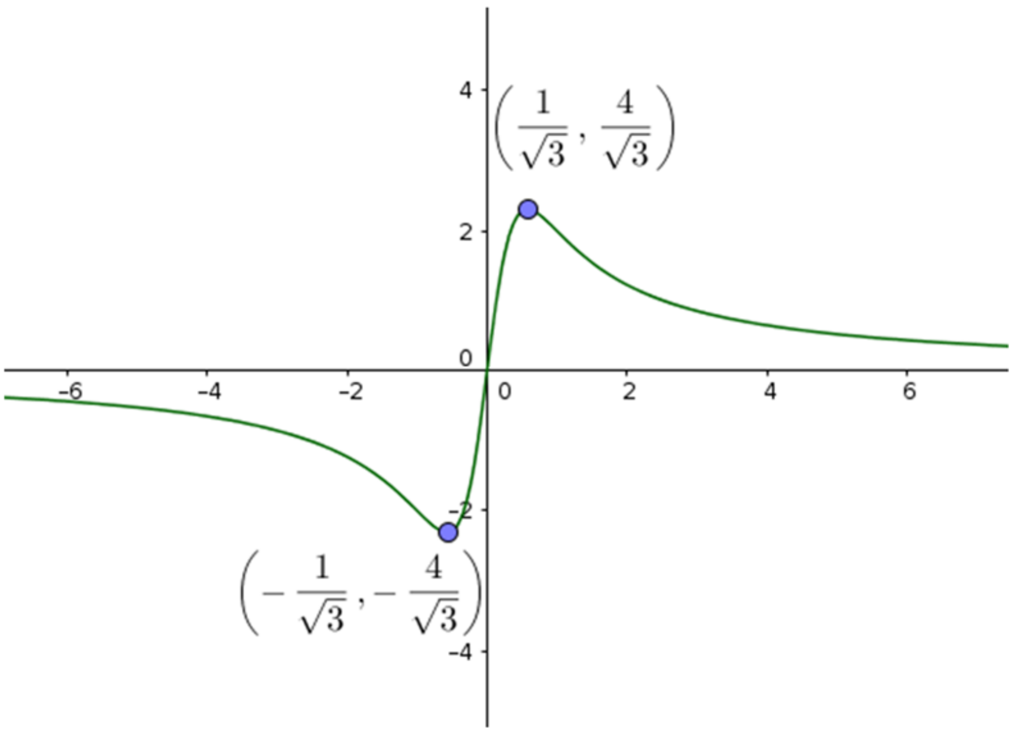
Para que se anule, debe ser $-24x^2 + 8 = 0$ que da como valores $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

Dando valores intermedios, $f'(-1) = -16 < 0$, $f'(0) = 8 > 0$ y $f'(1) = -16 < 0$ obtenemos que es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ y creciente en $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

El estudio de la concavidad es muy complejo, por lo que lo omitiremos.

Dando como valores los puntos donde cambia la derivada tenemos $f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-4}{\sqrt{3}}$ y $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Estamos ya en posición de dibujar la gráfica.



Obsérvese la simetría. Vamos a calcular el área, utilizando dicha simetría.

$$Área = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx = 2\int_{0}^{1} f(x)dx = 2\frac{4}{3}ln|3x^2+1|\Big]_0^1 = \frac{8}{3}ln(4)$$

Nótese que podría hacerse también como $\int_0^1 f(x)dx - \int_{-1}^0 f(x)dx$ y el resultado sería el mismo.

El área es $\boldsymbol{\frac{8}{3}ln(4)}$ aproximadamente **3.70.**

Problema 2.B:

Se ha investigado el tiempo en minutos(f) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento en días (x)de los deportistas, obteniéndose que:

$$f(x) = 2 + \frac{300}{x+30}, x \geq 0$$

Estudia y representa gráficamente la función $f$en todo su dominio ¿Aumenta en algún momento el tiempo que se tarda en realizar la prueba?

Por mucho que entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de dos minutos? ¿Cuánto tiempo hay que entrenar para hacer la prueba en menos de 4 minutos?

SOLUCION

En primer lugar, debemos notar que, aunque la función puede definirse en todos los reales (salvo el -30 que anula al denominador) no tiene sentido en los negativos, pues obviamente no hay tiempos negativos de entrenamiento. De hecho, es donde nos dicen que está definida.

En $[0, +\infty)$ dicha función es continua.

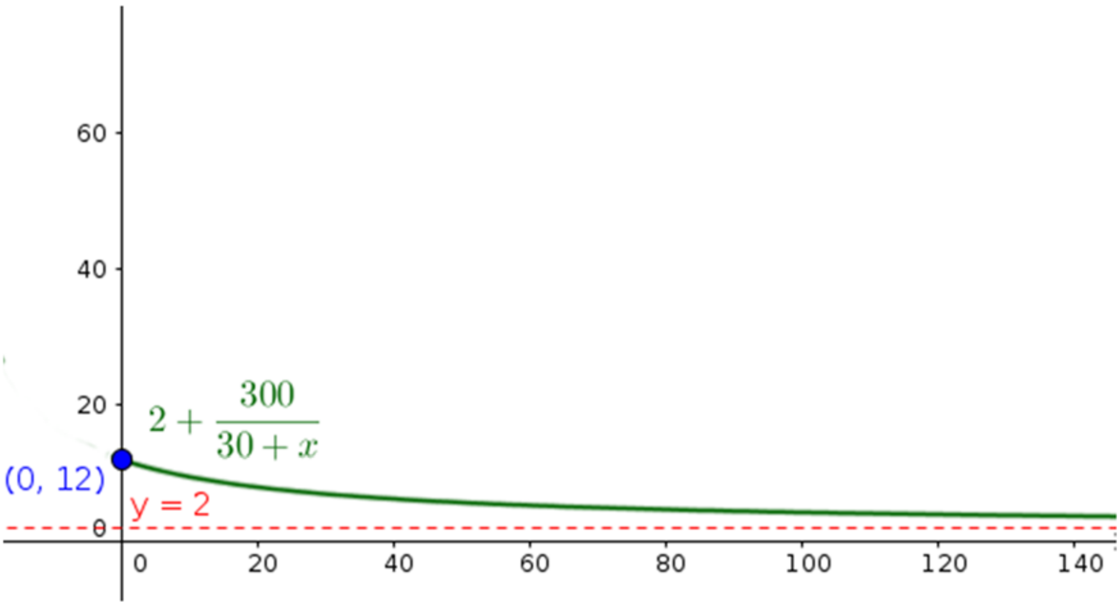
Si derivamos, $f'(x) = \frac{-300}{(x+30)^2} < 0$ por lo que la función es siempre decreciente. A más entrenamiento, menos tiempo en hacer la prueba siempre. En otras palabras:

No, el tiempo en realizar la prueba no aumenta en ningún momento

La segunda derivada es $f''(x) = \frac{600}{(x+30)^3} > 0$ con lo que la función siempre tiene curvatura positiva (ramas hacia arriba).

Puesto que no hay discontinuidades y las derivadas primera y segunda no se anulan, los únicos puntos que necesitamos dar son los extremos del dominio. $f(0) = 12$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$. De paso, notamos que hay una asíntota horizontal en $+\infty$ de modo que no hay asíntota oblicua en ese infinito. En $-\infty$no tiene sentido estudiarla, pues solo está definida a partir de cero.

El dibujo es pues:



Se ve ya en el dibujo que no es posible hacer la prueba en menos de dos minutos, por mucho que se entrene. De un modo más formal, al ser la función decreciente y su límite en infinito 2, todos sus valores deben ser superiores a 2. En resumen:

No, por mucho que se entrene, es imposible hacer la prueba en menos de dos minutos (ni tampoco en dos minutos exactamente)

Igualamos a 4. $f(x) = 4$ es $2 + \frac{300}{x+30} = 4$que operando resulta

$$2 = \frac{300}{30 + x} \Leftrightarrow x + 30 = \frac{300}{2}$$

De donde $x = 120$ días. A partir de ahí es menor el tiempo que 4 minutos.

Para hacer la prueba en menos de cuatro minutos, hay que entrenar más de **120 días**

Problema 3.A:

Cierto estudio de mercado revela que el 45% de los entrevistados consume el producto A y el 60 % de los entrevistados consume el producto B. Además, se obtiene que el porcentaje de entrevistados que consume ambos productos es del 20 %. Si seleccionamos al azar un individuo de los entrevistados:

¿Cuál es la probabilidad de que consuma el producto A pero no consuma el producto B?

¿Cuál es la probabilidad de que consuma alguno de los dos productos?

SOLUCION

Construimos una tabla de contingencia. Estos son los datos originales:

	Consume A (%)	NO consume A (%)	Totales (%)
Consume B (%)	20		60
NO consume B (%)			
Totales (%)	45		

Completamos pues los datos. Recordemos que al final de cada columna y fila están las sumas

	Consume A (%)	NO consume A (%)	Totales (%)
Consume B (%)	20	40	60
NO consume B (%)	25	15	40
Totales (%)	45	55	100

Podemos pues resolver las cuestiones sin dificultad, sin más que mirar la tabla.

La probabilidad de consumir el producto A pero no el B es del **0.25**, del 25 %

Basta sumar $P(A \cup B) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = 20\% + 40\% + 25\% = 85\%$

La probabilidad de consumir alguno de los dos productos es del **0.85**, del 85 %

Problema 3.B:

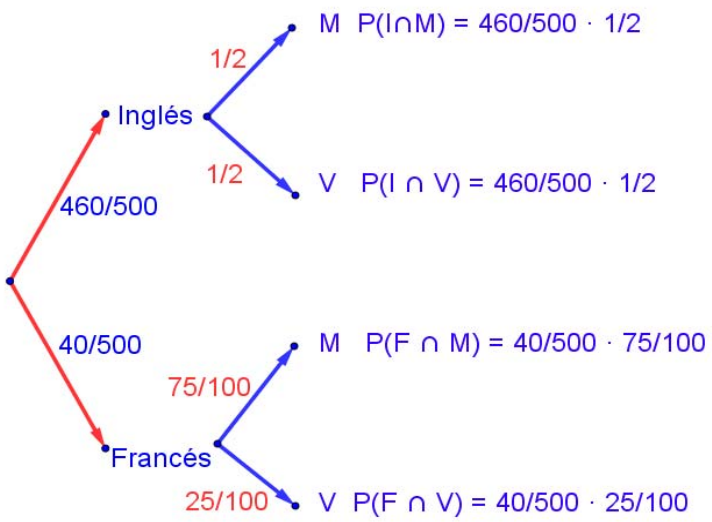
Los estudiantes de un instituto pueden optar por cursar inglés o francés. En un determinado curso hay 500 estudiantes de los que 460 estudian inglés y el resto francés. La mitad de los estudiantes que estudian inglés son mujeres. De los que estudian francés, el 75 % son mujeres.

Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Elegida una estudiante al azar entre mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que estudie francés?

SOLUCION

La manera más sencilla de resolverlo es hacer un diagrama de árbol. Llamamos F = "Estudiar francés", I = "Estudiar inglés (no estudiar francés)", M = "Ser mujer", V = "Ser varón (no ser mujer)".



Naturalmente, es posible simplificar las fracciones, pero resulta más claro usar los datos originales.

Usando la Fórmula de la Probabilidad Total tenemos

$$P(M) = P(M/I)P(I) + P(M/F)P(F) = \frac{1}{2}\cdot\frac{460}{500} + \frac{75}{100}\cdot\frac{40}{500} = \frac{13}{25}$$

La probabilidad de ser mujer es **13/25**, aproximadamente **0.52.**

Se trata de una condicionada, de modo que necesitamos la Fórmula de la Probabilidad Condicionada

$$P(F/M) = \frac{P(M\cap F)}{P(M)} = \frac{P(M/F)P(F)}{P(M)} = \frac{\frac{75}{100}\cdot\frac{40}{500}}{\frac{13}{25}} = \frac{3}{26}$$

Si el estudiante es mujer, la probabilidad de que estudie francés es **3/26**, aproximadamente **0.12**.

Problema 4A:

Antes de un referéndum, se desea realizar un estudio para estimar los resultados del mismo.

¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de personas que votarán SÍ a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.04 y un nivel de confianza del 99 %?

En una muestra aleatoria de 500 votantes se obtuvo que 100 de ellos tienen la intención de votar SÍ. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de personas que votarán SÍ en el referéndum

SOLUCIÓN

Se trata de una distribución binomial, $B(n, p)$ donde queremos calcular un intervalo de confianza para p

Sabemos que, si calculamos la media muestral, puede aproximarse por una normal

$\overline{X} = N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$, de donde $Z = \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = N(0,1)$. Ahora bien, no conocemos una estimación de p, de modo que no tenemos otro remedio que considerar el caso más desfavorable, $p = 1/2$

El intervalo es del 99 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.99$

$F(M) - F(-M) = 0.99$que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.99$ y finalmente $F(M) = \frac{0.99+1}{2} = 0.995$ que nos da $M = 2.58$

Por tanto, el intervalo es $-2.58 < \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < 2.58$. El intervalo es pues

$$\left(p - 2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

que también puede escribirse como $p \pm 2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

El error de estimación es, por tanto $2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Como ya habíamos dicho, no tenemos una estimación de p, por lo que tomamos $p = 1/2$. Nos dicen además que el error de estimación es 0.04, por lo que, igualando tenemos:

$2.58 \cdot \sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{n}} = 0.04$ es decir $\frac{1.29}{\sqrt{n}} = 0.04$ que despejando da $n = \left(\frac{1.29}{0.04}\right)^2 \approx 1\,040.06$

Como debe ser un número natural, tomamos el siguiente

El tamaño muestral mínimo necesario son **1 041** personas

Siendo al 99 %, podemos aprovechar algunos cálculos del apartado anterior.

El intervalo es $\left(p - 2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\ p + 2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

Ahora sí que tenemos una estimación para p. Es $p = 100/500 = 0.2$. No solo eso, tenemos el tamaño muestral, $n = 500$. Sustituyendo, el intervalo resulta ser

$$\left(0.2 - 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{500}}, 0.2 + 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{500}}\right)$$

Basta hacer la operación y queda $(0.1539, 0.2461)$

El intervalo es **(0.1539, 0.2461)** o, en porcentaje (15.39 %, 24.61 %)

Problema 4B:

El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede expresar mediante una distribución normal con desviación típica 0.4 años.

Si se toma una muestra aleatoria de 600 usuarios y se obtiene que el tiempo medio de renovación de sus teléfonos fue de 1.8 años, construye a partir de dicha muestra un intervalo de confianza para el tiempo medio de renovación, al 90% de confianza.

¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo de renovación a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.3 años y un nivel de confianza del 90 %?

SOLUCIÓN

Tipificamos la normal. La media muestral es normal $\overline{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Nos dan los parámetros $\sigma = 0.4$ y $n = 600$ en tanto μes desconocida.

Por tanto $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{0.4}{\sqrt{600}}} = N(0,1)$. Operando es $\frac{0.4}{\sqrt{600}} = 0.016$

El intervalo es del 90 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.9$

$F(M) - F(-M) = 0.9$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.9$ y finalmente $F(M) = \frac{0.9+1}{2} = 0.95$ que nos resulta en $M = 1.64$

Por tanto, la desigualdad queda $-1.64 < \frac{\overline{X}-\mu}{0.016} < 1.64$.

El intervalo es pues $\left(\overline{X} - 1.64 \cdot 0.016,\ \overline{X} + 1.64 \cdot 0.016\right)$ que sustituyendo la media muestral por 1.8 resulta ser $(1.8 - 1.64 \cdot 0.016, 1.8 + 1.64 \cdot 0.016) = (1.773, 1.827)$

que también puede escribirse como $p \pm 2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

El error de estimación es, por tanto $2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

El intervalo de confianza es **(1.773, 1.827)**

Siendo al 90 %, podemos aprovechar algunos cálculos del apartado anterior.

El intervalo era $\left(\overline{X} - 1.64 \cdot \frac{0.4}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1.64 \cdot \frac{0.4}{\sqrt{n}}\right)$ de modo que el error es $\frac{0.4}{\sqrt{n}}$

Igualando a 0.03 tenemos $\frac{1.64 \cdot 0.4}{\sqrt{n}} = 0.03$ que despejando da $n = \left(\frac{0.4 \cdot 1.64}{0.03}\right)^2 \approx 478.15$

Como debe ser un número natural, tomamos el siguiente

Es necesario un tamaño muestral mínimo de **479** observaciones

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

Problema 1:

Un bar realiza todas las semanas un pedido de cerveza y vino a uno de sus dos proveedores. El proveedor A le vende la cerveza a un euro el litro y el vino a dos euros el litro. El proveedor B le vende la cerveza al mismo precio que el A, pero el litro de vino se lo vende a m euros. Si realiza el pedido semanal al proveedor A paga 1.000 euros, mientras que si lo realiza al proveedor B paga $500m$ euros.

$a)$ Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean los litros de cerveza y vino, respectivamente, comprados cada semana.

$b)$ ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que el precio del litro de vino en el proveedor B sea también de dos euros? En caso afirmativo, ¿cuánto vino compra por semana, si el pedido semanal de cerveza es de 400 litros? Determina la cantidad de cerveza y vino comprada semanalmente en cualquier otro caso, es decir, cuando el precio del litro de vino en el proveedor B no sea de dos euros.

Problema 2:

Las cantidades mínimas diarias recomendadas que debe ingerir una determinada mascota son: 6 unidades de hidratos de carbono, 18 unidades de proteínas y 4 unidades de grasa. Una empresa dedicada al cuidado de este tipo de mascotas plantea diseñar una dieta para las mismas basada en el consumo de latas de dos marcas distintas M_1 y M_2. Se sabe que cada lata de la marca M_1 contiene 3 unidades de hidratos de carbono, 3 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas y que cada lata de la marca M_2 contiene 1 unidad de hidratos de carbono, 9 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Además se sabe que el precio de cada lata de la marca M_1 es de 22 euros y que el precio de cada lata de la marca M_2 es de 24 euros.

$a)$ ¿Cuántas latas de cada tipo se puede dar en un día a la mascota para cumplir todos los requisitos anteriores relativos a su dieta? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se le podría dar una lata de la marca M_1 y dos latas de la marca M_2?

$b)$ ¿Cuántas latas de cada tipo se debería dar en un día a la mascota para que el precio de su alimentación sea mínimo? ¿y para minimizar el número de latas de tipo M_1 que come ese día?

Problema 3:

Se ha investigado la energía que produce una placa solar (f) en función del tiempo transcurrido, en horas, desde que amanece (x), obteniéndose que:

$$f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & si \;\; 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{a}{x^2} & si \; 8 < x \leq 12 \end{cases}.$$

$a)$ Determinar el valor de a para que la energía producida varíe de forma continua al variar el tiempo transcurrido desde que amanece.

$b)$ Considerando el valaor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánta energía produce en ese momento?

Problema 4:

Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 10$.

b) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3{,}2$ y $x = -2$.

Problema 5:

Los cursos de monitor de esquí en determinada estación se reparten en tres turnos, A, B y C. Los alumnos del turno A representan el 20 % del alumnado, los del turno B representan el 30 % del alumnado y los del turno C representan el 50 % restante. Además se sabe que el porcentaje de alumnos que aprueban el curso es del 95 % en el turno A, 90 % en el B y 92 % en el C. Si se elige un alumno al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso y no sea del turno B?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso o sea del turno B?

Problema 6:

En el primer curso de un grado, el 60 % de los estudiantes son mujeres y el 40 % restante son hombres. Además, se sabe que el 80 % de las mujeres y el 75 % de los hombres aprobaron el examen de matemáticas. Si se elige un estudiante de ese curso al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya suspendido matemáticas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado matemáticas?

Problema 7:

Se quiere hacer un estudio para estimar el porcentaje de declaraciones de la renta que son fraudulentas.

a) ¿Cuál será el tamaño mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de declaraciones fraudulentas a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,026 y un nivel de confianza del 90 %?

b) En una muestra aleatoria de 1.000 declaraciones se obtuvo que 110 de ellas eran fraudulentas. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de declaraciones fraudulentas.

Problema 8:

Una fábrica de quesos quiere estudiar el tiempo que tarde el producto en estropearse si no se envasa. Para ello, considera una muestra de 324 quesos y observa que el tiempo medio hasta que se estropean es de 27 días. Se supone además que el tiempo hasta que se estropea el producto sigue una distribución normal con desviación típica 4 días.

a) Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio que tarda en estropearse este tipo de queso al 99 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,5 días y un nivel de confianza del 99 %?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Un bar realiza todas las semanas un pedido de cerveza y vino a uno de sus dos proveedores. El proveedor A le vende la cerveza a un euro el litro y el vino a dos euros el litro. El proveedor B le vende la cerveza al mismo precio que el A, pero el litro de vino se lo vende a m euros. Si realiza el pedido semanal al proveedor A paga 1 000 euros, mientras que si lo realiza al proveedor B paga $500\ m$ euros.
$a)$ Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean los litros de cerveza y vino, respectivamente, comprados cada semana.

$b)$ ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que el precio del litro de vino en el proveedor B sea también de dos euros? En caso afirmativo, ¿cuánto vino compra por semana, si el pedido semanal de cerveza es de 400 litros? Determina la cantidad de cerveza y vino comprada semanalmente en cualquier otro caso, es decir, cuando el precio del litro de vino en el proveedor B no sea de dos euros.

Solución:

$a)$ Sean x los litros de cerveza e y los de vino.

Como el proveedor A le vende la cerveza a un euro el litro y el vino a dos euros el litro y paga 1.000 euros: $x + 2y = 1\ 000$

Como el proveedor B le vende la cerveza al mismo precio que el A, pero el litro de vino se lo vende a m euros y paga $500\ m$ euros: $x + my = 500m$

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es: $\left.\begin{matrix} x + 2y = 1\ 000 \\ x + my = 500m \end{matrix}\right\}$.

donde la primera ecuación representa el coste total si hace el pedido en A y la segunda lo mismo si el pedido es en B

$b)$ Resolvemos. Lo más sencillo es restar las dos ecuaciones. Tenemos entonces:

$(2 - m)y = 1000 - 500m$. Como no se puede dividir por 0, tenemos dos casos.

Caso 1. Si $m \neq 2$. Podemos entonces dividir por $2 - m$. La segunda ecuación es

$(2 - m)y = 1000 - 500m = 500(2 - m)$ así que $y = \frac{500(2-m)}{(2-m)} = 500$

Llevándolo a la primera ecuación obtenemos $x = 0$

Caso 2. Si $m = 2$: El sistema es $\begin{cases} x + 2y = 1000 \\ x + 2y = 1000 \end{cases}$ solo tiene una ecuación independiente. La solución existe, pero no es única. Se necesita saber x o y. En un caso que nos piden, $x = 400$ da

$400 + 2y = 1000$ es decir $y = 300$

Podemos ya responder a las cuestiones del enunciado. Son muchas, de modo que responderemos en puntos.

La solución siempre existe.

No siempre es única. Si $\boldsymbol{m = 2}$hay infinitas soluciones, si $\boldsymbol{m \neq 2}$ hay solo una.

Sí, es posible que el precio del vendedor B sea de 2 euros. La solución en tal caso no sería única.

Si el precio fuera 2 euros y se piden 400 litros de cerveza, entonces se pedirían 300 litros de vino.

En el caso de que $\boldsymbol{m \neq 2}$ la petición es siempre la misma. **Ningún litro de cerveza y 500 litros de vino**.

Otra forma: Escribimos las matrices de coeficientes y ampliada del sistema:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\,000 \\ 1 & m & 500m \end{pmatrix}.$$

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 2.$ $\qquad |C| = 0 \Rightarrow m - 2 = 0;\ \ m = 2.$

Para $m = 2$, el rango de la matriz de los coeficientes C es 1, y para el resto de valores es 2.

Para $m = 2$, el rango de la matriz ampliada $A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1.000 \\ 1 & 2 & 1.000 \end{pmatrix}$ es 1, y para el resto de valores es 2.

Luego por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema siempre tiene solución, siendo compatible y determinado, es decir, con una única solución, para $m \neq 2$, y siendo compatible indeterminado, es decir, con infinitas soluciones si $m = 2$.

Es posible que el segundo proveedor también venda el vino a 2 euros el litro. Si el pedido de cerveza es de 400: si $m = 2, x = 400$: $400 + 2y = 1\,000 \rightarrow\ 2y = 600 \rightarrow y = 300$.

La compra semanal de vino es de $300\ litros$

Resolvemos el sistema original en función de m: $\left.\begin{matrix} x + 2y = 1\,000 \\ x + my = 500m \end{matrix}\right\}$ usando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1\,000 & 2 \\ 500m & m \end{vmatrix}}{m-2} = \frac{1\,000m - 1\,000m}{m-2} = \frac{0}{m-2} = 0;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1\,000 \\ 1 & 500m \end{vmatrix}}{m-2} = \frac{500m - 1\,000}{m-2} = \frac{500(m-2)}{m-2} = 500.$$

Si el precio del vino no es de 2 euros entonces compra $\boldsymbol{500\ litros}$ de vino y ninguno de cerveza.

Problema 2:

Las cantidades mínimas diarias recomendadas que debe ingerir una determinada mascota son: 6 unidades de hidratos de carbono, 18 unidades de proteínas y 4 unidades de grasa. Una empresa dedicada al cuidado de este tipo de mascotas plantea diseñar una dieta para las mismas, basada en el consumo de latas de dos marcas distintas M_1 y M_2. Se sabe que cada lata de la marca M_1 contiene 3 unidades de hidratos de carbono, 3 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas y que cada lata de la marca M_2 contiene 1 unidad de hidratos de carbono, 9 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Además, se sabe que el precio de cada lata de la marca M_1 es de 22 euros y que el precio de cada lata de la marca M_2 es de 24 euros.

$a)$ ¿Cuántas latas de cada tipo se puede dar en un día a la mascota para cumplir todos los requisitos anteriores relativos a su dieta? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se le podría dar una lata de la marca M_1 y dos latas de la marca M_2?

$b)$ ¿Cuántas latas de cada tipo se debería dar en un día a la mascota para que el precio de su alimentación sea mínimo? ¿y para minimizar el número de latas de tipo M_1 que come ese día?

Solución:

a) Sea x la cantidad de latas de la marca M_1 e y las de la marca M_2.

La restricción de hidratos de carbono viene dada por $h: 3x + y \geq 6$, la de proteínas $p: 3x + 9y \geq 18$ en tanto que la de grasas corresponde a $g: x + y \geq 4$ Hacemos las tablas respectivas para dibujarlas

$h: 3x + y = 6$

x	y
0	6
2	0

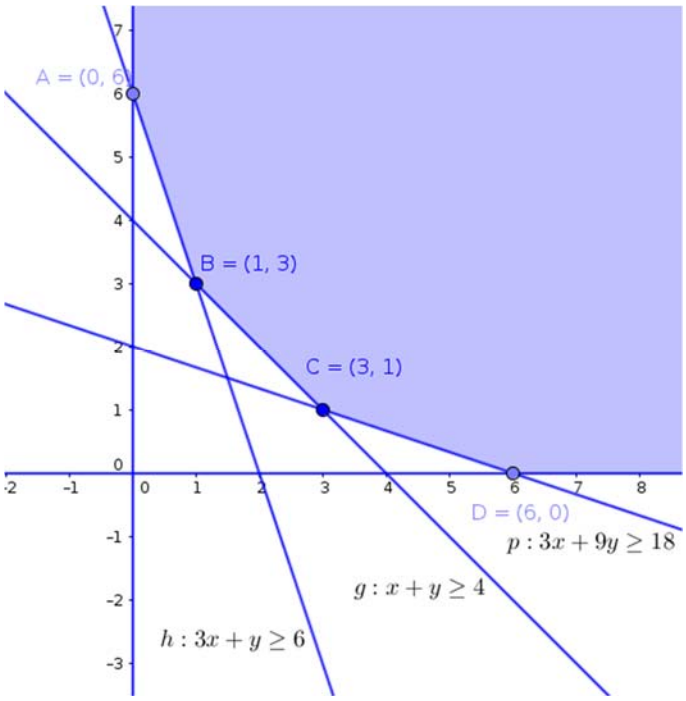
$p: 3x + 9y = 18$

x	y
0	2
6	0

$g: x + y = 4$

x	y
4	0
0	4

Dibujamos el conjunto de soluciones posibles



Gráficamente se ven ya los cuatro puntos que pueden ser solución óptima.

Los calculamos pues

$$A = h \cap OY = (0,6),\ D = p \cap OX = (6,0), R = s \cap OY$$

$$B = h \cap g = \begin{cases} 3x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$C = p \cap g = \begin{cases} 3x + 9y = 18 \\ x + y = 4 \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

De donde $A(0, 6)$, $B(1, 3)$, $C(3, 1)$, $D(6, 0)$

El punto $x = 1$, $y = 2$ nos da $x + y = 3 < 4$. No cumple la restricción de grasas, de modo que no se puede.

No, con una lata de M_1 y dos de M_2 no basta para la mascota

[De hecho tampoco cumple la de hidratos de carbono, la única que cumple es la de proteínas. Con fallar una bastaría para que no se pudiera, con más razón con dos]

b) Sea $C(x, y) = 22x + 24y$ el coste en euros.

Para minimizarlo, calculamos cuánto vale en los puntos extremos.

- $C(0, 6) = 144$
- $C(1, 3) = 94$
- $B(3, 1) = 90$
- $B(6, 0) = 132$

Es claro pues que el coste mínimo se alcanza en el punto (3, 1). En conclusión:

El coste mínimo se alcanza dando **tres** latas de M_1 y **una** de M_2

Podríamos hacer lo mismo para minimizar el número de latas de M_1, con la función $N(x, y) = x$. Pero es que hay un punto extremo que da cero latas de M_1, el punto (0, 6). Y menos de 0 no puede haber. Así pues:

El mínimo de latas de M_1 se alcanza no dando **ninguna** de M_1 y **seis** de M_2

Problema 3:

Se ha investigado la energía que produce una placa solar (f) en función del tiempo transcurrido, en horas, desde que amanece (x), obteniéndose que:

$$f(x)=\begin{cases}10x-x^2 & si\ \ 0\le x\le 8\\ \frac{a}{x^2} & si\ 8<x\le 12\end{cases}.$$

$a)$ Determinar el valor de a para que la energía producida varíe de forma continua al variar el tiempo transcurrido desde que amanece.

$b)$ Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánta energía produce en ese momento?

Solución:

$a)$ Calculamos los dos límites laterales en x = 8, que es donde cambia la definición de la función. El límite lateral izquierdo es $80-64=16$ en tanto el lateral izquierdo es $a/8^2=a/64$.

Igualando tenemos $16=\frac{a}{64}$ de donde $a=1024$. Obsérvese que es el único punto problemático, ya que $10x-x^2$ es una función polinómica siempre continua y $\frac{a}{x^2}$ es una función de proporcionalidad inversa que no es continua en el origen, pero que ese punto no pertenece al dominio por lo que es continua para x mayor que cero, en particular a partir de 8.

La energía es continua sí y solo sí $\boldsymbol{a=1024}$

$b)$ Sea $a=1024$

$$f(x)=\begin{cases}10x-x^2 & 0\le x\le 8\\ \dfrac{1024}{x^2} & 8<x\le 12\end{cases}$$

Estudiemos primero su dominio. Ya hemos visto que es continua pues el denominador de $\frac{1024}{x^2}$ se anula solo en 0 que corresponde a $10x-x^2$. Su dominio es pues [0, 12]

La derivada de la función es $f'(x)=\begin{cases}10-2x & 0<x<8\\ -\frac{2048}{x^3} & 8<x<12\end{cases}$. Obsérvese que en los límites podría haber problemas y por eso hemos cambiado las desigualdades, ahora son estrictas. Es irrelevante para el estudio del crecimiento.

Analicemos cada función por separado: $\frac{-2048}{x^3}<0$ para todos los valores de x. $10-2x=0$ para $x=5$. Para estudiar el signo damos valores. $f'(0)=10>0$y $f'(6)=-2<0$.

Por tanto, $f(x)$ es creciente en (0, 5) y decreciente en (0, 8) y (8, 12).

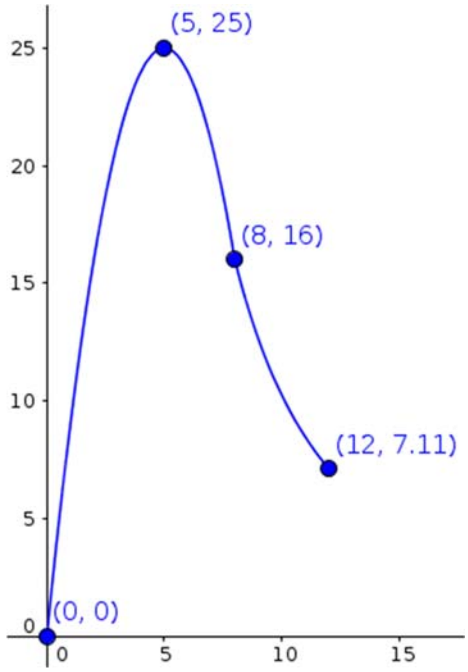
Para la segunda derivada, tenemos

$$f''(x)=\begin{cases}-2 & 0<x<8\\ \dfrac{6144}{x^4} & 8<x<12\end{cases}$$

que es negativa (ramas hacia abajo) en (0, 8) y positiva (ramas hacia arriba) en (8, 12)

Los valores en los extremos son $f(0) = 10 \cdot 0 - 0^2 = 0$ y $f(12) = \frac{1024}{12^2} = \frac{64}{9} \approx 7.11$. Hemos visto ya $f(8) = 16$. Falta $f(5) = 10(5) - 5^2 = 25$

Estamos ya en posición de dibujar la gráfica.



El máximo de la función se alcanza en $x = 5$ que da $f(5) = 25$

Así pues:

La energía es máxima a las **cinco** horas de amanecer y se producen $\mathbf{25}$ unidades de energía.

[El problema no especifica las unidades de energía que se utilizan]

Problema 4:

Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, se pide:

$a)$ Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 10$.

$b)$ Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3.2\ y\ x = -2$.

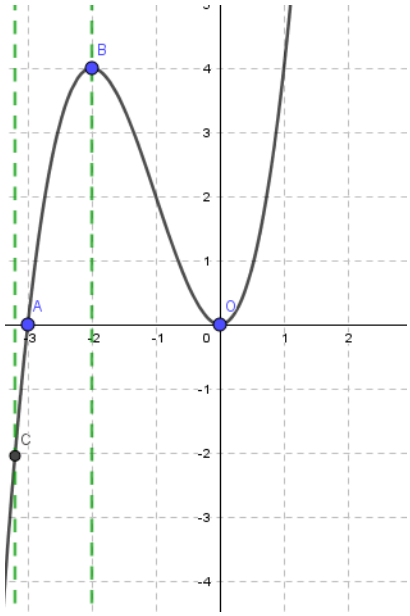
Solución:

$a)$ Es una función polinómica, su integral es inmediata:

$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (x^3 + 3x^2) \cdot dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + C = \frac{x^4}{4} + x^3 + C.$

$F(2) = 10 \Rightarrow \frac{2^4}{4} + 2^3 + C = 10;\ \ 4 + 8 + C = 0 \Rightarrow C = -12.$

La primitiva F de f que verifica que $F(2) = 10$ es $\boldsymbol{F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 12}$



$b)$ Puntos de intersección con los ejes coordenados:

$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \rightarrow O(0,0);\ x_2 = -3 \rightarrow A(-3,0)$

Con el eje de ordenadas es $O(0,0)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto donde sea derivable, es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0;\ \ 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2.$

La función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, y decreciente es $(-2, 0)$. Como para $x = -2$ pasa de creciente a decreciente, en ese punto tiene un máximo relativo. Como para $x = 0$ pasa de decreciente a creciente, en ese punto tiene un mínimo: $O(0,0)$.

$f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 = -8 + 12 = 4 \Rightarrow B(-2,4)$ es el máximo

En el intervalo $(-3.2, -3)$ la función es negativa, y en $(-3, 0)$ es positiva por lo que la superficie es:

$$S = -\int_{-3.2}^{-3} f(x) \cdot dx + \int_{-3}^{-2} f(x) \cdot dx = -[F(x)]_{-3.2}^{-3} + [F(x)]_{-3}^{-2}$$
$$= -(F(-3) - F(-3.2)) + F(-2) - F(-3) = F(-3.2) - 2F(-3) + F(-2)$$
$$= \left[\frac{(-3.2)^4}{4} + (-3.2)^3\right] - 2 \cdot \left[\frac{(-3)^4}{4} + (-3)^3\right] + \left[\frac{(-2)^4}{4} + (-2)^3\right]$$
$$= \frac{104.8576}{4} - 32.768 - \frac{81}{2} + 54 + 4 - 8 = 17.232 + 26.2144 - 40.5$$
$$= 43.4464 - 40.5 = 2.9464$$

$S = 2.95\ u^2$

Problema 5:

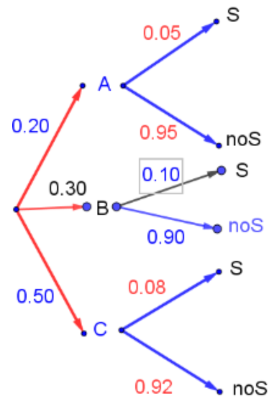
Los cursos de monitor de esquí en determinada estación se reparten en tres turnos, A, B y C. Los alumnos del turno A representan el 20 % del alumnado, los del turno B representan el 30 % del alumnado y los del turno C representan el 50 % restante. Además, se sabe que el porcentaje de alumnos que aprueban el curso es del 95 % en el turno A, 90 % en el B y 92 % en el C. Si se elige un alumno al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso y no sea del turno B?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso o sea del turno B?

Solución:

Llamamos A, B y C a los sucesos ser de los turnos A, B y C respectivamente. Y llamamos S al suceso "suspender" y noS al suceso "aprobar". Hacemos el árbol que represente los datos del enunciado:



a) Si no es del turno A, es que es de los turnos B o C:

$P(A \cap noS) + P(C \cap noS) = P(A) \cdot P(noS/A) + P(C) \cdot P(noS/C) =$

$= 0.20 \cdot 0.95 + 0.50 \cdot 0.92 = 0.190 + 0.460 = 0.65.$

La probabilidad de que haya aprobado el curso y no sea del turno B es $\mathbf{0.65}$.

b) Ahora es una unión de sucesos:

$$P(noS \cup B) = P(noS) + P(B) - P(noS \cap B).$$

Conocemos $P(B) = 0.30$

Calculamos $P(noS)$

$P(noS) = P(A) \cdot P(noS/A) + P(B) \cdot P(noS/B) + P(C) \cdot P(noS/C) = 0.20 \cdot 0.95 + 0.30 \cdot 0.90 + 0.50 \cdot 0.92 = 0.19 + 0.27 + 0.46 = 0.92.$

Calculamos $P(noS \cap B)$

$$P(noS \cap B) = P(B) \cdot P(noS/B) = 0.30 \cdot 0.90 = 0.27$$

Sustituyendo:

$P(noS \cup B) = 0.92 + 0.30 - 0.27 = 0.95.$

La probabilidad de que haya aprobado el curso o sea del turno B es $\mathbf{0.95}$.

Problema 6:

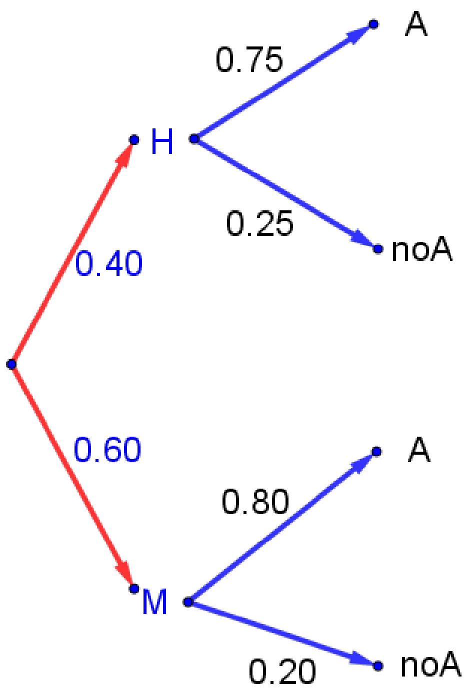
En el primer curso de un grado, el 60 % de los estudiantes son mujeres y el 40 % restante son hombres. Además, se sabe que el 80 % de las mujeres y el 75 % de los hombres aprobaron el examen de matemáticas. Si se elige un estudiante de ese curso al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya suspendido matemáticas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado matemáticas?

Solución:

Llamamos M al suceso ser mujer y H a ser hombre. Llamamos A al suceso "aprobar" y noA a "no aprobar". Llevamos los datos del enunciado a un diagrama de árbol:



a) Es la probabilidad de una intersección:

$P(H \cap noA) = P(H) \cdot P(noA/H) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.10.$

La probabilidad de que sea hombre y haya suspendido matemáticas es $\mathbf{0.10}$.

b) Ahora es una suma de probabilidades:

$P(A) = P(M) \cdot P(A/M) + P(H) \cdot P(A/H) = 0.6 \cdot 0.80 + 0.4 \cdot 0.75 = 0.48 + 0.30 = 0.78.$

La probabilidad de que haya aprobado matemáticas es $\mathbf{0.78}$

Problema 7:

Se quiere hacer un estudio para estimar el porcentaje de declaraciones de la renta que son fraudulentas.

a) ¿Cuál será el tamaño mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de declaraciones fraudulentas a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.026 y un nivel de confianza del 90 %?

b) En una muestra aleatoria de 1 000 declaraciones se obtuvo que 110 de ellas eran fraudulentas. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de declaraciones fraudulentas.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 90 %:

$1-\alpha = 0.90 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0.90 = 0.1 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645; (1 - 0.05 = 0.9500 \ \rightarrow z = 1.645).$

Como se desconoce la proporción muestral consideramos el caso más desfavorable, que es, $p = q = 0.5$. Sabemos que: $p = 0.5$; $q = 0.5$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$; $E = 0.026$.

Sabiendo que el error máximo es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$:

$$E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p\cdot q}{n} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p\cdot q}{E^2} = 1.645^2 \cdot \frac{0.5\cdot 0.5}{0.026^2} = 2.7060 \cdot \frac{0.25}{0.000676} = 2.7060 \cdot 369.82 = 1\,000.7.$$

El tamaño mínimo necesario es de $\mathbf{1\,001}$ $declaraciones$

b) Nos dicen ahora que: $n = 1\,000$; $p = \frac{110}{1\,000} = 0.11$; $q = 1 - 0.11 = 0.89$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es:

$$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right) \rightarrow \left(0.11 - 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.11 \cdot 0.89}{1.000}}, \quad 0.11 + 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.11 \cdot 0.89}{1.000}}\right) =$$

$(0.11 - 1.645 \cdot 0.0099, 0.11 + 1.645 \cdot 0.0099) = (0.11 - 0.0163, 0.11 + 0.0163) = (0.0937, 0.1263).$

$\mathbf{(0.0937, 0.1263)}$

Problema 8:

Una fábrica de quesos quiere estudiar el tiempo que tarde el producto en estropearse si no se envasa. Para ello, considera una muestra de 324 quesos y observa que el tiempo medio hasta que se estropean es de 27 días. Se supone además que el tiempo hasta que se estropea el producto sigue una distribución normal con desviación típica 4 días.

a) Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio que tarda en estropearse este tipo de queso al 99 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.5 días y un nivel de confianza del 99 %?

Solución:

a) Calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 99 %:

$1-\alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 1-0.99 = 0.01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.575; (1-0.005 = 0.9950 \rightarrow z = 2.575).$

Sabemos que: $n = 324;\ \ \overline{x} = 27;\ \ \sigma = 4;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n,$ es:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(27 - 2.575 \cdot \frac{4}{\sqrt{324}}, \quad 27 + 2.575 \cdot \frac{4}{\sqrt{324}}\right) =$$

$(27 - 2.575 \cdot 0.2222,\ 27 + 2.575 \cdot 0.2222) = (27 - 0.5722,\ 27 + 0.5722) = (26.4278, 27.5722).$

Intervalo de confianza: $(\mathbf{26.4278};\ \mathbf{27.5722})$

b) Ahora sabemos que: $\sigma = 4;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575;\ \ E = 0.5.$

La fórmula del error es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Despejamos n:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2.575 \cdot \frac{4}{0.5}\right)^2 = (2.575 \cdot 8)^2 = 20.6^2 = 424.36.$$

Como mínimo el tamaño de la muestra debe ser de $\mathbf{425}\ \boldsymbol{quesos}$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

BALEARES

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Barrientos Fernández

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model III

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1 Donat el sistema d'equacions en funció del paràmetre a:

$$x + y + z = 5$$
$$5x + ay - z = 11$$
$$3x - y + az = 2.$$

a) Discutiu per a quins valors de a el sistema té solució i quantes en té en cada cas. (6 punts)

b) Trobau la solució del sistema per $a = 2$. (4 punts)

2 Un ajuntament concedeix llicències per a la construcció d'una urbanització de, com a màxim, 120 habitatges, de dos tipus, A i B. Per això l'empresa constructora disposa d'un capital màxim de 15 milions d'euros, essent el cost de construcció de l'habitatge de tipus A de 100000 euros i el de tipus B de 300000 euros. El benefici obtingut per la venda d'un habitatge de tipus A és de 20000 euros i per la venda d'un de tipus B és de 40000 euros.

a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 punts)

c) Calculau el nombre d'habitatges de cada tipus que s'han de construir per tal d'obtenir un benefici màxim. Determinau també aquest benefici màxim. (2 punts)

3 Considerau les següents matrius:

$$M = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Raonau si és possible calcular els productes $M \cdot N$ i M^2. En el cas que ho sigui, calculau-los. (2 punts)

b) Estudiau per a quins valors de k és $M \cdot N$ invertible. (3 punts)

c) Calculau la inversa de $M \cdot N$ per a $k = 1$. (2 punts)

d) Per a $k = 1$, trobau la matriu X que compleix $(M \cdot N) \cdot X = B$, on $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (3 punts)

4 Donada la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$, definida per a tot $x \in \mathbb{R}$.

a) Trobau a i b sabent que $f(x)$ té un punt crític en el punt $x = 1$ i la seva gràfica passa pel punt $(3, 0)$. (5 punts)

b) Estudiau el creixement i decreixement de $f(x)$ per $a = 3$ i $b = 3$. (5 punts)

5 El benefici $B(x)$, en euros, que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte es representa per la funció:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \quad \text{per a} \quad x \geq 0.$$

a) Calculau el benefici de vendre'n 110 unitats. (1 punt)

b) Representau gràficament la funció. (3 punts)

c) Quantes unitats ha de vendre per tal que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim? (3 punts)

d) Quantes unitats ha de vendre per tenir un benefici igual a 3900 euros? I per tenir un benefici superior a 3900 euros? (3 punts)

6 Considerem la funció a trossos següent

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{ax} + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calculau els valors de a perquè f sigui contínua i derivable. (5 punts)

b) Per a $a = 4$ calculau l'àrea compresa entre la gràfica de $f(x)$ i les rectes $x = 1$, $x = 2$ i $y = 0$. (5 punts)

7 El pes de les persones d'un col·legi major segueix una llei normal de mitjana 70 kg i desviació típica 15 kg. Si escollim a l'atzar una persona del col·legi, calculau la probabilitat dels següents esdeveniments:

a) El seu pes sigui superior a 80 kg. (3 punts)

b) El seu pes sigui inferior a 50 kg. (3 punts)

c) Pesi entre 60 i 120 kg. (4 punts)

8 De dos esdeveniments d'un mateix espai mostral se sap que

$$p(A \cap B) = 0.1 \quad p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.6 \quad P(A/B) = 0.5,$$

$\overline{A}$ i $\overline{B}$ denoten els esdeveniments complementaris de A i B respectivament.

a) Calculau $p(B)$. (3 punts)

b) Calculau $p(A \cup B)$. (3 punts)

c) Són els esdeveniments A i B independents? Raonau la resposta. (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+y+z=5 \\ 5x+ay-z=11 \\ 3x-y+az=2 \end{array}\right\}$ en función del parámetro a:

$a)$ Discutir para qué valores de a el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso.

$b)$ Encuentra la solución del sistema para $a=2$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & a & -1 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & a & -1 & 11 \\ 3 & -1 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos el rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & a & -1 \\ 3 & -1 & a \end{vmatrix}=a^2-5-3-3a-1-5a= a^2-8a-9=0; x=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{2}=\frac{8\pm 10}{2}=4\pm 5 \Rightarrow a_1=-1, a_2=9.$$

Para $a\neq -1$ y para $a\neq 9$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada, e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Para $a=-1$: $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=22\neq 0$

Luego el rango de la matriz ampliada es 3, mientras el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Para $a=9$: $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 9 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 9 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$

Luego el rango de la matriz ampliada es 3, mientras el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Para $a\neq -1$ y para $a\neq 9$ el sistema es compatible y determinado, con solución única. Para $a=-1$ y para $a=9$ el sistema es incompatible, no tiene solución.

$b)$ Para $a=2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x+y+z=5 \\ 5x+2y-z=11 \\ 3x-y+2z=2 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolvemos por la *regla de Cramer*: $x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{2^2-8\cdot 2-9}=\frac{20-11-2-4-5-22}{4-16-9}=\frac{20-44}{-21}=\frac{-24}{-21}=\frac{8}{7}$; $y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 11 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-21}=\frac{22+10-15-33+2-50}{-21}=\frac{34-98}{-21}=\frac{-64}{-21}=\frac{64}{21}$; $z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-21}=\frac{4-25+33-30+11-10}{-21}=\frac{48-65}{-21}=\frac{-17}{-21}=\frac{17}{21}$.

$$x=\frac{8}{7};\ \ y=\frac{64}{21};\ \ z=\frac{17}{21}$$

Problema 2:

Un ayuntamiento concede licencias para la construcción de una urbanización de, como máximo, 120 viviendas de dos tipos, A y B. Para ello la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros, siendo el coste de construcción de la vivienda de tipo A de 100 000 euros y el de tipo B de 300 000 euros. El beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A es de 20 000 euros y por la venta de uno de tipo B es de 40 000 euros.

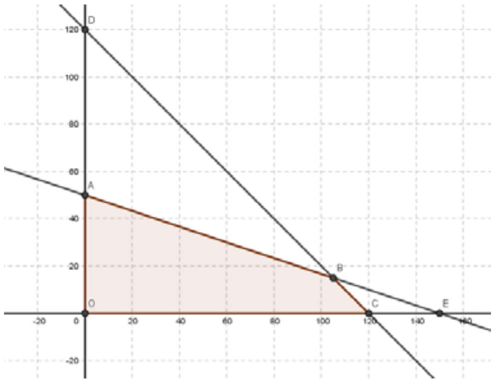
a) Plantea la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas que la delimitan.

c) Calcular el número de viviendas de cada tipo que deben construirse para obtener un beneficio máximo. Determinar también este beneficio máximo.

Solución:

a) Llamamos x e y al número de viviendas de los tipos A y B que construye la empresa, respectivamente.



Las restricciones impuestas son:

$$\left.\begin{array}{r} x+y \leq 120 \\ 100\,000x + 300\,000y \leq 15\,000\,0000 \\ x \geq 0;\; y \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y \leq 120 \\ x+3y \leq 150 \\ x \geq 0;\; y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

b) La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son:

$$A\!: \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+3y=150 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,50).$$

$$B\!: \left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ x+3y=150 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y=-120 \\ x+3y=150 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=30;\; y=15; x=105 \Rightarrow B(105,15).$$

$$C\!: \left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(120,0).$$

$$O\!: \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow O(0,0).$$

La función objetivo es $f(x,y) = 20\,000x + 40\,000y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son:

$A\!: f(0,50) = 20\,000 \cdot 0 + 40\,000 \cdot 50 = 0 + 2\,000\,000 = 2\,000\,000.$

$B\!: f(105,15) = 20\,000 \cdot 105 + 40\,000 \cdot 15 = 2\,100\,0000 + 600\,000 = 2\,700\,000.$

$C\!: f(120,0) = 20\,000 \cdot 120 + \cdot\, 0 = 2\,400\,000 + 0 = 2\,400\,000.$

El valor máximo se produce en el punto B.

Problema 3:

Considera las matrices: $M = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Razona si es posible calcular los productos $M \cdot N$ y M^2. En caso de que lo sean, calcular los mismos.

b) Estudia para qué valores de k es invertible $M \cdot N$.

c) Calcular la inversa de $M \cdot N$ para $k = 1$.

d) Para $k = 1$, halla la matriz X que cumple que $(M \cdot N) \cdot X = B$, con $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Para que el producto de matrices sea posible es necesario que el número de columnas de la matriz multiplicando sea igual al número de filas de la matriz multiplicador siendo las dimensiones de la matriz producto el número de filas de la primera y el número de columnas de la segunda:

$$M_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}.$$

$M = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}$ tiene 2 filas y 3 columnas. $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ tiene 3 filas y 2 columnas. Luego es posible multiplicarlas y el resultado será una matriz de 2 filas y 2 columnas.

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2k-1 \\ -7k & 9k+5 \end{pmatrix}.$$

Para M^2 debemos multiplicar una matriz de 2 filas y 3 columnas por una de 2 filas y 3 columnas, lo que no es posible.

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} k & 2k-1 \\ -7k & 9k+5 \end{pmatrix}.$$

b) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M \cdot N| = \begin{vmatrix} k & 2k-1 \\ -7k & 9k+5 \end{vmatrix} = 9k^2 + 5k - (-14k^2 + 7k) = 23k^2 - 2k = k(23k-2) = 0;$$

$\Rightarrow k_1 = 0;\ \ k_2 = \frac{2}{23}$.

$$M \cdot N \text{ es invertible } \forall k \in R - \left\{0, \frac{2}{23}\right\}$$

c) Para $k = 1$ es $M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}$; $|M \cdot N| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 14 \end{vmatrix} = 14 + 7 = 21;$

$(M \cdot N)^t = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}$; $Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$; $(M \cdot N)^{-1} = \frac{Adj.de\ (M \cdot N)^t}{|M \cdot N|} = \frac{\begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}}{21} = \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

$$(M \cdot N)^{-1} = \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $(M \cdot N) \cdot X = B \Rightarrow\ (M \cdot N)^{-1} \cdot (M \cdot N) \cdot X = (M \cdot N)^{-1} \cdot B \Rightarrow\ X = (M \cdot N)^{-1} \cdot B \Rightarrow$

$$X = (M \cdot N)^{-1} \cdot B = \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 28 & -1 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 28 & -1 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4:

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$, definida $\forall x \in R$.

$a)$ Encuentra a y b sabiendo que $f(x)$ tiene un punto crítico para $x = 1$ y su gráfica pasa por el punto $P(3, 0)$.

$b)$ Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para $a = 3$ y $b = 3$.

Solución:

$a)$ Por tener $f(x)$ un punto crítico para $x = 1$ debe verificarse que $f'(1) = 0$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1 \rightarrow f'(1) = 0 = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + 1 \rightarrow \ 3a + 2b = -1.$

Por pasar por $P(3, 0)$: $f(3) = 0 = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + 3 \rightarrow 27a + 9b = -3 \rightarrow \ 9a + 3b = -1$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3a + 2b = -1 \\ 9a + 3b = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 9a + 6b = -3 \\ -9a - 3b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3b = -2 \Rightarrow b = -\frac{2}{3}.$$

$$3a + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \Rightarrow \ 9a - 4 = -3 \Rightarrow \ 9a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{9}.$$

$$a = \frac{1}{9}.\ b = -\frac{2}{3}.$$

$b)$ Para $a = 3$ y $b = 3$ la función es $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 9x^2 + 6x + 1$; $f'(x) = 0 = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2 = 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in D(f)$.

La función es creciente $\forall x \in R$

Autor: Francisco Barrientos Fernández
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 5:

El beneficio $B(x)$, en euros, que obtiene una empresa por la venta de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $B(x) = -x^2 + 300x - 16\,100$, con $x > 0$.

$a)$ Calcula el beneficio si venden 110 unidades.

$b)$ Representa gráficamente la función.

$c)$ ¿Cuántas unidades ha de vender para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es este beneficio?

$d)$ ¿Cuántas unidades ha de vender para tener un beneficio de 3 900 euros? ¿Y para tener un beneficio superior a 3 900 euros?

Solución:

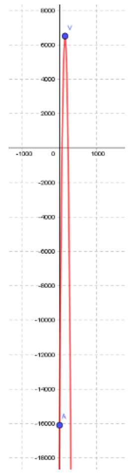
$a)$ $B(x) = -x^2 + 300x - 16\,100 \rightarrow B(110) = -110^2 + 300 \cdot 110 - 16\,100 = 4\,800$.

El beneficio al vender 110 unidades es de 4 800 $euros$

$b)$ La función $B(x) = -x^2 + 300x - 16\,100$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2. Corta al eje de ordenadas en $A(0,\ -16\,100)$ y cuyo vértice es:

$$B'(x) = -2x + 300 = 0 \Rightarrow x = 150;\ B(150) = -150^2 + 300 \cdot 150 - 16\,100 = 9\,500$$

$$\Rightarrow V(150, 6500).$$



$c)$ Para obtener el máximo beneficio nos fijamos en el vértice.

Para que el beneficio sea máximo, de 9 500 euros, se deben vender 150 unidades

$d)$ $B(x) = -x^2 + 300x - 16\,100 = 3\,900 \rightarrow -x^2 + 300x - 20\,000 = 0$

Vendiendo 100 o 200 unidades el beneficio es de 3 900 euros

Para obtener un beneficio superior a 3 900 euros se deben vender más de 100 unidades y menos de 200 unidades.

Autor: Francisco Barrientos Fernández

Problema 6:

Considera la función definida a trozos: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si\ \ x<0 \\ e^{ax}+1 & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$.

$a)$ Calcula los valores de a para que f sea continua y derivable.

$b)$ Para $a=4$ calcula el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas de ecuaciones $x=1, x=2\ e\ y=0$.

Solución:

$a)$ La función definida a trozos está formada por dos ramas que son funciones continuas y derivables, pues una es una función polinómica y la otra una función exponencial. Por tanto, el único punto dudoso es el de unión de las dos ramas.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

Para $x=0$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3x+2)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^{ax}+1)=1+1=2=f(0) \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

La función es continua en toda la recta real para todo valor de a.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & si\ x<0 \\ a\cdot e^{ax} & si\ \ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=0: f'(0)=\begin{cases} -3 & si\ \ x<0 \\ a & si\ \ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow\ f'(0^-)=-3=f'(0^+)=a.$

La función es continua y derivable en toda la recta real si $a=-3$

$b)$ Para $a=4$ y para $1<x<2$ la rama de la función es $f(x)=e^{4x}+1>0, \forall x\in R$,por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S=\int_1^2 f(x)\cdot dx=\int_1^2 (e^{4x}+1)\cdot dx=$$

Es una integral inmediata. Aunque también la podemos hacer por un cambio de variables:

$$4x=t\to\ dx=\frac{1}{4}\cdot dt;\ x=2\to t=8;\ x=1\to t=4$$

$\Rightarrow S=\frac{1}{4}\cdot\int_4^8(e^t+1)\cdot dt=\frac{1}{4}\cdot[e^t+t]_4^8=\frac{1}{4}\cdot[(e^8+8)-(e^4+4)]=\frac{1}{4}\cdot(e^8+8-e^4-4)=\frac{1}{4}\cdot(e^8-e^4+4)=\left[\frac{e^4}{4}\cdot(e^4-1)+1\right]$.

$$S=\left[\frac{e^4}{4}\cdot(e^4-1)+1\right]u^2\cong 732.59\,u^2$$

Problema 7:

El peso de las personas de un colegio mayor sigue una ley normal de media 70 kg y desviación típica 15 kg. Si se elige una persona al azar del colegio, calcula la probabilidad de los siguientes eventos:

$a)$ Su peso sea superior a 80 kg.

$b)$ Su peso sea inferior a 50 kg.

$c)$ Su peso esté comprendido entre 60 y 120 kg.

Solución:

Nos dicen que la distribución es normal de: $\mu = 70; \;\; \sigma = 15.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(70, 15).$ Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-70}{15}.$

$a)$ $P(X > 80) = P\left(Z > \frac{80-70}{15}\right) = P\left(Z > \frac{10}{15}\right) = P(Z > 0.67) = 1 - P(Z < 0.67) = 1 - 0.7486 = 0.2514.$

La probabilidad de que su peso sea superior a 80 kg es $\mathbf{0.2514}$.

$b)$ $P(X < 50) = P\left(Z < \frac{50-70}{15}\right) = P\left(Z < \frac{-20}{15}\right) = P(Z < -1.33) = 1 - P(Z \le 1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918.$

La probabilidad de que su peso sea inferior a 50 kg es $\mathbf{0.0918}$.

$c)$ $P(60 < X < 120) = P\left(\frac{60-70}{15} < Z < \frac{120-70}{15}\right) = P\left(\frac{-10}{15} < Z < \frac{50}{15}\right) = P(-0.67 < Z < 3.33) = P(Z < 3.33) - [1 - P(Z < 0.67)] = P(Z < 3.33) - 1 + P(Z < 0.67) = 0.9996 - 1 + 0.7486 = 1.7482 - 1 = 0.7482.$

La probabilidad de que su peso esté comprendido entre 60 y 120 kg es $\mathbf{0.7482}$.

Problema 8:

De dos acontecimientos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

$P(A \cap B) = 0.1; P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.6$ y $P(A/B) = 0.5,$ donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ denotan los acontecimientos complementarios de A y B, respectivamente.

$a)$ Calcula $P(B)$.

$b)$ Calcula $P(A \cup B)$.

$c)$ ¿Son los sucesos A y B independientes? Razona la respuesta.

Solución:

Nos dice el enunciado que: $P(A \cap B) = 0.1; P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.6$ y $P(A/B) = 0.5$.

$a)$ Como $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ despejamos $P(B)$: $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A/B)} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2$.

$P(B) = 0.2.$

$b)$ Por las leyes de Morgan sabemos que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

Despejamos la unión:

$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0.6 = 0.4.$

$P(A \cup B) = 0.4.$

$c)$ Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.4 = P(A) + 0.2 - 0.1 \Rightarrow P(A) = 0.3.$$

$P(A) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06 \neq 0.1 = P(A \cap B).$

Los sucesos NO son independientes

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

Model I

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1 El vaixell de Dénia a Eivissa porta automòbils i camions a la bodega. Cada camió ocupa quatre places d'automòbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automòbils. Cada automòbil pesa 1000 kg, i cada camió, 9000 kg. El pes total permès per a la càrrega és de 300 000 kg. La companyia cobra 50 euros per cada automòbil i 300 euros per cada camió.

a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 punts)

c) Calculau el nombre de cotxes i camions que s'han de carregar per tal d'obtenir un benefici màxim. Determinau també aquest benefici màxim. (2 punts)

2 Donades les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

a) Calculau A^2. (2 punts)

b) Trobau a, b, c tals que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (8 punts)

3 En una botiga de fruita hem comprat pomes a 0.5 euros cadascuna, alvocats a 1 euro i pinyes a 1.5 euros la peça. En arribar a la caixa ens adonam que portam 70 peces de fruita, el cost total de les quals és de 68 euros. També observam que si les pomes que portam fossin alvocats i els alvocats fossin pomes, la compra ens sortiria 4 euros més barata.

a) Identificau les variables i interpretau l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (5 punts)

b) Determinau el nombre de peces de cada fruita que hem comprat. (5 punts)

4 Considerem la funció definida a trossos següent

$$f(x) = \begin{cases} -4x + a & \text{si} & x \le -2 \\ x^2 - 5 & \text{si} & -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si} & x \ge 1 \end{cases}$$

a) Calculau els valors de a perquè $f(x)$ sigui contínua. (3 punts)

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

b) És $f(x)$ derivable per $a = 1$? (3 punts)

c) Per $a = 0$, determinau els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$. (4 punts)

5 El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció

$$P(t) = \frac{2 + t + t^2}{t^2 + 2t + 1},$$

on $t \geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts.

a) Quina és la població inicial (t=0) i la població després de 5 anys? (2 punts)

b) A partir de quin moment la població serà inferior a un milió d'individus? (4 punts)

c) Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirà el nombre d'individus de la població? (4 punts)

6 Considerau la funció $f(x) = \frac{3}{x} + 8$.

a) Trobau els punts de la gràfica en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $3x + 4y + 5 = 0$. (4 punts)

b) Calculau les equacions de les rectes tangents als punts trobats a l'apartat anterior. (2 punts)

c) Calculau l'àrea compresa entre la gràfica de la funció $f(x)$ i les rectes $x = 2$, $x = 4$ i $y = 0$. (4 punts)

7 En una mostra aleatòria de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.

a) Calculau un interval de confiança del 95% per estimar l'edat mitjana de la població. (5 punts)

b) Calculau la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perquè en estimar l'edat mitjana d'aquesta població amb un nivell de confiança del 92%, l'error comès sigui inferior a 0.5 anys. (5 punts)

8 En una determinada població resideixen 5000 persones en el centre i 10000 a la perifèria. Se sap que el 95% dels residents en el centre i que el 20% dels que viuen a la perifèria opina que l'ajuntament hauria de restringir l'accés de vehicles privats al centre urbà. Es tria a l'atzar un resident de la població.

a) Quina és la probabilitat que estigui a favor de restringir l'accés de vehicles privats al centre de la ciutat? (3 punts)

b) Quina és la probabilitat que resideixi en el centre i estigui a favor de la restricció d'accés? (3 punts)

c) Si la persona triada opina que s'hauria de restringir l'accés, quina és la probabilitat que resideixi en el centre de la ciutat? (4 punts)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

El barco de Denia a Ibiza transporta automóviles y camiones en su bodega. Cada camión ocupa 4 plazas de automóvil. La bodega puede almacenar hasta 200 automóviles. Cada automóvil pesa 1 000 kg y cada camión, 9 000 kg. El peso total que permita la carga de la bodega es de 300 000 kg y la compañía cobra 50 euros por cada automóvil y 300 euros por cada camión.

a) Plantea la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Calcular el número de coches y camiones que se han de cargar con el fin de obtener el beneficio máximo.

Solución:

Sean las variables: $\boldsymbol{x}$ ={número de automóviles}; $\boldsymbol{y}$ ={número de camiones}

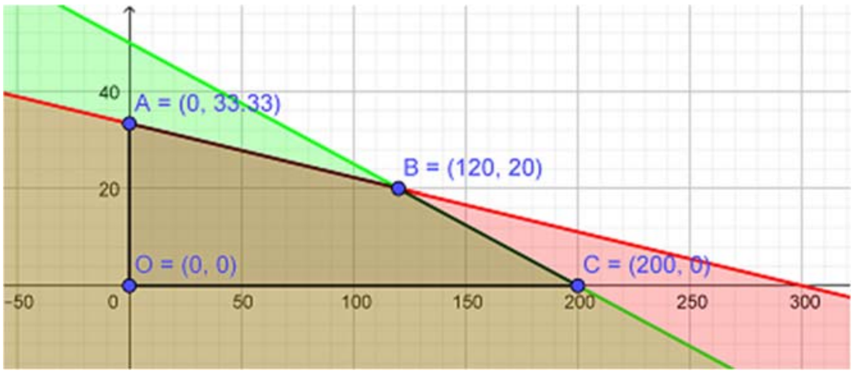
a) Tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 4y \leq 200} \\ \boldsymbol{1000x + 9000y \leq 300000} \\ \boldsymbol{x, y \geq 0} \end{cases}$$

La función de beneficio es $\boldsymbol{B(x,y) = 50x + 300y}$

Las soluciones de este sistema de inecuaciones que delimitan la región factible son $\boldsymbol{O(0,0); A(0,33.33); B(120,20); C(200,0)}$

b) Se delimita la región factible.



c) Sustituyendo las coordenadas de los vértices de la región factible en la función de beneficio

$\boldsymbol{B(x,y) = 50x + 300y}$ tenemos:

$$B(0,0) = 0$$

$$\boldsymbol{B(0,33.3) = 1000}$$

$$\boldsymbol{B(120,20) = 12\,000}$$

$$\boldsymbol{B(200,0) = 10000}$$

El beneficio máximo se alcanza cargando $\boldsymbol{120}$ coches y $\boldsymbol{20}$ camiones. Este beneficio es de 12 000 €.

Problema 2:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcular A^2.

$b)$ Hallar a, b, c tales que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a)

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 1 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases}$$

Si $a = 1 \Longrightarrow b = -1 \Longrightarrow c = 1$, la matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $a = -1 \Longrightarrow b = 1 \Longrightarrow c = -1$, la matriz es

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a = \pm 1, b = \mp 1, c = \pm 1}$$

Problema 3:

En una tienda de frutas hemos comprado manzanas a 0.5 euros cada una, aguacates a 1 euros y piñas a 1.5 euros la pieza. Al llegar a la caja nos damos cuenta que llevamos 70 piezas de fruta, el coste total de las cuales es de 68 euros. También observamos que si las manzanas que llevamos fueran aguacates y los aguacates fueran manzanas, la compra nos saldría 4 euros más barata.

$a)$ Identifique las variables e interprete el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales.

$b)$ Determinar el número de piezas de cada fruta que hemos comprado.

Solución:

a) Sean

$x =$ {número de manzanas compradas}
$y =$ {número de aguacates comprados}
$x =$ {número de piñas compradas}
Las ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=70} \\ \boldsymbol{0.5x+y+1.5z=68} \\ \boldsymbol{0.5y+x+1.5z=64} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=70} \\ \boldsymbol{0.5x+y+1.5z=68} \\ \boldsymbol{x+0.5y+1.5z=64} \end{cases}$$

Para resolver el sistema utilizaremos el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0.5 & 1 & 1.5 & 68 \\ 1 & 0.5 & 1.5 & 64 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=2F_3]{F_2=2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & 2 & 3 & 136 \\ 2 & 1 & 3 & 128 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{F_2=F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 2 & 66 \\ 0 & -1 & 1 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3=F_3+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 2 & 66 \\ 0 & 0 & 3 & 54 \end{pmatrix}$$

Las soluciones son

$$\begin{cases} 3z=54 \Rightarrow z=18 \\ y+2z=66 \Rightarrow y=30 \\ x+y+z=70 \Rightarrow x=22 \end{cases}$$

Hemos comprado $\mathbf{22}$ manzanas, $\mathbf{30}$ aguacates y $\mathbf{18}$ piñas

Problema 4:

Consideramos la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} -4x + a & si \quad x \leq -2 \\ x^2 - 5 & si \quad -2 < x < 1. \\ -7x + 3 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

$a)$ Calcular los valores de a para que $f(x)$ sea continua.

$b)$ ¿Es $f(x)$ derivable para $x = 1$?

$c)$ Para $a = 0$, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

La función $f(x)$ coincide en los distintos tramos con funciones lineales y con una función cuadrática, que son funciones continuas. El único problema de discontinuidad puede darse en los puntos en que la definición de la función es distinta a izquierda y derecha, es decir en los puntos $x = -2$ y $x = 1$. En estos puntos el límite por la izquierda, el límite por la derecha y el valor de la función en el punto deben coincidir.

En $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} -4x + a = 8 + a$$
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^-} x^2 - 5 = -1$$
$$f(-2) = 8 + a$$

Para que sean iguales

$$8 + a = -1 \Rightarrow a = -9$$

En $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 - 5 = -4$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} -7x + 3 = -4$$
$$f(1) = -4$$

Aquí la función es continua.

Para que la función sea continua a debe valer $\boldsymbol{a = -9}$

b) La función para $a = 1$ es

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 1 & si & x \leq -2 \\ x^2 - 5 & si & -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & si & x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función no es continua, porque ya vimos en el apartado a) que $f(x)$ solo es continua para $a = -9$. Por tanto, tampoco es derivable.

c) Para $a = 0$ la función es

$$f(x) = \begin{cases} -4x & si & x \leq -2 \\ x^2 - 5 & si & -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & si & x \geq 1 \end{cases}$$

La derivada para los puntos $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ es

$$f'(x) = \begin{cases} -4 & si & x < -2 \\ 2x & si & -2 < x < 1 \\ -7 & si & x > 1 \end{cases}$$

La función es decreciente en los puntos en los que la derivada es negativa, por tanto, en los intervalos $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

En el intervalo $(-2, 1)$ la derivada vale $2x$. Esta función se anula para $x = 0$. Además, para $x < 0$ la derivada es negativa (función decrece), y para $x > 0$ es positiva (la función crece).

En resumen

$$f'(x) = \begin{cases} < 0 & si \quad x < -2 \\ < 0 & si \quad -2 < x < 0 \\ > 0 & si \quad 0 < x < 1 \\ < 0 & si \quad x > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} Decrece & si \quad x < -2 \\ Decrece & si \quad -2 < x < 0 \\ Crece & si \quad 0 < x < 1 \\ Decrece & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Problema 5:

El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función

$P(t)=\frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}$, con $t\geq 0$ mide el número de años transcurridos.

$a)$ ¿Cuál es la población inicial $(t=0)$ y la población después de 5 años?

$b)$ ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos?

$c)$ Con el paso de los años, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos?

Solución:

a)

$$\boldsymbol{P(0)=\frac{2+0+0}{0+0+1}=2}$$

La población inicial es de 2 millones de individuos.

b)

$$\boldsymbol{\frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}<1\Rightarrow 2+t+t^2<t^2+2t+1\Rightarrow -t+1<0\Rightarrow t>1}$$

A partir del primer año la población es menor de 1 millón de individuos.

c)

$$\boldsymbol{\lim_{t\to\infty}\frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}=1}$$

A largo plazo el número de individuos tiende a 1 millón de individuos.

Problema 6:

Considera la función: $f(x) = \frac{3}{x} + 8$.

$a)$ Hallar los puntos de la gráfica de $f(x)$ en el cual las rectas tangentes son paralelas a la recta $3x + 4y + 5 = 0$.

$b)$ Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos hallados en el apartado anterior.

$c)$ Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 2, x = 4 \; e \; y = 0$.

Solución:

a)

La recta dada se puede poner como $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$, y por tanto la pendiente es $m = -\frac{3}{4}$.

La derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2}$$

Igualando estos valores

$$-\frac{3}{4} = -\frac{3}{x^2} \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2$$

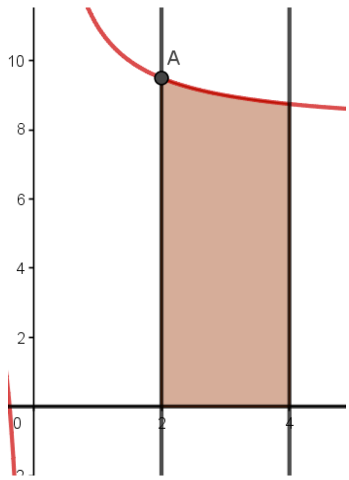
Los puntos en los que la recta tangente es paralela a la recta dada son $\boldsymbol{A}\left(\mathbf{2},\ \frac{\mathbf{19}}{\mathbf{2}}\right)$ y $\left(\mathbf{-2}, \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{2}}\right)$

b) La ecuación de la recta tangente en $(a, f(a))$ es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, por tanto las tangentes pedidas son:

$$y = \frac{19}{2} + \frac{-3}{4}(x - 2);\, y = \frac{13}{2} + \frac{-3}{4}(x + 2)$$

c) $\int_2^4 \left(\frac{3}{x} + 8\right) dx = [3\log(x) + 8x]_2^4 = (3\log(4) + 32) - (3\log(2) + 16) =$

$$= 3\log(2) + 16 \cong 18.0794$$



Problema 7:

En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17.4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la cual procede la muestra es de 2 años.

a) Calcular un intervalo de confianza al 95 % para estimar la edad media de la población.

b) Calcular el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para estimar la edad media de esta población con un nivel de confianza del 92 %, el error cometido sea inferior a 0.5 años.

Solución:

Se trata de una distribución normal de medias con:

$$\left.\begin{matrix}\bar{\mu} = 17.4\\ \sigma = 2\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix}\bar{x} = 17.4\\ \sigma_x = \dfrac{2}{\sqrt{256}} = 0.125\end{matrix}\right\}$$

a)

$$N_c = 95\%$$
$$1 - \alpha = 0.95 \Longrightarrow \alpha = 0.05$$

Hallamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$

$$P(z \leq z_{\alpha/2}) = \frac{1 + 0.95}{2} = 0.975$$

Buscamos en la tabla de la normal y encontramos que $z_{\alpha/2} = 1.96$

El intervalo de confianza es

$$I_c = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma_x, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma_x) \Longrightarrow$$
$$I_c = (17.4 - 1.96 \cdot 0.125, 17.4 + 1.96 \cdot 0.125) = (17.155, 17.645)$$

El intervalo de confianza es $(\mathbf{17.155}, \mathbf{17.645})$

b)

Como $N_c = 0.92$ hallamos el valor crítico para este nivel de confianza

$$P(z \leq z_{\alpha/2}) = \frac{1 + 0.92}{2} = 0.96$$
$$z_{\alpha/2} = 1.75$$

El error máximo admisible viene dado por

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = 7 \Longrightarrow n = 49$$

El tamaño mínimo de la muestra es de $\mathbf{49}$ individuos.

Problema 8:

En una determinada población residen 5 000 personas en el centro y 1 000 en la periferia. Se sabe que el 95 % de los residentes en el centro y el 20 % de los que viven en la periferia opina que el ayuntamiento debía restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción del acceso?

c) Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad?

Solución:

Sean los siguientes sucesos: $\boldsymbol{C = \{residir\ en\ el\ centro\}}$; $\boldsymbol{P = \{residir\ en\ la\ periferia\}}$; $\boldsymbol{R = \{estar\ a\ favor\ de\ restringir\ el\ acceso\ de\ vehiculos\ al\ centro\}}$

El enunciado proporciona las siguientes probabilidades.

$$\boldsymbol{p(C) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{p(P) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}}$$

$$\boldsymbol{p(R/C) = 0.95}$$

$$\boldsymbol{p(R/P) = 0.20}$$

a) Se pide $\boldsymbol{p(R)}$:

$$\boldsymbol{p(R) = p(C)\cdot p(R/C) + p(P)\cdot p(R/P) = \frac{1}{3}\cdot 0.95 + \frac{2}{3}\cdot 0.20 = 0.45 = \frac{9}{20}}$$

La probabilidad de que esté a favor es de $\boldsymbol{\frac{9}{20}}$

b) Se pide $\boldsymbol{p(C \cap R)}$

$\boldsymbol{p(C \cap R) = p(C)\cdot p(R/C) = \frac{1}{3}\cdot 0.95 = \frac{19}{60}}$

La probabilidad de que resida en el centro y esté a favor es de $\boldsymbol{\frac{19}{60}}$

c) Se pide $\boldsymbol{p(C/R)}$

Por el teorema de Bayes

$$\boldsymbol{p(C/R) = \frac{p(C \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{19}{60}}{\frac{9}{20}} = \frac{19}{27}}$$

$$p(C/R) = \boldsymbol{\frac{19}{27}}$$

Autor: Francisco Barrientos Fernández
www.apuntesmareaverde.org.es

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de CANARIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2020–2021

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	
Convocatoria:	JUNIO

Elegir un MÁXIMO de CUATRO preguntas de las OPCIONES A y B de la siguiente manera: UNA entre A1y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4. Indicar, antes de cada respuesta, letra y número. Cada pregunta se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

OPCIÓN A

A1. Una tienda vende quesos de las marcas A (el 35%), B (el 38%) y C (el resto). Respectivamente, el 2%, el 3% y el 2,5% tienen exceso de sal.

a) Determinar el árbol de probabilidades.

b) Calcular la probabilidad de que un queso elegido al azar no tenga exceso de sal.

c) Si un queso elegido al azar tiene exceso de sal, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca C?

A2. Con base en los datos proporcionados por una muestra aleatoria de una población, se desea estimar la proporción de votantes a un determinado partido político.

a) Si de una muestra de 750 personas, 300 dicen que lo votan, calcular, con un nivel de confianza del 97%, un intervalo para la proporción de votantes de la población a ese partido.

b) Si, en otra muestra, la proporción de votantes ha sido 0,3 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0,05, con un nivel de confianza del 99%, calcular el tamaño de dicha muestra.

A3. El ayuntamiento de un pueblo ha construido una pista de hielo provisional cuya gráfica está limitada por las rectas $r_1: x = 0$, $r_2: x = 50$, $r_3: y = 45$ y la parábola $f: y = -\frac{1}{125}x^2 + \frac{2}{5}x$. Si se mide en metros,

a) Dibujar la gráfica. Calcular el volumen de agua en (m^3) que se necesita para llenar la pista sabiendo que la profundidad del agua es de 7 cm (0,07 metros).

b) El consumo eléctrico mensual para mantener congelada la pista es de 28 Kwh/ m^2. El precio del Kwh es de 0,13 €/Kwh. Calcular el coste de mantener la pista congelada durante un mes.

c) Aparte del coste del consumo eléctrico, la gestión de la pista (mantenimiento, alquiler del terreno, salario de los empleados, etc.) tiene un coste fijo mensual de 5000€; hay además un coste variable debido a averías, fugas de agua, días de calor … Si se espera que acudan a patinar 600 personas al mes, calcular cuál debe ser el precio de la entrada para cubrir todos los costes mensuales, suponiendo que los costes variables alcanzan un 25% de los costes fijos de gestión.

A4. Una empresa dedicada al comercio del textil desea liquidar 400 camisas y 300 pantalones. Para ello lanza dos ofertas: la oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón por 30€, y la oferta B consiste en un lote de dos camisas y un pantalón, que se vende a 40 €. Hay que ofrecer al menos 40 lotes de la oferta A y al menos 20 de la oferta B.

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible.

c) Para maximizar las ganancias, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo? ¿Cuál es la ganancia máxima?

OPCIÓN B

B1. A partir de una muestra de 81 adultos, se estima que la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio está entre 3,608 y 4,392 horas (ambos incluidos). Suponiendo hipótesis de normalidad, con una desviación típica de $\frac{9}{5}$ horas:

a) ¿Cuál es la media muestral obtenida?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Usando la estimación puntual de la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de horas semanales dedicadas por 16 adultos a hacer ejercicio sea mayor o igual que 4,1 horas?

B2. Se ha realizado una encuesta a los 20000 estudiantes de la universidad sobre su actitud ante el botellón. De ellos, 13200 son partidarios y el resto no. Conocida esta cifra, el vicerrectorado de cultura va a organizar 100 charlas informativas sobre este tema, a cada una de las cuales asistirán 30 estudiantes de la universidad elegidos al azar.

a) Calcular la proporción de estudiantes partidarios del botellón en la universidad. ¿Cuál es la distribución de probabilidad aproximada de la proporción de estudiantes partidarios del botellón en las charlas?

b) Ha comenzado una de estas charlas. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los asistentes haya más de 21 alumnos favorables al botellón?

c) ¿En cuántas charlas cabe esperar que haya más de 15 y menos de 19 estudiantes partidarios del botellón?

B3. La tasa de paro (expresada en porcentaje sobre la población en edad de trabajar) registrada en cierta región europea durante los últimos 72 trimestres se ha comportado de acuerdo a la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{125}(4x^2 - 80x + 1025) & 0 \le x < 35 \\ \dfrac{1}{625}(13x^2 - 1560x + 54300) & 35 \le x \le 72 \end{cases}$$

donde x representa el trimestre.

a) Representar gráficamente la función. Justificando las respuestas, explicar si es continua, y determinar cuándo es creciente y cuándo es decreciente.

b) ¿En qué trimestre alcanzó la tasa de paro su mínimo? ¿Cuándo alcanzó el máximo? ¿Cuáles fueron los valores de las tasas de paro mínima y máxima?

c) ¿En qué trimestre se superó por primera vez el 10% de paro?

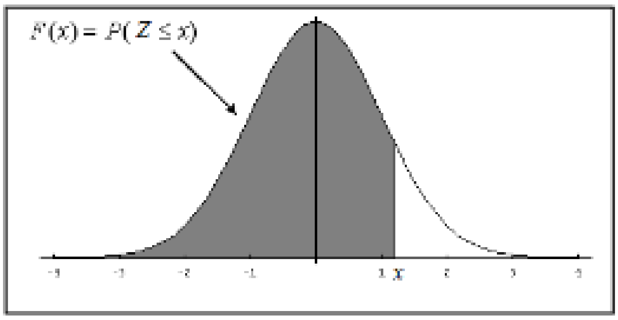
B4. Tres nietos desean hacer un regalo de 60 € a su abuela y deciden reunir esta cantidad de la siguiente forma: Luis, el mayor, aporta el triple de lo que aportan los otros dos juntos. Carmen aporta 3 € por cada dos que aporta Pedro.

a) Plantear el sistema de ecuaciones lineales.

b) Resolver el sistema.

c) ¿Cuánto aporta cada nieto?

Distrito Universitario de Canarias



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO OPCIÓN A

Problema A.1:

Una tienda vende quesos de las marcas A (35 %), B (38 %) y C (el resto). Respectivamente, el 2 %, 3 % y 2.5 % tienen exceso de sal.

a) Determinar el árbol de probabilidades.

b) Calcular la probabilidad de que un queso elegido al azar no tenga exceso de sal.

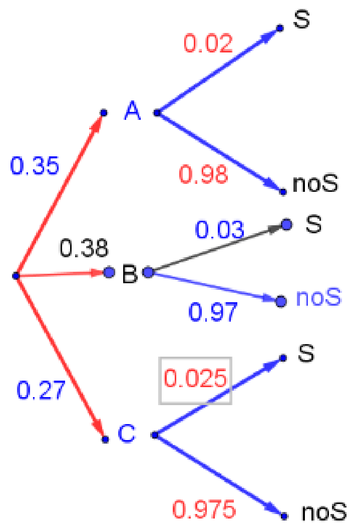
c) Si un queso elegido al azar tiene exceso de sal, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca C?

Solución:

a) Sean los sucesos A = "El queso es de la marca A", B = "El queso es de la marca B", C = "El queso es de la marca C", S = "El queso tiene exceso de sal" y S = noS = "El queso no tiene exceso de sal"

$$P(C) = 1 – 0.35 – 0.38 = 0.27$$

a) El árbol de probabilidades es:



b) Por el Teorema de la probabilidad total:

$P(\overline{S}) = P(A) \cdot P(\overline{S}/A) + P(B) \cdot P(\overline{S}/B) + P(C) \cdot P(S/C) = 0.35 \cdot 0.980 + 0.38 \cdot 0.970 + 0.27 \cdot 0.975 = 0.3430 + 0.3686 + 0.2632 = 0.9748.$

La probabilidad de que un queso elegido al azar no tenga exceso de sal es $\mathbf{0.97485.}$

c) Por el Teorema de Bayes:

$$P = P(C/S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{P(C) \cdot P(S/C)}{1 - P(\overline{S})} = \frac{0.27 \cdot 0.025}{1 - 0.97485} = 0.2684.$$

La probabilidad de que un queso sea de la marca C, sabiendo que tiene exceso de sal, es $\mathbf{0.2684}$.

Problema A.2:

Con base en los datos proporcionados por una muestra aleatoria de una población, se desea estimar la proporción de votantes a un determinado partido político.

a) Si de una muestra de 750 personas, 300 dicen que lo votan, calcular, con un nivel de confianza del 97 %, un intervalo para la proporción de votantes de la población a ese partido.

b) Si, en otra muestra, la proporción de votantes ha sido 0.3 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.05, con un nivel de confianza del 99 %, calcular el tamaño de dicha muestra.

Solución:

a) Sea P= proporción de votantes al partido político

n = 750 es el tamaño de la muestra

$\hat{p}=\frac{300}{750}=0.4$ es la proporción muestral de votantes al partido político

97 % es el nivel de confianza, es decir, $1-\alpha=0.97 \Rightarrow \alpha=0.03$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.03}{2}=0.985 \Rightarrow z_{\alpha/2}=2.17$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right)=$$

$$\left(0.4-2.17\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot 0.6}{750}}, 0.4+2.17\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot 0.6}{750}}\right)=(0.3612, 0.4388)$$

La proporción de votantes al partido político estará entre 0.3612 y 0.4388, con un nivel de confianza del 97 %.

b) $\hat{p}=0.3$

Error inferior a 0.05

Nivel de confianza: 99 % $1-\alpha=0.99 \Rightarrow \alpha=0.01$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.01}{2}=0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2}=2.575$$

El error es $E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$ Igualando el error a 0.05 obtenemos el tamaño de la muestra:

$$z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}=0.05 \Rightarrow 2.575\cdot\sqrt{\frac{0.3\cdot 0.7}{n}}=0.05 \Rightarrow 2.575\cdot\sqrt{0.3\cdot 0.7}=0.05\cdot\sqrt{n} \Rightarrow \left(\frac{2.575\cdot\sqrt{0.3\cdot 0.7}}{0.05}\right)^2=n$$

n = 556.97

El tamaño de la muestra es de 557 personas, como mínimo, para obtener una estimación de la proporción de votantes con un error inferior a 0.05.

Problema A.3:

El ayuntamiento de un pueblo ha construido una pista de hielo provisional cuya gráfica está limitada por las rectas $r_1 \equiv x = 0, r_2 \equiv x = 50, r_4 \equiv y = 45$ y la parábola $y = f(x) = -\frac{1}{125}x^2 + \frac{2}{5}x$. Si se mide en metros:

$a)$ Dibujar la gráfica. Calcular el volumen de agua (en m^3) que se necesita para llenar la pista sabiendo que la profundidad del agua es de 7 cm (0.07 metros).

$b)$ El consumo eléctrico mensual para mantener congelada la pista es de 28 Kwh/m^2. El precio del Kwh es de 0.13 euros/Kwh. Calcular el coste de mantener la pista congelada durante un mes.

$c)$ Aparte del coste del consumo eléctrico, la gestión de la pista (mantenimiento, alquiler del terreno, salario de los empleados, etc.) tiene un coste fijo mensual de 5 000 euros; hay además un coste variable debido a averías, fugas de agua, días de calor … Si se espera que acudan a patinar 600 personas al mes, calcular cuál debe ser el precio de la entrada para cubrir todos los costes mensuales, suponiendo que los costes variables alcanzan un 25 % de los costes fijos de gestión.

Solución:

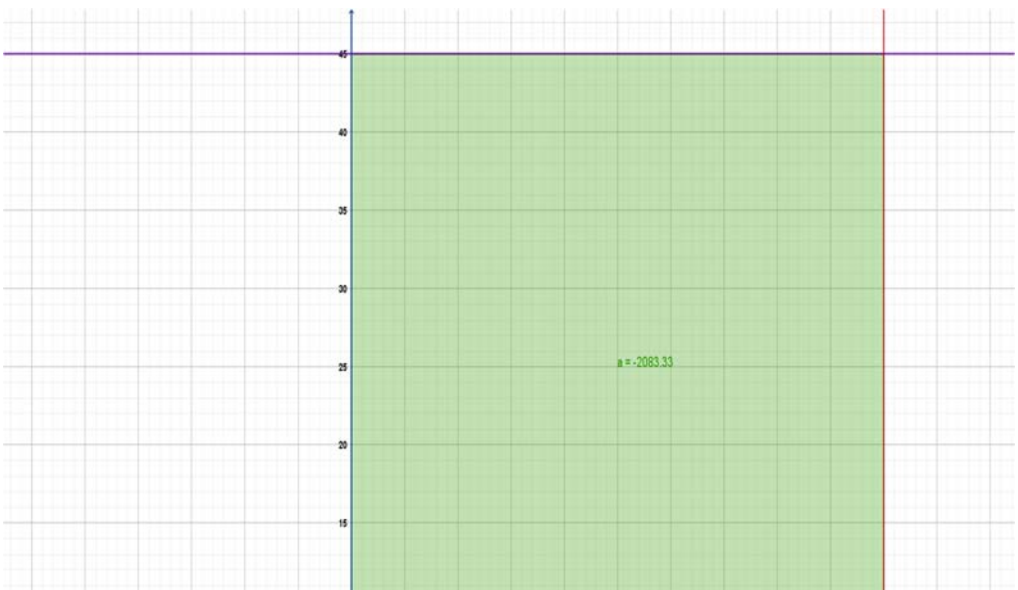
a) Para calcular el vértice igualamos a cero la derivada de la función:

$$y' = f'(x) = \frac{-2}{125}x + \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow -2x + 50 = 0 \Rightarrow x = 25$$

Vértice: V(25, 5)

$f(0) = \frac{-1}{125} \cdot 0^2 + \frac{2}{5} \cdot 0 = 0$ $\qquad$ $f(50) = \frac{-1}{125} \cdot 50^2 + \frac{2}{5} \cdot 50 = 0$ $\qquad$ Puntos: O(0, 0) A(50, 0)

La gráfica es:



Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
www.apuntesmareaverde.org.es

La superficie de la pista viene dada por la integral definida:

$$\int_0^{50} [45 - f(x)] \cdot dx = \int_0^{50} \left[45 - \left(-\frac{1}{125}x^2 + \frac{2}{5}x\right)\right] \cdot dx = \int_0^{50} \left(\frac{1}{125}x^2 - \frac{2}{5}x + 45\right) \cdot dx =$$

$$\left[\frac{1}{125} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5} \cdot \frac{x^2}{2} + 45x\right]_0^{50} = \left[\frac{x^3}{375} - \frac{x^2}{5} + 45x\right]_0^{50} = \left(\frac{50^3}{375} - \frac{50^2}{5} + 45 \cdot 50\right) - 0 =$$

$$\frac{5^3 \cdot 1.000}{375} - \frac{5^2 \cdot 100}{5} + 2.250 = \frac{1:000}{3} - 500 + 2.250 = \frac{1:000}{3} + 1.750 = \frac{1:000 + 5.250}{3} = \frac{6.250}{3} = 2.083.\hat{3}\ m^2.$$

<u>Otra forma</u>:

También se puede hallar el área restando el área bajo la parábola al área del rectángulo limitado por los ejes de coordenadas y las rectas x = 50 e y = 45.

Área bajo la parábola:

$$\int_0^{50} f(x)\,dx = \int_0^{50} \left(\frac{-1}{125}x^2 + \frac{2}{5}x\right) 2 = \left[\frac{-x^3}{375} + \frac{x^2}{5}\right]\Bigg|_0^{50} = \left(\frac{-50^3}{375} + \frac{50^2}{5}\right) - 0 = \frac{-125000}{375} + \frac{2500}{5} = \frac{500}{3} \approx 166.\hat{6}\,m^2$$

El área de la pista sería $50 \cdot 45 - 166.\hat{6} = 2083.\hat{3}\,m^2$

Como la profundidad del agua es 0.07 m, el volumen del agua será: $V = 2083.\hat{3} \cdot 0.07 = 145.8\hat{3}\,m^3$

El volumen de agua que se necesita para llenar la pista es $145.833\ m^3 = 145\ 833.33\ \ell$

b) Consumo eléctrico mensual: 28 Kwh/m²

Precio del Kwh: 0.13 euros/Kwh

El consumo eléctrico mensual de la pista es $2083.\hat{3} \cdot 28 = 58333.\hat{3}\ Kwh$

El coste será $58333.\hat{3} \cdot 0.13 = 7583.\hat{3}$ €

El coste de mantener la pista congelada durante un mes es $7\ 583.33\ euros$ €.

c) Coste fijo mensual: 5 000 euros

Coste variable: 25 % de los costes fijos, es decir, 5000 · 0.25 = 1250 €

Coste de la electricidad: 7583.33 €

Número de personas que se espera que acudan a la pista: 600 personas al mes

El coste total será 5000 € + 1250 + 7583.33 = 13833.33 €

El precio de la entrada será 13833.33/600 = 23.055 €

Para cubrir los costes totales el precio de la entrada debe ser 23.06 €

Problema A.4:

Una empresa dedicada el comercio del textil desea liquidar 400 camisas y 300 pantalones. Para ello lanza dos ofertas: la oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón por 30 euros, y la oferta B consiste en un lote de dos camisas y un pantalón, que se vende a 40 euros. Hay que ofrecer al menos 40 lotes de la oferta A y al menos 20 de la oferta B.

$a)$ Formular el correspondiente problema de programación lineal.

$b)$ Representar la región factible.

$c)$ Para maximizar las ganancias, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo? ¿Cuál es la ganancia máxima?

Solución:

a)

Ofertas	Camisas	Pantalones	Precio
A	1	1	30 €
B	2	1	40 €
	400	300	

Como mínimo se deben ofrecer 40 lotes de la oferta A y 20 de la oferta B.

Sean x = número de lotes de la oferta A e y = número de lotes de la oferta B.

El problema de programación lineal es:

$$\left.\begin{array}{l} max\, z = 30x + 40y \\ s.a: \quad x + 2y \le 400 \\ \qquad x + y \le 300 \\ \qquad x \ge 40 \\ \qquad y \ge 20 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} max\, z = 30x + 40y \\ s.a: \quad y \le \dfrac{400 - x}{2} \\ \qquad y \le 300 - x \\ \qquad x \ge 40 \\ \qquad y \ge 20 \end{array}\right\}$$

b) Hallamos los puntos de corte entre las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{400 - x}{2} \\ y = 300 - x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{400 - x}{2} = 300 - x \Rightarrow 400 - x = 600 - 2x \Rightarrow x = 200$$

$y = 100$ Punto (200, 100)

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{400 - x}{2} \\ y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{400 - x}{2} = 20 \Rightarrow 400 - x = 40 \Rightarrow x = 360$$

Punto (360, 20)

$$\left.\begin{array}{l} y = 300 - x \\ y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow 300 - x = 20 \Rightarrow x = 280$$

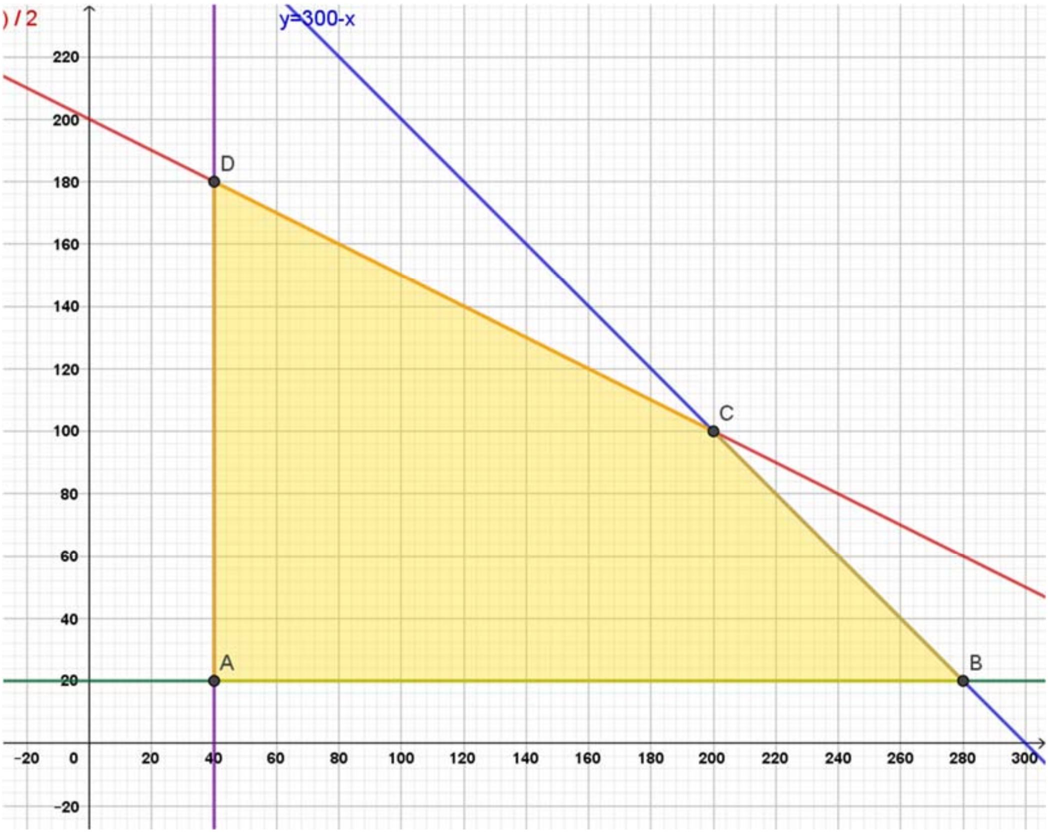
Punto (280, 20)

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

x	$y=\frac{400-x}{2}$
0	200
40	180
400	0

x	$y=300-x$
0	300
40	260
300	0

La región factible es:



c) Hallamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible:

$z(A)=z(40{,}20)=30\cdot 40+40\cdot 20=1200+800=2000$

$z(B)=z(280{,}20)=30\cdot 280+40\cdot 20=8400+800=9200$

$z(C)=z(200{,}100)=30\cdot 200+40\cdot 100=6000+4000=10000$

$z(D)=z(40{,}180)=30\cdot 40+40\cdot 180=1200+7200=8400$

La función debe ser máxima, por lo tanto la solución es el punto C(200, 100).

Para maximizar las ganancias se deben vender 200 lotes de la oferta A y 100 lotes de la oferta B, obteniendo unas ganancias de 10 000 €

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

A partir de una muestra de 81 adultos, se estima que la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio está entre 3.608 y 4.392 horas (ambos incluidos). Suponiendo hipótesis de normalidad, con una desviación típica de 9/5 horas:

a) ¿Cuál es la media muestral obtenida?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Usando la estimación puntual de la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de horas semanales dedicadas por 16 adultos a hacer ejercicio sea mayor o igual que 4.1 horas?

Solución:

a) Tamaño muestral n = 81

Desviación típica $\sigma=\frac{9}{5}=1.8$

Intervalo de confianza para la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio: [3.608, 4.392]

El intervalo de confianza para la media muestral es $\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

La media muestral es el punto medio del intervalo de confianza: $\bar{X}=\frac{3.608+4.392}{2}=4$

La media muestral es 4 horas semanales.

b) El error cometido es $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y en este caso es $E=4.392-4=0.392$

Si se igualan ambas expresiones y se despeja: $z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.392\Rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{0.392\cdot\sqrt{n}}{\sigma}\Rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{0.392\cdot\sqrt{81}}{1.8}$

$z_{\alpha/2}=1.96$ $\quad P(Z\le z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}\Rightarrow 0.975=1-\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\alpha=0.05\Rightarrow 1-\alpha=0.95$

El nivel de confianza utilizado es 95 %.

c) Tamaño muestral n = 16

La distribución de probabilidad de la media muestral es $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Tomando como media la obtenida en el apartado a), la distribución es:

$\bar{X}\sim N\left(4,\frac{1.8}{\sqrt{16}}\right)\rightarrow\bar{X}\sim N(4,0.45)$

probabilidad pedida es:

$P(X\ge 4.1)=P\left(Z\ge\frac{4.1-4}{0.45}\right)=P\left(Z\ge\frac{0.1}{0.45}\right)=P(Z\ge 0.22)=1-P(Z<0.22)=1-0.5871=0.4129.$

La probabilidad de que la media de horas semanales dedicadas por 16 adultos a hacer ejercicio sea mayor o igual que 4.1 horas es 0.4129.

Problema B.2:

Se ha realizado una encuesta a 20 000 estudiantes de la universidad sobre su actitud ante el botellón. De ellos, 13 200 son partidarios y el resto no. Conocida esta cifra, el vicerrectorado de cultura va a organizar 100 charlas informativas sobre este tema, a cada una de las cuales asistirán 30 estudiantes de la universidad elegidos al azar.

$a)$ Calcular la proporción de estudiantes partidarios del botellón en la universidad. ¿Cuál es la distribución de probabilidad aproximada de la proporción de estudiantes partidarios del botellón en las charlas?

$b)$ Ha comenzado una de estas charlas. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los asistentes haya más de 21 alumnos favorables al botellón?

$c)$ ¿En cuántas charlas cabe esperar que hay más de 15 y menos de 19 estudiantes partidarios del botellón?

Solución:

a) La proporción de estudiantes partidarios del botellón en la universidad es

$$\hat{p}=\frac{13200}{20000}=0.66$$

La distribución de la proporción muestral de estudiantes partidarios del botellón en las charlas es una distribución normal

$$\hat{P}\sim N\left(p,\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)\rightarrow\hat{P}\sim N\left(0.66,\sqrt{\frac{0.66\cdot(1-0.66)}{30}}\right)\rightarrow\hat{P}\sim N(0.66,0.0865)$$

b) La proporción de alumnos favorables al botellón sería más de $\frac{21}{30}=0.7$

La probabilidad pedida es:

$$P(\hat{P}>0.7)=P\left(\frac{\hat{P}-0.66}{0.0865}>\frac{0.7-0.66}{0.0865}\right)=P(Z>0.46)=1-P(Z\leq0.46)1-0.6772=0.3228$$

La probabilidad de que entre los asistentes haya más de 21 alumnos favorables al botellón es 0.3228.

c) Si hay más de 15 y menos de 19 estudiantes partidarios del botellón significa que la proporción está entre $\frac{15}{30}=0.5$ y $\frac{19}{30}=0.6\hat{3}$

$$P(0.5<\hat{P}<0.6\hat{3})=P\left(\frac{0.5-0.66}{0.0865}<\frac{\hat{P}-0.66}{0.0865}<\frac{0.6\hat{3}-0.66}{0.0865}\right)=P(-1.85<Z<-0.31) =$$

$$P(0.31<Z<1.85)=P(Z<1.85)-P(Z<0.31)=0.9678-0.6217=0.3461$$

Se organizan 100 charlas: $0.3461\cdot100=34.61$

Cabe esperar que en 35 charlas, aproximadamente, haya más de 15 y menos de 19 alumnos partidarios del botellón.

Problema B.3:

La tasa de paro (expresada en porcentaje sobre la población en edad de trabajar) registrada en cierta región europea durante los últimos 72 trimestres se ha comportado de acuerdo a la función:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{125}\cdot(4x^2-80x+1\,025), & 0\le x<35\\ \frac{1}{625}\cdot(13x^2-1\,560x+54\,300), & 35\le x\le 72\end{cases}$$, donde x representa el trimestre.

a) Representar gráficamente la función. Justificando las respuestas, explicar si es continua, y determinar cuándo es creciente y cuándo es decreciente.

b) ¿En qué trimestre alcanzó la tasa de paro mínimo? ¿Cuándo alcanzó el máximo? ¿Cuáles fueron los valores de las tasas de paro máxima y mínima?

c) ¿En qué trimestre se superó por primera vez el 10 % de paro?

Solución:

a) Es una función definida a trozos continua, por ser polinómica, en los intervalos [0, 35) y (35, 72].

Estudiamos la continuidad en x = 35:

$$f(35)=\frac{1}{625}\cdot(13\cdot 35^2-1560\cdot 35+54300)=\frac{15625}{625}=25$$

$$\lim_{x\to 35^-}\frac{1}{125}\cdot(4x^2-80x+1025)=\frac{1}{125}\cdot(4\cdot 35^2-80\cdot 35+1025)=\frac{3125}{125}=25$$

$$\lim_{x\to 35^+}\frac{1}{625}\cdot(13x^2-1560x+54300)=25$$

$$\lim_{x\to 35^+}f(x)=\lim_{x\to 35^-}f(x)=f(35)$$ por lo tanto, la función es continua en su dominio.

La derivada de la función es:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{125}\cdot(8x-80), 0\le x<35\\ \frac{1}{625}\cdot(26x-1\,560), 35<x\le 72\end{cases}$$

Hallamos los vértices de ambas parábolas:

$$\frac{1}{125}\cdot(8x-80)=0\Rightarrow 8x-80=0\Rightarrow x=10 \qquad f(10)=\frac{1}{125}\cdot(4\cdot 10^2-80\cdot 10+1025)=\frac{625}{125}=5$$

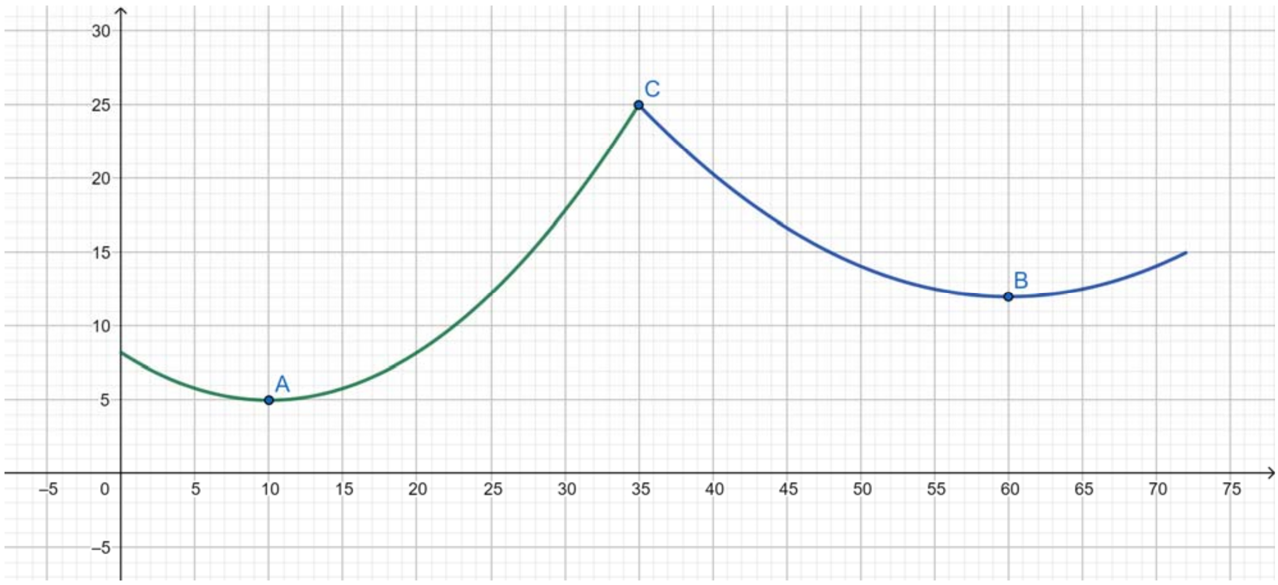
$$\frac{1}{625}\cdot(26x-1560)=0\Rightarrow 26x-1560=0\Rightarrow x=60 \qquad f(60)=\frac{1}{625}\cdot(13\cdot 60^2-1560\cdot 60+54300)=\frac{7500}{625}=2$$

Hallamos otros puntos:

$$f(0)=\frac{1}{125}\cdot(4\cdot 0^2-80\cdot 0+1025)=\frac{1025}{125}=8.2$$

$$f(72)=\frac{1}{625}\cdot(13\cdot 72^2-1560\cdot 72+54300)=\frac{9372}{625}=14.9952$$

Se representa la gráfica con los puntos obtenidos:



La función es creciente en (10, 35) U (60, 72) y decreciente en (0, 10) U (35, 60).

b) La tasa de paro fue mínima en el trimestre 10 y fue del 5 %.

La tasa de paro alcanzó el máximo en el trimestre 35 y fue del 25 %.

c) A partir de la gráfica se deduce que la tasa de paro supera el 10 % en torno al trimestre 23. Lo comprobamos igualando a 10 la función:

$$\frac{1}{125}\cdot(4\cdot x^2-80\cdot x+1025)=10\Rightarrow 4\cdot x^2-80\cdot x+1025=1250\Rightarrow 4\cdot x^2-80\cdot x-225=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}=\frac{80\pm\sqrt{(-80)^2-4\cdot 4\cdot(-225)}}{2\cdot 4}=\frac{80\pm 100}{8} \qquad x_1=22.5 \quad ; \quad x_2=-2.5$$

La solución negativa no es válida en el contexto del problema.

La tasa de paro superó por primera vez el 10 % en el trimestre 23.

Problema B.4:

Tres nietos desean hacer un regalo de 60 euros a su abuela y deciden reunir esta cantidad de la siguiente forma: Luís, el mayor, aporta el triple de que aportan los otros dos juntos. Carmen aporta 3 euros por cada dos que aporta Pedro.

$a)$ Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones lineales.

$b)$ Resolver el sistema.

$c)$ ¿Cuánto aporta cada nieto?

Solución:

a) Sea x = dinero aportado por Luis, y = dinero aportado por Carmen, z = dinero aportado por Pedro

El dinero aportado entre los tres es 60 €. $x+y+z=60$

Luis aporta el triple que los otros dos juntos. $x=3\cdot(y+z)\Rightarrow x-3y-3z=0$

Carmen aporta 3 € por cada 2 € que aporta Pedro. $\frac{y}{z}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2y-3z=0$

El sistema de ecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ x-3y-3z=0 \\ 2y-3z=0 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos por el método de Gauss:

La matriz del sistema es:

$$M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -4 & -4 & -60 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\cdot F_3 + F_2} M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -4 & -4 & -60 \\ 0 & 0 & -10 & -60 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ -4y-4z=-60 \\ -10z=-60 \end{array}\right\} \quad z=\frac{-60}{-10}=6 \text{ ; } -4y-4\cdot 6=-60\Rightarrow y=9 \text{ ; } \quad x+9+6=60\Rightarrow x=45 \text{ .}$$

Luis aporta 45 €, Carmen 9 € y Pedro 6 €.

Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2020–2021

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	(3)
Convocatoria:	Julio

Elegir un MÁXIMO de CUATRO preguntas de las OPCIONES A y B de la siguiente manera: UNA entre A1y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4. Indicar, antes de cada respuesta, letra y número. Cada pregunta se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

OPCIÓN A

A1. En una clínica veterinaria el 40% de los animales que acuden a consulta son perros, el 30% gatos, el 20% aves y el resto otros animales. El 70% de los perros acude con cita previa y el resto acude como urgencia; entre los gatos, el 60% viene con cita previa y el resto como urgencia; solo un 10% de las aves viene como urgencia; el resto de animales viene siempre como urgencia.

a) Construir el árbol de probabilidades para este problema.

b) De todos los animales que vienen con cita previa, ¿Qué porcentaje son perros?

c) ¿Qué porcentaje de las consultas realizadas en la clínica son urgencias?

A2. En la primera fase de un examen de oposición, se realiza un test que consta de 90 preguntas a contestar verdadero o falso. Se aprueba si se contestan correctamente al menos 50 preguntas. Un opositor, para responder, lanza una moneda y contesta verdadero si sale cara y falso si sale cruz. Hallar:

a) Probabilidad de aprobar el examen.

b) Probabilidad de acertar más de 51 y menos de 60 preguntas.

c) Probabilidad de acertar a lo sumo 40 preguntas.

A3. Durante los últimos 10 años, los costos en comunicaciones de una empresa, en decenas de miles de euros, vienen dados por la función:

$$C(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-1)^2}{3} + 4 & , t \in [0,4] \\ \dfrac{18-t}{2} & , t \in (4,10] \end{cases}$$

siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

a) ¿Es continua $C(t)$?

b) ¿Cuándo $C(t)$ es derivable? ¿Cuándo creció y cuándo decreció $C(t)$?

c) ¿Cuándo alcanzó $C(t)$ el máximo y el mínimo absolutos? ¿Cuáles fueron los valores máximos y mínimos absolutos?

A4. Se quieren plantar plataneras y naranjeros. Cada platanera cuesta 5 euros y cada naranjero 2 euros. Para facilitar la recogida, el número de plataneras no debe superar el doble del de naranjeros ni ser inferior a su mitad. Además, se puede dedicar un máximo de 900 euros a poner esta plantación. Se espera que cada platanera produzca un beneficio de 15 euros y cada naranjero 8 euros.

a) Plantear el correspondiente problema de Programación Lineal

b) Representar la región factible e indicar sus vértices

c) Determinar la cantidad de plantas de cada tipo que se deben plantar para maximizar el beneficio global.

OPCIÓN B

B1. Una naviera que opera entre islas ha decidido evaluar el peso de los vehículos que transporta para ajustar los precios de los billetes. Para ello ha tomado una muestra aleatoria de 64 vehículos, obteniendo un peso medio de 1123 kg con una desviación típica de 190 kg.

a) Suponiendo que la variable peso es normal, calcular un intervalo de confianza al 97% para el peso medio de todos los vehículos transportados por la naviera.

b) ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se desea estimar el peso medio de los vehículos con un error inferior a 20 kg y una confianza del 99%?

c) Sabiendo que el 10% de los vehículos que viajan con la naviera son todoterrenos, ¿cuál es la probabilidad de que entre los 64 de la muestra haya más de 8 todoterrenos?

B2. Se realiza un sondeo preelectoral, encuestando a 2500 personas, de las que 1500 manifiestan su intención de votar.

a) Con un 95% de confianza, ¿entre qué valores puede estimarse que se encontrará el nivel de abstención?

b) ¿Cuál será el correspondiente intervalo de confianza al 98%?

c) Si se mantienen las proporciones del sondeo inicial, ¿de qué tamaño tendrá que ser la muestra para hacer dicha estimación con un error menor del 1,5% y con una confianza del 99%?

B3. La superficie de lona necesaria para fabricar un toldo está delimitada por las funciones:

$$y = (x-2)^2,\ y = 2x + 4$$

a) Hacer un dibujo de dicha superficie.

b) Si se mide en metros, calcular el área de la superficie.

c) Si el precio del metro cuadrado de lona es igual a 4 €, ¿cuánto es necesario gastar para hacer tres toldos iguales?

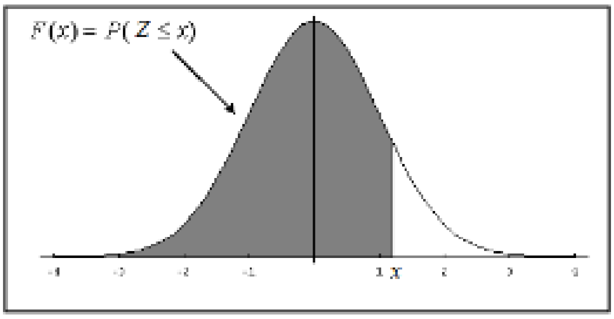
B4. En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos: A, sin defecto, todos al mismo precio de 20 euros; B, con defecto no apreciable, con una rebaja del 20% sobre el precio de los anteriores y C, con defecto apreciable, con una rebaja del 60% sobre el precio de los que no tienen defecto. Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros, y los que tienen defecto suponen el 40% de los que no lo tienen.

a) Plantear el sistema de ecuaciones.

b) Resolver correctamente.

c) ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?

Distrito Universitario de Canarias



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA OPCIÓN A

Problema A.1:

En una clínica veterinaria el 40 % de los animales que acuden a consulta son perros, el 30 % gatos, el 20 % aves y el resto otros animales. El 70 % de los perros acude con cita previa y el resto acude como urgencia; entro los gatos, el 60 % viene con cita previa y el resto como urgencia; solo un 10 % de las aves viene como urgencia; el resto de animales viene siempre como urgencia.

a) Construir el árbol de probabilidades para este problema.

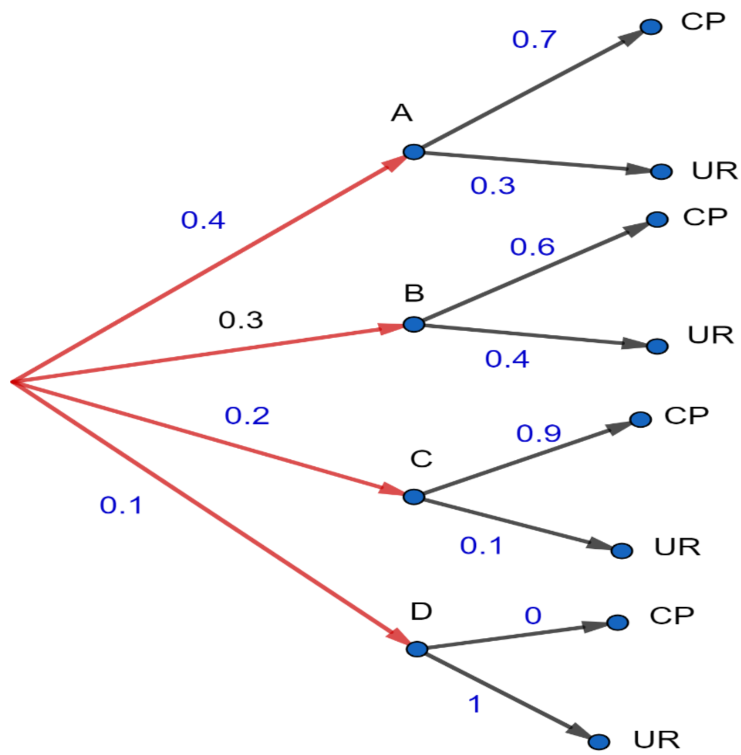
b) De todos los animales que vienen con cita previa, ¿qué porcentaje son perros?

c) ¿Qué porcentaje de las consultas realizadas en la clínica son urgencias?

Solución:

a) Sea A = "el animal es un perro", B = "el animal es un gato", C = "el animal es un ave", D = "el animal no es un perro, ni un gato ni un ave", CP = "el animal acude con cita previa", UR = "el animal acude por una urgencia"

El árbol de probabilidades es:



b) Se pide el porcentaje de perros entre todos los animales que vienen con cita previa, es decir, hay que calcular la probabilidad de que el animal sea un perro, sabiendo que tiene cita previa.

Calculamos en primer lugar la probabilidad de que el animal tenga cita previa:

$$P(CP)=P(A)\cdot P(CP/A)+P(B)\cdot P(CP/B)+P(C)\cdot P(CP/C)+P(D)\cdot P(CP/D)$$

$$= 0.4\cdot 0.7+0.3\cdot 0.6+0.2\cdot 0.9+0.1\cdot 0=0.64$$

Ahora la probabilidad de que el animal sea perro, sabiendo que tiene cita previa es:

$$P(A/CP)=\frac{P(A\cap CP)}{P(CP)}=\frac{P(A)\cdot P(CP/A)}{P(CP)}=\frac{0.4\cdot 0.7}{0.64}=0.4375$$

El porcentaje de perros entre los animales que vienen con cita previa es 43.75 %

c) La probabilidad de que un animal venga por una urgencia es:

$$P(UR)=1-P(CP)=1-0.64=0.36$$

El 36 % de las consultas realizadas son urgencias.

Problema A.2:

En la primera fase de un examen de oposición, se realiza un test que consta de 90 preguntas a contestar verdadero o falso. Se aprueba si se contestan correctamente al menos 50 preguntas. Un opositor, para responder, lanza una moneda y contesta verdadero si sale cara y falso si sale cruz. Hallar:

$a)$ Probabilidad de aprobar el examen.

$b)$ Probabilidad de acertar más de 51 y menos de 60 preguntas.

$c)$ Probabilidad de acertar a lo sumo 40 preguntas.

Solución:

a) Sea X = número de respuestas correctas

n = 90 preguntas

La variable sigue una distribución binomial, ya que cada pregunta es un experimento con dos resultados posibles, acierto y fallo en la respuesta, con una probabilidad de 1/2 cada uno.

$$X \sim B(n,p) \to X \sim B(90, \frac{1}{2})$$

Como n es un número elevado, se aproxima a una distribución normal, ya que se dan las condiciones:

$n \cdot p = 90 \cdot \frac{1}{2} = 45 > 5 \quad n \cdot q = 90 \cdot \frac{1}{2} = 45 > 5$

$\mu = n \cdot p = 45 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{90 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{10}$

La variable X se aproxima entonces a la normal $X' \sim N\left(45, \frac{3}{2} \cdot \sqrt{10}\right)$

Para aprobar el examen hay que responder correctamente 50 preguntas como mínimo, por lo que la probabilidad pedida es $P(X \geq 50)$ y con la corrección de Yates es:

$$P(X' \geq 49.5) = P\left(\frac{X'-45}{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{10}} \geq \frac{49.5-45}{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{10}}\right) = P(Z \geq 0.95) = 1 - P(Z < 0.95) = 1 - 0.8289 = 0.1711$$

La probabilidad de aprobar el examen es 0.1711.

b) La probabilidad pedida es $P(51 < X < 60)$ y con la aproximación a la distribución normal y la corrección de Yates:

$$P(51 < X < 60) = P(51.5 \leq X' \leq 59.5) = P\left(\frac{51.5-45}{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{10}} \leq Z \leq \frac{59.5-45}{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{10}}\right) = P(1.37 \leq Z \leq 3.06)$$

$= P(Z \leq 3.06) - P(Z \leq 1.37) = 0.9989 - 0.9147 = 0.0842$

La probabilidad de acertar más de 51 y menos de 60 preguntas es 0.0842.

c) La probabilidad de acertar a lo sumo 40 preguntas es $P(X \leq 40)$ y haciendo de nuevo la aproximación a la distribución normal y la corrección de Yates:

$$P(X' \leq 40.5) = P\left(\frac{X'-45}{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{10}} \leq \frac{40.5-45}{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{10}}\right) = P(Z \leq -0.95) = P(Z \geq 0.95) = 1 - 0.8289 = 0.1711$$

La probabilidad de acertar a lo sumo 40 preguntas es 0.1711.

Problema A.3:

Durante los últimos 10 años, los costos en comunicaciones de una empresa, en docenas de miles de euros, vienen dados por la función $C(t) = \begin{cases} \frac{(t-1)^2}{3} + 4, t \in [0,4] \\ \frac{18-t}{2}, t \in (4,10] \end{cases}$, siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

a) ¿Es continua $C(t)$?

b) ¿Cuánto $C(t)$ es derivable? ¿Cuándo creció y cuándo decreció $C(t)$?

c) ¿Cuánto alcanzó $C(t)$ el máximo y el mínimo absolutos? ¿Cuáles fueron los valores máximos y mínimos absolutos?

Solución:

a) La función $C(t)$ es continua en el intervalo [0, 4) por ser polinómica, concretamente una parábola. En el intervalo (4, 10] es continua también por ser polinómica, en este caso una recta.

Estudiamos la continuidad de $C(t)$ en t = 4:

$$C(4)=\frac{(4-1)^2}{3}+4=7$$

$$\lim_{t\to 4^-} \frac{(t-1)^2}{3}+4=\frac{(4-1)^2}{3}+4=7$$

$$\lim_{t\to 4^+} \frac{18-t}{2}=\frac{18-4}{2}=7$$

$$\lim_{t\to 4^-} C(t)=\lim_{t\to 4^+} C(t)=C(4)$$

La función es continua en t = 4.

La función $C(t)$ es continua en [0, 10].

b) Hallamos la derivada de la función $C(t)$ en [0, 4) U (4, 10]:

$$C'(t)=\begin{cases} \frac{2\cdot(t-1)}{3}, & t\in[0,4) \\ \frac{-1}{2}, & t\in(4,10] \end{cases}$$

Estudiamos ahora la derivabilidad en t = 4:

$$C'(4^-)=\lim_{t\to 4^-} C'(t)=\lim_{t\to 4^-} \frac{2\cdot(t-1)}{3}=\frac{2\cdot(4-1)}{3}=2$$

$$C'(4^+)=\lim_{t\to 4^+} C'(t)=\lim_{t\to 4^+} \frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función $C(t)$ no es derivable en t = 4.

La función es derivable en [0, 4) U (4, 10].

Estudiamos la monotonía de la función:

En el intervalo [0, 4) igualamos a cero $C'(t)$. $\frac{2\cdot(t-1)}{3}=0 \Rightarrow t=1$

Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos determinados por los puntos críticos t = 1 y t = 4:

Intervalos	[0, 1)	(1, 4)	(4, 10]
Signo de $C'(t)$	Negativo	Positivo	Negativo
Monotonía	Decreciente	Creciente	Decreciente

La función es creciente en (1, 4) y decreciente en [0, 1) U (4, 10].

c) La función alcanza un máximo en t = 4 porque la función pasa de ser creciente a decreciente. En t = 1 alcanza un mínimo porque la función pasa de ser decreciente a creciente.

Calculamos el valor de la función en estos valores de t y también en los extremos del intervalo de definición de la función, es decir, en t = 0 y en t = 1.

$C(0)=\frac{(0-1)^2}{3}+4=\frac{13}{3}$ $C(1)=\frac{(1-1)^2}{3}+4=4$ $C(4)=\frac{(4-1)^2}{3}+4=7$ $C(10)=\frac{18-10}{2}=4$

La función alcanzó su máximo absoluto en t = 4 y su valor es 7. Es decir, el cuarto año alcanzó unos costes de 7 · 10 000 = 80 000 €, ya que C(t) representa los costes en decenas de miles de euros.

La función alcanzó un mínimo absoluto en t = 1 y en t = 10, con un valor de 4. Por lo tanto, los costes mínimos fueron 4 · 10 000 = 40 000 € y se alcanzaron en el primer año y en el décimo.

$\boldsymbol{Máximo\ absoluto: B(4,7);\ Mínimos\ absolutos: V(1,4)\ y\ C(10,4)}$

Problema A.4:

Se quiere plantar plataneras y naranjeros. Cada platanera cuesta 5 euros y cada naranjero 2 euros. Para facilitar la recogida, el número de plataneras no debe superar el doble del de naranjeros ni ser inferior a su mitad. Además, se puede dedicar un máximo de 900 euros a poner esta plantación. Se espera que cada platanera produzca un beneficio de 15 euros y cada naranjero 8 euros.

$a)$ Plantear el correspondiente problema de programación lineal.

$b)$ Representar la región factible e indicar sus vértices.

$c)$ Determinar la cantidad de plantas de cada tipo que se deben plantar para maximizar el beneficio global.

Solución:

a) Sean x = número de plataneras e y = número de naranjeros.

Cada platanera cuesta 5 € y cada naranjero 2 €.

El número de plataneras no debe superar el doble del de naranjeros, es decir, $x \le 2y$

El número de plataneras no debe ser inferior a la mitad del número de naranjeros: $x \ge \frac{y}{2}$

Se puede dedicar un máximo de 900 € a la plantación: $5x+2y \le 900$

El número de plataneras y el número de naranjeros no pueden ser negativos: $x \ge 0 \;\; ; \;\; y \ge 0$

Beneficios esperados: 15 € por cada platanera y 8 € por cada naranjero.

La función objetivo es $z=15+8y$

El problema de programación lineal es:

$$\left.\begin{array}{c} \max z=15x+8y \\ s.a: \quad x \le 2y \\ x \ge \frac{y}{2} \\ 5x+2y \le 900 \\ x \ge 0 \;\; ; \;\; y \ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \max z=15x+8y \\ s.a: \quad y \ge \frac{x}{2} \\ y \le 2x \\ y \le \frac{900-5x}{2} \\ x \ge 0 \;\; ; \;\; y \ge 0 \end{array}\right\}$$

b) Hallamos los puntos de corte entre las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x}{2} \\ y=\frac{900-5x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{900-5x}{2} \Rightarrow x=900-5x \Rightarrow x=150 \qquad y=\frac{150}{2}=75$$

Punto A (150, 75)

$$\left.\begin{array}{l} y=2x \\ y=\frac{900-5x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=\frac{900-5x}{2} \Rightarrow 4x=900-5x \Rightarrow x=100 \qquad y=2\cdot 100=200$$

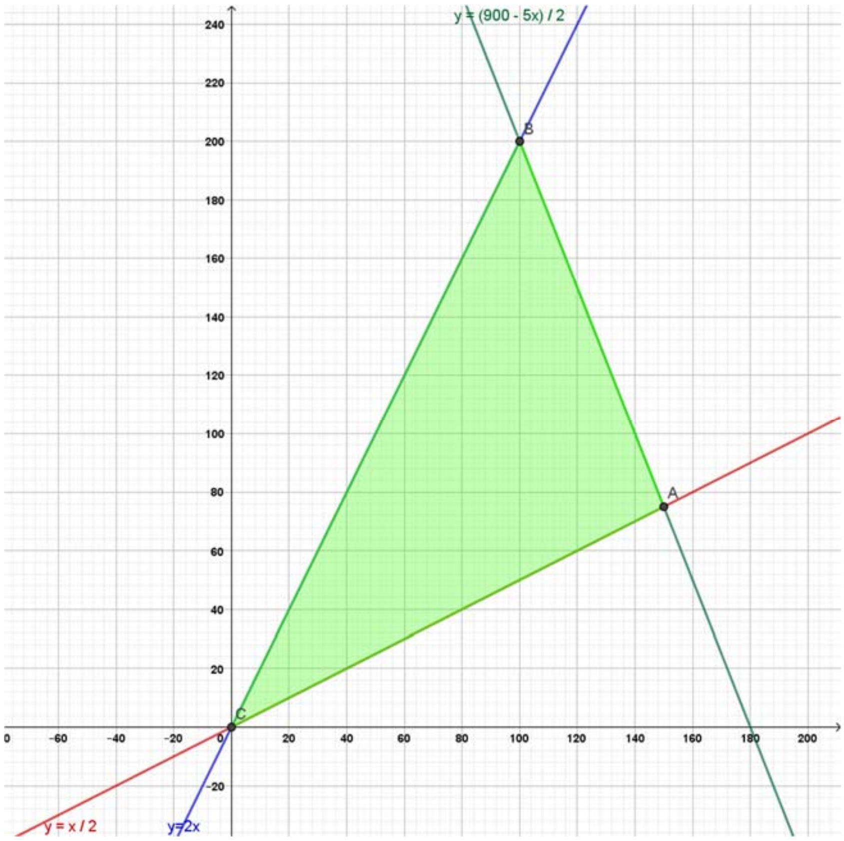
Punto B(100, 200)

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta
www.apuntesmareaverde.org.es

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x}{2} \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{2}=2x \Rightarrow x=4x \Rightarrow x=0$$

$y=0$ Punto C(0, 0)

La región factible es la región limitada por las rectas $y=\dfrac{x}{2}$, $y=2x$, $y=\dfrac{900-5x}{2}$ ya que los puntos del plano que cumplen las tres restricciones están por encima de la primera recta $\left(y \geq \dfrac{x}{2}\right)$ y por debajo de las otras dos $\left(y \leq 2x \;\; ; \;\; y \leq \dfrac{900-5x}{2}\right)$.



c) El beneficio será máximo en uno de los vértices de la región factible, por lo que debemos evaluar la función objetivo en cada punto:

$z(A)=z(150,75)=15\cdot 150+8\cdot 75=2250+600=2850$

$z(B)=z(100,200)=15\cdot 100+8\cdot 200=1500+1600=3100$

$z(C)=z(0,0)=15\cdot 0+8\cdot 0=0$

La función objetivo es máxima en el punto B.

El beneficio será máximo si se plantan 100 plataneras y 200 naranjeros y dicho beneficio será de 3 100 €.

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Una naviera que opera entre islas ha decidido evaluar el peso de los vehículos que transporta para ajustar los precios de los billetes. Para ello ha tomado una muestra aleatoria de 64 vehículos, obteniéndose un peso medio de 1 123 kg con una desviación típica de 190 kg.

a) Suponiendo que la variable peso es normal, calcular un intervalo de confianza al 97 % para el peso medio de todos los vehículos transportados por la naviera.

b) ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se desea estimar el peso medio de los vehículos con un error inferior a 20 kg y una confianza del 99 %?

c) Sabiendo que el 10 % de los vehículos que viajan con la naviera son todoterrenos, ¿cuál es la probabilidad de que entre los 64 de la muestra haya más de 8 todoterrenos?

Solución:

a) Tamaño muestral n = 64; X = peso de los vehículos transportados por la naviera

Peso medio de los vehículos: $\bar{X}=1123\,kg$. Desviación típica muestral: $s=190\,kg$

Tomaremos la desviación típica muestral como estimador de la desviación típica poblacional: σ

Nivel de confianza: 97 %, es decir $1-\alpha=0.97\Rightarrow\alpha=0.03$

$$P(Z\le z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.03}{2}=0.985\Rightarrow z_{\alpha/2}=2.17$$

El intervalo de confianza para la media muestral es:

$$\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(1123-2.17\cdot\frac{190}{\sqrt{64}},1123+2.17\cdot\frac{190}{\sqrt{64}}\right)=(1071.4625,1174.5375)$$

El intervalo de confianza para el peso medio de los vehículos transportados por la naviera, con un nivel de confianza del 97 %, es **(1 071.4625, 1 174.5375)**.

b) El error cometido es $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y en este caso debe ser inferior a 20 kg.

Nivel de confianza: 99 %, es decir $1-\alpha=0.99\Rightarrow\alpha=0.01$

$$P(Z\le z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.01}{2}=0.995\Rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{2.57+2.58}{2}=2.575$$

Si se iguala el error a 20 kg y se despeja:

$$z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=20\Rightarrow z_{\alpha/2}\cdot\sigma=20\cdot\sqrt{n}\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{20}=n\Rightarrow n=\left(\frac{2.575\cdot190}{20}\right)^2\Rightarrow n=598{,}41$$

La muestra debe ser de **599** vehículos como mínimo para que el error sea inferior a 20 kg.

c) Consideramos la variable X = número de vehículos todoterreno.

Probabilidad de que un vehículo sea todoterreno: p = 0.1

La variable X sigue una distribución binomial $X \sim B(n,p) \rightarrow X \sim B(64{,}0.1)$

Hay que calcular $P(X>8)$

Como n es un número elevado, se aproxima a una distribución normal, ya que se dan las condiciones:

$n \cdot p = 64 \cdot 0.1 = 6.4 > 5$ $\quad$ $n \cdot q = 64 \cdot 0.9 = 57.6 > 5$

$\mu = n \cdot p = 6.4$ $\quad$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{64 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 2.4$

La variable X se aproxima entonces a la normal $X' \sim N(6.4{,}2.4)$

La probabilidad que hay que calcular es $P(X>8)$ y con la corrección de Yates es:

$$P(X' \geq 8.5) = P\left(\frac{X'-6.4}{2.4} \geq \frac{8-6.4}{2.4}\right) = P(Z \geq 0.875) = 1 - P(Z<0.875) = 1 - \frac{0.8078+0.8106}{2} = 0.1908$$

Como z = 0.875 está entre 0.87 y 0.88, a la misma distancia de ambos, hallamos la probabilidad $P(Z<0.875)$ sumando las dos probabilidades que aparecen en la tabla y dividiendo entre dos.

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	[illegible]	[illegible]	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133

La probabilidad de que haya más de 8 todoterrenos entre los 64 vehículos de la muestra es **0.1908**.

Problema B.2:

Se realiza un sondeo preelectoral, encuestando a 2 500 personas, de las que 1 500 manifiestan su intención de votar.

a) Con un 95 % de confianza, ¿entre qué valores puede estimarse que se encontrará el nivel de abstención?

b) ¿Cuál será el correspondiente intervalo de confianza al 98 %?

c) Si se mantienen las proporciones del sondeo inicial, ¿de qué tamaño tendrá que ser la muestra para hacer dicha estimación con un error menor del 1.5 % y con una confianza del 99 %?

Solución:

a) Sea P = proporción de personas que NO manifiestan su intención de votar

n = 2500 es el tamaño de la muestra. De ellas hay que 1000 que no manifiestan que vayan a votar.

$\hat{p}=\frac{1000}{2500}=0.4$ es la proporción muestral de personas que NO van a votar

95 % es el nivel de confianza, es decir, $1-\alpha=0.95 \Rightarrow \alpha=0.05$

$$P(Z\le z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.05}{2}=0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2}=1.96$$

El intervalo de confianza es: $\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right)$ =

= $\left(0.4-1.96\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot0.6}{2500}}, 0.4+1.96\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot0.6}{2500}}\right)=(0.3808, 0.4192)$

La abstención estará entre 0.3808 y 0.4192, es decir, **entre un 38.08 % y un 41.92 %**, con un nivel de confianza del 97 %.

b) Nivel de confianza: 98 %: $1-\alpha=0.98 \Rightarrow \alpha=0.02$

$$P(Z\le z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.02}{2}=0.99 \Rightarrow z_{\alpha/2}=2.33$$

Intervalo de confianza: $\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right)$ =

$$\left(0.4-2.33\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot0.6}{2500}}, 0.4+2.33\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot0.6}{2500}}\right)=(0.3772, 0.4228)$$

La abstención estará entre 0.3772 y 0.4228, es decir, **entre un 37.72 % y un 42.28 %**, con un nivel de confianza del 98 %.

c) $\hat{p}=0.3$

Error inferior al 1.5 %, es decir, E< 0.015

Nivel de confianza: 99 % $1-\alpha=0.99 \Rightarrow \alpha=0.01$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.01}{2}=0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2}=2.575$$

El error es $E=z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}$

Igualando el error a 0.015 obtenemos el tamaño de la muestra:

$$z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}=0.015 \Rightarrow 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{n}}=0.015 \Rightarrow 2.575 \cdot \sqrt{0.4 \cdot 0.6}=0.015 \cdot \sqrt{n} \Rightarrow \left(\frac{2.575 \cdot \sqrt{0.4 \cdot 0.6}}{0.015}\right)^2=n$$

n = 7072.67

La muestra tendrá que ser de **7 073 personas** como mínimo para que el error sea inferior al 15 %.

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

Problema B.3:

La superficie de lona necesaria para fabricar un toldo está delimitada por las funciones: $y = (x-2)^2$, $y = 2x + 4$.

a) Hacer un dibujo de dicha superficie.

b) Si se mide en metros, calcular el área de la superficie.

c) Si el precio del metro cuadrado de lona es igual a 4 euros, ¿cuánto es necesario gastar para hacer tres toldos iguales?

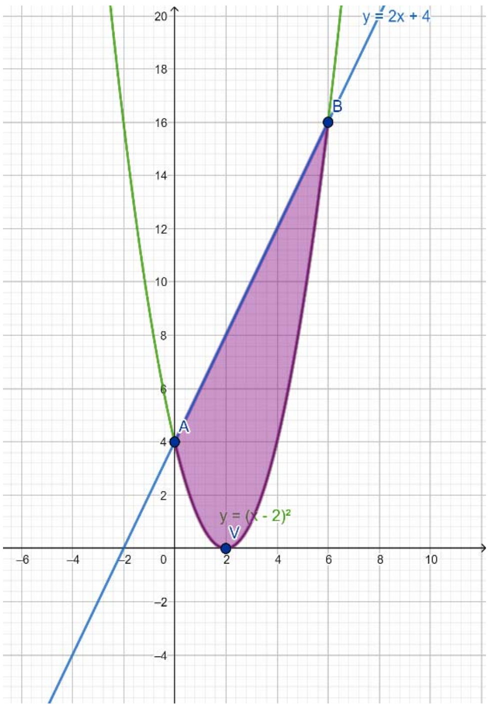
Solución:

a) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas:

$$\left.\begin{array}{l} y=(x-2)^2 \\ y=2x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-4x+4=2x+4 \Rightarrow x^2-6x=0 \Rightarrow x_1=0 \quad ;x_2=6 \qquad y_1=4 \quad ;y_2=16$$

Calculamos el vértice de la parábola: $y'=2x-4=0 \Rightarrow x_v=2 \quad y_v=0$

Con los puntos de corte A(0, 4), B(6, 16) y el vértice de la parábola V(2, 0) representamos las gráficas:



b) El área de la región delimitada por las gráficas es la integral definida:

$$\int_0^6 [2x+4-(x-2)^2]dx = \int_0^6 [2x+4-x^2+4x-4]dx = \int_0^6 (6x-x^2)dx = \left[3x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^6 = 3\cdot 6^2-\frac{6^3}{3}-0=36$$

La superficie de la lona es **36 m²**.

c) Cada toldo valdrá 4 · 36 = 144 € y los tres toldos 3 · 144 = 432 €.

Los tres toldos costarán **432 €**.

Problema B.4:

En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos: A, sin defecto, todos al mismo precio de 20 euros; B, con defecto no apreciable, con una rebaja del 20 % sobre el precio de los anteriores y C, con defecto apreciable, con una rebaja del 60 % sobre el precio de los que no tienen defecto. Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1 280 euros, y los que tienen defecto suponen el 40 % de los que no lo tienen.

a) Plantear el sistema de ecuaciones lineales.

b) Resolver correctamente.

c) ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?

Solución:

a) Sean A = número de pantalones sin defecto, B = número de pantalones con defecto no apreciable y

C = número de pantalones con defecto apreciable

Los de tipo A cuestan 20 €.

Los de tipo B tienen una rebaja del 20 % sobre el precio de los de tipo A, es decir, su precio es el 80 % de 20 €. Precio de los pantalones de tipo B = 0.8 · 20 = 16 €.

Los de tipo C tienen una rebaja del 60 % sobre el precio de los de tipo A, es decir, su precio es el 40 % de 20 €. Precio de los pantalones de tipo C = 0.4 · 20 = 8 €.

En total hay 70 pantalones. $A+B+C=70$

El precio total es 1 280 €. $20A+16B+8C=1280 \Rightarrow 5A+4B+2C=320$

Los que tienen defecto son el 40 % de los que no lo tienen:

$$B+C=\frac{40}{100}\cdot A \Rightarrow 4A-10B-10C=0 \Rightarrow 2A-5B-5C=0$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{r} A+B+C=70 \\ 5A+4B+2C=320 \\ 2A-5B-5C=0 \end{array}\right\}$$

b) Se puede resolver por el método de Gauss:

La matriz del sistema es:

$$M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 5 & 4 & 2 & 320 \\ 2 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-5F_1;\ F_3-2F_1]{} M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -30 \\ 0 & -7 & -7 & -140 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-7F_2]{} M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -30 \\ 0 & 0 & 14 & 70 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} A+B+C=70 \\ -B-3C=-30 \\ 14C=70 \end{array}\right\} \quad C=\frac{70}{14}=5 \quad -B-3\cdot 5=-30 \Rightarrow B=15 \quad A+15+5=70 \Rightarrow A=50$$

La solución del sistema de ecuaciones es **A = 50, B = 15** y **C = 5**.

c) Hay **50** pantalones de tipo A, **15** de tipo B y **5** de tipo C.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2021
Comunidad autónoma de
CANTABRIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El estudiante realizará solo **tres ejercicios elegidos entre los seis de que consta el examen.**
2. Una vez elegido un ejercicio ha de hacerlo completo (todos sus apartados).
3. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada ejercicio y de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
6. Si se realizan más de tres ejercicios solo se corregirán los tres primeros, según el orden en el que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
7. **La calificación del examen será el resultado de la puntuación obtenida dividida entre 0,75.**

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Un museo ofrece entradas con tarifas distintas: adulto, niño y jubilado. La suma de las tarifas de adulto y jubilado es cinco veces la tarifa de niño. Además, se sabe que un grupo de 5 adultos, 3 niños y 3 jubilados, ha pagado 222 € ; y otro grupo de 3 adultos, 2 niños y 4 jubilados, 168 € .

A. [1 PUNTO] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las tres tarifas.

B. [1 PUNTO] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,25 PUNTOS] Resolverlo.

D. [0,25 PUNTOS] El día que una familia formada por 2 adultos, 2 niños y 3 jubilados visita el museo, se ha aplicado un descuento especial de un 15 % a cada tarifa. ¿Cuánto pagan en total?

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa elabora dos productos, A y B, que le proporcionan unos beneficios por kg de 5 y 7 euros respectivamente. Por cuestiones de logística, solo puede producir un máximo de 500 kg a la semana. Las horas semanales de trabajo disponibles son 3200: cada kg de A requiere 4 horas y cada kg de B, 8h. Además, solo dispone de 1500 unidades de materia prima a la semana: cada kg de A necesita 3,75 unidades de materia prima; cada kg de B, 2 unidades. ¿Cuántos kilogramos de cada producto se pueden obtener semanalmente para maximizar los beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \dfrac{3x-15}{4x^2+4x-120}$

A. [0,5 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua?

B. [1 PUNTO] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad? Justifica la respuesta.

C. [1 PUNTO] Calcular los dos límites laterales en x = -6. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \frac{3x^2}{(x+4)^2}$, obtener:

A. [0,25 PUNTOS] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [0,5 PUNTOS] Las asíntotas.
C. [0,75 PUNTOS] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
D. [0,75 PUNTOS] Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
E. [0,25 PUNTOS] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Se realiza una encuesta a un grupo de 2000 personas de diferentes edades para conocer sus hábitos de compra por Internet en el último mes. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	18-40 años	41-60 años	Mayores de 60 años	Total
Ha realizado alguna compra por Internet	468	325	250	1043
No ha comprado ningún producto por Internet	257	207	493	957
Total	725	532	743	2000

Elegida una de las personas del grupo al azar,

A. [0,75 PUNTOS] Calcular la probabilidad de que sea mayor de 60 años y haya realizado alguna compra por Internet en el último mes.
B. [0,75 PUNTOS] Calcular la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 41 y 60 años.
C. [1 PUNTO] Si sabemos que ha realizado alguna compra por Internet en el último mes, ¿cuál es la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 18 y 40 años?

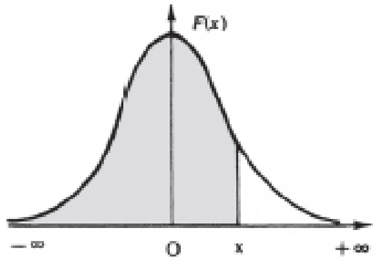
Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El tiempo que los usuarios de una compañía de telefonía móvil deben esperar para que les atiendan en el Servicio de Atención al Cliente, sigue una distribución normal con desviación típica 2 minutos. Una muestra aleatoria de 450 personas da como resultado un tiempo medio de espera de 14 minutos.

A. [1,25 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio.
B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 90 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

Distribución normal

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

Un museo ofrece entradas con tarifas distintas: adulto, niño y jubilado. La suma de adulto y jubilado es cinco veces la tarifa de niño. Además, se sabe que un grupo de 5 adultos, 3 niños y 3 jubilados, ha pagado 222 euros; y otro grupo de 3 adultos, 2 niños y 4 jubilados, 168 euros.

$a)$ Plantear el sistema de ecuaciones que permita calcular las tres tarifas.

$b)$ Analizar la compatibilidad de dicho sistema. $c)$ Resolverlo.

$d)$ El día que una familia formada por 2 adultos, 2 niños y 3 jubilados visita el museo, se ha aplicado un descuento especial de un 15 % a cada tarifa. ¿Cuánto pagan en total?

Solución:

$a)$

Sean x, y, z las tarifas que tiene el museo para adultos, niños y jubilados, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+z=5y \\ 5x+3y+3z=222 \\ 3x+2y+4z=168 \end{array}\right\} \underline{\left.\begin{array}{r} x-5y+z=0 \\ 5x+3y+3z=222 \\ 3x+2y+4z=168 \end{array}\right\}}.$$

$b)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 222 \\ 3 & 2 & 4 & 168 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}=12+10-45-9-6+100=122-60=62\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ de\ incógnitas.$$

$$\underline{Según\ el\ teorema\ de\ Rouché-Fröbenios \Rightarrow S.C.D.}$$

$c)$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 222 & 3 & 3 \\ 168 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{62} = \frac{444-2.520-504+4.440}{62} = \frac{4.884-3.024}{62} = \frac{1.860}{62} = 30.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 222 & 3 \\ 3 & 168 & 4 \end{vmatrix}}{62} = \frac{888+840-666-504}{62} = \frac{1.728-1.170}{62} = \frac{558}{62} = 9.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 5 & 3 & 222 \\ 3 & 2 & 168 \end{vmatrix}}{62} = \frac{504-3.330-444+4.200}{62} = \frac{4.704-3.774}{62} = \frac{930}{62} = 15.$$

$\underline{Las\ tarifas\ son: Adultos, \mathbf{30}\ euros; Niños, \mathbf{9}\ euros\ y\ Jubilados, \mathbf{15}\ euros.}$

$d)$

$$P = 0{,}85 \cdot (2 \cdot 30 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 15) = 0{,}85 \cdot (60 + 18 + 45) = 0{,}85 \cdot 123 =$$

$$= 104{,}55.$$

$\underline{La\ familia\ paga, después\ del\ descuento, \mathbf{104,55\ euros}.}$

Ejercicio 2:

Una empresa elabora dos productos, A y B, que le proporcionan unos beneficios por kg de 5 y 7 euros respectivamente. Por cuestiones de logística, solo puede producir un máximo de 500 kg a la semana. Las horas semanales de trabajo disponibles son 3.200; cada kg de A requiere 4 horas y cada kg de B, 8 horas. Además, solo dispone de 1.500 unidades de materia prima a la semana; cada kg de A necesita 3,75 unidades de materia prima; cada kg de B, 2 unidades. ¿Cuántos kilogramos de cada producto se pueden obtener semanalmente para maximizar los beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Solución:

Sean x e y el número de kilogramos de materia prima que requieren los productos A y B que se elaboran en la empresa, respectivamente.

La función de objetivos es $f(x,y) = 5x + 7y$.

Las restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} x + y \leq 500 \\ 4x + 8y \leq 3.200 \\ 3{,}75x + 2y \leq 1.500 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y \leq 500 \\ x + 2y \leq 800 \\ 15x + 8y \leq 6.000 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

① $\Rightarrow x + y \leq 500 \Rightarrow y \leq 500 - x \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	500
y	500	0

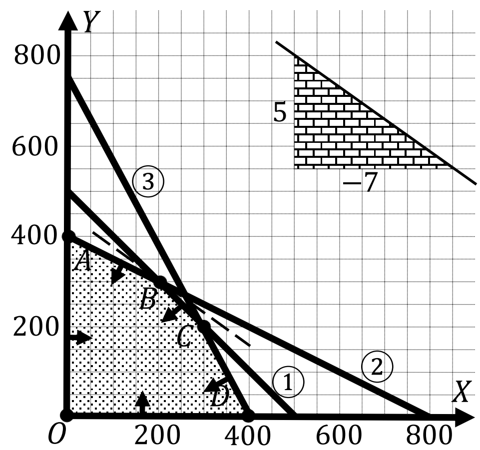
② $\Rightarrow x + 2y \leq 800 \Rightarrow y \leq \frac{800-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	800
y	400	0

③ $\Rightarrow 15x + 8y \leq 6.000 \Rightarrow y \leq \frac{6.000-15x}{8} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	400	0
y	0	750

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + 2y = 800 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 400).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 500 \\ x + 2y = 800 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x - y = -500 \\ x + 2y = 800 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 300;\ \ x = 200 \Rightarrow B(200, 300).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 500 \\ 15x + 8y = 6.000 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -8x - 8y = -4.000 \\ 15x + 8y = 6.000 \end{array}\right\} \Rightarrow 7x = 2000;\ \ x = \frac{2.000}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2.000}{7} + y = 500;\ \ 2.000 + 7y = 3.500;\ \ y = \frac{1.500}{7} \Rightarrow C\left(\frac{2.000}{7}, \frac{1.500}{7}\right).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 15x + 8y = 6.000 \end{array}\right\} \Rightarrow 15x = 6.000;\ \ x = 400 \Rightarrow D(400, 0).$$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 400) = 5 \cdot 0 + 7 \cdot 400 = 0 + 2.800 = 2.800.$$

$$B \Rightarrow f(200, 300) = 5 \cdot 200 + 7 \cdot 300 = 1.000 + 2.100 = 3.100.$$

$$C \Rightarrow f\left(\frac{2.000}{7}, \frac{1.500}{7}\right) = 5 \cdot \frac{2.000}{7} + 7 \cdot \frac{1.500}{7} = 1.428{,}57 + 1.500 = 2.928{,}57.$$

$$D \Rightarrow f(400, 0) = 5 \cdot 400 + 7 \cdot 0 = 2.000 + 0 = 2.000.$$

El valor máximo se produce en el punto $B(200, 300)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 5x + 7y = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{7}x \Rightarrow m = -\frac{5}{7}.$$

$\underline{\textit{Máximo beneficio}: \textit{obteniendo } \mathbf{200\ kg} \textit{ del producto A y } \mathbf{300} \textit{ del producto B}}.$

$\underline{\textit{El máximo beneficio es de } \mathbf{3.100} \textit{ euros}}.$

Ejercicio 3:

Dada la función $f(x) = \frac{3x-15}{4x^2+4x-120}$:

$a)$ ¿En qué puntos es discontinua?

$b)$ ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad? Justifica la respuesta.

$c)$ Calcular los límites laterales en $x = -6$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

Solución:

$a)$

Una función racional es continua en R, excepto para los valores reales de x que anulan el numerador.

$$4x^2 + 4x - 120 = 0;\ \ x^2 + x - 30 = 0;\ \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+20}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -6, x_2 = 5.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ \boldsymbol{R} - \{\boldsymbol{-6}, \boldsymbol{5}\}.}$

$b)$

Teniendo en cuenta las raíces del denominador la función $f(x)$ puede expresarse de la forma $f(x) = \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \frac{3(x-5)}{4(x+6)(x-5)}$.

Estudiando las discontinuidades encontradas en el apartado anterior:

$$x = -6 \Rightarrow \lim_{x \to -6} f(x) = \lim_{x \to -6} \frac{3(-6-5)}{4 \cdot (-6+6)(6-5)} = \frac{-33}{4 \cdot 0 \cdot 1} = \frac{-33}{0} = -\infty.$$

$\underline{Para\ x = -6 \Rightarrow discontinuidad\ inevitable\ de\ salto\ infinito.}$

$x = 5 \Rightarrow \lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{3(x-5)}{4(x+6)(x-5)} = \frac{3 \cdot (5-5)}{4 \cdot (5+6)(5-5)} = \frac{3 \cdot 0}{44 \cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ Indeterminación que puede eliminarse de la forma siguiente:

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{3(x-5)}{4(x+6)(x-5)} = \lim_{x \to 5} \frac{3}{4(x+6)} = \frac{3}{4 \cdot (5+6)} = \frac{3}{44}.$$

$$\underline{Para\ x = 5 \Rightarrow discontinuidad\ evitable}.$$

La función puede redefinirse de la forma:

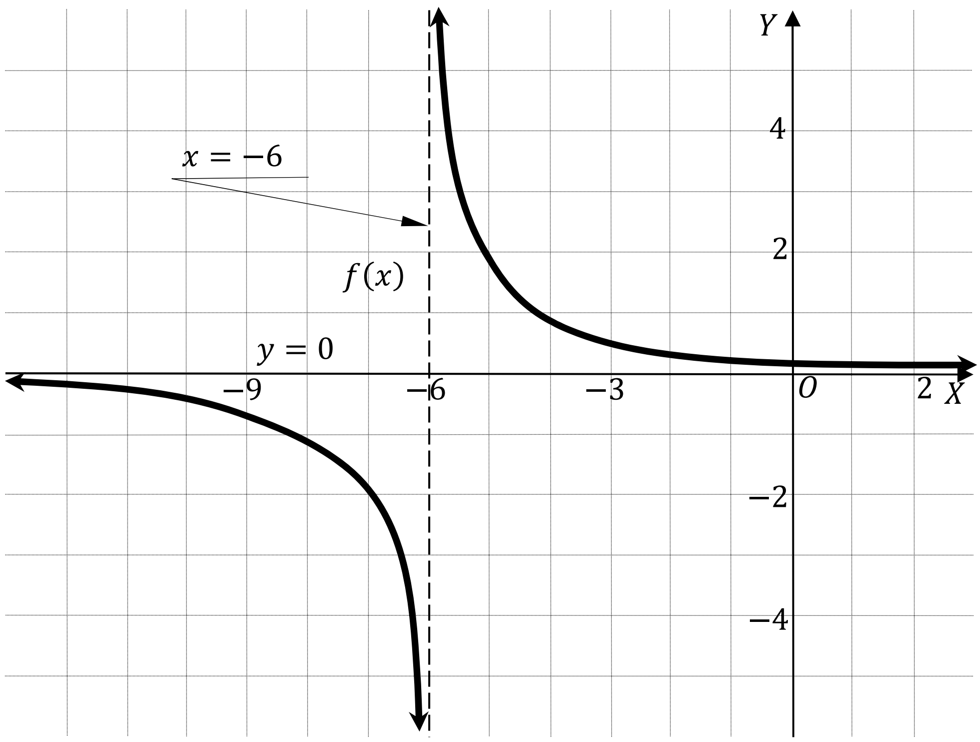
$$\underline{f(x) = \begin{cases} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120}\ si\ \begin{cases} x \neq -6 \\ x \neq 5 \end{cases} \\ \frac{3}{44}\ \ si\ \ x = 5 \end{cases}}.$$

$c)$

$$\lim_{x\to -6^-} f(x) = \lim_{x\to -6^-} \frac{3(x-5)}{4(x+6)(x-5)} = \lim_{x\to -6^-} \frac{3}{4(x+6)} = \frac{3}{4\cdot 0^-} = \frac{3}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to -6^+} f(x) = \lim_{x\to -6^+} \frac{3}{4(x+6)} = \frac{3}{4\cdot 0^+} = \frac{3}{0^+} = +\infty.$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = 0$, el eje de abscisas es asíntota horizontal de la función y de lo anterior puede hacerse la representación gráfica, aproximada, de la función, que es la que indica la figura adjunta.



Ejercicio 4:

Dada la función $f(x) = \frac{3x^2}{(x+4)^2}$, obtener:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY

b) Las asíntotas.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

d) Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

e) Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Solución:

a)

Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$(x+4)^2 = 0; \;\; x+4=0; \;\; x=-4 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow R - \{-4\}}}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2}{(x+4)^2} = 0; \;\; 3x^2 = 0; \;\; x^2 = 0; \; x = 0 \Rightarrow O(0,0).$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0^2}{(0+4)^2} = \frac{0}{16} = 0 \Rightarrow O(0,0).$$

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{(x+4)^2} = 3 \Rightarrow$$

$$\underline{La\ recta\ \boldsymbol{y=3}\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$(x+4)^2 = 0; \;\; x = -4 \Rightarrow$$

$$\underline{La\ recta\ \boldsymbol{x=-4}\ es\ asíntota\ vertical}.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales}.$$

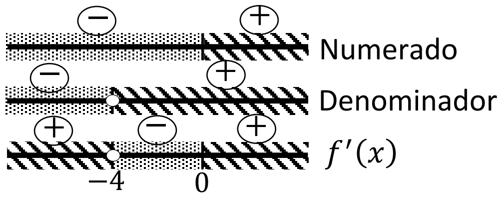
$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{6x\cdot(x+4)^2-3x^2\cdot[2\cdot(x+4)\cdot 1]}{(x+4)^4}=\frac{6x\cdot(x+4)-6x^2}{(x+4)^3}=\frac{6x^2+24x-6x^2}{(x+4)^3}=\frac{24x}{(x+4)^3}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{24x}{(x+4)^3}=0;\ 24x=0 \Rightarrow x=0.$$

De la observación de la figura adjunta se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:



$$\underline{Decrecimiento: f'(x)<0 \Rightarrow \boldsymbol{x\in(-4,0)}}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x)>0 \Rightarrow \boldsymbol{x\in(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)}}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x)=\frac{24\cdot(x+4)^3-24x\cdot[3\cdot(x+4)^2\cdot 1]}{(x+4)^6}=\frac{24\cdot(x+4)-72x}{(x+4)^4}=\frac{24x+96-72x}{(x+4)^4}=\frac{-48x+96}{(x+4)^4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{-48\cdot(x-2)}{(x+4)^4}.$$

$$f''(0)=\frac{-48\cdot(0-2)}{(0+4)^4}=\frac{96}{256}>0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x=0.$$

$$f(0)=0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mínimo: O(0,0)}}.$$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es

$d)$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$f''(x) = \frac{-48\cdot(x-2)}{(x+4)^4}$. Como el denominador de la segunda derivada es positivo para cualquier valor real del dominio de la función, la segunda derivada será positiva o negativa cuando lo sea su numerador.

$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow \boldsymbol{x\epsilon(2, +\infty)}.}$

$\underline{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow \boldsymbol{x\epsilon(-\infty, -4) \cup (-4, 2)}.}$

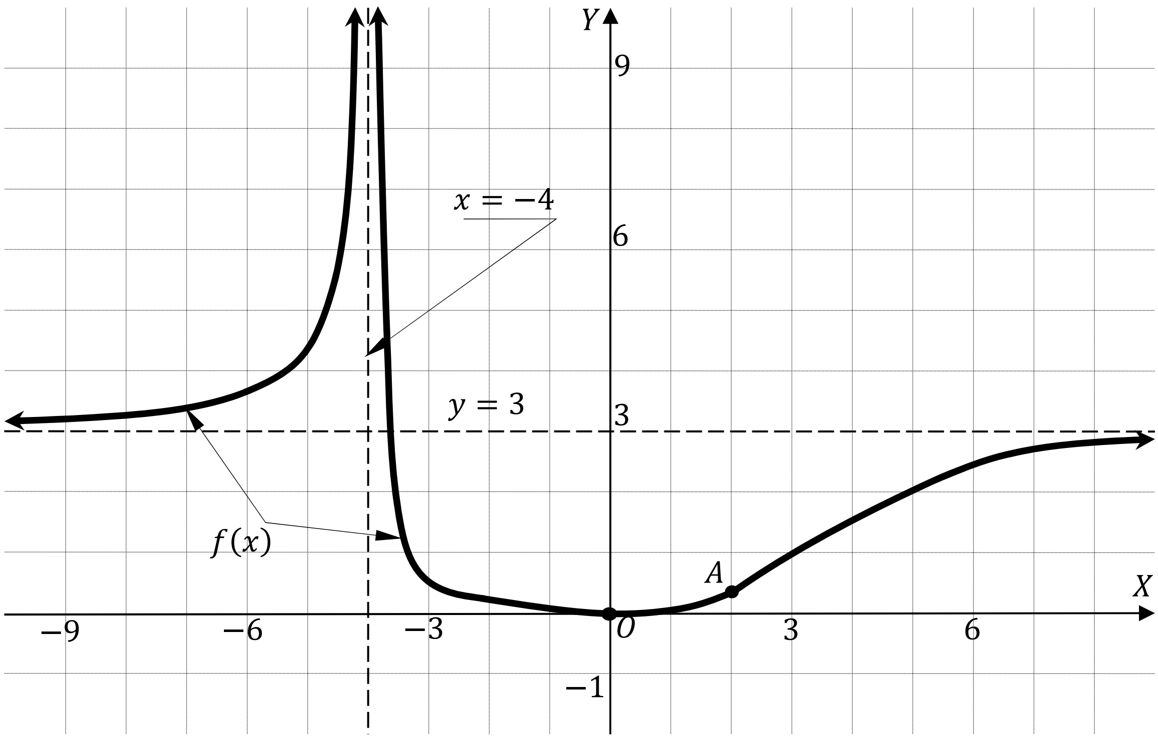
Una función tiene un punto de inflexión cuando pasa de ser cóncava a convexa o viceversa; es decir: cuando se anula su segunda derivada.

$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-48\cdot(x-2)}{(x+4)^4} = 0 \Rightarrow -48\cdot(x-2) = 0;\ \ x = 2.$

$$f(2) = \frac{3\cdot 2^2}{(2+4)^2} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$\underline{\boldsymbol{P.I.} \Rightarrow \boldsymbol{A\left(2, \frac{1}{3}\right)}.}$

$e)$ La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



Ejercicio 5:

Se realiza una encuesta a un grupo de 2.000 personas de diferentes edades para conocer sus hábitos de compra por Internet en el último mes. Los datos completos aparecen en la tabla siguiente:

	18 a 40 años	41 a 60 años	> 60 años	Total
Realiza compras	468	325	250	1.043
No realiza compras	257	207	493	957
Total	725	532	743	2.000

Elegida una persona al azar:

a) Calcular la probabilidad de que sea mayor de 60 años y haya realizado alguna compra por Internet en el último mes.

b) Calcular la probabilidad de que su edad esté comprendida entre 41 y 60 años.

c) Si sabemos que ha realizado alguna compra por Internet en el último mes, ¿cuál es la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 18 y 40 años?

Solución:

a)

$$P = \frac{250}{2.000} = \frac{125}{1.00} = \underline{\frac{1}{8} = 0{,}1250}.$$

b)

$$P = \frac{532}{2.000} = \frac{266}{1.000} = \underline{0{,}2660}.$$

c)

$$P = \frac{468}{1.043} = \underline{0{,}4487}.$$

****

Ejercicio 6:

El tiempo que los usuarios de una compañía de telefonía móvil deben esperar para que les atiendan en el Servicio de Atención al Cliente, sigue una distribución normal con desviación típica de 2 minutos. Una muestra aleatoria de 450 personas da como resultado un tiempo medio de espera de 14 minutos.

a) Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 90 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

Solución:

a)

Para un nivel de confianza del 93 % es:

$1-\alpha=0{,}93 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}93=0{,}07 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}035}=1{,}805.$

$(1-0{,}035=0{,}9650 \ \rightarrow z=1{,}805).$

Datos: $n=450;\ \ \overline{x}=14;\ \ \sigma=2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}805.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(14-1{,}805\cdot\frac{2}{\sqrt{450}};\ 14+1{,}805\cdot\frac{2}{\sqrt{450}}\right);$

$(14-1{,}805\cdot 0{,}0943;\ 14+1{,}805\cdot 0{,}0943);\ \ (14-0{,}1702;\ 14+0{,}1702).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{93\,\%}=(13{,}8298;\ 14{,}1702).}}$$

b)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha=0{,}90 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$

$(1-0{,}05=0{,}9500 \ \rightarrow z=1{,}645).$

El error del apartado anterior es $E=0{,}1702.$ $\qquad E=\frac{0{,}1702}{3}=0{,}0567$

Datos: $\sigma=2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645;\ \ E=0{,}0567.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}645 \cdot \frac{2}{0{,}0567}\right)^2 =$

$= (1{,}645 \cdot 35{,}2526)^2 = 58^2 = 3.364.$

$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de } \mathbf{3.364} \textit{ personas}.}$

****

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El estudiante realizará solo **tres ejercicios elegidos entre los seis de que consta el examen.**
2. Una vez elegido un ejercicio ha de hacerlo completo (todos sus apartados).
3. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada ejercicio y de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
6. Si se realizan más de tres ejercicios solo se corregirán los tres primeros, según el orden en el que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
7. **La calificación del examen será el resultado de la puntuación obtenida dividida entre 0,75.**

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Tres estudiantes de Economía, Cristina, Juan y Pedro, han preparado un trabajo de investigación que deben exponer en clase. Se repartieron las tareas de la siguiente forma: Cristina llevó a cabo la labor de recopilación de datos, en la que empleó un 40 % más que el tiempo que Juan necesitó para redactar el texto. Pedro desempeñó las tareas de revisión y de preparación de la exposición, siendo el tiempo dedicado a ello la mitad del empleado en total por Cristina y Juan.

El tiempo total empleado fue de 18 horas. ¿Cuánto dedicó cada alumno a la elaboración del trabajo?

A. [0,9 PUNTOS] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el tiempo empleado por cada estudiante.

B. [0,8 PUNTOS] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una tienda de material informático dispone de 96 lapiceros con memoria USB y 15 tabletas digitales, para organizar dos tipos de lotes. Un lote A tendrá 3 lapiceros y una tableta; un lote B tendrá 6 lapiceros y una tableta. El precio de venta de un lote A es de 70 euros y el de un lote B, 160 euros. Además, el número de lotes B debe ser como máximo la mitad de lotes A. ¿Cuántos lotes deben prepararse y venderse para obtener unos ingresos máximos? ¿A cuánto ascienden esos ingresos?

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Una agencia de viajes organiza una excursión para los empleados de una empresa. Eso le supone unos gastos fijos por viajero de 475 euros además de los 850 euros del alquiler del autocar. Con un grupo de 20 personas, cobra a cada viajero 525 euros, pero presenta la siguiente oferta a la empresa: por cada nuevo viajero inscrito, rebajará el precio del viaje en 1,25 euros. ¿Con cuántos viajeros consigue unos beneficios máximos? ¿Cuánto paga cada viajero?

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$

A. [0,25 PUNTOS] Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [0,5 PUNTOS] Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

C. [0,5 PUNTOS] Determinar sus intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

D. [0,25 PUNTOS] Dibujar la gráfica de $f(x)$ e indicar la región delimitada por dicha curva y la recta $y = x$.

E. [1 PUNTO] Calcular el área de la región anterior.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

El número de libros que los estudiantes de un instituto leen al año, sigue una distribución normal con desviación típica 1. Una muestra aleatoria de 125 alumnos da como resultado una media de 4 libros.

A. [1,25 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 94 % para la media.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El 23 % de los habitantes de una localidad son menores de 25 años. El 31 % tienen una edad comprendida entre los 26 y 60 años. El 46 % restante es mayor de 60 años. El ayuntamiento ha recibido la petición de instalación de un parque eólico en unos terrenos municipales. Entre la población más joven, el 68 % es partidario de la instalación; entre los habitantes entre 26 y 60 años, lo es el 53 %; y entre los mayores de 60 años, el 42 %.

Seleccionamos un habitante al azar:

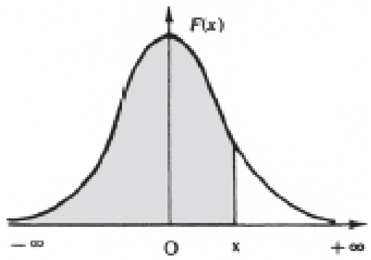
A. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea favorable a la instalación del parque eólico?

B. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea favorable y mayor de 60 años?

C. [1 PUNTO] Si no es favorable, ¿cuál es la probabilidad de que sea menor de 25 años?

Distribución normal

$$F(x)=p(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^{2}}\,dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	:9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

Tres estudiantes de Economía, Cristina, Juan y Pedro, han preparado un trabajo de investigación que deben exponer en clase. Se repartieron las tareas de la siguiente forma: Cristina llevó a cabo la labor de recopilación de datos, en la que empleó un 40 % más que el tiempo que Juan necesitó para redactar el texto. Pedro desempeñó las tareas de revisión y de preparación de la exposición, siendo el tiempo dedicado a ello la mitad del empleado en total por Cristina y Juan. El tiempo total empleado fue de 18 horas. ¿Cuánto dedicó cada alumno a la elaboración del trabajo?

$a)$ Plantear el sistema de ecuaciones que permita calcular el tiempo empleado por cada alumno.

$b)$ Analizar la compatibilidad de dicho sistema. $c)$ Resolverlo.

Solución:

$a)$

Sean x, y, z los tiempos empleados en la realización del trabajo por Cristina, Juan y Pedro, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x = 1{,}4y \\ z = \frac{x+y}{2} \\ x+y+z = 18 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 5x = 7y \\ 2z = x+y \\ x+y+z = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\left.\begin{array}{r} 5x - 7y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ x+y+z = 18 \end{array}\right\}}.$$

$b)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 18 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 14 + 10 + 7 = 36 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{o}\ de\ incógnitas.$$

$$\underline{Según\ el\ teorema\ de\ Rouché - Fröbenios \Rightarrow S.C.D.}$$

$c)$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 18 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{36} = \frac{18 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{36} = \frac{1 \cdot 14}{2} = 7.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 18 & 1 \end{vmatrix}}{36} = \frac{-18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{36} = \frac{-1 \cdot (-10)}{2} = 5.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 18 \end{vmatrix}}{36} = \frac{18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{36} = \frac{5+7}{2} = 6.$$

$\underline{Cristina\ trabajó\ 7\ horas; Juan, 5\ horas\ y\ Pedro, 6\ horas}.$

****

Ejercicio 2:

Una tienda de material informático dispone de 96 lapiceros cono memoria USB y 15 tabletas digitales, para organizar dos tipos de lotes. Un lote A tendrá 3 lapiceros y una tableta; un lote B tendrá 6 lapiceros y una tableta. El precio de venda de un lote A es de 70 euros y el de un lote B, 160 euros. Además, el número de lotes B debe ser como máximo la mitad de lotes A. ¿Cuántos lotes deben prepararse y venderse para obtener unos ingresos máximos? ¿A cuánto ascienden esos ingresos?

Solución:

Conjuntos de restricciones ordenadas: $\left.\begin{array}{r} 3x+6y\le 96 \\ x+y\le 15 \\ y\le \frac{x}{2} \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2y\le 32 \\ x+y\le 15 \\ x-2y\ge 0 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow x+2y\le 32 \Rightarrow y\le \frac{32-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	32
y	16	0

② $\Rightarrow x+y\le 15 \Rightarrow y\le 15-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

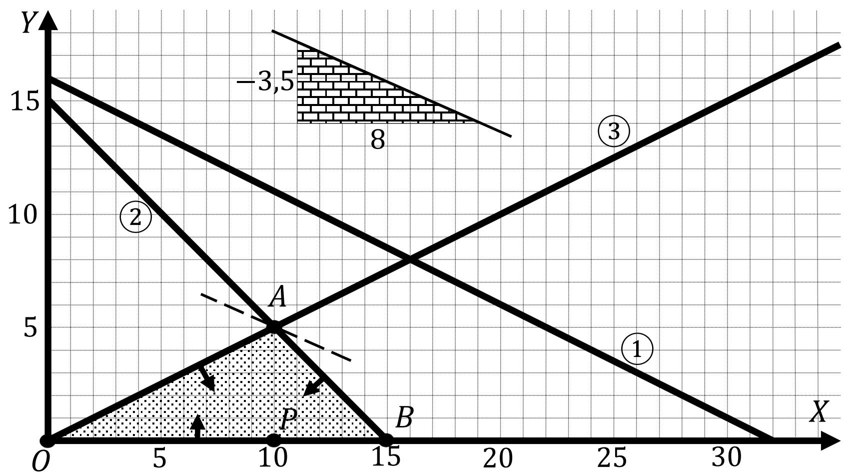
x	0	15
y	15	0

③ $\Rightarrow x-2y\ge 0 \Rightarrow y\le \frac{x}{2} \Rightarrow P(10,0)\rightarrow Si.$

x	0	20
y	0	10

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=15 \\ x-2y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y=15 \\ -x+2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=15;\ \ y=5;\ \ x=10 \Rightarrow A(10,5).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+y=15 \end{array}\right\} \Rightarrow x=15 \Rightarrow B(15,0).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=70x+160y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(10,5) = 70 \cdot 10 + 160 \cdot 5 = 700 + 800 = 1\,500.$

$B \Rightarrow f(15,0) = 70 \cdot 15 + 160 \cdot 0 = 1.050 + 0 = 1\,050.$

El máximo se produce en el punto $A(10,5)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 70x + 160y = 0 \Rightarrow y = -\frac{70}{160}x = -\frac{7}{16}x \Rightarrow m = -\frac{3,5}{8}.$

$\underline{El\ \boldsymbol{máximo}\ se\ produce\ fabricando\ \mathbf{10}\ \boldsymbol{lotes\ A\ y}\ \mathbf{5}\ \boldsymbol{lotes\ B}}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ \mathbf{1\,500}\ \boldsymbol{euros}}.$

****

Ejercicio 3:

Una agencia de viajes organiza una excursión para los empleados de una empresa. Eso le supone unos gastos fijos por viajero de 475 euros además de los 850 euros del alquiler del autocar. Con un grupo de 20 personas, cobra a cada viajero 525 euros, pero presenta la siguiente oferta a la empresa: por cada nuevo viajero inscrito, rebajará el precio del viaje en 1.25 euros. ¿Con cuántos viajeros consigue unos beneficios máximos? ¿Cuánto paga cada viajero?

Solución:

Sean x el número de nuevos viajeros inscritos a partir de los 20 del grupo inicial.

El número de viajeros es $(20 + x)$.

El gasto total es el siguiente:

$G(x) = 475 \cdot (20 + x) + 850 = 9.500 + 475x + 850 = 475x + 10\,350.$

El ingreso total es el siguiente:

$I(x) = (20 + x)(525 - 1{,}25 \cdot x) = 10\,500 - 25x + 525x - 1.25x^2 =$
$= -1.25x^2 + 500x + 10\,500.$

El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los gastos:

$B(x) = I(x) - G(x) = -1.25x^2 + 500x + 10\,500 - (475x + 10\,350) =$
$= -1.25x^2 + 500x + 10\,500 - 475x - 10\,350 \Rightarrow B(x) = -1.25x^2 + 25x + 150.$

Para que el beneficio sea máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$B'(x) = -2.5x + 25 = 0;\ 25x = 250 \Rightarrow x = 10.$

Para justificar que se trata de un máximo basta tener en cuenta que la función beneficios es una función cuadrática cóncava (∩), por ser negativo el coeficiente de x^2, por lo cual la función tiene un máximo para $x = 10$.

$\underline{Se\ consigue\ el\ máximo\ beneficio\ con\ \mathbf{30\ viajeros}}.$

El máximo beneficio es el siguiente:

$B(10) = -1.25 \cdot 10^2 + 25 \cdot 10 + 150 = 125 + 250 + 150 = 525.$

$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ \mathbf{525\ euros}}.$

****

Ejercicio 4:

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$:

$a)$ Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.

$b)$ Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

$c)$ Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

$d)$ Dibujar la gráfica de $f(x)$ e indicar la región delimitada por dicha curva y la recta $y = x$.

$e)$ Calcular el área de la región anterior.

Solución:

$a)$

El dominio de la función es R por ser polinómica.

Conviene tener en cuenta que, por ser $f(-x) = -f(x)$, la función es simétrica con respecto al origen.

$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0;\ \ x^3 - 3x = 0;\ \ x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\sqrt{3} \\ x_3 = \sqrt{3} \end{cases}$. Los puntos de corte son:

$$\underline{\boldsymbol{A(-\sqrt{3}, 0), O(0, 0)\ y\ B(\sqrt{3}, 0)}}.$$

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \underline{O(0, 0)}.$

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 3x^2 - 3.\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0;\ x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow \boldsymbol{x\epsilon(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow \boldsymbol{x\epsilon(-1, 1)}}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = 6x.$

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: P(-1, 2)}.$

Por simetría con respecto al origen: $\underline{Mínimo\ relativo: Q(1, 0)}.$

Para $x = 0 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow Ni\ máx.\,ni\ mín.$ (para punto de inflexión).

$\underline{Máximo\ relativo: P(-1, 2)}.\ \underline{Mínimo\ relativo: Q(1, 0)}.$

$c)$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$f''(x) = 6x.$

$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 0)}.$

$\underline{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(0, +\infty)}.$

Una función tiene un punto de inflexión cuando pasa de ser cóncava a convexa o viceversa; es decir: cuando se anula su segunda derivada.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0.\ f(0) = 0 \Rightarrow$

$\underline{P.I. \Rightarrow O(0, 0)}.$

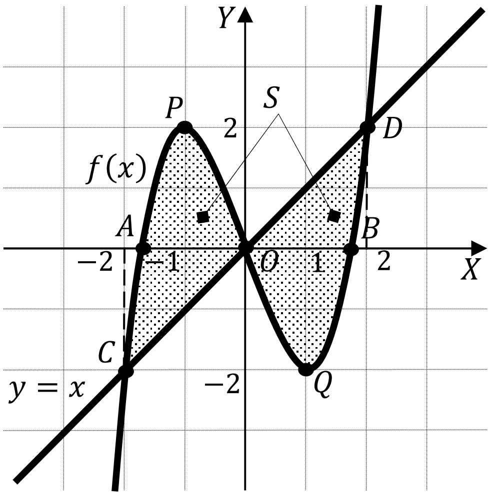
$d)$

Los puntos de corte de la función $f(x)$ y la recta $y = x$ se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$y = f(x) \Rightarrow x = x^3 - 3x;\ \ x^3 - 4x = 0;$

$$x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0, 0) \\ x_2 = -2 \rightarrow C(-2, -2). \\ x_3 = 2 \rightarrow D(2, 2) \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.



$e)$

Teniendo en cuenta la simetría de la función y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^2 [y - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 [x - (x^3 - 3x)] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^2 (-x^3 + 4x) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = 2 \cdot \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_0^2 = \left[-\frac{x^4}{2} + 4x^2\right]_0^2 =$$

$$= \left(-\frac{2^4}{2} + 4 \cdot 2^2\right) - 0 = -\frac{16}{2} + 16 = 8.$$

$\underline{\boldsymbol{S = 8\ u^2}}.$

****

Ejercicio 5:

El número de libros que los estudiantes de un instituto leen al año, sigue una distribución normal con desviación típica 1. Una muestra aleatoria de 125 alumnos da como resultado una media de 4 libros.

a) Obtener el intervalo de confianza del 94 % para la media.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

Solución:

a)

Para un nivel de confianza del 94 % es:

$1-\alpha=0.94 \ \rightarrow \ \alpha=1-0.94=0.06 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.03}=1.88.$

$(1-0.03=0.9700 \ \rightarrow z=1.88).$

Datos: $n=125; \ \ \overline{x}=4; \ \ \sigma=1; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1.88.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma \ y \ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(4-1.88\cdot\frac{1}{\sqrt{125}}, \ 4+1.88\cdot\frac{1}{\sqrt{125}}\right); \ \ (4-1.88\cdot 0.0894, \ 4+1.88\cdot 0.0894);$

$(4-0.1682, \ 4+0.1682)$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{94\,\%}=(3.8318, 4.1682).}}$$

b)

Para un nivel de confianza del 97 % es:

$1-\alpha=0.97 \ \rightarrow \ \alpha=1-0.97=0.03 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.015}=2.17.$

$(1-0.015=0.9850 \ \rightarrow z=2.17).$

$E=\frac{4.1682-3.8318}{2\cdot 4}=\frac{0.3364}{8}=0.042.$

Datos: $\sigma=1; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2.17; \ \ E=0.042.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2.17\cdot\frac{1}{0.042}\right)^2=$

$=(2.17\cdot 237\,812)^2=516\,052^2=2\,663.10.$

$$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de } \boldsymbol{2\,664 \ alumnos}}$$

****

Ejercicio 6:

El 23% de los habitantes de una localidad son menores de 25 años. El 31 % tienen una edad comprendida entre los 26 y los 60 años. El 46 % restante es mayor de 60 años. El ayuntamiento ha recibido la petición de instalación de un parque eólico en unos terrenos municipales. Entre la población más joven, el 68 % es partidario de la instalación; entre los habitantes entre 26 y 60 años, lo es el 53 %; y entre los mayores de 60 años, el 42 %. Seleccionamos un habitante al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea favorable a la instalación del parque eólico?

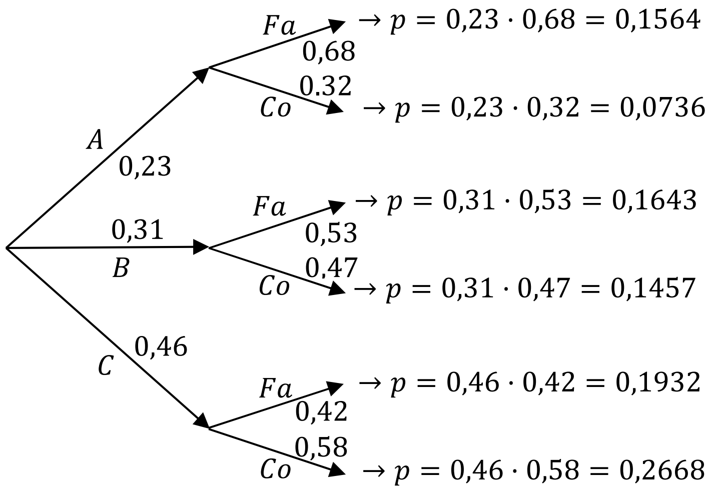
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea favorable y mayor de 60 años?

c) Si no es favorable, ¿cuál es la probabilidad de que sea menor de 25 años?

Solución:

Para facilitar la construcción del diagrama del árbol llamaremos:

$A \rightarrow Menores\ de\ 25;\ \ B \rightarrow Entre\ 26\ y\ 60;\ \ C \rightarrow Mayores\ de\ 60.$



a)

$$P = P(Fa) = P(A \cap Fa) + P(B \cap Fa) + P(C \cap Fa) =$$

$$= P(A) \cdot P(Fa/A) + P(B) \cdot P(Fa/B) + P(C) \cdot P(Fa/C) =$$

$$= 0.23 \cdot 0.68 + 0.31 \cdot 0.53 + 0.46 \cdot 0.42 = 0.1564 + 0.1643 + 0.1932 = \underline{0.5139}.$$

$$\boldsymbol{P(Fa) = \underline{0.5139}}$$

b)

$$P = P(C \cap Co) = P(C) \cdot P(Co/C) = 0.46 \cdot 0.58 = \underline{0.2668}.$$

$$\boldsymbol{P(C \cap Co) = \underline{0.2668}.}$$

c) $$P = P(A/Co) = \frac{P(A \cap Co)}{P(Co)} = \frac{P(A) \cdot P(Co/A)}{1 - P(Fa)} = \frac{0.23 \cdot 0.32}{1 - 0.5139} = \frac{0.0736}{0.4861} = \underline{0.1514}.$$

$$\boldsymbol{P(A/Co) = \underline{0.1514}.}$$

****

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

SECCIÓN 1, (3 puntos)

Bloque 1:

1. *En el siguiente problema de programación lineal maximiza la función* $f(x,y) = 12x - 2y$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$$x \geq y$$
$$x + y \geq 0$$
$$x \leq 3$$

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 puntos)

c) Indica el máximo del problema dado y su valor. (0.25 puntos)

2. *En un examen final de historia al que se presentan 120 alumnos se deja elegir entre 3 opciones (A, B o C). El número de personas que elige la opción A es el triple de número que resulta al sumar las opciones B y C. Hay el doble de personas que realizan la opción C que las que escogen B.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos alumnos eligen cada opción. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

Bloque 2:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+3+t & si\ x \leq 1 \\ (x-3)^2+t & si\ x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ *es continua en* $x = 1$*? (0.5 puntos)*

b) Para $t = 0$*, calcula los extremos relativos de la función* $f(x)$ *en el intervalo* $(1, +\infty)$*. (0.5 puntos)*

c) Para $t = 0$*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x)$ *en* $(1, +\infty)$*. (0.5 puntos)*

2. *La función* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ *tiene un punto de inflexión en* $(-1, 6)$ *y en el punto de abscisa* $x = -2$ *la pendiente de la recta tangente es* -4*. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros* a, b *y* c*. (1.5 puntos)*

SECCIÓN 2, (3.5 puntos)

Bloque 1:

3. *En un municipio el 5 % de las personas está en un ERE. De las personas que están en un ERE, el 40 % pertenece al sector turístico. Del resto de las personas del municipio, se sabe que el 10 % de ellos pertenece al sector turístico.*

a) Calcula la probabilidad de que elegida una persona al azar del municipio trabaje en el sector turístico. (0.75 puntos)

b) Sabiendo que una persona pertenece al sector turístico, ¿cuál es la probabilidad de que esté en un ERE? (0.75 puntos)

4. *El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ=20 minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 puntos)

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea μ = 1.3 horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} -(x-t)^2 & si\ x < 0 \\ -2 & si\ x = 0 \\ x^2 - 2 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = 0. (0.5 puntos)

b) Para t = -1, representa gráficamente la función f(x). (1 punto)

4. *Se localiza un compuesto nocivo en un río obteniéndose que su proporción durante cinco días consecutivos de análisis de muestras sigue la función:* $N(x) = \frac{1}{100}(-4x^4 + 128x^2 + 54)$ *con* x *= días y* $(1 \leq x \leq 5)$.

a) ¿Cuál es la proporción el tercer día ? (0.25 puntos)

b) Determina que día se obtiene el máximo y que día se obtiene el mínimo. (1 punto)

c) ¿A qué valor ascienden ambos? (0.75 puntos)

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo
www.apuntesmareaverde.org.es

SECCIÓN 3, (3.5 puntos)

Bloque 1:

5. *En una clase de un ciclo formativo de formación profesional hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.*

a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 puntos)

b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Toledo? (0.75 puntos)

6. *Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar de 10 latas de refresco de cola y ha resultado ser: 70, 75, 85, 100, 60, 80, 120, 95, 65 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos de una lata de refresco de cola se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para el contenido medio de azúcar en una lata de refresco de cola. (1 punto)

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 90 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2:

5. *Se realiza una encuesta a los habitantes de un pueblo (con respuestas SI, NO o NO SABE/NO CONTESTA) sobre la necesidad de construir otra piscina cubierta. Se pregunta a las 600 personas mayores de edad que viven en el pueblo y los que dicen NO son la mitad de los que NO SABE/NO CONTESTA. Por estudios paralelos de fiabilidad se sabe que el 30 % del total de los que contestan SI o NO, mienten, y el total de estos últimos son 135 personas:*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar qué cantidad de personas eligen cada respuesta. (1.5 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

6. *a) Dadas las matrices* $M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $N = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *comprueba que* $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$. *(1 punto)*

b) Resuelve la ecuación $M \cdot X = N$ *(0.5 puntos)*

RESPUESTAS

SECCIÓN 1

Bloque 1:

1. *En el siguiente problema de programación lineal maximiza la función* $f(x, y) = 12x - 2y$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$x \geq y$
$x + y \geq 0$
$x \leq 3$

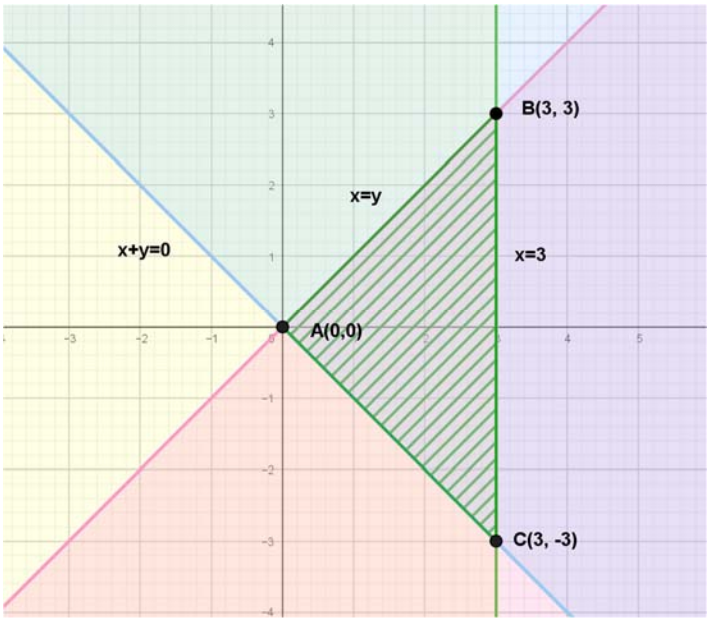
a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 puntos)

c) Indica el máximo del problema dado y su valor. (0.25 puntos)

RESPUESTA

a)



a) Resolvemos los sistemas formados por las ecuaciones de las rectas

$\begin{cases} x + y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ obtenemos $C(3, -3)$ $\begin{cases} x + y = 0 \\ x = y \end{cases}$ obtenemos $A(0, 0)$ $\begin{cases} x = y \\ x = 3 \end{cases}$ obtenemos $C(3, -3)$

Los vértices son $A(0, 0)$, $B(3, 3)$ y $C(3, -3)$

b) Sustituimos los vértices en la función $f(x, y) = 12x - 2y$

A, $f(0, 0) = 12 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$ B, $f(3, 3) = 12 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 30$ C, $f(3, -3) = 12 \cdot 3 - 2 \cdot (-3) = 42$

Máximo se alcanza en $C(3, -3)$ con valor 42

2. *En un examen final de historia al que se presentan 120 alumnos se deja elegir entre 3 opciones (A, B o C). El número de personas que elige la opción A es el triple de número que resulta al sumar las opciones B y C. Hay el doble de personas que realizan la opción C que las que escogen B.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos alumnos eligen cada opción. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

RESPUESTA

Sea x el número de personas que eligen opción A, y el número que eligen B, z el número que eligen C.

a)

Escribimos el sistema $\begin{cases} x+y+z=120 \\ x=3(y+z) \\ z=2y \end{cases}$ operando y ordenando las ecuaciones

b)

$\begin{cases} x+y+z=120 \\ x-3y-3z=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ Calculamos E'$_2$ = –E$_1$ + E$_2$ obtenemos

$\begin{cases} x+y+z=120 \\ -4y-4z=-120 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ Calculamos E''$_3$ = E'$_2$ + 2E'$_3$ obtenemos

$\begin{cases} x+y+z=120 \\ -4y-4z=-120 \\ -6z=-120 \end{cases}$ de donde z = 20, y = 10, x = 90

90 alumnos eligen la opción A, 10 la opción B y 20 la opción C

Bloque 2:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+3+t & si\ x \leq 1 \\ (x-3)^2+t & si\ x > 1 \end{cases}$

   a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)

   b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

   c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

RESPUESTA

a) Para que f sea continua en $x = 1$, los límites laterales han de ser iguales, los calculamos,

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} [(x-3)^2 + t] = 4 + t$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+3+t) = 4 + t$, luego para cualquier valor de t, f es continua en 1.

La función es continua en x = 1 para cualquier valor de t.

b) Para $t = 0$ y $x > 1$, la función es $f(x) = (x-3)^2$, derivamos

$f'(x) = 2(x-3)$ igualamos a 0, $2(x-3) = 0$ obtenemos $x = 3$

derivamos de nuevo $f''(x) = 2$ como es mayor que 0, en $x = 3$ hay un mínimo relativo

Para t = 0, en x = 3 hay un mínimo relativo.

c) Los intervalos son (1, 3) y (3, ∞), tomamos valores de cada uno de los intervalos y sustituimos en la primera derivada

$f'(2) = 2\cdot(2-3) = -2$ luego la función es decreciente

$f'(5) = 2\cdot(5-3) = 4$ luego la función es creciente

En (1, 3), f es decreciente y en (3, ∞) es creciente.

2. *La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tiene un punto de inflexión en $(-1, 6)$ y en el punto de abscisa $x = -2$ la pendiente de la recta tangente es -4. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 puntos)*

RESPUESTA

Si f tiene un punto de inflexión en (–1, 6), $f(-1) = 6$ y además $f''(-1) = 0$

Si la pendiente de la recta tangente en $x = -2$ es – 4 entonces $f'(-2) = -4$

Calculamos las derivadas

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ de donde $f'(-2) = 3\cdot a\cdot(-2)^2 + 2\cdot b\cdot(-2) + c = -4$

$f''(x) = 6ax + 2b$ de donde $f''(-1) = 6\cdot a\cdot(-1) + 2b = 0$

y $f(-1) = 6$ de donde $a\cdot(-1) + b\cdot 1 + c(-1) = 6$, tenemos el sistema

$$\begin{cases} -a + b - c = 6 \\ 12a - 4b + c = -4 \\ -6a + 2b \quad = 0 \end{cases}$$ Calculamos $E'_2 = 12E_1 + E_2$ y $E'_3 = -6E_1 + E_3$ obtenemos

$$\begin{cases} -a + b - c \quad = 6 \\ 8b - 11c = 68 \\ -4b + 6c = -36 \end{cases}$$ Calculamos $E''_3 = E'_2 + 2E'_3$ obtenemos

$$\begin{cases} -a + b - c = 6 \\ 8b - 11c = 68 \\ c = -4 \end{cases}$$ de donde, $c = -4$, $b = 3$ y $a = 1$

$a = 1$, $b = 3$, $c = -4$; $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$

SECCIÓN 2

Bloque 1:

3. *En un municipio el 5 % de las personas está en un ERE. De las personas que están en un ERE, el 40 % pertenece al sector turístico. Del resto de las personas del municipio, se sabe que el 10 % de ellos pertenece al sector turístico.*

a) Calcula la probabilidad de que elegida una persona al azar del municipio trabaje en el sector turístico. (0.75 puntos)

b) Sabiendo que una persona pertenece al sector turístico, ¿cuál es la probabilidad de que esté en un ERE? (0.75 puntos)

RESPUESTA

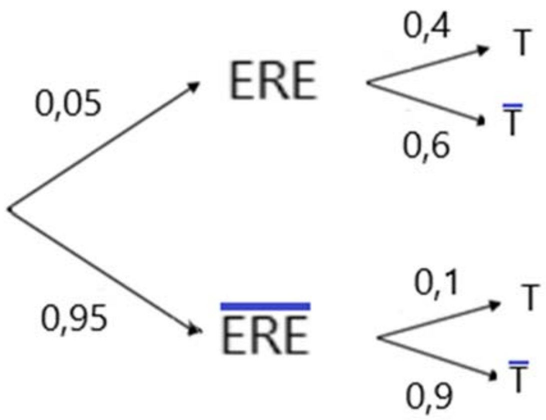
Escribimos las leyendas y construimos el diagrama de árbol:

ERE (E): estar en ERE

$\overline{ERE}$ ($\bar{E}$): no estar en ERE

T: trabajar en sector turístico

$\bar{T}$: no trabajar en sector turístico



a) Por el teorema de la probabilidad total

$P(T) = P(E\cap T) + P(\bar{E}\cap T) = P(E)\cdot P(T/E) + P(\bar{E})\cdot P(T/\bar{E})$ = 0.05 · 0.4 + 0.95 · 0.1 = 0.115

P(trabajar en sector turístico) =0.115

b) Por el teorema de Bayes

$$P(E/T) = \frac{P(E\cap T)}{P(T)} = \frac{P(E)\cdot P(T/E)}{P(T)} = \frac{0.05\cdot 0.4}{0.115} = \frac{0.020}{0.115} = 0.1739$$

P(estar en ERE cuando es del sector turístico) = 0.1739

4. El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ=20 minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 puntos)

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea μ = 1.3 horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

donde X es la variable "tiempo de uso de móvil por día", X sigue una N(μ, 20)

Nos dan los siguientes datos: $\sigma = 20\ min$ $\quad 1-\alpha = 0.95,$ $\quad n = 36,$ $\bar{x} = 2h = 120\ min.$

$1-\alpha = 0.95,$ $\alpha = 0.05$, $\frac{\propto}{2} = 0.025,$ $1-\frac{\propto}{2} = 0.975,$ buscamos en la tabla: $Z_{0.975} = 1.96.$

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(120 - 1.96\frac{20}{\sqrt{36}},\quad 120 + 1.96\frac{20}{\sqrt{36}}\right) = (\,113.4667, 126.53\,)$$

Intervalo de confianza: (113.4667, 126.53)

b) La media poblacional de 1.3h = 78 minutos, que no está en el intervalo calculado, por lo que no se puede admitir que esa sea la media poblacional con un nivel de confianza del 95 %

Si se quiere que el intervalo de confianza tenga menor amplitud se debe aumentar el tamaño de la muestra o disminuir el nivel de confianza; y al contrario para aumentar la amplitud

No se puede admitir que con un nivel de confianza del 95 % esa sea la media poblacional

c) El error máximo admisible viene dado por: $E\ = Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Por tanto, para n = 100,

$$1-\alpha = 0.9464, \qquad \alpha = 0.0536\ , \qquad \frac{\propto}{2} = 0.0268, \qquad 1-\frac{\propto}{2} = 0.9732,$$

buscamos en la tabla: $Z_{0.9732} = 1.93.$ Sustituyendo en la fórmula

$$E = 1.93 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 1.93 \cdot 2 = 3.86$$

El error máximo admisible es de 3.86 minutos

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} -(x-t)^2 & si\ x < 0 \\ -2 & si\ x = 0 \\ x^2 - 2 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = 0. (0.5 puntos)

b) Para t = -1, representa gráficamente la función f(x). (1 punto)

RESPUESTA

a) $f(x) = \begin{cases} -(x-t)^2 & si\ x < 0 \\ -2 & si\ x = 0 \\ x^2 - 2 & x > 0 \end{cases}$ para que f sea continua en x = 0 los límites laterales en x = 0 han de coincidir y su valor ser igual a $f(0)$.

$f(0) = -2$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} [-(x-t)^2] = -t^2$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 - 2) = -2$, igualamos, $-t^2 = -2$, luego $t = \sqrt{2}$ y $t = -\sqrt{2}$.

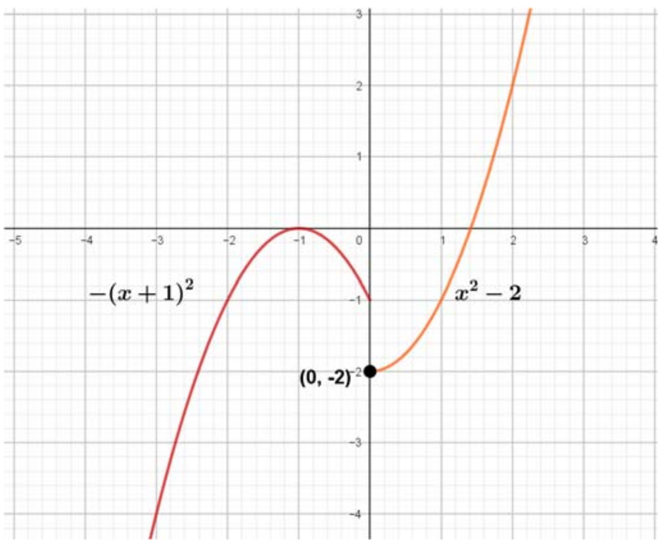
f es continua en x = 0 cuando $t = \sqrt{2}$ o $t = -\sqrt{2}$

b) Para $t = -1$ la función es:

$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 & si\ x < 0 \\ -2 & si\ x = 0 \\ x^2 - 2 & x > 0 \end{cases}$ Para $x < 0$ se trata de una parábola abierta hacia abajo $-x^2 - 2x - 1$ con vértice en $x = -2/-2 = 1$, (1, –4), corte con el eje Y en (0, –1) y el eje X en (–1, 0)

Para $x > 0$ se trata de una parábola abierta hacia arriba con vértice en $x = 0$, (0, –2), corte con el eje Y en (0, –2) y el eje X en $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

Para $x = 0$, $f(0) = -2$.



4. *Se localiza un compuesto nocivo en un río obteniéndose que su proporción durante cinco días consecutivos de análisis de muestras sigue la función:* $N(x) = \frac{1}{100}(-4x^4 + 128x^2 + 54)$ *con* $x =$ *días y* $(1 \le x \le 5)$.

a) ¿Cuál es la proporción el tercer día ? (0.25 puntos)

b) Determina que día se obtiene el máximo y que día se obtiene el mínimo. (1 punto)

c) ¿A qué valor ascienden ambos? (0.75 puntos)

RESPUESTA

a) Calculamos $N(3) = \frac{1}{100}(-4 \cdot 3^4 + 128 \cdot 3^2 + 54) = 8.82$

La proporción el tercer día es de 8.82

b) Calculamos la derivada, $\boldsymbol{N'(x) = \frac{1}{100}(-16x^3 + 256x)}$, resolvemos $\boldsymbol{\frac{1}{100}(-16x^3 + 256x) = 0}$

Nos dicen que $1 \le x \le 5$. Obtenemos $x = 0$, $x = 4$ y $x = -4$, descartamos $x = 0$ y $x = -4$ por no estar en el dominio.

Calculamos la segunda derivada:

$N''(x) = \frac{1}{100}(-48x^2 + 256)$ y sustituimos los valores obtenidos:

$N''(4) = \frac{1}{100}(-48 \cdot 4^2 + 256) = -786 < 0$ luego en $x = 4$ hay un máximo

Máxima proporción el día 4 y mínima proporción el día 0

c) Calculamos los valores del máximo, y los valores en los extremos del intervalo:

$$N(1) = \frac{1}{100}(-4 \cdot 1^4 + 128 \cdot 1^2 + 54) = \frac{1}{100}(-4 + 128 + 54) = 1.78$$

$$N(4) = \frac{1}{100}(-4 \cdot 4^4 + 128 \cdot 4^2 + 54) = 10.78$$

$$N(5) = \frac{1}{100}(-4 \cdot 5^4 + 128 \cdot 5^2 + 54) = \frac{1}{100}(-2500 + 3200 + 54) = 7.54$$

El primer día, (día 1) la proporción es mínima e igual a 1.78

El cuarto día (día 4) la proporción es máxima e igual a 10.78

SECCIÓN 3

Bloque 1:

5. *En una clase de un ciclo formativo de formación profesional hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.*

a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 puntos)

b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Toledo? (0.75 puntos)

RESPUESTA

Sean los sucesos, A ser de Albacete, C ser de Cuenca y T ser de Toledo.

Según los datos, $P(A) = \frac{14}{27} = \frac{2}{3}$, $P(C) = \frac{5}{27}$, $P(T) = \frac{8}{27}$

a) Si no le tocan a alumnos que no son de Albacete le tocan a alumnos de Cuenca y/o Toledo que suman 13, luego $P(\bar{A}) = \frac{13}{27}$

Nos piden luego $P(\bar{A} \cap \bar{A}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = \frac{13}{27} \cdot \frac{13}{27} = \frac{169}{729} = 0.2318$ es el producto porque al poder tocarle la entrada al mismo alumno los sucesos son independientes.

La probabilidad de que le toquen las dos entradas a alumnos que no son de Albacete es 0.2318

b) En este caso como cuando le toca a un alumno ya no participa, los sucesos son dependientes.

Nos piden:

$$P(T \cap T \cap T \cap T \cap T) = P(T) \cdot P(T/T) \cdot P(T/T \cap T) \cdot P(T/T \cap T \cap T) \cdot P(T/T \cap T \cap T \cap T) =$$

$$= \frac{8}{27} \cdot \frac{7}{26} \cdot \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{4}{23} = 0.0007$$

La probabilidad de que le toquen las cinco entradas a alumnos de Toledo es 0.0007

6. Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar de 10 latas de refresco de cola y ha resultado ser: 70, 75, 85, 100, 60, 80, 120, 95, 65 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos de una lata de refresco de cola se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para el contenido medio de azúcar en una lata de refresco de cola. (1 punto)

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 90 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ donde X es el contenido en azúcar de una lata de refresco de cola

Nos dan los siguientes datos:

$\sigma = 10, \quad 1 - \alpha = 0.97\ , \quad \alpha = 0.03\,, \ \frac{\alpha}{2} = 0.015\ , \ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \qquad n = 10.$

Calculamos la media muestral:

$$\bar{x} = \frac{70+75+85+100+60+80+120+95+65+90}{10} = 84.$$

Buscamos en la tabla: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.985} = 2.17.$

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(84 - 2.17\frac{10}{\sqrt{10}}, \qquad 84 + 2.17\frac{10}{\sqrt{10}}\right) =$$

$= (77.1379, 90.8621)$

Intervalo de confianza: (77.1379, 90.8621)

b) Si se quiere que el intervalo de confianza tenga menor amplitud se debe aumentar el tamaño de la muestra, lo que haría que la fracción fuera más pequeña y por tanto la cantidad que se suma y resta a la media sería menor o disminuir el nivel de confianza pues esto haría que el valor $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ fuera más pequeño con el mismo resultado indicado antes.

Aumentar el tamaño de la muestra o disminuir el nivel de confianza.

c) 90 ya se encuentra en el intervalo calculado, si aumentamos el nivel de confianza, aumenta la amplitud del intervalo y con más motivo 90 entraría en el intervalo de confianza.

Con una probabilidad del 98.5 % el contenido en azúcar es de 90 gramos en cada frasco de 500 gramos.

Bloque 2:

5. *Se realiza una encuesta a los habitantes de un pueblo (con respuestas SI, NO o NO SABE/NO CONTESTA) sobre la necesidad de construir otra piscina cubierta. Se pregunta a las 600 personas mayores de edad que viven en el pueblo y los que dicen NO son la mitad de los que NO SABE/NO CONTESTA. Por estudios paralelos de fiabilidad se sabe que el 30 % del total de los que contestan SI o NO, mienten, y el total de estos últimos son 135 personas:*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar qué cantidad de personas eligen cada respuesta. (1.5 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

RESPUESTA

Sea x el número de personas que dicen NO, y que dicen SI, z NO SABE/NO CONTESTA.

a) Como el 30 % de $x+y$ son 135, tenemos que $x+y$ = (135/30) · 100 = 450

Escribimos el sistema $\begin{cases} x+y+z=600 \\ x=\frac{1}{2}z \\ x+y=450 \end{cases}$

b) Operando y ordenando las ecuaciones

$\begin{cases} x+y+z &= 600 \\ 2x \quad -z &= 0 \\ x+y &= 450 \end{cases}$ Calculamos $\begin{matrix} E'_2 = -2E_1 + E_2 \\ E'_3 = -E_1 + E_3 \end{matrix}$ obtenemos

$\begin{cases} x+y+z = 600 \\ -2y-3z = -1200 \\ -z = -150 \end{cases}$ de donde z = 150, y = 375, x = 75

75 contestan NO, 375 contestan SI y 150 NO SABEN/NO CONTESTAN

6. *a) Dadas las matrices* $M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $N = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *comprueba que* $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$. *(1 punto)*

b) Resuelve la ecuación $M \cdot X = N$ *(0.5 puntos)*

RESPUESTA

a) $M \cdot N = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ como $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t)$

Calculamos $|M \cdot N| = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1$

$(M \cdot N)^t = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad Adj(M \cdot N)^t = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ como $|M \cdot N| = 1$

$(M \cdot N)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

$|M| = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $M^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(M)^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ como $|M| = 1$

$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$|N| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$, $N^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $Adj(M)^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ como $|N| = 1$

$N^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$N^{-1} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ por tanto

$$\boldsymbol{(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}}$$

b) $M \cdot X = N$ $\quad X = M^{-1} \cdot N$ luego

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}$$

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL
CURSO: **2020–2021**
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE **JULIO**

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

SECCIÓN 1, (3 puntos)

Bloque 1:

1. *Una carpintería ofrece tres modelos de mesas cuyo precio varía en función del tipo de madera utilizada y lo clasifica en: gama baja, media y superior. El precio de la mesa de gama superior es el mismo que de las otras dos juntas. Vendiendo 50 mesas de gama media se obtiene el mismo dinero que con 30 de la superior y por la venta de 5 mesas de gama baja, 5 de media y 10 de gama superior se obtienen 7500 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo de mesa. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

2. *En un terreno se dispone de 18 hectáreas para sembrar aguacates y mangos. Para los aguacates deseamos destinar como mucho 16 hectáreas. Por cada hectárea sembrada de aguacates y mangos se obtiene 10000 y 12000 euros respectivamente. Se quiere que la superficie correspondiente a los mangos no sea mayor que la que ocupen los aguacates.*

a) Expresa la función objetivo. (0.25 puntos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto)

c) Determina cuántas hectáreas de cada tipo se debe dedicar a cada producto para conseguir máximo beneficio. (0.25 puntos)

Bloque 2:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+3+t & si\ x<1 \\ 3 & si\ x=1 \\ (x-3)^2+t & si\ x>1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

2. *La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en el punto $(0, -3)$ y la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ es 6. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 puntos)*

SECCIÓN 2, (3.5 puntos)

Bloque 1:

3. *El consumo por persona y semana de azúcar en España sigue una distribución normal con desviación típica* $\sigma = 60$ *gramos. Se hizo un estudio y se observó que la media de consumo por semana de 50 personas fue de 200 gramos. Se pide:*

a) Calcula el intervalo de confianza del 95 % para el consumo medio por persona y semana de azúcar. (1 punto)

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ *de consumo por persona y semana de azúcar es 220 gramos con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

4. *De 100 alumnos que han terminado una titulación 6 no han encontrado trabajo el primer año.*

a) Calcula la proporción de alumnos que han encontrado trabajo el primer año. (0.25 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que si elegimos tres alumnos sin repetición, ninguno haya encontrado trabajo el primer año. (0.5 puntos)

c) Si elegimos tres alumnos al azar sin repetición y el primero no ha encontrado trabajo el primer año, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo y el tercero tampoco hayan encontrado trabajo el primer año? (0.75 puntos)

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x < 0 \\ t & si\ x = 0 \\ (x-2)^2 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Halla el valor de t *para que* f *sea continua en* $x = 0$*. (0.5 puntos)*

b) Para $t = 2$*, representa gráficamente la función* $f(x)$*. (1 punto)*

4. *En un local se venden pizzas en porciones. Las ventas durante cuatro semanas consecutivas siguen la función:* $P(t) = -40t^2 + 240t + 540$*, con t=semanas y* $(1 \le t \le 4)$.

a) ¿Cuántas porciones han vendido durante los dos primeras semanas? (0.5 puntos)

b) ¿Durante qué semana se vendieron más porciones y cuántas fueron? (0.75 puntos)

c) ¿Qué semana vendieron menos? ¿Cuántas porciones? (0.75 puntos)

SECCIÓN 3, (3.5 puntos)

Bloque 1:

5. *Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ *y* $D=\begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot C + D^T$. *(0.5 puntos)*

b) Razona si A y B tienen matriz inversa (no es necesario calcularlas). (0.5 puntos)

c) ¿Qué dimensiones tienen las matrices resultantes de los producto $D \cdot C$ *y* $D^T \cdot C^T$*? (no es necesario hacer las multiplicaciones). (0.5 puntos)*

6. *En un concesionario de motos disponen de 100 motos dispuestas para su venta. Las motos son de tres tipos: las que consumen gasolina únicamente, las que usan gasolina y aceite y las eléctricas. Las más numerosas son las que usan gasolina y aceite, y la diferencia entre la cantidad de estas y las de gasolina es igual a la mitad del número de eléctricas. La diferencia entre las de gasolina y las eléctricas es igual a la tercera parte de las que utilizan gasolina y aceite.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas motos hay de cada tipo. (1.5 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

Bloque 2:

5. *Según los datos de 2020, en la universidad española hay un porcentaje de 24.8 % de mujeres estudiando Grados de Informática, el resto son hombres. Además una mujer tiene una probabilidad de 0.95 de terminar informática, mientras que para los hombres es del 0.85.*

a) Elegido un estudiante al azar de informática, ¿cuál es la probabilidad de que consiga terminar la titulación? (0.75 puntos)

b) Sabiendo que un estudiante elegido al azar ha terminado informática, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (0.75 puntos)

6. *Se desea investigar la altura en cm de un tipo de planta, se sabe que la altura sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica* $\sigma = 15$ *cm. Se tomó una muestra aleatoria de 400 plantas de ese tipo y se comprobó que la altura media de dicha muestra era de 110 cm.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la altura de ese tipo de planta, con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Se puede admitir que la media de altura μ *de ese tipo de planta pueda ser de 109 cm con una confianza del 95 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

RESPUESTAS

SECCIÓN 1

Bloque 1:

1. *Una carpintería ofrece tres modelos de mesas cuyo precio varía en función del tipo de madera utilizada y lo clasifica en: gama baja, media y superior. El precio de la mesa de gama superior es el mismo que de las otras dos juntas. Vendiendo 50 mesas de gama media se obtiene el mismo dinero que con 30 de la superior y por la venta de 5 mesas de gama baja, 5 de media y 10 de gama superior se obtienen 7500 euros.*

   a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo de mesa. (1 punto)

   b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

RESPUESTA

Sea x el precio gama baja, y el precio gama media, z el precio gama superior.

a)

Escribimos el sistema $\begin{cases} 5x+5y+10z=7500 \\ x+y=z \\ 50y=30z \end{cases}$

b) Simplificando la primera ecuación, dividiendo entre 5; la tercera entre 10 y ordenando todas

$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 5y-3z=0 \\ x+y+2z=1500 \end{cases}$ Calculamos $E'_3 = -E_1 + E_3$ obtenemos

$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 5y-3z=0 \\ 3z=1500 \end{cases}$ de donde $z = 500$, $y = 300$, $x = 200$

Precio gama baja 200 €, precio gama media 300 € y precio gama superior 500 €

2. *En un terreno se dispone de 18 hectáreas para sembrar aguacates y mangos. Para los aguacates deseamos destinar como mucho 16 hectáreas. Por cada hectárea sembrada de aguacates y mangos se obtiene 10000 y 12000 euros respectivamente. Se quiere que la superficie correspondiente a los mangos no sea mayor que la que ocupen los aguacates.*

a) Expresa la función objetivo. (0.25 puntos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto)

c) Determina cuántas hectáreas de cada tipo se debe dedicar a cada producto para conseguir máximo beneficio. (0.25 puntos)

RESPUESTA

	Restricciones	Beneficio
Hectáreas aguacates, x	≤ 16	10 000 €
Hectáreas mangos, y	$y \le x$	12 000 €
Total hectáreas	18	

a) $f(x, y) = 10000x + 12000y$

$$\mathbf{f(x, y) = 10000x + 12000y}$$

b)

$$\left.\begin{array}{c} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ x \leq 16 \\ y \leq x \\ x + y \leq 18 \end{array}\right\}$$

Representamos las rectas

$x = 16;\ y = x;\ x + y = 18$

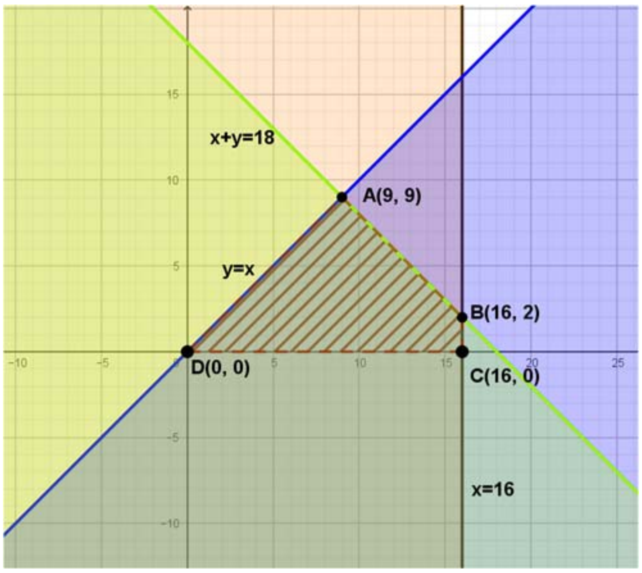
Resolviendo los sistemas

$x + y = 18,\ y = x,\quad A(9, 9)$

$x + y = 18,\ x = 16,\ B(16, 2)$

$x = 16, y = 0,\quad C(16, 0)$

$y = x,\ y = 0,\quad D(0,0)$



c) $f(9, 9)= 10000 \cdot 9 + 12000 \cdot 9 = 198000$

$f(16, 2)= 10000 \cdot 16 + 12000 \cdot 2= 184000$

$f(16,0)= 10000 \cdot 16 + 12000 \cdot 0 = 160000$

$f(0,0)= 0$

Debe dedicar 9 hectáreas a aguacates y 9 hectáreas a mangos

Bloque 2:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+3+t & si\ x<1 \\ 3 & si\ x=1 \\ (x-3)^2+t & si\ x>1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

RESPUESTA

a) $f(x) = \begin{cases} x+3+t & si\ x<1 \\ 3 & si\ x=1 \\ (x-3)^2+t & si\ x>1 \end{cases}$ para que f sea continua en $x = 1$, los límites laterales en $x = 1$ han de coincidir y su valor ser igual a $f(1) = 3$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+3+t) = 4+t$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}[(x-3)^2+t] = 4+t$, igualamos, $4+t=3$, $t=-1$

f es continua en $x = 1$ para $t = -1$

b) $f(x) = (x-3)^2$ en $(1, +\infty)$, con $t = 0$

Derivamos $f'(x) = 2(x-3)$, $2(x-3) = 0$ $x = 3$

Calculamos la segunda derivada $f''(x) = 2 > 0$

Luego en x = 3 hay mínimo relativo $f(3) = (3-3)^2 = 0$

Hay un mínimo en $x = 3$, (3, 0)

c) Por el apartado b) los intervalos de monotonía son:

(1, 3) y $(1, +\infty)$

Como en $x = 3$ hay un mínimo, en (1, 3) la función es decreciente y en $(1, +\infty)$ creciente.

También tomando valores de los intervalos y sustituyendo en la derivada:

$f'(2) = 2(2-3) = -2 < 0$ luego es decreciente en (1, 3)

$f'(5) = 2(5-3) = 4 > 0$ luego es creciente en $(1, +\infty)$

En $(1, 3)$ la función es decreciente y en $(1, +\infty)$ creciente

2. *La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en el punto $(0, -3)$ y la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ es 6. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 puntos)*

RESPUESTA

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Máximo en (0, –3) , entonces $f'(0) = 0$ y $f(0) = -3$

Pendiente en $x = -1$ es 6 entonces $f'(-1) = 6$

Calculamos $f'(x) = 2ax + b$ y $f''(x) = 2a$

Aplicamos a los datos dados

$f(0) = -3$ $\quad a(0)^2 + b(0) + c = -3$ $\quad c = -3$

$f'(0) = 0$ $\quad 2a(0) + b = 0$ $\quad b = 0$

$f'(-1) = 6$ $\quad 2a(-1) + b = 6$ $\quad -2a+b = 6$

Resolviendo el sistema:

$a = -3$ $\quad b = 0$ $\quad c = -3$

$\boldsymbol{a = -3,\ b = 0,\ c = -3}$ **y** $\boldsymbol{f(x) = -3x^2 - 3}$

SECCIÓN 2

Bloque 1:

3. *El consumo por persona y semana de azúcar en España sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 60$ gramos. Se hizo un estudio y se observó que la media de consumo por semana de 50 personas fue de 200 gramos. Se pide:*

a) Calcula el intervalo de confianza del 95 % para el consumo medio por persona y semana de azúcar. (1 punto)

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ de consumo por persona y semana de azúcar es 220 gramos con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Nos dan los siguientes datos:

$$\sigma = 60, \qquad 1 - \alpha = 0.95, \qquad \bar{x} = 200, \qquad n = 50$$

X: consumo azúcar semanal, X sigue una $N(\mu, 60)$

$$\alpha = 0.05\ ,\ \frac{\alpha}{2} = 0.025\ ,\ 1 - \frac{\propto}{2} = 0.975$$

Buscamos en la tabla: $Z_{1-\frac{\propto}{2}} = Z_{0.975} = 1.96.$

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(200 - 1.96\frac{60}{\sqrt{50}}, \qquad 200 + 1.96\frac{0}{\sqrt{50}}\right) = (183.37, \qquad 216.63)$$

Intervalo de confianza: (183.37, 216.63)

b) Si se quiere que el intervalo de confianza tenga menor amplitud se debe aumentar el tamaño de la muestra o disminuir el nivel de confianza.

Aumentar el tamaño de la muestra o disminuir nivel de confianza.

c) Si el nivel de confianza fuese del 90 %, 95 % > 90 %, el intervalo de confianza tendría menor amplitud, como 220 ya no se encuentra en el intervalo anterior, al ser menor el nivel de confianza, la amplitud del intervalo va a ser menor y por tanto el valor 220 no va a estar en el intervalo, luego, se puede decir que la media poblacional no va a ser de 220.

No se puede afirmar que la media poblacional sea 220 con una probabilidad del 90 %

4. *De 100 alumnos que han terminado una titulación 6 no han encontrado trabajo el primer año.*

a) Calcula la proporción de alumnos que han encontrado trabajo el primer año. (0.25 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que si elegimos tres alumnos sin repetición, ninguno haya encontrado trabajo el primer año. (0.5 puntos)

c) Si elegimos tres alumnos al azar sin repetición y el primero no ha encontrado trabajo el primer año, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo y el tercero tampoco hayan encontrado trabajo el primer año? (0.75 puntos)

RESPUESTA

Sea T el suceso encontrar trabajo el primer año, $P(T)$ = 94/100 = 0.94

a) Como $P(T)$ = *94/100 = 0.94*

El 94 % encuentran trabajo el primer año

b) Nos piden $P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap \bar{T}_3) = P(\bar{T}_1) \cdot P(\bar{T}_2/\bar{T}_1) \cdot P(\bar{T}_3/\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2) = \frac{6}{100} \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{100} = 0.00012$

La probabilidad de que de tres ninguno encuentre trabajo es de $\mathbf{0.00012}$

c) $P(\bar{T}_2 \cap \bar{T}_3/\bar{T}_1) = \frac{P(\bar{T}_2 \cap \bar{T}_3)}{P(\bar{T}_1)} = \frac{\frac{5}{100} \cdot \frac{4}{100}}{\frac{6}{100}} = \frac{20}{600} = \frac{1}{30} = 0.033$

La probabilidad de que el segundo y el tercero no encuentren trabajo cuando el primero no ha encontrado es de $\mathbf{0.033}$

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x < 0 \\ t & si\ x = 0 \\ (x-2)^2 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = 0. (0.5 puntos)

b) Para t = 2, representa gráficamente la función f(x). (1 punto)

RESPUESTA

a) $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x < 0 \\ t & si\ x = 0 \\ (x-2)^2 & si\ x > 0 \end{cases}$ para que f sea continua en ***x* = 0,** los límites laterales en ***x* = 0** han de coincidir y su valor ser igual a $f(0) = t$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+2)^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-2)^2 = 4, \text{ igualamos, } t = 4$$

***f* es continua en *x* = 0 para *t* = 4**

b) Para $t = 2$ la función es:

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x < 0 \\ 2 & si\ x = 0 \\ (x-2)^2 & si\ x > 0 \end{cases}$$

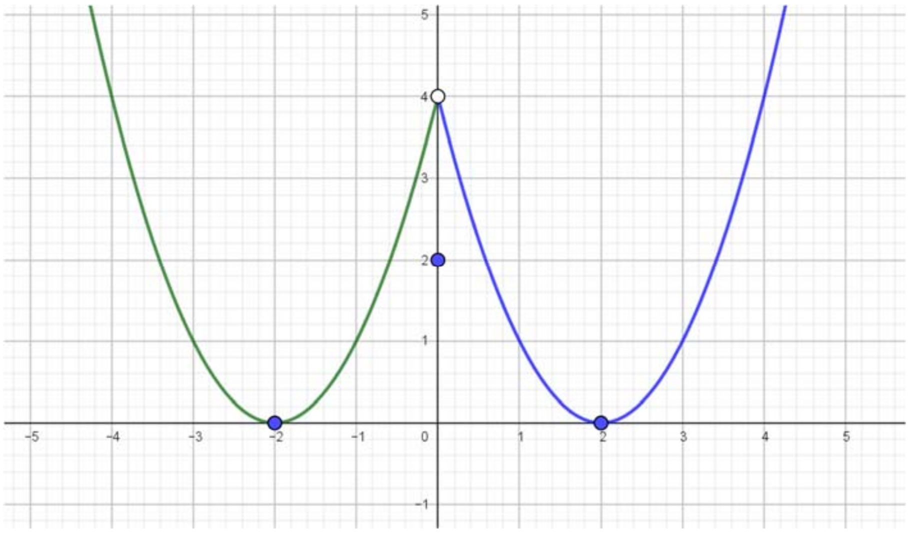
- Para $x < 0$ se trata de una parábola abierta hacia arriba, $x^2 + 4x + 4$

con vértice en $x = -4/2 = -2$, (–2, 0), corte con el eje Y en (0, 4) y el eje X en (–2, 0)

- Para $x > 0$ se trata de una parábola abierta hacia arriba, $x^2 - 4x + 4$

con vértice en $x = 4/2 = 2$, (2, 0), corte con el eje Y en (0, 4) y el eje X en (2, 0)

- Para $x = 0$, $f(0) = 2$.



4. *En un local se venden pizzas en porciones. Las ventas durante cuatro semanas consecutivas siguen la función:* $P(t) = -40t^2 + 240t + 540$, *con t=semanas y* $(1 \leq t \leq 4)$.

a) ¿Cuántas porciones han vendido durante los dos primeras semanas? (0.5 puntos)

b) ¿Durante qué semana se vendieron más porciones y cuántas fueron? (0.75 puntos)

c) ¿Qué semana vendieron menos? ¿Cuántas porciones? (0.75 puntos)

RESPUESTA

$$f(t) = -40t^2 + 240t + 540$$

a) Calculamos

$$f(2) = -40 \cdot 2^2 + 240 \cdot 2 + 540 = -160 + 480 + 540 = 860$$

En las dos primeras semanas se han vendido 860 porciones

b) Calculamos

$$f'(t) = -80t + 240$$

Resolvemos

$$-80t + 240 = 0\,, \quad t = 3$$

Calculamos

$f''(t) = -80 < 0$, luego en $x = 3$ hay un máximo relativo.

$$f(3) = -40 \cdot 3^2 + 240 \cdot 3 + 540 = -360 + 720 + 540 = 900$$

Cuando más se vende es 900 porciones la tercera semana.

c) La gráfica de la función es una parábola abierta hacia abajo con máximo en $t = 3$, el mínimo debe estar en los extremos, es decir, en $t = 1$ o en $t = 4$

$$f(1) = -40 \cdot 1^2 + 240 \cdot 1 + 540 = -40 + 240 + 540 = 700$$

$$f(4) = -40 \cdot 4^2 + 240 \cdot 4 + 540 = -640 + 960 + 540 = 800$$

Se vendieron menos porciones la primera semana, 700 porciones.

SECCIÓN 3

Bloque 1:

5. *Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ *y* $D=\begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot C + D^T$. *(0.5 puntos)*

b) Razona si A y B tienen matriz inversa (no es necesario calcularlas). (0.5 puntos)

c) ¿Qué dimensiones tienen las matrices resultantes de los producto $D \cdot C$ *y* $D^T \cdot C^T$*? (no es necesario hacer las multiplicaciones). (0.5 puntos)*

RESPUESTA

a) Escribimos $D^t = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot C + D^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A \cdot C + D^t = \begin{pmatrix} -6 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}}$$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix} = 9 - 3 = 6 \neq 0$, Por tanto A tiene inversa.

$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$, luego B no tiene inversa.

A tiene inversa y B no tiene.

c) El producto $D{\cdot}C$ es de matrices 2 x 1 y 1 x 2, por tanto su resultado es una matriz de orden 2 x 2.

En el producto de sus traspuestas sería 2 x 1 y 1 x 2 luego el resultado es de 2 x 2

Los dos productos dan una matriz de orden 2 x 2.

6. *En un concesionario de motos disponen de 100 motos dispuestas para su venta. Las motos son de tres tipos: las que consumen gasolina únicamente, las que usan gasolina y aceite y las eléctricas. Las más numerosas son las que usan gasolina y aceite, y la diferencia entre la cantidad de estas y las de gasolina es igual a la mitad del número de eléctricas. La diferencia entre las de gasolina y las eléctricas es igual a la tercera parte de las que utilizan gasolina y aceite.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas motos hay de cada tipo. (1.5 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

RESPUESTA

Sea x el número de motos gasolina, y las de gasolina y aceite, z las eléctricas.

a)

Escribimos el sistema $\begin{cases} x+y+z=100 \\ y-x=\frac{1}{2}z \\ x-z=\frac{1}{3}y \end{cases}$

b) Ordenamos el sistema

$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 2x-2y+z=0 \\ 3x-y-3z=0 \end{cases}$ Calculamos $\begin{array}{c} E'_2=-2E_1+E_2 \\ E'_3=-3E_1+E_3 \end{array}$ obtenemos

$\begin{cases} x+y+z=100 \\ -4y-z=-200 \\ -4y-6z=-300 \end{cases}$ Calculamos $E''_3=-E'_2+E'_3$, obtenemos

$\begin{cases} x+y+z=100 \\ -4y-z=-200 \\ -5z=-100 \end{cases}$ Ya podemos resolver

$z=20$, $y=45$, $x=35$

Hay 35 motos de gasolina, 45 motos de gasolina y aceite y 20 motos eléctricas.

Bloque 2:

5. *Según los datos de 2020, en la universidad española hay un porcentaje de 24.8 % de mujeres estudiando Grados de Informática, el resto son hombres. Además una mujer tiene una probabilidad de 0.95 de terminar informática, mientras que para los hombres es del 0.85.*

a) Elegido un estudiante al azar de informática, ¿cuál es la probabilidad de que consiga terminar la titulación? (0.75 puntos)

b) Sabiendo que un estudiante elegido al azar ha terminado informática, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (0.75 puntos)

RESPUESTA

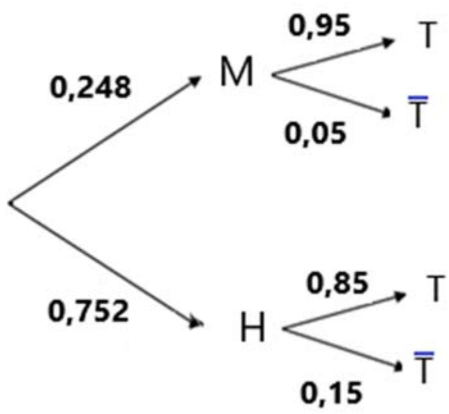
Escribimos las leyendas y construimos el diagrama de árbol:

M: mujeres estudian Informática

H: hombres estudian Informática

T: terminar el grado

$\bar{T}$: no terminar el grado



a) Por el teorema de la probabilidad total

$P(T) = P(M \cap T) + P(H \cap T) = P(M) \cdot P(T/M) + P(H) \cdot P(T/H) = 0.248 \cdot 0.95 + 0.752 \cdot 0.85 = 0.8748$

***P*(terminar la titulación) = 0.8748**

b) Por el teorema de Bayes

$$P(M/T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(M) \cdot P(T/M)}{P(T)} = \frac{0.248 \cdot 0.95}{0.8748} = \frac{0.2356}{0.8748} = 0.2693$$

$$\boldsymbol{P}(\text{ser mujer cuando ha terminado el grado}) = 0.2693$$

6. *Se desea investigar la altura en cm de un tipo de planta, se sabe que la altura sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ =15 cm. Se tomó una muestra aleatoria de 400 plantas de ese tipo y se comprobó que la altura media de dicha muestra era de 110 cm.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la altura de ese tipo de planta, con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Se puede admitir que la media de altura μ de ese tipo de planta pueda ser de 109 cm con una confianza del 95 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \bar{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

donde X es la variable "altura de la planta", X sigue una $N(\mu, 15)$

Nos dan los siguientes datos: $\sigma = 15$ $1 - \alpha = 0.95$, n = 400, $\bar{x} = 110$.

$1 - \alpha = 0.95$, $\alpha = 0.05$, $\frac{\propto}{2} = 0.025$, $1 - \frac{\propto}{2} = 0.975$, buscamos en la tabla: $Z_{0.975} = 1.96$.

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(110 - 1.96\frac{15}{\sqrt{400}}, \quad 110 + 1.96\frac{15}{\sqrt{400}}\right) = (108.53, \quad 111.47)$$

Intervalo de confianza: (108.53, 111.47)

b) Si aumenta el nivel de confianza aumenta el valor de $Z_{1-\frac{\propto}{2}}$ aumentando la amplitud del intervalo de confianza y viceversa.

Aumentar o disminuir la amplitud del intervalo respectivamente.

c) Como 109 se encuentra dentro del intervalo calculado al 95 %.

Se puede afirmar que la media de la altura de la planta será 109 con una probabilidad del 95 %

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

CASTILLA Y LEÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: José Luis Lorente

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad **Castilla y León**	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	**EXAMEN** **Nº páginas: 2** (tabla adicional)

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

En un almacén de frutas disponen de 800 kg de manzanas, 800 kg de naranjas y 500 kg de plátanos. Con estas existencias van a poner a la venta dos tipos de lotes de frutas, A y B. El lote A consta de 1 kg de manzanas, 2 kg de naranjas y 1 kg de plátanos; mientras que el lote B consta de 2 kg de manzanas, 1 kg de naranjas y 1 kg de plátanos. Si los lotes A se venden a 12 euros cada uno y los lotes B a 14 euros cada uno, determinar, mediante técnicas de programación lineal, el número de lotes de cada tipo que ha de vender el almacén para maximizar sus ingresos. ¿A cuánto asciende ese ingreso máximo?

P2. (Números y álgebra)

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz $Y = A^2 + BB^t$ donde B^t es la matriz traspuesta de B.

b) Determinar la matriz X para que se verifique la ecuación $2AX = B$.

P3. (Análisis)

El número de zancadas por minuto que realiza un corredor en su entrenamiento diario de 60 minutos viene dado por la función:

$$f(x) = \begin{cases} 70 & \text{si } 0 \le x \le 40 \\ \frac{1}{10}x^2 - 11x + 350 & \text{si } 40 < x \le 60 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo de entrenamiento transcurrido, medido en minutos.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcular el momento en el que alcanza el número de zancadas mínimo. ¿Cuál es el número de zancadas mínimo? (**hasta 2 puntos**).

b) Representar gráficamente la función $f(x)$, justificando brevemente la representación gráfica obtenida (**hasta 1 punto**).

P4. (Análisis)

El beneficio neto anual B (en miles de euros) que las ventas de un producto generan a una empresa en función del gasto anual en publicidad x (en miles de euros) viene dado por la función $B(x) = -20x^2 + 1200x + a$, donde $x \in [0, \infty)$.

a) Hallar el valor de a sabiendo que un gasto en publicidad de 10000 euros proporciona un beneficio neto de de 10 millones de euros.

b) Para $a = 2000$, calcular el área delimitada por $B(x)$ y el eje OX en el intervalo [0, 1].

P5. (Estadística y probabilidad)

Una empresa destinada a la comercialización de cápsulas de café realiza un estudio de mercado entre un grupo de personas donde el 60 % son hombres y el 40 % restante son mujeres. La empresa comprueba que el 55 % de los hombres prefieren cápsulas de café capuchino, porcentaje que se eleva al 80 % en el caso de las mujeres.

a) Calcular la probabilidad de elegir una persona de ese grupo que resulte ser hombre y que prefiera cápsulas de café capuchino.

b) ¿Con qué probabilidad una persona elegida al azar de ese grupo prefiere cápsulas de café capuchino?

P6. (Estadística y probabilidad)

El tiempo que tarda un auditor en revisar un expediente se ajusta a una distribución normal con media 30 minutos y desviación típica de 10 minutos. Si al principio de una semana se le entregan 75 expedientes:

a) Calcular la probabilidad de que le dé tiempo a revisar los 75 expedientes si en esa semana el auditor trabaja 35 horas (2100 minutos).

b) Calcular la probabilidad de que el tiempo medio dedicado a revisar los 75 expedientes esté entre 28 y 33 minutos.

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1. (Números y álgebra)

Añadir una ecuación al sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=0 \end{cases}$, de forma que el sistema resultante sea incompatible.

C2. (Análisis)

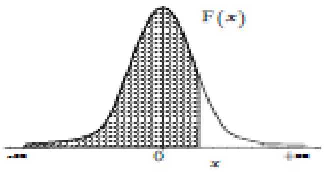
¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$?

C3. (Estadística y probabilidad)

Sabiendo que la probabilidad de que un hombre llegue a los 70 años es 0.78 y la probabilidad de que una mujer llegue a los 70 años es 0.83, calcular razonadamente la probabilidad de que ambos lleguen a los 70 años.

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

RESPUESTAS

Problema P.1: (Números y álgebra)

En un almacén de frutas disponen de 800 kg de manzanas, 800 kg de naranjas y 500 kg de plátanos. Con estas existencias van a poner a la venta dos tipos de lotes de frutas, A y B. El lote A consta de 1 kg de manzanas, 2 kg de naranjas y 1 kg de plátanos; mientras que el lote B consta de 2 kg de manzanas, 1 kg de naranjas y 1 kg de plátanos. Si los lotes A se venden a 12 euros cada uno y los lotes B a 14 euros cada uno, determinar, mediante técnicas de programación lineal, el número de lotes de cada tipo que ha de vender el almacén para maximizar sus ingresos. ¿A cuánto asciende ese ingreso máximo?

Solución:

Se trata de un problema típico de programación lineal en dos dimensiones. Veamos las 2 variables:

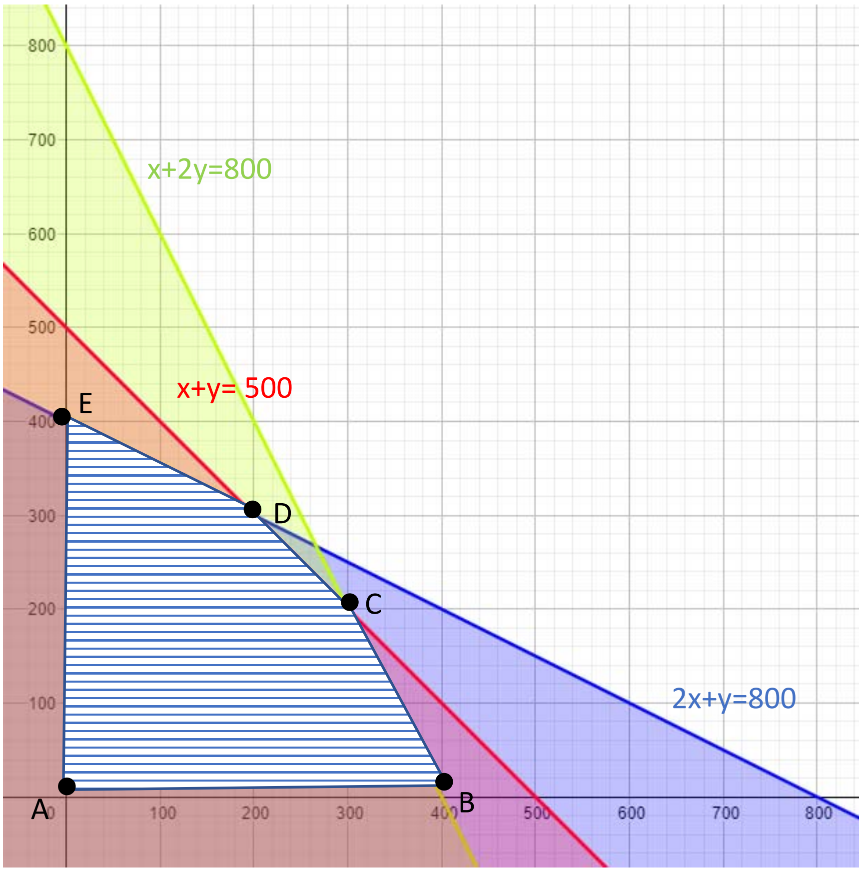
x = número de lotes de A; y = número de lotes de B.

<u>Condiciones de contorno (inecuaciones):</u>

(1) $x \geq 0$ e $y \geq 0$
(2) $x + 2y \leq 800$ (restricción a los kilos de manzanas)
(3) $2x + y \leq 800$ (restricción a los kilos de naranjas)
(4) $x + y \leq 500$ (restricción a los kilos de plátanos)

<u>Función a maximizar (Beneficio)</u>: $B(x, y) = 12x + 14y$

Representación región factible (rallada en azul):



Vértices del polígono:

- $A(0, 0)$
- $B(400, 0)$
- $C(300, 200)$: solución de $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 800 \\ x + y = 500 \end{array}\right\}$ Restando ecuaciones x = 300 y por tanto y = 200
- $D(200, 300)$: solución de $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 800 \\ x + y = 500 \end{array}\right\}$ Restando ecuaciones y = 300 y por tanto x = 200
- $E(400, 0)$

Representación máxima variación función beneficio: vector $\vec{v} = (12{,}14)$ o el proporcional que tiene misma dirección $\vec{v} = (120, 140)$ y las rectas perpendiculares son rectas con mismo beneficio

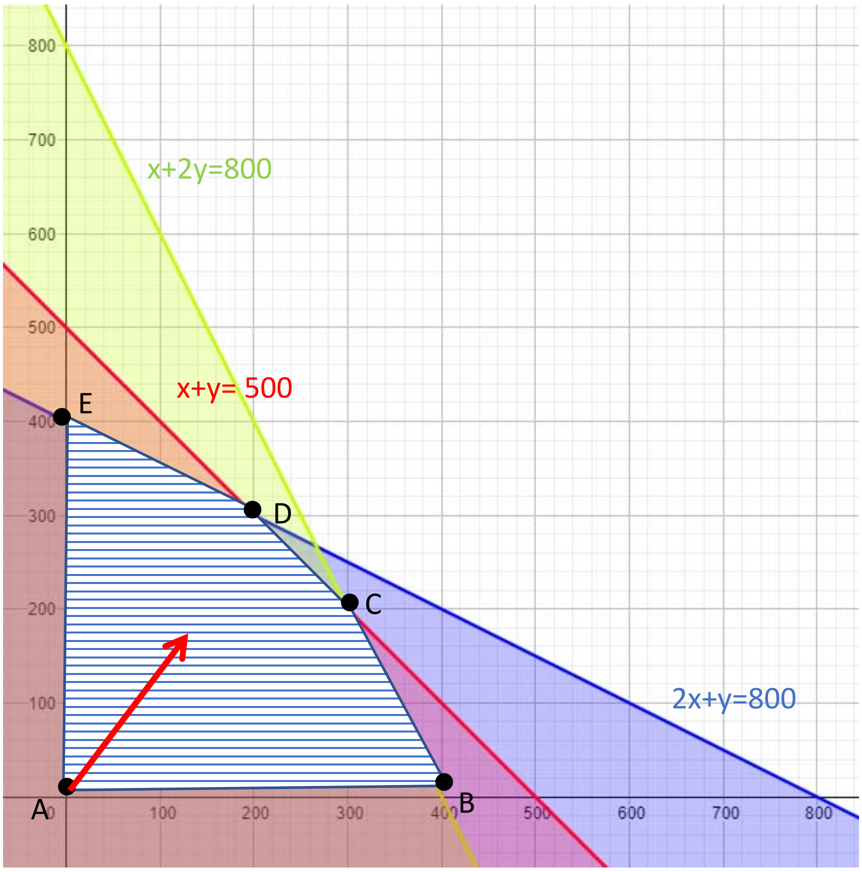
$A(0, 0)$ → Beneficio $B(0, 0)$ = 0 €

$B(400, 0)$ → Beneficio $B(400, 0)$ = 4 800 €

$C(300, 2000)$ → Beneficio $B(300, 200)$ = 6 400 €

$D(200, 300)$ → Beneficio $B(200, 300)$ = 6 600 €

$E(0, 400)$ → Beneficio $B(0, 400)$ =5 600 €



Por tanto, el máximo beneficio es con x **= 200** lotes de A e y **= 300** lotes de B siendo el beneficio de 6 600 €

Problema P2. (Números y álgebra)

Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y

a) Calcular la matriz $Y = A^2 + B \cdot B^t$ donde B^t es la matriz traspuesta de B.

b) Determinar la matriz X para que se verifique la ecuación $2\,A\,X = B$

Solución:

Problema de operación y ecuaciones matriciales.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad -2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Sumando: $Y = A^2 + B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de $2AX = B$ multiplicando ambos miembros por la izquierda por la matriz $\frac{1}{2}A^{-1} \rightarrow$

$$X = \frac{1}{2}A^{-1} \cdot B$$

<u>Cálculo de A^{-1}:</u>

- determinante de A: $|A| = 3$ (tiene inversa pues es distinto de cero)
- traspuesta de A: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- adjunta de A^t: $(A^t)^{ad} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Inversa: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Cálculo de X multiplicando: $X = \frac{1}{2}A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{5/6} \\ \mathbf{-1/6} \end{pmatrix}$$

Problema P3. (Análisis)

El número de zancadas por minuto que realiza un corredor en su entrenamiento diario de 60 minutos viene dado por la función:

$$f(x) = \begin{cases} 70 & si \;\; 0 \le x \le 40 \\ \dfrac{x^2}{10} - 11x + 350 & si \;\; 40 < x \le 60 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo de entrenamiento transcurrido, medido en minutos.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcular el momento en el que alcanza el número de zancadas mínimo. ¿Cuál es el número de zancadas mínimo?.

b) Representar gráficamente la función $f(x)$, justificando brevemente la representación gráfica obtenida.

Solución:

Problema de optimización e intervalos de crecimiento de funciones a trozos

a) Veamos primero la continuidad:

$$\lim_{x\to 40^-} f(x) = \lim_{x\to 40^-} 70 = 70$$

$$\lim_{x\to 40^+} f(x) = \lim_{x\to 40^+} \frac{x^2}{10} - 11x + 350 = 70$$

$$f(40) = 70$$

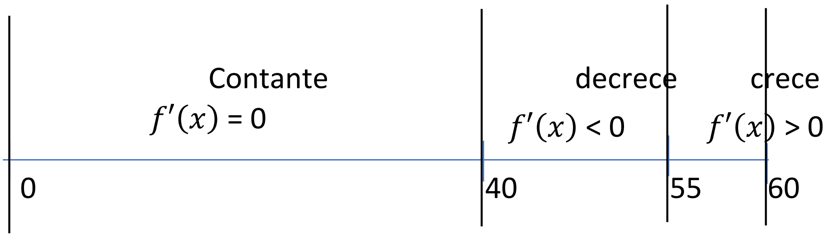
Como todos los valores son iguales la función es **continua**.

Calculemos la derivada (menos en x = 40 que no sabemos si es derivable)

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; 0 \le x < 40 \\ \frac{x}{5} - 11 & si \;\; 40 < x \le 60 \end{cases}$$

Para ver la monotonía tenemos que ver cuando $f'(x) \begin{cases} > 0 & crece \\ = 0 & Posible\ punto\ relativo \\ < 0 & decrece \end{cases}$

$f'(x) = 0$ en el intervalo (0, 40) que es una recta paralela al eje OX y por tanto ni crece ni decrece y también cuando $\frac{x}{5} - 11 = 0$ → x = 55 que pertenece al intervalo (40, 60).



$f'(50) = -1 < 0$ (decrece) $\quad f'(56) = 0.2 > 0$ (crece)

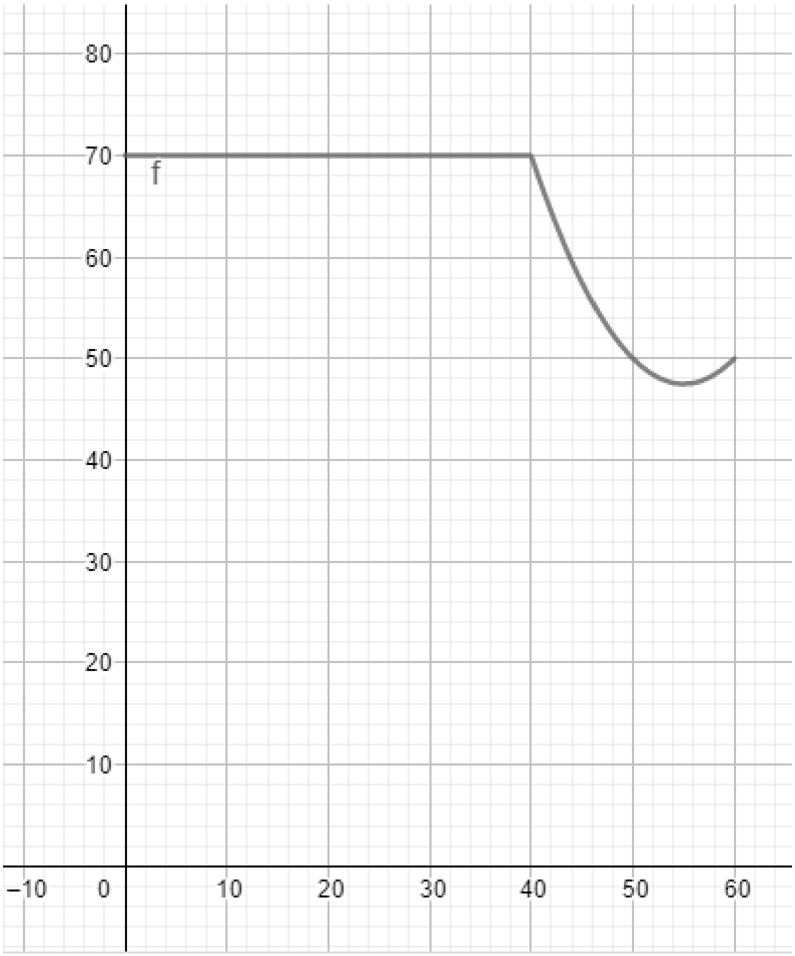
Por tanto tenemos que $f(x)$ crece en $x \in (55,\ 60)$; decrece en $x \in$ (40, 55); y constante en $x \in$(0, 40);

En $x = 55$ tenemos un mínimo relativo.

<u>Número de zancadas mínimo:</u> al ser una función continua acotada tenemos que el mínimo ocurrirá en el único mínimo relativo → $\boldsymbol{x} = \mathbf{55}$ con un total de **47.5** zancadas/minuto

La gráfica es la de una función a trozos. Hasta $x = 40$ es constante (paralela al eje OX) de valor 70. Luego es una parábola con mínimo en (55, 47.5). Para hacer la gráfica mejor calculemos el valor de $f(60) = 50$

b) $f(60) = 50$.



Problema P4. (Análisis)

El beneficio neto anual B (en miles de euros) que las ventas de un producto generan a una empresa en función del gasto anual en publicidad x (en miles de euros) viene dado por la función:

$B(x) = -20x^2 + 1200x + a$, donde $x \in [0, \infty)$.

a) Hallar el valor de a sabiendo que un gasto en publicidad de 10 000 euros proporciona un beneficio neto de 10 millones de euros.

b) Para $a = 2\,000$, calcular el área delimitada por $B(x)$ y el eje OX en el intervalo [0, 1].

Solución:

a) Se tiene que cumplir que B(x = 10) = 10 000. Sustituyendo:

10 000 + a = 10 000.

Por tanto, **a = 0**.

b) B(x) = - 20x^2 + 1200x +2000

Veamos el signo de B(x) en (0, 1): B(x) = 0 → x = 61.6 y x = -1.6, por tanto el signo en (0, 1) es constante y positivo (pues B(0) = 2000)

De esta forma el área es la integral definida:

$$A = \int_0^1 dx(-20x^2 + 1200x + 2000) = \left[-\frac{20}{3}x^3 + 600x^2 + 2000x\right]_0^1 = 2593.333\, u^2$$

$$\boldsymbol{A = 2\,593.333\, u^2}$$

Problema P5. (Estadística y probabilidad)

Una empresa destinada a la comercialización de cápsulas de café realiza un estudio de mercado entre un grupo de personas donde el 60 % son hombres y el 40 % restante son mujeres. La empresa comprueba que el 55 % de los hombres prefieren cápsulas de café capuchino, porcentaje que se eleva al 80 % en el caso de las mujeres.

a) Calcular la probabilidad de elegir una persona de ese grupo que resulte ser hombre y que prefiera cápsulas de café capuchino.

b) ¿Con qué probabilidad una persona elegida al azar de ese grupo prefiere cápsulas de café capuchino

Solución:

Trabajaremos con tablas de contingencia o de doble entrada. Como nos dan porcentajes supondremos N personas en la empresa.

Hombres = 0.6·N   y mujeres = 0.4·N

Hombres y Capuchino = 0.55 · 0.6 = 0.33·N

Mujeres y Capuchino = 0.8·0.4·N = 0.32·N

	Capuchino	No Capuchino	Total
Hombres	0.33 N		0.6 N
Mujeres	0.32 N		0.4 N
Total			N

Completamos la tabla:

	Capuchino	No Capuchino	Total
Hombres	0.33 N	0.27 N	0.6 N
Mujeres	0.32 N	0.8 N	0.4 N
Total	0.65 N	0.35 N	N

a) p(H$ombre \cap Capuchino) = \frac{0.33N}{N} = 0.33$ (Laplace)

b) p$(Capuchino) = \frac{0.65N}{N} = 0.65$ (Laplace)

Problema P6. (Estadística y probabilidad)

El tiempo que tarda un auditor en revisar un expediente se ajusta a una distribución normal con media 30 minutos y desviación típica de 10 minutos. Si al principio de una semana se le entregan 75 expedientes:

a) Calcular la probabilidad de que le dé tiempo a revisar los 75 expedientes si en esa semana el auditor trabaja 35 horas (2100 minutos).

b) Calcular la probabilidad de que el tiempo medio dedicado a revisar los 75 expedientes esté entre 28 y 33 minutos.

Solución:

a) X = "tiempo en revisar expediente en minutos" → B(μ=30, σ=10)

Y = "tiempo 75 expedientes" =75·x → B(μ = 75·30, σ = 75·10) = B(μ = 2250, σ = 750)

Tipificación Z = $\frac{Y-2250}{750}$ → B(0,¨1) (para poder mirar en las tablas de distribución normal estándar)

p(y < 2100) = p(z < $\frac{2100-2250}{750}$) $= p(z < -0.2) = 1 - p(z < 2) = 1 - 0.5793 = 0.4207$

La probabilidad de que le dé tiempo a revisar los 75 expedientes es de $\mathbf{0.4207}$

b) p(28·75 < y < 33·75) = p(2100 < y < 2475) = p(-0.2 < z < 0.3) = p(z < 0.3) - p(z < -0.2) = 0.6179 - 0.4207 = 0.1972

La probabilidad de que el tiempo medio dedicado a revisar los 75 expedientes esté entre 28 y 33 minutos es de $\mathbf{0.1972}$

Cuestiones

C1. (Números y álgebra)

Añadir una ecuación al sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ de forma que el sistema resultante sea incompatible.

Solución:

Sumamos los dos miembros la de la izquierda: 2x y los de la derecha: 2. Si cambiamos el valor de 2 por otro número la ecuación será incompatible.

Ejemplo: $\mathbf{2x=0}$

C2. (Análisis)

¿Cuál es el dominio de definición de la función f(x)=$\frac{x+1}{x^2-4}$?

Solución:

El denominador no puede anularse, luego x = 2 y x = -2 no son del dominio

$$Dom(f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

C3. (Estadística y probabilidad)

Sabiendo que la probabilidad de que un hombre llegue a los 70 años es 0.78 y la probabilidad de que una mujer llegue a los 70 años es 0.83, calcular razonadamente la probabilidad de que ambos lleguen a los 70 años

Solución:

P(H > 70) = 0.78 y p(M > 70) = 0.83 → p(H > 70 ∩ M > 70) = p(H > 70) · p(M > 70) = 0.78 · 0.83 = 0.6474

Nota: Consideramos que ambas probabilidades son independientes

La probabilidad de que ambos lleguen a los 70 años es de $\mathbf{0.6474}$

	Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad **Castilla y León**	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	**EXAMEN** **Nº páginas: 2** (tabla adicional)

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

En una panadería hornean todos los días tartas y bizcochos que venden a 10 € y 6 €, respectivamente. Para fabricar una tarta se necesitan 400 gramos de harina y 200 de azúcar, mientras que para un bizcocho se utilizan 300 gramos de harina y 100 de azúcar. Los dueños de la panadería saben que diariamente tienen que hornear, al menos, 6 bizcochos. Para la producción de hoy de tartas y bizcochos se dispone de 6 kg de harina y 2.4 kg de azúcar.

Utilizando técnicas de programación lineal, determinar la cantidad de cada uno de los productos que hay que hornear hoy para obtener los máximos ingresos.

P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x+y-az=1 \\ x+2y-2z=-2 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 1$.

P3. (Análisis)

Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & \text{si } x\le 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de b para que $f(x)$ sea continua.

b) Calcular el área delimitada por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo (0, 1).

P4. (Análisis)

Los estatutos de una asociación ecologista establecen que la asociación debe disolverse cuando supere los 100 socios. Se sabe, además, que el número de sus socios varía con los años transcurridos desde su fundación, "x", de acuerdo con la función $N(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 64$.

a) ¿Cuántos han sido los socios fundadores? Transcurridos 7 años, ¿cuántos socios habrá? ¿Se disolverá la sociedad en ese momento? (**hasta 1 punto**).

b) Estudiar el comportamiento (crecimiento, decrecimiento) del número de socios en el intervalo [0, 7] ¿cuál será el número mínimo de socios y cuándo se alcanzará? (**hasta 2 puntos**).

P5. (Estadística y probabilidad)

En un gimnasio, el 52 % de los socios son hombres y el resto son mujeres. Entre los socios, el 35 % de los hombres practica "spinning" así como el 60 % de las mujeres. Si elegimos un socio al azar,

a) Calcular la probabilidad de que practique "spinning".

b) Si el socio elegido no practica "spinning", obtener la probabilidad de que sea una mujer.

P6. (Estadística y probabilidad)

El peso de la población adulta con sobrepeso sigue una distribución normal de media 120 kg y desviación típica de 20 kg. Además, a los individuos con un peso superior a 150 kg se les considera "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A".

a) ¿Qué porcentaje de la población de adultos con sobrepeso son "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A"?

b) Si se elige aleatoriamente una muestra de 20 adultos con sobrepeso, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra esté entre 110 kg y 125 kg.

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1. (Números y álgebra)

Un hijo tiene 22 años menos que su padre y la suma de sus edades es 46 años ¿qué edad tiene el hijo?

C2. (Análisis)

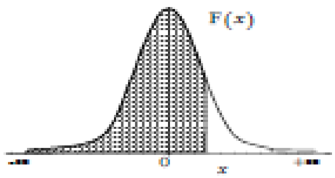
Dada la función $f(x) = ax - 33 + \frac{5}{x}$, determinar a para que verifique $f'(1) = 2$.

C3. (Estadística y probabilidad)

La nota media de los alumnos de segundo de bachillerato de cierto instituto sigue una distribución normal de media 6.8 y desviación típica 1.1. Calcular la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de un 9.

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

RESPUESTAS

Problema P.1 (Números y álgebra):

En una panadería hornean todos los días tartas y bizcochos que venden a 10 € y 6 €, respectivamente. Para fabricar una tarta se necesitan 400 gramos de harina y 200 de azúcar, mientras que para un bizcocho se utilizan 300 gramos de harina y 100 de azúcar. Los dueños de la panadería saben que diariamente tienen que hornear, al menos, 6 bizcochos. Para la producción de hoy de tartas y bizcochos se dispone de 6 kg de harina y 2.4 kg de azúcar. Utilizando técnicas de programación lineal, determinar la cantidad de cada uno de los productos que hay que hornear hoy para obtener los máximos ingresos.

Solución:

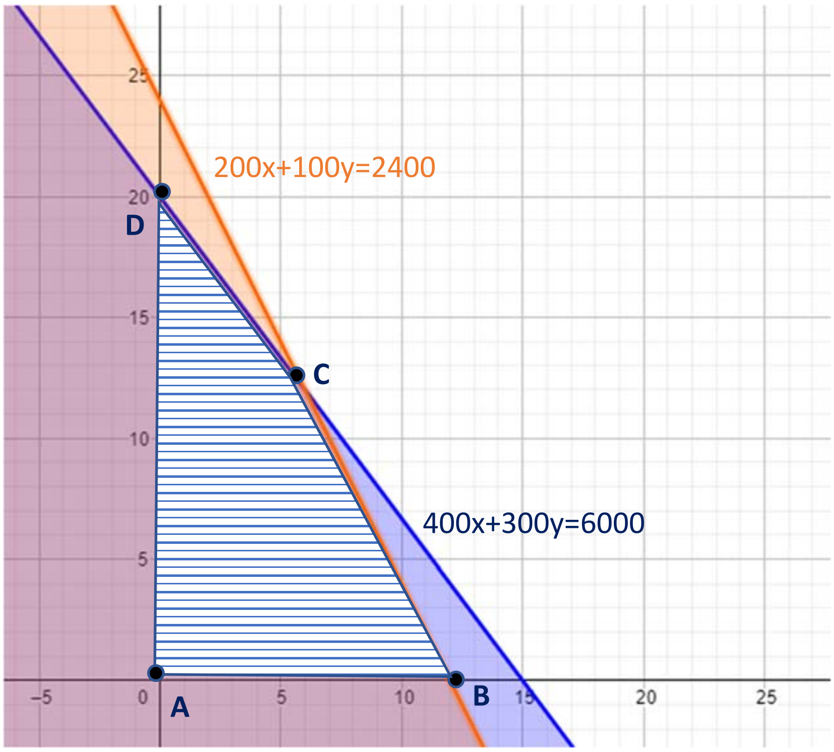
Se trata de un problema típico de programación lineal en dos dimensiones. Veamos las 2 variables: x = número de tartas; y = número de bizcochos.

Condiciones de contorno (inecuaciones):

(1) $x \geq 0$ e $y \geq 0$
(2) $400x + 300y \leq 6000$ (restricción a los kilos de harina)
(3) $200x + 100y \leq 2400$ (restricción a los kilos de azucar)

Función a maximizar (Beneficio): $B(x, y) = 10x + 6y$

Representación región posible (rallada en azul):



Vértices del polígono:

- $A(0, 0)$
- $B(12, 0)$

- C(6,12): solución de $\left.\begin{matrix}200x + 100y = 2400\\ 400x + 300y = 6000\end{matrix}\right\}$ Resolviendo x = 6, y = 12
- D(0, 20)

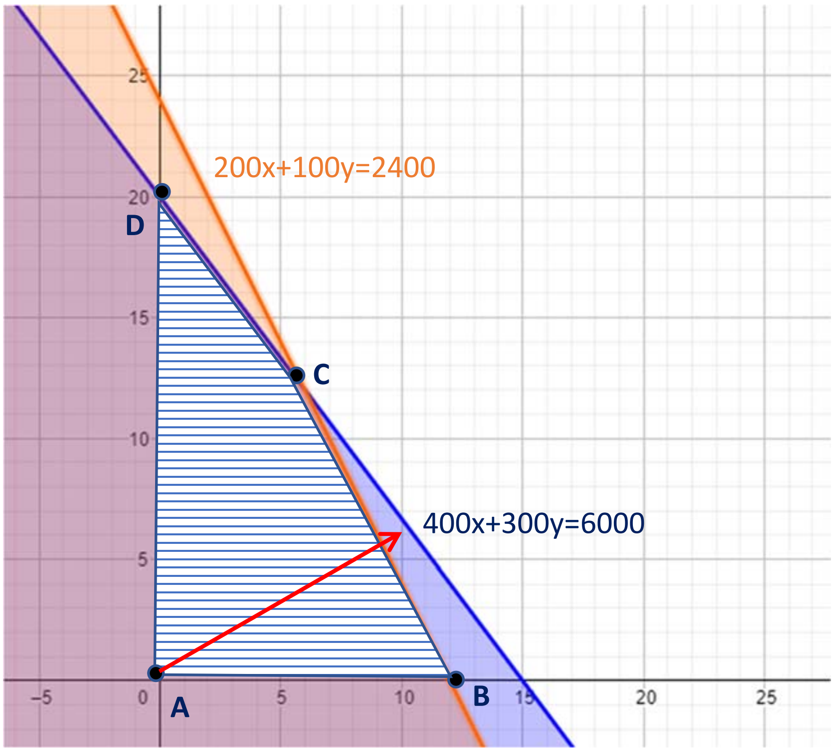
<u>Representación máxima variación</u> función beneficio: vector $\vec{v} = (10,6)$ y las rectas perpendiculares son rectas con mismo beneficio

A(0, 0) → Beneficio B(0, 0) = 0 €

B(12, 0) → Beneficio B(12, 0) = 120 €

C(6, 12) → Beneficio B(6, 12) = 132 €

D(0, 20) → Beneficio B(0, 20) = 120 €



Por tanto, el máximo beneficio es con x **= 6** tartas e y **= 12** bizcochos siendo el beneficio de **132 €**.

Problema P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=1 \\ x+y-az=1 \\ x+2y-2z=-2 \end{array}\right\}$$

a) Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

b) Resolver el sistema para a = 1.

Solución:

problema típico de sistemas

a) Estudiemos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada para poder utilizar el teorema de Rouché–Frobenius.

Rango de A

$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix} \rightarrow$ $|A|$ = 4a - 5; se cumple que 4a – 5 = 0 si a = 5/4

- Si a ≠ 5/4 entonces $|A|$ ≠ 0 y por tanto $rang(A)$ = 3
- Si a = 5/4 entonces $|A|$ = 0 y por tanto $rang(A)$ =2 (ya que $\begin{vmatrix}1 & -2 \\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$)

Rango de A^*

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

- Si a ≠ 5/4 entonces $|A|$ ≠ 0 y por tanto $rang(A^*)$ = 3
- Si a = 5/4 → $\begin{vmatrix}1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=-9\neq 0$ por tanto también $rang(A^*)$ = 3

Utilizando ***Teorema de Rouché–Frobenius***

	a = 5/4	A ≠ 5/4
$Rang(A)$	2	3
$Rang(A^*)$	3	3
Clasificación	**Sistema Incompatible**	**S. Compatible determinado**

b) Si a = 1 el sistema es como hemos visto compatible determinado

$$\left.\begin{array}{rr} (1) & x-2y+z=1 \\ (2) & x+y-z=1 \\ (3) & x+2y-2z=-2 \end{array}\right\}$$

Podemos resolverlo por Gauss, por Cramer o eliminando una incógnita que es lo que vamos a realizar:

$$\left.\begin{array}{l} (1)-(3) \rightarrow -4y+3z=3 \\ (1)-(2) \rightarrow -3y+2z=0 \end{array}\right\}$$

Sistema con 2 ecuaciones e incógnitas que podemos resolver por método de reducción obteniendo y = 6, z = 9. Sustituyendo estos dos valores en alguna de las 3 ecuaciones tenemos que x = 4.

Solución: $\boldsymbol{x = 4, y = 6, z = 9}$

Problema P3. (Análisis)

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de b para que $f(x)$ sea continua.

b) Calcular el área delimitada por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo (0, 1).

Solución:

problema típico de continuidad e integración

a) La expresión 4 - x^2 es continua en todos los reales y por tanto también en (-∞, 1] y la expresión b/x no es continua en x = 0 y por tanto si lo es en su intervalo de definición (1, ∞)

El único sitio donde puede no ser continua es en x = 1 donde la función cambia de expresión. Apliquemos las condiciones de continuidad en x = 1

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 4 - x^2 = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{b}{x} = b$$

$f(1)$ = 3

Para que sea continua los tres valores han de ser iguales, por tanto, $\boldsymbol{b}$ **= 3**

b) En el intervalo (0, 1) la expresión correspondiente es $f(x)$ = 4 - x^2. Esta expresión es positiva en el intervalo (-2, 2) y por tanto también lo es en (0, 1). De esta manera el área es la integral definida siguiente:

$$\boldsymbol{A} = \int_0^1 (4 - x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{u^2}$$

Problema P4. Análisis:

Los estatutos de una asociación ecologista establecen que la asociación debe disolverse cuando supere los 100 socios. Se sabe, además, que el número de sus socios varía con los años transcurridos desde su fundación, "x", de acuerdo con la función siguiente: $N(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 64$.

a) ¿Cuántos han sido los socios fundadores? Transcurridos 7 años, ¿cuántos socios habrá? ¿Se disolverá la sociedad en ese momento? (hasta 1 punto).

b) Estudiar el comportamiento (crecimiento, decrecimiento) del número de socios en el intervalo [0, 7] ¿cuál será el número mínimo de socios y cuándo se alcanzará? (hasta 2 puntos)

Solución:

a) Los socios fundadores son los que hay en el comienzo de la asociación, es decir cuando $x = 0$. Sustituyendo $x = 0$ en la expresión tenemos $N(0)$ = **64 socios fundadores**.

En 7 años se cumple que hay $N(7) = 7^3 - 9 \cdot 7^2 + 24 \cdot 7 + 64 = 134 > 100$. Se disuelve cuando haya más de 100, por lo tanto, a los 7 años ya no estará, veamos si lo hace antes. Podemos ver los socios los años anteriores y ver si hay más de 100 antes del séptimo año.

X	1	2	3	4	5	6	7
$N(x)$	80	84	82	80	84	100	134

El primer año que lo supera 100 socios es el séptimo que es cuando se disuelve

b) Estudiemos la monotonía a partir de la derivada de $N(x)$

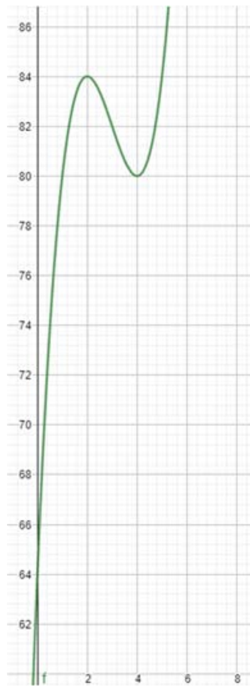
$N'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \rightarrow N'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24}}{6} = \begin{matrix} x = 4 \\ x = 2 \end{matrix}$

Veamos cuando $N'(x)) \begin{cases} > 0 & crece \\ = 0 & posible\ Punto\ relativo \\ < 0 & decrece \end{cases}$

0	2	4	7
Crece $N'(x) > 0$	decrece $N'(x) < 0$	crece $N'(x) > 0$	

Crecimiento de $N(x)$ en (0, 2) ∪ (4, 7) y decrecimiento en (2, 4)

Máximo relativo en (2, 84) y mínimo relativo en (4, 80)



Dado que la función es continua los máximos y mínimos absolutos se producen en los puntos relativos o en los extremos de los intervalos de definición de la función, en nuestro caso $N(0) = 64$ y $N(7) = 134$. Como estos valores son mayores que los ocurridos en 2 y en 4 estos son los máximos y mínimos absolutos.

Conclusión el mínimo número de socios es de 64 en el año 0 (fundación)

Problema P5. Estadística y probabilidad:

En un gimnasio, el 52 % de los socios son hombres y el resto son mujeres. Entre los socios, el 35% de los hombres practica "spinning" así como el 60 % de las mujeres. Si elegimos un socio al azar, a) Calcular la probabilidad de que practique "spinning". b) Si el socio elegido no practica "spinning", obtener la probabilidad de que sea una mujer.

Solución:

se puede hacer mediante diagrama de árbol y teorema de Bayes o por tablas de contingencia o de doble entrada, elegimos este segundo método

Si hay N usuarios en el gimnasio se cumple que

Nº de hombres = **0.52** N   y nº de mujeres = **0.48** N

Nº de hombres que hacen spining = **0.35** · 0.52N = 0.182 N

Nº de mujeres que hacen spining = **0.60** · 0.48N = 0.288 N

	spinning	No spinning	Total
Hombres	0.182 N	0.338 N	**0.52 N**
Mujeres	0.288 N	0.192 N	**0.48 N**
Total	0.47 N	0.53 N	N

Con esta tabla es ya muy fácil calcular cualquier probabilidad usando **Laplace**:

a) P("spining") = $\frac{0.47N}{N} = \mathbf{0.47}$
b) P("mujer"/"no sping") = $\frac{0.192N}{0.53N} = \mathbf{0.362}$

Problema P6. Estadística y probabilidad:

El peso de la población adulta con sobrepeso sigue una distribución normal de media 120 kg y desviación típica de 20 kg. Además, a los individuos con un peso superior a 150 kg se les considera "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A".

a) ¿Qué porcentaje de la población de adultos con sobrepeso son "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A"?

b) Si se elige aleatoriamente una muestra de 20 adultos con sobrepeso, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra esté entre 110 kg y 125 kg

Solución:

problema de distribución normal

x = "peso población adulta con sobrepeso" → $N(\mu = 120, \sigma = 20)$

Tipificación $z = \frac{x-120}{20}$ → $N(0, 1)$

a) $p(x > 150) = p(z > (150 - 120)/20) = p(z > 1.5) = 1 - p(z < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$ → 6.68 %

El porcentaje de la población de adultos con sobrepeso que son "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A" es del **6.68 %**.

b) y = "media de peso muestra 20" → $N(\mu = 120, \sigma = \frac{20}{\sqrt{20}}) = N(\mu = 120, \sigma = 4.47)$

$p(110 < y < 125) = p(\frac{110-120}{4.47} < z < \frac{125-120}{4.47}) = p(-2.23 < z < 1.12) = p(z < 1.12) - (1 - p(z < 2.23)) =$

$0.8686 - (1 - 0.9871) = 0.8557$

Si se elige aleatoriamente una muestra de 20 adultos con sobrepeso, la probabilidad de que la media del peso de la muestra esté entre 110 kg y 125 kg es de **0.8557**.

C1. (Números y álgebra)

Un hijo tiene 22 años menos que su padre y la suma de sus edades es 46 años ¿qué edad tiene el hijo

Solución

x = edad hijo e y = edad padre → $\left.\begin{matrix} x+22=y \\ x+y=46 \end{matrix}\right\}$ $x + (x + 22) = 46$ → $2x = 24$ → $x = 12$ años el hijo

El hijo tiene **12** años.

C2. (Análisis)

Dada la función $f(x) = ax - 33 + 5/x$, determinar a para que verifique $f'(1) = 2$

Solución

Derivamos $f'(x) = a - 5/x^2$ → $f'(1) = a - 5 = 2$ → $a = 7$

$\boldsymbol{a = 7}$

C3. (Estadística y probabilidad)

La nota media de los alumnos de segundo de bachillerato de cierto instituto sigue una distribución normal de media 6.8 y desviación típica 1.1. Calcular la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de un 9

Solución

x = "nota media" → $N(\mu = 6.8, \sigma = 1.1)$

$z = \frac{x-6.8}{1.1}$ → $N(1, 0)$ (tipificación)

$p(x > 9) = p(z > \frac{9-6.8}{1.1}) = p(z > 2) = 0.9772$

La probabilidad de que un alumno haya obtenido más de un 9 es de **0.9772**.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2021
Comunidad autónoma de
CATALUÑA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JAIME CARRASCOSA OROZCO

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 2

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Una fàbrica estima que el benefici mensual, en milers d'euros, per cada tona de confeti venuda és donat per la funció $f(x)=\dfrac{-0,2x^2+5x-20}{x}$, en què x representa el nombre de tones de confeti venudes.

a) Determineu en quin interval de valors s'ha de trobar la variable x perquè la fàbrica no tingui pèrdues.
[1,25 punts]

b) Calculeu la quantitat de tones de confeti que proporciona el benefici màxim i digueu quin és aquest benefici.
[1,25 punts]

2. En una pastisseria volen preparar capsetes de panellets per a obsequiar els millors clients durant la setmana de la Castanyada. En total, disposen de 120 panellets de pinyons i de 150 panellets de coco. Volen preparar capsetes de dos tipus: les del primer tipus contindran 3 panellets de pinyons i 2 de coco, i les del segon tipus contindran 4 panellets de pinyons i 6 de coco. La idea de la pastisseria és preparar el nombre màxim de capsetes possible amb els panellets de què disposen tenint en compte que, com a mínim, han de preparar 9 capsetes de cada tipus.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible.
[1,25 punts]

b) Determineu quantes capsetes cal preparar de cada tipus per a fer el màxim nombre d'obsequis possible. Indiqueu si, en aquest cas, s'utilitzaran tots els panellets disponibles i, si no és així, quants en sobraran de cada tipus.
[1,25 punts]

3. En una festa familiar s'han reunit 20 persones. Si comptem el total d'homes i dones junts, observem que n'hi ha el triple que de nens. A més, sabem que, si hi hagués assistit una dona més, el nombre de dones hauria estat igual que el nombre d'homes.

a) Plantegeu un sistema d'equacions per a esbrinar quants homes, quantes dones i quants nens van assistir a la festa.
[0,75 punts]

b) Resoleu el sistema de l'apartat anterior i interpreteu-ne el resultat.
[1,75 punts]

4. Un granger vol construir un corral rectangular per als seus conills. Sabem que només disposa de 40 m lineals de tanca metàl·lica.

a) Anomenem x l'amplària del corral i y la seva llargària. Escriviu la funció que permet calcular l'àrea del corral tenint en compte només l'amplària x.
[1,25 punts]

b) Calculeu en quin punt assoleix el seu màxim la funció que heu trobat a l'apartat anterior. Deduïu quina ha de ser l'amplària x i quina la llargària y perquè el corral tingui l'àrea màxima. Quina serà aquesta àrea màxima?
[1,25 punts]

5. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu l'expressió general de A^n. Demostreu que la inversa de A^n és $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
[1,25 punts]

b) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació matricial $A^{10} \cdot X - A^{20} = A$.
[1,25 punts]

6. Considereu la funció real de variable real $f(x) = 4x^3 + ax^2 - 2$.

a) Determineu el valor del paràmetre real a per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$.
[1,25 punts]

b) Calculeu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$ quan $a = 12$. Indiqueu també els punts en què hi ha extrems relatius i classifiqueu-los.
[1,25 punts]

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1. Una fàbrica estima que el benefici mensual, en milers d'euros, per cada tona de confeti venuda és donat per la funció $f(x)=\frac{-0,2x^2+5x-20}{x}$, en què x representa el nombre de tones de confeti venudes.

   a) Determineu en quin interval de valors s'ha de trobar la variable x perquè la fàbrica no tingui pèrdues.
   [1,25 punts]

b) Calculeu la quantitat de tones de confeti que proporciona el benefici màxim i digueu quin és aquest benefici.
[1,25 punts]

Solución:

$a)$ La fábrica no tendrá pérdidas si $f(x) \geq 0$. Como x es el número de unidades vendidas, $x \geq 0$, y la función $f(x)$ será positiva o negativa cuando lo sea su numerador.

$-0.2 \cdot x^2 + 5x - 20 = 0 \rightarrow \; x^2 - 25x + 100 = 0 \rightarrow \; x = \frac{25 \pm \sqrt{625-400}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{25 \pm 15}{2} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 20.$

La función $g(x) = -0.2 \cdot x^2 + 5x - 20$, que es una parábola cóncava $(\cap)$, ya que es negativo el coeficiente de x^2, y corta al eje de abscisas en los puntos $x_1 = 5 \; y \; x_2 = 20$, por tanto:

La fábrica no tendrá pérdidas si fabrica entre **5** y **20** unidades.

$b)$ Hallamos el beneficio máximo anulando su primera derivada y viendo cuando es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(x) = \frac{(-0.4 \cdot x + 5) \cdot x - (-0.2 \cdot x^2 + 5x - 20) \cdot 1}{x^2} = \frac{-0.4 \cdot x^2 + 5x + 0.2 \cdot x^2 - 5x + 20}{x^2} = \frac{-0.2 \cdot x^2 + 20}{x^2}.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-0.2 \cdot x^2 + 20}{x^2} = 0 \rightarrow \; -0.2 \cdot x^2 + 20 = 0 \rightarrow \; 0.2 \cdot x^2 = 20 \rightarrow \; x^2 = 100 \rightarrow x = \pm\sqrt{100} = \pm 10 \Rightarrow x = 10.$

La solución negativa no tiene sentido.

$$f''(x) = \frac{-0.4x \cdot x^2 - (-0.2x^2 + 20) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-0.4x^2 + 0.4x^2 - 40}{x^3} = \frac{-40}{x^3} \rightarrow f''(10) = \frac{-40}{10^3} < 0$$

El beneficio es máximo para $x = 10$.

$$f(10) = \frac{-0.2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 20}{10} = \frac{-20 + 50 - 20}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

El máximo beneficio mensual es de **1 000** euros y se obtiene vendiendo **10** toneladas de confeti

Problema: 2

2. En una pastisseria volen preparar capsetes de panellets per a obsequiar els millors clients durant la setmana de la Castanyada. En total, disposen de 120 panellets de pinyons i de 150 panellets de coco. Volen preparar capsetes de dos tipus: les del primer tipus contindran 3 panellets de pinyons i 2 de coco, i les del segon tipus contindran 4 panellets de pinyons i 6 de coco. La idea de la pastisseria és preparar el nombre màxim de capsetes possible amb els panellets de què disposen tenint en compte que, com a mínim, han de preparar 9 capsetes de cada tipus.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible.

[1,25 punts]

b) Determineu quantes capsetes cal preparar de cada tipus per a fer el màxim nombre d'obsequis possible. Indiqueu si, en aquest cas, s'utilitzaran tots els panellets disponibles i, si no és així, quants en sobraran de cada tipus.

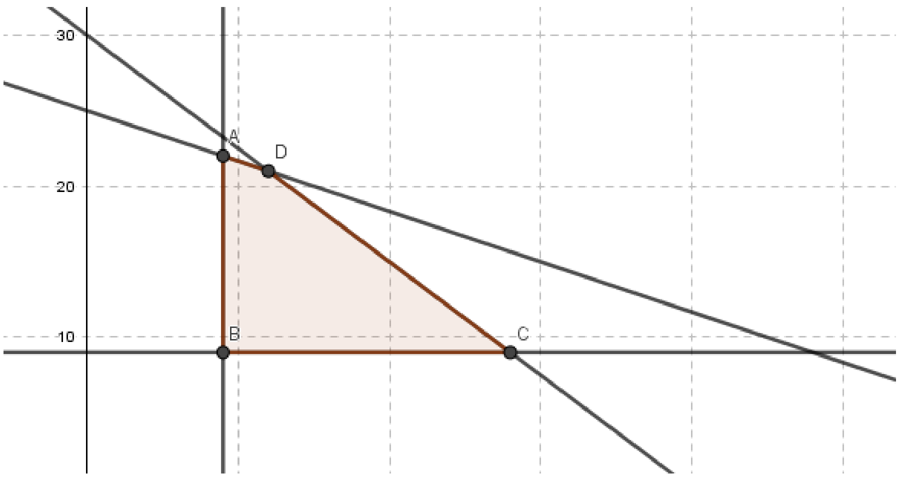
[1,25 punts]

Solución:

Es un problema de programación lineal.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 3x+4y\le 120 \\ 2x+6y\le 150 \\ x\ge 9;\ y\ge 9 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} 3x+4y\le 120 \\ x+3y\le 75 \\ x\ge 9;\ y\ge 9 \end{array}\right\}.$

La región factible es:



Los vértices de la región factible son:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=9 \\ x+3y=75 \end{array}\right\} \Rightarrow 9+3y=75;\ \ 3y=66;\ \ y=22 \Rightarrow A(9,22).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=9 \\ y=9 \end{array}\right\} \Rightarrow D(9,9).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=9 \\ 3x+4y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x+36=120;\ \ 3x=84;\ \ x=28 \Rightarrow C(28,9).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+4y=120 \\ x+3y=75 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} -3x-4y=-120 \\ 3x+9y=225 \end{array}\right\} \Rightarrow 5y=105;\ \ y=21;\ \ x+63=75;\ \ x=12 \Rightarrow (12,21).$

La función de objetivo es: $f(x,y) = x + y$

$b)$ Calculamos el valor de la función objetivo en cada vértice:

$A: f(9,22) = 9 + 22 = 31.$

$B: f(9,9) = 9 + 9 = 18.$

$C: f(28,9) = 28 + 9 = 37.$

$D: f(12,21) = 12 + 21 = 33.$

El valor máximo se obtiene en el vértice $C(29,9)$.

El máximo se obtiene con $\mathbf{29}$ cajas del primer tipo y $\mathbf{9}$ del segundo.

Veamos lo que sobra con dicho máximo:

$Piñones: 120 - (28 \cdot 3 + 9 \cdot 4) = 120 - (84 + 36) = 120 - 120 = 0.$

$Coco: 150 - (28 \cdot 2 + 9 \cdot 6) = 150 - (56 + 54) = 150 - 110 = 40.$

Sobran $\mathbf{40}$ panellets de coco

Problema 3:

3. En una festa familiar s'han reunit 20 persones. Si comptem el total d'homes i dones junts, observem que n'hi ha el triple que de nens. A més, sabem que, si hi hagués assistit una dona més, el nombre de dones hauria estat igual que el nombre d'homes.

a) Plantegeu un sistema d'equacions per a esbrinar quants homes, quantes dones i quants nens van assistir a la festa.
[0,75 punts]

b) Resoleu el sistema de l'apartat anterior i interpreteu-ne el resultat.
[1,75 punts]

Solución:

a) Llamamos x, y, z al número de hombres, mujeres y niños, respectivamente, que asisten a la fiesta familiar. El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ x+y-3z=0 \\ x-y=1 \end{array}\right\}.$$

Resolvemos por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 20 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-3-1-60}{-1-3-1-3}=\frac{-64}{-8}=8.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 20 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{1-60+3}{-8}=\frac{4-60}{-8}=\frac{-56}{-8}=7.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{1-20-20-1}{-8}=\frac{-40}{-8}=5.$$

Se han reunido en la fiesta **8** hombre, **7** mujeres y **5** niños.

Problema 4:

4. Un granger vol construir un corral rectangular per als seus conills. Sabem que només disposa de 40 m lineals de tanca metàl·lica.

a) Anomenem x l'amplària del corral i y la seva llargària. Escriviu la funció que permet calcular l'àrea del corral tenint en compte només l'amplària x.

[1,25 punts]

b) Calculeu en quin punt assoleix el seu màxim la funció que heu trobat a l'apartat anterior. Deduïu quina ha de ser l'amplària x i quina la llargària y perquè el corral tingui l'àrea màxima. Quina serà aquesta àrea màxima?

[1,25 punts]

Solución:

$a)$ Llamamos x, y a las dimensiones del corral. Como sólo dispone de 40 m de tela metálica, el perímetro es:

$2x + 2y = 40 \rightarrow \ x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x.$

El área del corral es:

$$S = x \cdot y \Rightarrow S(x) = x \cdot (20 - x) \Rightarrow S(x) = 20x - x^2$$

$$S(x) = 20x - x^2 b)$$

Para calcular cuando es máxima el área calculamos los valores que anulan a la derivada primera

$$S'(x) = 20 - 2x \rightarrow S'(x) = 0 = 20 - 2x \rightarrow \ 10 - x = 0 \rightarrow x = 10.$$

Para saber si en $x = 10$ la función presenta un máximo o un mínimo determinamos el signo de la derivada segunda en ese punto

$S''(x) = -2 < 0 \rightarrow S''(10) = -2$ Luego el punto es un máximo

$y = 20 - 10 = 10.$

El área es máxima para el cuadrado de lado $\mathbf{10}$ metros

$$S = x \cdot y = 10 \cdot 10 = 100$$

El área máxima es de $\mathbf{100}$ metros cuadrados

Problema 5:

5. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu l'expressió general de A^n. Demostreu que la inversa de A^n és $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
[1,25 punts]

b) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació matricial $A^{10} \cdot X - A^{20} = A$.
[1,25 punts]

Solución:

$a)$ Calculamos las potencias sucesivas de A

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que podemos generalizar:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la inversa de A^n por el método de Gauss-Jordan.

$$(A^n|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & n & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -n \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\{F_1 \to F_1 - nF_2\}$$

Por tanto, la inversa de A^n es $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b)$ Despejamos X de la ecuación. Pasamos $-A^{20}$ sumando, y multiplicamos por la inversa de A^{10}.

$$A^{10} \cdot X - A^{20} = A \to \ A^{10} \cdot X = A + A^{20} \to \ (A^{10})^{-1} \cdot A^{10} \cdot X = (A^{10})^{-1} \cdot (A + A^{20}) \to I \cdot X = (A^{10})^{-1} \cdot (A + A^{20})$$

$$X = (A^{10})^{-1} \cdot (A + A^{20})$$

En particular A^{10} y A^{20} valen:

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ y \ A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $(A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $(A^{10})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sustituimos y operamos:

$$A + A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to X = (A^{10})^{-1} \cdot (A + A^{20}) = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Problema:6

6. Considereu la funció real de variable real $f(x) = 4x^3 + ax^2 - 2$.

a) Determineu el valor del paràmetre real a per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$.

[1,25 punts]

b) Calculeu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$ quan $a = 12$. Indiqueu també els punts en què hi ha extrems relatius i classifiqueu-los.

[1,25 punts]

Solución:

a) La función dada es continua y derivable, por lo que, para tener un extremo relativo debe anularse la primera derivada en ese punto:

$$x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \to f'(x) = 12x^2 + 2ax \to f'(-1) = 12 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) = 0 \to$$

$$12 - 2a = 0 \to \quad 6 - a = 0 \to a = 6.$$

$$\boldsymbol{a = 6}$$

b) Para $a = 12$ la función es $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - 2$.

Una función es creciente cuando su primera derivada es positiva y es decreciente cuando es negativa.

Analizamos el signo de la derivada primera:

$$f'(x) = 12x^2 + 24x \to f'(x) = 0 = 12x^2 + 24x = \ 12x(x+2) = 0$$

Se anula para $x = -2, y\ para\ x = 0$.

Tenemos los intervalos: $(-\infty, -2), (-2, 0)\ y\ (0, +\infty)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente. Por ejemplo, $x = 1 \in (0, +\infty)$:

$f'(1) = 12 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 = 36 > 0 \Rightarrow$ La función es creciente

Luego:

Si $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ entonces la función es creciente, y si $x \in (-2, 0)$ es decreciente

Para $x = -2$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, luego alcanza un máximo.

Para $x = 0$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, luego alcanza un mínimo.

$$f(-2) = 4 \cdot (-2)^3 + 12 \cdot (-2)^2 - 2 = -32 + 48 - 2 = 48 - 34 = 14 \Rightarrow$$

$\boldsymbol{(-2, 14)}$ es un máximo relativo

$$f(0) = -2 \Rightarrow$$

$\boldsymbol{(0, -2)}$ es un mínimo relativo

RESPUESTAS SÈRIE 2

Problema 1:

1. Considereu la paràbola $y = 4 - x^2$ i un valor $a > 0$.

a) Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = -2ax + a^2 + 4$ i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades.

[1,25 punts]

b) Calculeu el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima.

[1,25 punts]

Solución:

a) Para determinar la recta tangente buscamos el punto de tangencia, y con la derivada en ese punto, la pendiente de la recta:

Para $x = a$ es $f(a) = 4 - a^2$, por lo cual el punto de tangencia es $P(a, 4 - a^2)$.

$f'(x) = -2x \to m = f'(a) = -2a$.

La ecuación de la recta tangente es: $y = y_0 + m(x - x_0)$

$y = (4 - a^2) - 2a(x - a) = 4 - a^2 - 2ax + 2a^2 = -2ax + a^2 + 4$. C.q.d.

La recta tangente corta a los ejes de coordenadas en los puntos:

$X: \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ y = -2ax + a^2 + 4 \end{array}\right\} \to -2ax + a^2 + 4 = 0 \to \; x = \frac{a^2+4}{2a} \to A\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)$.

$Y: \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = -2ax + a^2 + 4 \end{array}\right\} \to y = a^2 + 4 \to B(0, a^2 + 4)$.

Queda comprobado que la recta tangente es $\boldsymbol{y = -2ax + a^2 + 4}$, y conta a los ejes coordenados en los puntos: $\boldsymbol{A\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)}$ y $\boldsymbol{B(0, a^2 + 4)}$.

b) El triángulo de vértices OAB es rectángulo, y su área vale: $\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+4}{2a} \cdot (a^2 + 4)$. Imponemos que sea mínima anulando la derivada primera y haciendo positiva la segunda:

$Área(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+4}{2a} \cdot (a^2 + 4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4)^2}{a}$.

$Área'(a) = \frac{1}{4} \cdot \frac{[2\cdot(a^2+4)\cdot 2a]\cdot a - (a^2+4)^2 \cdot 1}{a^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4)\cdot[4a^2 - (a^2+4)]}{a^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4)\cdot(3a^2-4)}{a^2} = 0$.

$(a^2 + 4) \cdot (3a^2 - 4) = 0$. Es siempre distinto de cero: $a^2 + 4$. Anulamos:

$3a^2 - 4 = 0 \to \; 3a^2 = 4 \to a = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. La solución negativa da longitudes negativas luego no tiene sentido geométrico

$$Área''(a) = \frac{1}{4} \cdot \frac{[2a\cdot(3a^2-4) + (a^2+4)\cdot 6a]\cdot a^2 - [(a^2+4)\cdot(3a^2-4)]\cdot 2a}{a^4} = \frac{3a^4+16a^3+16}{2a^3} \to Área''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0$$

El área del triángulo es mínima para $\boldsymbol{a} =$

Problema: 2

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real p:

$$\begin{cases} px+y+z=2 \\ 2x+py+p^2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre p.
[1,5 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $p=2$.
[1 punt]

Solución:

a) Para discutir el sistema estudiamos los rangos de las matrices de los coeficientes y ampliada:

$$M=\begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|M|=\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=p^2+2+2p^2-2p-p^3-2=0 \rightarrow\ p^3-3p^2+2p=0;$$

$$p(p^2-3p+2)=0 \rightarrow p=0. \quad \text{y} \quad p^2-3p+2=0 \rightarrow \quad p=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm1}{2} \rightarrow p=1, p=2.$$

Por lo que si $p\neq 0, p\neq 1,\ p\neq 2$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es **compatible y determinado**.

Para $p=0 \rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4+2-4=2\neq 0$, luego su rango es 3, mientras que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es **incompatible**.

Para $p=1 \rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2+4+2-4-1-4=-1\neq 0$, luego su rango es 3, mientras que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Para $p=2 \rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, tiene la primera y la tercera filas iguales, luego su rango es 2, igual al rango de la matriz de los coeficientes y menos que el número de incógnitas, luego el sistema es **compatible e indeterminado**.

La discusión completa del sistema es:

- Si $p=0$ o bien $p=1$ el $RgM=2\neq RgM^*=3$ y el sistema es **incompatible**.
- Si $p=2$ el $RgM=2=RgM^*<n$ y el sistema es compatible **indeterminado**.
- Si $p\neq 0,\ p\neq 1$ y $p\neq 2$ el $RgM=3=RgM^*=n$ y el sistema es **compatible determinado**.

$b)$ Si $p = 2$ el sistema es: $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 - \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -2x - y = -2 + \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{array}\right\}$$

Hacemos $z = \lambda$, y sumamos: $y = -1 - 3\lambda$.

$$2x + y = 2 - \lambda \rightarrow \; 2x - 1 - 3\lambda = 2 - \lambda \rightarrow \; 2x = 3 + 2\lambda \rightarrow \; x = \frac{3}{2} + \lambda.$$

$$\boldsymbol{x = \frac{3}{2} + \lambda, y = -1 - \lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in R}$$

Problema 3:

3. Considereu el punt $P = (-1, 3, 1)$, el pla $\pi: x = y$ i la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$.

a) Trobeu les coordenades del punt P' simètric a P respecte al pla π.
[1,25 punts]

b) De tots els plans que contenen la recta r, trobeu l'equació cartesiana del que és perpendicular al pla π.
[1,25 punts]

Solución:

a) La recta t que pasa por $P(-1,3,1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x - y = 0$ tiene como vector director al vector normal de π: $\vec{n} = (1,-1,0) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x - y = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow -1 + \lambda - (3 - \lambda) = 0;\ -1 + \lambda - 3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow M(1,1,1).$$

Debe verificarse: $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'}$.

$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = [(1,1,1) - (-1,3,1)] = (2,-2,0)$.

$\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OM} = [(x,y,z) - (1,1,1)] = (x-,y-1,z-1)$.

$$(2,-2,0) = (x-1,y-1,z-1) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x - 1 = 2 \rightarrow x = 3 \\ y - 1 = -2 \rightarrow y = -1 \\ z - 1 = 0 \rightarrow z = 1 \end{matrix}\right\}.$$

El punto simétrico pedido es: $\boldsymbol{P'(3,-1,1)}$

b) De la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$ conocemos un punto: $Q(1,0,2)$ y el vector de dirección: $\overrightarrow{v_r} = (2,3,1)$.

Buscamos un vector perpendicular a $\overrightarrow{v_r} = (2,3,1)$ y al vector normal al plano π: $(1,-1,0)$

$$\overrightarrow{n'_\gamma} = \overrightarrow{v_r} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -i + 3k + 2k - j = -i - j + 5k \Rightarrow\Rightarrow \overrightarrow{n_\gamma} = (1,1,-5).$$

El haz de planos γ tiene por expresión general: $\gamma \equiv x + y - 5z + D = 0$. Imponemos que contenga a $Q(1,0,2)$: $\gamma \equiv x + y - 5z + D = 0 \longrightarrow 1 + 0 - 5 \cdot 2 + D = 0;\ \ D - 9 = 0 \Rightarrow D = 9$.

El plano pedido es: $\boldsymbol{x + y - 5z + 9 = 0}$

Problema 4:

4. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ definida en el domini $x>0$, en què ln és el logaritme neperià.

a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba $y=f(x)$ en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt.
[1 punt]

b) Determineu si la funció $f(x)$ té alguna asímptota horitzontal.
[0,5 punts]

c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y=f(x)$ i les rectes $x=1$ i $x=$ e. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini $0<x<5$, en què quedi representada l'àrea que heu calculat.
[1 punt]

Solución:

a) Buscamos un punto en el que la tangente sea horizontal, es decir:

$$f'(x)=0=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}\rightarrow\ 1-\ln(x)=0\rightarrow\ \ln(x)=1\rightarrow x=e\rightarrow f(e)=\frac{\ln(e)}{e}=\frac{1}{e}.$$

El punto buscado tiene de coordenadas: $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{e},\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}\right)$

Como ya hemos visto que es un punto de tangente horizontal, podría ser un punto de inflexión si se anulara la derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln(x))\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\ln(x)-3}{x^3}\rightarrow f''(e)=\frac{2\ln(e)-3}{e^3}=\frac{2\cdot 1-3}{e^3}=\frac{-1}{e^3}<0$$

En $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{e},\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}\right)$ la función alcanza un **máximo** relativo

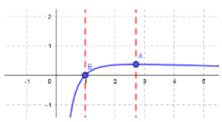
b) Calculamos el comportamiento de la función cuando tiende a infinito

$k=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$ Tanto el numerador como el denominador tienden a infinito por lo que podemos aplicar la regla de *L'Hôpital*.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

La recta $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ es asíntota horizontal cuando $x>0$

c) Para $x=1, y=0$, la curva pasa por el punto $B(1,0)$.



Calculamos el área mediante un cambio de variables: $\ln(x)=t\rightarrow\frac{1}{x}\cdot dx=dt$

$$S=\int_1^e f(x)\cdot dx=\int_1^e\frac{\ln(x)}{x}\cdot dx=\int_0^1 t\cdot dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{1}{2}=0.5\,u^2.$$

Área = $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}=\mathbf{0.5}\,\boldsymbol{u}^{\mathbf{2}}$

Problema 5:

5. *a*) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial $A^2X = A - 3I$, en què I és la matriu identitat.

[1,25 punts]

b) Una matriu quadrada M satisfà que $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$, en què I és la matriu identitat. Justifiqueu que M és invertible i expresseu la inversa de M en funció de les matrius M i I.

[1,25 punts]

Solución:

a) Resolvemos la ecuación:

$$A^2X = A - 3I \rightarrow \ (A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot (A - 3I) \rightarrow I \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot (A - 3I) \rightarrow$$

$$X = (A^2)^{-1} \cdot (A - 3I)$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa de A^2 por el método de Gauss.

$$(A^2|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\{F_1 \leftrightarrow F_3\}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\{F_1 \leftrightarrow F_3\}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) $M^3 - 3M^2 + 3M - I = O \rightarrow \ M^3 - 3M^2 + 3M - O = I \rightarrow \ M \cdot (M^3 - 3M + 3I) = I.$

Por la definición de matriz inversa, la matriz $(M^3 - 3M + 3I)$ es la inversa de la matriz M:

$$\boldsymbol{M^{-1} = M^3 - 3M + 3I}$$

Problema 6:

6. Considereu la funció $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.

***a*)** Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.
[1,25 punts]

***b*)** Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té exactament dues solucions entre $x = -1$ i $x = 3$.
[1,25 punts]

Solución:

a) La función $f(x)$ es suma de una función exponencial y de una función polinómica, ambas continuas en todo su dominio, que es R.

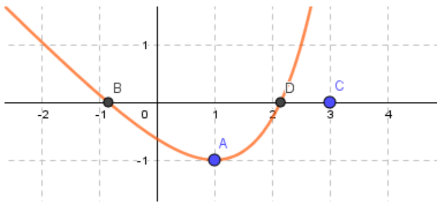
Estudio de los extremos relativos, crecimiento y decrecimiento. Calculamos la derivada primera:

$f'(x) = e^{x-1} - 1 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow e^{x-1} - 1 = 0 \rightarrow \; e^{x-1} = 1 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow \; x = 1.$

Para $x > 1 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow$ La función es creciente si $x \in (1, +\infty)$

Para $x < 1 \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow$ La función es decreciente si $x \in (-\infty, 1)$

Por lo tanto en $x = 1$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, luego en ese punto alcanza un mínimo.



El punto $\boldsymbol{A(1, -1)}$ es un mínimo relativo.

b) La función es continua en toda la recta real. Vamos a aplicar el teorema de Bolzano en cada uno de los intervalos $(-1, 1)$ y $(1, 3)$.

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

$(-1, 1)$: $\begin{cases} f(-1) = e^{-1-1} - (-1) - 1 = e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0 \\ f(1) = e^{1-1} - 1 - 1 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \end{cases}$ Como $f(x)$ es monótona decreciente en $(-1,1)$,aplicando el *teorema de Bolzano* sabemos que tiene una única raíz en ese intervalo $(-1, 1)$:

$(1, 3)$: $\begin{cases} f(1) = e^{1-1} - 1 - 1 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \\ f(3) = e^{3-1} - 3 - 1 = e^2 - 4 \cong 4{,}39 > 0 \end{cases}$. Como $f(x)$ es monótona creciente en $(1, 3)$,aplicando el *teorema de Bolzano* sabemos que tiene una única raíz en ese intervalo $(1, 3)$

Por tanto $f(x)$ tiene exactamente **dos** raíces en $(-1, 3)$.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2021
Comunidad autónoma de
EXTREMADURA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

Problema 1:

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifiquen el siguiente sistema de ecuaciones matriciales: $\left.\begin{array}{r} 3X+2Y=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ 2X-3Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$.

Problema 2:

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x no existe la inversa de A.

$b)$ Para $x=2$, resuelve la ecuación matricial: $AX-B=C$.

Problema 3:

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ y & -3 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, los valores de x, y, z para que se verifique que:

$A' \cdot B = C - z \cdot I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Problema 4:

Un taller tapiza butacas y sillones. Para tapizar una butaca se necesitan 2 m^2 de tela con un beneficio de 40 euros, mientras que para tapizar un sillón se necesitan 4 m^2 con un beneficio de 100 euros. El taller dispone diariamente de un máximo de 100 m^2 de tela y no puede tapizar más de 40 butacas ni más de 20 sillones. Calcular, justificando la respuesta:

$a)$ El número de butacas y de sillones que deben tapizar diariamente para obtener unos beneficios máximos.

$b)$ El valor de dichos beneficios máximos.

Problema 5:

El crecimiento (en cm) de una variedad de trigo, $C(x)$, en función de la cantidad de fertilizando (en gramos por metro cuadrado) utiliza, x, viene dado por la función:

$$C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \ \ (0 \leq x \leq 4).$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que el crecimiento alcanza su mínimo con una dosis de 3 gramos por metro cuadrado y que para esta dosis las plantas de trigo crecen 8 cm.

Problema 6:

Las ventas de un producto (en miles de euros), $V(t)$, en los 6 primeros años desde que se lanzó al mercado, evolucionan de acuerdo con la siguiente función:

$$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100 \ \ (0 \leq t \leq 6).$$

Se pide determinar, razonando las respuestas:

$a)$ Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las ventas a lo largo de los 6 años.

$b)$ Representar gráficamente la función $V(t)$.

Problema 7:

$a)$ Determinar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 7x + 6$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 5$.

$b)$ Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)}$.

Problema 8:

Una empresa constructora utiliza tres tipos de piedra en un bloque de edificios: granito (50 %), mármol (40 %) y artificial (10 %). El 10 % del granito, el 5 % del mármol y el 1 % de la artificial presenta grietas por lo que no puede ser instalado. Se pide, razonando la respuesta:

$a)$ Calcular la probabilidad de que, al encargar una piedra, ésta presente grietas.

$b)$ Calcular la probabilidad de que una piedra, que sabemos que presenta grietas, sea de mármol.

Problema 9:

En un estudio sobre la práctica del deporte en la universidad, se pregunta a 150 universitarios de los cuales 120 afirman practicar algún deporte. Calcular, razonando la respuesta, un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95 % para la proporción de universitarios que practican deporte. Razona la respuesta.

Problema 10:

La calificación que obtienen los candidatos que se presentan a una oposición sigue una distribución normal con desviación típica 1,2 puntos. Si se quiere realizar un estudio sobre la dificultad de las pruebas en dicha oposición, ¿cuántos candidatos deben seleccionar para obtener un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la calificación media que tenga una longitud de 0.5 puntos? Razona la respuesta.

RESPUESTAS

Problema 1:

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifiquen el siguiente sistema de ecuaciones matriciales: $\left.\begin{array}{r} 3X+2Y=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ 2X-3Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} \end{array}\right\}.$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} 3X+2Y=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ 2X-3Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 9X+6Y=\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -6 & 15 \end{pmatrix} \\ 4X-6Y=\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -20 & 24 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 13X=\begin{pmatrix} 0 & 13 \\ -26 & 39 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{array}{r} 6X+4Y=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \\ -6X+9Y=\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 30 & -36 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 13y=\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 26 & -26 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}}.$$

Problema 2:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x no existe la inversa de A.

$b)$ Para $x = 2$, resuelve la ecuación matricial: $AX - B = C$.

Solución:

$a)$ Una matriz no es invertible cuando su determinante es cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ no\ tiene\ inversa\ para\ \boldsymbol{x = 1}}.$$

$b)\ A \cdot X - B = C;\ \ A \cdot X = B + C;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B + C);.I \cdot X = A^{-1} \cdot (B + C) \Rightarrow$

$\underline{X = A^{-1} \cdot (B + C)}.$

Para $x = 2$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 + F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right] = = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{15} & \mathbf{-7} \end{pmatrix}}.$$

Problema 3:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ y & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, los valores de x, y, z para que se verifique que:

$A' \cdot B = C - z \cdot I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Solución:

$$A' \cdot B = C - z \cdot I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ y & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} - z \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2x + 4y & x - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z & 1 \\ 0 & -8 - z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2 = -z \\ -2x + 4y = 0 \\ x - 12 = -8 - z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2 = z \\ x - 2y = 0 \\ x + z = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{x = 2;\ \ y = 1;\ \ z = 2}}.$$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Problema 4:

Un taller tapiza butacas y sillones. Para tapizar una butaca se necesitan 2 m^2 de tela con un beneficio de 40 euros, mientras que para tapizar un sillón se necesitan 4 m^2 con un beneficio de 100 euros. El taller dispone diariamente de un máximo de 100 m^2 de tela y no puede tapizar más de 40 butacas ni más de 20 sillones. Calcular, justificando la respuesta:

$a)$ El número de butacas y de sillones que deben tapizar diariamente para obtener unos beneficios máximos.

$b)$ El valor de dichos beneficios máximos.

Solución:

$a)$ Sean x e y el número de butacas y sillones que se fabrican diariamente en el taller, respectivamente.

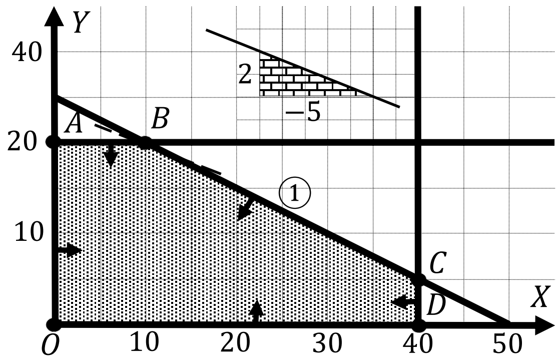
Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 2x+4y\le 100 \\ x\le 40;\ y\le 20 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x+2y\le 50 \\ x\le 40;\ y\le 20 \end{array}\right\}$.

① $\Rightarrow x+2y\le 50 \Rightarrow y\le \frac{50-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	50	0
y	0	25

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,20).$

$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=50 \\ y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow x=10 \Rightarrow B(10,20).$

$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=50 \\ x=40 \end{array}\right\} \Rightarrow 40+2y=50;$

$2y=10;\ \ y=5\Rightarrow C(40,5).$

$D\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=40 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(40,0).$

La función de objetivos es $f(x,y)=40x+100y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A\Rightarrow f(0,20)=40\cdot 0+100\cdot 20=0+2.000=2\,000.$

$B\Rightarrow f(10,20)=40\cdot 10+100\cdot 20=400+2.000=2\,400.$

$C\Rightarrow f(40,5)=40\cdot 40+100\cdot 5=1.600+500=2\,100.$

$D\Rightarrow f(40,0)=40\cdot 40+100\cdot 0=1.600+0=1\,600.$

El valor máximo se produce en el punto $B(10,20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y)=40x+100y=0\Rightarrow y=-\frac{40}{100}x=-\frac{2}{5}x\Rightarrow m=-\frac{2}{5}.$

$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ fabricando\ \mathbf{10\ butacas\ y\ 20\ sillones}}.$

$b)$ $\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ \mathbf{2\,400\ euros}}.$

Problema 5:

El crecimiento (en cm) de una variedad de trigo, $C(x)$, en función de la cantidad de fertilizando (en gramos por metro cuadrado) utiliza, x, viene dado por la función:

$$C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \ \ (0 \leq x \leq 4).$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que el crecimiento alcanza su mínimo con una dosis de 3 gramos por metro cuadrado y que para esta dosis las plantas de trigo crecen 8 cm.

Solución:

Por crecer 8 cm con una dosis de 3 gramos es $C(3) = 8$:

$C(3) = 2 \cdot 3^3 - A \cdot 3^2 + B \cdot 3 + 35 = 8;\ \ 54 - 9A + 3B + 35 = 8;$

$-9A + 3B = 8 - 89;\ -9A + 3B = -81;\ -3A + B = -27.$ (1)

La condición necesaria para que una función polinómica tenga un mínimo es que se anule su primera derivada y sea positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$C'(x) = 6x^2 - 2Ax + B.$ $C''(x) = 12x - 2A.$

$C'(3) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 3^2 - 2A \cdot 3 + B = 0;\ \ -6A + B = -54.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} -3A + B = -27 \\ -6A + B = -54 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{r} -3A + B = -27 \\ 6A - B = 54 \end{array}\right\} \Rightarrow 3A = 27;$$

$$\underline{\boldsymbol{A = 9}}.$$

$-6A + B = -54;\ \ B = -54 + 6A = -54 + 6 \cdot 9 = -54 + 54 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{B = 0}}.$$

Para justificar que se trata de un mínimo para los valores hallados se comprueba que para $x = 3$ y $A = 9$ la segunda derivada es positiva:

$C''(3) = 12 \cdot 3 - 2 \cdot 9 = 36 - 18 = 18 > 0 \Rightarrow Mín.\ c.q.j.$

Problema 6:

Las ventas de un producto (en miles de euros), $V(t)$, en los 6 primeros años desde que se lanzó al mercado, evolucionan de acuerdo con la siguiente función:

$$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100 \ \ (0 \leq t \leq 6).$$

Se pide determinar, razonando las respuestas:

$a)$ Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las ventas a lo largo de los 6 años.

$b)$ Representar gráficamente la función $V(t)$.

Solución:

$a)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$V'(t) = 12t^2 - 48t + 36.$

$V'(t) = 0 \Rightarrow 12t^2 - 48t + 36 = 0;\ \ t^2 - 4t + 3 = 0;\ \ t = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$

$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 3.$

Por ser $V'(t)$ una función polinómica sus raíces dividen su dominio en los intervalos $(0, 1), (1, 3)\ y\ (3, 6)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente. Considerando, por ejemplo, el valor $x = 2 \in (1, 3)$ es:

$V'(2) = 12 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 36 = 48 - 96 + 36 = -12 < 0 \Rightarrow Decreciente.$

$$\underline{Crecimiento: V'(t) > 0 \Rightarrow t\epsilon(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \cup (\mathbf{3}, \mathbf{6})}.$$

$$\underline{Decrecimiento: V'(t) < 0 \Rightarrow t\epsilon(\mathbf{1}, \mathbf{3})}.$$

También se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento teniendo en cuenta que la derivada es la función cuadrática $V'(t) = 12t^2 - 48t + 36$, que es convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de t^2, por lo cual la función derivada es positiva (creciente) para $t \in (0, 1) \cup (3, 6)$ y negativa (decreciente) para $t\epsilon(1, 3)$.

$b)$ Para representar gráficamente la función $V(t)$ se determinan sus extremos relativos y su punto de inflexión.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$V'(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 3.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$V''(t) = 24t - 48.$

$V''(1) = 24 \cdot 1 - 48 = -24 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$

$V(1) = 4 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 + 100 = 4 - 24 + 36 + 100 = 140 - 24 = 116 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{Máx.\ A(1, 116)}.$$

$V''(3) = 24 \cdot 3 - 48 = 24 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 3.$

$V(3) = 4 \cdot 3^3 - 24 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 + 100 = 108 - 216 + 108 + 100 = 316 - 216 = 100 \Rightarrow$

$\boldsymbol{Mín. B(3, 100).}$

Una función tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada y es distinta de cero su tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$V''(t) = 0 \Rightarrow 24t - 48 = 0;\ \ t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2.$

$V'''(t) = 24 \neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ inflexión\ para\ x = 2.$

$V(2) = 4 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 + 100 =$

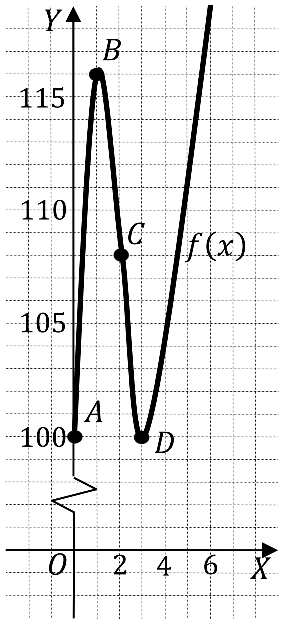
$= 32 - 96 + 72 + 100 = 204 - 96 = 108 \Rightarrow$

$\Rightarrow P.I.\ \ C(2, 108).$

Siendo $V(0) = 100 \Rightarrow D(0, 100).$

$V(6) = 4 \cdot 6^3 - 24 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6 + 100 =$

$= 864 - 864 + 216 + 100 = 316 \Rightarrow E(3, 316).$



La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.

Problema 7:

$a)$ Determinar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 7x + 6$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 5$.

$b)$ Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)}$.

Solución:

$a)$ La función $f(x) = x^2 - 7x + 6$ es una parábola convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}.$$

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7}{2} + 6 = \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 6 = \frac{49-98+24}{4} = \frac{-25}{4} \Rightarrow V\left(\frac{7}{2}, -\frac{25}{4}\right).$$

Los puntos de corte de $f(x)$ con el eje X son los siguientes:

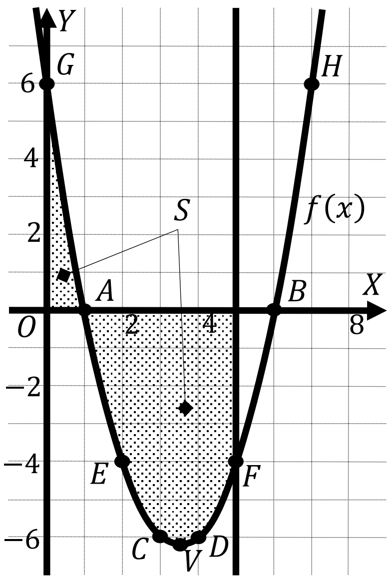
$$x^2 - 7x + 6 = 0;\ \ x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \Rightarrow A(1,0) \\ x_2 = 6 \Rightarrow B(6,0) \end{cases}.$$

Otros puntos de la parábola son los siguientes:

$$f(3) = f(4) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 6 = -6 \Rightarrow C(3,-6)\ y\ D(4,-6).$$

$$f(2) = f(5) = 2^2 - 7 \cdot 2 + 6 = -4 \Rightarrow E(2,-4)\ y\ F(5,-4).$$

$$f(0) = f(7) = 6 \Rightarrow G(0,6)\ y\ H(7,6).$$



De la observación de la figura se deduce el valor de la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx - \int_1^5 f(x) \cdot dx =$$

$$= [F(1) - F(0)] - [F(5) - F(1)] =$$

$$= F(1) - F(0) - F(5) + F(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2\,F(1) - F(0) - F(5). \quad (*)$$

Siendo $F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (x^2 - 7x + 6) \cdot dx = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x$, sustituyendo en (*):

$$S = 2 \cdot \left(\frac{1^3}{3} - \frac{7 \cdot 1^2}{2} + 6 \cdot 1\right) - 0 - \left(\frac{5^3}{3} - \frac{7 \cdot 5^2}{2} + 6 \cdot 5\right) =$$

$$= \frac{2}{3} - 7 + 12 - \frac{125}{3} + \frac{175}{2} - 30 = -\frac{123}{3} - 25 + \frac{175}{2} = \frac{-246 - 150 + 525}{6} = \frac{525 - 396}{6} = \frac{129}{6} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = \frac{43}{2}\ u^2 = 21.5\ u^2}.$$

$b)$ Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)} = 2 \Rightarrow$$

$\underline{\boldsymbol{y = 2 \ es \ asíntota \ horizontal}}.$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$2(x^2 - 7x + 6) = 0; \ \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 6.$

$\underline{\boldsymbol{Las \ rectas \ x = 1 \ y \ x = 6 \ son \ asíntotas \ verticales}}.$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

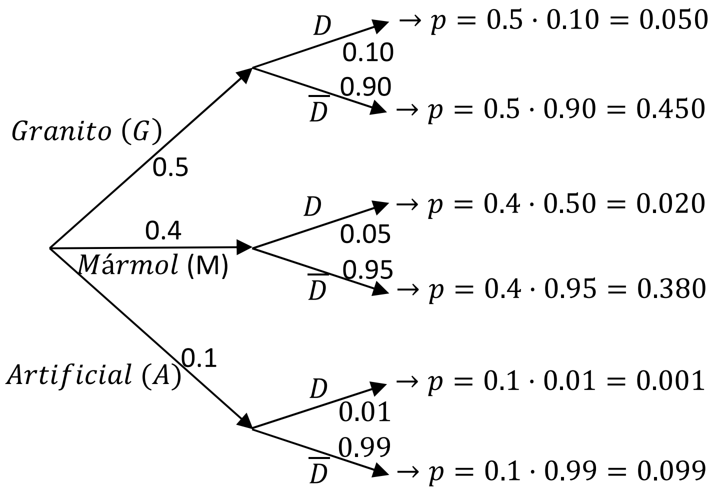
Problema 8:

Una empresa constructora utiliza tres tipos de piedra en un bloque de edificios: granito (50 %), mármol (40 %) y artificial (10 %). El 10 % del granito, el 5 % del mármol y el 1 % de la artificial presenta grietas por lo que no puede ser instalado. Se pide, razonando la respuesta:

$a)$ Calcular la probabilidad de que, al encargar una piedra, ésta presente grietas.

$b)$ Calcular la probabilidad de que una piedra, que sabemos que presenta grietas, sea de mármol.

Solución:



$a)\qquad P = P(D) = P(G \cap D) + P(M \cap D) + P(A \cap D) =$

$= P(G) \cdot P(D/G) + P(M) \cdot P(D/M) + P(D) \cdot P(D/A) =$

$= 0.5 \cdot 0.10 + 0.4 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.01 = 0.050 + 0.020 + 0.001 = \underline{0.071}.$

La probabilidad de que, al encargar una piedra, ésta presente grietas es de **0.071**.

$b)\ P = P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{P(M) \cdot P(D/M)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.071} = \frac{0.020}{0.071} = \underline{0.2817}.$

La probabilidad de que una piedra, que sabemos que presenta grietas, sea de mármol es de **0.2817**.

Problema 9:

En un estudio sobre la práctica del deporte en la universidad, se pregunta a 150 universitarios de los cuales 120 afirman practicar algún deporte. Calcular, razonando la respuesta, un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95 % para la proporción de universitarios que practican deporte. Razona la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 %;

$\alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.$

$(1 - 0.025 = 0.9750 \ \rightarrow z = 1.96).$

Datos: $n = 150$; $p = \frac{120}{150} = 0.8$; $q = 1 - 0.8 = 0.2$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$

La fórmula que da el intervalo de confianza en función de p, q y n, es la siguiente:

$$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$$

$$\left(0.8 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{150}};\ 0.8 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{150}}\right);$$

$(0.8 - 1.96 \cdot 0.0327;\ 0.8 + 1.96 \cdot 0.0327);\ \ (0.8 - 0.0640;\ 0.8 + 0.0640).$

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (\mathbf{0.7360};\ \mathbf{0.8640})}.$$

Problema 10:

La calificación que obtienen los candidatos que se presentan a una oposición sigue una distribución normal con desviación típica 1.2 puntos. Si se quiere realizar un estudio sobre la dificultad de las pruebas en dicha oposición, ¿cuántos candidatos deben seleccionar para obtener un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la calificación media que tenga una longitud de 0.5 puntos? Razona la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0.95 \ \rightarrow \ \alpha=1-0.95=0.05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96.$

$(1-0.025=0.9750 \ \rightarrow z=1.96).$

Datos: $\sigma=1.2; \ E=\frac{0.5}{2}=0.25; \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96.$

Sabiendo que $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}; \ n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1.96\cdot\frac{1.2}{0.25}\right)^2=$

$=(1.96\cdot 4.8)^2=9.408^2=88.51.$

$\underline{\textit{Deben seleccionarse } \mathbf{89} \textit{ candidatos}}.$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

Problema 1:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A \cdot X - B^t = 2C$, con B^t es la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

Problema 2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

$b)$ Calcular la inversa de A para $x = 2$.

Problema 3:

Resolver, justificando la respuesta, el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ -3x + 2y - z = -2 \end{cases}$.

Problema 4:

Un taller de confección fabrica abrigos y cazadoras. Para ello dispone semanalmente de 80 m^2 de tela de forro y 120 m^2 de tela de paño. Un abrigo requiere 1 m^2 de tela de forro y 3 m^2 de tela de paño y una cazadora requiere 2 m^2 de cada una de las telas. Si en cada abrigo gana 80 euros y en cada cazadora 70 euros, calcular, justificando las respuestas:

$a)$ El número de abrigos y de cazadoras que debe confeccionar semanalmente para hacer máximos los beneficios.

$b)$ El valor de dichos beneficios máximos.

Problema 5:

Un determinado vino tiene un tiempo de crianza en bodega de entre 1 y 4 años. La graduación del vino, $G(x)$, en términos de tiempo de crianza, x, viene dada por la función $G(x) = x^3 - Ax^2 + 6Bx + 2\ \ (1 \leq x \leq 4)$. Determinar, justificando las respuestas, las constantes A y B sabiendo que la máxima graduación se consigue exactamente a los 2 años, edad en que el vino alcanza los 22 grados.

Problema 6:

El diámetro de cierta variedad de manzana oscila entre los 2 y los 5 cm. El precio (en céntimos de euro), $P(x)$, que se paga al agricultor por un kilogramo de estas manzanas viene determinado por su diámetro, x, de acuerdo con la siguiente función:

$$P(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 30 \ \ (2 \le x \le 5).$$

Determinar para qué diámetros se alcanzan los precios máximo y mínimo de las manzanas. ¿Cuáles son estos precios máximo y mínimo? Razonar las respuestas.

Problema 7:

$a)$ Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + 4x - 5$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

$b)$ Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$.

Problema 8:

En una fábrica de vidrios el 25 % de las botellas que se producen son grandes, el 40 % medianas y el resto pequeñas. En un control de calidad, se detecta que el 1 % de las botellas grandes, el 2 % de las medianas y el 3 % de las pequeñas son defectuosas. Se pide, razonando la respuesta:

$a)$ Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea a la vez mediana y defectuosa.

$b)$ Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea defectuosa.

Problema 9:

Se desea conocer la proporción de clientes que adquirirán un nuevo modelo de teléfono móvil. Para ello se realiza una encuesta a 300 potenciales clientes de los cuales 60 están interesados en dicho producto. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la proporción de clientes interesados en el nuevo modelo de teléfono móvil. Razonar la respuesta.

Problema 10:

Con objeto de adquirir los embalajes en una panadería, se realiza un estudio sobre la longitud de las barras de pan. Se sabe que dicha variable tiene una distribución normal con desviación típica 3 cm. ¿Cuántas barras de pan deben ser tomadas para el estudio si se desea obtener un intervalo de confianza para la longitud media de las barras, al nivel de confianza del 95 %, con una amplitud de 1 cm? Razonar la respuesta.

RESPUESTAS

Problema 1:

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\-1&4\end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&-2\end{pmatrix}$. Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A\cdot X-B^t=2C$, con B^t es la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

Solución:

$$A\cdot X-B^t=2C;\ \ A\cdot X=2C+B^t;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(2C+B^t);$$

$$I\cdot X=A^{-1}\cdot(2C+B^t)\Rightarrow$$

$$\underline{X=A^{-1}\cdot(2C+B^t).}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=2-1=1;\ \ A^t=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix};\ \ Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}}{1}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}.$$

$$2C+B^t=2\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&6&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&4\end{pmatrix}\Rightarrow 2C+B^t=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\2&9&0\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot(2C+B^t)=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&-1\\2&9&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-11}&\mathbf{-1}\\\mathbf{1}&\mathbf{20}&\mathbf{1}\end{pmatrix}.}$$

****

Problema 2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

$b)$ Calcular la inversa de A para $x = 2$.

Solución:

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 4 + 3x = 0;\ \ 4x = 4 \Rightarrow x = 1.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{1\}}.$$

$b)$

Para $x = 2$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_2 \to \frac{1}{2}F_2 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_1 \to F_1 - 2F_2 \\ F_3 \to F_3 - 2F_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to \frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_1 \to F_1 - F_3 \\ F_2 \to F_2 - F_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

****

Problema 3:

Resolver, justificando la respuesta, el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ -3x + 2y - z = -2 \end{cases}$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 4 - 3 - 9 - 2 + 2 = -5 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ de\ incógnitas.$$

$$\underline{Según\ el\ teorema\ de\ Rouché - Fröbenios \Rightarrow S.C.D.}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{18-2-2-6-12-1}{-5} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{1-4-18-3+2+12}{-5} = \frac{-10}{-5} = 2.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{6+24+3-54+2+4}{-5} = \frac{-15}{-5} = 3.$$

$$\underline{Solución: x = 1, y = 2, z = 3.}$$

****

Problema 4:

Un taller de confección fabrica abrigos y cazadoras. Para ello dispone semanalmente de 80 m^2 de tela de forro y 120 m^2 de tela de paño. Un abrigo requiere 1 m^2 de tela de forro y 3 m^2 de tela de paño y una cazadora requiere 2 m^2 de cada una de las telas. Si en cada abrigo gana 80 euros y en cada cazadora 70 euros, calcular, justificando las respuestas:

a) El número de abrigos y de cazadoras que debe confeccionar semanalmente para hacer máximos los beneficios.

b) El valor de dichos beneficios máximos.

Solución:

a)

Sean x e y el número de abrigos y cazadoras que se confeccionan semanalmente en el taller, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+2y\le 80 \\ 3x+2y\le 120 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$.

$(1) \Rightarrow x+2y\le 80 \Rightarrow y\le \frac{80-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

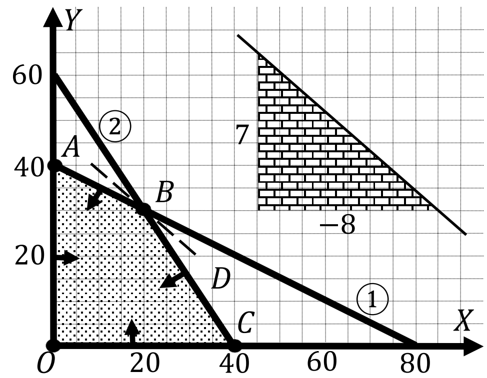
x	0	80
y	40	0

$(2) \Rightarrow 3x+2y\le 120 \Rightarrow y\le \frac{120-3x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	40
y	60	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=80 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=80 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=40 \Rightarrow A(0,40).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=80 \\ 3x+2y=120 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-2y=-80 \\ 3x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x=40;\ x=20;\ 20+2y=80;\ 2y=60 \Rightarrow y=30 \Rightarrow B(20,30).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 3x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=120;\ x=40 \Rightarrow C(40,0).$

La función de objetivos es $f(x,y)=80x+70y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,40)=80\cdot 0+70\cdot 40=0+2\,800=2\,800.$

$B \Rightarrow f(20,30)=80\cdot 20+70\cdot 30=1\,600+2\,100=3\,700.$

$C \Rightarrow f(40,0) = 80 \cdot 40 + 70 \cdot 0 = 3\,200 + 0 = 3\,200.$

El valor máximo se produce en el punto $B(20,40)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 80x + 70y = 0 \Rightarrow y = -\frac{80}{70}x = -\frac{8}{7}x \Rightarrow m = -\frac{8}{7}.$

$\underline{Los\ beneficios\ son\ \boldsymbol{máximos}\ confeccionando\ \boldsymbol{20\ abrigos\ y\ 30\ cazadoras}}.$

$b)$

$\underline{Los\ máximos\ beneficios\ son\ de\ \boldsymbol{3\,700\ euros}}.$

****

Problema 5:

Un determinado vino tiene un tiempo de crianza en bodega de entre 1 y 4 años. La graduación del vino, $G(x)$, en términos de tiempo de crianza, x, viene dada por la función $G(x) = x^3 - Ax^2 + 6Bx + 2\ (1 \le x \le 4)$. Determinar, justificando las respuestas, las constantes A y B sabiendo que la máxima graduación se consigue exactamente a los 2 años, edad en que el vino alcanza los 22 grados.

Solución:

Por alcanzar a los 2 años la graduación de 22 grados es $G(2) = 22$.

$G(2) = 22 \Rightarrow 2^3 - A \cdot 2^2 + 6B \cdot 2 + 2 = 22;\ \ 8 - 4A + 12B + 2 = 22;$

$-4A + 12B = 12;\ -A + 3B = 3.$ (1)

Por alcanzar la máxima graduación a los dos años es $G'(2) = 0$.

$G'(x) = 3x^2 - 2Ax + 6B.$

$G'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 - 2A \cdot 2 + 6B = 0;\ \ 12 - 4A + 6B = 0;$

$4A - 6B = 12;\ \ 2A - 3B = 6.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{matrix} -A + 3B = 3 \\ 2A - 3B = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{A = 9}.\qquad -9 + 3B = 3;\ \ 3B = 12 \Rightarrow \underline{B = 4}.$

$$\underline{\boldsymbol{A = 9}}.\ \underline{\boldsymbol{B = 4}}.$$

****

Problema 6:

El diámetro de cierta variedad de manzana oscila entre los 2 y los 5 cm. El precio (en céntimos de euro), $P(x)$, que se paga al agricultor por un kilogramo de estas manzanas viene determinado por su diámetro, x, de acuerdo con la siguiente función:

$$P(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 30 \ \ (2 \le x \le 5).$$

Determinar para qué diámetros se alcanzan los precios máximo y mínimo de las manzanas. ¿Cuáles son estos precios máximo y mínimo? Razonar las respuestas.

Solución:

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$P'(x) = -6x^2 + 30x - 24$

$P'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 30x - 24 = 0;\ \ x^2 - 5x + 4 = 0;\ \ x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} =$

$= \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \notin D(P)\,, x_2 = 4 \Rightarrow$ Solución: $x = 4$.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$P''(x) = -12x + 30.$

$P''(4) = -12 \cdot 4 + 30 = -18 < 0 \Rightarrow \mathit{Máximo\ relativo\ para}\ x = 4.$

$P(4) = -2 \cdot 4^3 + 15 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 30 = -2 \cdot 64 + 15 \cdot 16 - 96 + 30 =$

$= -128 + 240 - 66 = 240 - 194 = 46.$

$\underline{\mathit{El\ mayor\ precio\ se\ produce\ para\ un\ diámetro\ de}\ \mathbf{4\ cm}}.$

$\underline{\mathit{El\ precio\ máximo\ es\ de}\ \mathbf{0.46\ euros\ el\ kg}}.$

$P(2) = -2 \cdot 2^3 + 15 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 30 = -2 \cdot 8 + 15 \cdot 4 - 48 + 30 =$

$= -16 + 60 - 18 = 60 - 34 = 26.$

$P(5) = -2 \cdot 5^3 + 15 \cdot 5^2 - 24 \cdot 5 + 30 = -2 \cdot 125 + 15 \cdot 25 - 120 + 30 =$

$= -250 + 375 - 90 = 375 - 340 = 35.$

$\underline{\mathit{El\ menor\ precio\ se\ produce\ para\ un\ diámetro\ de}\ \mathbf{2\ cm}}.$

$\underline{\mathit{El\ precio\ mínimo\ es\ de}\ \mathbf{0.26\ euros\ el\ kg}}.$

****

Problema 7:

a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + 4x - 5$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$.

Solución:

a)

La función $f(x) = x^2 + 4x - 5$ es una parábola convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:

$f'(x) = 2x + 4 = 0 \Rightarrow 2(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2.$

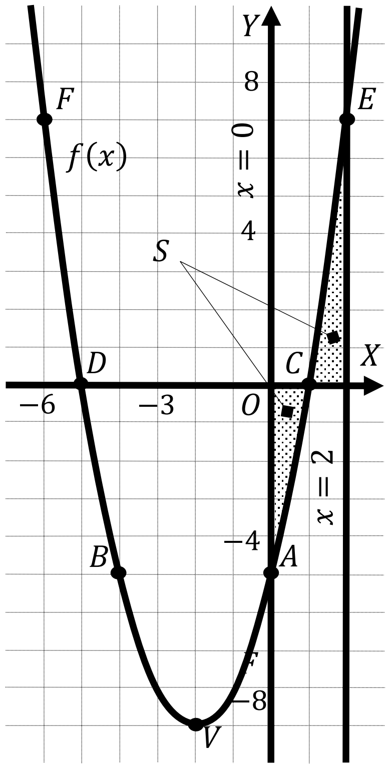
$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 5 =$

$= 4 - 8 - 5 = -9 \Rightarrow V(-2, -9).$

Otros puntos de la parábola son los siguientes:

$A(-5, 0), B(-4, -5), C(1, 0), D(-5, 0), E(2, 7)\ y\ F(-6, 7).$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^0 f(x) \cdot dx + \int_1^2 f(x) \cdot dx = F(0) - F(1) + F(2) - F(1) =$$

$= F(0) - 2F(1) + F(2).$

$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (x^2 + 4x - 5) \cdot dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 5x = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x.$

$$S = 0 - 2 \cdot \left(\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1\right) + \left(\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2\right) =$$

$$= -\frac{2}{3} - 4 + 10 + \frac{8}{3} + 8 - 10 = 4 + \frac{6}{3} = 4 + 2 = 6.$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 6\ u^2}}.$$

b)

Las asíntotas de la función $g(x) = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$ son las siguientes:

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x^2+4x-5} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{La\ recta\ \boldsymbol{y = 0}\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x^2 + 4x - 5 = 0;\ \ x = \frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{-4\pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = -5, x_1 = 1.$

$\underline{Las\ rectas\ \boldsymbol{x = -5}\ y\ \boldsymbol{x = 1}\ son\ asíntotas\ verticales}.$

Asíntotas oblicuas:

$\underline{No\ tiene\ Asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales}.$

****

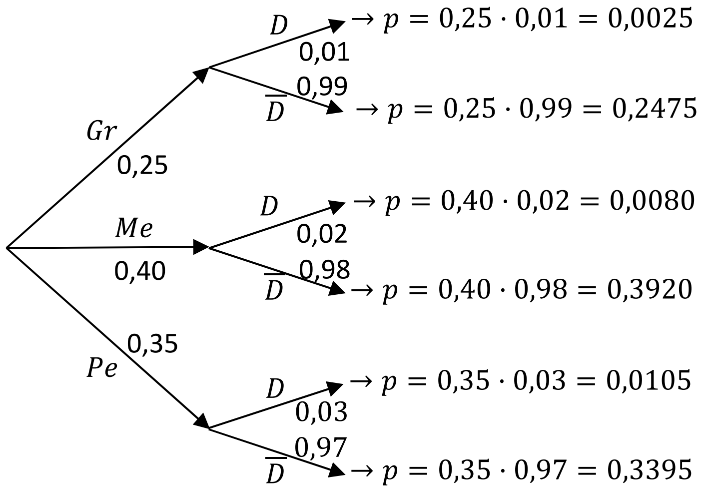
Problema 8:

En una fábrica de vidrios el 25 % de las botellas que se producen son grandes, el 40 % medianas y el resto pequeñas. En un control de calidad, se detecta que el 1 % de las botellas grandes, el 2 % de las medianas y el 3 % de las pequeñas son defectuosas. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea a la vez mediana y defectuosa.

b) Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea defectuosa.

Solución:



a)

$$P = P(Me \cap D) + P(Me) \cdot P(D/Me) = 0.40 \cdot 0.02 = \underline{0.0080}$$

$$\boldsymbol{P(Me \cap D) = \underline{0.0080}}$$

b)

$$P = P(D) = P(Gr \cap D) + P(Me \cap D) + P(Pe \cap D) =$$

$$= P(Gr) \cdot P(D/G) + P(Me) \cdot P(D/Me) + P(Pe) \cdot P(D/Pe) =$$

$$= 0.25 \cdot 0.01 + 0.40 \cdot 0.02 + 0.35 \cdot 0.03 = 0.0025 + 0.0080 + 0.0105 = \underline{0.0210}.$$

$$\boldsymbol{P(D) = \underline{0.0210}.}$$

****

Problema 9:

Se desea conocer la proporción de clientes que adquirirán un nuevo modelo de teléfono móvil. Para ello se realiza una encuesta a 300 potenciales clientes de los cuales 60 están interesados en dicho producto. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la proporción de clientes interesados en el nuevo modelo de teléfono móvil. Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0.95 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0.95 = 0.05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.$

$(1-0.025 = 0.9750 \ \rightarrow z = 1.96).$

Datos: $n = 300;\ \ p = \frac{60}{300} = 0.2;\ \ q = 1-0.2 = 0.8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0.2 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{300}},\ 0.2 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{300}}\right);$$

$(0.2 - 1.96 \cdot 0.0231;\ 0.2 + 1.96 \cdot 0.0231);\ \ (0.2 - 0.0453,\ 0.2 + 0.0453).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{95\,\%} = (0.1547,\ 0.2453).}}$$

****

Problema 10:

Con objeto de adquirir los embalajes en una panadería, se realiza un estudio sobre la longitud de las barras de pan. Se sabe que dicha variable tiene una distribución normal con desviación típica 3 cm. ¿Cuántas barras de pan deben ser tomadas para el estudio si se desea obtener un intervalo de confianza para la longitud media de las barras, al nivel de confianza del 95 %, con una amplitud de 1 cm? Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0.95 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0.95 = 0.05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.$

$(1-0.025 = 0.9750 \ \rightarrow z = 1.96).$

Datos: $\sigma = 3; \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96; \ E = \frac{1}{2} = 0.5.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{3}{0.5}\right)^2 =$

$= (1.96 \cdot 6)^2 = 11.76^2 = 138.30.$

$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de } \mathbf{139\ barras}}$

****

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de GALICIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Dolores Vázquez Torrón

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3.33 puntos)** de los que se puede realizar un **MÁXIMO de 3** combinados como se quiera. Si se realizan más ejercicios de los permitidos, **solo se corregirán los tres primeros realizados.**

Problema 1: **Álgebra.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Determine para que valores de m existe la matriz inversa de A.

b) Despeje la matriz X tal que $XA+B=C$ e calcúlela para m=1.

Problema 2: **Álgebra.** Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y\le x+2 \qquad x+y\le 6 \qquad x\le 5 \qquad y\ge 0$$

a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices. b) Determine el punto o puntos de esa región en donde la función f(x, y) = x − y alcanza sus valores máximo y mínimo. c) Determine esos valores máximo y mínimo.

Problema 3: **Análisis.** La cantidad de CO_2 (en millones de toneladas) emitidas a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función

$$\boldsymbol{C(t)=\begin{cases} 5-\frac{t}{3} & , \ 0\le t<6 \\ \frac{1}{4}t^2-4t+18 & , \ 6\le t\le 12 \end{cases}}$$ siendo t el tiempo transcurrido en meses desde comienzo del año.

a) Estudie en qué períodos se ha producido un aumento/disminución de la cantidad de CO_2 emitida a la atmósfera.

b) ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de CO_2 emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?

c) Represente la gráfica de la función C(t) teniendo en cuenta el estudio realizado en los apartados anteriores.

Problema 4: **Análisis.** Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función

$B(t)=t^3-18t^2+81t-3$ si $0\le t\le 10$, (t en años)

a) ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año del estudio? **b)** Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios **c)** ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden? **d)** Calcule $\int_1^2 B(t)dt$

Problema 5: **Estadística y Probabilidad.** En una población el 45 % son hombres. El 27% de esa población resulta ser hombre y lector de prensa deportiva, mientras que un 38.5% es mujer y no lectora de esa prensa. a) De las mujeres, ¿qué porcentaje lee prensa deportiva? b) ¿Qué porcentaje es mujer o lee prensa deportiva? c) De los lectores de prensa deportiva, ¿qué porcentaje son hombres? d) ¿Son incompatibles los sucesos ser home y no leer prensa deportiva? Justifique la respuesta.

Problema 6: **Estadística y Probabilidad.** Una compañía de seguros quiere determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en sus prestaciones. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15%.

a) ¿De qué tamaño mínimo debería ser la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0.08 y un nivel de confianza del 95%?

Finalmente, se realiza el estudio con una muestra de 196 clientes, de los que 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. b) Calcule un intervalo de confianza, al 92%, para la proporción de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta. ¿Cuál es el error máximo cometido?

RESPUESTAS

Problema 1: Álgebra.

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} m & 4 & 4\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

a) Determine para que valores de m existe la matriz inversa de A.

b) Despeje la matriz X tal que $XA+B=C$ e calcúlela para $m = 1$.

Solución:

a) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 4 & 4\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2m \qquad |A|=0 \Leftrightarrow 2m=0 \Rightarrow \ m=0$$

$$\exists A^{-1} \quad \Leftrightarrow \text{si } m \neq 0$$

b) Despejamos teniendo en cuenta que el producto de matrices no es conmutativo por lo que multiplicaremos por la matriz inversa por el lado adecuado

$$XA+B=C \Rightarrow XA=C-B \Rightarrow XAA^{-1}=(C-B)A^{-1} \Rightarrow XI=(C-B)A^{-1} \Rightarrow$$

$$X=(C-B)A^{-1}$$

$$C-B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow AdjA=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 8 & -4 & 2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow (AdjA)^t=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$|A|=2$

$$A^{-1}=\frac{(AdjA)^t}{|A|}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4\\ 0 & \frac{1}{2} & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=(C-B)A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4\\ 0 & \frac{1}{2} & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -9\\ 0 & 1 & -6\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X=(C-B)A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -9\\ 0 & 1 & -6\end{pmatrix}}$$

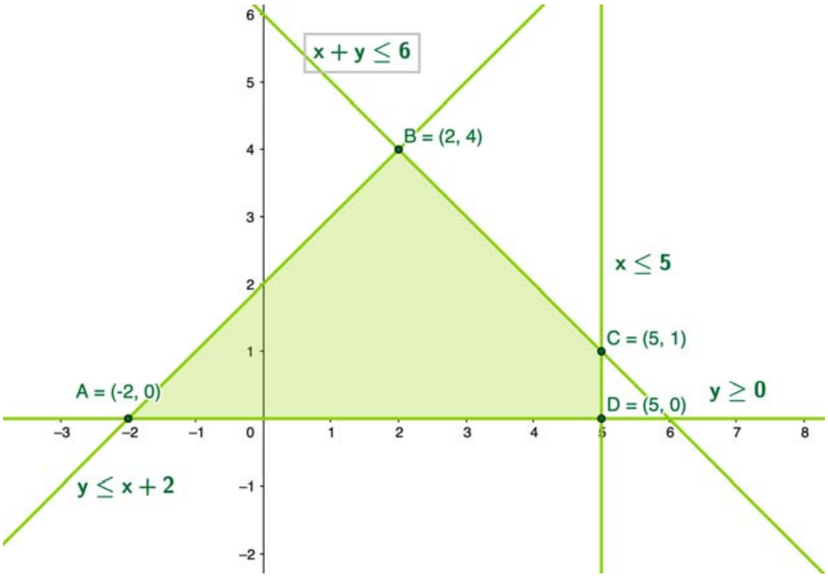
Problema 2: Álgebra.

Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y \le x + 2 \qquad x + y \le 6 \qquad x \le 5 \qquad y \ge 0$$

a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices. b) Determine el punto o puntos de esa región en donde la función *f(x, y) = x − y* alcanza sus valores máximo y mínimo. c) Determine esos valores máximo y mínimo.

Solución:



b-c) Calculamos los vértices de la región factible

A: $(y = 0) \cap (y = x + 2) \implies x = -2 \implies A(-2, 0)$

B: $(y = x + 2) \cap (x + y) = 6$ resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow x + (x + 2) = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(2, 4)$$

C: $(x = 5) \cap (x + y = 6) \Rightarrow y = 1 \Rightarrow C(5, 1)$

D: $(x = 5) \cap (y = 0) \Rightarrow D(5, 0)$

Calculamos el valor de la función objetivo en los vértices de la región factible

$$z = f(x, y) = x - y$$

A: $f(-2, 0) = -2$

B: $f(2, 4) = 2 - 4 = -2$

C: $f(5, 1) = 5 – 1 = 4$

D: $f(5, 0) = 5$

La función objetivo alcanza su máximo en el punto D**(5, 0)** . Dicho máximo es **5**.

La función objetivo alcanza su mínimo en todos los puntos, de coordenadas reales, del segmento de extremos $\boldsymbol{A}$**(-2, 0)**, $\boldsymbol{B}$ **(2, 4)**. Dicho mínimo es **-2**

Problema 3: Análisis.

La cantidad de CO_2 (en millones de toneladas) emitidas a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \dfrac{t}{3} & , \quad 0 \le t < 6 \\ \dfrac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & , \quad 6 \le t \le 12 \end{cases}$$

siendo t el tiempo transcurrido en meses desde comienzo del año.

a) Estudie en qué períodos se ha producido un aumento/disminución de la cantidad de CO_2 emitida a la atmósfera.

b) ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de CO_2 emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?

Solución:

$C(t)$ en millones de toneladas.

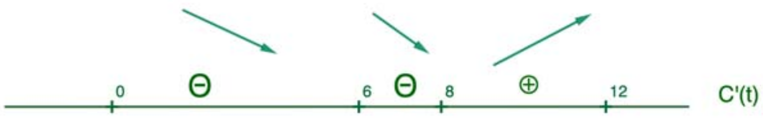
t en meses

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función

$$C'(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3} & , \quad 0 < t < 6 \\ \frac{1}{2}t - 4 & , \quad 6 < t < 12 \end{cases}$$

La derivada se anula en $C'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 8$

Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos determinados por los puntos en los que se anula la derivada primera y los puntos en los que cambia la definición de la función, siempre dentro del dominio de la función



Entre el primer y octavo mes se produce una disminución de las emisiones de CO_2 emitidas a la atmósfera.

Entre el octavo mes y final de año se produce un aumento de las emisiones de CO_2 emitidas a la atmósfera

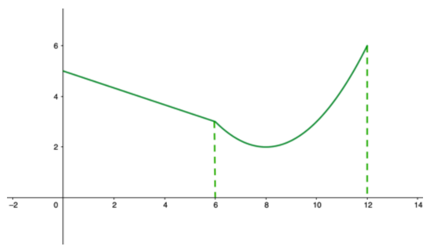
b) En el octavo mes se produce un mínimo de emisiones de CO_2 (función continua en el punto que pasa de ser decreciente a creciente) pero es necesario estudiar los valores de emisión en los extremos del intervalo [0,12], domino de la función para determinar los extremos absolutos.

$C(0) = 5$ $C(12) = 6$ $C(8) = 2$

En el octavo mes se produce un mínimo de emisiones de CO_2 (2 millones de toneladas)

En el doceavo mes se produce un máximo de emisiones de CO_2 (6 millones de toneladas)

Aunque no se pide, es conveniente hacer un esbozo de la gráfica de la función (recta de pendiente negativa y parábola) para verificar los resultados obtenidos



Problema 4: Análisis.

Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función

$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3$ si $0 \le t \le 10$, (t en años)

a) ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año del estudio? **b)** Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios **c)** ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden? **d)** Calcule $\int_1^2 B(t)dt$

Solución:

$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3$ si $0 \le t \le 10$, (t en años) $B(t)$ en miles de euros

a) $B(10) = 7$

La empresa obtuvo unos beneficios el último año de 7 000 €

b) Estudiamos el signo de la derivada primera en el intervalo de definición de la función. Para ello se determinan los valores en los que la derivada primera se anula

$$B'(t) = 3t^2 - 36t + 81$$

$B'(t) = 0$. Resolvemos la ecuación de segundo grado $3t^2 - 36t + 81 = 0 \quad \Longrightarrow t = 3,\ t = 9$

Los beneficios crecen en los tres primeros y durante el último año del estudio.

Los beneficios decrecen entre el tercer y noveno año.

c) En $t = 3$ la función tiene un máximo relativo (función continua que pasa de creciente a decreciente)
En $t = 9$ la función tiene un mínimo relativo (función continua que pasa de ser decreciente a creciente)
Estudiamos el valor de la función los valores extremos de su intervalo de definición y en los puntos anteriores para determinar los extremos absolutos:

$B(0) = -3$, $B(3) = 105$, $B(9) = -3$, $B(10) = 7$.

Los beneficios **máximos** se producen el tercer año y ascienden a **105 000 €**

Los beneficios **mínimos** (en este caso pérdidas) se producen en el momento inicial del estudio y en el noveno año con unas pérdidas de **3 000 €**

c) $\int_1^2 (t^3 - 18t^2 + 81t - 3)dt = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{18}{3}t^3 + \frac{81t^2}{2} - 3t\right]_1^2 = \left[\frac{t^4}{4} - t^3 + \frac{81t^2}{2} - 3t\right]_1^2 =$

$$= \frac{2^4}{4} - 6 \cdot 2^3 + \frac{81 \cdot 2^2}{2} - 3 \cdot 2 - \left(\frac{1}{4} - 16 + \frac{81}{2} - 3\right) = \frac{321}{4}$$

$$\boldsymbol{\int_1^2 B(t)dt = \frac{321}{4}}$$

Problema 5: Estadística y Probabilidad.

En una población el 45 % son hombres. El 27% de esa población resulta ser hombre y lector de prensa deportiva, mientras que un 38.5% es mujer y no lectora de esa prensa. a) De las mujeres, ¿qué porcentaje lee prensa deportiva? b) ¿Qué porcentaje es mujer o lee prensa deportiva? c) De los lectores de prensa deportiva, ¿qué porcentaje son hombres? d) ¿Son incompatibles los sucesos ser home y no leer prensa deportiva? Justifique la respuesta.

Solución:

Definimos los sucesos

H: ser hombre

M : ser mujer

L: ser lector/a de prensa deportiva

$\bar{L}$: no ser lector/a de prensa deportiva

$P(H) = 0.45$ $P(H \cap L) = 0.27$ $P(M \cap \bar{L}) = 0.385$

Realizamos una tabla de contingencia

	H	M	
L	27	16.5	43.5
$\bar{L}$	18	38.5	56.5
	45	55	100

a) $P(L/M) = \frac{16.5}{55} = 0.3$

De las mujeres el **30 %** lee prensa deportiva

b) $P(M \cup L) = P(M) + P(L) - P(M \cap L) = \frac{55}{100} + \frac{43.5}{100} - \frac{16.5}{100} = 0.82$

El **82 %** son mujeres o leen la prensa deportiva

c) $P(H/L) = \frac{27}{43.5} = 0.62$

El **62 %** de los lectores de prensa deportiva son hombres

d) Los sucesos ser home y no leer prensa deportiva son compatibles ya que $P(H \cap \bar{L})$ = **0.18** $\neq 0$

Problema 6: Estadística y Probabilidad.

Una compañía de seguros quiere determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en sus prestaciones. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15 %.

a) ¿De qué tamaño mínimo debería ser la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0.08 y un nivel de confianza del 95 %?

Finalmente, se realiza el estudio con una muestra de 196 clientes, de los que 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. b) Calcule un intervalo de confianza, al 92 %, para la proporción de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta. ¿Cuál es el error máximo cometido?

Solución:

a) $\hat{p}$ = 0.15 proporción de clientes de la muestra que estaría dispuesto a aceptar subida de tarifas

$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.85$ Error < 0.08

Nivel de confianza 1 - α = 0.95

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow P(Z \le Z\alpha_{12}) = 0.975 \quad \Rightarrow \quad Z\alpha_{12} = 1.96$$

Por ser el error menor que 0.08 resolvemos la inecuación

$$E < 0.08 \Rightarrow 1.96\sqrt{\frac{0.1275}{n}} < 0.08 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.1275}{n}} < 0.041 \quad \Rightarrow \frac{0.1275}{n} < 0.001681 \Rightarrow 75.8 < n$$

El tamaño mínimo de la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0.08 y un nivel de confianza del 95 % es de **76 personas**

b) $n = 196$ $\quad \hat{p} = \frac{37}{196} = 0.19$ $\quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.81$

$$1 - \alpha = 0.92 \Rightarrow \alpha = 0.08 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.04$$

$$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - 0.04 = 0.96 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1.75$$

$$ICp_{0.92} = \left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \quad \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0.19 - 1.75\sqrt{\frac{0.154}{196}}, 0 - 19 + 1.75\sqrt{\frac{0.154}{196}}\right) = (0.14, 0.24)$$

$ICp_{0.92}$ = $(0.14, \ 0.24)$

El error es el radio (semiamplitud) del intervalo

$$E = \frac{0.24 - 0.14}{2} = 0.05$$

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3.33 puntos)** de los que se puede realizar un **MÁXIMO de 3** combinados como se quiera. Si se realizan más ejercicios de los permitidos, **solo se corregirán los tres primeros realizados.**

Problema .1: **Álgebra**. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$, $B = (a \quad 2 \quad 3\,)$ y $C = (4 \quad 0 \quad 2)$.

a) Determine los valores x, y, z para los cuales la matriz A no tiene inversa.
b) Calcule A^{-1} para $x = 3$, $y = 1$, $z = 0$.
c) Resuelva el sistema $B{\cdot}A = C$ para $a = 1$.

Problema .2: **Álgebra.** Un distribuidor de software informático, tiene entre sus clientes a empresas y a particulares. Al finalizar el año debe conseguir al menos 25 empresas como clientes en su cartera, y el número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Además, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Finalmente, cada empresa produce 386 euros de ingresos anuales, mientras que cada particular 229 euros.
a) Plantee el problema para maximizar los ingresos. **b)** Represente gráficamente el conjunto de soluciones.
c) ¿Cuál de esas soluciones le proporcionaría los mayores ingresos al finalizar el año? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

Problema .3: **Análisis**. Después de t horas de funcionamiento el rendimiento de una máquina (en una escala de 0 a 100) viene dado por la función $r(t) = \frac{kt}{t^2+4}$ con $t > 0$

a) Calcule K sabiendo que el rendimiento a las 4 horas es de 76.
b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento del rendimiento durante las 7 primeras horas de funcionamiento. **c)** ¿En qué momento se consigue el rendimiento máximo?, ¿Cuál es su valor?

Problema .4: **Análisis**. Una empresa puede vender x unidades al mes de un determinado producto al precio de $518 - x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de $275x$ euros que dependen del número x de unidades.

a) Determine las funciones $I(x)$ y $B(x)$ que expresan los ingresos y beneficios obtenidos por la producción y venta de x unidades, respectivamente. ¿Qué beneficio se obtiene si se producen y se venden 10 unidades?
b) Calcule el número de unidades que hay que producir para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderían dichos beneficios? ¿Cuál sería el precio de venta de una unidad en ese caso?

Problema .5: **Estadística y Probabilidad.** El 40 % de las personas que visitan el Pórtico de la Gloria de la Catedral de Santiago son españolas. Se sabe además que 4 de cada 5 españoles están satisfechos con la visita, mientras que, entre los no españoles, no están satisfechos con la visita el 10 %.
a) Calcule el porcentaje de personas satisfechas con la visita.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté satisfecha con la visita y no sea española?
c) ¿Son independientes los sucesos "no ser español" y "estar satisfecho con la visita"? Razone la respuesta.

Problema .6: **Estadística y Probabilidad.** El peso de las naranjas para zumo recolectadas por un productor es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una media de $\mu = 200$ gramos y una desviación típica de $\sigma = 50$ gramos.
a) Si tomamos una muestra aleatoria de $n = 25$ naranjas, ¿cuál es la probabilidad de que su peso medio está comprendido entre 175 y 215 gramos? **b)** ¿De qué tamaño se ha tomado otra muestra aleatoria si la probabilidad de que el peso medio sea inferior a 210 gramos es del 97.72 %?

RESPUESTAS

Problema .1: Álgebra.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$, $B = (a \quad 2 \quad 3)$ y $C = (4 \quad 0 \quad 2)$.

a) Determine los valores x, y, z para los cuales la matriz A no tiene inversa.

b) Calcule A^{-1} para x = 3, y = 1, z = 0.

c) Resuelva el sistema $B{\cdot}A = C$ para a = 1.

Solución:

a) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y^2 + xyz - xyz - y^2 z = y^2(1-z)$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow y(1-z) = 0 \Leftrightarrow y = 0, z = 1.$

Para y = 0, z = 1 y x cualquiera no existe la matriz inversa de A

b) $A = \begin{pmatrix} +3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 1 \neq 0$

$Adj\ A = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ 0 & -3 & +1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad (Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(AdjA)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Resolver $B \cdot A = C \Rightarrow (1 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix} = (4 \quad 0 \quad 2)$

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 4 \\ y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases} \quad 3z = -y \Rightarrow x + 2y - y = 2 \Rightarrow x + y = 2$$

$$\begin{cases} x + 2y = 14 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 2 - y \Rightarrow x = 3$$

$$3 - 2 + 3Z = 2 \Rightarrow z = \frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{x = 3, y = -1\,, z = \frac{1}{3}}$$

Problema .2: Álgebra.

Un distribuidor de software informático, tiene entre sus clientes a empresas y a particulares. Al finalizar el año debe conseguir al menos 25 empresas como clientes en su cartera, y el número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Además, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Finalmente, cada empresa produce 386 euros de ingresos anuales, mientras que cada particular 229 euros.

a) Plantee el problema para maximizar los ingresos. **b)** Represente gráficamente el conjunto de soluciones.

c) ¿Cuál de esas soluciones le proporcionaría los mayores ingresos al finalizar el año? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

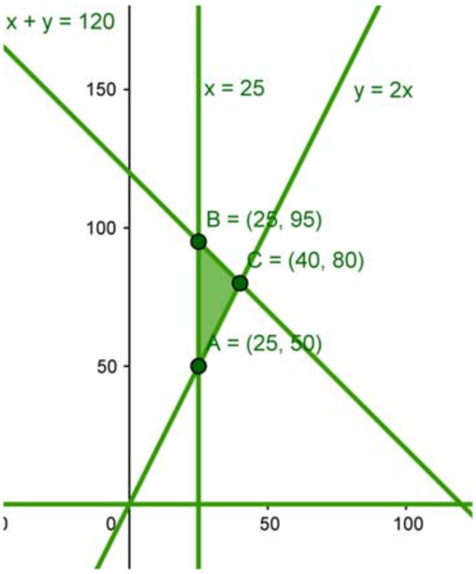
Solución:

a) X: nº de empresas
Y : nº particulares

Maximizar $z = f(x,y) = 386x + 229y$ sujeto a:

$$\begin{cases} x \geq 25 & r_1 \\ y \geq 2x & r_2 \\ x + y \leq 120 & r_3 \\ x > 0\,, y \geq 0 & r_4 \; no\ necesarias\ por\ estar\ consideradas\ en\ las\ anteriores \end{cases}$$

b)



A: $x = 25 \cap y = 2x \Longrightarrow A(25,50)$

B: $x = 25 \cap x + y = 120 \Longrightarrow B(25,95)$

C: $y = 2x \cap x + y = 120 \Longrightarrow x = \frac{120}{3} = 40 \Rightarrow y = 80 \Longrightarrow C(40,80)$

c) $z = f(x,y) = 386x + 229y$

$A \rightarrow f(25,50) = 21\,100$ €

$B \rightarrow f(25,95) = 31\,405$ €

$C \rightarrow f(40,80) = 33\,760$ €

Los mayores ingresos, que ascienden a **33 760 €**, se corresponden con **40** clientes de empresa y **80** particulares

Problema .3: Análisis.

Después de t horas de funcionamiento el rendimiento de una máquina (en una escala de 0 a 100) viene dado por la función $r(t) = \frac{kt}{t^2+4}$ con $t > 0$

a) Calcule K sabiendo que el rendimiento a las 4 horas es de 76.
b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento del rendimiento durante las 7 primeras horas de funcionamiento. **c)** ¿En qué momento se consigue el rendimiento máximo?, ¿Cuál es su valor?

Solución:

a) $\mathbf{r}(4) = 76 \Longrightarrow \frac{4k}{4^2+4} = 76 \Longrightarrow k = \frac{76\cdot 20}{4} = 380 \Longrightarrow$ $\boldsymbol{k = 380}$

b) $r(t) = \frac{380t}{t^2+4}$

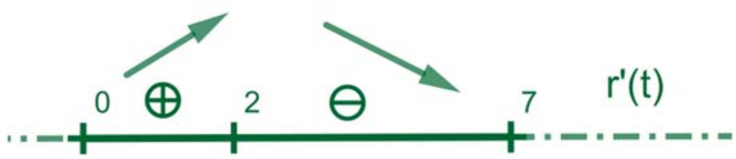
Para estudiar el crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de la derivada primera en su dominio de definición

$$\mathrm{r}'(\mathrm{t}) = \frac{380(\mathrm{t}^2+4) - 380\mathrm{t}\cdot 2\mathrm{t}}{(\mathrm{t}^2+4)^2} = \frac{-380\mathrm{t}^2+1520}{(\mathrm{t}^2+4)^2}$$

Estudiamos para qué valores se anula esta derivada resolviendo la ecuación $\frac{-380\mathrm{t}^2+1520}{(\mathrm{t}^2+4)^2} = 0$

$r'(t) = 0 \Longrightarrow t^2 = 4 \Longrightarrow t = 2$ (t = -2 no pertenece al dominio de definición de la función)

Estudiamos el signo de la derivada primera



El rendimiento de la máquina aumenta durante las dos primeras horas y disminuye en las siguientes

c) La función es continua en su dominio y en $t = 2$ y pasa de ser creciente a decreciente por lo tanto en ese valor $t = 2$ la función alcanza un máximo relativo siendo el valor del rendimiento $r(2)$ = 95 en una escala de 0 a 100

También podría estudiarse el signo de la derivada segunda en el punto $t = 2$

$$r''(t) = \frac{-760t(t^2+4)^2 - (-380t^2+1520)2(t^2+4)2t}{(t^2+4)^4}$$

$$r''(2) < 0 \Longrightarrow t = 2 \text{ máximo relativo}$$

Por lo tanto, el rendimiento de la máquina es máximo el segundo año ($t = 2$) siendo el valor del rendimiento $r(2)$ = 95 en una escala de 0 a 100

Problema .4: Análisis.

Una empresa puede vender x unidades al mes de un determinado producto al precio de $\mathbf{518 - x^2}$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de 275x euros que dependen del número x de unidades.

a) Determine las funciones $I(x)$ y $B(x)$ que expresan los ingresos y beneficios obtenidos por la producción y venta de x unidades, respectivamente. ¿Qué beneficio se obtiene si se producen y se venden 10 unidades?

b) Calcule el número de unidades que hay que producir para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderían dichos beneficios? ¿Cuál sería el precio de venta de una unidad en ese caso?

Solución:

a) x unidades que puede vender al mes

518 - x^2 precio por unidad vendida

Gastos $G(x)$ = 225 + 275x

Función ingresos $I(x) = x(518 - x^2) = 518x - x^3$

Función beneficios $B(x) = I(x) - G(x) = -x^3 + 243x - 225$

B(10) = 1 205 €

Si se producen y venden **10 unidades** se obtiene un beneficio de **1 205 €**

b) Calculamos la derivada primera y estudiamos para que valores se anula con el fin de determinar los posibles extremos de la función beneficio

$$B'(x) = -3x^2 + 243$$

$B'(x) = 0 \iff x^2 = 81 \iff x = 9$ ($x = -9$ no es un punto del dominio de la función beneficio [0, ∞))

Estudiamos el signo de la segunda derivada en $x = 9$

$$B''(x) = -6x$$

$B''(9) < 0 \Longrightarrow x = 9$ la función beneficio alcanza un máximo

Vendiendo **9** unidades al mes se alcanza un beneficio máximo de **1 233 €**. El precio de venta de una unidad en este caso sería de **437 €** (518 - 9^2)

Problema .5: Estadística y Probabilidad.

El 40 % de las personas que visitan el Pórtico de la Gloria de la Catedral de Santiago son españolas. Se sabe además que 4 de cada 5 españoles están satisfechos con la visita, mientras que, entre los no españoles, no están satisfechos con la visita el 10 %.

a) Calcule el porcentaje de personas satisfechas con la visita.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté satisfecha con la visita y no sea española?

c) ¿Son independientes los sucesos "no ser español" y "estar satisfecho con la visita"? Razone la respuesta.

Solución:

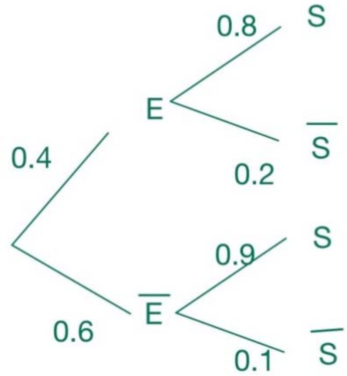
E- ser español/a $\bar{E}$- no ser español/a

S- Quedar satisfecho/a con la visita al Pórtico de la Gloria $\bar{S}$- no quedar satisfecho/a

$P(E) = 0.4$

$P(S/E) = 4/5 = 0.8$

$P(\bar{S}/\bar{E}) = 0.1$



a) Por el teorema de las probabilidades totales

$P(S) = P(E) \cdot P(S/E) + P(\bar{E}) \cdot P(S/\bar{E}) = 0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.9 = 0.86$

El **86 %** de las personas que visitan el Pórtico de la Gloria están satisfechas con la visita

b) $P(S \cap \bar{E}) = P(\bar{E}) \cdot P(S/\bar{E}) = 0.6 \cdot 0.9 = 0.54$

La probabilidad de que una persona esté satisfecha con la visita y no sea española es de **0.54**

c) $P(S/\bar{E}) = 0.9$

$P(S) = 0.86$

$P(S/\bar{E}) \neq P(S)$ por lo tanto los sucesos "no ser español" y "estar satisfecho con la visita" NO son independientes

También se podría comprobar que $0.94 = P(S \cap \bar{E}) \neq P(S) \cdot P(\bar{E}) = 0.86 \cdot 0.6 = 0.516$

Problema .6: Estadística y Probabilidad.

El peso de las naranjas para zumo recolectadas por un productor es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una media de $\mu = 200$ gramos y una desviación típica de $\sigma = 50$ gramos.

a) Si tomamos una muestra aleatoria de $n = 25$ naranjas, ¿cuál es la probabilidad de que su peso medio está comprendido entre 175 y 215 gramos?

b) ¿De qué tamaño se ha tomado otra muestra aleatoria si la probabilidad de que el peso medio sea inferior a 210 gramos es del 97.72 %?

Solución:

a) Definimos la variable X peso de las naranjas para zumo.

$X \equiv N(200, 50)$

La distribución de la media muestra para n=25l es $\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(200, \frac{50}{\sqrt{25}}\right) = N(200, 10)$

Tipificando $Z = \frac{\bar{X}-200}{10} \equiv N(0, 1)$

$$P(175 \leq \bar{X} \leq 215) = P(\bar{X} \leq 215) - P(\bar{X} \leq 175) = P\left(Z \leq \frac{215-200}{10}\right) - P\left(Z \leq \frac{175-200}{10}\right) =$$

$$= P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -2.5) = P(Z \leq 1.5) - \big(1 - P(Z \leq 2.5)\big) = 0.9332 - (1 - 0.9938) = 0.92$$

La probabilidad de que el peso medio de las naranjas, en una muestra de 25, está comprendido entre 175 y 215 gramos es de **0.92**

b) $P(\bar{X} \leq 210) = 0.9772$

$\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(200, \frac{50}{\sqrt{n}}\right)$ tipificando $Z = \frac{\bar{X}-200}{\frac{50}{,\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1)$

$P\left(Z \leq \frac{210-200}{\frac{50}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z \leq \frac{10}{\frac{50}{\sqrt{n}}}\right)$ = 0.9772

Buscando en la tabla de la distribución N(0, 1) de forma inversa

$$\frac{10}{\frac{50}{\sqrt{n}}} = 2 \Longrightarrow 10\sqrt{n} = 100 \Longrightarrow \sqrt{n} = 10 \Longrightarrow n = 100$$

Se debe tomar una muestra de tamaño **100 naranjas** para que la probabilidad de que el peso medio sea inferior a 210 gramos sea del 97.72 %

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con tres ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a dos de un bloque y a uno de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuesta a qué cuatro ejercicios se responden en el examen. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1:

Discute el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x - ay + 2az = 5 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$, en función del parámetro a. Resuelve el sistema si $a = 1$.

Problema 2:

Consideramos la ecuación matricial: $X^2 - X = 2I$, donde I es la matriz identidad.

$a)$ ¿Qué matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cumplen la ecuación?

$b)$ ¿Se puede expresar en general la diferencia $X^2 - X$ como producto de matrices?

$c)$ Si X es una matriz cuadrada de orden n que cumple la ecuación, ¿cuál es su rango?

Problema 3:

En el proceso de fabricación de cierta pintura se mezcla una cantidad (x) de polvo sintético con una cantidad (y) de polvo de un mineral. Se imponen las siguientes restricciones:

$x + 2y \le 6 \Rightarrow$ (para no rebasar un nivel de toxicidad en el proceso).

$5x + 4y \le 20 \Rightarrow$ (para mantener la gama de color adecuada).

$y \le x \Rightarrow$ (para que la viscosidad no sea excesiva).

$a)$ Dibuja en el plano la región factible de cantidades x e y que cumplen las restricciones.

$b)$ ¿Cuál es la máxima cantidad de polvo de mineral que podemos usar?

$c)$ ¿Cuál es la cantidad máxima posible de polvo $(x + y)$ que permiten las restricciones y cuánto incluye de cada tipo?

Bloque 2. Análisis.

Problema 4:

Nos preguntamos por las propiedades de una función de la forma $f(x) = \frac{x(x+b)}{x^2-1}$.

$a)$ ¿Para qué valores de b su gráfica tiene una sola asíntota vertical?

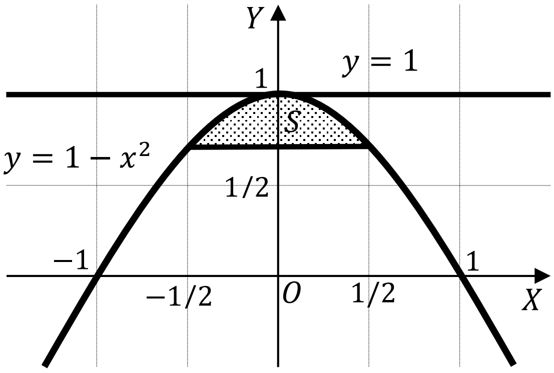
$b)$ Estudia la existencia de extremos relativos de $f(x)$ si $b = -2$.

Problema 5:

Queremos definir una función por trozos, de forma que quede definida en el intervalo $[-2,2]$ según: $f(x)=\begin{cases}3-2x & si\ \ x\in[-2,a)\\ x+4 & si\ \ x\in[a,b)\\ \frac{5}{x} & si\ \ x\in[b,2]\end{cases}$. Calcula los valores de a y b necesarios para que f sea continua, y representa la función gráficamente.

Problema 6:

Calcula el área de la región sombreada de la figura.



Bloque 3. Estadística y probabilidad.

Problema 7:

Jorge y Laura juegan con dados. Los dados son equilibrados y, como es habitual, las caras están numeradas del 1 al 6. Jorge echa un dado, y a continuación Laura echa otro. Laura gana si la diferencia entre los dos resultados obtenidos es (en valor absoluto) mayor que 1.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de Laura?

b) Si han jugado y ha ganado Laura, ¿cuál es la probabilidad de que Jorge haya sacado un 6?

Problema 8:

Una bodega de Rioja elabora vinos blancos, de crianza y reservas de gran calidad. Su producción consiste en un 35 % de vino blanco, un 40 % de vino de crianza y un 25 % de reservas. Aunque tiene mucho cuidado en la selección de los corchos, la probabilidad de que alguna botella se estropee por razón de un corcho inadecuado es del 5 % para el vino blanco, 4 % para el vino de crianza y 2 % para el vino de reserva.

a) Se elige una botella de la bodega al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el vino esté estropeado?

b) Hemos elegido una botella de vino tinto al azar (crianza o reserva), ¿cuál es la probabilidad de que el vino NO esté estropeado?

Problema 9:

Una máquina produce bolas de billar, y sabemos que su peso sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 gr.

a) Si el peso medio de las bolas fuese 165 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 100 bolas supere los 168 gr?

b) El promedio en una muestra de 100 bolas es de 165 gr. Determina un intervalo con el 90 % de confianza para la media del peso de las bolas que produce la máquina.

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1:

Discute el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x - ay + 2az = 5 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$, en función del parámetro a. Resuelve el sistema si $a = 1$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 2 & -a & 2a & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = a + 2a^2 - 6a + 2a = 0;\ \ 2a^2 - 3a = 0;$$

$a(2a - 3) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = \frac{3}{2}$.

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq 3/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = -3C_3\} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 15 = -12 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$Para\ a = \frac{3}{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. A efectos de rango la matriz M' es equivalente a la matriz $M'' = 2 \cdot M' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & 10 \\ 2 & 6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$Rang\ M'' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & 10 \\ 2 & 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_3 \to \frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & 10 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 - F_2 - 4F_1 \\ F_3 - F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & 10 & 10 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \to \frac{1}{5}F_3\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M'' = Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = \frac{3}{2} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para $a = 1$; el sistema resulta $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1} = \frac{1-6+5}{-1} = \frac{0}{-1} = 0. \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-5+2+2}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{6+5+1-15}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

$\underline{\mathit{Solución}: \boldsymbol{x = 0};\ \ \boldsymbol{y = 1};\ \ \boldsymbol{z = 3}.}$

Problema 2:

Consideramos la ecuación matricial: $X^2 - X = 2I$, donde I es la matriz identidad.

$a)$ ¿Qué matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cumplen la ecuación?

$b)$ ¿Se puede expresar en general la diferencia $X^2 - X$ como producto de matrices?

$c)$ Si X es una matriz cuadrada de orden n que cumple la ecuación, ¿cuál es su rango?

Solución:

$a)$ $\quad X^2 - X = 2I \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2I;$

$\begin{pmatrix} a^2 & ab - b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2I;\ \begin{pmatrix} a^2 - a & ab - 2b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} a^2 - a = 2 \\ ab - 2b = 0 \end{array} \right\};$

$\left. \begin{array}{r} a(a-1) = 2 \\ b(a-2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 2\ y\ \forall b \in R.$

$\underline{\mathit{Cumplen\ la\ ecuación\ las\ matrices\ de\ la\ forma}\ \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1} \end{pmatrix}, \forall \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}.}$

$b)$ $\quad X^2 - X = 2I;\ X \cdot (X - I) = 2I.$

$\underline{\mathit{Puede\ hacerse, siempre\ que\ las\ matrices}\ X\ \mathit{sean}\ \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1} \end{pmatrix}, \forall \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}.}$

$c)$ $\quad X^2 - X = 2I;\ X \cdot (X - I) = 2I;\ \frac{1}{2} \cdot X \cdot (X - I) = I;\ X \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (X - I)\right] = I \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (X - I) = X^{-1}$. Como existe la inversa de X es, necesariamente, $|X| \neq 0$, por lo cual, su rango coincide con la dimensión de la matriz X.

$\underline{\boldsymbol{Rang\ X = n.}}$

Problema 3:

En el proceso de fabricación de cierta pintura se mezcla una cantidad (x) de polvo sintético con una cantidad (y) de polvo de un mineral. Se imponen las siguientes restricciones:

$x + 2y \leq 6 \Rightarrow$ (para no rebasar un nivel de toxicidad en el proceso).

$5x + 4y \leq 20 \Rightarrow$ (para mantener la gama de color adecuada).

$y \leq x \Rightarrow$ (para que la viscosidad no sea excesiva).

$a)$ Dibuja en el plano la región factible de cantidades x e y que cumplen las restricciones.

$b)$ ¿Cuál es la máxima cantidad de polvo de mineral que podemos usar?

$c)$ ¿Cuál es la cantidad máxima posible de polvo $(x + y)$ que permiten las restricciones y cuánto incluye de cada tipo?

Solución:

x	0	4
y	5	0

$a)$ Las condiciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} x + 2y \leq 6 \\ 5x + 4y \leq 20 \\ y \leq x \\ x \geq 5;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$

x	0	6
y	3	0

① $\Rightarrow x + 2y \leq 6 \Rightarrow y \leq \frac{6-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

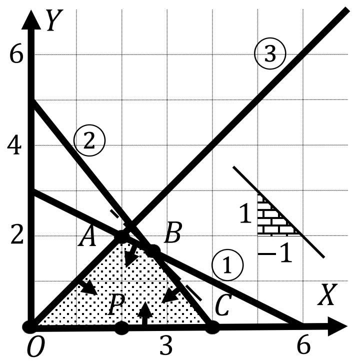
② $\Rightarrow 5x + 4y \leq 20 \Rightarrow y \leq \frac{20-5x}{4} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

③ $\Rightarrow y \geq x \Rightarrow P(2,0) \rightarrow Si.$

x	0	6
y	0	6

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = x \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 6;\ \ x = 2 \Rightarrow A(2,2).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 6 \\ 5x + 4y = 20 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x - 4y = -12 \\ 5x + 4y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$3x = 8;\ \ x = \frac{8}{3};\ \ \frac{8}{3} + 2y = 6;\ \ 8 + 6y = 18;\ 3y = 5;\ \ y = \frac{5}{3} \Rightarrow B\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 5x + 4y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x = 20;\ \ x = 4 \Rightarrow C(4,0).$

$b)$ La función de objetivos: $f(x,y) = x + y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(2,2) = 2 + 2 = 4.$

$B \Rightarrow f\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{8}{3} + \frac{5}{3} = \frac{13}{3} = 4.33.$

$C \Rightarrow f(4,0) = 4 + 0 = 4.$

El valor máximo se produce en el punto $B\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right).$

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{1}x \Rightarrow m = -\frac{1}{1}$.

De la observación de la figura se deduce que el mayor valor de y (polvo de mineral) se produce en el punto $A(2, 2)$, por lo cual:

$\underline{La\ mayor\ cantidad\ de\ polvo\ de\ mineral\ que\ se\ puede\ usar\ es\ de\ 2\ unidades}.$

$c)\ \underline{La\ mayor\ canatidad\ de\ polvo\ que\ se\ puede\ usar\ es\ de\ 13/3\ unidades}.$

$\underline{La\ proporción\ de\ polvos\ sintético\ y\ mineral\ usado\ es\ 8\ y\ 5, respectivamente}.$

Bloque 2. Análisis.

Problema 4:

Nos preguntamos por las propiedades de una función de la forma $f(x) = \frac{x(x+b)}{x^2-1}$.

$a)$ ¿Para qué valores de b su gráfica tiene una sola asíntota vertical?

$b)$ Estudia la existencia de extremos relativos de $f(x)$ si $b = -2$.

Solución:

$a)$ Las propiedades generales de las funciones racionales son las siguientes:

1.--- Su dominio de definición son los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

2.--- Tiene asíntotas horizontales cuando el grado del denominador es mayor que el grado del numerador.

3.--- Tiene asíntotas oblicuas cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

Las asíntotas verticales son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

En principio, las rectas $x = -1$ y $x = 1$ serían asíntotas verticales, pero nos dicen que $f(x)$ debe tener una sola asíntota vertical, por lo cual tiene que poder simplificarse la función, de la forma siguiente:

$$f(x) = \frac{x(x+b)}{x^2-1} = \frac{x(x+b)}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow b = -1 \ o \ b$$

$$\underline{f(x)\ tiene\ una\ sola\ asíntota\ vertical\ para\ \mathbf{b} = \mathbf{-1}\ o\ para\ \mathbf{b} = \mathbf{1}}.$$

$b)$ Para $b = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{x(x-2)}{x^2-1} = \frac{x^2-2x}{x^2-1}$.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-1)-x(x-2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^2+2-2x^3+4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2-2x+2}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x^2-x+1)}{(x^2-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(x^2-x+1)}{(x^2-1)^2} = 0;\ \ x^2 - x + 1 = 0;\ \ x = \frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in R.$

$$\underline{Para\ b = -2\ la\ función\ f(x)\ no\ tiene\ extremos\ relativos}.$$

Problema 5:

Queremos definir una función por trozos, de forma que quede definida en el intervalo $[-2,2]$ según: $f(x)=\begin{cases}3-2x\ \ si\ \ x\in[-2,a)\\ x+4\ \ si\ \ x\in[a,b)\\ \frac{5}{x}\ \ si\ \ x\in[b,2]\end{cases}$. Calcula los valores de a y b necesarios para que f sea continua, y representa la función gráficamente.

Solución:

La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para $x=a$ y $x=b$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=a\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a}(3-2x)=3-2a\\ \lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a}(x+4)=a+4=f(a)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)\Rightarrow 3-2a=a+4;\ \ 3a=-1\Rightarrow a=-\frac{1}{3}.$$

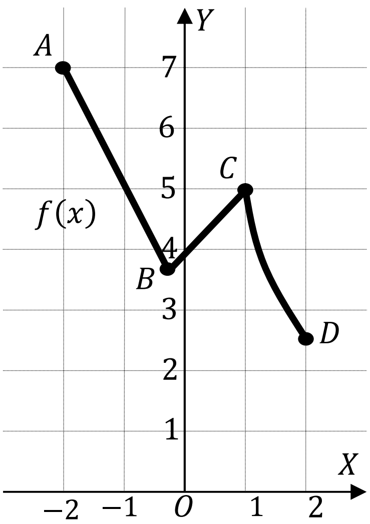
$$Para\ x=b\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\lim\limits_{x\to b}(x+4)=b+4\\ \lim\limits_{x\to b^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b}\frac{5}{x}=\frac{5}{b}=f(b)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to b^-}f(x)=\lim_{x\to b^+}f(x)=f(b)\Rightarrow b+4=\frac{5}{b};\ \ b^2+4b-5=0;$$

$$b=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-4\pm6}{2}=-2\pm3\Rightarrow b_1=-5\notin D(f)\ \Rightarrow b=1.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ su\ dominio\ para\ \boldsymbol{a}=-\frac{1}{3}\ y\ \boldsymbol{b}=\mathbf{1}.}$$

La función resulta $f(x)=\begin{cases}3-2x\ \ si\ \ x\in\left[-2,-\frac{1}{3}\right)\\ x+4\ \ si\ \ x\in\left[-\frac{1}{3},1\right)\\ \frac{5}{x}\ \ si\ \ x\in[1,2]\end{cases}$.



Para la representación gráfica de la función se tiene en cuenta que en el intervalo $\left[-2,-\frac{1}{3}\right)$ la función es un segmento de extremos A y B, siendo:

$A\Rightarrow f(-2)=3-2\cdot(-2)=3+4=7\Rightarrow A(-2,7)$.

$B\Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right)=3-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}\Rightarrow B\left(-\frac{1}{3},\frac{11}{3}\right)$.

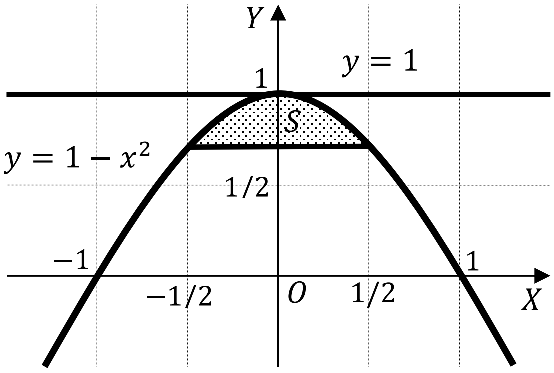
En el intervalo $\left[-\frac{1}{3},1\right)$ la función es un segmento de extremos B y C, siendo: $C\Rightarrow f(1)=1+4=5\Rightarrow C(1,5)$.

En el intervalo $[1,2]$ la función es una rama hiperbólica de extremos los puntos C y D, siendo: $D\Rightarrow f(2)=\frac{5}{2}\Rightarrow D\left(2,\frac{5}{2}\right)$.

La representación gráfica, aproximada, es la que indica la figura adjunta.

Problema 6:

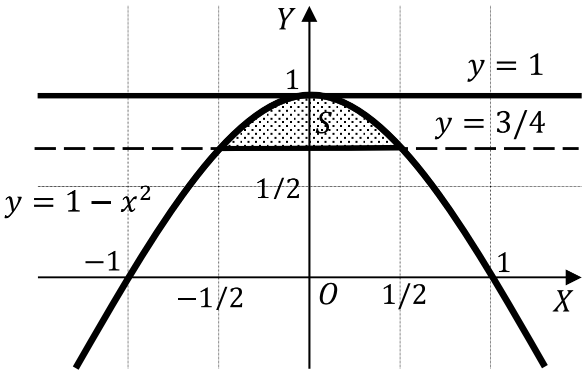
Calcula el área de la región sombreada de la figura.



Solución:

$y\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Considerando que la parábola $y = 1 - x^2$ es simétrica con respecto al eje de ordenadas por ser $y(-x) = y(x)$ y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S = 2 \cdot \int_0^{1/2} \left[(1 - x^2) - \frac{3}{4}\right] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{1/2} \left(1 - x^2 - \frac{3}{4}\right) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x^2\right) \cdot dx = \left[\frac{x}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left[\frac{\frac{1}{2}}{4} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}\right] - 2 \cdot 0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{3-1}{12} = \frac{2}{12} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{6}\, u^2 \cong 0.17\, u^2}.$$

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

Problema 7:

Jorge y Laura juegan con dados. Los dados son equilibrados y, como es habitual, las caras están numeradas del 1 al 6. Jorge echa un dado, y a continuación Laura echa otro. Laura gana si la diferencia entre los dos resultados obtenidos es (en valor absoluto) mayor que 1.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de Laura?

b) Si han jugado y ha ganado Laura, ¿cuál es la probabilidad de que Jorge haya sacado un 6?

Solución:

a) El espacio muestral es $E=\begin{Bmatrix} 11,12,\underline{13},\underline{14},\underline{15},\underline{16} \\ 21,22,23,\underline{24},\underline{25},\underline{26} \\ \underline{31},32,33,34,\underline{35},\underline{36} \\ \underline{41},\underline{42},43,44,45,\underline{46} \\ \underline{51},\underline{52},\underline{53},54,55,56 \\ \underline{61},\underline{62},\underline{63},\underline{64},65,66 \end{Bmatrix}$, donde aparecen subrayados los casos favorables a que gane Laura.

Aplicando el concepto básico de probabilidad, es decir, la regla de Laplace:

$$p=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}=\frac{20}{36}\Rightarrow \underline{p=\frac{5}{9}=0.5556.}$$

La probabilidad de ganar de Laura es de $\frac{5}{9}=\mathbf{0.5556}$

b) Repitiendo el proceso seguido en el apartado anterior, se trata de aplicar la regla de Laplace de nuevo, donde los casos posibles son los 20 casos en que gana Laura y los casos favorables son los que la segunda cifra es un 6:

$$E=\begin{Bmatrix} 11,12,\underline{13},\underline{14},\underline{15},\underline{16} \\ 21,22,23,\underline{24},\underline{25},\underline{26} \\ \underline{31},32,33,34,\underline{35},\underline{36} \\ \underline{41},\underline{42},43,44,45,\underline{46} \\ \underline{51},\underline{52},\underline{53},54,55,56 \\ \underline{61},\underline{62},\underline{63},\underline{64},65,66 \end{Bmatrix}$$

$$p=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}=\frac{4}{20}\Rightarrow \underline{p=\frac{1}{5}=0.2.}$$

Si han jugado y ha ganado Laura, la probabilidad de que Jorge haya sacado un 6 es $\frac{1}{5}=\mathbf{0.2}$

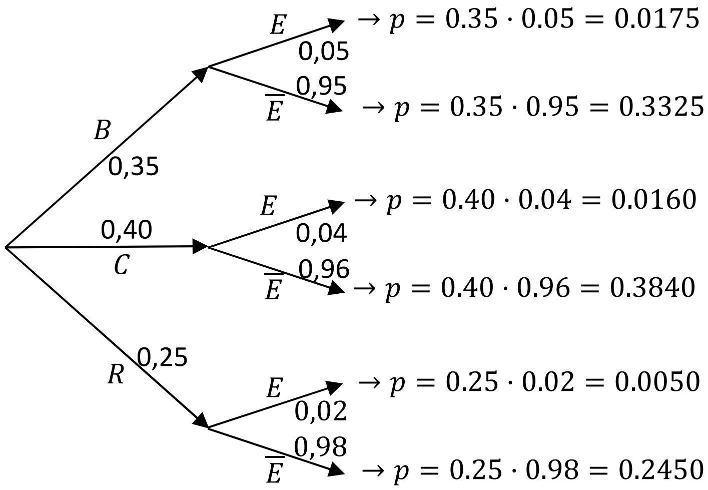
Problema 8:

Una bodega de Rioja elabora vinos blancos, de crianza y reservas de gran calidad. Su producción consiste en un 35 % de vino blanco, un 40 % de vino de crianza y un 25 % de reservas. Aunque tiene mucho cuidado en la selección de los corchos, la probabilidad de que alguna botella se estropee por razón de un corcho inadecuado es del 5 % para el vino blanco, 4 % para el vino de crianza y 2 % para el vino de reserva.

a) Se elige una botella de la bodega al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el vino esté estropeado?

b) Hemos elegido una botella de vino tinto al azar (crianza o reserva), ¿cuál es la probabilidad de que el vino NO esté estropeado?

Solución:



a) $\quad P = P(E) = P(B \cap E) + P(C \cap E) + P(R \cap E) =$

$= P(B) \cdot P(E/B) + P(C) \cdot P(E/C) + P(R) \cdot P(E/R) =$

$= 0.35 \cdot 0.05 + 0.40 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.02 = 0.0175 + 0.0160 + 0.0050 =$

$= \underline{0.0385}$.

La probabilidad de que el vino esté estropeado es de $\underline{\mathbf{0.0385}}$**.**

b) $P = P\left(\overline{E}/C \cup R\right) = \frac{P\left[\overline{E} \cap (C \cap R)\right]}{P(C \cup R)} = \frac{P\left(C \cap \overline{E}\right) + P\left(R \cap \overline{E}\right)}{P(C \cup R)} = \frac{P(C) \cdot P\left(\overline{E}/C\right) + P(R) \cdot P\left(\overline{E}/R\right)}{P(C \cup R)} =$

$= \frac{0.40 \cdot 0.96 + 0.25 \cdot 0.98}{0.40 + 0.25} = \frac{0.3840 + 0.2450}{0.65} = \frac{0.6290}{0.65} = \underline{0.9677}$.

Hemos elegido una botella de vino tinto al azar, la probabilidad de que el vino NO esté estropeado es de $\underline{\mathbf{0.9677}}$

Problema 9:

Una máquina produce bolas de billar, y sabemos que su peso sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 gr.

a) Si el peso medio de las bolas fuese 165 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 100 bolas supere los 168 gr?

b) El promedio en una muestra de 100 bolas es de 165 gr. Determina un intervalo con el 90 % de confianza para la media del peso de las bolas que produce la máquina.

Solución:

$a)\ Datos\colon\ \mu = 165;\ \ n = 100 \Rightarrow \sigma = 20.$

$$\overline{X} \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(165, \frac{20}{\sqrt{100}}\right) = N(165, 2).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-165}{2}$.

$$P = P(\overline{X} > 168) = P\left(Z > \frac{168-165}{2}\right) = P\left(Z > \frac{3}{2}\right) = P(Z > 1{,}5) =$$

$= 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = \underline{0.0668}$.

Si el peso medio de las bolas fuese 165 gr, la probabilidad de que el peso medio de 100 bolas supere los 168 gr es de $\underline{\mathbf{0.0668}}$

b) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0.95\ \to\ \alpha = 1 - 0.95 = 0.05\ \to\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.$$

$(1 - 0.025 = 0.9750\ \to z = 1.96)$.

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 165;\ \sigma = 20;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(165 - 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}};\ 165 + 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right);$$

$(165 - 1.96 \cdot 2;\ 165 + 1.96 \cdot 2);\ \ (165 - 3.92;\ 165 + 3.92).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C.}_{95\,\%} = (\mathbf{161.08};\ \ \mathbf{167.92}).}$$

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020 – 2021
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.

Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

El **tiempo** disponible para resolver el examen es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación Lineal.

1.1.– En el último sorteo de la lotería primitiva Juan acertó 4 números. Su padre le preguntó qué números había acertado. Juan le planteó el siguiente acertijo para que adivinase tres de ellos: la suma de los tres números es 73; si al mayor de los tres números le quitas 3 unidades, obtienes la suma de los otros dos; el doble del menor de los tres números más el mayor de ellos es el triple del otro número más 8 unidades.

(a) ¿Cuáles eran esos tres números? [**2 puntos**]

(b) ¿Cuál es el cuarto número, si es la mitad de la suma de los dos mayores de los tres anteriores? [**0.5 puntos**]

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es

1.2.– Sea A una matriz inversible de orden 2.

(i) Halla las matrices X e Y que cumplen que

$$\begin{cases} AX + Y = I \\ AX - Y = 0 \end{cases}$$

(donde I es la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 es la matriz nula) [**0.75 puntos**].

(ii) En particular, calcula las soluciones X e Y para $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ [**1.75 puntos**].

1.3.– Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen

$$\begin{aligned} &0 \leq y, \;\; 0 \leq x \leq 2\,, \\ &x + y \leq 3\,, \text{ y} \\ &x + 3y \leq 6\,. \end{aligned}$$

[**1.25 puntos**]

Averigua el valor máximo que alcanzan en dicha región las siguientes funciones, y en qué puntos lo alcanza cada una:

$$f(x, y) = 7x + 5y \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = x + 5y\,.$$

[**1.25 puntos**]

Bloque 2. Análisis.

2.1.– Representa gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1}\,,$$

de forma que se aprecien claramente su dominio, sus asíntotas verticales y horizontales, sus cortes con los ejes, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos [**2.5 puntos**]

2.2.– Consideramos la función f dada por $f(x) = x^3 - 3x$.

(a) Halla sus extremos relativos [**1.25 puntos**].

(b) ¿Cuánto vale $f'(1)$? ¿Cuál es la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(1, f(1))$? **[0.75 puntos]**

(c) ¿En qué otro punto $(t, f(t))$ corta dicha recta a la gráfica de f? **[0.5 puntos]**

Nota: si no has sabido responder al apartado (b), en (c) debes resolver la ecuación $f(x) = f(1)$.

2.3.– Haz un dibujo de la gráfica de la función $f(x) = (x-1)(x-4)$, señalando si existen sus máximos y mínimos **[0.75 puntos]**.

Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica y la recta $y = 10$ **[1.75 puntos]**.

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.– Hace un siglo, en cierto país el porcentaje de hombres y mujeres entre la población adulta era en ambos casos del 50 %. El porcentaje de fumadores entre los hombres era del 60 %, mientras que únicamente fumaba la décima parte de las mujeres.

(i) ¿Cuál era el porcentaje de personas fumadoras entre la población adulta de ese país? **[1 punto]**

(ii) Entre las personas fumadoras, ¿cuál era el porcentaje de mujeres? **[1 punto]**

(iii) El abuelo Joaquín decía que una persona era "como Dios manda" si o bien era hombre y fumaba o bien era mujer y no fumaba. ¿Qué porcentaje de personas adultas era como Dios manda, según el abuelo Joaquín? **[0.5 puntos]**

3.2.– Los ingresos mensuales por ventas de un establecimiento siguen una distribución normal, con una desviación típica de 900 €. Con los datos de los últimos 9 meses han calculado, como intervalo de confianza para la media mensual de ingresos, el intervalo comprendido entre 4663 y 5839 €.

(a) ¿Cuál fue el promedio de los ingresos en esos nueve meses? **[0.5 puntos]**

(b) ¿Con qué nivel de confianza se ha obtenido el intervalo? **[1.5 puntos]**

(c) Si con el mismo nivel de confianza el intervalo hubiera sido el comprendido entre 4957 y 5545, ¿cuántos meses habrían formado la muestra? **[0.5 puntos]**

3.3.– Un estudio de la OCDE de 2009 estableció que la estatura media de los adultos varones en España era de 174 cm, con una desviación típica de 8 cm. Asumiremos que la distribución era normal. ¿Cuál era la probabilidad de que un hombre adulto español midiera más de 190 cm? **[1.75 puntos]** Responde utilizando la tabla de la distribución la normal estándar que se incluye al final.

Entre los hombres holandeses, que eran los más altos según aquel estudio, la probabilidad de medir más de 190 cm (suponiendo también una desviación típica de 8 cm y una distribución normal) era 0.15866. ¿Cuál era la estatura media de los hombres holandeses? **[0.75 puntos]**

Tabla de la distribución normal estándar:

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020 – 2021
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

(1.1) Se sugiere valorar en 1 punto el planteamiento del sistema e igualmente la resolución. No hay que ser más indulgente con la resolución de un sistema equivocado, si no repasan con posterioridad si su solución cumple el enunciado.

(1.2) (ii) se puede resolver (fácilmente) si se consideran las ocho incógnitas de entradas en las matrices X e Y, y se espera que lo hagan así si no saben usar la inversa de A.

(1.3) Para la segunda parte se sugiere repartir 0.75 para f y 0.5 para g,

(2.1) Una sugerencia: 0.25 al dominio, 0.5 las asíntotas, 0.25 los cortes con los ejes, 0.75 el cálculo de f' y 0.5+0.25 crecimiento y extremos, dependiendo de cómo los justifiquen.

(2.2) Se sugiere ser indulgente con los errores en los cálculos de la integral, si esta se plantea correctamente y dan muestra de conocer la primitiva.

(3.3) La puntuación podría modificarse para valorar más la parte más sencilla.

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1:

En el último sorteo de la lotería primitiva Juan acertó 4 números. Su padre le preguntó qué números había acertado. Juan le planteó el siguiente acertijo para que adivinase tres de ellos: la suma de los tres números es 73; si al mayor de los tres números le quitas 3 unidades, obtienen la suma de los otros dos; el doble del menor de los tres números más el mayor de ellos es el triple del otro número más 8 unidades.

a) ¿Cuáles eran esos tres números?

b) ¿Cuál es el cuarto número, si es la mitad de la suma de los dos mayores de los tres números anteriores?

Solución:

a)

Sean los números $x, y, z \ (x > y > z)$.

Del enunciado se deduce el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=73 \\ x-3=y+z \\ 2z+x=3y+8 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=73 \\ x-y-z=3 \\ x-3y+2z=8 \end{array}\right\}$$. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 73 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 8 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-146-9-8+8-219-6}{-2-3-1+1-3-2} = \frac{-146-9-219-6}{-2-3-3-2} = \frac{380}{10} = 38.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 73 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{6+8-73-3+8-146}{-10} = \frac{22-222}{-10} = \frac{-200}{-10} = 20.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 73 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{-8-219+3+73+9-8}{-10} = \frac{85-235}{-10} = \frac{-150}{-10} = 15.$$

$\underline{Los\ números\ son\ \mathbf{38, 20\ y\ 15}}.$

b)

$$w = \frac{38+20}{2} = 19+10 = 29.$$

$\underline{El\ cuarto\ número\ es\ el\ \mathbf{29}}.$

****

Problema 2:

Sea A una matriz invertible de orden 2.

a) Halla las matrices X e Y que cumplen: $\begin{cases} AX+Y=I \\ AX-Y=O \end{cases}$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y O es la matriz nula de orden 2).

b) En particular, calcula las matrices X e Y para $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

a)

$$\left.\begin{matrix} AX+Y=I \\ AX-Y=O \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2AX=I;\ \ A\cdot X=\frac{1}{2}\cdot I;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X=\frac{1}{2}\cdot A^{-1}\cdot I=\frac{1}{2}\cdot A^{-1};$$

$I\cdot X=\frac{1}{2}\cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X=\frac{1}{2}\cdot A^{-1}}$.

$$\left.\begin{matrix} AX+Y=I \\ -AX+Y=-O \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2Y=I \Rightarrow \underline{Y=\frac{1}{2}\cdot I}.$$

$$\boldsymbol{\underline{X=\frac{1}{2}\cdot A^{-1}}.\ \underline{Y=\frac{1}{2}\cdot I}.}$$

b)

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1}=A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\underline{X=\frac{1}{2}\cdot A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}.} \qquad \boldsymbol{\underline{Y=\frac{1}{2}\cdot I=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

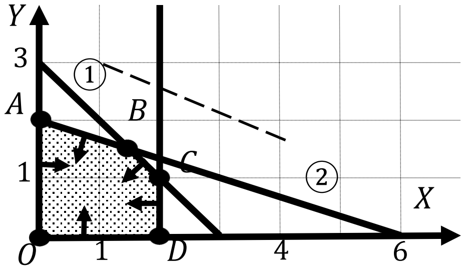
****

Problema 3:

Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen las siguientes inecuaciones: $0 \leq y$; $0 \leq x \leq 2$; $x + y \leq 3$; $x + 3y \leq 6$. Averigua el valor máximo que alcanzan en dicha región las siguientes funciones, y en qué puntos lo alcanza cada una: $f(x, y) = 7x + 5y$ y $g(x, y) = x + 5y$.

Solución:

Las restricciones son las siguientes:



$$\left.\begin{array}{r} x + y \leq 3 \\ x + 3y \leq 6 \\ 0 \leq x \leq 2;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 3).$$

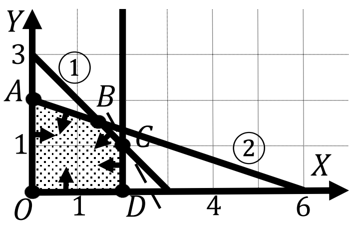
$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ x + 3y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{r} -x - y = -3 \\ x + 3y = 6 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow 2y = 3;\ y = \tfrac{3}{2};\ x + \tfrac{3}{2} = 3;\ 2x + 3 = 6;$$

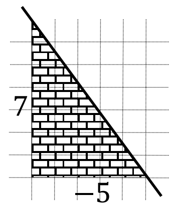
$$2x = 3;\ x = \tfrac{3}{2} \Rightarrow B\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2 \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow C(2, 1). \qquad D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(2, 0).$$

Función $f(x, y) = 7x + 5y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:





$A \Rightarrow f(0, 2) = 7 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 0 + 10 = 10.$

$B \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 7 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{12}{2} = 6.$

$C \Rightarrow f(2, 1) = 7 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 14 + 5 = 19.$

$D \Rightarrow f(2, 0) = 7 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 14 + 0 = 14.$

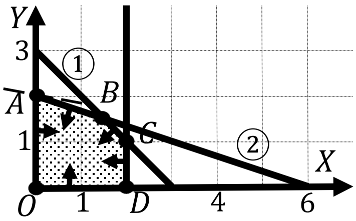
El valor máximo se produce en el punto $C(2, 1)$.

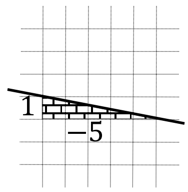
También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 7x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{5}x \Rightarrow m = -\frac{7}{5}.$

$\underline{\textit{Obtiene el máximo beneficio para } \boldsymbol{x = 2} \textit{ e } \boldsymbol{y = 1}.}$

Función $g(x,y) = x + 5y$.





Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow g(0,2) = 1 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 0 + 10 = 10.$

$B \Rightarrow g\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3.$

$C \Rightarrow g(2,1) = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 2 + 5 = 7.$

$D \Rightarrow g(2,0) = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 2 + 0 = 2.$

El valor máximo se produce en el punto $A(0,2)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$g(x,y) = x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x \Rightarrow m = -\frac{1}{5}.$

$\underline{\textit{Obtiene el máximo beneficio para } \boldsymbol{x = 0} \textit{ e } \boldsymbol{y = 2}}.$

****

Bloque 2. Análisis.

Problema 4:

Representa gráficamente la función $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}$, de forma que se aprecien claramente su dominio, sus asíntotas verticales y horizontales, sus cortes con los ejes, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos.

Solución:

Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$x^2+2x+1=0;\;\;(x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1.$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R-\{-1\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}=1 \Rightarrow \underline{La\ recta\ y=1\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow$

$$\underline{La\ recta\ y=1\ es\ asíntota\ horizontal}\;\;\underline{La\ recta\ x=-1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales}.$$

Cortes eje OX: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}=0;\;\; x^2-2x=0;\;\; x(x-2)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \to \underline{O(0,0)} \\ x_2=2 \to \underline{A(2,0)} \end{cases}.$ Eje OY: $f(0)=\frac{0^2-2\cdot 0}{0^2+2\cdot 0+1}=\frac{0}{1}=0 \Rightarrow \underline{O(0,0)}.$

$$\underline{O(0,0)};\,\underline{A(2,0)}$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

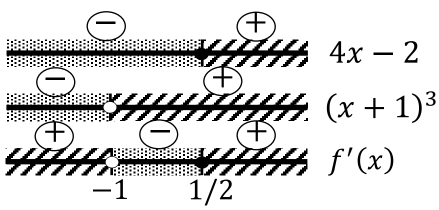
$f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}=\frac{x(x-2)}{(x+1)^2}.$

$f'(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x+1)^2-x(x-2)\cdot[2\cdot(x+1)\cdot 1]}{(x+1)^4}=\frac{(2x-2)\cdot(x+1)-2x(x-2)}{(x+1)^3}=$

$=\frac{2x^2+2x-2x-2-2x^2+4x}{(x+1)^3} \Rightarrow f'(x)=\frac{4x-2}{(x+1)^3}.$

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{4x-2}{(x+1)^3}=0;\;\; 4x-2=0;\;\; 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$

Teniendo en cuenta el dominio de la función y de la observación del esquema adjunto se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:



$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon\left(-1, \frac{1}{2}\right).}$$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es que se anule su primera derivada.

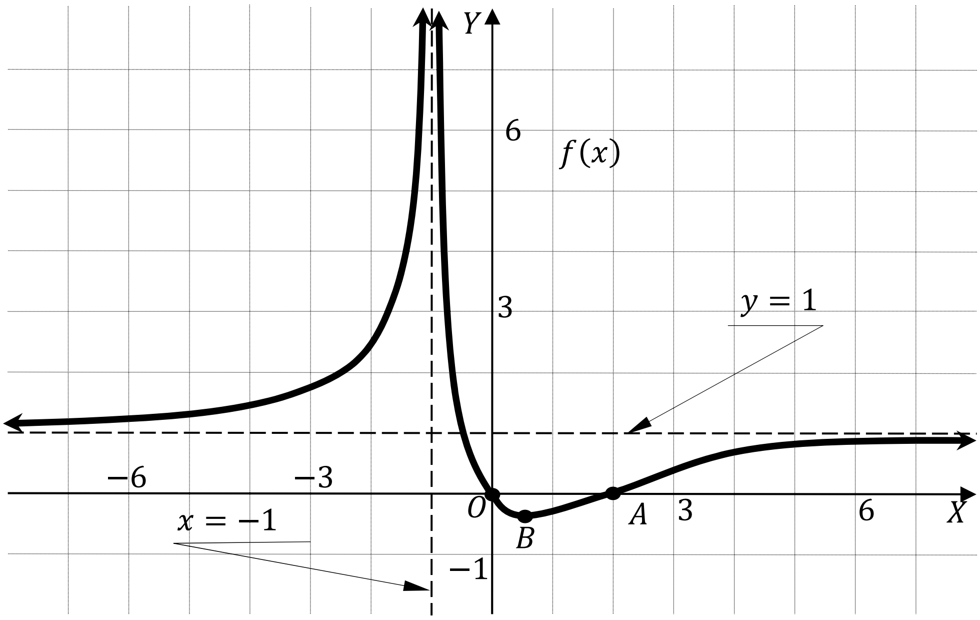
Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{4\cdot(x+1)^3 - (4x-2)[3\cdot(x+1)^2\cdot 1]}{(x+1)^6} = \frac{4\cdot(x+1) - 3\cdot(4x-2)}{(x+1)^4} = \frac{4x+4-12x+6}{(x+1)^4} = \frac{10-8x}{(x+1)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2\cdot(5-4x)}{(x+1)^4}. \quad f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\cdot\left(5-4\cdot\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^4} = \frac{6}{\left(\frac{3}{2}\right)^4} > 0 \Rightarrow Mín. relativo\ para\ x = \frac{1}{2}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2} = \frac{-\frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow Mínimo: B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right).$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

Problema 5:

Considera la función $f(x) = x^3 - 3x$.

$a)$ Halla sus extremos relativos.

$b)$ ¿Cuánto vale $f'(1)$? ¿Cuál es la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P[1, f(1)]$?

$c)$ ¿En qué otro punto $Q[t, f(t)]$ corta dicha recta a la gráfica de f?

Nota: si ha has sabido responder al apartado b), en c) debes resolver la ecuación $f(x) = f(1)$.

Solución:

$a)$ Por ser $f(-x) = -f(x)$ la función es simétrica con respecto al origen.

$f'(x) = 3x^2 - 3.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0;\ \ 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \underline{Máx. \to A(-1, 2)}.$

Por simetría con respecto al origen: $\underline{Mín. \to B(1, -2)}$.

$\underline{Máx. \to A(-1, 2)}.\ \underline{Mín. \to B(1, -2)}.$

$b)$ $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 3 = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \underline{f'(1) = 0}.$

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$m = f'(1) = 0.$

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2.$

El punto de tangencia es $P(1, -2)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(1, -2)$ con $m = 0$ es:

$y + 2 = 0 \cdot (x - 1) = 0.$

$\underline{f'(1) = 0}.\ \underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv y + 2 = 0}.$

$c)$ Los puntos de corte de la función $f(x) = x^3 - 3x$ y la recta $y + 2 = 0$ tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$f(x) = y \Rightarrow x^3 - 3x = -2;\ \ x^3 - 3x + 2 = 0.$

Resolviendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Los puntos de corte se producen para los valores $x = 1$ y $x = -2$.

El punto de tangencia hallado es $P(1, -2)$ y el otro punto pedido es el siguiente:

$\underline{Q(-2, -2)}.$

****

Problema 6:

Haz un dibujo de la gráfica de la función $f(x) = (x-1)(x-4)$, señalando, si existen, sus máximos y mínimos. Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica y la recta $y = 10$.

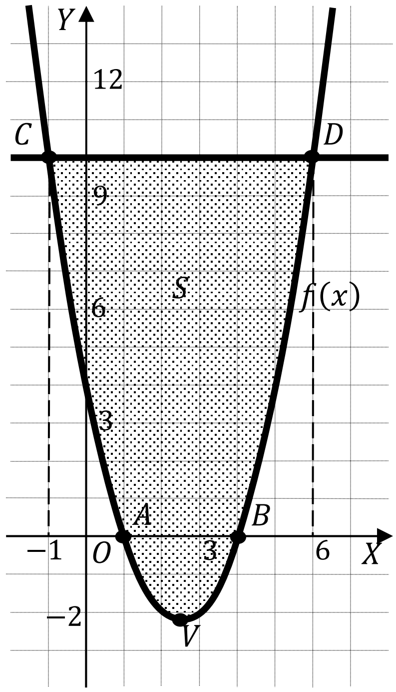
Solución:

La función $f(x) = (x-1)(x-4)$ es una parábola de expresión $f(x) = x^2 - 5x + 4$ es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2, que corta al eje X en los puntos $A(1,0)$ y $B(4,0)$ y cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}.$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - 1\right)\left(\frac{5}{2} - 4\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right).$$



Los puntos de corte de la función $f(x)$ y la recta $y = 10$ tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = y \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 10; \;\; x^2 - 5x - 6 = 0;$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow C(-1, 10) \\ x_2 = 6 \rightarrow D(6, 10) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular todas las ordenadas de $f(x)$ son iguales o menores que las correspondientes ordenadas de la recta $y = 10$, por lo cual la superficie es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{6} [y - f(x)] \cdot dx = \int_{-1}^{6} [10 - (x^2 - 5x + 4)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{6} (-x^2 + 5x + 6) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_{-1}^{6} =$$

$$= \left(-\frac{6^3}{3} + \frac{5 \cdot 6^2}{2} + 6 \cdot 6\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{5 \cdot (-1)^2}{2} + 6 \cdot (-1)\right] =$$

$$= -72 + 90 + 36 - \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6 = 60 - \frac{1}{3} - \frac{5}{2} = \frac{360-2-15}{6} = \underline{\frac{343}{6}\, u^2 \cong 57.17\, u^2}.$$

$$\underline{S = \frac{343}{6}\, u^2 \cong 57.17\, u^2}$$

****

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

Problema 7:

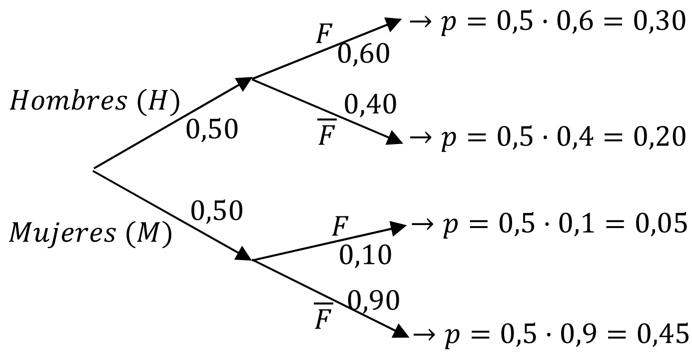
Hace un siglo, en cierto país el porcentaje de hombres y mujeres entre la población adulta era en ambos casos del 50 %. El porcentaje de fumadores entre los hombres era del 60 %, mientras que únicamente fumaba la décima parte de las mujeres.

a) ¿Cuál era el porcentaje de personas fumadoras entre la población adulta de ese país?

b) Entre las personas fumadoras, ¿cuál era el porcentaje de mujeres?

c) El abuelo Joaquín decía que una persona era "como Dios manda" si o bien era hombre o fumaba o bien era mujer y no fumaba. ¿Qué porcentaje de personas adultas eran como Dios manda, según el abuelo Joaquín?

Solución:



a)

$$P = P(F) = P(H \cap F) + P(M \cap F) = P(H) \cdot P(F/H) + P(M) \cdot P(F/M) =$$

$$= 0.50 \cdot 0.60 + 0.50 \cdot 0.10 = 0.30 + 0.05 = \underline{0.35}.$$

El porcentaje de personas fumadoras entre la población adulta de ese país es de **35 %**

b)

$$P = P(M/F) = \frac{P(M\cap F)}{P(F)} = \frac{P(M)\cdot P(F/M)}{P(F)} = \frac{0.50\cdot 0.10}{0.35} = \frac{0.05}{0.35} = 0.1428 = \underline{14.28\ \%}.$$

Entre las personas fumadoras, el porcentaje de mujeres es del $\underline{\mathbf{14.28\ \%}}$

c)

$$P = P(H \cap F) + P\left(M \cap \overline{F}\right) = P(H) \cdot P(F/H) + P(M) \cdot P\left(\overline{F}/M\right) =$$

$$= 0.50 \cdot 0.60 + 0.50 \cdot 0.90 = 0.30 + 0.45 = 0.75 = \underline{75\ \%}.$$

El porcentaje de personas adultas eran como Dios manda, según el abuelo Joaquín es del **<u>75 %</u>.**

****

Problema 8:

Los ingresos mensuales por ventas de un establecimiento siguen una distribución normal, con una desviación típica de 900 euros. Con los datos de los últimos 9 meses han calculado, como intervalo de confianza para la media mensual de ingresos, el intervalo comprendido entre 4 663 y 5 839 euros.

a) ¿Cuál fue el promedio de los ingresos en esos nueve meses?

b) ¿Con qué nivel de confianza se ha obtenido el intervalo?

c) Si con el mismo nivel de confianza el intervalo hubiera sido el comprendido entre 4 957 y 5 545, ¿cuántos meses habrían formado la muestra?

Solución:

a)

$$\overline{x} = \frac{5.839+4.663}{2} = \frac{10.502}{2} = 5\,251.$$

$\underline{El\ promedio\ de\ los\ ingresos\ mensuales\ de\ los\ 9\ meses\ fue\ de\ \mathbf{5\,251\ euros}}.$

b)

$$E = \frac{5.839-4.663}{2} = \frac{1.176}{2} = 588.$$

$Datos\colon\ \sigma = 900;\ \ n = 9;\ \ E = 588.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{588\cdot\sqrt{9}}{900} = \frac{1.764}{900} = 1.96.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ a 1.96 le corresponde 0.9750:

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9750;\ \ 2 - \alpha = 1.9500 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95.$

$\underline{El\ intervalo\ se\ ha\ obtenido\ con\ un\ nivel\ del\ confianza\ del\ \mathbf{95}\ \%}.$

c)

$E = \frac{5.545-4.957}{2} = \frac{588}{2} = 294. Datos\colon\ \sigma = 900;\ E = 294;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow\ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{900}{294}\right)^2 =$

$= (1.96 \cdot 3.0612)^2 = 6^2 = 36.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ \mathbf{36}\ meses}$

****

Problema 9:

Un estudio de la OCDE de 2009 estableció que la estatura media de los adultos varones en España era de 174 cm, con una desviación típica de 8 cm. Asumiremos que la distribución era normal. ¿Cuál era la probabilidad de que un hombre adulto español midiera más de 190 cm? Responde utilizando la tabla de la distribución normal estándar. Entre los hombres holandeses, que eran los más altos según aquel estudio, la probabilidad de medir más de 190 cm (suponiendo también una desviación típica de 8 cm y una distribución normal) era 0.15866. ¿Cuál era la estatura media de los hombres holandeses?

Solución:

$Datos: \ \mu = 174; \ \ \sigma = 8.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(174, 8).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-174}{8}.$

$P = P(X > 190) = P\left(Z > \frac{190-174}{8}\right) = P\left(Z > \frac{16}{8}\right) = P(Z > 2) =$

$= [1 - P(Z \leq 2)] = 1 - 0.9772 = \underline{0.0228}.$

$P(X > 190) = 0.15866 \Rightarrow P\left(Z > \frac{190-\mu}{8}\right) = 0.15866;$

$1 - P\left(Z \leq \frac{190-\mu}{8}\right) = 0.15866; \ \ 1 - 0.15866 = P\left(Z \leq \frac{190-\mu}{8}\right);$

$0.84144 = P\left(Z \leq \frac{190-\mu}{8}\right).$

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0,1)$ a 0.84144 le corresponde, aproximadamente, 1.00:

$\frac{190-\mu}{8} = 1; \ \ 190 - \mu = 8; \ \ \mu = 190 - 8 = 182.$

$\underline{\textit{La estatura media de los hombres holandeses era de } \mathbf{182\ cm}}.$

****

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

MADRID

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2020-2021**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A. 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales a y b para los que $A = A^{-1}$.
b) Para $a = b = 2$, calcule la matriz inversa de A.

A. 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.
b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

A. 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si } x \le 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

denotando por ln la función logaritmo neperiano.

a) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1, x = 0$.

A. 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

a) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.
b) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

A. 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

a) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.
b) Suponiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

B. 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y-z= & -1 \\ x-y+a^2z= & 3 \\ 2x-y+z= & 4 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema para $a=1$.

B. 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

B. 3.(Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real, definida $f(x)=(x^2-3)e^x$.

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.
b) Calcule

$$\int_1^2 e^{-x} f(x)\, dx$$

B. 4. Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A)=0,5 \quad P(\overline{B}|A)=0,4 \quad P(A\cup B)=0,9$$

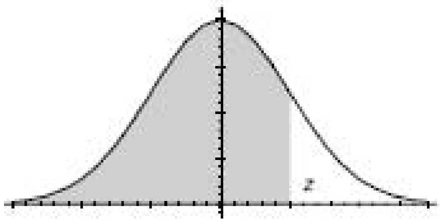
a) Calcule $P(B|\overline{A})$
b) Determine si son dependientes o independientes los sucesos A y B. Justifique la respuesta.

B. 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu=120$ gramos.
b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza (117,3444; 124,6556) para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos. En todos los casos, se valorará el razonamiento correcto.

Ejercicio A1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto .... 0,5 puntos.

Cálculo correcto de las valores de a y b .... 0,5 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto .... 0,25puntos.

Determinación correcta de la inversa .... 0,75 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente de forma manual. Analiza y comprende el enunciado a resolver (datos, relaciones entre los datos, condiciones, conocimientos matemáticos necesarios, etc.).

Ejercicio A2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Determinación del dominio .... 0,25 puntos.

Determinación de las asíntotas verticales .... 0,25 puntos.

Determinación de la asíntota oblicua, excluyendo la existencia de AH: 0,50 puntos

Apartado (b): 1 punto.

Expresión correcta de la ecuación de la tangente .... 0,25 puntos

Obtención correcta de la pendiente de la tangente en el punto… … ……0,5puntos

Ecuación de la tangente…………………………………………….…0,25 puntos

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula las asíntotas de funciones racionales. Extrae conclusiones a partir de datos relativos a propiedades locales o globales. Aplica los conceptos de límite y derivadas. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.

Ejercicio A3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Estudio de la continuidad si x no es 1 .... 0,25 puntos.

Planteamiento de la condición de continuidad en $x=1$ .... 0,25 puntos.

Cálculo de los límites laterales y conclusión .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto

Planteamiento .... 0,25 puntos.

Cálculo correcto de la primitiva .... 0,50 puntos.

Cálculo el área (regla de Barrow)…………………………………….0,25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Extrae conclusiones a partir de datos relativos a propiedades locales o globales. Aplica los conceptos de límite y derivadas. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.Obtiene la expresión algebraica a partir de datos relativos a sus propiedades locales o globales. Aplica la regla de Barrow al cálculo de integrales definidas de funciones elementales inmediatas. Estudia la continuidad en un punto de una función definida a trozos utilizando el concepto de límite.

Ejercicio A4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Identificación correcta de los sucesos, y sus probabilidades……………0,5 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad .... 0,50 puntos.

RESPUESTAS OPCIÓN A, CONVOCATORIA JUNIO

Problema A.1:

Se considera la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales a y b para los que $A = A^{-1}$.

b) Para $a = b = 2$, calcule la matriz inversa de A.

Solución:

a) Podríamos calcular la matriz inversa, pero es más sencillo partir de que se verifica que $A = A^{-1}$, y multiplicar por A en los dos términos de la igualdad:

$$A \cdot A = A^{-1} \cdot A = I$$

Por tanto, basta imponer que $A^2 = I$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$a = 0\,;\ \ b^2 = 1 \to b = 1, b = -1.$$

$$\boldsymbol{a = 0\,;\ \ b = 1;\ b = -1.}$$

b) Podemos utilizar para calcular la matriz inversa el método de Gauss o la definición de matriz inversa:

Para $a = b = 2$ es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Por el método de Gauss:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\left\{\begin{matrix} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \to \frac{1}{2}F_2 \end{matrix}\right\}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\{F_3 \to F_3 - 2F_1\}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\{F_1 \to F_1 - 2F_3\}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left\{F_3 \to -\frac{1}{3}F_3\right\}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

El mismo resultado se obtiene con la definición de matriz inversa:

b) Si $a = b = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $|A| = 6$.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = Adj(A^t)$.

$$A^t = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Problema A.2:

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-1}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.
b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

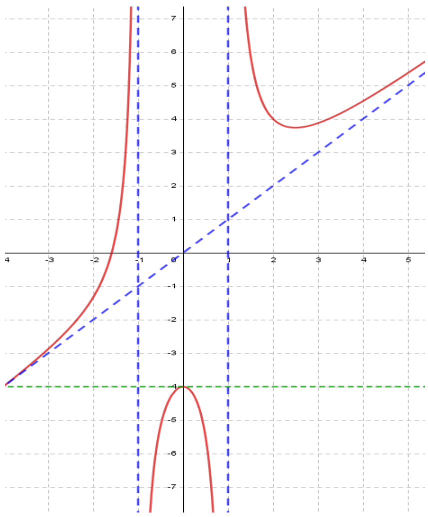
Solución:

La función dada es una función racional, luego está definida siempre que no se anule el denominador, es decir, $x^2 - 1 = 0$; $x_1 = -1, x_2 = 1 \Rightarrow D(f) \Rightarrow R - \{-1, 1\}$.

Las asíntotas verticales son, por tanto: $x = -1, x = 1$.

Cuando x tiende a infinito la función tiende a infinito, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4}{x^2-1} = \pm\infty$, luego no hay asíntota horizontal.

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y = mx + n$, con $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.



$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+4}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4}{x^3-x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4-x^3+x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{x^2-1} = 0.$$

Asíntota oblicua: $y = x$

$Dominio\ (f) = \boldsymbol{R} - \{\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{1}\}$; Asíntotas verticales: $\boldsymbol{x = -1}, \boldsymbol{x = 1}$; Asíntota oblicua: $\boldsymbol{y = x}$.

$b)$ Para calcular la recta tangente debemos calcular: 1) El punto de tangencia. 2) La pendiente en ese punto:

1) Para $x = 0$ es $f(0) = \frac{0+4}{0-1} = -4$. El punto de tangencia es $P(0, -4)$.
2) La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot(x^2-1)-(x^3+4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4-3x^2-2x^4-8x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2-8x}{(x^2-1)^2} = \frac{x\cdot(x^3-3x-8)}{(x^2-1)^2}.\ m = f'(0) = \frac{0\cdot(0^3-3\cdot 0-8)}{(0^2-1)^2} = 0$$

La recta tangente es: $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$, que aplicada al punto $P(0, -4)$ con $m = 0$ es:

Recta tangente: $\boldsymbol{y + 4 = 0 \to y = -4}$

Problema A.3:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

denotando por ln la función logaritmo neperiano.

a) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1, x = 0$.

Solución:

La función está definida a trozos. Uno es una función polinómica, continua en toda la recta real. El otro es la función logaritmo, que no es continua para $x = 1 < 1$, que no pertenece al intervalo de definición. Por tanto, el único punto dudoso es el de unión de los trozos, en $x = 1$

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$f(1) = 1^2 - a1 = 1 - a$$

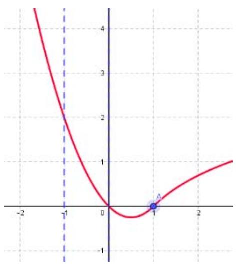
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1}(x^2 - ax) = 1 - a$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1}(Lx) = L1 = 0$$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1.$

La función es continua en toda la recta real si $\boldsymbol{a = 1}$.

$b)$ Para $a = 1$ la función resulta $f(x) = \begin{cases} x^2 - x \;\; si \; x \leq 1 \\ \ln(x) \;\; si \;\; x > 1 \end{cases}$, cuya representación gráfica, incluida la superficie a calcular, es la indicada en la figura adjunta.



La superficie es:

$$S = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{0} (x^2 - x) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left[\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2}\right] == \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\boldsymbol{S = \frac{5}{6}\, u^2 \cong 0.83\, u^2}$$

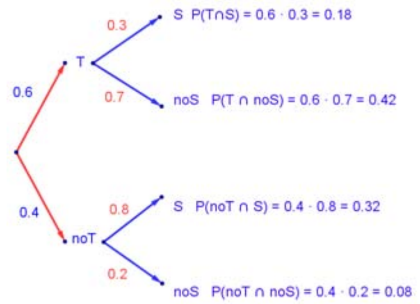
Problema A.4:

El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

a) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.
b) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

Solución:

Denominamos T al suceso teletrabajar, y S al suceso tener trastornos de sueño. Hacemos un diagrama de árbol con los datos del enunciado, que completamos sabiendo que en cada nudo la suma es 1:



a) Nos piden: $P(T \cap noS)$, miramos en el árbol y vemos que es 0.42.

La probabilidad de que no tenga trastornos del sueño y teletrabaje es de $\mathbf{0.42}$.

b) Nos piden ahora una probabilidad condicionada: $P(noT/noS)$

De nuevo miramos en el árbol para obtener $P(noT \cap noS) = 0.08$. Y para obtener $P(noS)$ sumamos las dos ramas que acaban en noS

$$P(noT/noS) = \frac{P(noT \cap noS)}{P(noS)} = \frac{0.08}{0.42+0.08} = \frac{0.08}{0.50} = 0.16.$$

La probabilidad de que no teletrabaje sabiendo que no tiene trastornos del sueño es de $\mathbf{0.16}$.

Problema A.5:

Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

a) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.
b) Suponiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial.

Para un nivel de confianza del 96 %; calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\alpha = 1 - 0.96 = 0.04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.02} = 2.055 \rightarrow (1 - 0.02 = 0.9800 \rightarrow z = 2.055).$$

Los datos que nos dan son:

$n = 500;\ \ p = \frac{320}{500} = 0.64;\ \ q = 1 - 0.64 = 0.36;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p, q\ y\ n$, es la siguiente:

$$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$$

$$\left(0.64 - 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.64 \cdot 0.36}{500}};\ 0.64 + 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.64 \cdot 0.36}{500}}\right);$$

$$(0.64 - 2.055 \cdot 0.0215;\ 0.64 + 2.155 \cdot 0.0205) = (0.64 - 0.0441;\ 0.64 + 0.0441) = (0.5959;\ 0.6841)\ .$$

El intervalo de confianza pedido es: $(\mathbf{0.5959};\ \mathbf{0.6841})$

b) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.\ (1 - 0.025 = 0.9750 \rightarrow z = 1.96).$$

Los datos que nos dan son ahora:

$p = 0.5;\ \ q = 0.5;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96;\ \ E = 0.05.$

Sabemos que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$ y debemos calcular n:

$$E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{n} \rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{E^2} = 1.96^2 \cdot \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.05^2} = 3.8416 \cdot \frac{0.25}{0.0025} = \frac{0.8851}{0.0025} = 384.16.$$

El tamaño muestral mínimo debe ser de **385** menores de 14 años

RESPUESTAS OPCIÓN B, CONVOCATORIA JUNIO

Problema B.1:

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y-z= & -1 \\ x-y+a^2z= & 3 \\ 2x-y+z= & 4 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema para $a=1$.

Solución:

a) Calculamos los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & a^2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & a^2 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & a^2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-1+1+2a^2-2+a^2-1=3a^2-3\rightarrow 3a^2-3=0\rightarrow a=\pm 1$$

Para $\boldsymbol{a\neq\pm 1}$ los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada es 3 e igual al número de incógnitas por lo que el sistema es **compatible y determinado**.

Para $\boldsymbol{a=\pm 1}$ la matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$;

$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=-4+1+6-2+3-4=-10+10=0$, por lo que su rango es 2, menor que el número de incógnitas por lo que el sistema es **compatible e indeterminado**

La discusión completa del sistema es:

- Si $a=-1$ o $a=1$ el $RgM=2=RgM^*<n$ y el sistema será SCI
- Si $a\neq-1$ y $a\neq 1$ el $RgM=3=RgM^*=n$ y el sistema será SCD

b) Para $a=1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x+y-z=-1\\ x-y+z=3\\ 2x-y+z=4\end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado; sumamos las dos primeras ecuaciones y obtenemos: $x=1$. Hacemos $y=\lambda$; $z=2+\lambda$.

$$\boldsymbol{x=1, y=\lambda, z=2+\lambda, \forall\lambda\in R}$$

Problema B.2:

Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

Solución:

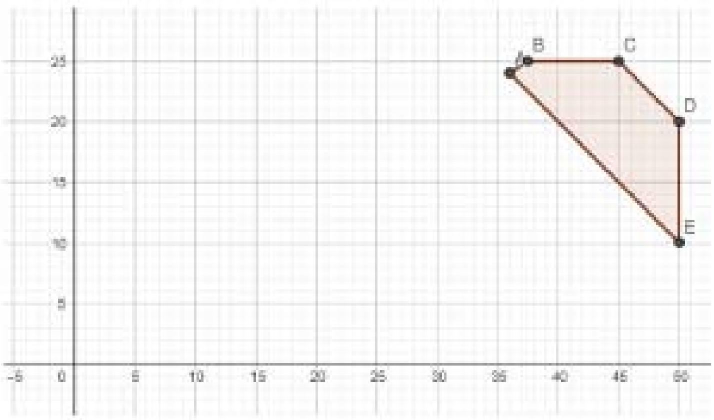
Llamamos x e y al número kilos de almendras y avellanas que vende el almacén, respectivamente.

Las restricciones dadas por el enunciado son:

Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \le x \le 50 \\ 0 \le y \le 25 \\ x \ge 1.5y \\ x+y \ge 60 \\ x+y \le 70 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 0 \le x \le 50 \\ 0 \le y \le 25 \\ 2x-3y \ge 0 \\ x+y \ge 60 \\ x+y \le 70 \end{array}\right\}.$$

La región factible es:



La región factible es cerrada y acotada.

Los vértices son:

$$A: \left.\begin{array}{r} x+y=60 \\ 2x-3y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x+3y=180 \\ 2x-3y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x=180;\ \ x=36;\ \ y=24 \Rightarrow A(36,24).$$

$$B: \left.\begin{array}{r} y=25 \\ 2x-3y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-75=0;\ x=75:2=37.5 \Rightarrow A(37.5;\ 25).$$

$$C: \left.\begin{array}{r} y=25 \\ x+y=70 \end{array}\right\} \Rightarrow x+25=70;\ x=45 \Rightarrow C(45,25).$$

$$D: \left.\begin{array}{r} x=50 \\ x+y=70 \end{array}\right\} \Rightarrow 50+y=70;\ \ y=20 \Rightarrow D(50,20).$$

$$E: \left.\begin{array}{r} x=50 \\ x+y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow 50+y=60;\ \ y=10 \Rightarrow E(50,10).$$

La función de objetivos es: $f(x,y)=x+2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son:

$$f(37.5,25)=37.5+2\cdot 25=37.5+50=87.5.$$
$$f(45,25)=45+2\cdot 25=45+50=95.$$
$$f(50,20)=50+2\cdot 20=50+40=90.$$
$$f(50,10)=50+2\cdot 10=50+20=70.$$
$$f(36,24)=36+2\cdot 24=36+48=84.$$

El valor máximo se obtiene en el punto $C(45,25)$.

El máximo beneficio de $\mathbf{95}$ $\boldsymbol{euros}$ se obtiene mezclando $\mathbf{45}$ kg de almendras y $\mathbf{25}$ kg de avellanas.

Problema B.3:

Se considera la función real de variable real, definida $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

b) Calcule

$$\int_1^2 e^{-x} f(x)\, dx$$

Solución:

$a)$ La función, producto de una función exponencial y una polinómica, es continua en toda la recta real. Para determinar cuando la función es creciente o decreciente analizamos el signo de su primera derivada. Creciente si es positiva, y decreciente si es negativa.

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + (x^2 - 3) \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x - 3).$$

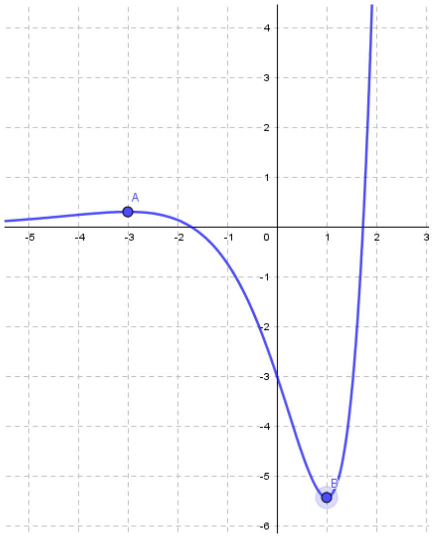
$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x \cdot (x^2 + 2x - 3) = 0 \rightarrow \ x^2 + 2x - 3 = 0; \ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = -1 \pm 2 \rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1$$

Por ser $e^x > 0, \forall x \in R$, el signo de la derivada dependerá del signo de la expresión $(x^2 + 2x - 3)$.

Los valores de las raíces de la derivada dividen al dominio de la función en tres intervalos alternativos de crecimiento y decrecimiento, que son $(-\infty, -3), (-3, 1)$ y $(1, +\infty)$. Estudiamos el signo en esos intervalos. Por ejemplo, para $x = 0 \in (-3, 1)\ es\ f'(0) < 0$, luego la función es decreciente.

Si $\boldsymbol{x} \in (-\infty, -\mathbf{3}) \cup (\mathbf{1}, +\infty)$, $f'(x) > 0$, la función es creciente.

Si $\boldsymbol{x} \in (-\mathbf{3}, \mathbf{1})$, $f'(x) < 0$, la función es decreciente.



En el punto de abscisa -3 la función pasa de ser creciente a decreciente, luego en ese punto se alcanza un máximo relativo. En el punto de abscisa 1 la función pasa de ser decreciente a creciente, luego en ese punto se alcanza un mínimo relativo.

$$f(-3) = [(-3)^2 - 3] \cdot e^{-3} = (9-3) \cdot \frac{1}{e^3} = \frac{6}{e^3}.$$

$$Máximo\ relativo: \boldsymbol{A}\left(-\mathbf{3}, \frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{e}^{\mathbf{3}}}\right)$$

$$f(1) = (1^2 - 3) \cdot e^1 = -2e.$$

$$Mínimo\ relativo: \boldsymbol{B}(\mathbf{1}, -\mathbf{2}\boldsymbol{e})$$

También se podría usar el signo de la derivada segunda

$b)$ Nos piden:

$$I = \int_1^2 e^{-x} \cdot f(x) \cdot dx = \int_1^2 e^{-x} \cdot [(x^2 - 3) \cdot e^x] \cdot dx = \int_1^2 (x^2 - 3) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 =$$

$$\left(\frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 3 \cdot 1\right) = \frac{8}{3} - 6 - \frac{1}{3} + 3 = \frac{7}{3} - 3 = -\frac{2}{3}.$$

$$I = \int_1^2 e^{-x} \cdot f(x) \cdot dx = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}.$$

Problema B.4:

B. 4. Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0,5 \quad P(\overline{B}|A) = 0,4 \quad P(A \cup B) = 0,9$$

a) Calcule $P(B|\overline{A})$

b) Determine si son dependientes o independientes los sucesos A y B. Justifique la respuesta.

Solución:

a) Nos piden calcular $P(B/\overline{A})$

$P(\overline{B}/A) = \frac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)} = 0.4.$

$P(\overline{B} \cap A) = 0.4 \cdot P(A) = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2.$

$P(\overline{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.2 = 0.5 - P(A \cap B) \rightarrow \; P(A \cap B) = 0.5 - 0.2 = 0.3.$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow 0.9 = 0.5 + P(B) - 0.3 \rightarrow P(B) = 0.9 - 0.2 = 0.7.$

$P(B/\overline{A}) = \frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)} = \frac{0.7-0.3}{1-0.5} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8.$

$$\boldsymbol{P(B/\overline{A}) = 0.8}.$$

b) Sabemos que dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35 \neq P(A \cap B) = 0.3.$$

$$Los\ sucesos\ A\ y\ B\ \boldsymbol{no}\ son\ independientes$$

Problema B.5:

El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.
b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza (117,3444; 124,6556) para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Solución:

$a)$ Nos dan los datos siguientes:

$\mu = 120;\ \ n = 36;\ \sigma = 20.$

La media muestral sigue una distribución normal de media $\mu = 120$ y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{20}{\sqrt{36}}$

$\overline{X} \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(120, \frac{20}{\sqrt{36}}\right) = N\left(120, \frac{10}{3}\right).$

Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-120}{\frac{10}{3}}.$

$$P = P(\overline{X} < 125) = P\left(Z < \frac{125-120}{\frac{10}{3}}\right) = P\left(Z < \frac{5\cdot 3}{10}\right) = P(Z < 1.5) = 0.9332.$$

La probabilidad de que la media muestral no supere los 125 gramos es de $\mathbf{0.9332}$.

$b)$ Ahora sabemos que: $E = \frac{124.6556-117.3444}{2} = \frac{7.3112}{2} = 3.6556$. Por lo que:

$n = 81;\ \ \sigma = 20;\ \ E = 3.6556.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{3.6556\cdot\sqrt{81}}{20} = \frac{3.6556\cdot 9}{20} = \frac{32.9004}{20} = 1.645.$$

Buscamos en la tabla $N(0,1)$, al valor 1.645 le corresponde el valor. Aproximadamente, 0.9500, por lo tanto:

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \to\ \ 2 - \alpha = 1.9 \to \alpha = 0.1.$

$1 - \alpha = 1 - 0.1 = 0.9.$

El nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo es del $\mathbf{90}\ \%$

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2020-2021**

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.
b) Para $a = 2$ calcule, si existe, la matriz X que satisface $AX = B$.

A 2. (Calificación máxima: 2 puntos).
Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a $0,5$ euros . Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

a) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.
b) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

A 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & si \quad x \leq 3 \\ \dfrac{3a}{x} & si \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es $f(x)$ derivable?
b) Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

A 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,5$, $P(\overline{B}) = 0,8$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,9$.

a) Estudie si los sucesos A y B son independientes.
b) Calcule $P(\overline{A}|\overline{B})$.

A 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al $95\,\%$ para μ.
b) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

B 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rl} x+2ay+z &= 0 \\ -x-ay &= 1 \\ -y-z &= -a \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.
b) Resuelva el sistema para $a=3$.

B 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$

a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
b) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

B 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ de variable real es:

$$f'(x)=3x^2+8x$$

a) Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1)=11$.
b) Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.

B 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de $0,02$, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de $0,06$. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

a) No sufra fracaso escolar.
b) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

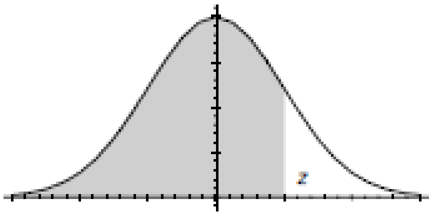
B 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma=3$ minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del $95\,\%$.
b) Suponga que $\mu=32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n=16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que $30,5$ minutos.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos. En todos los casos, se valorará el razonamiento correcto.

Ejercicio A1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Expresar correctamente la condición de existencia de inversa..............0,25 puntos.

Planteamiento correcto ....0,50 puntos.

Determinación correcta del valor del parámetro………………………..0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto ....0,50 puntos.

Determinación correcta de la matriz X.……………………………………0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente de forma manual. Analiza y comprende el enunciado a resolver (datos, relaciones entre los datos, condiciones, conocimientos matemáticos necesarios, etc.).

Ejercicio A2. (Puntuación máxima: 2 puntos)..

Apartado (a): 1 punto.

Representación correcta de la región factible...0,50 puntos.

Cálculo correcto de los vértices ....0,5o puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión correcta de la función objetivo..0,25 puntos.

Cálculo correcto de las cantidades pedidas.………………………………0,75 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Aplica las técnicas gráficas de programación lineal bidimensional para resolver problemas de optimización de funciones lineales que están sujetas a restricciones e interpreta los resultados obtenidos en el contexto del problema.

Ejercicio A3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Estudio de la continuidad si x no es 3 ....0,25 puntos.

Estudio correcto de la continuidad en x=3 ....0,25 puntos.

Determinación correcta de $f'(x)$ (donde exista).......................................0,25 puntos.

Estudio correcto de la derivabilidad de la función.………………………0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto

Expresión correcta de la ecuación de la tangente....................................0,25 puntos.

Elección correcta de la expresión de f(x) para el punto pedido ....0,25 puntos.

Cálculo correcto de la pendiente de la derivada.………………………..0, 25 puntos.

Ecuación correcta de la tangente ………………………………………..0,25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Aplica los conceptos de límite y derivadas. Estudia la continuidad en un punto de una función definida a trozos utilizando el concepto de límite. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. Obtiene la expresión algebraica la tangente de a partir de datos relativos a sus propiedades locales o globales.

Ejercicio A4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la condición de independencia......................0,25 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad de la intersección...........................0,50 puntos.

Conclusión……………………………………………………………….0,25 puntos

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad ....0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad..0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

Ejercicio A5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.
- Planteamiento correcto .... 0,25 puntos.
- Obtención correcta del intervalo .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Expresión correcta de la distribución de la media .... 0,25 puntos.
- Tipificación correcta de la variable .... 0,25 puntos.
- Obtención correcta de la probabilidad .... 0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula probabilidades asociadas a la distribución de la media muestral y de la proporción, aproximándolas por la distribución normal de parámetros adecuados a cada situación, y lo aplica a problemas de situaciones reales. Construye, en contextos reales, un intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida.

Ejercicio B1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Obtención correcta de los valores críticos .... 0,50 puntos.
- Discusión correcta del sistema .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Solución correcta del sistema .... 1,00 punto.

Estándares de aprendizaje evaluables: Manipula el sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones y tres incógnitas y lo resuelve en los casos en que sea posible. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. El sistema de ecuaciones lineales planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas en contextos reales.

Ejercicio B2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Determinación del dominio .... 0,25 puntos.
- Determinación de la asíntota vertical .... 0,25 puntos.
- Determinación de la asíntota oblicua, excluyendo la existencia de AH: 0,50 puntos

Apartado (b): 1 punto.

- Cálculo correcto de la derivada .... 0,50 puntos.
- Determinación correcta de los intervalos .... 0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula las asíntotas de funciones racionales. Extrae conclusiones a partir de datos relativos a propiedades locales o globales. Aplica los conceptos de límite y derivadas. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.

Ejercicio B3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

- Planteamiento correcto .... 0,25 puntos.
- Cálculo correcto de la primitiva .... 0,50 puntos.
- Determinación correcta de la constante de integración .... 0,25 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

- Planteamiento correcto .... 0,25 puntos.
- Determinación correcta de los puntos críticos .... 0,25 puntos.
- Clasificación correcta de los puntos críticos .... 0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Aplica los conceptos de límite y derivadas. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. Obtiene la expresión algebraica la función a partir de datos relativos a sus propiedades locales o globales.

Ejercicio B4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,5 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Planteamiento correcto de la probabilidad .... 0,5 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

Ejercicio B5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Apartado (a): 1 punto.

Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .... 0,25 puntos.

Expresión correcta del error.. 0,25 puntos.

Determinación correcta del tamaño de la muestra .... 0,50 puntos.

Apartado (b): 1 punto.

Expresión correcta de la distribución de la media.......................... 0,25 puntos.

Tipificación correcta de la variable.. 0,25 puntos.

Obtención correcta de la probabilidad.. 0,50 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluables: Calcula probabilidades asociadas a la distribución de la media muestral y de la proporción, aproximándolas por la distribución normal de parámetros adecuados a cada situación, y lo aplica a problemas de situaciones reales. Construye, en contextos reales, un intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida.

NOTA: La resolución de los ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados

RESPUESTAS OPCIÓN A, CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.
b) Para $a = 2$ calcule, si existe, la matriz X que satisface $AX = B$.

Solución:

$a)$ Para que una matriz cuadrada tenga inversa es necesario que su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{vmatrix} = -2a + a - 1 = -a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1.$$

La matriz es invertible $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R} - \{\boldsymbol{-1}\}$

$b)$ Cuando $a = 2$ entonces $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Despejamos X de la ecuación dada

$$A \cdot X = B \rightarrow \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \ I \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Calculamos A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 2 - 1 = -3. \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}}{-3} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Sustituimos en la ecuación:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}..$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Problema A.2:

Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0,5 euros . Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

a) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.

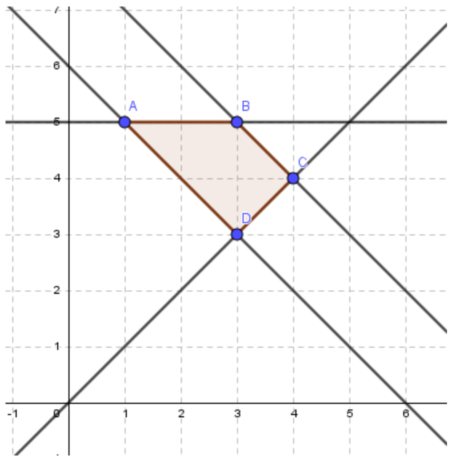
b) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

Solución:

Sean x e y el número de cables de fibra óptica de los tipos A2020 y B2020 que se producen, respectivamente. Las condiciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y\geq 6.000 \\ y\leq 5.000 \\ x+y\leq 8.000 \\ y\geq x \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y\geq 6.000 \\ x+y\leq 8.000 \\ x-y\leq 0 \\ y\leq 5.000 \end{array}\right\}.$$

Buscamos los vértices determinados por la intersección de las rectas:



A: $\left.\begin{array}{r} y=5\,000 \\ x+y=6\,000 \end{array}\right\} \Rightarrow A(1\,000, 5\,000).$

B: $\left.\begin{array}{r} y=5\,000 \\ x+y=8\,000 \end{array}\right\} \Rightarrow B(3\,000, 5\,000).$

C: $\left.\begin{array}{l} x+y=8\,000 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y;\ \ 2x=8\,000;\ \ x=4\,000 \Rightarrow$ $C(4\,000, 4\,000).$

D: $\left.\begin{array}{l} x+y=6\,000 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y;\ \ 2x=6\,000;\ \ x=3\,000 \Rightarrow$ $D(3\,000, 3\,000).$

La región factible es el polígono $ABCD$.

$b)$ La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=2x+0.5y$.

Calculamos la función de objetivos en cada vértice:

A: $f(1\,000, 5\,000)=2\cdot 1\,000+0.5\cdot 5\,000=2\,000+2\,500=4\,500.$

B: $f(3\,000, 5\,000)=2\cdot 3\,000+0.5\cdot 5\,000=6\,000+2\,500=8\,500.$

C: $f(4\,000, 4\,000)=2\cdot 4\,000+0.5\cdot 4\,000=8\,000+2\,000=10\,000.$

D: $f(3\,000, 3\,000)=2\cdot 3\,000+0.5\cdot 3\,000=6\,000+1\,500=7\,500.$

El coste mínimo se produce en el punto $A(1\,000, 5\,000)$.

El coste mínimo, de **4 500 euros** se obtiene cuando se producen **1 000 metros** de A2020 y **5 000 metros** de B2020.

Problema A.3:

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & si \quad x \le 3 \\ \dfrac{3a}{x} & si \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es $f(x)$ derivable?

b) Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

Es una función definida a trozos, el primer trozo es una función polinómica, continua en toda la recta real. La función $f(x) = \frac{3a}{x}$, únicamente no es continua en $x = 0 < 3$, que no pertenece a su dominio. Por tanto, el único punto de dudosa continuidad es el de unión de ambos trozos. Determinamos los valores de a para imponer que lo sea.

Imponemos que sus límites por la izquierda y por la derecha existan y sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

Cuando $x = 3 \to \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x^2 - x - 1) = 9 - 3 - 1 = 5 = f(3) \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{3a}{x} = \frac{3a}{3} = a \end{cases} \to$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = a = f(3) = 5 \to a = 5$. La función resulta: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & si\ x \le 3 \\ \frac{15}{x} & si \quad x > 3 \end{cases}$.

$a = 5$

Estudio de la derivabilidad:

Las dos ramas de la función $f(x)$ son derivables, siendo de nuevo el único punto dudoso para $x = 3$:

Sabemos que una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si\ x < 3 \\ -\frac{15}{x^2} & si \quad x > 3 \end{cases} \to \quad f'(3^-) = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \ne f'(3^+) = -\frac{15}{3^2} = -\frac{5}{3}$

Para ese valor de $a = 5$ que hace continua a la función, esta no es derivable en $x = 3$

$b)$ Para $x = 1 < 3$ la función es $f(x) = x^2 - x - 1$, por lo que función $f(x)$ para $x = 1$ no depende del valor de a

El punto de tangencia es el siguiente: $f(1) = 1^2 - 1 - 1 = -1$; $P(1, -1)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto: $f'(x) = 2x - 1 \to m = f'(1) = 2 \cdot 1 - 1 \to m = 1$.

La expresión de una recta tangente es: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$

$y = -1 + 1 \cdot (x - 1) = x - 2$.

La recta tangente es: $\boldsymbol{y = x - 2}$

Problema A.4:

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,8$ y $P(A \cup B) = 0,9$.

a) Estudie si los sucesos A y B son independientes.
b) Calcule $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Solución:

$a)$ Datos que nos dan: $P(A) = 0.5$; $P(\overline{B}) = 0.8$; $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.9$

Sabemos que la probabilidad de un suceso más de su contrario es igual a 1. Con lo que deducimos que:

$P(\overline{A}) = 0.2$; $P(B) = 0.5$; $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.1$

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cap B) = 0.1 = P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$$

Los sucesos A y B son independientes.

$b)$ Nos piden calcular: $P(\overline{A}/\overline{B})$ que es una probabilidad condicionada que vale: $\frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$

Como hemos comprobado que los sucesos son independientes:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0.5 \cdot 0.8 = 0.4$$

$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0.4}{0.8} = \frac{1}{2} = 0.5.$

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = 0.5$$

Problema A.5:

El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 95 %, $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es:

$1-\alpha = 0.95 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0.95 = 0.05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.\ (1-0.025 = 0.9750 \ \rightarrow z = 1.96).$

Los datos del enunciado: $n = 20;\ \ \overline{x} = 60;\ \ \sigma = 8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$

La expresión que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

$$\left(60 - 1.96 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}}, 60 + 1.96 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}}\right) = (60 - 1.96 \cdot 1.7889, 60 + 1.96 \cdot 1.7889) = (60 - 3.5062;\ 60 + 3.5062) =$$
$$(56.4938, 63.5062)$$

El intervalo de confianza de la media poblacional con un nivel de confianza dl 95 % es $(\mathbf{56.4938, 63.5062})$

b) Nos dicen ahora que $\ \mu = 59;\ \ \sigma = 8;\ \ n = 10.$

La distribución es normal:

$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(59,\ \frac{8}{\sqrt{10}}\right) = N(59, 2.53).$

Tipificamos: $Z = \frac{X-59}{2.53}$.

$P(57 < X < 61) = P\left(\frac{57-59}{2.53} < Z < \frac{61-59}{2.53}\right) = P\left(\frac{-2}{2.53} < Z < \frac{2}{2.53}\right) = P(-0.79 < Z < 0.79) =$
$P(Z \leq 0.79) - [1 - P(Z \leq 0.79)] = 2 \cdot P(Z \leq 0.79) - 1 = 2 \cdot 0.7852 - 1 = 1.5704 - 1 = 0.5704.$

$$P(57 < X < 61) = \mathbf{0.5704}.$$

RESPUESTAS OPCIÓN B, CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} x+2ay+z &= 0 \\ -x-ay &= 1 \\ -y-z &= -a \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.
b) Resuelva el sistema para $a=3$.

Solución:

$a)$ Escribimos las matrices de coeficientes y ampliada:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Calculamos el rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-a-1+2a= \; a-1=0 \Rightarrow a=1.$$

Si $a \neq 1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

$$\text{Si } a=1: M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \{F_3=F_2+F_1\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz ampliada es 2, por lo que:

Si $a=1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2, igual al rango de la matriz ampliada y menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible e indeterminado.

$b)$ Sabemos que para $a=3$ el sistema: $\left.\begin{aligned} x+6y+z=0 \\ -x-3y=1 \\ y+z=3 \end{aligned}\right\}$, que es compatible determinado.

De la segunda ecuación obtenemos x en función de y, y de la tercera, z, que sustituimos en la primera:

$$\left\{\begin{aligned} x=-1-3y \\ z=3-y \end{aligned}\right\} \rightarrow (-1-3y)+6y+(3-y)=0=2y+2=0 \rightarrow$$

$y=-1;\;\; x=-1+3=2;\;\; z=3+1=4.$

$$\boldsymbol{x=2,\qquad y=-1,\qquad z=4}$$

Problema B.2:

Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$

a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
b) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

Es una función racional por lo está definida salvo en los valores que anulen el denominador.

$$(x-1)^2 = 0;\ \ x - 1 = 0;\ x = 1.$$

$$D(f) = R - \{1\}$$

Asíntota vertical: $x = 1$

Para estudiar el comportamiento en el infinito calculamos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x$$

No hay asíntotas horizontales y si, una asíntota oblicua paralela a $y = x$. Es de la forma $y = x + n$

Calculamos n

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2-2x+1} = 0 \to y = x.$$

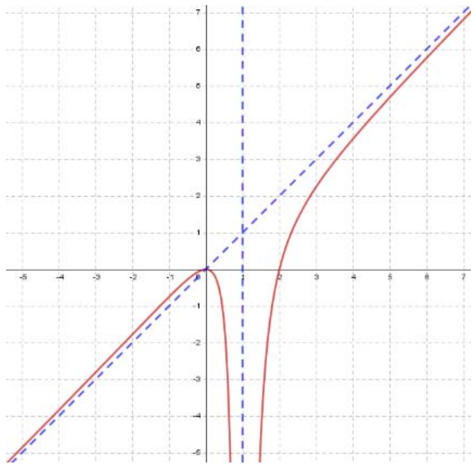
Asíntota vertical: $\boldsymbol{x = 1}$; Asíntota oblicua: $\boldsymbol{y = x}$.

$b)$ Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(3x^2-4x)(x-1)^2 - (x^3-2x^2)\cdot[2\cdot(x-1)\cdot 1]}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{(3x^2-4x)(x-1) - 2\cdot(x^3-2x^2)}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{3x^3-3x^2-4x^2+4x-2x^3+4x^2}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{x\cdot(x^2-3x+4)}{(x-1)^3} \to$$

$$f'(x) = 0 = \frac{x\cdot(x^2-3x+4)}{(x-1)^3} \to\ \ x\cdot(x^2-3x+4) = 0 \to$$

$$x_1 = 0;\ \ x^2 - 3x + 4 = 0;\ \ x = \frac{3\pm\sqrt{9-16}}{2} \to x^2 - 3x + 4 > 0, \forall x \in R.$$



La única solución: $x = 0$.

Estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)\ \ \Rightarrow \text{La función es creciente}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow\ x \in (0, 1) \Rightarrow \text{La función es decreciente}$$

Autor: Javier Rodrigo Hitos
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema B.3:

Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ de variable real es:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

a) Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 11$.
b) Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.

Solución:

a) Nos dan una primitiva de la función. Por tanto:

$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (3x^2 + 8x) \cdot dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + C = x^3 + 4x^2 + C.$

Como nos dicen que:

$f(1) = 11 = 1^3 + 4 \cdot 1^2 + C = 1 + 4 + C \Rightarrow C = 6.$

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 + 4x^2 + 6}$$

b) Como la función es continua y derivable en toda la recta real los posibles máximos y mínimos están en los puntos en que se anula la derivada. Como ya conocemos la derivada, igualamos a cero:

$f'(x) = 0 = 3x^2 + 8x = 0 = \ x(3x + 8) \Rightarrow x = 0, x = -\frac{8}{3} \rightarrow \ f(0) = 6; f\left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{418}{27}$

Para determinar si son máximos o mínimos analizamos el signo de la derivada segunda:

$f''(x) = 6x + 8.\ f''(0) = 8 > 0 \Rightarrow A(0, 6)$ es un mínimo relativo

$f''\left(-\frac{8}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{-8}{3}\right) + 8 = -8 < 0 \Rightarrow B\left(-\frac{8}{3}, \frac{418}{27}\right)$ es un máximo relativo

O bien consideramos los intervalos: $\left(-\infty, -\frac{8}{3}\right) \cup \left(-\frac{8}{3}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ y estudiamos el signo de la derivada primera dada: Por ejemplo:

$f'(-5) = 3(-5)^2 + 8(-5) > 0$, la función es creciente

$f'(-1) = 3(-1)^2 + 8(-1) < 0$, la función es decreciente

$f'(1) = 3(1)^2 + 8(1) > 0$, la función es creciente

Por tanto, en $x = -\frac{8}{3}$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente luego es un máximo, y en $x = 0$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, luego es un mínimo.

$\boldsymbol{A(0, 6)}$ es un mínimo relativo; $\boldsymbol{B\left(-\frac{8}{3}, \frac{418}{27}\right)}$ es un máximo relativo.

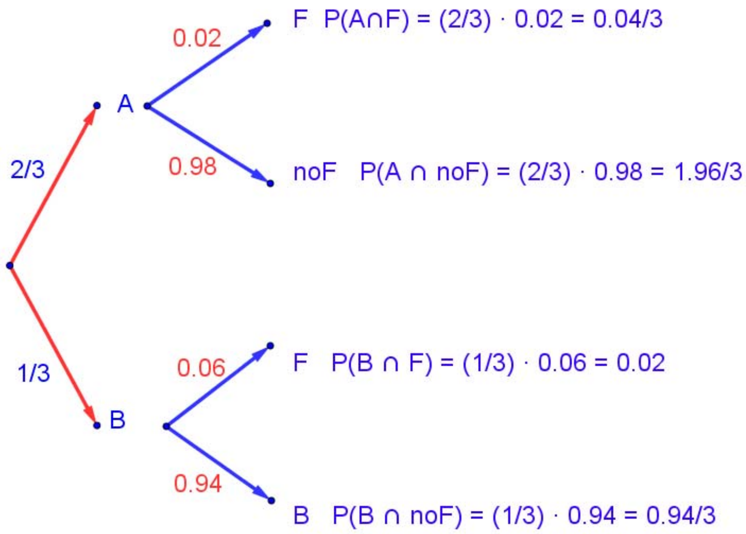
Problema B.4:

Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de $0,02$, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de $0,06$. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

a) No sufra fracaso escolar.
b) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

Solución:

Llamamos A al suceso vivir en el municipio A, y B a vivir en B. Llamamos F al suceso fracaso escolar, y $noF = \overline{F}$ al no fracaso. Hacemos un diagrama en árbol con los datos que nos dan:



a) Para calcular la probabilidad de no fracaso sumamos las dos ramas que llevan al no fracaso:

$$P(\overline{F}) = P(A \cap \overline{F}) + P(B \cap \overline{F}) = \frac{2}{3} \cdot 0.98 + \frac{1}{3} \cdot 0.94 = \frac{1.96}{3} + \frac{0.94}{3} = \frac{2.90}{3} = 0.9667.$$

La probabilidad de que un alumno elegido al azar no sufra fracaso escolar es de $\mathbf{0.9667}$.

b) Ahora nos piden una probabilidad condicionada:

$$P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0.02}{1 - 0.9667} = 0.404.$$

Si se sabe que ha sufrido fracaso escolar, la probabilidad de que sea del municipio A es de $\mathbf{0.404}$.

Problema B.5:

El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.
b) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que $30,5$ minutos.

Solución:

$a)$ Nos dicen un nivel de confianza del 95 % por lo que $z_{\frac{\alpha}{2}}$:

$1-\alpha = 0.95 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0.95 = 0.05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.(1-0.025 = 0.9750 \;\rightarrow z = 1.96).$

Los datos son entonces: $\sigma = 3;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96;\;\; E = 1.$

Sabemos que:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\rightarrow\; \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{3}{1}\right)^2 = (1.96 \cdot 3)^2 = 5.88^2 = 34.5744.$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de $\mathbf{35}$ pruebas

$b)$ Los datos ahora son: $\mu = 32;\;\; n = 16;\;\; \sigma = 3.$

Es una distribución normal: $X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(32, \frac{3}{\sqrt{16}}\right) = N(32, 0.75).$

Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-32}{0.75}.$

Nos piden:

$$P(X < 30.5) = P\left(Z < \frac{30.5-32}{0.75}\right) = P\left(Z < \frac{-1.5}{0.75}\right) = P(Z < -2) = [1 - P(Z \le 2)] = 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

La probabilidad de que el tiempo empleado sea menor que 30.5 es de $\mathbf{0.0228}$.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

MURCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Sánchez

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

EBAU2021 - JUNIO

OBSERVACIONES IMPORTANTE: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=5 \\ ax+2z=0 \\ ay-z=a \end{array}\right\}$$

Resolverlo para a=1.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) En un terreno en la huerta de Beniel se quieren plantar dos tipos distintos de naranjos: A y B. No se puede cultivar más de 8 hectáreas con naranjos de tipo A ni más de 10 hectáreas con naranjos de tipo B. Cada hectárea de naranjos de tipo A necesita 4 m^3 de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m^3. Se dispone anualmente de 45 m^3 de agua. Cada hectárea de tipo A requiere una inversión de 500 € y cada una de tipo B, 225 €. Se dispone de 4575 € para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de naranjos de tipo A y B producen, respectivamente, 500 y 300 kilos anuales de naranjas:

a) Calcular las hectáreas de cada tipo de naranjo que se deben plantar para maximizar la producción de naranjas. Razone la respuesta.
b) Obtener la producción máxima.

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) El coste de producción de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x)=\frac{1}{4}x^2+35x+25$ y su precio de venta es: $p=50-\frac{x}{4}$ euros. Hallar:

a) El número de unidades que debe venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.
b) El precio al que deben venderse las unidades obtenidas en el apartado a).
c) El beneficio máximo.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=ax^3+bx+c$, calcular el valor de a, b y c para que:

a) La función pase por el origen de coordenadas y tenga en el punto $(1,-1)$ un mínimo local.
b) Para los valores obtenidos en el apartado anterior, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
EBAU2021 - **JUNIO**

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ y la recta $g(x) = 3 + x$. Calcular su área.

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ (1 punto).

b) Calcular $\int \dfrac{2x}{x^2+1}\,dx$ (1 punto).

c) Calcular $\int_1^2 \dfrac{2x}{x^2+1}\,dx$ (0,5 puntos)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) En un viaje de estudios el 52% de los jóvenes son hombres. De ellos el 35% son rubios así como el 40% de las mujeres. Si elegimos a un estudiante al azar:

a) Calcule la probabilidad de que sea rubio. (1 punto)
b) Sabiendo que NO es rubio, ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1,5 puntos)

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos) Alex y Fran son dos amigos que practican asiduamente en las pistas el baloncesto. La probabilidad de que Alex enceste un tiro libre es del 65% y de que lo haga Fran es del 48%. Dado que los dos sucesos son independientes, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos al lanzar un tiro libre:

a) Ambos enceste un tiro libre. (1 punto)
b) Solo Alex encesta la pelota. (1 punto)
c) Al menos uno de ellos encesta la pelota. (0,5 puntos)

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
EBAU2021 - **JUNIO**

CRITERIOS DE VALORACIÓN

CRITERIOS GENERALES

Cada error de cálculo trivial se penalizará con 0,1 puntos y cada error de cálculo no trivial con 0,2 puntos.

Los errores ortográficos graves se tendrán en cuenta en la calificación total del ejercicio.

CRITERIOS ESPECÍFICOS

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos)

- Discusión correcta: 2 puntos.
- Resolución correcta: 0,5 puntos.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos)

- Apartado a): 2 puntos.
- Apartado b): 0,5 puntos.

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos)

- Apartado a): 1,5 puntos.
- Apartado b): 0,5 puntos.
- Apartado c): 0,5 puntos.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos)

- Apartado a): 1,5 puntos.
- Apartado b): 1 punto.

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos)

- Representar gráficamente el recinto: 1 puntos.
- Calcular su área: 1,5 puntos.

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos)

- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 1 punto.
- Apartado c): 0,5 puntos.

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
EBAU2021 - **JUNIO**

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ y la recta $g(x) = 3 + x$. Calcular su área.

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$ (1 punto).

b) Calcular $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ (1 punto).

c) Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ (0,5 puntos)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) En un viaje de estudios el 52% de los jóvenes son hombres. De ellos el 35% son rubios así como el 40% de las mujeres. Si elegimos a un estudiante al azar:

a) Calcule la probabilidad de que sea rubio. (1 punto)
b) Sabiendo que NO es rubio, ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1,5 puntos)

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos) Alex y Fran son dos amigos que practican asiduamente en las pistas el baloncesto. La probabilidad de que Alex enceste un tiro libre es del 65% y de que lo haga Fran es del 48%. Dado que los dos sucesos son independientes, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos al lanzar un tiro libre:

a) Ambos enceste un tiro libre. (1 punto)
b) Solo Alex encesta la pelota. (1 punto)
c) Al menos uno de ellos encesta la pelota. (0,5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Cuestión 1:

Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{aligned} x+3y+z=5 \\ ax+2z=0 \\ ay-z=a \end{aligned}\right\}$ en función de los valores del parámetro a.

Resolverlo para $a=1$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & -1\end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 5 \\ a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & -1 & a\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & -1\end{vmatrix}=a^2-2a+3a=0;\ \ a^2+a=0;\ \ a(a+1)=0 \Rightarrow a_1=0, a_2=-1.$$

Para $a \neq 0$ y para $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado al ser los rangos iguales a 3 e iguales al número de incógnitas

$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \rightarrow Rang\ M'=2.$ Luego el sistema es compatible indeterminado

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=5-3=2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

Como el rango de la matriz ampliada es distinto del rango de la matriz de los coeficientes el sistema es incompatible.

Para $a=1$ el sistema es: $\left.\begin{aligned} x+3y+z=5 \\ x+2z=0 \\ y-z=1 \end{aligned}\right\}$, que es compatible determinado. Resolvemos por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{1\cdot(1+1)}=\frac{6-10}{2}=\frac{-4}{2}=-2;\ y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}}{2}=\frac{1-2+5}{2}=\frac{4}{2}=2;\ z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}{2}=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

$$x=-2, \qquad y=2, \qquad z=1$$

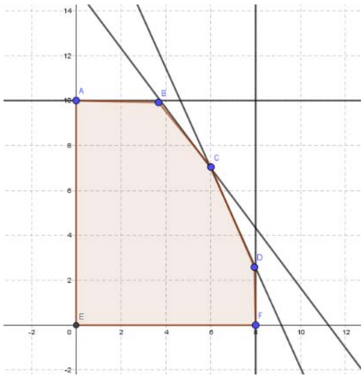
Cuestión 2:

En un terreno en la huerta de Beniel se quieren plantar dos tipos distintos de naranjos: A y B. No se puede cultivar más de 8 hectáreas con naranjos de tipo A ni más de 10 hectáreas con naranjos de tipo B. Cada hectárea de naranjos de tipo A necesita 4 m^3 de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m^3. Se dispone anualmente de 45 m^3 de agua. Cada hectárea de tipo A requiere una inversión de 500 euros y cada una de tipo B, 225 euros. Se dispone de 4 575 euros para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de naranjos de tipo A y B producen, respectivamente, 500 y 300 kilos anuales de naranjas:

a) Calcular las hectáreas de cada tipo de naranjo que se debe plantar para maximizar la producción de naranjas. Razone la respuesta.

b) Obtener la producción máxima.

Solución:



Sean x e y el número de hectáreas de naranjos de los tipos A y B que se plantan en la huerta de Beniel, respectivamente.

Las restricciones, según el enunciado, son:

$$\left.\begin{array}{r} x \leq 8;\ \ y \leq 10 \\ 4x + 3y \leq 45 \\ 500x + 225y \leq 4.575 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x \leq 8;\ \ y \leq 10 \\ 4x + 3y \leq 45 \\ 20x + 9y \leq 183 \end{array}\right\}.$$

La región factible es la de la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son:

$A{:}\ \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 10).$

$B{:}\ \left.\begin{array}{r} y = 10 \\ 4x + 3y = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow\Rightarrow 4x + 30 = 45;\ \ 4x = 15; x = 15/4 \Rightarrow B(15/4, 10).$

$C{:}\ \left.\begin{array}{r} 4x + 3y = 45 \\ 20x + 9y = 183 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -12x - 9y = -135 \\ 20x + 9y = 183 \end{array}\right\} \Rightarrow 8x = 48 \Rightarrow x = 6;\ \ 24 + 3y = 45;\ \ y = 7 \Rightarrow C(6, 7).$

$D{:}\ \left.\begin{array}{r} x = 8 \\ 20x + 9y = 183 \end{array}\right\} \Rightarrow 160 + 9y = 183;\ 9y = 23 \Rightarrow D(8, 23/9).$

$E{:}\ E(0, 0).$

$F{:}\ \left.\begin{array}{r} x = 8 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow F(8, 0).$

La función objetivo es $f(x, y) = 500x + 300y$. Los valores de la función de objetivos son:

$A{:}\ f(0, 10) = 500 \cdot 0 + 300 \cdot 10 = 0 + 3\,000 = 3\,000.$

$B{:}\ f(15/4, 10) = 500 \cdot \frac{15}{4} + 300 \cdot 10 = 1\,875 + 3\,000 = 4\,875.$

$C{:}\ f(6, 7) = 500 \cdot 6 + 300 \cdot 7 = 3\,000 + 2\,100 = 5\,100.$

$D{:}\ f(8, 23/9) = 500 \cdot 8 + 300 \cdot \frac{23}{9} = 4\,000 + 766.67 = 4\,766.67.$

$F{:}\ f(8, 0) = 500 \cdot 8 + 300 \cdot 0 = 4\,000 + 0 = 4\,000.$

El máximo beneficio de 5 100 euros se obtiene en el punto $C(6, 7)$, plantando 6 hectáreas de A y 7 de B

Cuestión 3:

El coste de producción de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ y su precio de venta es: $p = 50 - \frac{x}{4}$ euros. Hallar:

$a)$ El número de unidades que debe venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.

$b)$ El precio al que deben venderse las unidades obtenidas en el apartado $a)$.

$c)$ El beneficio máximo.

Solución:

$a)$ El beneficio es la diferencia entre el precio de venta y el precio de coste.

$$B(x) = V(x) - C(x) = 50x - \frac{1}{4}x^2 - \left(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) =$$

$= 50x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2 - 35x - 25 \Rightarrow B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 15x - 25.$

El beneficio es máximo cuando se anula su primera derivada y es positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera:

$B'(x) = -x^2 + 15x. \qquad B''(x) = -2x + 15.$

$B'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 15x = 0;\ -x(x-15) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 15.$

$B'(x) = -x^2 + 15x.$

$B''(0) = 15 > 0 \Rightarrow Mínimo.$

$B''(15) = -2 \cdot 15 + 15 = -15 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 15.$

El beneficio es máximo vendiendo 15 unidades diarias

$b)$ $p(15) = 50 - \frac{15}{4} = 50 - 3.75 = 46.25.$

Se debe vender el producto a 46.25 *euros* la unidad

$c)$ $B(15) = -\frac{1}{2} \cdot 15^2 + 15 \cdot 15 - 25 = \frac{-225+450-50}{2} = \frac{175}{2} = 87.5.$

El beneficio es de 87.5 *euros*

Cuestión 4:

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, calcular el valor de a, b y c para que:

$a)$ La función pase por el origen de coordenadas y tenga en el punto $P(1, -1)$ un mínimo local.

$b)$ Para los valores obtenidos en el apartado anterior, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

$a)$ Imponemos las condiciones del enunciado:

Por pasar por el origen de coordenadas: $f(0) = c = 0$.

Por contener al punto $P(1, -1) \Rightarrow f(1) = -1 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = \ a + b = -1$.

Por tener un extremo relativo en $P(1, -1) \Rightarrow f'(1) = 0$:

$f'(x) = 3ax^2 + b \rightarrow f'(1) = 3a \cdot 1^2 + b = 0 \rightarrow \ \ 3a + b = 0$.

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \ \left.\begin{array}{r} -a - b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} + b = -1 \rightarrow \ 2b = -3 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}.$$

$$a = \frac{1}{2};\ b = -\frac{3}{2}; c = 0$$

$b)$ Para $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$ y $c = 0$ la función es $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(x^2 - 1)$. $\qquad f''(x) = 3x$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}(x^2 - 1) = 0;\ x^2 - 1 = 0;\ \ x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$.

$f''(-1) = -3 < 0 \Rightarrow Máximo$. $\qquad f''(1) = 3 > 0 \Rightarrow Mínimo$.

Teniendo en cuanta que $D(f) \Rightarrow R$, las raíces de la primera derivada dividen la recta real en los intervalos $(-\infty, -1), (-1, 1)$ y $(1, +\infty)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Como $f'(0) = -\frac{3}{2} < 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son:

$x \in (-1, 1) \rightarrow f'(x) < 0$, la función es decreciente

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0$, la función es creciente

Cuestión 5:

Representar gráficamente el recinto plano limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ y la recta $g(x) = 3 + x$. Calcular su área.

Solución:

La función $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es:

$f'(x) = -2x + 4 = 0 \to x = 2 \to f(2) = -4 + 8 + 3 = 7 \Rightarrow V(2, 7)$.

Los puntos de intersección de la parábola y la recta se obtienen igualando sus expresiones:

$$-x^2 + 4x + 3 = 3 + x;\ x^2 - 3x = 0;\ x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to A(0,3) \\ x_2 = 3 \to B(3,6) \end{cases}.$$

La representación gráfica es la de la figura adjunta.

$$S = \int_0^3 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_0^3 [-x^2 + 4x + 3 - (3 + x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 4x + 3 - 3 - x) \cdot dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2}\right) - 0 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{-18 + 27}{2} = \frac{9}{2} u^2$$

$$Área = \frac{9}{2} u^2$$

Cuestión 6:

Dada la función $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$:

$a)$ Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x = 0$.

$b)$ Calcular $I = \int \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx$.

$c)$ Calcular $I = \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx$.

Solución:

$a)$ La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$f'(x) = \frac{2\cdot(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

$m = f'(0) = \frac{2-0}{(0+1)^2} = 2$.

$f(0) = \frac{0}{0^2+1} = 0 \Rightarrow O(0,0)$.

La ecuación de una recta conocidos un punto y la pendiente viene dada por la fórmula

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

$y = 0 + 2(x - 0) = 2x \Rightarrow Recta\ tangente$: $\underline{t \equiv 2x - y = 0}$.

La recta tangente es: $y = 2x$.

$b)$ Es una integral inmediata de tipo logaritmo. Hacemos el cambio: $x^2 + 1 = t$, con lo que $2x \cdot dx = dt$

$$I = \int \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx = \int \frac{1}{t} \cdot dt = L|t| + C = L(x^2+1) + C$$

$$I = \int \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx = L(x^2+1) + C$$

$c)$ $I = \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx = [L(x^2+1)]_1^2 = L(2^2+1) - L(1^2+1) = L(5) - L(2)$.

$$I = \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1} \cdot dx = L(5) - L(2).$$

Cuestión 7:

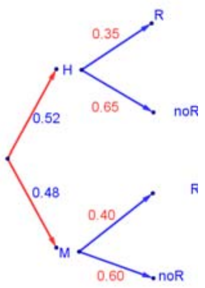
En un viaje de estudios el 52 % de los jóvenes son hombres. De ellos el 35 % son rubios, así como el 40 % de las mujeres. Si elegimos a un estudiante al azar:

a) Calcule la probabilidad de que ser rubio.

b) Sabiendo que NO es rubio, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:

Llamamos H al suceso ser hombre, y M al suceso ser mujer. Llamaos R al suceso ser rubio, y noR a no serlo. Con los datos del enunciado hacemos un diagrama de árbol:



$a)\ P(R) = P(H \cap R) + P(M \cap R) = P(H) \cdot P(R/H) + P(M) \cdot P(R/M) = 0.52 \cdot 0.35 + 0.48 \cdot 0.40 = 0.374$

La probabilidad de ser rubio es de 0.374

$b)\ P\left(M/\overline{R}\right) = \frac{P\left(M \cap \overline{R}\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \frac{P(M) \cdot P\left(\overline{R}/M\right)}{1 - P(R)} = \frac{0.48 \cdot 0.60}{1 - 0.374} = \frac{0.288}{0.626} = 0.4601.$

Sabiendo que NO es rubio, la probabilidad de que sea mujer es de 0.4601.

Cuestión 8:

Alex y Fran son dos amigos que practican asiduamente en las pistas el baloncesto. La probabilidad de que Alex enceste un tiro libre es del 65 % y de que lo haga Fran es del 48 %. Dado que los dos sucesos son independientes, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos al lanzar un tiro libre:

$a)$ Ambos encesten un tiro libre.

$b)$ Sólo Alex enceste la pelota.

$c)$ Al menos uno de ellos enceste la pelota.

Solución:

Los datos del enunciado son: $P(A) = 0.65;\ \ P(F) = 0.48;$

Como son independientes: $P(A \cap F) = P(A) \cdot P(F) = 0.65 \cdot 0.48$

$a)$ $P(A \cap F) = P(A) \cdot P(F) = 0.65 \cdot 0.48 = 0.312.$

La probabilidad de que ambos encesten es $P(A \cap F) = 0.312$

$b)$ $P(A) \cdot P(\overline{F}) = 0.65 \cdot (1 - 0.48) = 0.65 \cdot 0.52 = 0.338.$

La probabilidad de que sólo Alex enceste es $P(A) \cdot P(\overline{F}) = 0.338.$

$c)$ Al menos no de ellos enceste es el suceso contrario de que ninguno enceste:

$1 - P(\overline{A} \cap \overline{F}) = 1 - 0.35 \cdot 0.52 = 1 - 182 = 0.818.$

La probabilidad de que al menos uno enceste es 0.818

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

EBAU2021 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTE: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 6 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcular el valor de a y b para que se cumpla: $AB=BA$.

b) Para $a=1$ y $b=0$, resuelva la ecuación: $XB-A=I$, siendo $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

CUESTIÓN 2. Sea el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y\le 12 \\ y\ge \dfrac{x}{2}-2 \\ x-2y\ge -3 \\ 2x+3y\ge 1 \end{array}\right\}$$

a) Representar gráficamente la región del plano S definido por el sistema de inecuaciones anterior y determine los vértices de dicha región. **(1,5 puntos)**

b) Calcular los puntos de la región S dónde la función $f(x,y)=3x-2y$ alcanza sus valores máximos y mínimos. **(1 punto)**

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) En un concierto celebrado en Murcia se ha estimado el número de miles de jóvenes que han asistido a él en función de la hora de llegada, t, mediante la función $f(t)=\dfrac{10}{(t-6)^2+1}$. Hallar la hora en el que había el mayor número de personas en el concierto. ¿Cuál fue esa cantidad máxima? Razone la respuesta.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=ax^2+3x+\dfrac{b}{x}$:

a) Calcule los valores de a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto $(1,2)$ y determine si ese extremo es un máximo o un mínimo. (1,5 puntos).

b) Si en la función anterior $a=2$ y $b=0$, determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$ (1 punto)

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
EBAU2021 - **JULIO**

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = -x^2 + 4$ y $g(x) = x^2$. Calcular su área.

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x) = xe^{x^2}$:

a) Hallar la pendiente de esta función en el punto $x = 0$. (1 punto).

b) Calcular $\int xe^{x^2}\,dx$ (1 punto).

c) Calcular $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$ (0,5 puntos)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Se dispone de tres cajas con bolas de distintos colores. La primera contiene 10 bolas: 4 azules y 6 blancas. En la segunda caja hay una única bola azul y 5 blancas. En la tercera caja tenemos 3 bolas azules y 5 blancas. Cogemos una bola al azar de cualquiera de las cajas:

a) Calcule la probabilidad de que la bola cogida sea azul. (1 punto)
b) Si la bola elegida es blanca, calcule la probabilidad de que estuviera en la primera caja. (1,5 puntos)

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos) Dado dos sucesos de un experimento aleatorio A y B tales que $P(\overline{A}) = 0,45$, $P(B) = 0,35$ y $P(A \cup B) = 0,7$ Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$. (0,5 puntos)
b) $P(A \cap B)$. (1 puntos)
c) $P(B / A)$ (0,5 puntos)
d) $P(\overline{A} / \overline{B})$. (0,5 puntos)

UNIVERSIDAD DE MURCIA | Región de Murcia | Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
EBAU2021 - **JULIO**

CRITERIOS DE VALORACIÓN

CRITERIOS GENERALES

Cada error de cálculo trivial se penalizará con 0,1 puntos y cada error de cálculo no trivial con 0,2 puntos.

Los errores ortográficos graves se tendrán en cuenta en la calificación total del ejercicio.

CRITERIOS ESPECÍFICOS

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos)
- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 1,5 puntos.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos)
- Apartado a): 1,5 puntos.
- Apartado b): 1 punto.

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos)
- Resolución correcta: 2,5 puntos.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos)
- Apartado a): 1,5 puntos.
- Apartado b): 1 punto.

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos)
- Representar gráficamente el recinto: 1 puntos.
- Calcular su área: 1,5 puntos.

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos)
- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 1 punto.
- Apartado c): 0,5 puntos.

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos)
- Apartado a): 1 punto.
- Apartado b): 1,5 puntos.

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)
- Apartado a): 0,5 puntos.
- Apartado b): 1 punto.
- Apartado c): 0,5 puntos.
- Apartado d): 0,5 puntos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Cuestión 1:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcular el valor de a y b para que se cumpla: $A \cdot B = B \cdot A$.

$b)$ Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelve la ecuación: $X \cdot B - A = I$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

$a)$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix}$.

$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{c} 3b = 12 \\ 2a = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1, b = 4.$

$$\boldsymbol{a = 1, b = 4}$$

$b)$ La matriz B para $a = 1$ y $b = 0$ es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X \cdot B - A = I \rightarrow \ X \cdot B = I + A \rightarrow \ X \cdot B \cdot B^{-1} = (I + A) \cdot B^{-1} \rightarrow X = (I + A) \cdot B^{-1}.$$

$I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0;$$

Existe su inversa:

$B^{-1} = \frac{Adj.de\ B^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow \ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$.

$X = (I + A) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Cuestión 2:

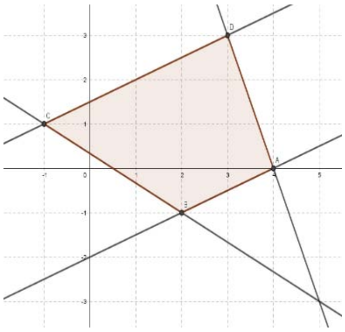
Sea el sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 3x+y\leq 12 \\ y\geq \frac{x}{2}-2 \\ x-2y\geq -3 \\ 2x+3y\geq 1 \end{array}\right\}.$

$a)$ Representar gráficamente la región del plano S definido por el sistema de inecuaciones anterior y determine los vértices de dicha región.

$b)$ Calcular los puntos de la región S donde la función $f(x,y)=3x-2y$ alcanza sus valores máximos y mínimos.

Solución:

$a)$



$$\left.\begin{array}{r} 3x+y\leq 12 \\ y\geq \frac{x}{2}-2 \\ x-2y\geq -3 \\ 2x+3y\geq 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y\leq 12 \\ x-2y\leq 4 \\ x-2y\geq -3 \\ 2x+3y\geq 1 \end{array}\right\}.$$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices son:

$$A\colon \left.\begin{array}{r} 3x+y=12 \\ x-2y=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y=12 \\ -3x+6y=-12 \end{array}\right\} \rightarrow 7y=0 \rightarrow \ y=0 \rightarrow \ x=4 \Rightarrow A(4,0).$$

$$B\colon \left.\begin{array}{r} x-2y=4 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x+4y=-8 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right\} \rightarrow 7y=-7 \rightarrow \ y=-1 \rightarrow \ x+2=4 \rightarrow x=2 \Rightarrow B(2,-1).$$

$$C\colon \left.\begin{array}{r} x-2y=-3 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x+4y=6 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right\} \rightarrow 7y=7 \rightarrow \ y=1 \rightarrow \ 2x+3=1 \rightarrow \ x=-1 \Rightarrow C(-1,1).$$

$$D\colon \left.\begin{array}{r} 3x+y=12 \\ x-2y=-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 6x+2y=24 \\ x-3y=-3 \end{array}\right\} \rightarrow 7x=21 \rightarrow x=3 \rightarrow 3-2y=-3 \rightarrow y=3 \Rightarrow D(3,3).$$

$b)$ La función de objetivos es $f(x,y)=3x-2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son:

$A\colon f(4,0)=3\cdot 4-2\cdot 0=12-0=12.$

$D\colon f(2,-1)=3\cdot 2-2\cdot(-1)=6+2=8.$

$C\colon f(-1,1)=3\cdot(-1)-2\cdot 1=-3-2=-5.$

$D\colon f(3,3)=3\cdot 3-2\cdot 3=9-6=3.$

El máximo, 12, se produce en el punto $A(4,0)$ y el mínimo, -5, en el punto $C(-1,1)$.

Cuestión 3:

En un concierto celebrado en Murcia se ha estimado el número de miles de jóvenes que han asistido a él en función de la hora de llegada, t, mediante la siguiente función: $f(t) = \frac{10}{(t-6)^2+1}$. Hallar la hora en el que había el mayor número de personas en el concierto. ¿Cuál fue esa cantidad máxima? Razona la respuesta.

Solución:

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto en el que sea derivable, es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$f(t) = \frac{10}{t^2-12t+36+1} = \frac{10}{t^2-12t+37} \rightarrow f'(t) = \frac{-10\cdot(2t-12)}{(t^2-12t+37)^2} = \frac{-20\cdot(t-6)}{(t^2-12t+37)^2} \rightarrow f'(t) = 0 \rightarrow$$
$$\frac{-20\cdot(t-6)}{(t^2-12t+37)^2} = 0 \rightarrow -20\cdot(t-6) = 0 \rightarrow \ t-6 = 0 \rightarrow t = 6.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(t) = \frac{-20\cdot\left(t^2-12t+37\right)^2+20\cdot(t-6)\cdot\left[2\cdot\left(t^2-12t+37\right)(2t-12)\cdot\right]}{(t^2-12t+37)^4} = \frac{-20\cdot\left(t^2-12t+37\right)+80\cdot(t-6)^2}{(t^2-12t+37)^3} =$$
$$\frac{-20t^2+240t-740+80\cdot\left(t^2-12t+36\right)}{(t^2-12t+37)^3} = \frac{-20t^2+240t-740+80t^2-960t+2.880}{(t^2-12t+37)^3} = \frac{60t^2-720t+2.140}{(t^2-12t+37)^3} = 20\cdot\frac{3t^2-36t+107}{(t^2-12t+37)^3}.$$

$$f''(6) = 20\cdot\frac{3\cdot 6^2-36\cdot 6+107}{(6^2-12\cdot 6+37)^3} = 20\cdot\frac{108-216+107}{(36-72+37)^3} = 20\cdot\frac{215-216}{1^3} = -20 > 0$$

Hay un máximo relativo para $t = 6$.

$f(6) = \frac{10}{(6-6)^2+1} = 10.$

El mayor número de personas en el concierto es a las **6 horas**, y ese número es de $\mathbf{10.000}$ ***jóvenes***

Cuestión 4:

Dada la función $f(x) = ax^2 + 3x + \frac{b}{x}$:

$a)$ Calcule los valores de a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto $P(1,2)$ y determine si ese extremo es un máximo o un mínimo.

$b)$ Si en la función anterior $a = 2$ y $b = 0$, determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

$a)$ Imponemos las condiciones del enunciado.

Por contener al punto $P(1,2) \Rightarrow f(1) = 2$.

$f(1) = 2 \Rightarrow a \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + \frac{b}{1} = 2;\ \ a + b = -1$.

Por tener un extremo relativo en el punto $P(1,2) \Rightarrow f'(1) = 0$.

$f'(x) = 2ax + 3 - \frac{b}{x^2} \to\ f'(1) = 0 \to 2a \cdot 1 + 3 - \frac{b}{1^2} = 0 \to\ \ 2a - b = -3$.

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones:

$\left.\begin{array}{r} a + b = -1 \\ 2a - b = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a = -4 \to a = -\frac{4}{3} \to -\frac{4}{3} + b = -1 \to\ b = -1 + \frac{4}{3} \to b = \frac{1}{3}$.

$$a = -\frac{4}{3};\ b = \frac{1}{3}$$

La función obtenida es $f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 3x + \frac{1}{3x}$.

La derivada es: $f'(x) = -\frac{8}{3}x + 3 - \frac{1}{3x^2}$.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = -\frac{8}{3} + \frac{6x}{9x^4} = -\frac{8}{3} + \frac{2}{3x^3} \to f''(1) = -\frac{8}{3} + \frac{2}{3 \cdot 1^3} = -\frac{8}{3} + \frac{2}{3} = -2 < 0$$

La función obtenida tiene un máximo relativo en el punto $P(1,2)$

$b)$ Para $a = 2$ y $b = 0$ la nueva función es $f(x) = 2x^2 + 3x$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$f'(x) = 4x + 3 \to m = f'(1) = 4 \cdot 1 + 3 = 7 \to f(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5$.

El punto de tangencia es $Q(1,5)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula

$y = y_0 + m(x - x_0)$, que aplicada al punto $Q(1,5)$ con $m = 7$ es:

$y = 5 + 7 \cdot (x - 1) = 5 + 7x - 7 = 7x - 2$.

La recta tangente es $y = 7x - 2$

Cuestión 5:

Representar gráficamente el recinto plano limitado por las parábolas $f(x) = -x^2 + 4$ y $g(x) = x^2$. Calcular su área.

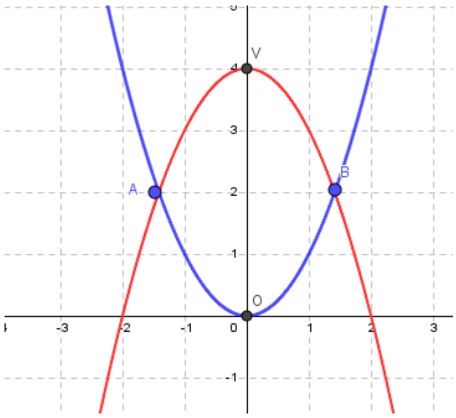
Solución:

Las abscisas de los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de igualar sus expresiones:

$$-x^2 + 4 = x^2;\ 2x^2 = 4;\ x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \to A\left(-\sqrt{2}, 2\right) \\ x_2 = \sqrt{2} \to B\left(\sqrt{2}, 2\right) \end{cases}.$$

La parábola $f(x) = -x^2 + 4$, que es cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto $V(0, 4)$.

La parábola $g(x) = x^2$, que es convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el origen.



El recinto limitado por las parábolas será el intervalo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Por ser las ordenadas de la parábola $g(x) = x^2$ iguales o menores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x) = -x^2 + 4$ en el intervalo del área a calcular y, además, como las dos funciones son pares y, por tanto, simétricas con respecto al eje de ordenadas, la superficie S a calcular es:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} [(-x^2 + 4) - x^2] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (-2x^2 + 4) \cdot dx =$$

$$4 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (-x^2 + 2) \cdot dx = 4 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^{\sqrt{2}} = 4 \cdot \left\{\left[-\frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{3} + 2\sqrt{2}\right]\right\} = 4 \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2}\right) =$$

$$8\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = 8\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \cong 7.54\ u^2.$$

$$Área = \frac{16\sqrt{2}}{3} \cong 7.54\ u^2.$$

Autor: Javier Sánchez

Cuestión 6:

Dada la función $f(x) = x \cdot e^{x^2}$:

$a)$ Hallar la pendiente de esta función en el punto $x = 0$.

$b)$ Calcular $I = \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx$.

$c)$ Calcular $I = \int_0^1 x \cdot e^{x^2} \cdot dx$.

Solución:

$a)$ La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{x^2} + x \cdot 2x \cdot e^{x^2} = e^{x^2} \cdot (1 + 2x^2).$$

$$m = f'(0) = e^0 \cdot (1 + 2 \cdot 0^2) = 1 \cdot 1 = 1.$$

La pendiente de esta función en el punto $x = 0$ es $m = \mathbf{1}$

$b)$ Es una integral inmediata de tipo exponencial. Llamamos $x^2 = t \rightarrow \begin{array}{c} x^2 = t \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{array}$

$$I = \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int e^t \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot e^t + C = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C.$$

$$I = \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C.$$

$c)$ $I = \int_0^1 x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \left[\frac{1}{2} \cdot e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{1^2} - e^{0^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot (e - 1).$

$$I = \int_0^1 x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot (e - 1).$$

Cuestión 7:

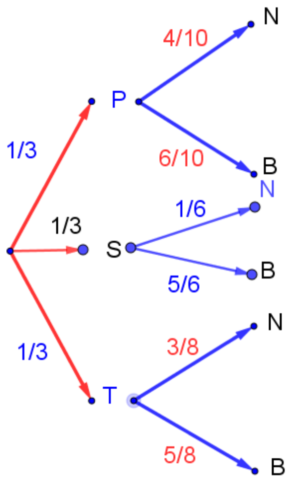
Se dispone de tres cajas con bolas de distintos colores. La primera contiene 10 bolas: 4 negras y 6 blancas. En la segunda caja hay una única bola negra y 5 blancas. En la tercera caja tenemos 3 bolas negras y 5 blancas. Cogemos una bola al azar de cualquiera de las cajas:

$a)$ Calcule la probabilidad de que la bola cogida sea negra.

$b)$ Si la bola elegida es blanca, calcule la probabilidad de que estuviera en la primera caja.

Solución:

Llamamos N al suceso de que la bola cogida sea negra y B que sea blanca. Llamamos P al suceso de que sea de la primera caja, S que sea de la segunda y T de la tercera. Con los datos dados hacemos un diagrama de árbol:



$$a)\ P(N) = \frac{1}{3} \cdot P(P \cap N) + \frac{1}{3} \cdot P(S \cap N) + \frac{1}{3} \cdot P(T \cap N) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{2}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{48+20+45}{360} = \frac{113}{360} = 0.3139.$$

$$P(N) = \frac{113}{360} = 0.3139$$

$$b)\ P(P/B) = \frac{P(P \cap B)}{P(B)} = \frac{P(P) \cdot P(B/P)}{1 - P(N)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10}}{1 - \frac{113}{360}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{247}{360}} = \frac{72}{247} = 0.2915.$$

$$P(P/B) = \frac{72}{247} = 0.2915$$

Cuestión 8:

Dados dos sucesos de un experimento aleatorio A y B tales que $P(\overline{A}) = 0.45$; $P(B) = 0.35$ y $P(A \cup B) = 0.7$. Calcular las siguientes probabilidades:

$a)$ $P(A)$.

$b)$ $P(A \cap B)$.

$c)$ $P(B/A)$.

$d)$ $P(\overline{A}/\overline{B})$.

Solución:

Nos dice que: $P(\overline{A}) = 0.45$; $P(B) = 0.35$; $P(A \cup B) = 0.7$, por lo que sabemos que:

$a)$ $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.45 = 0.55$

$b)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.55 + 0.35 - 0.70 = 0.20$

$c)$ $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.20}{0.55} = 0.3636.$

$d)$ Como $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$, entonces:

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - 0.7}{1 - 0.35} = \frac{0.30}{0.65} = 0.4615.$$

$$P(A) = 0.55;\ P(A \cap B) = 0.20;\ P(B/A) = 0.3636;\ P(\overline{A}/\overline{B}) = 0.4615.$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

NAVARRA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Logo de la Comunidad	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Elija tres de los seis ejercicios propuestos.

Problema 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes cuestiones:

a) Calcule A^{-1} y B^{-1}.

b) Resuelva la ecuación matricial $C - A = 2X - 6I$.

c) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = C$.

Problema 2:

Un empresario quiere dedicar 50 horas laborales a cursos de formación para sus empleados y está considerando dos tipos de formación (F1 y F2). El curso F1 es más atractivo para sus empleados y cada hora de curso conseguiría aumentar la productividad de la empresa en un 1 %, mientras que el curso F2, es menos atractivo para los empleados, pero mejoraría la productividad en un 2 %. El empresario decide dedicar al menos 20 horas al curso F1 y no más de 35 horas al curso F2. Además, los empleados solicitan que se dedique al curso F1 una cantidad igual o superior de horas que al curso F2. ¿Cuántas horas debería dedicar a cada curso de formación si se desea maximizar el aumento de la productividad?

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando las preferencias de los empleados, el empresario modifica su idea inicial y decide no dedicar más de 10 horas al curso de formación F2.

Problema 3:

Sean las funciones $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{2x-2}$ y $g(x) = 2x^2 + ax + 1$.

a) Estudie la continuidad de $f(x)$ y, en su caso, indique el tipo de discontinuidad.

b) Calcule el valor de a para que $g(x)$ tenga un mínimo en $x = 1/2$.

c) Calcule $g'(1)$ aplicando la definición de derivada, para el valor del parámetro real $a = -1$.

Problema 4:

a) Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2+5}{x+1}$.

b) Calcule la primitiva de la función $f(x) = (2x+1)^3$, sabiendo que $F(0) = \frac{9}{8}$.

Problema 5:

En una empresa de reservas de viajes y alojamientos por internet, el 75 % de las visitas buscan alojamiento, el 55 % de las visitas buscan vuelo y el 40 % de las visitas buscan alojamiento y vuelo. Se selecciona una visita al azar. Calcule:

a) La probabilidad de que busque vuelo o alojamiento.

b) La probabilidad de que busque alojamiento, sabiendo que no busca vuelo.

c) La probabilidad de que no busque vuelo ni alojamiento.

Problema 6:

El gasto (en euros) por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con varianza 64. Se selecciona una muestra de clientes, obteniéndose los siguientes gastos:

$49{,}8;\ \ 34{,}4;\ \ 42{,}1;\ \ 55{,}7;\ \ 54{,}9;\ \ 53;\ \ 54{,}6;\ \ 53{,}3;\ \ 68{,}9\ \ y\ \ 42{,}4.$

a) Calcule un intervalo de confianza al 93 % para el gasto medio.

b) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo se reduzca a la mitad. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes cuestiones:

$a)$ Calcule A^{-1} y B^{-1}.

$b)$ Resuelva la ecuación matricial $C - A = 2X - 6I$.

$c)$ Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = C$.

Solución:

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2. \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

La inversa de B se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(B|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 2F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$b)$

$$C - A = 2X - 6I; \;\; 2X = C - A + 6I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= 2X = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$A \cdot X \cdot B = C; \;\; A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}; \;\; I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow$$

$$\underline{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}.$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 14 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}}.$$

****

Problema 2:

Un empresario quiere dedicar 50 horas laborales a cursos de formación para sus empleados y está considerando dos tipos de formación (F1 y F2). El curso F1 es más atractivo para sus empleados y cada hora de curso conseguiría aumentar la productividad de la empresa en un 1 %, mientras que el curso F2, es menos atractivo para los empleados, pero mejoraría la productividad en un 2 %. El empresario decide dedicar al menos 20 horas al curso F1 y no más de 35 horas al curso F2. Además, los empleados solicitan que se dedique al curso F1 una cantidad igual o superior de horas que al curso F2. ¿Cuántas horas debería dedicar a cada curso de formación si se desea maximizar el aumento de la productividad?

$a)$ Plantee el problema. b) Resuélvalo gráficamente.

$c)$ Analice gráficamente qué ocurriría si considerando las preferencias de los empleados, el empresario modifica su idea inicial y decide no dedicar más de 10 horas al curso de formación F2.

Solución:

$a, b)$

Sean x e y el número de horas dedicadas a los cursos F1 y F2, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x + y \leq 50 \\ x \geq 20; \quad y \leq 35 \\ x \geq y \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow x + y \leq 50 \Rightarrow y \leq 50 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	50
y	50	0

② $\Rightarrow x \geq y \Rightarrow y \leq x \Rightarrow A(20,0) \rightarrow Si.$

x	0	50
y	0	50

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

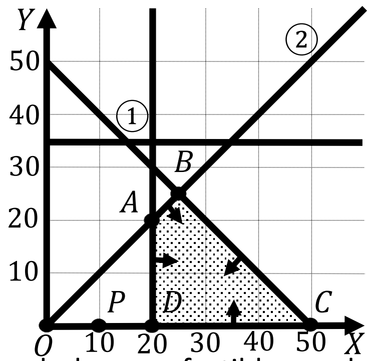
Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = x \\ x = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow A(20,20).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 50 \\ x = y \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 50; \;\; x = 25 \Rightarrow B(25,25).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 50 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 50 \Rightarrow C(50,0).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 20 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(20,0).$



La función de objetivos es $f(x,y) = 1{,}01x + 1{,}02y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(20,20) = 1{,}01 \cdot 20 + 1.02 \cdot 20 = 20{,}2 + 20{,}4 = 40{,}6.$

$B \Rightarrow f(25,25) = 1{,}01 \cdot 25 + 1.02 \cdot 25 = 25{,}25 + 25{,}5 = 50{,}75.$

$C \Rightarrow f(50,0) = 1{,}01 \cdot 50 + 1.02 \cdot 0 = 50{,}5 + 0 = 50{,}5.$

$D \Rightarrow f(20,0) = 1{,}01 \cdot 20 + 1.02 \cdot 0 = 20{,}2 + 0 = 20{,}2.$

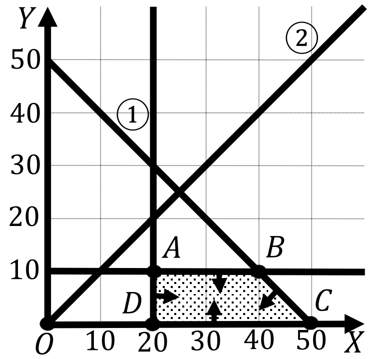
El valor máximo se produce en el punto $B(25, 25)$.

La productividad es máxima dedicando 25 horas a cada curso.

$c)$

Los vértices D y C siguen siendo los mismos, es decir: $C(50,0)$ y $D(20,0)$.

Los nuevos vértices A y B son los siguientes:



$$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 20 \\ y = 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(20, 10).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y = 50 \\ y = 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + 10 = 50;\ \ x = 40 \Rightarrow B(40, 10).$$

Los valores de la función de objetivos en los nuevos vértices A y B son los siguientes:

$A \Rightarrow f(20,10) = 1{,}01 \cdot 20 + 1.02 \cdot 10 = 20{,}2 + 10{,}2 = 30{,}4.$

$B \Rightarrow f(40,10) = 1{,}01 \cdot 40 + 1.02 \cdot 10 = 40{,}4 + 10{,}2 = 50{,}6.$

La productividad es máxima dedicando 40 horas a F1 y 10 horas a F2.

****

Problema 3:

Sean las funciones $f(x)=\frac{x^2+4x+3}{2x-2}$ y $g(x)=2x^2+ax+1$.

$a)$ Estudie la continuidad de $f(x)$ y, en su caso, indique el tipo de discontinuidad.

$b)$ Calcule el valor de a para que $g(x)$ tenga un mínimo en $x=1/2$.

$c)$ Calcule $g'(1)$ aplicando la definición de derivada, para el valor del parámetro real $a=-1$.

Solución:

$a)$

$$f(x)=\frac{x^2+4x+3}{2x-2}=\frac{x^2+4x+3}{2(x-1)}.$$

La función $f(x)$, por ser racional, tiene como dominio al conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador:

$$2(x-1)=0;\ \ x-1=0;\ \ x=1\Rightarrow D(f)\Rightarrow R-\{1\}.$$

Para determinar el tipo de discontinuidad para $x=1$ se hacen los límites laterales de la función para este valor:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+4x+3}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1^2+4\cdot 1+3}{2(1^- -1)}=\frac{8}{2\cdot 0^-}=\frac{8}{0^-}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+4x+3}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1^2+4\cdot 1+3}{2(1^+ -1)}=\frac{8}{2\cdot 0^+}=\frac{8}{0^+}=+\infty.$$

$$\underline{f(x)\ presenta\ una\ discontinuidad\ esencial\ de\ salto\ infinito\ para\ x=1}.$$

$b)$

La función $g(x)=2x^2+ax+1$ es una parábola convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2. Su vértice, se nos dice, lo tiene para $x=\frac{1}{2}$:

$$g'(x)=4x+a=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow 4\cdot\frac{1}{2}+a=0;\ \ 2+a=0\Rightarrow$$

$$\underline{a=-2}.$$

$c)$

Para $a=-1$ la función es $g(x)=2x^2-x+1$.

$$g'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[2\cdot(1+h)^2-(1+h)+1]-[2\cdot 1^2-1+1]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[2\cdot\left(1+2h+h^2\right)-1-h+1\right]-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2+4h+2h^2-h-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h+2h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(3+h)\Rightarrow$$

$$\underline{g'(1)=3}.$$

****

Problema 4:

$a)$ Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2+5}{x+1}$.

$b)$ Calcule la primitiva de la función $f(x) = (2x+1)^3$, sabiendo que $F(0) = \frac{9}{8}$.

Solución:

$a)$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \ \Rightarrow$$

$$\underline{La\ recta\ x = -1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2+5}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5}{x^2+x} = 2.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+5}{x+1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5-2x^2-2x}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x+5}{x-1} = -2.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 2x - 2\ es\ asíntota\ oblicua}.$$

$b)$

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int (2x+1)^3 \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2x+1 = t \\ 2\cdot dx = dt \\ dx = \frac{1}{2}\cdot dt \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot \int t^3 \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4} + C \Rightarrow F(x) = \frac{1}{8}\cdot(2x+1)^4 + C.$$

Sabiendo que $F(0) = \frac{9}{8}$:

$$\frac{1}{8}\cdot(2\cdot 0+1)^4 + C = \frac{9}{8};\ \frac{1}{8} + C = \frac{9}{8} \ \Rightarrow C = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{F(x) = \frac{1}{8}\cdot(2x+1)^4 + 1.}$$

****

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 5:

En una empresa de reservas de viajes y alojamientos por internet, el 75 % de las visitas buscan alojamiento, el 55 % de las visitas buscan vuelo y el 40 % de las visitas buscan alojamiento y vuelo. Se selecciona una visita al azar. Calcule:

$a)$ La probabilidad de que busque vuelo o alojamiento.

$b)$ La probabilidad de que busque alojamiento, sabiendo que no busca vuelo.

$c)$ La probabilidad de que no busque vuelo ni alojamiento.

Solución:

$$Datos: P(Al) = 0{,}75;\;\; P(Vu) = 0{,}55;\;\; P(Al \cap Vu) = 0{,}40.$$

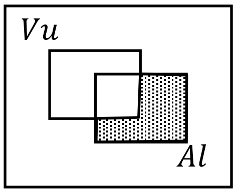
$a)$

$$P = P(Al \cup Vu) = (Al) + P(Vu) - \; P(Al \cap Vu) = 0{,}75 + 0{,}55 - 0{,}40 =$$

$$= 1{,}30 - 0{,}40 = \underline{0{,}90}.$$

$$P(Al \cup Vu) = \underline{0{,}90}.$$

$b)$



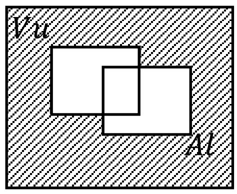
$Al \cap \overline{Vu} = Al - (Al \cap Vu)$

$$P = P\left(Al/\overline{Vu}\right) = \frac{P\left(Al \cap \overline{Vu}\right)}{P\left(\overline{Vu}\right)} = \frac{P(Al) - P(Al \cap Vu)}{1 - P(Vu)} =$$

$$= \frac{0{,}75 - 0{,}40}{1 - 0{,}55} = \frac{0{,}35}{0{,}45} = \underline{0{,}7778}.$$

$$P\left(Al/\overline{Vu}\right) = \underline{0{,}7778}.$$

$c)$



$P\left(\overline{Vu} \cap \overline{Al}\right) = 1 - P(Vu \cup Al)$

$$P = P\left(\overline{Vu} \cap \overline{Al}\right) = 1 - P(Al \cup Vu) =$$

$$= 1 - 0{,}90 = \underline{0{,}10}.$$

$$P\left(\overline{Vu} \cap \overline{Al}\right) = \underline{0{,}10}.$$

****

Problema 6:

El gasto (en euros) por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con varianza 64. Se selecciona una muestra de clientes, obteniéndose los siguientes gastos:

$49{,}8;\ 34{,}4;\ 42{,}1;\ 55{,}7;\ 54{,}9;\ 53;\ 54{,}6;\ 53{,}3;\ 68{,}9\ y\ 42{,}4.$

$a)$ Calcule un intervalo de confianza al 93 % para el gasto medio.

$b)$ Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo se reduzca a la mitad. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

Solución:

$i)$

$$\overline{x} = \frac{49{,}8+34{,}4+42{,}1+55{,}7+54{,}9+53+54{,}6+53{,}3+68{,}9+42{,}4}{10} = \frac{50{,}91}{10} = 50{,}91.$$

Para un nivel de confianza del 93 % es:

$$1-\alpha = 0{,}93\ \to\ \alpha = 1-0{,}93 = 0{,}07\ \to\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}035} = 1{,}81.$$

$$(1-0{,}035 = 0{,}9650\ \to z = 1{,}81).$$

Datos: $n = 10;\ \ \overline{x} = 50{,}91;\ \sigma = \sqrt{64} = 8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}81.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(50{,}91 - 1{,}81 \cdot \frac{8}{\sqrt{10}};\ 50{,}91 + 1{,}81 \cdot \frac{8}{\sqrt{10}}\right) =$$

$$= (50{,}91 - 1{,}81 \cdot 2{,}5298;\ 50{,}91 + 1{,}81 \cdot 2{,}5298) =$$

$$= (50{,}91 - 4{,}5790;\ 50{,}91 + 4{,}5790).$$

$$\underline{I.C._{93\ \%} = (46{,}33;\ 55{,}49)}.$$

$b)$

$$E = \frac{55{,}49-46{,}33}{2} = \frac{9{,}16}{2} = 4{,}58 \Rightarrow E' = \frac{E}{2} = \frac{4{,}58}{2} = 2{,}29.$$

Datos: $\sigma = 8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}81;\ \ E' = 2{,}29.$

Siendo $E' = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E'} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E'}\right)^2 = \left(1{,}81 \cdot \frac{8}{2{,}29}\right)^2 =$

$$= (1{,}81 \cdot 3{,}4934)^2 = 6{,}323^2 = 39{,}98.$$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 40\ clientes}.$$

****

Logo de la Comunidad	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Elija tres de los seis ejercicios propuestos.

Problema 1:

Un cajero automático contiene billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 800 billetes con un importe de 21.000 euros. El número de billetes de 10 euros es igual que el número de billetes de 20 euros y 50 euros juntos. Calcule cuántos billetes hay de cada tipo.

a) Plantee el sistema de ecuaciones lineales.

b) Resuelva el sistema por el método de Gauss.

Problema 2:

Se están considerando dos alimentos, A y B, que contiene tres nutrientes. Cada kg de A contiene 0,1 kg de grasas, 0,6 kg de hidratos de carbono y 0,3 kg de proteínas. Cada kg de B tiene 0,2 kg de grasas, 0,3 kg de hidratos de carbono y 0,5 kg de proteínas. El precio de un kg del alimento A es de 10 euros. El alimento B cuesta el triple que A. Se desea conseguir al menos 18 kg de hidratos de carbono, al menos 15 kg de proteínas y no más de 10 kg de grasas. Se desea, además, no comprar más de 75 kg de A. Determine cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para minimizar el coste total de la compra.

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si se deseara maximizar la cantidad de una vitamina, sabiendo que cada kg de A tiene 1,5 unidades y cada kg de B tiene 2 unidades de dicha vitamina.

Problema 3:

Sean las funciones $f(x) = -x^2 - 9x + 10$ y $g(x) = 2x^2 - x^3$.

a) Determine, para la función $g(x)$, los puntos de corte con los ejes, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

b) Determine el mínimo de la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

Problema 4:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \le 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & x > 2 \end{cases}$.

a) Estudie la continuidad de la función $f(x)$.

b) Represente gráficamente la función $f(x)$.

c) Calcule el área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[3, 4]$.

Problema 5:

En una pequeña localidad hay 25 candidatos para realizar una actividad de voluntariado, de los que el 60 % son estudiantes, el 32 % son jubilados y el resto trabajadores. Se seleccionan al azar tres candidatos distintos. Calcule:

$a)$ La probabilidad de que todos ellos sean jubilados.

$b)$ La probabilidad de que sean dos estudiantes y un trabajador.

$c)$ La probabilidad de que alguno de ellos sea trabajador.

Problema 6:

Un estudia concluye que el tiempo que tarda un fumador en dejar de fumar se ajusta a una distribución normal. Con una muestra de 144 exfumadores, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio (en meses) en dejar de fumar: $[9{,}58875; 10{,}41125]$.

$a)$ Calcule la varianza poblacional y calcule el tiempo medio en dejar de fumar para la muestra de 144 exfumadores.

$b)$ Construya un intervalo de confianza al 94 % para el tiempo medio en dejar de fumar.

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Un cajero automático contiene billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 800 billetes con un importe de 21.000 euros. El número de billetes de 10 euros es igual que el número de billetes de 20 euros y 50 euros juntos. Calcule cuántos billetes hay de cada tipo.

$a)$ Plantee el sistema de ecuaciones lineales.

$b)$ Resuelva el sistema por el método de Gauss.

Solución:

$a)$

Sean x, y, z el número de billetes de 10, 20 y 50 euros que contiene el cajero automático, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ 10x+20y+50z=21.000 \\ x=y+z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ x+2y+5z=2.100 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}.$$

$b)$

La matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 1 & 2 & 5 & 2.100 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 1 & 2 & 5 & 2.100 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 1.300 \\ 0 & -2 & -2 & -800 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 + 2F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 1.300 \\ 0 & 0 & 6 & 1.800 \end{pmatrix} \Rightarrow 6z = 1.800; \;\; z = 300.$$

$y + 4 \cdot 300 = 1.300; \;\; y + 1.200 = 1.300; \;\; y = 100.$

$x + 100 + 300 = 800; \;\; x + 400 = 800; \;\; x = 400.$

$\underline{El\ cajero\ tiene\ 400\ billetes\ de\ 10\ euros, 100\ de\ 50\ euros\ y\ 300\ de\ 50\ euros}.$

****

Problema 2:

Se están considerando dos alimentos, A y B, que contiene tres nutrientes. Cada kg de A contiene 0,1 kg de grasas, 0,6 kg de hidratos de carbono y 0,3 kg de proteínas. Cada kg de B tiene 0,2 kg de grasas, 0,3 kg de hidratos de carbono y 0,5 kg de proteínas. El precio de un kg del alimento A es de 10 euros. El alimento B cuesta el triple que A. Se desea conseguir al menos 18 kg de hidratos de carbono, al menos 15 kg de proteínas y no más de 10 kg de grasas. Se desea, además, no comprar más de 75 kg de A. Determine cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para minimizar el coste total de la compra.

$a)$ Plantee el problema.

$b)$ Resuélvalo gráficamente.

$c)$ Analice gráficamente qué ocurriría si se deseara maximizar la cantidad de una vitamina, sabiendo que cada kg de A tiene 1,5 unidades y cada kg de B tiene 2 unidades de dicha vitamina.

Solución:

$a)$

Sean x e y el número de kilogramos que se adquieren de los alimentos A y B, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 0{,}1x + 0{,}2y \le 10 \\ 0{,}6x + 0{,}3y \ge 18 \\ 0{,}3x + 0{,}5y \ge 15 \\ 0 \le x \le 75;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + 2y \le 100 \\ 2x + y \ge 60 \\ 3x + 5y \ge 150 \\ 0 \le x \le 75;\ y \ge 0 \end{array}\right\}.$

$b)$

$① \Rightarrow x + 2y \le 100 \Rightarrow y \le \frac{100-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	100
y	50	0

$② \Rightarrow 2x + y \ge 60 \Rightarrow y \ge 60 - 2x \Rightarrow O(0,0) \to No.$

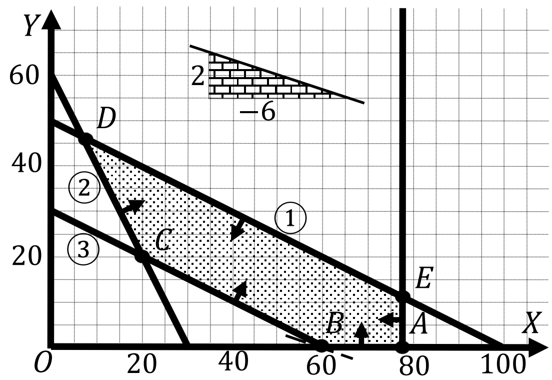
x	0	30
y	60	0

$③ \Rightarrow 3x + 5y \ge 150 \Rightarrow y \ge \frac{150-3x}{5} \Rightarrow O(0,0) \to No.$

x	0	50
y	30	0

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x = 75 \end{array}\right\} \Rightarrow A(75, 0).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x + 5y = 150 \end{array}\right\} \Rightarrow B(50, 0).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 60 \\ 3x + 5y = 150 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 10x + 5y = 300 \\ -3x - 5y = -150 \end{array}\right\} \Rightarrow 7x = 150;\ x = \frac{150}{7};$

$\frac{300}{7} + y = 60;\ \ 300 + 7y = 420;\ \ 7y = 120;\ \ y = \frac{120}{7} \Rightarrow C\left(\frac{150}{7}, \frac{120}{7}\right).$

$$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y=100 \\ 2x+y=60 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2x+4y=200 \\ -2x-y=-60 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3y=140;\ \ y=\frac{140}{3};$$

$$x+\frac{280}{3}=100;\ 3x+280=300;\ \ 3x=20;\ \ x=\frac{20}{3} \Rightarrow D\left(\frac{20}{3},\frac{140}{3}\right).$$

$$E \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=75 \\ x+2y=100 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 75+2y=100;\ \ 2y=25;\ \ y=\frac{25}{2} \Rightarrow E\left(75,\frac{25}{2}\right).$$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=10x+30y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(75,0)=10\cdot 75+30\cdot 0=750+0=750.$

$B \Rightarrow f(50,0)=10\cdot 50+30\cdot 0=500+0=500.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{150}{7},\frac{120}{7}\right)=10\cdot\frac{150}{7}+30\cdot\frac{120}{7}=\frac{1.500+3.600}{7}=\frac{5.100}{7}\cong 728{,}57.$

$D \Rightarrow f\left(\frac{20}{3},\frac{140}{3}\right)=10\cdot\frac{20}{3}+30\cdot\frac{140}{3}=\frac{200+4.200}{3}=\frac{4.400}{3}\cong 1.466{,}67.$

$E \Rightarrow f\left(75,\frac{25}{2}\right)=10\cdot 75+30\cdot\frac{25}{2}=750+375=1.125.$

El mínimo se produce en el punto $B(50,0)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y)=10x+30y=0 \Rightarrow y=-\frac{10}{30}x=-\frac{1}{3} \Rightarrow m=-\frac{2}{6}.$

$\underline{Mínimo\ coste\ comprando\ 50\ kg\ del\ alimento\ A}.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 500\ euros}.$

$c)$

La nueva función de objetivos es $g(x,y)=1{,}5x+2y$.

Los valores de la nueva función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(75,0)=1{,}5\cdot 75+2\cdot 0=112{,}5+0=112{,}5.$

$B \Rightarrow f(50,0)=1{,}5\cdot 50+2\cdot 0=75+0=75.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{150}{7},\frac{120}{7}\right)=1{,}5\cdot\frac{150}{7}+2\cdot\frac{120}{7}=\frac{225+240}{7}=\frac{465}{7}\cong 66{,}43.$

$D \Rightarrow f\left(\frac{20}{3},\frac{140}{3}\right)=1{,}5\cdot\frac{20}{3}+2\cdot\frac{140}{3}=\frac{30+280}{3}=\frac{310}{3}\cong 103{,}33.$

$E \Rightarrow f\left(75,\frac{25}{2}\right)=1{,}5\cdot 75+2\cdot\frac{25}{2}=112{,}5+25=137{,}5.$

El máximo se consigue en el punto $E\left(75,\frac{25}{2}\right)\approx E(75;12{,}5)$.

$\underline{Se\ maximiza\ la\ vitamina\ comprando\ 50\ kg\ de\ A\ y\ 12{,}5\ kg\ de\ B}.$

****

Problema 3:

Sean las funciones $f(x) = -x^2 - 9x + 10$ y $g(x) = 2x^2 - x^3$.

$a)$ Determine, para la función $g(x)$, los puntos de corte con los ejes, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

$b)$ Determine el mínimo de la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

Solución:

$a)$

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas de la función $g(x) = 2x^2 - x^3$ son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - x^3 = 0;\ \ x^2(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to \underline{O(0,0)} \\ x_2 = 2 \to \underline{A(2,0)} \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,0)}.$$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$g'(x) = 4x - 3x^2. \qquad g''(x) = 4 - 6x.$$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow 4 - 6x = 0;\ \ 2 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Teniendo en cuenta que el dominio de $g(x)$ es R, por ser polinómica, los periodos de concavidad y convexidad son los siguientes:

$$\underline{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon\left(-\infty, \frac{2}{3}\right).}$$

$$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon\left(\frac{2}{3}, +\infty\right).}$$

Una función polinómica tiene un punto de inflexión para los valores reales de la variable que hacen cero la segunda derivada, siendo distinta la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$g'''(x) = -6 \neq 0 \Rightarrow P.I. para\ x = \frac{2}{3}.$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{9} - \frac{8}{27} = \frac{24-8}{27} = \frac{16}{27} \Rightarrow$$

$$\underline{P.I. \to B\left(\frac{2}{3}, \frac{16}{27}\right).}$$

$b)$

$$h(x) = f(x) - g(x) = -x^2 - 9x + 10 - (2x^2 - x^3) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10.$$

$$h'(x) = 3x^2 - 6x - 9. \qquad h''(x) = 6x - 6.$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0;\ \ x^2 - 2x - 3 = 0;\ \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} =$$

$= \frac{2\pm4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3.$

$h''(-1) = 6 \cdot (-1) - 6 = -12 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$

$h''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 3.$

$h(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 10 = -27 + 10 = -17 \Rightarrow$

$\underline{Mín. \rightarrow P(3, -17)}.$

****

Problema 4:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & x > 2 \end{cases}$.

$a)$ Estudie la continuidad de la función $f(x)$.

$b)$ Represente gráficamente la función $f(x)$.

$c)$ Calcule el área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[3, 4]$.

Solución:

$a)$

La función $f(x)$, por ser polinómica, es continua en su dominio, que es R, excepto para $x = 2$ cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 2x) = 4 - 4 = 0 = f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(-x^2 + 6x - 8) = -4 + 12 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R.}$$

$b)$

En el intervalo $(-\infty, 2]$ la función es la parábola $g(x) = x^2 - 2x$, que es convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2, y cuyo vértice es el siguiente:

$g'(x) = 2x - 2 = 0;\ \ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$

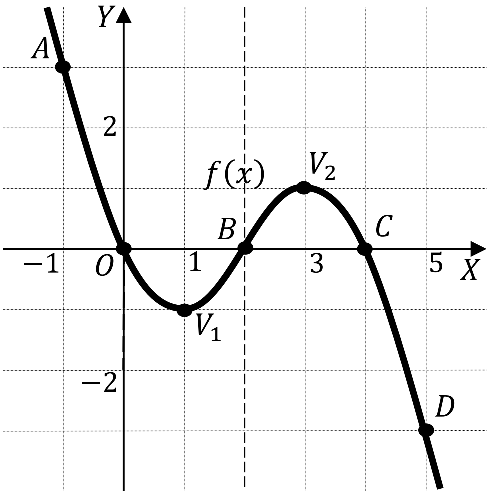
$g(1) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow V_1(1, -1).$

Otros puntos de la parábola son los siguientes: $O(0,0), A(-1,0)\ y\ B(2,0).$

En el intervalo $(2, +\infty)$ la función es la parábola $h(x) = -x^2 + 6x - 8$, que es cóncava (∩), por ser negativo el coeficiente de x^2, y cuyo vértice es el siguiente:

$h'(x) = -2x + 6 = 0;\ -x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$

$h(3) = -9 + 18 - 8 = 18 - 17 = 1 \Rightarrow V_2(3, 1).$

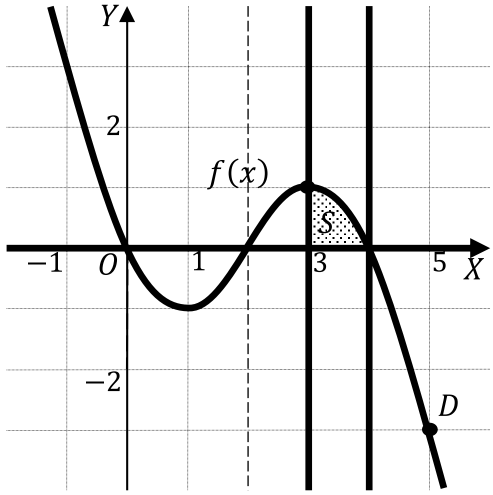


La representación gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & x > 2 \end{cases}$ es, aproximadamente, la que aparece en la figura anterior.

$c)$

En el intervalo $[3, 4]$ la expresión de la función es $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

De la observación de la figura adjunta se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_3^4 f(x)dx = \int_3^4 (-x^2 + 6x - 8)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 8x\right]_3^4 =$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{6 \cdot 4^2}{2} - 8 \cdot 4\right) - \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{6 \cdot 3^2}{2} - 8 \cdot 3\right) = -\frac{64}{3} + 48 - 32 + 9 - 27 + 24 =$$

$$= -\frac{64}{3} + 81 - 59 = 22 - \frac{64}{3} = \frac{66 - 64}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{2}{3}\, u^2 \cong 0{,}67\, u^2.}$$

****

Problema 5:

En una pequeña localidad hay 25 candidatos para realizar una actividad de voluntariado, de los que el 60 % son estudiantes, el 32 % son jubilados y el resto trabajadores. Se seleccionan al azar tres candidatos distintos. Calcule:

a) La probabilidad de que todos ellos sean jubilados.

b) La probabilidad de que sean dos estudiantes y un trabajador.

c) La probabilidad de que alguno de ellos sea trabajador.

Solución:

El número de candidatos estudiantes es: $n_1 = 0{,}6 \cdot 25 = 15.$

El número de candidatos jubilados es: $n_2 = 0{,}32 \cdot 25 = 8.$

El número de candidatos trabajadores es: $n_3 = 25 - n_1 - n_2 = 25 - 23 = 2.$

a)

$$P = \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} \cdot \frac{6}{23} = \frac{1}{25} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{6}{23} = \frac{1}{25} \cdot \frac{7}{1} \cdot \frac{2}{23} = \underline{\frac{14}{575} = 0{,}0243}.$$

$$P = \underline{\frac{14}{575} = 0{,}0243}.$$

b)

$$P = P(EET) + P(ETE) + P(TEE) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} \cdot \frac{2}{23} + \frac{15}{25} \cdot \frac{2}{24} \cdot \frac{14}{23} + \frac{2}{25} \cdot \frac{15}{24} \cdot \frac{14}{23} =$$

$$= 3 \cdot \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} \cdot \frac{2}{23} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{23} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{23} = \underline{\frac{21}{230} = 0{,}0913}.$$

$$P = \underline{\frac{21}{230} = 0{,}0913}.$$

c)

La probabilidad de que alguno de ellos sea trabajador es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que ninguno de ellos sea trabajador:

$$P = 1 - \frac{23}{25} \cdot \frac{22}{24} \cdot \frac{21}{23} = 1 - \frac{1}{25} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{21}{1} = 1 - \frac{1}{25} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{7}{1} = 1 - \frac{77}{100} = \frac{100-77}{100} =$$

$$= \underline{\frac{23}{100} = 0{,}23}.$$

$$P = \underline{\frac{23}{100} = 0{,}23}.$$

****

Problema 6:

Un estudia concluye que el tiempo que tarda un fumador en dejar de fumar se ajusta a una distribución normal. Con una muestra de 144 exfumadores, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio (en meses) en dejar de fumar: $[9{,}58875; 10{,}41125]$.

$a)$ Calcule la varianza poblacional y calcule el tiempo medio en dejar de fumar para la muestra de 144 exfumadores.

$b)$ Construya un intervalo de confianza al 94 % para el tiempo medio en dejar de fumar.

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

Solución:

$a)$

$\overline{x} = \frac{10{,}41125+9{,}58875}{2} = \frac{20{,}0000}{2} \Rightarrow \underline{\overline{x} = 10}.$

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha = 0{,}90 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}90 = 0{,}10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$

$(1-0{,}05 = 0{,}9500 \ \rightarrow z = 1{,}645).$

$E = \frac{10{,}41125-9{,}58875}{2} = \frac{0{,}82250}{2} = 0{,}41125.$

Datos: $n = 144;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645;\ \ E = 0{,}41125.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{z_{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{0{,}41125 \cdot \sqrt{144}}{1{,}645} = \frac{0{,}41125 \cdot 12}{1{,}645} = \frac{1{,}82371}{1{,}645} \Rightarrow$$

$$\underline{\sigma = 3}.$$

$b)$

Para un nivel de confianza del 94 % es:

$1-\alpha = 0{,}94 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}94 = 0{,}06 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}03} = 1{,}88.$

$(1-0{,}03 = 0{,}9700 \ \rightarrow z = 1{,}88).$

Datos: $n = 144;\ \ \overline{x} = 10;\ \ \sigma = 3;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}88.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$$\left(10 - 1{,}88 \cdot \frac{3}{\sqrt{144}};\ 10 + 1{,}88 \cdot \frac{3}{\sqrt{144}}\right);\ \ (10 - 1{,}88 \cdot 0{,}25;\ 10 + 1{,}88 \cdot 0{,}25);$$

$$(10 - 0{,}47;\ 10 + 0{,}47)\ \Rightarrow$$

$$\underline{I.C._{94\,\%} = (9{,}53;\ 10{,}47)}.$$

****

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Álvaro Garmendia Antolín

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Ese examen tiene ocho problemas. Debes responder a cuatro de ellos. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar el número necesario. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programables, resolución de ecuaciones, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

Problema 1:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Obtener los valores de los parámetros m y n para que la matriz A coincida con su traspuesta, y no tenga inversa.

$b)$ Para $m = 0$ y $n = 3$, obtener, si se puede, la matriz inversa.

$c)$ Para $m = 0$ y $n = 3$, resolver la ecuación matricial: $X \cdot A + 2 \cdot I_3 = A^2$.

Problema 2:

Una empresa produce dos tipos de camisas con perlas blancas, grises y rosas. Para hacer una camisa del tipo A hacen falta 20 perlas blancas, 20 grises y 30 rosas, mientras que para una camisa del tipo B se necesitan 10 perlas blancas, 20 grises y 60 rosas. La empresa dispone de un máximo de 900 perlas blancas y 1 400 grises, y decide utilizar al menos 1 800 perlas rosas. Se sabe que el beneficio que se obtiene por cada camisa del tipo A es de 60 euros, y por cada camisa del tipo B de 50 euros.

$a)$ Calcula cuántas unidades de cada tipo de camisa debe producir para obtener el máximo beneficio, así como el valor de dicho beneficio.

$b)$ ¿Es posible que la empresa fabrique 40 camisas del tipo A y 20 camisas del tipo B? Razona la respuesta.

Problema 3:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & si\ \ x < 1 \\ ax + \frac{2}{x} & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$:

$a)$ Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.

$b)$ En el caso $a = 1/2$, determina la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 2$.

$c)$ En el caso $a = 2$, realiza la representación gráfica de la función; para ello, calcula los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión cuando $x < 1$.

$d)$ Calcula $I = \int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) \cdot dx$.

Problema 4:

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 11$:

$a)$ Calcula el valor de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $P(2, 5)$.

$b)$ En el caso de $a = \frac{3}{8}$ y $b = \frac{-9}{2}$, estudia los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función.

$c)$ En el caso de $a = \frac{3}{8}$ y $b = \frac{-9}{2}$, representa y calcula el área de la región limitada por la función, el eje de abscisas OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

Problema 5:

Dos cajas, A y B, contienen bolas de colores con la siguiente composición: la caja A contiene 5 blancas, 3 negras y 2 rayadas y la B, 4 blancas y 6 negras. Por otro lado, tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y los otras dos con la letra B. Tiramos el dado, y sacamos una bola al azar de la caja que indica el dado:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea rayada?

$c)$ La bola extraída ha resultado ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la caja B?

Problema 6:

Sea A, B, C, D, E y F sucesos de un determinado experimento aleatorio.

$a)$ Sabemos que $P(A) = 0.5;\ P(A \cup B) = 0.7\ y\ P(A \cap B) = 0.4$. Halla la probabilidad de que ocurra B.

$b)$ Sabemos que $P(C) = 0.4;\ P(D) = 0.3\ y\ P(C \cup D) = 0.5$. Halla la probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D.

$c)$ Sabemos que $P(E) = 0.6;\ P(F) = 0.8.$ y que los sucesos E y F son independientes. Calcula la probabilidad de que no ocurran ninguno de los dos sucesos.

Problema 7:

En un test de empatía el 40 % de la población examinada obtuvo un resultado inferior a 4 puntos. Sabemos que el resultado del test sigue una distribución normal de media 4.8 puntos.

$a)$ Calcula la desviación típica de la distribución.

$b)$ Si la desviación típica es 3.14 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 35 % de la población?

$c)$ Si la desviación típica es 3.14 puntos, ¿qué porcentaje de la población tiene un resultado que se diferencia de la media en menos de 2 puntos?

Problema 8:

El gasto que realizan los jóvenes de una determinada ciudad durante un fin de semana es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 6 puntos.

$a)$ Se toma una muestra aleatoria simple, y se obtiene que el intervalo de confianza para la media es $(24.47,\ 26.43)$ con un nivel de confianza del 95 %. Calcula el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
$b)$ Se ha seleccionado otra muestra de tamaño 49 para estimar μ. Calcula el error máximo admisible cometido para dicha estimación con un nivel de confianza del 97 %.

RESPUESTAS

Problema 1:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Obtener los valores de los parámetros $m\ y\ n$ para que la matriz A coincida con su traspuesta, y no tenga inversa.

$b)$ Para $m = 0\ y\ n = 3$, obtener, si se puede, la matriz inversa.

$c)$ Para $m = 0\ y\ n = 3$, resolver la ecuación matricial: $X \cdot A + 2 \cdot I_3 = A^2$.

Solución:

$a)$ Para que una matriz cuadrada no tenga inversa es necesario que se anule su determinante. Lo calculamos:

$$|A| = 0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2n + m - 1 - n - 1 + 2m = 3m + n - 2 = 0 \rightarrow 3m + n = 2.$$

Calculamos la transpuesta de la matriz A e imponemos que coincida con la matriz:

$$A = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$ Obtenemos que m debe valer -1.

Sustituimos ese valor en la ecuación: $3m + n = 2$ y calculamos n:

$3 \cdot (-1) + n = 2$. Obtenemos que n debe valer 5.

$$\boldsymbol{m = -1;\ n = 5.}$$

$b)$ Para $m = 0\ y\ n = 3$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, y su determinante:

$$|A| = 6 - 1 - 3 - 1 = 1 \neq 0,$$

Por lo que sí tiene matriz inversa. Podemos calcularla por el método de Gauss o por la definición.

Usamos el Método de Gauss:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\{F_3 \rightarrow F_3 - F_1\} \qquad \left\{F_2 \rightarrow \tfrac{1}{3}F_2\right\}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{matrix} F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \end{matrix}\right\} \qquad \{F_3 \rightarrow 3 \cdot F_3\} \qquad \left\{\begin{matrix} F_1 \rightarrow F_1 - \frac{4}{3}F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 - \frac{1}{3}F_3 \end{matrix}\right\}$$

La matriz inversa es: $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

c) Resolvemos en primer lugar la ecuación matricial, despejando la matriz X, transponiendo términos y multiplicando por A^{-1}:

$$X \cdot A + 2 \cdot I_3 = A^2 \to \; X \cdot A = A^2 - 2 \cdot I_3 \to \; X \cdot A \cdot A^{-1} = (A^2 - 2 \cdot I_3) \cdot A^{-1} \to$$
$$X \cdot I = (A^2 - 2 \cdot I_3) \cdot A^{-1} \to$$
$$X = (A^2 - 2 \cdot I_3) \cdot A^{-1}$$

Para $m = 0 \; y \; n = 3$ sustituimos A y A^{-1} en $X = (A^2 - 2 \cdot I_3) \cdot A^{-1}$. Todas las matrices las tenemos ya calculadas:

$$X = (A^2 - 2 \cdot I_3) \cdot A^{-1} = (\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot I_3) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-9} & \mathbf{-7} & \mathbf{9} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}.$$

Problema 2:

Una empresa produce dos tipos de camisas con perlas blancas, grises y rosas. Para hacer una camisa del tipo A hacen falta 20 perlas blancas, 20 grises y 30 rosas, mientras que para una camisa del tipo B se necesitan 10 perlas blancas, 20 grises y 60 rosas. La empresa dispone de un máximo de 900 perlas blancas y 1 400 grises, y decide utilizar al menos 1 800 perlas rosas. Se sabe que el beneficio que se obtiene por cada camisa del tipo A es de 60 euros, y por cada camisa del tipo B de 50 euros.

a) Calcula cuántas unidades de cada tipo de camisa debe producir para obtener el máximo beneficio, así como el valor de dicho beneficio.

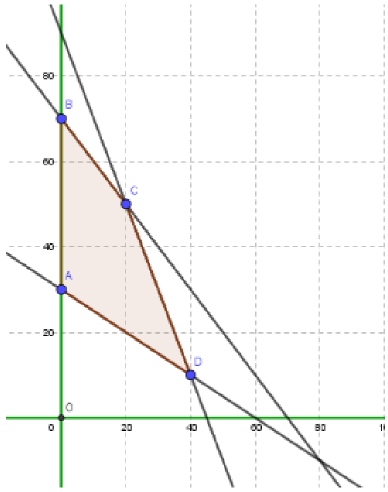
b) ¿Es posible que la empresa fabrique 40 camisas del tipo A y 20 camisas del tipo B? Razona la respuesta.

Solución:

a) Es un problema de programación lineal. Llamamos x al número de camisas del tipo A e y a las del tipo B que fabrica la empresa.

Siguiendo el enunciado las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 20x+10y \le 900 \\ 20x+20y \le 1\,400 \\ 30x+60y \ge 1\,800 \\ x \ge 0; y \ge 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y \le 90 \\ x+y \le 70 \\ x+2y \ge 60 \\ x \ge 0; y \ge 0 \end{array}\right\}$.

Buscamos los vértices.



Dibujamos las rectas y determinamos la región factible:

La zona factible es el polígono que aparece sombreado en la figura.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 60x + 50y$.

Los vértices de la región factible son los siguientes:

A: $\left.\begin{array}{r} x+2y=60=0 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 30 \Rightarrow A(0,30)$.

B: $\left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+y=70 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0,70)$.

C: $\left.\begin{array}{r} 2x+y=90 \\ x+y=70 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=90 \\ -x-y=-70 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 20; y = 50 \Rightarrow C(20,50)$.

D: $\left.\begin{array}{r} 2x+y=90 \\ x+2y=60 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x+2y=180 \\ -x-2y=-60 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 120;\ x = 40;\ 40 + 2y = 60 \Rightarrow D(40,10)$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,30) = 60 \cdot 0 + 50 \cdot 30 = 0 + 1\,500 = 1\,500$.
$B \Rightarrow f(0,70) = 60 \cdot 0 + 50 \cdot 70 = 0 + 3\,500 = 3\,500$.
$C \Rightarrow f(20,50) = 60 \cdot 20 + 50 \cdot 50 = 1\,200 + 2\,500 = 3\,700$.
$D \Rightarrow f(40,10) = 60 \cdot 40 + 50 \cdot 10 = 2\,400 + 500 = 2\,900$.

El máximo se produce en el punto $C(20,50)$.

Debe fabricar **20** camisas tipo ***A*** y **50** camisas tipo ***B***, con un beneficio de **3 700 euros**

b) El punto $P(40,20)$ no satisfacerse todas las restricciones del enunciado. Por ejemplo, debe ser:

$2x + y \le 90$ y sin embargo $2 \cdot 40 + 20 = 100 > 90$

Con las restricciones dadas no es posible fabricar 40 camisas del tipo A y 20 del tipo B.

Problema 3:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & si \;\; x < 1 \\ ax + \frac{2}{x} & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$:

$a)$ Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.

$b)$ En el caso $a = 1/2$, determina la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 2$.

$c)$ En el caso $a = 2$, realiza la representación gráfica de la función; para ello, calcula los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión cuando $x < 1$.

$d)$ Calcula $I = \int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) \cdot dx$.

Solución:

$a)$ La función dada es una función definida a trozos, formada por una función polinómica, continua en toda la recta real y una función suma de una polinómica y de una de proporcionalidad inversa, que no sería continua en $x = 0$, pero definida para $x \geq 1$, por lo que ese valor no pertenece a su dominio.

Por tanto, el único punto de continuidad dudosa es en el de unión de ambas ramas, es decir en $x = 1$. Para imponer que la función sea continua en ese punto debemos saber que:

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^3 + 3x^2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(ax + \dfrac{2}{x}\right) = a + 2 = f(1) \end{cases} \to \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \to$$

$4 = a + 2 \to a = 2$.

La función es continua en toda la recta real si $\boldsymbol{a = 2}$

$b)$ El valor $x = 2 \geq 1$, luego está en la segunda rama. Y si $a = 1/2$ la función resulta $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

Debemos calcular el punto de tangencia y la derivada primera en ese punto:

Para $x = 2$ es $f(2) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2$, por lo cual el punto de tangencia es $P(2, 2)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} \to m = f'(2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \to m = 0$.

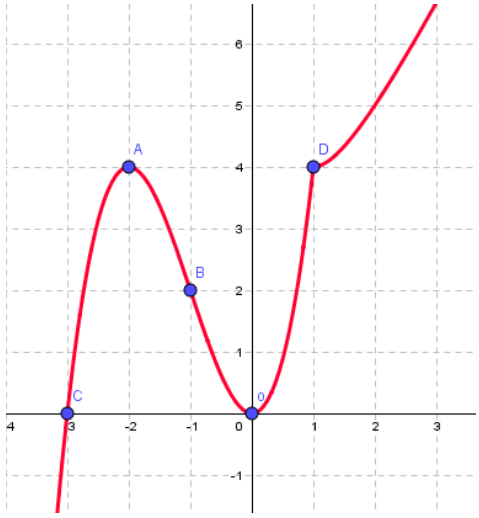
Al ser la pendiente 0, la recta tangente va a ser una recta horizontal $y = 2$.

Pero vamos a calcularla paso a paso: La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(2, 2)$ con $m = 0$ es:

$$y - 2 = 0 \cdot (x - 2) = 0$$

La recta tangente es $\boldsymbol{y = 2}$

$c)$ Para $a = 2$ la función resulta ser $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & si \;\; x < 1 \\ 2x + \frac{2}{x} & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$. Como ya hemos visto en el apartado a) en este caso la función es continua, luego los máximos y mínimos serán donde se anule la derivada primera:



$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x & si \;\; x < 1 \\ 2 - \dfrac{2}{x^2} & si \;\; x > 1 \end{cases} \rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x + 6 & si \;\; x < 1 \\ \dfrac{4}{x^3} & si \;\; x > 1 \end{cases}$$

Para $x = 1$ puede no existir la derivada.

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x \;= 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0 \; ambos \; x < 1 \\ 2 - \dfrac{2}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; x_3 = -1, x_3 = 1, ninguno \; x > 1 \end{cases}$$

$$f(0) = 3(0)^2 + 6(0) = 0$$

$f''(0) = 6(0) + 6 = 6 > 0$, luego O(0, 0) es un mínimo relativo.

$$f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 = -8 + 12 = 4$$

$f''(-2) = 6(-2) + 6 = -12 + 6 = -6 < 0$, luego $A(-2, 4)$ es un máximo relativo.

La derivada segunda sólo se anula en $x = -1 < 1$.

$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 = 2$, luego $B(-1, 2)$ es un punto de inflexión

Mínimo relativo: $O(\mathbf{0}, \mathbf{0})$; Máximo relativo: $A(-\mathbf{2}, \mathbf{4})$; Punto de inflexión: $B(-\mathbf{1}, \mathbf{2})$

Otros puntos de la curva son: $C(-3, 0)$ punto de corte con el eje de abscisas; $D(1, 4)$ punto de unión de ambas ramas, donde la función es continua pero no es derivable.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que se indica en la figura adjunta.

$d)$ La integral pedida está formada por cuatro integrales inmediatas:

$$I = \int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} \right) \cdot dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + 2lnx - 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^4}{4} + x^3 + Lx^2 + \frac{4}{x} + C$$

$$I = \int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} \right) \cdot dx = \boldsymbol{\frac{x^4}{4} + x^3 + Lx^2 + \frac{4}{x} + C}$$

Problema 4:

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 11$:

$a)$ Calcula el valor de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $P(2,5)$.

$b)$ En el caso de $a = \frac{3}{8}$ y $b = \frac{-9}{2}$, estudia los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función.

$c)$ En el caso de $a = \frac{3}{8}$ y $b = \frac{-9}{2}$, representa y calcula el área de la región limitada por la función, el eje de abscisas OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

Solución:

$a)$ Imponemos en primer lugar que la función pase por el punto $P(2,5) \Rightarrow f(2) = 5$:

$$f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + 11 = 5 \to \ 8a + 2b = -6 \to \ 4a + b = -3.$$

Como la función dada es una función polinómica es continua en toda la recta real, luego para que tenga un extremo relativo debe anularse la derivada en ese punto: $P(2,5) \Rightarrow f'(2) = 0$

$$f'(x) = 3ax^2 + b \to f'(2) = 3a \cdot 2^2 + b = 0 = 12a + b = 0.$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones:

$\left.\begin{matrix} 4a + b = -3 \\ 12a + b = 0 \end{matrix}\right\}$ Restamos a la segunda la primera: $8a = 3 \to a = \frac{3}{8}$

$\to 4 \cdot \frac{3}{8} + b = -3 \to \ \frac{3}{2} + b = -3 \to 3 + 2b = -6 \to \ 2b = -9 \to . \ b = -\frac{9}{2}$

$$\boldsymbol{a = \frac{3}{8};\ b = -\frac{9}{2}}$$

$b)$ Para $a = \frac{3}{8}$ y $b = -\frac{9}{2}$ ya hemos visto que el punto $P(2,5)$ es un extremo relativo.

La función es $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11$.

Como la función es polinómica y por tanto continua en toda la recta real, para que tenga un extremo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el extremo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto pues entonces el punto sería un punto de inflexión de tangente horizontal.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{2}$ $\qquad f'(x) = 0 = \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{2} \to \ x^2 - 4 = 0 \to \ x^2 = 4 \to x_1 = -2, x_2 = 2.$

$$f(-2) = \frac{3}{8} \cdot (-2)^3 - \frac{9}{2} \cdot (-2) + 11 = -3 + 20 = 17$$

$f(2) = \frac{3}{8} \cdot 2^3 - \frac{9}{2} \cdot 2 + 11 = 3 - 9 + 11 = 5$

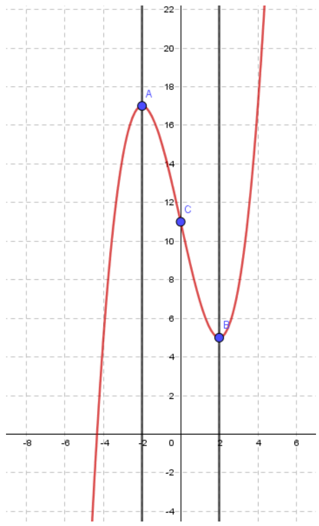
$$f''(x) = \frac{9}{4}x \rightarrow f''(-2) = \frac{9}{4}\cdot(-2) = -\frac{9}{2} < 0 \;\Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2$$
$$\Rightarrow Máx.: A(-2, 17)$$

$$f''(2) = \tfrac{9}{4}\cdot 2 = \tfrac{9}{2} > 0 \;\Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2 \Rightarrow Mín.: B(2, 5).$$

Punto de inflexión: $f''(x) = \frac{9}{4}x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = 11 \Rightarrow P.I.: C(0, 11)$

Máximo relativo: $\boldsymbol{A(-2, 17)}$; Mínimo relativo: $\boldsymbol{B(2, 5)}$; Punto de inflexión: $\boldsymbol{C(0, 11)}$

c) Hacemos una representación gráfica aproximada de la función $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11$.



El área pedida es: $S = \int_{-2}^{2} f(x)\cdot dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11\right)\cdot dx =$

Son tres integrales inmediatas de tipo potencial:

$$= \left[-\frac{3x^4}{32} - \frac{9x^2}{4} + 11x\right]_{-2}^{2} =$$

Sustituimos los límites de integración:

$\left(-\frac{3\cdot 2^4}{32} - \frac{9\cdot 2^2}{4} + 11\cdot 2\right) - \left[-\frac{3\cdot(-2)^4}{32} - \frac{9\cdot(-2)^2}{4} + 11\cdot(-2)\right] =$

$= (-3 - 9 + 22) - (-3 - 9 - 22) = 10 + 34 = 44.$

$$S = \int_{-2}^{2} f(x)\cdot dx = \boldsymbol{44\ u^2}$$

Problema 5:

Dos cajas, A y B, contienen bolas de colores con la siguiente composición: la caja A contiene 5 blancas, 3 negras y 2 rayadas y la B, 4 blancas y 6 negras. Por otro lado, tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y los otras dos con la letra B. Tiramos el dado, y sacamos una bola al azar de la caja que indica el dado:

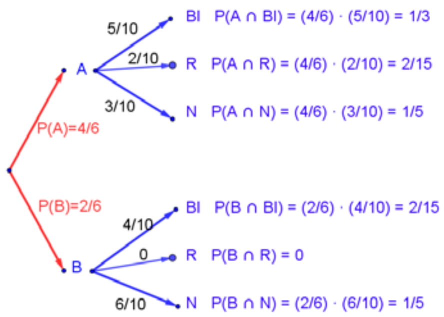
a) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea rayada?

c) La bola extraída ha resultado ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la caja B?

Solución:

Representamos la situación en un diagrama en árbol. Llamamos A al suceso sacar la bola de la caja A y B al suceso sacarla de la caja B. Llamamos Bl al suceso que la bola sea blanca, R si es rayada y N si lo es negra. La probabilidad de sacar la bola de la caja A es 4/6 ya que el dado tiene cuatro caras marcadas con esa letra, y la de B, 2/6.



a) Para obtener la probabilidad de que la bola sea blanca debemos sumar las dos ramas que terminan en Bl.

$$P = P(Bl) = P(A \cap Bl) + P(B \cap Bl) = P(A) \cdot P(Bl/A) + P(B) \cdot P(Bl/B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{5+2}{15} = \frac{7}{15} = 0.4667.$$

La probabilidad de que la bola sea blanca es de $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{15}} = \mathbf{0.4667}$.

b) Ahora sumaremos también las dos ramas, donde una de ellas es cero.

$$P = P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) = P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B) == \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{2}{15} + 0 = \frac{2}{15} = 0.1333.$$

La probabilidad de que la bola sea rayada es de $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{15}} = \mathbf{0.1333}$.

c) Debemos calcular una probabilidad condicionada.

Sabemos que $P(B \cap Bl) = P(Bl \cap B) = P(Bl) \cdot P(B/Bl) = P(B) \cdot P(Bl/B)$, por lo que:

$$P(B/Bl) = \frac{P(B \cap Bl)}{P(Bl)} = \frac{P(B) \cdot P(Bl/B)}{P(Bl)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{7} = 0.2857.$$

La bola extraída ha resultado ser blanca. La probabilidad de que proceda de la caja B es $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}} = \mathbf{0.2857}$

Problema 6:

Sea A, B, C, D, E y F sucesos de un determinado experimento aleatorio.

$a)$ Sabemos que $P(A) = 0.5;\ P(A \cup B) = 0.7\ y\ P(A \cap B) = 0.4$. Halla la probabilidad de que ocurra B.

$b)$ Sabemos que $P(C) = 0.4;\ P(D) = 0.3\ y\ P(C \cup D) = 0.5$. Halla la probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D.

$c)$ Sabemos que $P(E) = 0.6;\ P(F) = 0.8$. y que los sucesos E y F son independientes. Calcula la probabilidad de que no ocurran ninguno de los dos sucesos.

Solución:

$a)$ Nos dicen que: $P(A) = 0.5;\ P(A \cup B) = 0.7\ y\ P(A \cap B) = 0.4$. Sabemos que:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Por lo que:

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0.7 - 0.5 + 0.4 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(B) = 0.6}$$

$b)$ Nos dicen que: $P(C) = 0.4;\ P(D) = 0.3\ y\ P(C \cup D) = 0.5$. La probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D es $P\left(C/\overline{D}\right)$ probabilidad condicionada que vale:

$$P\left(C/\overline{D}\right) = \frac{P\left(C \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{P(C) - P(C \cap D)}{1 - P(D)}.$$

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \Rightarrow P(C \cap D) = P(C) + P(D) + P(C \cup D) = 0.4 + 0.3 - 0.5 = 0.2.$$

Sustituyendo los valores dados y obtenido:

$$P\left(C/\overline{D}\right) = \frac{0.4 - 0.2}{1 - 0.3} = \frac{0.2}{0.7} = 0.2857.$$

$$\boldsymbol{P\left(C/\overline{D}\right) = 0.2857.}$$

$c)$ Nos dicen que: $P(E) = 0.6;\ P(F) = 0.8$. y que los sucesos E y F son independientes, es decir: $P(E) \cdot P(F) = P(E \cap F)$.

Nos piden la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos, es decir: $P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right)$

Por las Leyes de Morgan sabemos:

$$P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right) = 1 - P(E \cup F) = 1 - [P(E) + P(F) - P(E \cap F)] = 1 - (0.6 + 0.8 - 0.48) =$$

$$1 - 0.92 = 0.08.$$

$$\boldsymbol{P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right) = 0.08}$$

Problema 7:

En un test de empatía el 40 % de la población examinada obtuvo un resultado inferior a 4 puntos. Sabemos que el resultado del test sigue una distribución normal de media 4.8 puntos.

a) Calcula la desviación típica de la distribución.

b) Si la desviación típica es 3.14 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 35 % de la población?

c) Si la desviación típica es 3.14 puntos, ¿qué porcentaje de la población tiene un resultado que se diferencia de la media en menos de 2 puntos?

Solución:

a) Nos dice el enunciado que:$P(X<4)=0.4;\ \ \mu=4.8.$

Tipificamos la variable: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ $\quad P(X<4)=0.4 \Rightarrow P\left(Z<\frac{4-4.8}{\sigma}\right)=P\left(Z<\frac{-0.8}{\sigma}\right)=0.4;$

$P\left(Z\geq\frac{0.8}{\sigma}\right)=0.4=1-P\left(Z<\frac{0.8}{\sigma}\right);\ \ P\left(Z<\frac{0.8}{\sigma}\right)=0.6.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ al valor 0.6 le corresponde un valor entre 0.25 y 0.26. Por proporcionalidad estimamos dicho valor:

$$\left.\begin{matrix}0.5984---0.25\\0.6026---0.26\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}42---0.01\\16----x\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=\frac{0.16}{42}=0.004\rightarrow\frac{0.8}{\sigma}=0.254;\ \ \sigma=\frac{0.8}{0.254}=3.15.$$

La desviación típica de la distribución vale $\mathbf{3.15}$.

b) Siendo β la puntuación que supera el 35 % de la población, se tienen los siguientes datos:

$P(X<\beta)=1-0.35=0.65;\ \ \mu=4.8;\ \ \sigma=3.14.$ Tipificando la variable: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{\beta-4.8}{3.14}$.

$$P(X<\beta)=0.65=\ P\left(Z<\frac{\beta-4.8}{3.14}\right)$$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de manera inversa, al valor 0.65 le corresponde a un valor entre 0.38 y 0.39. Mediante una proporción lo calculamos:

$$\left.\begin{matrix}0.6480\rightarrow0.38\\0.6517\rightarrow0.39\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}37-0.01\\20-x\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=\frac{0.20}{37}=0.005\Rightarrow\frac{\beta-4.8}{3.14}=0.385\Rightarrow$$
$$\beta-4.8=0.385\cdot3.14=1.209\Rightarrow\beta\cong6.$$

La puntuación de **6** es superada únicamente por el 35 % de la población.

c) El enunciado nos dice:$\mu=4.8;\ \ \sigma=3.14.$ Tipificando la variable: $Z=\frac{X-4.8}{3.14}$. Y nos piden

$P(4.8-2\leq X\leq4.8+2)=P(2.8\leq X\leq6.8)=P\left(\frac{2.8-4.8}{3.14}\leq Z\leq\frac{6.8-4.8}{3.14}\right)=P\left(\frac{-2}{3.14}\leq Z\leq\frac{2}{3.14}\right)=$

$$=P(-0.64\leq Z\leq0.64)=P(Z<0.64)-[1-P(Z<0.64)]=P(Z<0.64)-1+P(Z<0.64)$$
$$=2\cdot P(Z<0.64)-1=2\cdot0.7389-1==1.4778-1=0.4778.$$

El porcentaje de la población tiene un resultado que se diferencia de la media en menos de 2 puntos es del $\mathbf{47.78}$ %.

Problema 8:

El gasto que realizan los jóvenes de una determinada ciudad durante un fin de semana es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 6 puntos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple, y se obtiene que el intervalo de confianza para la media es $(24.47,\ 26.43)$ con un nivel de confianza del 95 %. Calcula el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se ha seleccionado otra muestra de tamaño 49 para estimar μ. Calcula el error máximo admisible cometido para dicha estimación con un nivel de confianza del 97 %.

Solución:

a) La media es desconocida y $\sigma = 6$. El intervalo de confianza para la media es $(24.47,\ 26.43)$, por lo que: $E = \frac{26.43-24.47}{2} = \frac{1.96}{2} = 0.98$. Estimamos la media muestral como el punto medio del intervalo: $\overline{x} = \frac{24.47+26.43}{2} = \frac{50.9}{2} \Rightarrow \overline{x} = 25.45$.

Nos dicen que el nivel de confianza es del 95 %:

$1-\alpha = 0.95;\ \alpha = 1-0.95 = 0.05;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.\ (1-0.025 = 0.9750; z = 1.96).$

Por lo tanto: $\sigma = 6;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96;\ \ E = 0.98.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow\ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{6}{0.98}\right)^2 = 12^2 = 144.$

El tamaño mínimo de la muestra elegida es de $\mathbf{144}$ jóvenes. La media muestral es: $\boldsymbol{\overline{x} = 25.45}$

b) Los datos son ahora diferentes: El nivel de confianza es del 97 %.

$1-\alpha = 0.97\ \rightarrow\ \alpha = 1-0.97 = 0.03\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.015} = 2.17.\ (1-0.015 = 0.9850\ \rightarrow z = 2.17).$

Y nos dicen que: $n = 49;\ \ \sigma = 6;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17.$

El error máximo admisible valdrá:

$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{6}{\sqrt{49}} = 2.17 \cdot \frac{6}{7} \Rightarrow E = 1.86.$

El error máximo admisible es de $\mathbf{1.86}$

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Ese examen tiene ocho problemas. Debes responder a cuatro de ellos. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar el número necesario. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programables, resolución de ecuaciones, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

Problema 1:

Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = 5x + 4y$ en el recinto definido por las siguientes restricciones: $\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + y \geq 5 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$.

$a)$ Representa el recinto mencionado.

$b)$ Obtén los puntos en que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de ésta en dichos puntos.

Problema 2:

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$? Razona la respuesta.

$b)$ Resolver la ecuación matricial: $X \cdot A = 2B^t + I_2$.

Problema 3:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x + 2 & si \ -2 \leq x < 0 \\ -x + 2 & si \ \ 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x + 4 & si \ \ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$:

$a)$ Analiza la continuidad de la función en el intervalo $[-2, 4]$.

$b)$ Realiza la representación gráfica de la función.

$c)$ Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX.

Problema 4:

El coste de producción de una empresa, $f(x)$, medido en miles de euros, depende de la cantidad de producto fabricada, x, medida en toneladas.

$$f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$$

La capacidad de producción máxima es de 2 toneladas.

$a)$ Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función coste de producción de la empresa.

$b)$ Determina la cantidad que la empresa debe producir para minimizar el coste de producción. ¿Cuál sería dicho coste mínimo?

$c)$ ¿Con qué cantidad alcanza la empresa su máximo coste de producción? Determinar dicho coste máximo.

Problema 5:

En una biblioteca hay 60 novelas de acción y 20 de terror. Janire elige una novela al azar y se la lleva. A continuación, Eneko elegirá otra novela al azar.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que Janire y Eneko elijan novelas de acción?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Eneko sea de acción?

$c)$ Si la novela que ha elegido Eneko es de acción, ¿cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Janire haya sido de terror?

Problema 6:

Lucía tiene dos dioptrías en un ojo y una dioptría en el otro, y Nerea dos dioptrías en cada ojo. Cada chica tiene una bolsa con 10 lentillas de una dioptría y otras 10 lentillas de dos dioptrías. Cada una sacará al azar dos lentillas de su bolsa.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad que tiene cada chica de elegir las lentillas que necesita?

$b)$ En la bolsa de Lucía hay dos lentillas defectuosas. Con el fin de separarlas del resto, sacará una tras otra hasta que las encuentre. ¿Cuál es la probabilidad de que consiga encontrar las dos defectuosas en el tercer intento?

Problema 7:

Según un estudio de la Dirección General de Tráfico el número de horas de prácticas necesarias para la obtención del carnet de conducir sigue una distribución normal $N(24, 9)$.

$a)$ Calcula la probabilidad de obtener el permiso de conducir con menos de 20 horas de prácticas.

$b)$ ¿Cuántas horas ha necesitado Andrea para conseguir el carnet de conducir, si se sabe que el 89 % de los conductores y conductoras ha necesitado más horas que ella?

Problema 8:

Para conocer el gasto medio anual que las familias de una determinada población realizan en servicios de hostelería, se ha tomado una muestra aleatoria de familias a partir de la cual se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media es $(820, 830)$ con un nivel de confianza del 95 %. Se sabe que el gasto anual tiene una distribución normal con desviación típica 80 euros.

$a)$ Calcula la media obtenida a partir de la muestra.

$b)$ Calcula el número de familias que han formado parte de la muestra.

RESPUESTAS

Problema 1:

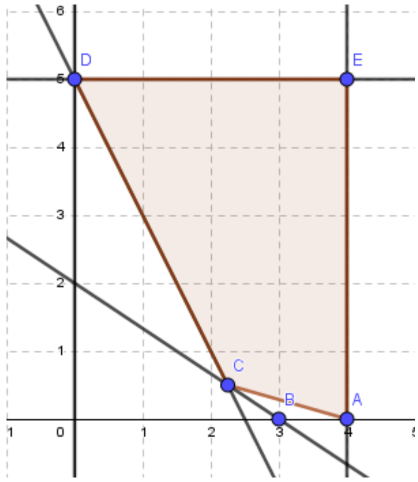
Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = 5x + 4y$ en el recinto definido por las siguientes restricciones: $\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + y \geq 5 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$.

$a)$ Representa el recinto mencionado.

$b)$ Obtén los puntos en que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de ésta en dichos puntos.

Solución:

$a)$ Es un problema de programación lineal. Para representar la región factible buscamos los puntos de intersección de las rectas que lo limitan y para delimitarlo comprobamos que el origen $O(0,0)$ no verifica las restricciones.



La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A: \left.\begin{matrix} y = 0 \\ x = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(4,0)$.

$B: \left.\begin{matrix} y = 0 \\ 2x + 3y = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow B(3,0)$.

$D: \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D(0,5)$.

$E: \left.\begin{matrix} y = 5 \\ x = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow E(4,5)$.

$C: \left.\begin{matrix} 2x + 3y = 6 \\ 2x + y = 5 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} 2x + 3y = 6 \\ -2x - y = -5 \end{matrix}\right\} \to 2y = 1 \to y = \frac{1}{2} \to 2x + \frac{1}{2} = 5 \to 4x + 1 = 10 \to 4x = 9 \to x = \frac{9}{4} \Rightarrow C\left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

$b)$ La función objetivo es $f(x,y) = 5x + 4y$.

Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible son

$A: f(4,0) = 5 \cdot 4 + 4 \cdot 0 = 20 + 0 = 20$.

$B: f(3,0) = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 0 = 15 + 0 = 15$.

$C: f\left(\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \frac{9}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{45}{4} + 2 = \frac{53}{4} = 13.25$.

$D: f(0,5) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 5 = 0 + 20 = 20$.

$E: f(4,5) = 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 20 + 20 = 40$.

El máximo, 40, se produce en el punto $E(\mathbf{4}, \mathbf{5})$ y el mínimo, 13.25, en el punto $C\left(\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$.

Autor: Álvaro Garmendia Antolín

Problema 2:

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$? Razona la respuesta.

$b)$ Resolver la ecuación matricial: $X \cdot A = 2B^t + I_2$.

Solución:

$a)$ Para comprobarlo hacemos las operaciones indicadas:

$$(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$$

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$.

$2A \cdot B = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$.

$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 + 2A \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}.$$

En general, se verifica que $(A+B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$, y como el producto de matrices no tiene la propiedad conmutativa, no siempre se verifica, pero en este caso, sí:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$$

$b)$ Despejamos la matriz X multiplicando por la matriz inversa de A, y hacemos operaciones.

$$X \cdot A = 2B^t + I_2 \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (2B^t + I_2) \cdot A^{-1} \rightarrow X \cdot I_2 = (2B^t + I_2) \cdot A^{-1} \rightarrow$$

$$X = (2B^t + I_2) \cdot A^{-1}.$$

Damos valores a las matrices y efectuamos las operaciones

$2B^t + I_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculamos la matriz inversa por dos procedimientos:

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 7$; $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$; $Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{7}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por Gauss:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -7 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2/7 \\ 0 & 1 & 0 & -1/7 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2/7 \\ 0 & -1/7 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \rightarrow 7F_1 + 2F_2 \qquad F_1 \rightarrow \left(\frac{-1}{7}\right) F_1;\ F_2 \rightarrow \left(\frac{-1}{7}\right) F_2$$

$$X = (2B^t + I_2) \cdot A^{-1} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 35 & 10 \\ 14 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 35 & 10 \\ 14 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 3:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x+2 \ \ si \ -2 \leq x < 0 \\ -x+2 \ \ si \ \ 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x + 4 \ \ si \ \ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$:

$a)$ Analiza la continuidad de la función en el intervalo $[-2, 4]$.

$b)$ Realiza la representación gráfica de la función.

$c)$ Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX.

Solución:

$a)$ Es una función a trozos formada por tres funciones polinómicas continuas en toda la recta real. Puede perder la continuidad únicamente en los puntos de unión de los trozos, $x = 0 \ y \ x = 2$. Los estudiamos:

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

Estudio en $x = 0 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+2) = 2 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(-x+2) = 2 = f(0) \end{cases} \rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \rightarrow.$

$$f(x) \ es \ continua \ para \ x = 0$$

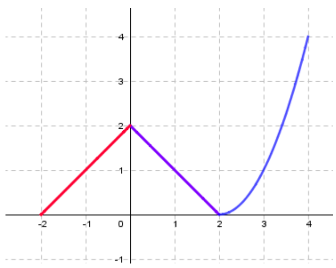
Estudio en $x = 2 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(-x+2) = 0 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(x-2)^2 = 0 = f(2) \end{cases} \rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \rightarrow$

$$f(x) \ es \ continua \ para \ x = 2$$

La función es continua en todo el intervalo $[-2, 4]$

$b)$ La función está formada por dos segmentos de rectas y uno de parábola.

En el intervalo $[-2, 0)$ la función es el segmento de extremos los puntos $A(-2, 0) \ y \ B(0, 2)$. En el intervalo $[0, 2)$ la función es el segmento de extremos los puntos $B(0, 2) \ y \ C(2, 0)$. En el intervalo $[2, 4]$ la función es la parábola $y = x^2 - 4x + 4$, que es convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2; son puntos de la parábola $C(2, 0), D(3, 1) \ y \ E(4, 4)$.



$c)$ De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, está formada por dos regiones, un triángulo de área 4, calculándola como base por altura divido por 2, y la limitada por la parábola:

$$\int_2^4 (x^2 - 4x + 4) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_2^4 =$$

$$\left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2\right) = \frac{64}{3} - 32 + 16 - \frac{8}{3} + 8 - 8 = \frac{56}{3} - 12$$

Sumamos 4.

$$S = \frac{20}{3} \ u^2 \cong 6.67 \ u^2$$

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 4:

El coste de producción de una empresa, $f(x)$, medido en miles de euros, depende de la cantidad de producto fabricada, x, medida en toneladas.

$$f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$$

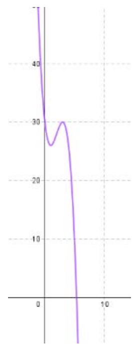
La capacidad de producción máxima es de 2 toneladas.

$a)$ Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función coste de producción de la empresa.

$b)$ Determina la cantidad que la empresa debe producir para minimizar el coste de producción. ¿Cuál sería dicho coste mínimo?

$c)$ ¿Con qué cantidad alcanza la empresa su máximo coste de producción? Determinar dicho coste máximo.

Solución:



$a)$ La función es una cúbica. Por el enunciado, sólo tiene sentido para valores positivos, $x \geq 0$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = -9 + 12x - 3x^2 \quad f'(x) = 0 \Rightarrow -9 + 12x - 3x^2 = 0;\; x^2 - 4x + 3 = 0;\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$

$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow x = 1, x = 3.$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función en los intervalos $(0, 1)\ y\ (1, 3)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

$x \in (0, 1) \to$ La función es decreciente; $x \in (1, 3) \to$ La función es creciente; $x > 3$, la función es decreciente

Parece que el enunciado dice que la variable x es menor que 2, pues la capacidad de producción máxima es de 2 toneladas, y el dominio de la función es $D(f) \Rightarrow [0, 2]$, por lo que:

$x \in (0, 1)$: La función es decreciente; $x \in (1, 2]$: La función es creciente

$b)$ El mínimo se alcanza para $x = 1$: $f(1) = 30 - 9 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 - 1^3 = 30 - 9 + 6 - 1 = 26.$

El coste mínimo de producción es de 26 000 euros y se obtiene para una producción de 1 tonelada

$c)$ El máximo de la cúbica se alcanza para $x = 3$ que está fuera del dominio $[0, 2]$, por lo que el máximo deberá alcanzarse en los extremos del dominio:

$f(0) = 30.$

$f(2) = 30 - 9 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 - 2^3 = 30 - 18 + 24 - 8 = 28.$

El coste máximo de producción es de 30 000 euros y se obtiene para una producción de 0 toneladas

Problema 5:

En una biblioteca hay 60 novelas de acción y 20 de terror. Janire elige una novela al azar y se la lleva. A continuación, Eneko elegirá otra novela al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Janire y Eneko elijan novelas de acción?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Eneko sea de acción?

c) Si la novela que ha elegido Eneko es de acción, ¿cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Janire haya sido de terror?

Solución:

a) Llamamos A al suceso. elegir una novela de acción, y T a elegir una novela de terror

$$P = P(A, A) = \frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} = \frac{3 \cdot 59}{4 \cdot 79} = \frac{177}{316} = 0.5601.$$

La probabilidad de que Janire y Eneko elijan novelas de acción es de $\mathbf{0.5601}$

b) Ahora Janire puede elegirla de acción o de terror:

$$P = P(A, A) + P(T, A) = \frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} + \frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79} = \frac{3 \cdot 59}{4 \cdot 79} + \frac{1 \cdot 60}{4 \cdot 79} = \frac{237}{316} = 0.75.$$

La probabilidad de que la novela elegida por Eneko sea de acción es de $\mathbf{0.75}$

c) Nos piden ahora una probabilidad condicionada:

$$P = P(T/A) = \frac{P(T,\ A)}{P(A,A)+P(T,A)} = \frac{\frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79}}{\frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} + \frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79}} = \frac{20 \cdot 60}{60 \cdot 59 + 20 \cdot 60} = \frac{20}{79} = 0.2532.$$

Si la novela que ha elegido Eneko es de acción, la probabilidad de que la novela elegida por Janire haya sido de terror es de $\mathbf{0.2532}$

Problema 6:

Lucía tiene dos dioptrías en un ojo y una dioptría en el otro, y Nerea dos dioptrías en cada ojo. Cada chica tiene una bolsa con 10 lentillas de una dioptría y otras 10 lentillas de dos dioptrías. Cada una sacará al azar dos lentillas de su bolsa.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad que tiene cada chica de elegir las lentillas que necesita?

$b)$ En la bolsa de Lucía hay dos lentillas defectuosas. Con el fin de separarlas del resto, sacará una tras otra hasta que las encuentre. ¿Cuál es la probabilidad de que consiga encontrar las dos defectuosas en el tercer intento?

Solución:

$a)$ Llamamos 1 al suceso sacar una lentilla de una dioptría, y 2 a sacar una de dos dioptrías

$Lucía: P = P(1,2) + P(2,1) = \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} + \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} = 2 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{10}{19} = 0.5263.$

$Nerea: P = P(2,2) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{38} = 0.2368.$

La probabilidad que tienen Nerea de sacar las lentillas que necesita es $\mathbf{0.5263}$, y la que tiene Nerea es $\mathbf{0.2368}$

$b)$ Llamamos D al suceso lentilla defectuosa, y C al suceso lentilla correcta. Las posibilidades para sacarlas en tres intentos son: $(C, D, D), (D, C, D)$

$P = P(C, D, D) + P(D, C, D) = \frac{18}{20} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18} + \frac{2}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{18} = 2 \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{95} = 0.0105.$

La probabilidad de que consiga encontrar las dos defectuosas en el tercer intento es $\mathbf{0.0105}$

Problema 7:

Según un estudio de la Dirección General de Tráfico el número de horas de prácticas necesarias para la obtención del carnet de conducir sigue una distribución normal $N(24, 9)$.

$a)$ Calcula la probabilidad de obtener el permiso de conducir con menos de 20 horas de prácticas.

$b)$ ¿Cuántas horas ha necesitado Andrea para conseguir el carnet de conducir, si se sabe que el 89 % de los conductores y conductoras ha necesitado más horas que ella?

Solución:

$a)$ Nos dicen que: $\mu = 24;\ \ \sigma = 9.\ X: N(\mu;\ \sigma) = N(24, 9)$.

Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-24}{9}$.

$$P = P(X < 20) = P\left(Z < \frac{20-24}{9}\right) = P\left(Z < \frac{-4}{9}\right) = P(Z < -0.44) == P(Z \geq 0.44) =$$

$$1 - P(Z \leq 0.44) = 1 - 0.6700 = 0.3300.$$

La probabilidad de obtener el permiso de conducir con menos de 20 horas de prácticas es de $\mathbf{0.33}$.

$b)$ Queremos determinar β tal que: $P(X > \beta) = 0.89$

$P = P(X > \beta) = 0.89 \Rightarrow P\left(Z > \frac{\beta-24}{9}\right) = 1 - \left(Z \leq \frac{\beta-24}{9}\right) = 0.89 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\beta-24}{9}\right) = 0.11.$

Por ser la probabilidad menor que 0.5, el valor de $\frac{\beta-24}{9}$ es negativo, por lo cual:

$P\left(Z \leq -\frac{\beta-24}{9}\right) = 1 - 0.11 = 0.89.$

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0, 1)$ a 0.89 le corresponde, aproximadamente, 1.23:

$-\frac{\beta-24}{9} = 1.23;\ \ \beta - 24 = -11.07;\ \ \beta = 24 - 11.07 = 12.93.$

Andrea ha necesitado aproximadamente **13** horas en conseguir su carnet.

Problema 8:

Para conocer el gasto medio anual que las familias de una determinada población realizan en servicios de hostelería, se ha tomado una muestra aleatoria de familias a partir de la cual se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media es $(820, 830)$ con un nivel de confianza del 95 %. Se sabe que el gasto anual tiene una distribución normal con desviación típica 80 euros.

$a)$ Calcula la media obtenida a partir de la muestra.

$b)$ Calcula el número de familias que han formado parte de la muestra.

Solución:

$a)$ Tomamos como media muestral el punto medio del intervalo:

$\overline{x} = \frac{830+820}{2} = \frac{1\,650}{2} = 825.$

La media obtenida a partir de la muestra es de $\mathbf{825}$

$b)$ Usamos que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Vamos a calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

Para un nivel de confianza del 95 % es: $1 - \alpha = 0.95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.$

$(1 - 0.025 = 0.9750 \ \rightarrow z = 1.96).$

Por tanto: $z_{\frac{\alpha}{2}=1.96}$

Calculamos: $E = \frac{830-820}{2} = \frac{10}{2} = 5.$

Sabemos entonces que: $\sigma = 80; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96; \ \ E = 5.$

Sustituimos en $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ para calcular $n.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \ \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{80}{5}\right)^2 = (1.96 \cdot 16)^2 = 31.36^2 = 983.45.$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de $\mathbf{984}$ familias.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Ramón Podadera Sánchez

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

CRITERIOS DE CORRECCIÓN:

De los seis problemas planteados se han de contestar tres. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de las tres.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1:

En una explotación ganadera se crían 100 animales. Cada ejemplar necesita diariamente como mínimo 5 kg de piensos de origen animal y como mínimo 3 kg de piensos de origen vegetal. Hay dos marcas A y B que venden sacos con mezclas de dichos piensos. La marca A vende sacos con 7 kg de piensos animales y 3 kg de piensos vegetales. La marca B vende sacos con 6 kg de piensos animales y 4 kg de piensos vegetales. Si los sacos de la marca A cuestan 12 euros y los de la marca B cuestan 11 euros,

a) ¿Cuál es la combinación de compra de sacos de cada marca que se ha de realizar semanalmente para minimizar el coste? (8 puntos)

b) ¿Cuál sería dicho coste mínimo? (2 puntos)

Problema 2:

En una empresa de 57 trabajadores el gasto en salarios en este mes ha sido de $62\,000$ euros. En la empresa hay trabajadores de 3 categorías, denominadas A, B y C. Este mes el salario de los trabajadores de la categoría A ha sido de 800 euros, el de los trabajadores de la categoría B de $1\,000$ euros y el de los trabajadores de la categoría C de $2\,000$ euros. Una auditoría externa ha indicado que la desigualdad salarial entre los trabajadores de la empresa es excesiva, por lo que se ha decidido que el próximo mes se incrementará en un $4\,\%$ el salario de los trabajadores de la categoría A, se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B y se rebajará un $10\,\%$ el salario a los trabajadores de la categoría C. De esta manera, el gasto de la empresa en salarios el próximo mes será un $2\,\%$ inferior al gasto en salarios de este mes. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría tiene la empresa? (*Planteamiento correcto* 5 *puntos---Resolución correcta* 5 *puntos*)

Problema 3:

Dada la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si las hubiera. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4:

Desde el inicio de 1980, la capacidad (cantidad total de gas que puede extraerse) de una explotación gasística, expresada en miles de metros cúbicos, viene dada por la función:

$$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2$$

donde la variable x representa el tiempo en años transcurridos desde el inicio de 1980.

a) Calcula la capacidad de la explotación al inicio de 1980. (2 puntos)

b) Calcula cuánto tiempo ha de pasar desde el inicio de 1980 para que la capacidad alcance su valor máximo, y cuál es dicho valor máximo (en miles de metros cúbicos). (4 puntos)

c) Si el beneficio en euros por metro cúbico de gas disminuye con los años según la función

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100}$$

calcula cuánto tiempo debe pasar para que la explotación deje de ser rentable y cuál será la capacidad (en miles de metros cúbicos) de la explotación en ese momento. (4 puntos)

Problema 5:

Si A y B son dos sucesos tales que $P(A) = 0.4$, $P(B/A) = 0.25$ y $P(B^C) = 0.75$, se pide:

a) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué? (2.5 puntos)

b) Calcula $P(A \cup B)$. (2.5 puntos)

c) Calcula $P(A/B^C)$. (2.5 puntos)

d) Calcula$P(A^C \cup B^C)$ y $P(A^C \cap B^C)$. (2.5 puntos)

(A^C y B^C representan, respectivamente, el suceso complementario de A y el suceso complementario de B).

Problema 6:

Una empresa fabrica protectores de pantalla para teléfonos móviles. La empresa produce tres tipos de protectores: de 4 pulgadas, de 4.7 pulgadas y de 5 pulgadas. Consideramos la población de los habitantes de una ciudad que poseen un único teléfono móvil y cuya medida es una de estas tres. Un estudio de mercado indica que el 30 % de los usuarios de un teléfono móvil tienen una pantalla de 4 pulgadas. Este mismo estudio también indica que el 30 % de los usuarios de un teléfono móvil de una pantalla de 4 pulgadas utilizan un protector de pantalla. Este también es el caso del 25% de los que poseen un teléfono móvil con pantalla de 4.7 pulgadas y del 40 % de los que poseen un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

a) Si el 34 % de los que tienen un teléfono móvil usan un protector de pantalla, calculad el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 4.7 pulgadas y el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 5 pulgadas. (4 puntos)

b) Se considera un usuario de teléfono móvil con protector de pantalla. Calcula la probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas. (3 puntos)

c) Consideramos ahora una persona que tiene un teléfono móvil con protector de pantalla y cuya pantalla no es de 4.7 pulgadas. Calcula la probabilidad de que use un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas. (4 puntos)

RESPUESTAS

Problema 1:

En una explotación ganadera se crían 100 animales. Cada ejemplar necesita diariamente como mínimo 5 kg de piensos de origen animal y como mínimo 3 kg de piensos de origen vegetal. Hay dos marcas A y B que venden sacos con mezclas de dichos piensos. La marca A vende sacos con 7 kg de piensos animales y 3 kg de piensos vegetales. La marca B vende sacos con 6 kg de piensos animales y 4 kg de piensos vegetales. Si los sacos de la marca A cuestan 12 euros y los de la marca B cuestan 11 euros,

a) ¿Cuál es la combinación de compra de sacos de cada marca que se ha de realizar semanalmente para minimizar el coste?

b) ¿Cuál sería dicho coste mínimo?

Solución:

Es un problema de programación lineal ya que tenemos dos tipos de marcas de sacos (A y B), un objetivo (minimizar coste) y unas restricciones (el mínimo de piensos de origen animal y piensos de origen vegetal que necesitan nuestros animales).

Variables de decisión: Nos interesa saber qué combinación de compra de sacos de cada tipo de sacos hay que comprar **semanalmente** por lo que las variables de decisión serán:

$x -$ sacos de pienso de la marca A.

$y -$ sacos de pienso de la marca B.

Función objetivo: Queremos tener un coste mínimo. Como cada saco de A cuesta 12 euros si compramos x kilos gastamos $12x$. Cada saco de B cuesta 11 euros con los y sacos comprados gastamos $11y$. Sumando ambas cantidades tenemos que la función objetivo es:

$$C(x,y) = 12x + 11y$$

Restricciones: En principio nuestras variables no pueden ser negativas por lo que aplicaremos, ya que es posible:

$$x \geq 0; \qquad y \geq 0$$

Como **cada animal** necesita **diariamente** 5 kilos de pienso de origen animal necesitamos de este tipo de pienso semanalmente y para 100 animales: $5 \cdot 7 \cdot 100 = 3500$ kg . Como el saco A tiene 7 kg de piensos de origen animal tenemos que si compramos x sacos: $7x$ mientras que el saco B tiene un 6 kg por lo que tendremos para y sacos: $6y$. Debemos sumar ambas cantidades e imponer que ha de ser mayor o igual a la cantidad mínima que tienen que tomar nuestros animales:

$$7x + 6y \geq 3500$$

Como **cada animal** necesita **diariamente** 3 kilos de pienso de origen vegetal necesitamos de este tipo de pienso semanalmente y para 100 animales: $3 \cdot 7 \cdot 100 = 2100$ kg. Como el saco A tiene 3 kg de piensos de origen vegetal tenemos que si compramos x sacos: $3x$ mientras que el saco B tiene un 4 kg por lo que tendremos para y sacos: $4y$. Debemos sumar ambas cantidades e imponer que ha de ser mayor o igual a la cantidad mínima que tienen que tomar nuestros animales:

$$3x + 4y \geq 2100$$

Región factible o solución. Vendrá dada por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 7x + 6y \geq 3500 \\ 3x + 4y \geq 2100 \end{cases}$$

Las dos primeras inecuaciones nos informan que la representación será en el primer cuadrante. Para representar la tercera igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "y":

$$y = \frac{3500 - 7x}{6}$$

tabla de valores:

x	500	200	0
y	0	350	583.3

Para representar la cuarta igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "y":

$$y = \frac{2100 - 3x}{4}$$

tabla de valores:

x	0	400	700
y	525	225	0

Después de representar cada recta tenemos que sustituir un valor para hallar la región factible, en la tercera y la cuarta podemos sustituir el (0, 0) y nos sale que la región se extiende hacia el lado contrario a ese punto. Por lo que la representación queda:

Se trata de una región abierta que presenta tres vértices:

- El primero es el (0, 583.3) que sale directamente de nuestra tabla.
- El segundo es el (700, 0) que también sale de nuestra tabla.
- El tercero es el corte de ambas rectas $y = \frac{3500-7x}{6}$ y $y = \frac{2100-3x}{4}$ por lo que igualamos ambas ecuaciones y despejamos la x:

$$\frac{3500-7x}{6} = \frac{2100-3x}{4}$$
$$4 \cdot (3500-7x) = 6 \cdot (2100-3x)$$
$$14000 - 28x = 12600 - 18x$$
$$1400 = 10x$$
$$x = 140$$

la otra componente la hallamos sustituyendo en cualquiera de las dos:

$y = \frac{3500-7\cdot 140}{6} = 420$ por lo que el punto será (140, 420)

Los 3 vértices a estudiar son: (0, 583.3) (700, 0) y (140, 420)

La función objetivo era:$C(x,y) = 12x + 11y$ sustituimos los vértices hallados:

$C(0, 583.3) = 12 \cdot 0 + 11 \cdot 583.3 = 6416.3$ euros

$C(700, 0) = 12 \cdot 700 + 11 \cdot 0 = 8400$ euros

$C(140, 420) = 12 \cdot 140 + 11 \cdot 420 = 6300$ euros

Como buscamos el coste mínimo tenemos que se da comprando **140** sacos del A y **420** sacos del B y el coste mínimo semanal es de **6 300 €**.

El problema también puede resolverse calculando el coste mínimo por animal y día y multiplicando por 100 animales y 7 días (es decir, por 700). Lo que ocurre es que, en ese caso, el resultado sale decimal y confunde bastante: 0.2 sacos del A y 0.6 sacos del B y el coste mínimo es de 9 € (este resultado es por animal y día)

Problema 2:

En una empresa de 57 trabajadores el gasto en salarios en este mes ha sido de $62\,000$ euros. En la empresa hay trabajadores de 3 categorías, denominadas A, B y C. Este mes el salario de los trabajadores de la categoría A ha sido de 800 euros, el de los trabajadores de la categoría B de $1\,000$ euros y el de los trabajadores de la categoría C de $2\,000$ euros. Una auditoría externa ha indicado que la desigualdad salarial entre los trabajadores de la empresa es excesiva, por lo que se ha decidido que el próximo mes se incrementará en un $4\,\%$ el salario de los trabajadores de la categoría A, se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B y se rebajará un $10\,\%$ el salario a los trabajadores de la categoría C. De esta manera, el gasto de la empresa en salarios el próximo mes será un $2\,\%$ inferior al gasto en salarios de este mes. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría tiene la empresa?

Solución:

Es un problema de sistemas de ecuaciones.

Como nos preguntan por el número de trabajadores de cada categoría que tiene la empresa y hay tres categorías podemos definir las siguientes incógnitas:

x – n.º de trabajadores de la empresa de categoría A.

y – n.º de trabajadores de la empresa de categoría B.

z – n.º de trabajadores de la empresa de categoría C.

Como en la empresa hay 57 trabajadores, la suma de las tres incógnitas debe ser esa cantidad:

$$x + y + z = 57$$

El gasto en salarios ha sido de $62\,000$ euros. Los trabajadores de categoría A cobran 800 euros cada uno, el gasto que generan será de $800x$. Los trabajadores de la categoría B cobran $1\,000$ euros cada uno, el gasto que generan será de $1000y$ y los trabajadores de la categoría C cobran $2\,000$ euros por lo que generarán un gasto de $2000z$. La suma de los tres gastos debe ser el gasto total en salarios:

$$800x + 1000y + 2000z = 62000$$

Después de la auditoría se incrementará en un $4\,\%$ el salario de los trabajadores de la categoría A por lo que si cobraban 800 ahora cobrarán $800 \cdot \frac{104}{100} = 832$ euros y el gasto salarial será de $832x$. Como se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B el costo salarial continúa siendo $1000y$ por último se rebajará un $10\,\%$ el salario a los trabajadores de la categoría C por lo que cobrarán:

$20000 \cdot \frac{90}{100} = 1800$ euros y el costo generado será de $1800z$. Como nos dicen que el gasto de la empresa en salarios el próximo mes será un $2\,\%$ inferior tenemos que ese gasto queda en:

$62000 \cdot \frac{98}{100} = 60760$ euros. La suma de los tres costos debe ser el nuevo gasto:

$$832x + 1000y + 1800z = 60760$$

Si unimos las tres ecuaciones tenemos el sistema a resolver:

$$\begin{cases} x + y + z = 57 \\ 800x + 1000y + 2000z = 62000 \\ 832x + 1000y + 1800z = 60760 \end{cases}$$

Podemos simplificar algo la resolución si dividimos la segunda ecuación por 400 y la tercera por 8:

$$\begin{cases} x + y + z = 57 \\ 4x + 5y + 10z = 310 \\ 104x + 125y + 225z = 7595 \end{cases}$$

Para la resolución podemos elegir el Método de Gauss o la Regla de Cramer. Yo aquí lo voy a resolver por los dos métodos. En el examen sólo hay que resolver por un método.

Por el Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 4 & 5 & 10 & 310 \\ 104 & 125 & 225 & 7595 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & 1 & 6 & 82 \\ 0 & 21 & 121 & 1667 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & 1 & 6 & 82 \\ 0 & 0 & -5 & -55 \end{array}\right)$$

De la última ecuación tenemos que: $-5z = -55 \rightarrow z = \frac{-55}{-5} = 11$

De la segunda ecuación tenemos que: $y + 6z = 82 \rightarrow y + 6 \cdot 11 = 82 \rightarrow y = 82 - 66 = 16$

De la primera ecuación: $x + y + z = 57 \rightarrow x + 16 + 11 = 57 \rightarrow x = 30$

Por lo que la empresa tiene 30 trabajadores de categoría A, 16 de categoría B y 11 de categoría C.

Si lo resolvemos por la Regla de Cramer tenemos que:

El sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas. Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 10 \\ 104 & 125 & 225 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 225 + 1 \cdot 10 \cdot 104 + 1 \cdot 4 \cdot 125 - 1 \cdot 5 \cdot 104 - 1 \cdot 4 \cdot 225 - 1 \cdot 10 \cdot 125 = -5 \neq 0$$

Cumple las condiciones para resolver por la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 57 & 1 & 1 \\ 310 & 5 & 10 \\ 7595 & 125 & 225 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{64125 + 75950 + 38750 - 37975 - 69750 - 71250}{-5} = \frac{-150}{-5} = 30$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 57 & 1 \\ 4 & 310 & 10 \\ 104 & 7595 & 225 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{69750 + 59280 + 30380 - 32240 - 51300 - 75950}{-5} = \frac{-80}{-5} = 16$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 57 \\ 4 & 5 & 310 \\ 104 & 125 & 7595 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{37975 + 32240 + 28500 - 29640 - 30380 - 38750}{-5} = \frac{-55}{-5} = 11$$

Lógicamente el resultado es el mismo que el anterior.

Problema 3:

Dada la función $f(x)=\frac{1-x^2}{x^2-4}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si las hubiera.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2$ por lo que no existe en esos puntos.

El **dominio** será: $\boldsymbol{Dom f(x)}=\mathbb{R}-\{\pm\mathbf{2}\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x)=0$:

$f(x)=\frac{1-x^2}{x^2-4}=0$ por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$1-x^2=0 \rightarrow x=\pm 1$ por lo que la función **CORTA al eje OX en** $(1,0)$ **y** $(-1,0)$**.**

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de *f(x)* cuando $x=0$:

$f(0)=\frac{1-0^2}{0^2-4}=\frac{-1}{4}$ por lo que es el punto $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$

Puntos de corte: $(\mathbf{1},\mathbf{0})$; $(-\mathbf{1},\mathbf{0})$ y $\left(\mathbf{0},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si las hubiera.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x^2-4}=-1$ luego **tiene asíntota horizontal en** $y=-1$.

No lo pide pero para realizar el dibujo es útil hallar si la función va por encima o por debajo de la asíntota. Para ello hallamos valores grandes (positivos y negativos) de la función y los comparamos con el valor $y=-1$:

$f(10)=\frac{1-10^2}{10^2-4}\simeq -1.031<-1$ por lo que en $+\infty$ va por debajo de la asíntota.

$f(-10)=\frac{1-(-10)^2}{(-10)^2-4}\simeq -1.031<-1$ por lo que en $-\infty$ también va por debajo de la asíntota.

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos dos: $x=\pm 2$, calculamos los límites:

$$\lim_{x\to -2}\frac{1-x^2}{x^2-4}=\left(\frac{-3}{0}\right)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{1-x^2}{x^2-4}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\frac{1-x^2}{x^2-4}=+\infty\end{cases}$$ por lo que $x=-2$ es asíntota vertical

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-x^2}{x^2-4}=\left(\frac{-3}{0}\right)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1-x^2}{x^2-4}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1-x^2}{x^2-4}=-\infty\end{cases}$$ por lo que $x=2$ es asíntota vertical

Las rectas $\boldsymbol{x}=-\mathbf{2}$ *y* $\boldsymbol{x}=2$ *son asíntotas verticales. La recta* $\boldsymbol{y}=-\mathbf{1}$ *es asíntota horizontal*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

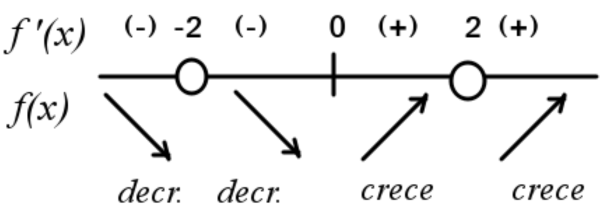
Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

$$f'(x)=\frac{(-2x)\cdot(x^2-4)-(1-x^2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{6x}{(x^2-4)^2}=0$$

Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$6x=0\to x=0$por lo que tiene un posible punto crítico.

Este punto es el posible máximo, mínimo o punto de inflexión. Con este punto y las discontinuidades del dominio $x=\pm 2$ estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores considerados.



Los valores calculados para establecer el signo han sido:

$$f'(-3)\simeq -0.72<0$$
$$f'(-1)=-0.67<0$$
$$f'(1)\simeq 0.67>0$$
$$f'(3)\simeq 0.72>0$$

Por lo que tenemos que la función **decrece** en $(-\infty,-\mathbf{2})\cup(-\mathbf{2},\mathbf{0})$; **Crece** en $(\mathbf{0},\mathbf{2})$ **U** $(\mathbf{2},+\infty)$

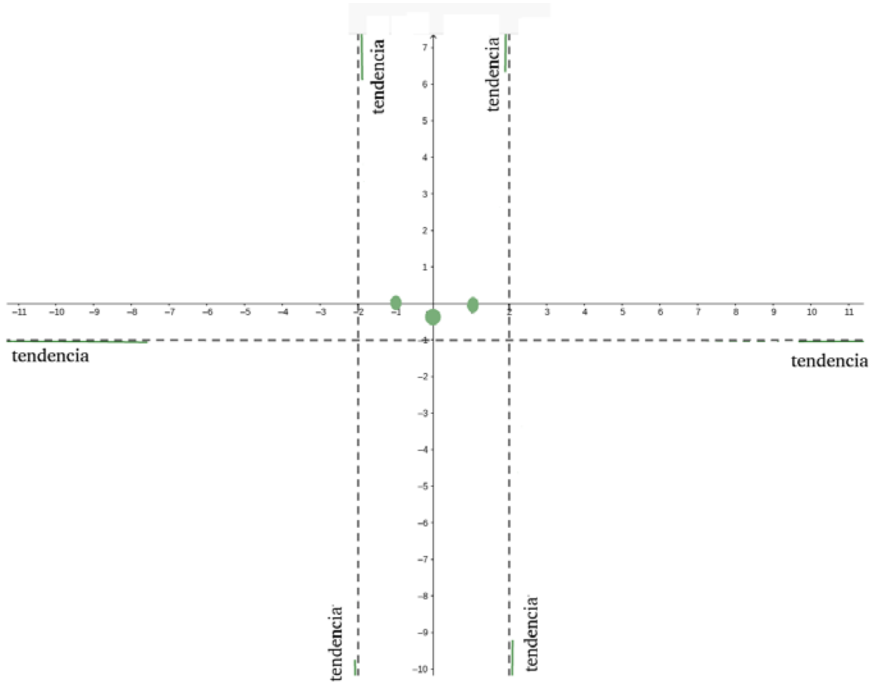
d) Los máximos y mínimos locales.

Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un mínimo en el punto de abscisa $x=0$ que es el punto $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ que hemos calculado en el apartado a)

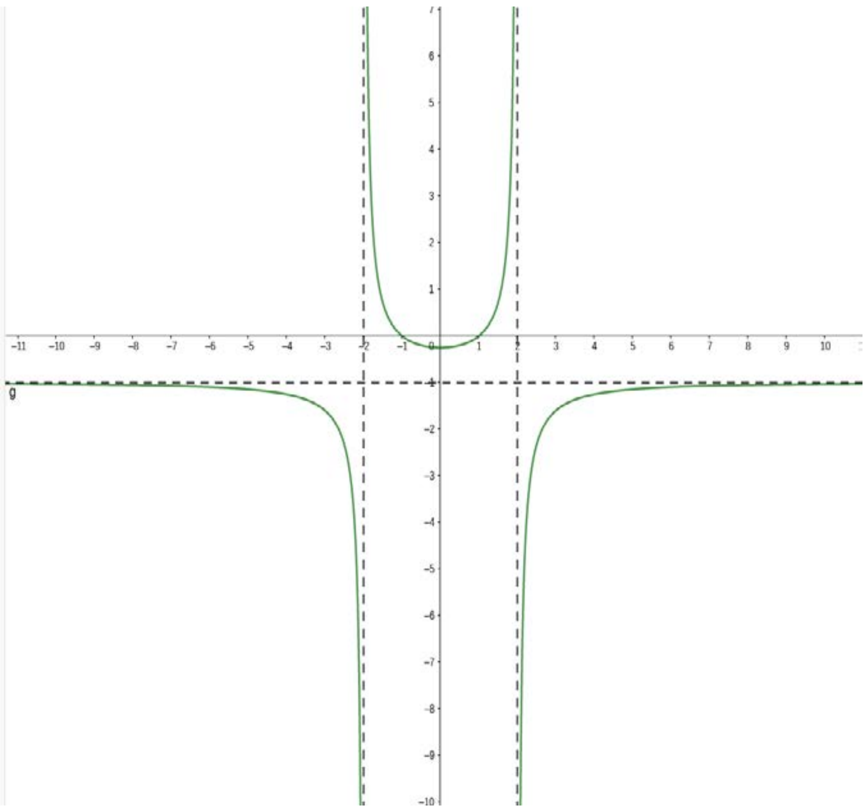
$$\boldsymbol{Mínimo}: \boldsymbol{C}\left(\mathbf{0},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$$

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Dibujamos los puntos de corte $(1,0)$,$(-1,0)$, el mínimo y punto de corte$\left(0,-\frac{1}{4}\right)$, las asíntotas verticales en $x=-2$ y $x=2$ (con sus tendencias a infinito) y la horizontal $y=-1$ con sus tendencias y obtenemos:



La gráfica queda así:



Problema 4:

Desde el inicio de 1980, la capacidad (cantidad total de gas que puede extraerse) de una explotación gasística, expresada en miles de metros cúbicos, viene dada por la función

$$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2$$

donde la variable x representa el tiempo en años transcurridos desde el inicio de 1980.

a) Calcula la capacidad de la explotación al inicio de 1980.

b) Calcula cuánto tiempo ha de pasar desde el inicio de 1980 para que la capacidad alcance su valor máximo, y cuál es dicho valor máximo (en miles de metros cúbicos).

c) Si el beneficio en euros por metro cúbico de gas disminuye con los años según la función

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100}$$

calcula cuánto tiempo debe pasar para que la explotación deje de ser rentable y cuál será la capacidad (en miles de metros cúbicos) de la explotación en ese momento.

Solución:

a) Calcula la capacidad de la explotación al inicio de 1980.

Como la función está definida a partir del inicio de 1980 nos están pidiendo el valor inicial, es decir para $x = 0$ por lo que:

$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2 \rightarrow f(0) = 36600 + 1500 \cdot 0 - 15 \cdot 0^2 = 36600$

La capacidad de la explotación al inicio de 1980 es de **36 600** miles de m^3

b) Calcula cuánto tiempo ha de pasar desde el inicio de 1980 para que la capacidad alcance su valor máximo, y cuál es dicho valor máximo (en miles de metros cúbicos).

Tenemos que buscar un máximo de la función capacidad. Para ello se deriva la función y se iguala a cero la derivada:

$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2 \ \rightarrow \ f'^{(x)} = 1500 - 30x = 0 \rightarrow \ x = \frac{1500}{30} = 50$

Para comprobar que es máximo hacemos la segunda derivada y sustituimos el valor hallado:

$f''^{(x)} = -30 \rightarrow f''^{(50)} = -30 < 0$por lo que se trata de un **máximo**.

Para saber cuál es la capacidad en el máximo basta con sustituir en la función original de capacidad:

$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2 \ \rightarrow f(50) = 36600 + 1500 \cdot 50 - 15 \cdot 50^2 = 74100$

Por lo cual, la capacidad máxima se alcanza transcurridos **50 años** (año **2030**) y es de **74 100 miles de m^3**

El apartado también se puede resolver razonando que la función beneficios es una parábola cóncava (con el vértice hacia arriba) por lo que presenta un máximo en dicho vértice y cuya abscisa se calcula con la fórmula $x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{-1500}{2\cdot(-15)} = 50$ (el resultado es el mismo)

c) Si el beneficio en euros por metro cúbico de gas disminuye con los años según la función

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100}$$

calcula cuánto tiempo debe pasar para que la explotación deje de ser rentable y cuál será la capacidad (en miles de metros cúbicos) de la explotación en ese momento.

La explotación **dejará de ser rentable en el momento en el que los beneficios sean cero**.

Por lo cual tenemos que resolver la ecuación:

$3 - \frac{3x^2}{12100} = 0 \rightarrow 3 = \frac{3x^2}{12100} \rightarrow 36300 = 3x^2 \rightarrow 12100 = x^2 \rightarrow x = \pm 110$

Como x es el tiempo transcurrido desechamos la solución negativa y obtenemos que han de transcurrir 110 años para que los beneficios sean cero (deje de ser rentable). En ese momento, la capacidad de extracción será de:

$f(110) = 36600 + 1500 \cdot 110 - 15 \cdot 110^2 = 20100$ miles de m^3

Por lo cual, la explotación dejará de ser rentable transcurridos **110 años** (año **2090**) y, en ese momento, tendrá una capacidad de extracción de **20 100 miles de m^3**

Problema 5:

Si A y B son dos sucesos tales que $P(A) = 0.4$, $P(B/A) = 0.25$ y $P(B^C) = 0.75$, se pide:

a) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

b) Calcula $P(A \cup B)$.

c) Calcula $P(A/B^C)$.

d) Calcula$P(A^C \cup B^C)$y$P(A^C \cap B^C)$.

(A^C y B^C representan, respectivamente, el suceso complementario de A y el suceso complementario de B).

Solución:

Es un problema de probabilidad de álgebra de sucesos. En el enunciado utiliza "suceso complementario" que muchas veces se llama también "contrario" y se denota por un suprarrayado $A^C = \overline{A}$ y $B^C = \overline{B}$

a) ¿Son independientes los sucesos A y B?

Para saber si dos sucesos son independientes tenemos que demostrar que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

O bien que: $P(A/B) = P(A)$ o que $P(B/A) = P(B)$

En el enunciado tenemos $P(B^C) = 0.75$ por el suceso contrario o complementario tenemos que:

$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - 0.75 = 0.25$

Como en el enunciado nos dice que $P(B/A) = 0.25$ tenemos la igualdad: $P(B/A) = P(B)$

Por lo tanto, los sucesos **SÍ son independientes**.

b) Calcula $P(A \cup B)$.

Por la fórmula de la probabilidad de la unión tenemos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Tenemos los valores de las probabilidades de los sucesos. Nos falta la probabilidad de la intersección, pero, por el apartado anterior sabemos que son independientes por lo que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1$$

Sustituyendo valores:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.25 - 0.1 = 0.55 = 55\ \%$$

$$P(A \cup B) = 0.55 = 55\ \%$$

Autor: Pedro Podadera Sánchez
www.apuntesmareaverde.org.es

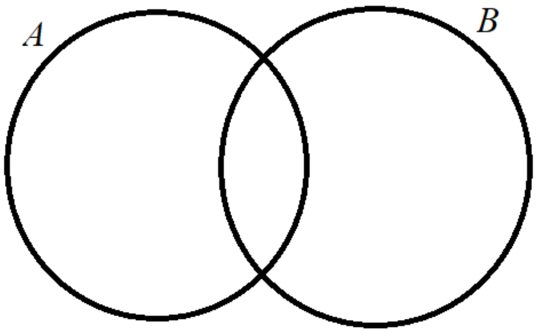
c) Calcula $P(A/B^C)$.

Aplicamos la fórmula de la probabilidad condicionada: $P(A/B^C) = \frac{P(A \cap B^C)}{P(B^C)}$

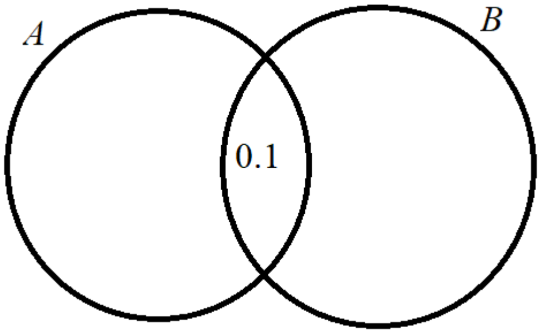
Tenemos que hallar $P(A \cap B^C)$ vamos a hacerlo de dos maneras: por diagramas de Venn y por la fórmula de la probabilidad de la diferencia de dos sucesos.

Por diagramas de Venn:

Representamos los sucesos dentro de un espacio muestral E:



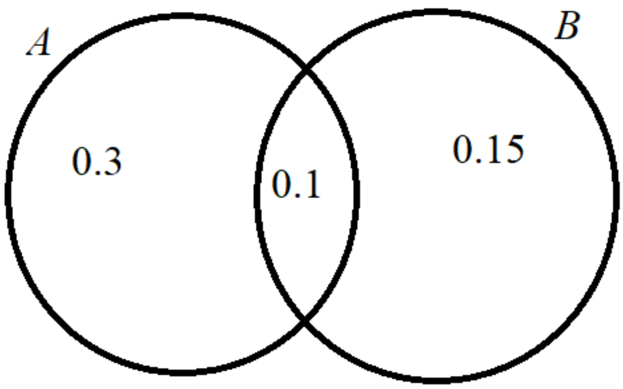
Sabemos que $P(A \cap B) = 0.1$ por el apartado anterior:



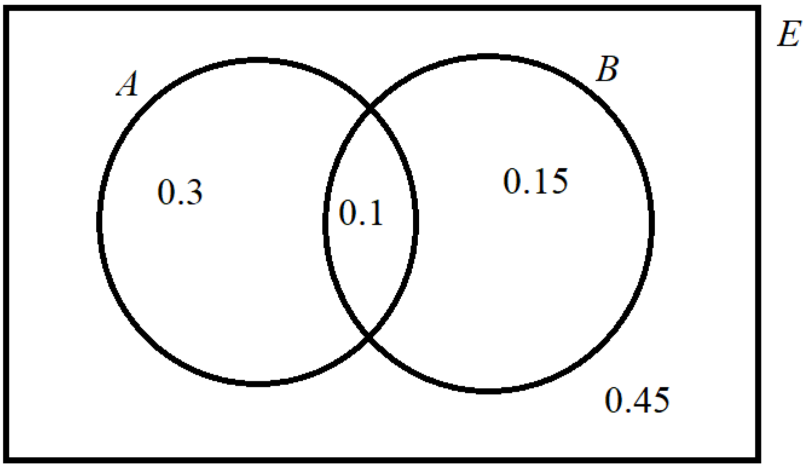
Como $P(A) = 0.4$ y en la intersección hay 0.1 tenemos que el resto será 0.3

Lo mismo para $P(B) = 0.25$ y en la intersección hay 0.1 tenemos que el resto será 0.15:

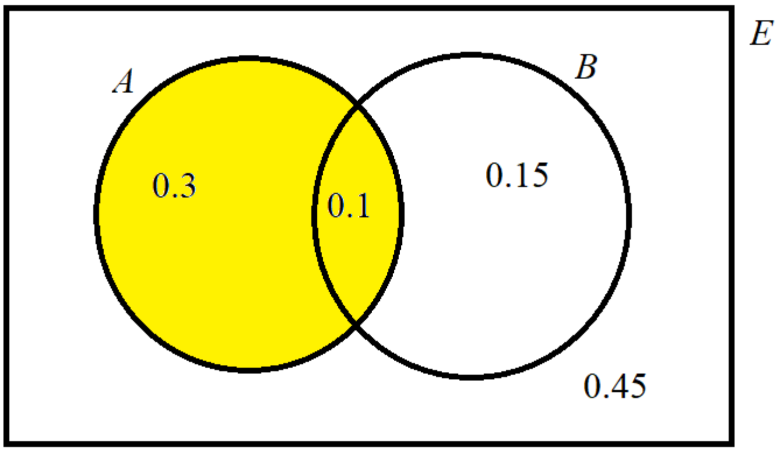
El diagrama queda:



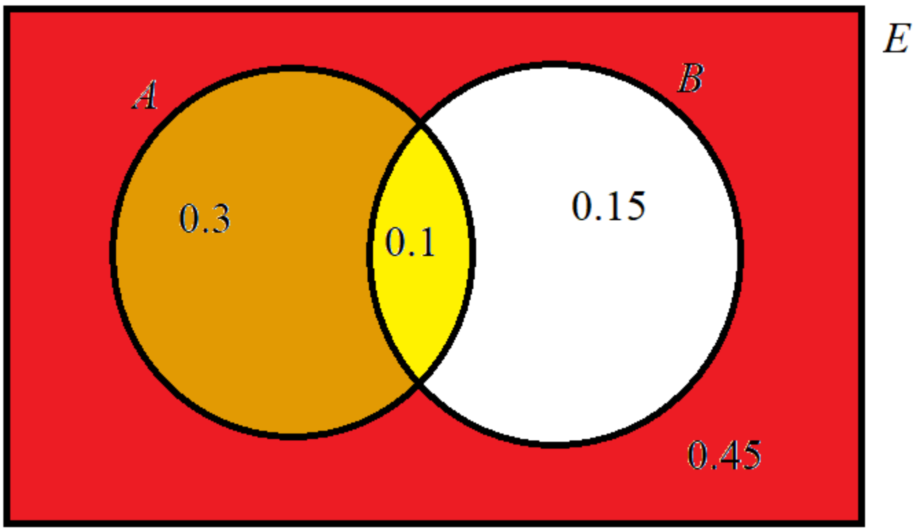
Podemos completarlo para todo el espacio muestral con: 1 - 0.3 - 0.1 - 0.15 = 0.45



Ahora tenemos que saber qué zona nos están pidiendo. Para hallar$P(A \cap B^C)$ pintamos de amarillo el suceso A:



Si pintamos de rojo el suceso B^C la zona dos veces pintada es la intersección:



Por lo cual la probabilidad que buscamos es: $P(A \cap B^C) = 0.3$

Por la probabilidad de la diferencia:

$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.1 = 0.3$

Sustituyendo valores: $P(A/B^C) = \frac{P(A \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{0.3}{0.75} = 0.4 = 40\ \%$

$$P(A/B^C) = 0.4 = 40\ \%$$

d) Calcula $P(A^C \cup B^C)$ y $P(A^C \cap B^C)$.

Por la fórmula de Morgan tenemos que: $P(A^C \cup B^C) = P((A \cap B)^C)$

Por el suceso complementario o contrario: $P((A \cap B)^C) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.1 = 0.9$

Por lo cual: $P(A^C \cup B^C) = 0.9 = 90\ \%$

Por la fórmula de Morgan tenemos que: $P(A^C \cap B^C) = P((A \cup B)^C)$

Por el suceso complementario o contrario: $P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.55 = 0.45 = 45\%$

Por lo cual $P(A^C \cap B^C) = 0.45 = 45\%$

$$\boldsymbol{P(A^C \cup B^C) = 0.9;\ P(A^C \cap B^C) = 0.45}$$

Problema 6:

Una empresa fabrica protectores de pantalla para teléfonos móviles. La empresa produce tres tipos de protectores: de 4 pulgadas, de 4.7 pulgadas y de 5 pulgadas. Consideramos la población de los habitantes de una ciudad que poseen un único teléfono móvil y cuya medida es una de estas tres. Un estudio de mercado indica que el 30 % de los usuarios de un teléfono móvil tienen una pantalla de 4 pulgadas. Este mismo estudio también indica que el 30% de los usuarios de un teléfono móvil de una pantalla de 4 pulgadas utilizan un protector de pantalla. Este también es el caso del 25 % de los que poseen un teléfono móvil con pantalla de 4.7 pulgadas y del 40 % de los que poseen un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

a) Si el 34 % de los que tienen un teléfono móvil usan un protector de pantalla, calculad el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 4.7 pulgadas y el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 5 pulgadas.

b) Se considera un usuario de teléfono móvil con protector de pantalla. Calcula la probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

c) Consideramos ahora una persona que tiene un teléfono móvil con protector de pantalla y cuya pantalla no es de 4.7 pulgadas. Calcula la probabilidad de que use un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

Solución:

Es un problema de probabilidad. Tenemos que definir los sucesos yo he optado por estas letras:

A – Usuario de teléfono móvil de 4 pulgadas.

B – Usuario de teléfono móvil de 4.7 pulgadas.

C – Usuario de teléfono móvil de 5 pulgadas.

S – Que tienen protector de pantalla (por aquello de "seguridad")

Podemos apreciar que se ha evitado nombrar a los sucesos con números (4, 4.7 o 5) y la letra P de protector ya que puede liar con la P de probabilidad.

A partir de la definición de los sucesos vamos a ver qué probabilidades nos dan en el enunciado:

- El 30 % de los usuarios de un teléfono móvil tienen una pantalla de 4 pulgadas.

$$P(A) = 0.3$$

- El 30 % de los usuarios de un teléfono móvil de una pantalla de 4 pulgadas utilizan un protector de pantalla. Se trata de una condicionada, es decir:

$$P(S/A) = 0.3$$

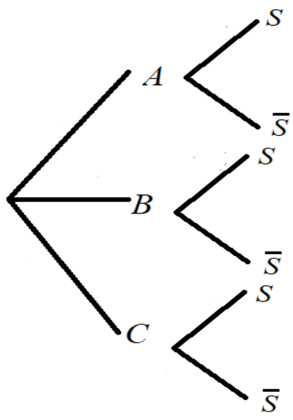
- El 25 % de los que poseen un teléfono móvil con pantalla de 4.7 pulgadas también utilizan un protector de pantalla. Se trata de una condicionada, es decir:

$$P(S/B) = 0.25$$

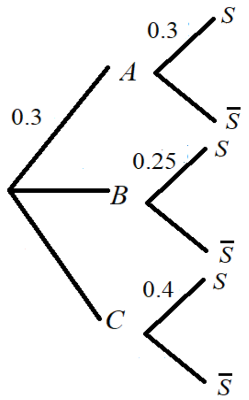
- El 40 % de los que poseen un teléfono móvil con pantalla de 5 pulgadas también utilizan un protector de pantalla. Se trata de una condicionada, es decir:

$$P(S/C) = 0.4$$

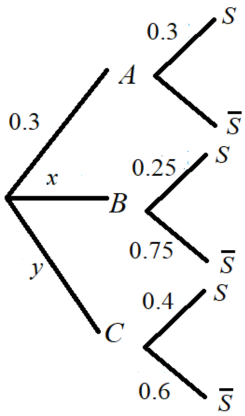
Vamos a situar todas estas probabilidades en un árbol:



Ahora ponemos las probabilidades que tenemos del enunciado:



Para completar el árbol utilizamos que la suma de probabilidades en un nudo ha de ser 1:



Sin embargo, podemos ver que hay dos probabilidades que no podemos completar. Yo les he llamado x

Autor: Pedro Podadera Sánchez

e *y*.

a) Si el 34 % de los que tienen un teléfono móvil usan un protector de pantalla, calculad el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 4.7 pulgadas y el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 5 pulgadas.

Nos piden precisamente las dos probabilidades que no hemos podido calcular antes: $P(B)$ y $P(C)$. Pero ahora tenemos un dato adicional: $P(S) = 0.34$

Utilizando la probabilidad total:

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) = P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B) + P(C) \cdot P(S/C)$$

Sustituyendo valores:

$0.34 = 0.3 \cdot 0.3 + x \cdot 0.25 + y \cdot 0.4 \rightarrow 0.25x + 0.4y = 0.25 \rightarrow x + 1.6y = 1$

Por otro lado, tenemos que la suma de las probabilidades de un nudo han de ser 1:

$x + y + 0.3 = 1 \rightarrow x + y = 0.7$

Podemos hacer con ambas condiciones un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 1.6y = 1 \\ x + y = 0.7 \end{cases}$

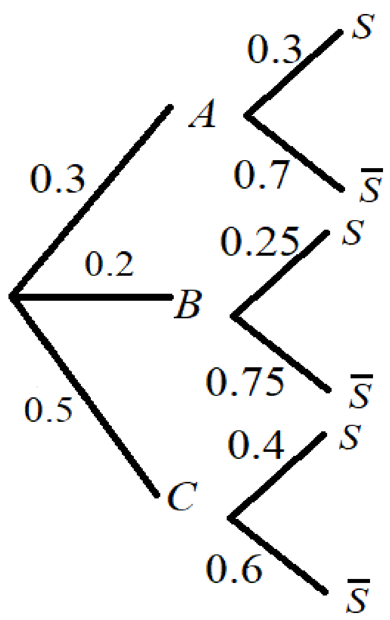
Resolviendo el sistema (podemos hacerlo por reducción restando ambas ecuaciones)) tenemos que: $y = 0.5$ y que $x = 0.2$

Por lo tanto, tenemos que:

$$P(B) = 0.2 = \mathbf{20\ \%} \text{ y } P(C) = 0.5 = \mathbf{50\ \%}$$

$$El\ 50\ \%\ usa\ teléfonos\ de\ 5\ pulgadas\ y\ el\ 20\ \%\ de\ 4.7\ pulgadas$$

Podemos ahora también completar nuestro árbol:



b) Se considera un usuario de teléfono móvil con protector de pantalla. Calcula la probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

Como sabemos que tiene protector de pantalla se trata de probabilidad a posteriori por lo que tenemos que utilizar la fórmula de Bayes:

$$P(C/S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)}$$

Del árbol tenemos que: $P(C \cap S) = P(C) \cdot P(S/C) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$

Del enunciado del a) sabemos que: $P(S) = 0.34$

Sustituyendo valores: $P(C/S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{0.2}{0.34} \simeq 0.5882 = 58.82\%$

La probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas es aproximadamente de **0.5882**.

c) Consideramos ahora una persona que tiene un teléfono móvil con protector de pantalla y cuya pantalla no es de 4.7 pulgadas. Calcula la probabilidad de que use un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

Tenemos que calcular una condicionada. Vamos a hallar la probabilidad de tener un teléfono móvil de 5 pulgadas y con protector (se puede ver del árbol):

$$P(C \cap S) = P(C) \cdot P(S/C) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$$

Ahora calculamos la población que tiene protector, pero cuya pantalla no es de 4.7 pulgadas (son dos casos):

$$P(A \cap S) + P(C \cap S) = P(A) \cdot P(S/A) + P(C) \cdot P(S/C) = 0.3 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.4 = 0.29$$

La probabilidad pedida es: $\frac{P(C \cap S)}{P(A \cap S) + P(C \cap S)} = \frac{0.2}{0.29} \simeq 0.6897 = 68.97\ \%$

La probabilidad de que use un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas es aproximadamente de **0.6897**.

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE JULIO

CRITERIOS DE CORRECCIÓN:
De los seis problemas planteados se han de contestar tres. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de las tres.
Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1:

Una empresa está especializada en la preparación de mezclas de café. Utilizando café colombiano, brasileño y keniata, la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg con un coste de 8.5 € el paquete. El precio de un kilo de cada clase de café es, respectivamente, de 10 €, 6 € y 8 €. Sabiendo que la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple que la de café brasileño, calcula el porcentaje de cada tipo que ha de utilizarse en la mezcla.

(Planteamiento correcto 5 puntos – Solución correcta 5 puntos)

Problema 2:

Consideramos las matrices

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula la inversa de la matriz $A - B$ (3 puntos)

b) Calcula la matriz X de dimensión 2 x 3, que satisface la ecuación $XA + C = XB$ (4 puntos)

c) ¿Es posible hacer el producto BC? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. (3 puntos)

Problema 3:

Dada la función $f(x) = \frac{x^2-36}{x^2-2x-8}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. (2 puntos)

Problema 4:

Una empresa ha estimado que los ingresos y gastos mensuales (en euros) que genera la fabricación de x unidades de producto vienen dados por las siguientes funciones:

Ingresos: $I(x) = 4x^2 + 800x$ Gastos: $G(x) = 6x^2 + 460x + 672$

a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable? (4 puntos)

b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso? (3 puntos)

c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta. (3 puntos)

Problema 5:

En un sorteo, un jugador extrae dos bolas sin reemplazamiento de una urna que contiene 2 bolas blancas, 3 bolas amarillas y 5 bolas negras. El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas, consigue el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas y consigue el tercer premio si una de las dos bolas extraídas es blanca y la otra no lo es. No hay más premios en el sorteo.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio. (4 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio. (3 puntos)

c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio? (3 puntos)

Problema 6:

Una determinada enfermedad afecta actualmente al 5 % de la población. El único test disponible para detectar la enfermedad tiene una probabilidad del 99 % de clasificar correctamente a los enfermos (probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad), mientras que la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95 %. Se pide:

a) La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test. (2.5 puntos)

b) La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test. (2.5 puntos)

c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto. (2.5 puntos)

d) Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un 1 % de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona está enferma si ha dado positivo en el test en este caso? (2.5 puntos)

RESPUESTAS

Problema 1:

Una empresa está especializada en la preparación de mezclas de café. Utilizando café colombiano, brasileño y keniata, la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg con un coste de 8.5 € el paquete. El precio de un kilo de cada clase de café es, respectivamente, de 10 €, 6 € y 8 €. Sabiendo que la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple que la de café brasileño, calcula el porcentaje de cada tipo que ha de utilizarse en la mezcla.

Solución:

Es un problema de sistemas de ecuaciones ya que tenemos tres tipos de café que han de mezclarse cumpliendo unas condiciones. Nosotros vamos a hallar la cantidad de café de cada tipo que hay que añadir a la mezcla, pero no debemos perder de vista que, al final, la pregunta es el **porcentaje de cada tipo**.

Incógnitas: Nos interesa saber qué cantidad de café de cada tipo de sacos hay que utilizar en la mezcla por lo que las incógnitas serán:

x — Cantidad de café colombiano en cada paquete.

y — Cantidad de café brasileño en cada paquete.

z — Cantidad de café keniata en cada paquete.

Planteamiento:

Como queremos que los paquetes pesen 1 kg la suma de las tres cantidades ha de ser ese peso:

$$x + y + z = 1$$

Como queremos que el paquete tenga de coste 8.5 € y sabemos el precio de cada tipo tenemos que el café colombiano de la mezcla valdrá $10x$, el café brasileño de la mezcla valdrá $6y$ y el café keniata de la mezcla valdrá $8z$ si sumamos las tres cantidades tenemos el coste total del paquete:

$$10x + 6y + 8z = 8.5$$

Por último, la cantidad de café colombiano de la mezcla (x) ha de ser el triple que la de café brasileño (y):

$$x = 3y$$

Uniendo las tres ecuaciones ya tenemos el sistema a resolver:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 10x + 6y + 8z = 8.5 \\ x = 3y \end{cases}$$

Pasamos las incógnitas al primer miembro para resolver:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 10x+6y+8z=8.5 \\ x-3y=0 \end{cases}$$

Podemos resolver por el Método de Gauss o por la Regla de Cramer. Yo lo voy a hacer aquí por los dos métodos, pero en el examen basta con cualquiera de ellos.

Por el Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8 & 8.5 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1.5 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right)$$

$E_2 = E_2 - 10\ E_1$ $\qquad$ $E_3 = E_3 - E_2$

$E_3 = E_3 - E_1$

De la última fila tenemos que: $z=0.5$

Con ese resultado vamos a la segunda fila y tenemos que:

$$-4y-2\cdot 0.5=-1.5 \rightarrow -4y-1=-1.5 \rightarrow -4y=-0.5 \rightarrow y=\frac{-0.5}{-4}=0.125$$

Con esos dos resultados vamos a la primera fila y tenemos que:

$x+0.125+0.5=1 \rightarrow x+0.625=1 \rightarrow x=0.375$

Por lo que el resultado de nuestro sistema es: $x=0.375;\ y=0.125;\ z=0.5$

Vamos ahora a resolverlo **por la Regla de Cramer**:

Matriz de los coeficientes: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Su determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0+8-30-6-0+24=-4\neq 0$

Como tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes no es cero podemos aplicar la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8.5 & 6 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{0+0-25.5-0-0+24}{-4}=\frac{-1.5}{-4}=0.375$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8.5 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{0+8+0-8.5-0-0}{-4}=\frac{-0.5}{-4}=0.125$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8.5 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0 + 8.5 - 30 - 6 - 0 + 25.5}{-4} = \frac{-2}{-4} = 0.5$$

El resultado es el mismo que el anterior.

Ahora vamos a responder a la cuestión del problema puesto que NO pregunta la cantidad de café sino el % de cada tipo. Como el paquete es de 1 kg ($100\ \%$) es muy fácil expresar el % (se puede hacer si se quiere por regla de tres):

0.375 kg son el $37.5\ \%$de un kilo

0.125 kg son el $12.5\ \%$de un kilo

0.5 kg son el $50\ \%$de un kilo

Por lo que la respuesta es:

El $37.5\ \%$es de café colombiano, el $12.5\ \%$es café brasileño y el$50\ \%$keniata.

Problema 2:

Consideramos las matrices

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula la inversa de la matriz $A - B$.

b) Calcula la matriz X de dimensión 2×3, que satisface la ecuación $XA + C = XB$.

c) ¿Es posible hacer el producto BC? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué.

Solución:

a) Calcula la inversa de la matriz $A - B$

Primero tenemos que calcular la matriz diferencia:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para saber **si existe la matriz inversa** comprobamos que el determinante de la misma no es cero:

$$|A - B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 0 - 0 - 0 - 0 = 6 \neq 0 \text{ por lo que } \exists (A-B)^{-1}$$

Para calcular la inversa podemos hacerlo por Gauss o por determinantes. Yo lo voy a hacer aquí de las dos maneras, pero en el examen basta con una de ellas.

Por el Método de **Gauss**:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right); \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right); \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right);$$

$F_1 \Leftrightarrow F_3$, $F_2 \Leftrightarrow F_3$ $\qquad F_2 = F_2 - 2F_1$ $\qquad F_2 = F_2 - F_3$ $\qquad F_2 = F_2/3$, $F_3 = F_3/2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Por lo que la inversa es:

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \frac{-\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \frac{-\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

No es obligatorio, pero SI CONVENIENTE comprobar el resultado multiplicando por la matriz original y viendo si el resultado es la identidad:

$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ luego es correcto el resultado.

Por **determinantes**:

Utilizamos la fórmula: $(A-B)^{-1}=\frac{1}{|A-B|}\left(Adj(A-B)\right)^t$

El determinante lo tenemos calculado previamente: $|A-B|=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=6$

$$(A-B)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 3\\ 6 & -4 & 0\end{pmatrix}^t=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 0 & 6\\ 2 & -2 & -4\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

Lógicamente el resultado es el mismo por lo que no vamos a comprobarlo.

b) Calcula la matriz X de dimensión 2 x 3, que satisface la ecuación $XA+C=XB$

Primero tenemos que resolver con las letras:

$XA+C=XB$ Trasponemos las X al primer miembro y el resto al segundo.

$XA-XB=-C$ Extraemos factor común la X en el primer miembro (por la izquierda)

$X(A-B)=-C$ Multiplicamos por la derecha por la inversa de $A-B$

$X(A-B)\cdot(A-B)^{-1}=-C\cdot(A-B)^{-1}$ Aplicamos que el producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad

$X\cdot I=-C\cdot(A-B)^{-1}$ El producto de una matriz por la identidad es la misma matriz

$X=-C\cdot(A-B)^{-1}$ Que es el cálculo que tenemos que realizar.

La matriz -C es cambiar de signo todos los elementos de C:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow -C = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz $(A-B)^{-1}$ la hemos calculado en el apartado anterior:

$$(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que asegurarnos que el producto puede realizarse. Es una matriz 2x3 por una matriz 3x3 por lo que el número de columnas de la primera coincide con el de filas de la segunda y podemos realizar el producto que será de dimensión 2x3.

$$X = -C \cdot (A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} \end{pmatrix}$$

Luego el resultado es:

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} \end{pmatrix}}$$

c) ¿Es posible hacer el producto BC? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué.

Dos matrices son multiplicables si el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda. La matriz B es de dimensión 3x3 mientras que la C es 2x3 por lo que NO es posible realizar el producto al no coincidir el número de columnas de B (3) con el de filas de C (2)

La matriz C es de dimensión 2x3 y la B es 3x3 por lo que SI es posible realizar el producto ya que coinciden el número de columnas de C (3) con el de filas de B (3). Realizamos el producto que será de dimensión 2x3:

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Problema 3:

Dada la función $f(x) = \frac{x^2-36}{x^2-2x-8}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores**.**

Solución:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$x^2 - 2x - 8 = 0$. Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1} = \frac{2\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{2\pm6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = 4 \\ \frac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$ → por lo que no existe en esos dos puntos:

$x = 4$y$x = -2$

El **dominio** será: $Domf(x) = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x) = 0$:

$f(x) = \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = 0$ por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$x^2 - 36 = 0 \rightarrow x = \pm 6$ por lo que la función **CORTA al eje OX en** $(-6, 0)$ **y** $(6, 0)$**.**

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de *f (x)* cuando $x = 0$:

$f(0) = \frac{0^2-36}{0^2-2\cdot0-8} = \frac{9}{2} = 4.5$ por lo que es el punto $\left(0, \frac{9}{2}\right)$ o $(0, 4.5)$

Puntos de intersección con los ejes son $(\mathbf{-6, 0})$; $(\mathbf{6, 0})$ **y** $(\mathbf{0, 4.5})$.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = 1$ luego **tiene asíntota horizontal en** $y = 1$.

No lo pide, pero para realizar el dibujo es útil hallar si la función va por encima o por debajo de la asíntota. Para ello hallamos valores grandes (positivos y negativos) de la función y los comparamos con el valor $y = 1$:

$f(15) = \frac{15^2-36}{15^2-2\cdot15-8} = \frac{189}{187} \simeq 1.01 > 1$ por lo que en $+\infty$ va por encima de la asíntota.

$f(-10) = \frac{(-10)^2-36}{(-10)^2-2\cdot(-10)-8} = \frac{64}{112} \simeq 0.57 < 1$ por lo que en $-\infty$ va por debajo de la asíntota.

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos dos: $x = -2;\ x = 4$, calculamos los límites:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = \left(\frac{-32}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = +\infty \end{cases} \text{ por lo que } x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = \left(\frac{-20}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 4^+} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = -\infty \end{cases} \text{ por lo que } x = 4 \text{ es asíntota vertical}$$

Las asíntotas son: $y = 1; x = -2; x = 4.$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

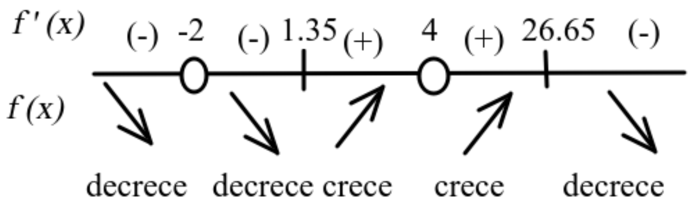
$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-2x-8)-(x^2-36)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x-8)^2} = \frac{2x^3-4x^2-16x-2x^3+2x^2+72x-72}{(x^2-2x-8)^2}$$
$$= \frac{-2x^2+56x-72}{(x^2-2x-8)^2}$$

Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$-2x^2+56x-72 = 0$. Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-56\pm\sqrt{56^2-4\cdot(-2)\cdot(-72)}}{2\cdot(-2)} = \frac{-56\pm\sqrt{2560}}{-4} \simeq \frac{-56\pm 50.6}{-4} = \begin{cases} \frac{-56+50.6}{-4} = 1.35 \\ \frac{-56-50.6}{-4} = 26.65 \end{cases}$$ por lo que tiene dos posibles puntos críticos: $x = 1.35$ y $x = 26.65$

Estos puntos son los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Con estos puntos y las discontinuidades del dominio $x = -2$ y $x = 4$ estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores considerados.



Los valores calculados para establecer el signo han sido:

$$f'(-3) \simeq -5.27 < 0$$
$$f'(0) = -1.125 < 0$$
$$f'(2) = 0.5 > 0$$
$$f'(5) \simeq 3.22 > 0$$
$$f'(30) \simeq -0.23 < 0$$

Por lo que tenemos que la función:

Decrece en]-∞, -2[U]-2, 1.35[U]26.65, +∞[, y crece en]1.35, 4[U]4, 26.65[

d) Los máximos y mínimos locales.

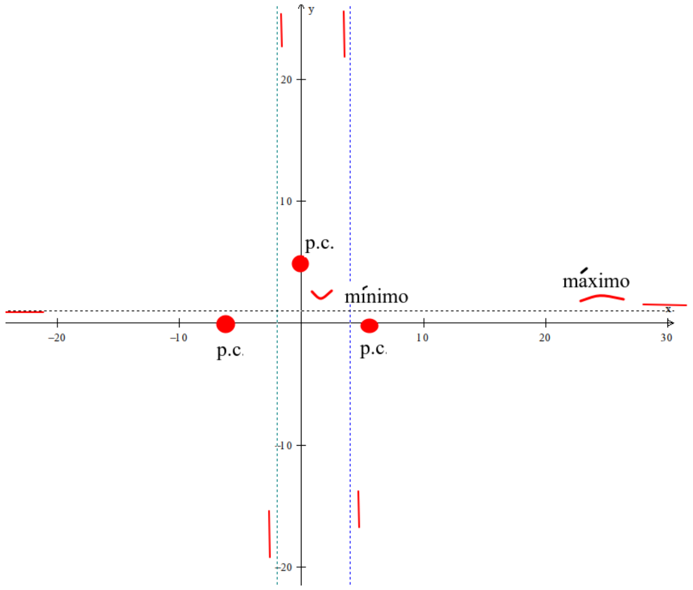
Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un mínimo en el punto de abscisa $x = 1.35$ que es el punto $(1.35, 3.85)$ (hemos calculado la coordenada y en la función original).

Y tiene un máximo en el punto de abscisa $x = 26.65$ que es el punto $(26.65, 1.04)$ (hemos calculado la coordenada y en la función original).

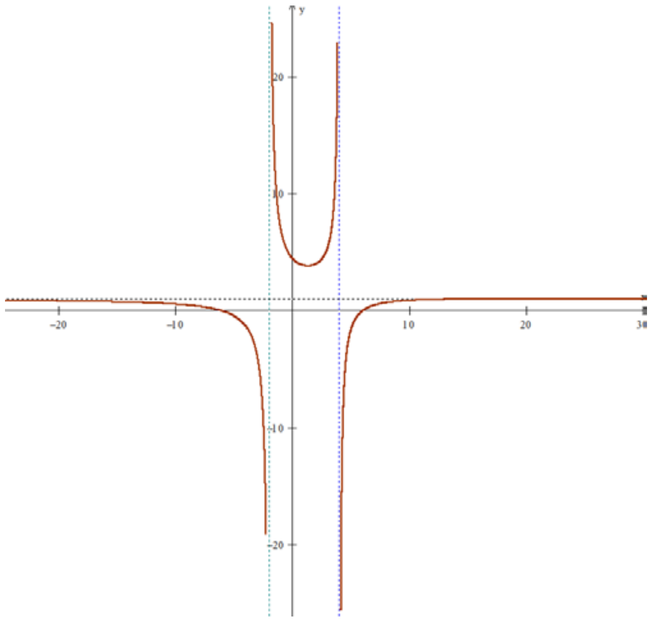
Mínimo: $(1.35, 3.85)$; Máximo: $(26.65, 1.04)$.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Dibujamos los puntos de corte $(6, 0)$,$(-6, 0)$ y $(0, 4.5)$, el mínimo $(1.35,\ 3.85)$ y el máximo $(26.65, 1.04)$, las asíntotas verticales en $x = -2$ y $x = 4$ (con sus tendencias a infinito) y la horizontal $y = 1$ con sus tendencias, y obtenemos:



La gráfica queda así:



Autor: Pedro Podadera Sánchez
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 4:

Una empresa ha estimado que los ingresos y gastos mensuales (en euros) que genera la fabricación de x unidades de producto vienen dados por las siguientes funciones:

Ingresos: $I(x) = 4x^2 + 800x$ Gastos: $G(x) = 6x^2 + 460x + 672$

a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable?

b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso?

c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta.

Solución:

a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable?

Consideramos siempre que los beneficios generados son los ingresos menos los gastos por lo que nuestra función de beneficios será:

$$B(x) = I(x) - G(x) = (4x^2 + 800x) - (6x^2 + 460x + 672) = -2x^2 + 340x - 672$$

Como se considera rentable cuando el beneficio es mayor o igual a cero tenemos que resolver la inecuación:

$$B(x) = -2x^2 + 340x - 672 \geq 0$$

Es una inecuación de segundo grado. Para resolverla primero tenemos que resolver la ecuación:

$-2x^2 + 340x - 672 = 0$

$$x = \frac{-340 \pm \sqrt{340^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-672)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-340 \pm \sqrt{110224}}{-4} = \frac{-340 \pm 332}{-4} = \begin{cases} \dfrac{-340 + 332}{-4} = 2 \\ \dfrac{-340 - 332}{-4} = 168 \end{cases}$$

Se trata de una función continua (polinómica de segundo grado) en esos dos valores vale cero comprobamos su signo antes y después de esos valores:

$B(1) = -2 \cdot 1^2 + 340 \cdot 1 - 672 = -334 < 0$

$B(10) = -2 \cdot 10^2 + 340 \cdot 10 - 672 = 2528 > 0$

$B(200) = -2 \cdot 200^2 + 340 \cdot 200 - 672 = -12672 < 0$

Por lo que la función es positiva o cero en el intervalo $[2, 168]$

Como nos preguntan por el **número mínimo** de unidades para que sea rentable podemos afirmar que este número es **2 unidades**.

El número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable es de 2 unidades.

Todo lo anterior también se puede razonar estudiando la función beneficio como una parábola cóncava (con el vértice hacia arriba) y hallando los puntos de corte con el eje OX.

b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso?

Buscamos un máximo absoluto de la función beneficio. Por el teorema de Bolzano Weierstrass si se trata de una función continua (polinómica de segundo grado) definida en un intervalo cerrado (sólo tiene sentido hablar de beneficios en el intervalo $[2, 168]$) alcanza en dicho intervalo un máximo y mínimo absolutos los cuales se encuentran en los extremos relativos o en los extremos del intervalo.

Para hallar los extremos relativos calculamos la derivada de la función beneficios:

$B(x) = -2x^2 + 340x - 672 \rightarrow B'(x) = -4x + 340$

Igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante:

$B'(x) = -4x + 340 = 0 \rightarrow -4x = -340 \rightarrow x = \frac{-340}{-4} = 85$

El valor $x = 85$ es un posible máximo, mínimo o punto de inflexión. Para conocer su naturaleza comprobamos el signo de la segunda derivada:

$B''(x) = -4 \rightarrow B''(85) = -4 < 0$ por lo que es un máximo.

Comprobamos ahora el valor de la función en el máximo relativo y en los extremos del intervalo considerado:

$$B(2) = 0$$
$$B(85) = 13778$$
$$B(168) = 0$$

Por lo que el valor $x = 85$ es un máximo absoluto.

Por lo tanto, tenemos que fabricar **85 unidades** para obtener un beneficio máximo de **13 778 €**

Todo lo anterior también se puede razonar estudiando la función beneficio como una parábola cóncava (con el vértice hacia arriba) y hallando el vértice de la misma (que es su máximo absoluto) y que se encuentra en el valor $x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{-340}{-4} = 85$

c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta.

Ahora el intervalo que tenemos que considerar no es $[2, 168]$ sino el $[100, 168]$ ya que el número mínimo de unidades fabricadas ha de ser 100.

Continuando con el razonamiento anterior una función continua (polinómica de segundo grado) definida en un intervalo cerrado (en este caso el $[100, 168]$) alcanza en dicho intervalo un máximo y mínimo absolutos los cuales se encuentran en los extremos relativos o en los extremos del intervalo. Como el máximo relativo hallado no está en el intervalo sólo tenemos que comprobar el valor en los extremos del mismo:

$$B(100) = -2 \cdot 100^2 + 340 \cdot 100 - 672 = 13328$$

$$B(168) = 0$$

Por lo que el máximo beneficio lo alcanza fabricando **100 unidades** y es de **13 328 €**

Problema 5:

En un sorteo, un jugador extrae dos bolas sin reemplazamiento de una urna que contiene 2 bolas blancas, 3 bolas amarillas y 5 bolas negras. El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas, consigue el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas y consigue el tercer premio si una de las dos bolas extraídas es blanca y la otra no lo es. No hay más premios en el sorteo.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio.

b) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio.

c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio?

Solución:

Es un problema de probabilidad en el que la experiencia es extraer dos bolas de una urna **sin reemplazamiento** lo que implica que, al sacar la primera bola, ésta queda excluida de la segunda extracción, por lo cual las probabilidades de la segunda extracción son diferentes puesto que tenemos una bola menos y, además, tendremos en cuenta el color de la primera bola extraída.

Definimos los sucesos:

B – "Extraer bola blanca"

A – "Extraer bola amarilla"

N – "Extraer bola negra"

1^{o} – "ganar el primer premio (dos bolas blancas)"

2^{o} – "ganar el segundo premio (dos bolas amarillas)"

3^{o} – "ganar el tercer premio (una bola blanca y otra no)"

Vamos a utilizar la ley de Laplace $P(X) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$ para calcular las probabilidades de los sucesos siguientes (en la primera extracción):

- Como en total hay 10 bolas y 2 son blancas tenemos que: $P(B) = \frac{2}{10} = 0.2$
- Como en total hay 10 bolas y 3 son amarillas tenemos que: $P(A) = \frac{3}{10} = 0.3$
- Como en total hay 10 bolas y 5 son negras tenemos que: $P(N) = \frac{5}{10} = 0.5$

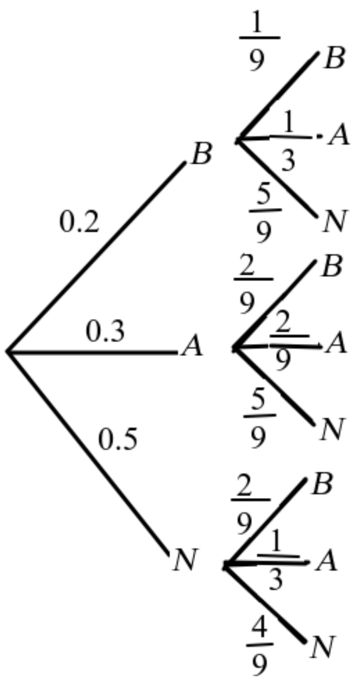
En la segunda extracción hay que tener en cuenta dos factores: hay una bola menos y el color de la bola extraída en la primera extracción (tendremos que utilizar la notación de condicionada):

Si la primera bola era blanca: $P(B/B) = \frac{1}{9};\ P(A/B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};\ P(N/B) = \frac{5}{9}$

Si la primera bola era amarilla: $P(B/A) = \frac{2}{9};\ P(A/A) = \frac{2}{9};\ P(N/A) = \frac{5}{9}$

Si la primera bola era negra: $P(B/N) = \frac{2}{9};\ P(A/N) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};\ P(N/N) = \frac{4}{9}$

Estas probabilidades se entienden mejor en un diagrama de árbol como el siguiente:



a) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio.

El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas y consigue el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas. Evidentemente ambos premios son sucesos excluyentes (si ganamos el primer premio no ganamos el segundo y al contrario) por lo cual la probabilidad pedida será la suma de conseguir el primer premio más la de conseguir el segundo premio:

$P(1º \cup 2º) = P(1º) + P(2º)$ (No hay una $P(1º \cap 2º)$)

Obtenemos las probabilidades pedidas:

Para obtener el primer premio tiene que extraer dos blancas. Por el diagrama sabemos que:

$$P(1º) = P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B/B) = 0.2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45} \simeq 0.0222 = 2.22\ \%$$

Para obtener el segundo premio tiene que extraer dos amarillas. Por el diagrama sabemos que:

$$P(2º) = P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A/A) = 0.3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15} \simeq 0.0667 = 6.67\ \%$$

Por lo que la respuesta es: $P(1º \cup 2º) = P(1º) + P(2º) = \frac{1}{45} + \frac{1}{15} = \frac{4}{45} \simeq 0.0889 = 8.89\ \%$

La probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio es **0.0889**.

b) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio.

El jugador consigue el tercer premio si una de las dos bolas extraídas es blanca y la otra no lo es. Es decir, tenemos todas estas combinaciones:

$B \cap A$; $B \cap N$; $A \cap B$ y $N \cap B$. (Hemos de tener en cuenta que la bola blanca puede salir en la primera o en la segunda extracción)

Como los sucesos vuelven a ser excluyentes la suma será la suma de los cuatro sucesos individuales. Hallamos las probabilidades pedidas utilizando el diagrama de árbol:

$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B) = 0.2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15} \simeq 0.0667 = 6.67\ \%$$

$$P(B \cap N) = P(B) \cdot P(N/B) = 0.2 \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{9} \simeq 0.1111 = 11.11\ \%$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0.3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15} \simeq 0.0667 = 6.67\ \%$$

$$P(B \cap N) = P(B) \cdot P(N/B) = 0.2 \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{9} \simeq 0.1111 = 11.11\ \%$$

Sumando las cuatro probabilidades obtenemos la probabilidad pedida:

$$P(3º) = \frac{1}{15} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{9} = \frac{16}{45} \simeq 0.3556 = 35.56\ \%$$

La probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio es **0.3556**.

c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio?

Como sabemos que ha obtenido premio en el sorteo se trata de probabilidad a posteriori y utilizaremos la **fórmula de Bayes:**

$$P(3\,º/1\,º \cup 2º \cup 3º) = \frac{P\big(3º \cap (1º \cup 2º \cup 3º)\big)}{P(1º \cup 2º \cup 3º)}$$

Como los sucesos son excluyentes (cuando obtenemos un premio no obtenemos el otro) tenemos que:

$P\big(3º \cap (1º \cup 2º \cup 3º)\big) = P(3º) = \frac{16}{45}$, (obtenido en el apartado anterior)

$$P(1º \cup 2º \cup 3º) = P(1º) + P(2º) + P(3º) = \frac{1}{45} + \frac{1}{15} + \frac{16}{45} = \frac{4}{9}$$

Sustituyendo valores: $P(3\,º/1\,º \cup 2º \cup 3º) = \frac{P(3º \cap (1º \cup 2º \cup 3º))}{P(1º \cup 2º \cup 3º)} = \frac{\frac{16}{45}}{\frac{4}{9}} = \frac{4}{5} = 0.8 = 80\ \%$

Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio es **0.8**.

Problema 6:

Una determinada enfermedad afecta actualmente al 5 % de la población. El único test disponible para detectar la enfermedad tiene una probabilidad del 99 % de clasificar correctamente a los enfermos (probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad), mientras que la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95 %. Se pide:

a) La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test.

b) La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test.

c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto.

d) Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un 1% de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona está enferma si ha dado positivo en el test en este caso?

Solución:

Es un problema de probabilidad. Tenemos que definir los sucesos yo he optado por esta notación:

E – Persona que tiene la enfermedad.

$\overline{E}$ – Persona que no tiene la enfermedad.

$(+)$ – El test dice que tiene la enfermedad.

(-) – El test dice que no tiene la enfermedad.

A partir de la definición de los sucesos vamos a ver qué probabilidades nos dan en el enunciado:

- El 5 % de la población tiene la enfermedad.

$$P(E) = 0.05$$

- Por lo tanto, el 95 % de la población no tiene la enfermedad.

$$P(\overline{E}) = 0.95$$

- El 99 % de las veces da positivo si la persona está enferma. Esto es una probabilidad condicionada, es decir:

$$P(+/E) = 0.99$$

- De lo anterior se deduce que el 1 % de las veces da negativo si la persona está enferma. Esto es una probabilidad condicionada también, es decir:

$$P(\text{-}/E) = 0.01$$

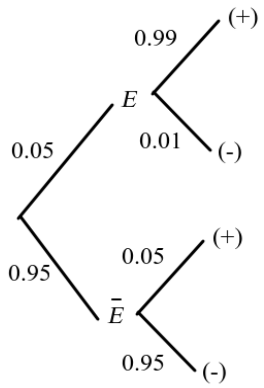
- El 95 % de las veces da negativo si la persona no está enferma. Esto es una probabilidad condicionada, es decir:

$$P(\text{-}/\overline{E}) = 0.95$$

- De lo anterior se deduce que el 5 % de las veces da positivo si la persona no está enferma. Esto es una probabilidad condicionada también, es decir:

$$P(+/\overline{E}) = 0.05$$

Vamos a situar todas estas probabilidades en un árbol:



Contestamos ahora a las cuestiones:

a) La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test.

Como sabemos que la persona ha dado positivo en el test eso quiere decir que se trata de probabilidad a posteriori y tenemos que utilizar la fórmula de Bayes:

$$P(E/+) = \frac{P(E \cap +)}{P(+)}$$

Hallamos las probabilidades que necesitamos utilizando el diagrama:

$P(E \cap +) = P(E) \cdot P(+/E) = 0.05 \cdot 0.99 = 0.0495$

Por la probabilidad total:

$$P(+) = P(E \cap +) + P(\overline{E} \cap +) = P(E) \cdot P(+/E) + P(\overline{E}) \cdot P(+/\overline{E}) = 0.05 \cdot 0.99 + 0.95 \cdot 0.05 = 0.097$$

Calculamos la probabilidad pedida:

$$P(E/+) = \frac{P(E \cap +)}{P(+)} = \frac{0.0495}{0.097} \simeq 0.5103 = 51.03\ \%$$

La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test es de **0.5103**.

b) La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test.

Como sabemos que la persona ha dado negativo en el test eso quiere decir que se trata de probabilidad a posteriori y tenemos que utilizar de nuevo la fórmula de Bayes:

$$P(\overline{E}/\text{-}) = \frac{P(\overline{E} \cap \text{-})}{P(\text{-})}$$

Hallamos las probabilidades que necesitamos utilizando el diagrama:

$P(\overline{E} \cap \text{-}) = P(\overline{E}) \cdot P(\text{-}/\overline{E}) = 0.95 \cdot 0.95 = 0.9025.$

Para hallar la probabilidad de test negativo podemos aplicar la probabilidad total (como antes) o bien la probabilidad del suceso contrario ya que conocemos la de dar positivo:

$P(\text{-}) = 1 - P(+) = 1 - 0.097 = 0.903$

Calculamos la probabilidad pedida:

$P(\overline{E}/\text{-}) = \frac{P(\overline{E} \cap \text{-})}{P(\text{-})} = \frac{0.9025}{0.903} \simeq 0.9994 = 99.94\%$

La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test es de **0.9994**.

c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto.

Hay dos casos en los que el resultado del test es correcto: cuando está enferma y da positivo y cuando no lo está y da negativo. La probabilidad que nos piden es la suma de ambas:

$$P(correcto) = P(E \cap +) + P(\overline{E} \cap \text{-})$$

Ambas probabilidades las hemos calculado antes:

$P(E \cap +) = P(E) \cdot P(+/E) = 0.05 \cdot 0.99 = 0.0495$

$P(\overline{E} \cap \text{-}) = P(\overline{E}) \cdot P(\text{-}/\overline{E}) = 0.95 \cdot 0.95 = 0.9025$

Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

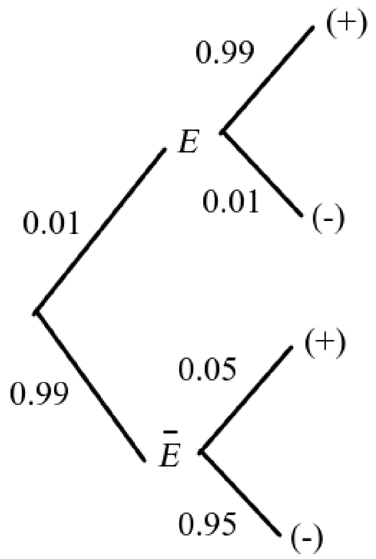
$P(correcto) = P(E \cap +) + P(\overline{E} \cap \text{-}) = 0.0495 + 0.9025 = 0.952 = 95.2\ \%$

La probabilidad de que el test dé el resultado correcto es de **0.952**.

d) Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un 1 % de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona está enferma si ha dado positivo en el test en este caso?

Si los indicios son correctos tenemos que cambiar el árbol en las primeras ramas ya que ahora:

$P(E) = 0.01$ y $P(\overline{E}) = 0.99$. Queda así:



Tenemos que repetir el apartado a) con los nuevos datos:

Como sabemos que la persona ha dado positivo en el test eso quiere decir que se trata de probabilidad a posteriori y tenemos que utilizar la fórmula de Bayes:

$$P(E/+) = \frac{P(E \cap +)}{P(+)}$$

Hallamos las probabilidades que necesitamos utilizando el nuevo diagrama:

$P(E \cap +) = P(E) \cdot P(+/E) = 0.01 \cdot 0.99 = 0.0099$

Por la probabilidad total:

$$P(+) = P(E \cap +) + P(\overline{E} \cap +) = P(E) \cdot P(+/E) + P(\overline{E}) \cdot P(+/\overline{E}) = 0.05 \cdot 0.99 + 0.95 \cdot 0.05 = 0.097$$

Calculamos la probabilidad pedida:

$P(E/+) = \frac{P(E \cap +)}{P(+)} = \frac{0.0099}{0.0594} \simeq 0.1667 = 16.67\ \%$

Si existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un $1\ \%$ de la población, entonces la probabilidad de que una persona está enferma si ha dado positivo en el test en este caso, es de **0.1667**.

Otras webs con problemas de Selectividad resueltos

En la web puedes encontrar muchos problemas resueltos de los propuestos en selectividad.

https://www.ebaumatematicas.com/

El objetivo de esta página web es ser una herramienta para dar fácil y rápido acceso a los exámenes EBAU de matemáticas II y matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II de todas las comunidades autónomas de España realizados los últimos años: 2017, 2018, 2019.

Aparecen los exámenes oficiales de la comisión organizadora de cada comunidad y dichos exámenes resueltos, a veces, de distintas maneras.

La resolución de los exámenes ha sido labor de Juan Antonio Martínez García, Juan Carlos Alonso Gianonatti, Germán Jesús Rubio Luna, Segundo Pérez, Julio García Galavis, Enrique Castaños García, Antonio Cascales Vicente, Jesus y José María Amorena Erdozáin..

Agradezco la generosa e importante aportación de cada uno de ellos.

Cuando la comisión organizadora de las pruebas EBAU ofrece la resolución o soluciones de las pruebas también se adjuntan esos archivos oficiales.

Tienen la intención de ser una web dinámica e ir creciendo poco a poco, y se agradecen aportaciones para corregir o añadir algún examen que falte en nuestra abundante oferta.

Solo aparecen los exámenes a partir del 2017, año en que se implantó la LOMCE y cambiaron los contenidos de las pruebas.

De distinta autores y de diferentes institutos, con enunciado y problemas resueltos de varios años.

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Con exámenes resueltos de Navarra

http://multiblog.educacion.navarra.es/jamorena/files/2019/09/Examen-ordinario-de-2019.pdf

Con exámenes resueltos de Andalucía

http://matestube.blogspot.com/2019/06/2-bachillerato-examen-matematicas-ii.html

Con exámenes resueltos de Andalucía

https://www.emestrada.org/2019-septiembre-examen-selectividad-matematicas-andalucia/

Con exámenes resueltos de Cataluña
http://universitats.gencat.cat/ca/pau/model_examens/

Autor: Isaac Musat. Problemas de la Comunidad de Madrid. Sólo enunciados, pero de muchos años. Organizados por materias.
http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf
Del mismo autor. Problemas resueltos de Madrid y Valencia. Los del año 2019 a partir de la página 503.
http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

Centro aragonés de Tecnologías para la educación
http://catedu.es/matematicas_mundo/PAU/PAU.htm

Exámenes de Selectividad de Extremadura resueltos. De autor: Vicente González Valle. Organizados por materias: Análisis, Álgebra, Geometría y Probabilidad y Estadística
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf

Autor: Pedro Reina. Exámenes de selectividad resueltos de la Comunidad de Madrid hasta el año 2015
http://pedroreina.net/pau/

Página de Orientación Andújar con exámenes resueltos hasta el año 2011.
http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/

Selectividad de la Comunidad de Madrid hasta el 2015
http://www.ejerciciosmatematicas.net/selectividad/

Autor: Segundo Pérez. Selectividad en la comunidad valenciana hasta el 2019
http://www.segundoperez.es/

Selectividad del País Vasco hasta el 2019.
https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak

Varias comunidades, varios exámenes resueltos
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-
tic/18008841a/helvia/aula/archivos/repositorio/0/117/html/selectividadmatematicas/index.html

Vídeos con las soluciones de exámenes
https://www.youtube.com/watch?v=DJFSsrvY1BM

Las universidades en ocasiones editan las soluciones de los problemas que se han propuesto.

SELECTIVIDAD 2021

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

ÍNDICE

1. Andalucía 3
2. Aragón 37
3. Asturias 64
4. Baleares 93
5. Canarias 120
6. Cantabria 150
7. Castilla – La Mancha 178
8. Castilla y León 209
9. Cataluña 234
10. Extremadura 252
11. Galicia 281
12. La Rioja 296
13. Madrid 326
14. Murcia 357
15. Navarra 381
16. País Vasco 402
17. Valencia 426
18. Otras webs con problemas de Selectividad resueltos 468

ÍNDICE 470