MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Ismael Montero Penido

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención del resultado deben estar suficientemente justificados.

BLOQUE A

Problema 1:

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x)=\frac{ax^2+bx+2}{x-1}$ (para $x\neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $P(1,1)$ y tiene pendiente 2. Calcula los valores de a y b.

Problema 2:

Sea la función continua $f: R\to R$ definida por $f(x)=\begin{cases}(3x-6)e^x & si\ x\leq 0\\ \frac{36(sen\,x-ax)}{x^3} & si\ x>0\end{cases}$.

$a)$ Calcula el valor de a.

$b)$ Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto que tiene por abscisa $x=-1$.

Problema 3:

Considera la función continua $f: R\to R$ definida por $f(x)=4x^3-x^4$.

$a)$ Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

$b)$ Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.

Problema 4:

Considera la función $F: [0,+\infty)\to R$ definida por $F(x)=\int_0^x\left(2t+\sqrt{t}\right)\cdot dt$. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x=1$.

BLOQUE B

Problema 5:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}mx+2y-z=1\\ 5x-4y+2z=0\\ x+3my=m+2/5\end{cases}$.

$a)$ Discute el sistema según los valores de m.

$b)$ Resuelve el sistema para $m=0$. ¿Hay alguna solución en la que $x=0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Problema 6:

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. ¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Problema 7:

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$.

$a)$ Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1, 0, -5)$.

$b)$ Calcula el seno del ángulo que forma r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$.

Problema 8:

La recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s, que pasa por los puntos $P(1, 0, 2)$ y $Q(a, 1, 0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

BLOQUE A

Problema 1:

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{ax^2+bx+2}{x-1}$ (para $x \neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $P(1,1)$ y tiene pendiente 2. Calcula los valores de a y b.

Solución:

$f(x)$ tiene una asíntota oblicua en una recta $y = mx + n$, que cumple las siguientes condiciones:

Pasa por el punto $(1,1)$, es decir, $\boxed{y(1) = 1}$

Tiene pendiente 2, es decir, $\boxed{m = 2}$

Sabiendo que $y(1) = m + n = 1 \overset{m=2}{\Longrightarrow} 2 + n = 1 \Rightarrow \boxed{n = -1}$

Luego la asíntota oblicua de la función es $y = 2x - 1$

Por otro lado, se sabe que $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - n)$. Por tanto:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+2}{x^2-x} = a = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+bx+2}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+bx+2-2x^2+2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2+b)x+2}{x-1} = 2 + b = -1 \Rightarrow b = -3$$

Luego, $\boxed{\boldsymbol{a = 2}}$ y $\boxed{\boldsymbol{b = -3}}$

Problema 2:

Sea la función continua $f: R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} (3x-6)e^x & si\ x \leq 0 \\ \frac{36(sen\,x - ax)}{x^3} & si\ x > 0 \end{cases}$.

a) Calcula el valor de a.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto que tiene por abscisa $x = -1$.

Solución:

a) Vamos a imponer la condición de continuidad en el punto de ruptura $x = 0$

$f(0) = -6$

$\lim_{x \to 0^-} (3x-6)e^x = -6$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{36(sen(x) - ax)}{x^3} = \frac{0}{0} = indeterminación$

Aplicamos la regla de L'Hôpital

$\lim_{x \to 0^+} \frac{36(cos(x) - a)}{3x^2} = \frac{36(1-a)}{0}$.

El límite tiene que ser finito, por tanto $1 - a = 0 \iff \boxed{a = 1}$

Seguimos aplicando la regla de L'Hôpital

$\lim_{x \to 0^+} \frac{36(-sen(x))}{6x} = \frac{0}{0} = indeterminación$

Vuelvo a aplicar la regla de L'Hôpital

$\lim_{x \to 0^+} \frac{36(-\cos(x))}{6} = -\frac{36}{6} = -6$

En efecto, se observa que, como $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = -6$, la función es continua.

Luego, para $\boxed{\boldsymbol{a = 1}}$ la función será continua en $\mathbb{R}$

b) Para hallar la recta tangente a f en $x = -1$, debemos coger el primer trozo de función: $f_1(x) = (3x-6)e^x$, por estar definida en $x \leq 0$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = -1$ viene dada por:

$y - f_1(-1) = f_1'(-1)(x+1)$

Derivamos la función:

$f_1'(x) = 3e^x + (3x-6)e^x = e^x(3x-3)$

Hallamos $f_1(-1)$ y $f_1'(-1)$:

$f_1(-1) = -\frac{9}{e}$

$f_1'(-1) = -\frac{6}{e}$

Sustituyendo en la ecuación de la recta tangente obtenemos que:

$$y - \left(-\frac{9}{e}\right) = \left(-\frac{6}{e}\right)(x+1);$$

$$y = -\frac{6}{e}x - \frac{6}{e} - \frac{9}{e}$$

La ecuación de la recta tangente es: $\boxed{y = -\frac{6}{e}x - \frac{15}{e}}$

Problema 3:

Considera la función continua $f: R \to R$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^4$.

$a)$ Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

$b)$ Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.

Solución:

a) Para estudiar la monotonía, hay que estudiar el signo de la derivada.

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3$$

$$f'(x) = 0 \iff 12x^2 - 4x^3 = 0 = 4x^2(3-x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Intervalos	$(-\infty, \mathbf{0})$	$(\mathbf{0}, \mathbf{3})$	$(\mathbf{3}, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$+$	$+$	$-$
	↗ Crece	↗ Crece	↘ Decrece

Por tanto, la función crece en $(-\infty, 3)$ y decrece en $(3, +\infty)$

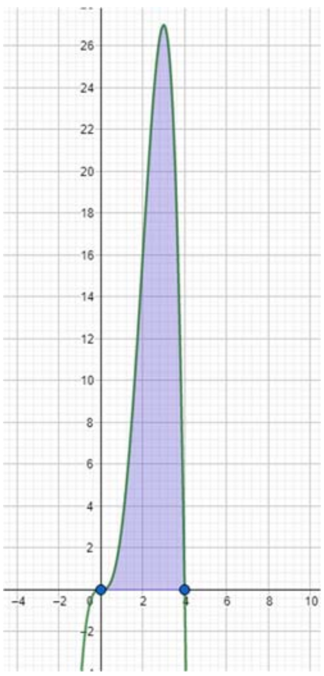
b) Para el esbozo de la gráfica, sería conveniente sacar el punto máximo (aptdo. a) y los puntos de corte con los ejes.

Del apartado anterior, $x = 3$ es un máximo con valor $f(3) = 27$

Calculamos los puntos de corte con el eje OX

$$f(x) = 0 \to x^3(4-x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son: $O(0,0)$ y $P(4,0)$



Luego el área de la región limitada por la función y el eje de abscisa es:

$$A = \int_0^4 (4x^3 - x^4)\,dx = \left[x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^4 = 4^4 - \frac{4^5}{5} = \frac{256}{5} = 51.2\,u^2$$

Por tanto, el área de la región es $\boxed{\mathbf{51.2}\,\boldsymbol{u^2}}$

Autor: Ismael Montero Penido
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 4:

Considera la función $F: [0, +\infty) \to R$ definida por $F(x) = \int_0^x \left(2t + \sqrt{t}\right) \cdot dt$. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto $x = 1$ es:

$$y - F(1) = F'(1)(x - 1)$$

Calculamos $F(1)$ y $F'(1)$:

$$F(1) = \int_0^1 \left(2t + \sqrt{t}\right) dt = \left[t^2 + \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_0^1 = \left[t^2 + \frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo de Integral, sabemos que $F'(x) = 2x + \sqrt{x}$, por tanto, $F'(1) = 3$

Luego la ecuación de la recta tangente es:

$$y - \tfrac{5}{3} = 3(x - 1);$$

$$y = 3x - 3 + \tfrac{5}{3};$$

$$y = 3x - \frac{4}{3}$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto $x = 1$ es $\boxed{\boldsymbol{y = 3x - \frac{4}{3}}}$

RESPUESTAS BLOQUE B

Problema 5:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx+2y-z=1 \\ 5x-4y+2z=0 \\ x+3my=m+2/5 \end{cases}$.

$a)$ Discute el sistema según los valores de m.

$b)$ Resuelve el sistema para $m=0$. ¿Hay alguna solución en la que $x=0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:

a) Escribimos la matriz ampliada: $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3m & 0 & m+\frac{2}{5} \end{array}\right)$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$|A| = -15m+4-4-6m^2 = 0 \iff -6m^2-15m=0=-3m(2m+5) \iff \begin{cases} m=0 \\ m=-\frac{5}{2} \end{cases}$

Empezamos la discusión usando el teorema de Rouché – Fröbenius para deducir su clasificación.

CASO 1: Si $m \neq 0\ y\ m \neq -\frac{5}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow rg(A)=3=rg(A^*)=nº\ de\ incógnitas \Longrightarrow$ $Sistema\ compatible\ determinado\ (1\ única\ solución)$

CASO 2: Si $m=-\frac{5}{2} \Longrightarrow |A|=0 \Longrightarrow rg(A)<3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{5}{2} & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & -\frac{15}{2} & 0 & -\frac{21}{10} \end{array}\right)$$

- Calculo el rango de A

  Como $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -\frac{15}{2} & 0 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \Longrightarrow rg(A)=2$

- Calculo el rango de A^*

  Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -\frac{15}{2} & 0 & -\frac{21}{10} \end{vmatrix} = -\frac{42}{5}+15+\frac{42}{5} = 15 \neq 0 \Longrightarrow rg(A^*)=3$

Como $rg(A) \neq rg(A^*) \Longrightarrow Sistema\ incompatible\ (no\ tiene\ solución)$

CASO 3: Si $m=0 \Longrightarrow |A|=0 \Longrightarrow rg(A)<3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2/5 \end{array}\right)$$

- Calculo el rango de A

  Como $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Longrightarrow rg(A) = 2$
- Calculo el rango de A^*

  Como $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \Longrightarrow rg(A^*) = 2$

Como

$$rg(A) = rg(A^*) < nº\ de\ incógnitas$$
$$\Longrightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado\ (infinitas\ soluciones)$$

Resumiendo:

Si $m \neq 0$ y $m \neq -\frac{5}{2} \Longrightarrow$ Sistema es compatible determinado (única solución)

Si $m = 0 \Longrightarrow$ Sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Si $m = -\frac{5}{2} \Longrightarrow$ Sistema es incompatible (no tiene solución)

b) Para $m = 0$, tendríamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Por lo que $\boxed{x = \frac{2}{5}}$

Sea $\boxed{y = \lambda}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, de la 2º ecuación obtenemos que: $\boxed{z = 2\lambda - 1}$

Comprobamos que la segunda ecuación se verifica para estos tres valores:

$5 \cdot \frac{2}{5} - 4\lambda + 2(2\lambda - 1) = 2 - 4\lambda + 4\lambda - 2 = 0$

Para la segunda parte del apartado, como $x = \frac{2}{5} \neq 0$, no existe ninguna solución en la que la variable x sea nula.

Luego la solución del sistema es $\left(\frac{2}{5}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{2}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{1}\right), \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

No hay solución en la que $x = 0$

Problema 6:

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. ¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

Solución:

Sean:
$x = nº\ de\ botellas\ que\ se\ producen\ cada\ hora.$
$y = nº\ de\ garrafas\ que\ se\ producen\ cada\ hora.$
$z = nº\ de\ bidones\ que\ se\ producen\ cada\ hora.$

Una botella necesita 50 gramos de polietileno, lo que equivale a 0.05 kg
Una garrafa necesita 100 gramos de polietileno, lo que equivale a 0.1 kg

Por tanto, el uso del polietileno por cada hora viene dada por la ecuación: $0.05\,x + 0.1\,y + z = 10$
Se debe producir el doble de botellas que de garrafas significa que: $x = 2y \Longrightarrow x - 2y = 0$
Las máquinas producen en total 52 productos cada hora significa que: $x + y + z = 52$

Por tanto, el sistema de ecuaciones que nos queda sería:

$$\begin{cases} 0.05x + 0.1y + z = 10 \\ x - 2y = 0 \\ x + y + z = 52 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera fila por 20 para eliminar decimales:

$$\begin{cases} x + 2y + 20z = 200 \\ x - 2y = 0 \\ x + y + z = 52 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema usando la regla de Cramer:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 20 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 20 + 40 - 2 = 56$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 200 & 2 & 20 \\ 0 & -2 & 0 \\ 52 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-400+2080}{56} = \frac{1680}{56} = 30$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 200 & 20 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 52 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1040-200}{56} = \frac{840}{56} = 15$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 200 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 52 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-104+200+400-104}{56} = \frac{392}{56} = 7$$

Por tanto, deben de producirse **30 botellas, 15 garrafas y 7 bidones** cada hora.

Problema 7:

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$.

$a)$ Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1, 0, -5)$.

$b)$ Calcula el seno del ángulo que forma r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$.

Solución:

a) Para calcular un plano perpendicular a la recta s, el vector normal de dicho plano coincide con el vector director de la recta s. Por tanto, $\vec{n} = (-2, 1, 2)$

Teniendo en cuenta que las coordenadas del vector normal son los coeficientes de x, y, z de la ecuación general del plano, tenemos que:

$$-2x + y + 2z + D = 0$$

Como este plano pasa por el punto $P(1, 0, -5)$, sustituyendo obtendríamos el valor del término independiente D:

$-2 - 10 + D = 0;$

$D = 12$

Luego, el plano perpendicular a s y que pasa por P es: $\boldsymbol{-2x + y + 2z + 12 = 0}$

b) El seno del ángulo entre la recta r y el plano π viene dado por:

$$sen(\widehat{r,\pi}) = \frac{|\overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{d_r}| \cdot |\vec{n}|}$$

donde $\overrightarrow{d_r}$ y $\vec{n}$ son el vector director de la recta r y el vector normal del plano respectivamente.

Calculamos $\overrightarrow{d_r} = (2, -3, 1) \times (-3, 2, 2) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} - 5\vec{k} = (-8, -7, -5)$

El vector normal de π es: $\vec{n} = (-2, 1, 2)$

Luego,

$$sen(\widehat{r,\pi}) = \frac{|\overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{d_r}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|16 - 7 - 10|}{\sqrt{(-8)^2 + (-7)^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{138} \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{3\sqrt{138}}$$

Por tanto, $\boldsymbol{sen(\widehat{r,\pi}) = \frac{1}{3\sqrt{138}}}$

Problema 8:

La recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s, que pasa por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(a,1,0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

Solución:

De la recta r conocemos un punto $A(-3,-4,3)$ y su vector director, $\overrightarrow{d_r} = (2,2,3)$.

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son $\begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = -4 + 2\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$

De la recta s conocemos los puntos P y Q y su vector director lo hallamos determinando $\overrightarrow{PQ}$

Por tanto, $\overrightarrow{d_s} = (a-1, 1, -2)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta s son $\begin{cases} x = 1 + (a-1)\beta \\ y = \beta \\ z = 2 - 2\beta \end{cases}$

Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} \overrightarrow{d_r} \\ \overrightarrow{d_s} \end{pmatrix}$ y $M^* = \begin{pmatrix} \overrightarrow{d_r} \\ \overrightarrow{d_s} \\ \overrightarrow{AP} \end{pmatrix}$, r y s se cortarán en un punto si $rg(M) = rg(M^*) = 2$

$\overrightarrow{AP} = (4,4,-1)$

Construyo la matriz M y estudio su rango:

$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ a-1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0 \Longrightarrow rg(M) = 2$

Construyo la matriz M^* y estudio su rango:

$M^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ a-1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Esta matriz tendrá rango igual a 2 si $|M^*| = 0$

$|M^*| = -2 + 12a - 12 - 16 - 12 + 16 + 2a - 2 = 14a - 28$

$14a - 28 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

Por tanto, r y s se cortan en un punto si $\boxed{\boldsymbol{a = 2}}$

Para hallar el punto de corte de ambas rectas, igualamos las ecuaciones paramétricas para obtener los valores de λ y β

$$\begin{cases} -3+2\lambda = 1+\beta \\ -4+2\lambda = \beta \\ 3+3\lambda = 2-2\beta \end{cases}$$

Sustituyendo $\beta = -4 + 2\lambda$ en la primera y tercera ecuación, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{cases} -3+2\lambda = 1-4+2\lambda \\ \ 3+3\lambda = 2+8-4\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \text{ (Se verifica la ecuación)} \\ 7\lambda = 7 \end{cases}$$

Por tanto, $\lambda = 1$ y $\beta = -2$

Para sacar el punto de corte, sustituimos λ o β en r o s respectivamente.

$x = -3 + 2 = -1;$

$y = -4 + 2 = -2;$

$z = 3 + 3 = 6$

Por tanto, el punto de corte de r y s es $\mathbf{(-1, -2, 6)}$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención del resultado deben estar suficientemente justificados.

BLOQUE A

Problema 1:

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos x)+b\cdot sen\, x-2\cdot(e^x-1)}{x^2}=7$.

Problema 2:

Halla $a>b$ y $b>0$ sabiendo que la gráfica de la función $f: R\to R$ dada por $f(x)=\frac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto $P(1,2)$ un punto crítico.

Problema 3:

Considera la función continua $f: R\to R$ definida por $f(x)=1+\int_0^x t\cdot e^t\cdot dt$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Problema 4:

Considera la función f definida por $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ (para $x\neq -1, x\neq 1$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $P(2,4)$.

BLOQUE B

Problema 5:

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}$.

$a)$ Comprueba que $A^2=-A^{-1}$.

$b)$ Dadas las matrices $B=\begin{pmatrix}1&-1\\3&0\\-1&5\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&0\\-3&2\\1&-1\end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica:

$A^4X+B=AC$.

Problema 6:

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

$a)$ Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes de cada ruta. Razona la respuesta.

$b)$ Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta?

Problema 7:

La recta r perpendicular desde el punto $A(1,1,0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

$a)$ Calcula la ecuación del plano π.

$b)$ Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π.

Problema 8:

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

$a)$ Estudia la posición relativa de r y s.

$b)$ Halla la recta t que corta perpendicularmente a r y a s.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

Problema 1:

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{a(1-\cos x)+b\cdot sen\,x-2\cdot(e^x-1)}{x^2}=7$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a(1-cos(x))+bsen(x)-2(e^x-1)}{x^2}=\frac{0}{0}=IND.$$

Aplicamos la Regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{asen(x)+bcos(x)-2e^x}{2x}=\frac{b-2}{0}$$

Para que el límite sea finito, es necesario que $b-2=0$, luego $b=2$.

Por tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{asen(x)+2\cos(x)-2e^x}{2x}=\frac{0}{0}=IND.$$

Aplicamos la Regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{acos(x)-2sen(x)-2e^x}{2}=\frac{a-2}{2}$$

Para que el límite valga 7, debe de ocurrir que $\frac{a-2}{2}=7$, luego $a=16$

Luego, $\boxed{\boldsymbol{a=16}}$ y $\boxed{\boldsymbol{b=2}}$

Problema 2:

Halla $a > b$ y $b > 0$ sabiendo que la gráfica de la función $f: R \to R$ dada por $f(x) = \frac{bx^2}{1+ax^4}$ tiene en el punto $P(1, 2)$ un punto crítico.

Solución:

Como $f(x)$ tiene en $(1, 2)$ un punto crítico, significa que:

$f(1) = 2$

$f'(1) = 0$

Derivamos la función:

$$f'(x) = \frac{2bx\cdot(1+ax^4) - bx^2\cdot 4ax^3}{(1+ax^4)^2} = \frac{2bx + 2bax^5 - 4bax^5}{(1+ax^4)^2} = \frac{2bx - 2bax^5}{(1+ax^4)^2}$$

Aplicamos las condiciones del problema:

- $f(1) = 2 \Leftrightarrow f(1) = \frac{b}{1+a} = 2 \Leftrightarrow b = 2 + 2a$
- $f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = \frac{2b-2ba}{(1+a)^2} = 0 \Leftrightarrow 2b - 2ba = 0 \Leftrightarrow 2b(1-a) = 0 \Leftrightarrow 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Por tanto, $b = 2 + 2 \cdot 1 = 4$

Luego, $\boxed{\boldsymbol{a = 1}}$ y $\boxed{\boldsymbol{b = 4}}$

Problema 3:

Considera la función continua $f: R \to R$ definida por $f(x) = 1 + \int_0^x t \cdot e^t \cdot dt$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Solución:

En primer lugar, veamos cuánto vale $f(x)$:

$$f(x) = 1 + \int_0^x te^t\, dt = 1 + \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{bmatrix}_0^x = 1 + [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt =$$

$$= 1 + [te^t - e^t]_0^x = 1 + xe^x - e^x + 1 = 2 + e^x(x-1)$$

Para ver la curvatura de la función, vamos a estudiar el signo de la segunda derivada.

Por el teorema fundamental del cálculo integral, tenemos que:

$$f'(x) = xe^x$$

Por tanto:

$$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

Igualamos a cero la segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Luego:

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
Signo de $f''(x)$	$-$	$+$
	$\cap$ Cóncava	$\cup$ Convexa

Luego f es cóncava en $(-\infty, -1)$ y convexa en $(-1, +\infty)$

El punto de inflexión se encuentra en $x = -1$, donde $f(-1) = 2 + e^{-1}(-1-1) = 2 - \frac{2}{e}$

$f(x)$ es cóncava en $(-\infty, -1)$ y convexa en $(-1, +\infty)$

Cuyo punto de inflexión es $\boldsymbol{P\left(-1, 2 - \frac{2}{e}\right)}$

Problema 4:

Considera la función f definida por $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ (para $x\neq -1, x\neq 1$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $P(2,4)$.

Solución:

$F(x)=\int \frac{x^2+1}{x^2-1}dx$

Como el grado del numerador es igual al grado del denominador, dividimos ambos polinomios para expresar la fracción como $cociente(x)+\frac{resto(x)}{divisor(x)}$

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 + & 0x & +1 & x^2-1 \\ \cline{4-4} -x^2 + & 0x & +1 & 1 \\ \hline & & 2 & \end{array}$$

Luego:

$$F(x)=\int dx+\int \frac{2}{x^2-1}dx = x+\int \frac{2}{(x+1)(x-1)}dx$$

Expresamos $\frac{2}{(x+1)(x-1)}$ como suma de fracciones simples:

$\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1};$

$2=A(x-1)+B(x+1)$

- Si $x=-1 \Longrightarrow 2=-2A \Longrightarrow A=-1$
- Si $x=1 \Longrightarrow 2=2B \Longrightarrow B=1$

Por tanto,

$F(x)=x+\int \frac{2}{(x+1)(x-1)}dx = x+\int \frac{-1}{x+1}dx+\int \frac{1}{x-1}dx = x-\ln|x+1|+\ln|x-1|+C, C\in\mathbb{R}$

Como la primitiva de f pasa por el punto $(2,4)$, entonces $F(2)=4$.

$F(2)=2-\ln 3+\ln 1+C=2-\ln 3+C=4 \Longrightarrow C=2+\ln 3$

Por tanto, $\boldsymbol{F(x)= x-\ln|x+1|+\ln|x-1|+2+\ln 3}$

RESPUESTAS BLOQUE B

Problema 5:

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$a)$ Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$.

$b)$ Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica

$A^4X + B = AC$.

Solución:

a) *Si* $A^2 = -A^{-1} \Longrightarrow A^{-1} = -A^2$

Calculamos $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

Luego $-A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Como A^{-1} es una matriz que verifica que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, si $A \cdot (-A^2) = I$, vamos a tener que, efectivamente, $A^2 = -A^{-1}$

Calculamos $A \cdot (-A^2) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Por tanto, queda demostrado que $\boldsymbol{A^2 = -A^{-1}}$

b) $A^4X + B = AC \rightarrow A^4X = AC - B \rightarrow$

$X = (A^4)^{-1}(AC - B) = (A^2 \cdot A^2)^{-1}(AC - B) = \left(-A^{-1} \cdot (-A^{-1})\right)^{-1}(AC - B)$;

$$\boxed{X = A^2(AC - B)};$$

Calculamos

$AC - B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 9 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

Luego:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}}$

Problema 6:

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

a) Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes de cada ruta. Razona la respuesta.

b) Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta?

Solución:

Sean:
$A = nº\ de\ viajes\ semanales\ por\ la\ ruta\ A$
$B = nº\ de\ viajes\ semanales\ por\ la\ ruta\ B$
$C = nº\ de\ viajes\ semanales\ por\ la\ ruta\ C$

El enunciado nos plantea las siguientes ecuaciones

- Semanalmente hace un total de 70 viajes: $A + B + C = 70$
- El número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C: $B = A + C$

Con lo que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones de 3 incógnitas con dos ecuaciones:

$$\begin{cases} A + B + C = 70 \\ A - B + C = 0 \end{cases}$$

a) Se sabe que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70:

$$2(A + C) = 70 \rightarrow A + C = 35$$

Luego el sistema de ecuaciones que tenemos que resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} A + B + C = 70 \\ A - B + C = 0 \\ A + C = 35 \end{cases}$$

Vamos a clasificar el sistema usando el Teorema de Rouché – Fröbenius:

Sea $A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 35 \end{array}\right)$

Estudiamos el rango de A

- Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$
- Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Estudiamos el rango de A^*

- Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 35 \end{vmatrix} = -35 + 70 - 35 = 0 \Rightarrow rg(A^*) = 2$

Por tanto, como $rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ de\ incógnitas$, entonces el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

No se puede deducir el número de viajes por cada ruta pues el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

b) El doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5:

$$2C = B - 5 \rightarrow B - 2C = 5$$

El sistema resultante que tenemos que resolver viene dado por:

$$\begin{cases} A + B + C = 70 \\ A - B + C = 0 \\ B - 2C = 5 \end{cases}$$

Resolvemos por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & 0 & -70 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

Luego el sistema asociado es:

$$\begin{cases} A + B + C = 70 \\ -2B = -70 \\ B - 2C = 5 \end{cases}$$

De la segunda ecuación obtenemos que $\boxed{B = 35}$

Sustituyendo en la tercera ecuación tenemos que:

$35 - 2C = 5 \rightarrow 2C = 35 - 5 = 30 \rightarrow \boxed{C = 15}$

De la primera ecuación tenemos que:

$A + 35 + 15 = 70 \rightarrow \boxed{A = 20}$

Por tanto, semanalmente se realizan **20** viajes por la ruta A, **35** viajes por la ruta B y **15** viajes por la ruta C

Problema 7:

La recta r perpendicular desde el punto $A(1,1,0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

$a)$ Calcula la ecuación del plano π.

$b)$ Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π.

Solución:

a) Se sabe que el punto $B \in \pi$

Como la recta que pasa por A y B es perpendicular al plano que queremos obtener, el vector $\overrightarrow{AB}$ es el vector normal al plano, que llamaremos $\vec{n}$

$$\overrightarrow{AB} = \left(1-1,\frac{1}{2}-1,\frac{1}{2}\right) = \left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Tomamos un vector proporcional (multiplicando por 2) al que acabamos de obtener para eliminar las fracciones: $\vec{n} = (0,-1,1)$

Por tanto, la ecuación general del plano viene dado por:

$$-y+z+D=0$$

Sustituto por el punto $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \in \pi$

$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+D=0 \Rightarrow D=0$

Luego, $\boldsymbol{\pi \equiv -y+z=0}$

b) Sea A' el punto simétrico de A respecto del plano, se cumple que $d(A,A') = 2d(A,B)$

Por tanto, $d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \left|\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$

Entonces $d(A,A') = 2d(A,B) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\ u$

Luego, $\boldsymbol{d(A,A') = \sqrt{2}\ u}$

Problema 8:

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

$a)$ Estudia la posición relativa de r y s.

$b)$ Halla la recta t que corta perpendicularmente a r y a s.

Solución:

a) Paso a paramétricas la recta s:

Sea $y = \beta, \forall \beta \in \mathbb{R}$

De la primera ecuación: $x = 1 - \beta$

Luego $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \beta \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases}$

De r conocemos un punto A y un vector director $\overrightarrow{d_r}$: $\begin{cases} A(3, 1, -3) \\ \overrightarrow{d_r} = (1, 0, -1) \end{cases}$

De s conocemos un punto B y un vector director $\overrightarrow{d_s}$: $\begin{cases} B(1, 0, 0) \\ \overrightarrow{d_s} = (-1, 1, 0) \end{cases}$

Construimos las siguientes matrices:

$$M = \begin{pmatrix} \overrightarrow{d_r} \\ \overrightarrow{d_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^* = \begin{pmatrix} \overrightarrow{d_r} \\ \overrightarrow{d_s} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculo el rango de M

- Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 2$

Calculo el rango de M^*

- Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 - 2 = 3 - 3 = 0 \Rightarrow rg(M^*) = 2$

Como $rg(M) = rg(M^*) = 2 \Longrightarrow r\ y\ s\ son\ secantes.$

Por tanto, las **rectas r y s se cortan** en un punto.

b) Como r y s se cortan en un punto, la recta perpendicular a ambas, que llamaremos t, estará formada por el punto de corte de r y s y el vector director que será el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas:

$$t \equiv \begin{cases} C\ es\ el\ punto\ de\ interseccion\ de\ r\ y\ s \\ \overrightarrow{d_t} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte de las rectas:

$$\begin{cases} 3+\lambda = 1-\beta \\ 1 = \beta \\ -3-\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

Sustituyo $\beta = 1$ en las ecuaciones paramétricas de s:

$$\begin{cases} x = 1-1 = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Por tanto, el punto de intersección es $C = (0, 1, 0)$

En segundo lugar, calculamos el vector director $\overrightarrow{d_t}$

$$\overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k} = (1, 1, 1)$$

Luego la recta perpendicular a r y a s es $\boldsymbol{t} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{x = \mu} \\ \boldsymbol{y = 1 + \mu} \\ \boldsymbol{z = \mu} \end{cases}$