MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A Un operador turístico vende a las agencias locales viajes concertados al Caribe, Islas Maldivas y Tailandia. A una primera agencia A le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Maldivas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13.000 euros. Y a una tercera agencia C le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7.000 euros. Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio del viaje a cada uno de los destinos. Y calcula, si es posible, dicho precio. (1.5 puntos)

b) Si le obligasen a rebajar un 20 % el precio del viaje al Caribe dejando los otros iguales, ¿cuánto dinero perdería? (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el precio del viaje a las Islas Maldivas necesario para compensar la bajada del 20 % del viaje al Caribe y así recaudar el mismo dinero? (se mantiene el precio del viaje a Tailandia). (0.5 puntos)

Bloque 1.B Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Escribe el sistema de ecuaciones $AX = X$ en la forma $BX = 0$. (0.5 puntos)

b) Estudia para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones. (1 punto)

c) Para $a = 0$ calcula, si existe, la inversa de A. (1 punto)

Bloque 2.A Sean las parábolas $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = ax^2 + b$

a) Calcula los valores de a y b para que en el punto de abscisa $x = 2$ las dos parábolas tengan la misma recta tangente. Calcula dicha recta tangente. (1 punto)

b) Para $a = 1, b = 1$ esboza el recinto limitado por las parábolas entre el eje Y y el punto de corte entre ellas. Calcula el área del mismo. (1.5 puntos)

Bloque 2.B Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo. (2.5 puntos)

Universidad de Oviedo
Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad
2020-2021

Textos Marea Verde

Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

Bloque 3.A Dadas las rectas $r: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = z$ y $s: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases}$

a) Comprueba que las rectas se cruzan. (0.75 puntos)

b) Obtenga el plano π que contiene a s y es paralelo a la recta r. Halla la distancia entre el punto $P=(-1,1,0)$ de la recta r y el plano π (1.25 puntos)

c) Calcula la distancia entre las rectas. (0.5 puntos)

Bloque 3.B Dados los puntos $A(1,1,0)$ y $B(0,0,2)$ y la recta $r: \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1+\lambda \\ z &= 1+\lambda \end{cases}$ Halla:

a) Un punto $C \in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en B. (1.25 puntos)

b) El plano π que pasa por A y B y es paralelo a r. (1.25 puntos)

Bloque 4.A En un edificio hay dos ascensores. Cada vecino, cuando utiliza el ascensor, lo hace en el primero el 60 % de las veces y en el segundo el 40 %. El porcentaje de fallos del primer ascensor es del 3 % y del segundo es del 8 %.

a) Un vecino usa un ascensor. ¿Cuál es la probabilidad de que el ascensor falle? (1.25 puntos)

b) Otro día, un vecino coge un ascensor y le falla. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido el segundo? (1.25 puntos)

Bloque 4.B Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 2$. Calcula:

a) La probabilidad de que $X \in [6,10]$. (1.5 puntos)

b) Se hace una revisión de los datos y se observa que la media coincide pero la probabilidad del 80 % se alcanza en el valor $X \leq 12$. ¿Cuál es la nueva desviación típica? (1 punto)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.8416) = 0.8$, $F(1) = 0.8413$, $F(1.25) = 0.8944$, $F(1.375) = 0.9154$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(2) = 0.9772$)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Un operador turístico vende a las agencias locales viajes concertados al Caribe, Islas Maldivas y Tailandia. A una primera agencia A le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Malvinas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12 000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13 000 euros. Y a una tercera agencia C le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7 000 euros. Se pide:

$a)$ Plantea un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio del viaje a cada uno de los destinos. Y calcula, si es posible, dicho precio.

$b)$ Si le obligasen a rebajar un 20 % el precio del viaje al Caribe dejando los otros iguales, ¿cuánto dinero perdería?

$c)$ ¿Cuál sería el precio del viaje a las Maldivas necesario para compensar la bajada del 20 % del viaje al Caribe y así recaudar el mismo dinero? (se mantiene el precio del viaje a Tailandia).

Solución:

$a)$ Llamamos x, y, z los precios de los viajes al Cairo, las Maldivas o Tailandia, respectivamente.

Con los datos del enunciado escribimos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 10x + 10y + 10z = 12\,000 \\ 10x + 20z = 13\,000 \\ 10x + 10y = 7\,000 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} x + y + z = 1\,200 \\ x + 2z = 1\,300 \\ x + y = 700 \end{array}$$

Resolvemos utilizando la *regla de Cramer*:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1\,200 & 1 & 1 \\ 1\,300 & 0 & 2 \\ 700 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{100\cdot\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 13 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1+2-2} = \frac{100\cdot(13+14-24)}{1} = 100 \cdot 3 = 300.$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 1\,200 & 1 \\ 1 & 1\,300 & 2 \\ 1 & 700 & 0 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 1 & 13 & 2 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 100 \cdot (7 + 24 - 13 - 14) = 100 \cdot 4 = 400.$$

$$z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\,200 \\ 1 & 0 & 1\,300 \\ 1 & 1 & 700 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 13 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 100 \cdot (12 + 13 - 13 - 7) = 100 \cdot 5 = 500.$$

El precio de los viajes es, al Caribe, $\boldsymbol{300\ euros}$, a las Maldivas, $\boldsymbol{400\ euros}$ y a Tailandia, $\boldsymbol{500\ euros}$.

$b)$ Como al Caribe organiza $(10 + 10 + 10) = 30$ viajes, por los que percibe: $30 \cdot 300 = 9\,000$ euros, si tiene que rebajar el 20 % deja de percibir el 20 % de 9 000: $20\ \%\ de\ 9.000 = \frac{20\cdot 9.000}{100} = 1\,800$.

Perdería $\boldsymbol{1\,800\ euros}$

$c)$ Como la agencia realiza $(10 + 10) = 20$ viajes a las Maldivas por los cuales percibe 8 000 euros, al tener que recuperar las pérdidas por la rebaja de los viajes al Caribe, debe de percibir:

$8\,000 + 1\,800 = 9\,800$ euros que para cada uno de los 20 viajes: $\frac{9\,800}{20} = 490$.

El precio del viaje a las Maldivas debe ser de $\boldsymbol{490\ euros}$

Problema 2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, a \in R$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$a)$ Escribe el sistema de ecuaciones $AX = X$ en la forma $BX = O$.

$b)$ Estudia para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones.

$c)$ Para $a = 0$ calcula, si existe, la inversa de A.

Solución:

$a)$ Reescribimos el sistema:

$A \cdot X = X \rightarrow\ A \cdot X - X = O \rightarrow\ A \cdot X - I \cdot X = O \rightarrow (A - I) \cdot X = O.$

$$(A - I) \cdot X = O$$

Como nos piden expresar $AX = X$ en la forma $BX = O$ tiene que ser $B = A - I$.

El producto de dos matrices es la matriz nula únicamente cuando alguna de las matrices es nula; como X no es nula, necesariamente debe serlo $B = A - I = O$.

$$B = A - I \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

El sistema homogéneo resulta: $\left.\begin{array}{r} (a-1)x - z = 0 \\ -x - y = 0 \\ y + (a-1)z = 0 \end{array}\right\}$

$b)$ Al tratarse de un sistema homogéneo para que tenga solución distinta de la solución trivial, la matriz de coeficientes, B, tiene que tener un rango menor que 3, que es el número de incógnita, por lo cual ha, de ser $|B| = 0$:

$$|B| = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = 0 = -(a-1)^2 + 1 = 0 \rightarrow\ (a-1)^2 - 1 = a^2 - 2a + 1 - 1 =$$
$$a(a-2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 2.$$

Tiene infinitas soluciones para $a = 0$ y para $a = 2$

$c)$ Para $a = 0$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ entonces A tiene matriz inversa. La calculamos por el método de Gauss.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\{F_1 \leftrightarrow F_2\} \qquad \{F_1 \rightarrow -F_1\} \qquad \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \qquad \{F_3 \rightarrow -F_3\}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

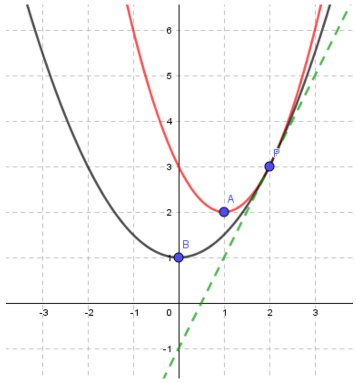
Textos Marea Verde

Problema 3:

Sea las parábolas $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = ax^2 + b$.

$a)$ Calcula los valores de a y b para que en el punto de abscisa $x = 2$ las dos parábolas tengan la misma recta tangente. Calcula dicha recta tangente.

$b)$ Para $a = 1, b = 1$ esboza el recinto limitado por las parábolas entre el eje Y y el punto de corte entre ellas. Calcula el área del mismo.



Solución:

$a)$ Para $x = 2$ el punto de tangencia es común a las dos parábolas:

$$y_1(2) = y_2(2) \Rightarrow 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = a \cdot 2^2 + b;\;\; 4a + b = 3.$$

Imponemos que tengan la misma pendiente para $x = 2$:

$$y_1'(2) = y_2'(2) \Rightarrow \begin{Bmatrix} y_1' = 2x - 2 \\ y_2' = 2ax \end{Bmatrix} \Rightarrow y_1'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = y_2'(2) = 2a \cdot 2 \to$$
$$2 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Sustituimos el valor de a en la ecuación $4a + b = 3$: $4 \cdot \frac{1}{2} + b = 3 = \; 2 + b \Rightarrow b = 1$.

Las parábolas son entonces $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = \frac{1}{2}x^2 + 1$. El punto de tangencia es $P(2,3)$ y la pendiente es $m = y_1'(2) = 4 - 2 = 2$.

La recta tangente es: $y = 3 + 2(x - 2) = 2x - 1$.

$\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$. La $\boldsymbol{b = 1}$. recta tangente es: $\boldsymbol{y = 2x - 1}$

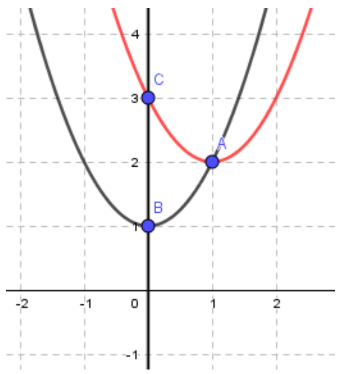
$b)$ Las nuevas parábolas dadas son: $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = x^2 + 1$. Ambas parábolas son convexas $(\cup)$ por tener positivos los coeficientes de x^2. Calculamos sus vértices:

$y_1'(x) = 2x - 2 = 0 = 2(x - 1) \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1,2)$

El vértice de $y_2 = x^2 + 1$ es $B(0,1)$.

Las parábolas de cortan en el vértice de la primera: $A(1,2)$.

Como se puede observar por la gráfica, el recinto limitado por las parábolas entre el eje Y y el punto de corte entre ellas es el limitado por los puntos $A(1,2), B(0,1)$ y $C(0,3)$.



La superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^1 [y_1(x) = y_2(x)] \cdot dx = \int_0^1 [(x^2 - 2x + 3) - (x^2 + 1)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2x + 3 - x^2 - 1) \cdot dx = \int_0^1 (-2x + 2) \cdot dx = \left[-\frac{2x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = [-x^2 + 2x]_0^1 =$$

$$= (-1^2 + 2 \cdot 1) - 0 = -1 + 2 = 1.$$

$\boldsymbol{S = 1\, u^2}$

Textos Marea Verde

Problema 4:

Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo.

Solución:

Llamamos a los números $a, b, \frac{a+b}{2}$.

La suma es 90:

$a + b + \frac{a+b}{2} = 90 \rightarrow 2a + 2b + a + b = 180 = 3a + 3b \rightarrow \ a + b = 60 \Rightarrow b = 60 - a.$

El producto queremos que sea máximo: $P = a \cdot b \cdot \frac{a+b}{2}$.

$P(a) = a \cdot (60 - a) \cdot \frac{a+(60-a)}{2} = a \cdot (60 - a) \cdot 30 = 30 \cdot (60a - a^2).$

Una función tiene un máximo relativo cuando, en un punto en el que exista la deriva primera, se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada.

$P'(a) = 15 \cdot (60 - 2a) = 30 \cdot (60 - 2a).$

$P'(a) = 0 = 60 \cdot (30 - a) \Rightarrow a = 30.$

$P''(a) = -60 < 0 \Rightarrow$ Tenemos un máximo para $a = 30$, $b = 60 - a = 30, \frac{a+b}{2} = 30.$

Los tres números son: $\mathbf{30, 30\ y\ 30}$

Textos Marea Verde

Problema 5:

Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = z \ y \ s: \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$:

$a)$ Comprueba que las rectas se cruzan.

$b)$ Obtenga el plano π que contiene a s y es paralelo a la recta r. Halla la distancia entre el punto $P(-1, 1, 0)$ de la recta r y el plano π.

$c)$ Calcula la distancia entre las rectas.

Solución:

$a)$ Escribimos las ecuaciones paramétricas de $s \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son:

Recta r: $P(-1, 1, 0) \ y \ \overrightarrow{v_r} = (3, -2, 1)$. Recta s: $B(-1, 0, 1) \ y \ \overrightarrow{v_s} = (-2, 1, 0)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ no son proporcionales por lo que son linealmente independientes, por tanto, las rectas $r \ y \ s$ se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Consideramos el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $P \in r$ y extremo el punto $B \in s$:

$\vec{w} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = [(-1, 0, 1) - (-1, 1, 0)] = (0, -1, 1)$.

Si los tres vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ no son coplanarios las rectas r y s se cruzan, y si lo son, se cortan.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero.

$Rang \ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 - 4 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ No son coplanarios, luego:

Las rectas se cruzan.

$b)$ Del plano π sabemos que por contener a s tiene como un vector de orientación: $\overrightarrow{v_s}$ y que contiene al punto $B(-1, 0, 1) \in s$. Por ser paralelo a r tiene como vector de orientación a $\overrightarrow{v_r} \ y \ \overrightarrow{v_s}$:

$\pi(B; \ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 = -(x + 1) - 2y - (z - 1) \rightarrow \ x + 1 + 2y + z - 1 = 0.$

$$\pi \equiv x + 2y + z = 0$$

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $P(-1, 1, 0)$ y al plano $\pi \equiv x + 2y + z = 0$:

$d(P, \pi) = \frac{|1\cdot(-1)+2\cdot 1+1\cdot 0|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{|-1+2+0|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

$$d(P, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{6} \ unidades$$

Textos Marea Verde

$c)$ Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, y el vector $\vec{w} = (0, -1, 1)$. Calculamos su volumen, que por una parte es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también es el producto del área de la base por la altura, siendo la altura igual a la distancia d pedida entre las rectas.

$$V = \overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \vec{w}) = |\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| \cdot h = |\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| \cdot d \Rightarrow d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \vec{w})|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|}.$$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \vec{w})|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix} \right\|}{\left| \begin{matrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{matrix} \right|} = \frac{|3+2-4|}{|-2j+3k-4k-i|} = \frac{1}{|-i-2j-k|} = \frac{1}{|i+2j+k|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\boldsymbol{d(r,s) = \frac{\sqrt{6}}{6}\, u}$$

Textos Marea Verde

Problema 6:

Dados los puntos $A(1,1,0)\ y\ B(0,0,2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$. Halla:

$a)$ Un punto $C \in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en B.

$b)$ El plano π que pasa por $A(1,1,0)\ y\ B(0,0,2)$ y es paralelo a r.

Solución:

$a)$ Un punto genérico de r es $P(1, 1+\lambda, 1+\lambda)$.

Los puntos $A(1,1,0)$, $B(0,0,2)$ y $P(1,1+\lambda,1+\lambda)$ determinan los siguientes vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BP}$:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,0,2) - (1,1,0)] = (-1,-1,2)$.

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = [(1,1+\lambda,1+\lambda) - (0,0,2)] = (1,1+\lambda,-1+\lambda)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 = (-1,-1,2) \cdot (1,1+\lambda,-1+\lambda) = -1-1-\lambda-2+2\lambda = -4+\lambda = 0 \to \lambda = 4 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{C(1,5,5)}$$

$b)$ Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (0,1,1)$, que va a ser un vector director del plano π. Como nos dicen que plano π que pasa por $A(1,1,0)\ y\ B(0,0,2)$, conocemos un punto, por ejemplo $B(0,0,2)$, y el otro vector de orientación $\overrightarrow{AB} = (-1,-1,2)$:

$$\pi\left(B;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 = 3x - y + (z-2) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv 3x - y + z - 2 = 0}$$

Textos Marea Verde

Problema 7:

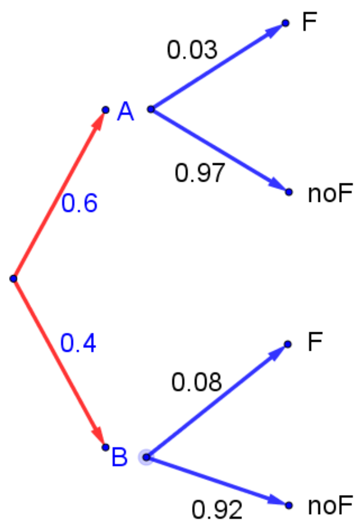
En un edificio hay dos ascensores. Cada vecino, cuando utiliza el ascensor, lo hace en el primero el 60 % de las veces y en el segundo el 40 %. El porcentaje de fallos del primer ascensor es del 3 % y del segundo es del 8 %.

a) Un vecino usa un ascensor. ¿Cuál es la probabilidad de que el ascensor falle?

b) Otro día, un vecino coge un ascensor y le falla. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido el segundo?

Solución:

Llamamos A al suceso usar el primer ascensor, y B al suceso usar el segundo. Llamamos F al suceso que falle el ascensor, y noF a que no falle. Llevamos los datos del enunciado a un diagrama de árbol:



a) $P(F) = P(A) \cdot P(F/A) + P(B) \cdot P(F/B) = 0.6 \cdot 0.03 + 0.4 \cdot 0.08 = 0.018 + 0.032 = 0.05.$

$$P(F) = \mathbf{0.05}$$

b) Es una probabilidad condicionada:

$$P(B/F) = \frac{P(B\cap F)}{P(F)} = \frac{P(B)\cdot P(F/B)}{P(F)} = \frac{0.4\cdot 0.08}{0.05} = \frac{0.032}{0.05} = 0.64.$$

$$P(B/F) = \mathbf{0.64}$$

Textos Marea Verde

Problema 8:

Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 2$. Calcula:

$a)$ La probabilidad de que $X \in [6, 10]$.

$b)$ Se hace una revisión de los datos y se observa que la media coincide pero la probabilidad del 80 % se alcanza en el valor $X \leq 12$. ¿Cuál es la nueva desviación típica?

(Algunos valores de la función de distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x), F(0) = 0.5;\quad F(0.8416) = 0.8;\quad F(1) = 0.8413;\quad F(1.25) = 0.8944;\quad F(1.375) = 0.9154;\quad F(1.5) = 0.9332;\quad F(2) = 0.9772$).

Solución:

$a)$ En el enunciado nos dicen que es una distribución normal de $\mu = 10;\ \sigma = 2$.

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(10, 2)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-10}{2}$.

$$P(X \in [6, 10]) = P(6 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{6-10}{2} \leq Z \leq \frac{10-10}{2}\right) = P(-2 \leq Z \leq 0) =$$

$$P(Z \leq 0) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 0) - [P(Z > 2)] = P(Z \leq 0) - [1 - P(Z < 2)] =$$

$$P(Z \leq 0) - 1 + P(Z < 2) = 0.5 - 1 + 0.9772 = 1.4772 - 1 = 0.4772.$$

$$P(X \in [6, 10]) = \mathbf{0.4772}$$

$b)$ Nos dicen que: $P(X \leq 12) = 0.8$

$P(X \leq 12) = 0.8 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{12-10}{\sigma'}\right) = \left(Z \leq \frac{2}{\sigma'}\right) = 0.8$.

Mirando en la tabla $N(0, 1)$ de forma inversa, al valor 0.8 le corresponde, aproximadamente, 0.84:

$\frac{2}{\sigma'} \cong 0.84 \to \frac{2}{0.84} \cong \sigma' \cong 2.38$.

La nueva desviación típica es aproximadamente $\mathbf{2.38}$.

Textos Marea Verde

Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrl} ax & & & + & z & = a \\ 2x & - & y & - & z & = -1 \\ x & & & + & az & = a \end{array}\right\}$ $a \in \mathbb{R}$.

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de a. (1.5 puntos)

b) Resuélvelo para los casos en que el sistema sea compatible indeterminado. (1 punto)

Bloque 1.B Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) Si existe, su inversa. (1 punto)

b) La matriz X cuadrada de orden 3 que verifica:

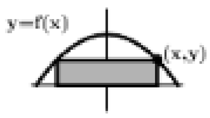
$$(X + A)^2 - X^2 - X \cdot A = I_3 \qquad (I_3 \text{ matriz identidad de orden 3}).$$ (1.5 puntos)

Bloque 2.A Sea la función $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

a) Haz un esbozo de su gráfica determinando: dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y regiones de convexidad y concavidad. (1.5 puntos)

b) Calcula el área de la región limitada por la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$, la recta $y = 1$ y el eje de ordenadas. (1 punto)

Bloque 2.B En una nave industrial se quiere instalar una pantalla de cine (ver figura). La forma de la nave es la descrita por la gráfica de la función $f(x) = 12 - \dfrac{x^2}{3} \geq 0$. Calcula los valores positivos (x, y) que hacen máxima el área de la pantalla. (2.5 puntos)



Textos Marea Verde

Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

Bloque 3.A

Sea el tetraedro de la figura formado por $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,6)$ y $D(\alpha,3,1)$. Calcula:

a) El área del triángulo limitado por los puntos A, B y C. (0.5 puntos)

b) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C. (0.75 puntos)

c) El valor de α para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π anterior. (0.75 puntos)

d) Para $\alpha = 5$, el punto D' simétrico de D respecto al plano π. (0.5 puntos)

Bloque 3.B Sean el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ Calcula:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r. (0.75 puntos)

b) La distancia de r a P y el punto $Q \in r$ donde se alcanza dicha distancia. (1 punto)

c) La ecuación del plano π que contiene a r y está a la misma distancia de P que r. (0.75 puntos)

Bloque 4.A Se tienen tres cajas. En la caja A hay 4 bolas negras y 6 bolas rojas. En la caja B, 6 dados negros y 2 dados rojos y en la caja C, 2 dados negros y 4 dados rojos. El suceso consiste en sacar una bola y un dado. En primer lugar se extrae al azar una bola de la caja A. Si es negra, se extrae al azar un dado de la caja B pero, si la bola es roja se extrae al azar un dado de la caja C. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos sin relación entre ellos:

a) La probabilidad de que la bola y el dado sean rojos. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que la bola y el dado sean del mismo color. (0.75 puntos)

c) La probabilidad de que el dado sea rojo. (1 punto)

Bloque 4.B Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 30$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

a) La probabilidad de que $X \leq 20$. (1.25 puntos)

b) Se hace una revisión de los datos y se observa que la probabilidad del 50 % se alcanza en el valor $X \leq 35$. y la probabilidad del 75 % se alcanza en el valor $X \leq 40$. ¿Cuáles son las nuevas media y desviación típica? (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.6745) = 0.75$, $F(0.8416) = 0.8$, $F(1) = 0.8413$, $F(1.375) = 0.9154$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(2) = 0.9772$)

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{matrix} ax+z=a \\ 2x-y-z=-1 \\ x+az=a \end{matrix}\right\}, a \in R.$

$a)$ Estudia y clasifica el sistema según los valores de a.

$b)$ Resuélvelo para los casos en que el sistema sea compatible indeterminado.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & a & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}=-a^2+1=0;\;\; a^2=-1 \Rightarrow a_1=-1, a_2=1.$$

Para $a \neq -1$ y para $a \neq 1$ el rengo de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada, e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible determinado.

Para $a=-1$ la matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ de rango 3.

$$\left\{\begin{matrix} F_2 \to F_2+2F_1 \\ F_3 \to F_3+F_1 \end{matrix}\right\}$$

Como el rango de la matriz de los coeficientes es 2, y el de la matriz ampliada es 3, el sistema es incompatible.

Para $a=1$ la matriz ampliada es$M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene la fila primera igual a la tercera, por lo que su rango es 2, igual al rango de la matriz de los coeficientes y menor al número de incógnitas, por lo que el sistema compatible indeterminado.

$b)$ Para $a=1$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} x+z=1 \\ 2x-y-z=-1 \\ x+z=1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{matrix} x+z=1 \\ 2x-y-z=-1 \end{matrix}\right\}$. Haciendo $z=\lambda \to\;\; x=1-\lambda \to 2(1-\lambda)-y-\lambda=-1 \to y=3-3\lambda$

$$x=1-\lambda, y=3-3\lambda, z=\lambda, \forall\lambda \in R$$

Textos Marea Verde

Problema 2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula:

$a)$ Si existe, su inversa.

$b)$ La matriz X cuadrada de orden 3 que verifica: $(X + A)^2 - X^2 - X \cdot A = I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3.

Solución:

$a)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 - 2 - 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ La matriz es invertible

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

$b)$ $(X + A)^2 - X^2 - X \cdot A = I_3 \rightarrow \ X^2 + 2 \cdot X \cdot A + A^2 - X^2 - X \cdot A = I_3 \rightarrow X \cdot A + A^2 = I_3 \rightarrow$

$X \cdot A = I_3 - A^2 \rightarrow \ X \cdot A \cdot A^{-1} = (I_3 - A^2) \cdot A^{-1} \rightarrow X = (I_3 - A^2) \cdot A^{-1}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$I_3 - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -8 \\ -6 & -4 & -8 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X = (I_3 - A^2) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -8 \\ -6 & -4 & -8 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Textos Marea Verde

Problema 3:

Sea la función $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

$a)$ Haz un esbozo de su gráfica determinando: dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y regiones de convexidad y concavidad.

$b)$ Calcula el área de la región limitada por la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$, la recta $y = 1$ y el eje de ordenadas.

Solución:

$a)$ $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.

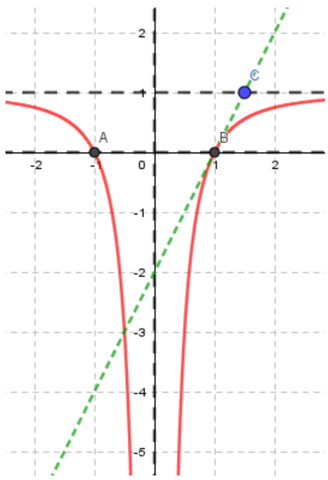
Dominio: Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador: $x^2 = 0 \to x = 0 \ \Rightarrow D(f) \Rightarrow R - \{0\}$.

Los *puntos de intersección* con el eje X son:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2} = 0; \ \ x^2 - 1 = 0; \ \ x_1 = -1 \to A(-1,0); \ \ x_2 = 1 \to B(1,0).$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito. $k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1 \Rightarrow y = 1$.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.



No tiene asíntotas oblicuas.

Una función es *creciente o decreciente* cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot x^2-(x^2-1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2-2x^2+2}{x^3} = \frac{2}{x^3}.$$

$f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$ decreciente. $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, +\infty)$ creciente

Una función tiene un *máximo o mínimo* relativo en un punto en que sea derivable, si se anula su primera derivada en ese punto. $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} = 0$. No hay máximos ni mínimos.

Una función es *cóncava* $(\cap)$ o *convexa* $(\cup)$ cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente. $f''(x) = \frac{-2\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-6}{x^4} < 0, \forall x \in D(f)$. La función es cóncava en todo su dominio.

La función es *simétrica* con respecto al eje de ordenadas, pues $f(-x) = f(x)$.

$b)$ Para $x = 1$ es $f(1) = \frac{1^2-1}{1^2} = 0$, por lo cual el punto de tangencia es $B(1,0)$. La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es el valor de la primera derivada de la función en ese punto: $m = f'(1) = \frac{2}{1^3} = 2$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por: $y = y_0 + m(x - x_0)$:

Textos Marea Verde

$y = 0 + 2 \cdot (x - 1) = 2x - 2.$

El punto de intersección de la tangente $y = 2x - 2$ y la recta $y = 1$ es:

$$\left.\begin{array}{r} y = 2x - 2 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x - 2 = 1 \Rightarrow \ 2x = 3 \Rightarrow \ x = \frac{3}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}, 1\right).$$

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$Área = \int_0^{\frac{3}{2}} [1 - (2x - 2)] \cdot dx = \int_0^{\frac{3}{2}} (1 - 2x + 2) \cdot dx = \int_0^{\frac{3}{2}} (3 - 2x) \cdot dx = \left[3x - \frac{2x^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{2}} =$$

$$[3x - x^2]_0^{\frac{3}{2}} = \left[3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] - 0 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{18-9}{4} = \frac{9}{4}.$$

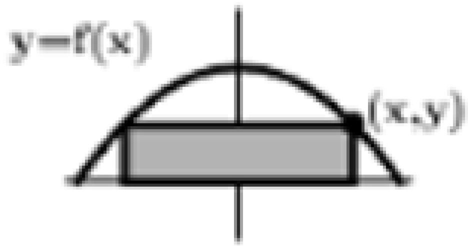
O bien, es un triángulo de base 3/2 y altura 3, luego $Área = \left(\frac{\frac{3}{2} \cdot 3}{2}\right) = \frac{9}{4}\ u^2$

$$Área = \boldsymbol{\frac{9}{4}\ u^2} = 2.25\ u^2$$

Textos Marea Verde

Problema 4:

En una nave industrial se quiere instalar una pantalla de cine (ver figura). La forma de la nave es la descrita por la gráfica de la función $f(x) = 12 - \frac{x^2}{3} \geq 0$. Calcula los valores positivos (x, y) que hacen máxima el área de la pantalla.



Solución:

Las coordenadas del punto P de la función, son: $P\left(x, 12 - \frac{x^2}{3}\right)$.

Teniendo en cuanta que la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas: $f(-x) = -f(x)$.

La dimensión de la pantalla, en función de x, es:

$S(x) = 2 \cdot x \cdot \left(12 - \frac{x^2}{3}\right) = 24x - \frac{2x^3}{3} = \frac{2}{3} \cdot (36x - x^3)$.

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$S'(x) = \frac{2}{3} \cdot (36 - 3x^2) = 2 \cdot (12 - x^2)$.

$S'(x) = 0 = 2 \cdot (12 - x^2) = 0 \Rightarrow\ 12 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

La raíz negativa no se ha tenido en cuenta por ser una longitud.

$$S''(x) = 2 \cdot (-2x) = -4x \Rightarrow S''\left(2\sqrt{3}\right) = -8\sqrt{3} < 0$$

Por tanto, es un máximo.

$y = 12 - \frac{\left(\sqrt{12}\right)^2}{3} = 12 - 4 = 8$.

Para $\boldsymbol{x} = \mathbf{2\sqrt{3}}\ metros$ y para $\boldsymbol{y} = \mathbf{8}\ metros$ la superficie de la pantalla es máxima.

Textos Marea Verde

Problema 5:

Sea el tetraedro de vértices $A(3,0,0), B(0,2,0), C(0,0,6)\ y\ D(a,3,1)$. Calcula:

$a)$ El área del triángulo limitado por los vértices $A(3,0,0), B(0,2,0)\ y\ C(0,0,6)$.

$b)$ La ecuación del plano π que contiene a los puntos $A(3,0,0), B(0,2,0)\ y\ C(0,0,6)$.

$c)$ El valor de α para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π anterior.

$d)$ Para $\alpha = 5$, el punto D' simétrico de D respecto al plano π.

Solución:

$a)$ Los puntos $A(3,0,0), B(0,2,0), C(0,0,6)$ determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,2,0) - (3,0,0)] = (-3,2,0)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(0,0,6) - (3,0,0)] = (-3,0,6)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |12i + 6k + 18j| = |6i + 9j + 3k| = 3 \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = 3 \cdot \sqrt{14}.$$

$$\boldsymbol{S = 3 \cdot \sqrt{14}\, u^2}$$

$$b)\ \pi\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC};\ A\right) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 = 4(x-3) + 2z + 6y = 0 \to 2(x-3) + 3y + z = 0;$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv 2x + 3y + z - 6 = 0}$$

$c)$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(a,3,1) - (3,0,0)] = (a-3,3,1)$.

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n_\pi} = (2,\ 3,1)$. Para que es vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π es necesario que sea linealmente dependiente del vector normal del plano, es decir: que sus componentes sean proporcionales:

$\frac{a-3}{2} = \frac{3}{3} = \frac{1}{1} \to \frac{a-3}{2} = 1 \to\ a - 3 = 2 \to a = 5$.

$$\boldsymbol{a = 5}$$

$d)$ Para $\alpha = 5$ es $D(5,3,1)$. La recta t que pasa por D y es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector normal del plano: $\overrightarrow{n_\pi} = (2.3,1)$. $t \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t es: $\left.\begin{matrix} \pi \equiv 2x + 3y + z - 6 = 0 \\ t \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

Textos Marea Verde

$2(5+2\lambda)+3(5+3\lambda)+(1+\lambda)=6 \rightarrow 10+4\lambda+15+9\lambda+1+\lambda=6;\ \ 14\lambda=-14;\ \ \lambda=-1 \Rightarrow M(3,0,0).$

Tiene que verificarse que $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MD'}$.

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OD}=[(3,0,0)-(5,3,1)]=(-2,-3,-1).$

$\overrightarrow{MD'}=\overrightarrow{OD'}-\overrightarrow{OM}=[(x,y,z)-(3,0,0)]=(x-3,y,z).$

$$(-2,-3,-1)=(x-3,y,z) \Rightarrow \left.\begin{cases} x-3=-2 \rightarrow x=1 \\ y=-3 \\ z=-1 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{D'(1,-3,-1)}$$

Textos Marea Verde

Problema 6:

Sea el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$. Calcula:

$a)$ Las ecuaciones paramétricas de la recta r.

$b)$ La distancia de r a P y el punto $Q \in r$ donde alcanza dicha distancia.

$c)$ La ecuación del plano π que contiene a r y está a la misma distancia de P que r.

Solución:

$a)$ Llamamos a $z=\lambda$

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda;\ \ x=-\lambda;\ \ y=0 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}}$$

$b)$ Un punto y un vector director de r son $O(0,0,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,0,-1)$.

El haz de planos α perpendiculares a r tiene por expresión $\alpha \equiv x-z+D=0$. De los infinitos planos del haz α, el plano β, que contiene al punto $P(1,0,1)$, es:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv x-z+D=0 \\ P(1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1-1+D=0 \rightarrow\ \ D=0 \Rightarrow \beta \equiv x-z=0.$$

El punto Q, intersección de la recta r y el plano β, es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv x-z=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -\lambda-\lambda=0 \Rightarrow\ \lambda=0 \Rightarrow Q \equiv O(0,0,0).$$

$$d(r,P)=\left|\overrightarrow{QP}\right|=|(1,0,1)|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\,u \Rightarrow \underline{d(r,P)}.$$

$$\boldsymbol{d(r,P)=\sqrt{2}\,u}$$

$c)$ El plano π pedido tiene como vector normal a cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{QP}=(1,0,1)$, por ejemplo, $\vec{n}=\overrightarrow{QP}=(1,0,1)$ y contiene a r, por lo cual, contiene a todos sus puntos, por ejemplo, a $Q(0,0,0) \in r$.

$$\left.\begin{array}{r} x+z+D=0 \\ Q(0,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow D=0 \Rightarrow \pi \equiv x+z=0.$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv x+z=0}$$

Textos Marea Verde

Problema 7:

Se tienen tres cajas. En la caja A hay 4 bolas negras y 6 bolas blancas. En la caja B, 6 dados negros y dos dados blancos y en la caja C, dos dados negros y 4 dados blancos. El suceso consiste en sacar una bola y un dado. En primer lugar, se extrae al azar una bola de la caja A. Si es negra, se extrae al azar un dado de la caja B pero, si la bola es blanca se extrae al azar un dado de la caja C. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos sin relación entre ellos:

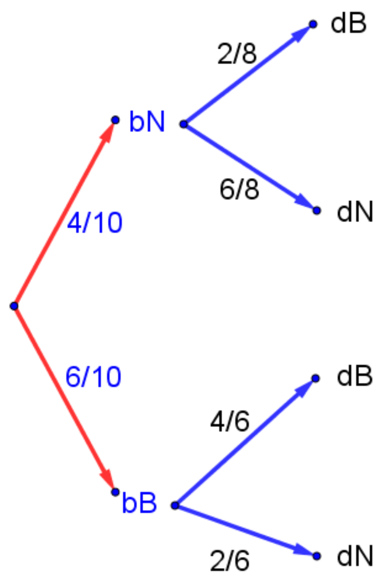
$a)$ La probabilidad de que la bola y el dado sean blancos.

$b)$ La probabilidad de que la bola y el dado sean del mismo color.

$c)$ La probabilidad de que el dado sea blanco.

Solución:

Llamamos bB al suceso sacar una bola blanca, y bN a sacarla negra. Llamamos dB al suceso de sacar un dado blanco, y dN a sacarlo negro. Representamos los datos del enunciado en un diagrama de árbol.



$a)$ $P(bB) \cdot P(dB) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{5}$.

La probabilidad de que la bola y el dado sean blancos es **2/5**.

$b)$ $P(bN) \cdot P(dN) + P(bB) \cdot P(dB) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{6} = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$.

La probabilidad de que la bola y el dado sean del mismo color es **7/10**.

$c)$ $P(bN) \cdot P(dB) + P(bB) \cdot P(dB) = \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

La probabilidad de que el dado sea blanco es **1/2**.

Problema 8:

Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 30$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

$a)$ La probabilidad de que $X \leq 20$.

$b)$ Se hace una revisión de los datos y se observa que la probabilidad del 50 % se alcanza en el valor $X \leq 35$ y la probabilidad del 75 % se alcanza en el valor $X \leq 40$. ¿Cuáles son las nuevas media y desviación típica?

Solución:

$a)$ Los datos del enunciado son: $\mu = 30;\ \ \sigma = 10; X \to N(\mu;\ \sigma) = N(30, 10)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-30}{10}$.

$$P(X \leq 20) = P\left(Z \leq \frac{20-30}{10}\right) = P\left(Z \leq \frac{-10}{10}\right) = P(Z \leq -1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

La probabilidad de que $X \leq 20$ es $\mathbf{0.1587}$.

$b)$

$$\left.\begin{array}{r} P(X \leq 35) = 0.5 = P\left(Z \leq \frac{35-\mu}{\sigma}\right) \\ P(X \leq 40) = 0.75 = P\left(Z \leq \frac{40-\mu}{\sigma}\right) \end{array}\right\}.$$

Mirando en la tabla $N(0, 1)$ de forma inversa, al valor 0.5 le corresponde 0 y al valor 0.75 le corresponde, aproximadamente, 0.675:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{35-\mu}{\sigma} = 0 \\ \frac{40-\mu}{\sigma} = 0.675 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{35-\mu}{\sigma'} = 0 \to \mu = 35 \to \frac{40-35}{\sigma} = 0.675;\ \ \sigma = \frac{5}{0.675} \cong 7.41.$$

Las nuevas media y desviación típica son $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{35}$ y $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{0.675}} \cong \mathbf{7.41}$.

Textos Marea Verde