MATEMÁTICAS II
Selectividad 2021
Comunidad autónoma de
BALEARES

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Barrientos Fernández

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATERIA: MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA *DE JUNIO*

Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1. Donada la matriu
$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix},$$
   (a) Estudia el rang de la matriu A segons els valors de a. (6 punts)

   (b) Determina per a quins valors de a la matriu A és invertible. (1 punt)

   (c) Per al valor de $a = -1$ calcula la solució, X, de l'equació matricial
$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   (3 punts)

2. Sigui la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Calcula A^t, A^2 i A^{-1}, on A^t és la matriu transposada i A^{-1} la inversa. (3 punts)

   (b) Sigui I la matriu identitat. Resol X de l'equació
$$A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$
   (3 punts)

   (c) Calcula totes les matrius B per a les quals es té que
$$A \cdot B = B \cdot A^t$$
   (4 punts)

Autor: Francisco Barrientos Fernández
www.apuntesmareaverde.org.es

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATERIA: MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORI *DE JUNIO*

3. Considera la funció
$$f(x) = \frac{1}{x^4}.$$
   (a) Representa-la gràficament. (7 punts)
   (b) Comprova que $f(2) = f(-2)$. (1 punt)
   (c) Comprova que no existeix $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$. (1 punt)
   (d) Hi ha una contradicció amb la conclusió del teorema de Rolle? (1 punt)

4. Donada la funció
$$f(x) = \frac{-x}{4 - x^2}.$$
   (a) Calcula una primitiva de $f(x)$. (5 punts)
   (b) Calcula l'àrea delimitada per la gràfica de $f(x)$, les rectes $x = \sqrt{5}$ i $x = \sqrt{6}$, i l'eix X. (5 punts)

5. Considera els punts,
$$A = (5, a, 7), \quad B = (3, -1, 7), \quad C = (6, 5, 4).$$
   (a) Determina el valor del paràmetre a per al qual els punts A, B i C formen un triangle rectangle, amb l'angle recte al punt B. (3 punts)
   (b) Per al valor de $a = -2$, calcula l'àrea del triangle de vèrtexs A, B i C. (3 punts)
   (c) Per al valor de $a = 5$, calcula l'angle format pels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. (4 punts)

6. Donades les rectes
$$r : \frac{x - m}{-1} = \frac{y + 10}{4} = \frac{z + 3}{1}, \qquad s : \begin{cases} x = 1, \\ y = 6 + 4\lambda, \\ z = -1 + 2\lambda. \end{cases}$$
   (a) Calcula el valor de m per tal que es tallin en un punt, (7 punts)
   (b) Calcula el punt de tall. (3 punts)

7. Es disposa de dues urnes: U_1 i U_2.
   A U_1 hi ha: 4 bolles vermelles i 5 bolles negres.
   A U_2 hi ha: 6 bolles vermelles i 3 bolles negres.
   A l'atzar es treu una bolla de U_1 i s'introdueix a U_2, a continuació s'extreu a l'atzar una bolla de U_2. Calcula la probabilitat que:
   (a) surti una bolla vermella de U_2 (3 punts)
   (b) la bolla extreta de U_1 sigui negra, sabent que la bolla que ha sortit de U_2 també ha estat negra. (3 punts)
   (c) surti almenys una bolla vermella. (4 punts)

8. Una companyia aèria ha observat que els pesos de les maletes d'un determinat trajecte segueixen una distribució normal de mitjana 7,5 kg i desviació típica de 0,4 kg. Calcula la probabilitat que, escollida una maleta a l'atzar:
   (a) pesi menys de 7,2 kg però més de 7 kg. (4 punts)
   (b) pesi entre 7,8 kg i 8 kg. (3 punts)
   (c) Si en un trajecte hi ha 90 maletes, quantes maletes és d'esperar que pesin almenys 8,1 kg? (3 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$

Autor: Francisco Barrientos Fernández

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Estudia el rango de la matriz A según los valores de a.

$b)$ Determina para qué valores de a la matriz A es invertible.

$c)$ Para el valor $a = -1$ calcula la solución, X, de la ecuación matricial $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$a)$ Determinamos el valor del $|A|$ para conocer su rango, y si es invertible:

$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^6 + a^2 + a^2 - a^4 - a^2 - a^4 = a^6 - 2a^4 + a^2 = a^2(a^4 - 2a^2 + 1) =$
$a^2(a^2-1)^2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = -1.$

Para $a \neq 0$, $a \neq 1$ y para $a \neq -1$ el rango de la matriz A es 3, y como su determinante es distinto de cero, es invertible.

Para $a = 0$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, y el rango de la matriz A es 2, y no es invertible.

Para $a = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ el rango de la matriz A es 1, y no es invertible.

Para $a = -1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ el rango de la matriz A es 1, y no es invertible.

$b)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$\forall a \in R - \{0, 1, -1\}$, la matriz A tiene inversa.

$c)$ Para $a = -1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Ya sabemos que el rango de la matriz A es 1

Planteamos la ecuación: $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{matrix}\right\}.$

Sistema homogéneo con el rango de la matriz de coeficientes 1, menor que el número de incógnitas.

Según el teorema de *Rouché-Fröbenius* es un sistema compatible indeterminado, con dos grados de libertad (dos parámetros).

Hacemos $y = \lambda, z = \mu \;\Rightarrow$

$\boldsymbol{x = \lambda + \mu, y = \lambda, z = \mu}, \;\; \forall \lambda, \mu \in R.$

Problema 2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcula $A^t, A^2\ y\ A^{-1}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} la inversa de A.

$b)$ Sea I la matriz identidad. Resuelve X de la ecuación $A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

$c)$ Calcula todas las matrices B tales que $A \cdot B = B \cdot A^t$.

Solución:

$a)$. $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\{F_2 \to F_2 - 2F_1\}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\{F_2 \to -F_2\}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \underset{\{F_1 \to F_1 - F_2\}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$b)$ Sustituimos los valores ya obtenidos:

$$A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - 2AX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 2AX;\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 2AX;\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = AX.$$

Multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot A \cdot X \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

$c)$ Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = B \cdot A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a + c & b + d \\ 2a + c & 2b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & 2a + b \\ c + d & 2c + d \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} b = c \\ d = 2a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}, \forall a, b \in R}$$

Problema 3:

Considera la función $f(x) = \frac{1}{x^4}$.

$a)$ Represéntala gráficamente.

$b)$ Comprueba que $f(2) = f(-2)$.

$c)$ Comprueba que no existe $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$.

$d)$ ¿Hay alguna contradicción con las hipótesis del teorema de Rolle?

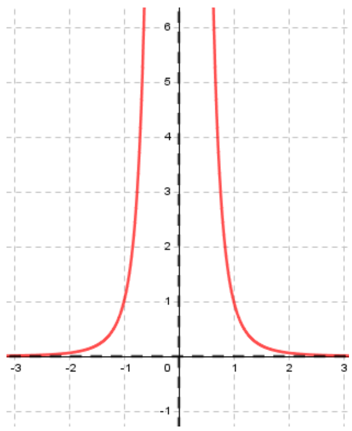
Solución:

$a)$ La función $f(x)$ está definida para todo valor real de x, excepto para $x = 0$, por lo cual: $D(f) = R - \{0\}$.

La función $f(x) = \frac{1}{x^4}$ es simétrica con respecto al eje, por ser $f(-x) = f(x)$ y también verifica que $f(x) > 0, \forall x \in D(f)$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^4} = 0 \Rightarrow$ El eje $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty \Rightarrow$ El eje $x = 0$ es asíntota vertical de la función.



$b)$ Por ser simétrica la función con respecto al eje de ordenadas se verifica que $f(2) = f(-2)$:

$$f(2) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}; \; f(-2) = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16} \Big\}$$

$c, d)$ El *teorema de Rolle* dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Sabemos que $f(2) = f(-2)$, pero en $x = 0 \in [-2, 2]$ la función no es ni continua ni derivable, por lo que no verifica las condiciones del teorema.

Por otra parte: $f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4} \Rightarrow f'(x) = -4 \cdot x^{-3} = -\frac{4}{x^3} = 0 \Rightarrow x = \pm\infty \notin R$.

No existe $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$, y no hay contradicción con el teorema de Rolle

Problema 4:

Dada la función $f(x) = \frac{-x}{4-x^2}$:

a) Calcula una primitiva de $f(x)$.

b) Calcula el área delimitada por la gráfica de $f(x)$, las rectas $x = \sqrt{5}$ y $x = \sqrt{6}$ y el eje X.

Solución:

a) Es la integral de una función racional, o una integral inmediata de tipo logaritmo.

La derivada de $4 - x^2$ es $-2x$, que podemos completar:

$$F(x) = \int \frac{-x}{4-x^2} \cdot dx = \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{4-x^2} \cdot dx = \frac{1}{2}L(4-x^2) + C = L\sqrt{x^2-4} + C$$

Si queremos hacerla como racional, determinamos los coeficientes:

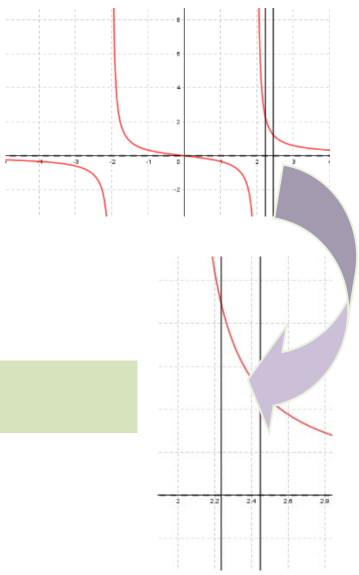
$$\frac{-x}{4-x^2} = \frac{-x}{(2+x)(2-x)} = \frac{A}{2+x} + \frac{B}{2-x} = \frac{2A - Ax + 2B + Bx}{4-x^2} = \frac{(-A+B)x + (2A+2B)}{4-x^2} \Rightarrow$$

$$-A + B = -1;\ 2A + 2B = 0 \Rightarrow A = -B; 2B = -1 \ \Rightarrow B = -\frac{1}{2};\ \ A = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \int \frac{-x}{4-x^2} \cdot dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{2+x} + \frac{-\frac{1}{2}}{2-x} \right) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{2+x} \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x-2} \cdot dx =$$

$\frac{1}{2} \cdot L|x+2| + \frac{1}{2} \cdot L|x-2| + C = \frac{1}{2} \cdot L(|x+2| \cdot |x-2|) = \frac{1}{2} \cdot L|x^2-4| + C = L\sqrt{x^2-4} + C \Rightarrow$

Una primitiva es $\boldsymbol{F(x) = L\sqrt{x^2-4}}$



b) La superficie a calcular es:

$S = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} f(x) \cdot dx = \left[L\sqrt{x^2-4}\right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} = L\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 - 4} - L\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 4} =$

$$= L\sqrt{2} - L\sqrt{1} = L\sqrt{2} - L(1) = L\sqrt{2} - 0 = \frac{1}{2}L(2)u^2 \cong 0.35\ u^2$$

$$S = \boldsymbol{\frac{1}{2}L(2)u^2} \cong 0.35\ u^2$$

Problema 5:

Considera los puntos $A(5,a,7), B(3,-1,7)\ y\ C(6,5,4)$.

$a)$ Determina el valor del parámetro a para que los puntos $A(5,a,7), B(3,-1,7)\ y\ C(6,5,4)$ formen un triángulo rectángulo en B.

$b)$ Para el valor de $a=-2$, calcula el área del triángulo de vértices $A(5,a,7), B(3,-1,7)\ y\ C(6,5,4)$.

$c)$ Para el valor de $a=5$, calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$.

Solución:

$a)$ Para que los puntos $A(5,a,7), B(3,-1,7)\ y\ C(6,5,4)$ formen un triángulo es necesario que sean coplanarios. Determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(3,-1,7)-(5,a,7)] = (-2,-1-a,0)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(6,5,4)-(5,a,7)] = (1,5-a,-3)$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = [(6,5,4)-(3,-1,7)] = (3,6,-3)$.

Los puntos $A(5,a,7), B(3,-1,7)\ y\ C(6,5,4)$ son coplanarios cuando el rango de los vectores que determinan sea menor que tres.

Calculamos el determinante de la matriz que forman y lo igualamos a cero:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1-a & 0 \\ 1 & 5-a & -3 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1+a & 0 \\ 1 & 5-a & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1+a & 0 \\ 1 & 5-a & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 = -2(5-a) - 3(1+a) + 12 + (1+a) = (5-a) + (1+a) - 6 = 6 - 6 = 0$$

Los puntos son coplanarios $\forall a \in R$

Para que formen un triángulo rectángulo los vectores deben ser ortogonales, luego su producto escalar debe ser cero:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 = (-2,-1-a,0)\cdot(3,6,-3) = -6-6-6a-0 = -12-6a = 0 \Rightarrow\ \ 2+a=0$$

El ángulo B es recto cuando $\boldsymbol{a=-2}$

$b)$ Para $a=-2$: $\overrightarrow{AB} = (-2,1,0), \overrightarrow{AC} = (1,7,-3), \overrightarrow{BC} = (3,6,-3)$.

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5};\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{9+36+9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

El área del triángulo de base $\sqrt{5}$ y altura $3\sqrt{6}$ es $S = \frac{\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{30}\ u^2$

Otra forma de hacerlo: El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$S = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot|-3i-14k-k-6j| = \frac{1}{2}\cdot|-3i-6j-15k| = \frac{3}{2}\cdot$
$|i+2j+5k| = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+5^2} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{30}$.

$$S = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{30}}\ \boldsymbol{u^2} \cong 8.22\ u^2$$

c) Para $a = 5$: $\overrightarrow{AB} = (-2, -6, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, 0, -3)$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\alpha \ \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(-2, -6, 0) \cdot (1, 0, -3)}{\sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{-2 - 0 - 0}{\sqrt{4 + 36} \cdot \sqrt{1 + 9}} = \frac{-2}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-2}{\sqrt{400}} = \frac{-2}{20} = -\frac{1}{10} = -0.1$$

$$\boldsymbol{\alpha = 95^\circ\ \ 44'\ 21''}$$

Problema 6:

Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-m}{-1} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+3}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 + 4\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$.

$a)$ Calcula el valor de m para que las rectas se corten en un punto.

$b)$ Calcula el punto de corte.

Solución:

$a)$ Escribimos las ecuaciones paramétricas de $r \equiv \begin{cases} x = m - \mu \\ y = -10 + 4\mu \\ z = -3 + \mu \end{cases}$.

Como las rectas se cortan en un punto, buscamos ese punto: $\left.\begin{array}{r} 1 = m - \mu \\ 6 + 4\lambda = -10 + 4\mu \\ -1 + 2\lambda = -3 + \mu \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} 6 + 4\lambda = -10 + 4\mu \\ -1 + 2\lambda = -3 + \mu \\ m = 1 + \mu \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3 + 2\lambda = -5 + 2\mu \\ -1 + 2\lambda = -3 + \mu \\ m = 1 + \mu \end{array}\right\} \Rightarrow 4 = -2 + \mu; \;\; \mu = 6; m = 1 + \mu = 7.$$

$$\boldsymbol{m = 7}$$

$b)$ Como $\mu = 6$, el punto de corte es: $\begin{cases} x = 7 - 6 = 1 \\ y = -10 + 4 \cdot 6 = 14 \\ z = -3 + \mu = -3 + 6 = 3 \end{cases} \Rightarrow P(1, 14, 3).$

$$\boldsymbol{P(1, 14, 3)}$$

Problema 7:

Se dispone de dos urnas: U_1 *y* U_2. La U_1 contiene 4 bolas blancas y 5 bolas negras; la U_2 contiene 6 bolas blancas y 3 bolas negras. Al azar se extrae una bola de U_1 y se introduce en U_2 y, a continuación, se extrae una bola de U_2. Calcula la probabilidad que:

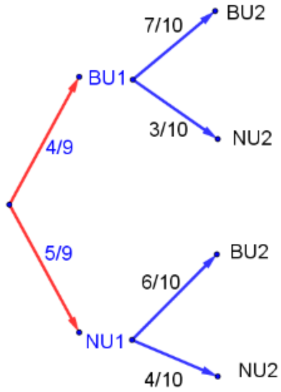
$a)$ Se obtenga una bola blanca.

$b)$ La bola extraída de U_1 sea negra, sabiendo que la bola sacada de U_2 también ha sido negra.

$c)$ Salga al menos una bola blanca.

Solución:

Llamamos BU_1 al suceso sacar una bola blanca de la urna U_1, y NU_1 a sacar una bola negra de dicha urna. Llamamos BU_2 al suceso sacar una bola blanca de la urna U_2, y NU_2 a sacar una bola negra de dicha urna. El diagrama de árbol es:



$a)$ $P(BU_2) = P(BU_1)\cdot P(BU_2/BU_1) + P(NU_1)\cdot P(BU_2/NU_1) = \frac{4}{9}\cdot\frac{7}{10} + \frac{5}{9}\cdot\frac{6}{10} = \frac{28+30}{90} = \frac{29}{45} = 0.6444.$

La probabilidad de que se obtenga una bola blanca es de $\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{45}} = \mathbf{0.6444}$

$b)$ Es una probabilidad condicionada

$$P(NU_1/NU_2) = \frac{P(NU_1 \cap NU_2)}{P(NU_2)} = \frac{P(NU_1)\cdot P(NU_2/NU_1)}{1-P(BU_2)} = \frac{\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{10}}{1-\frac{29}{45}} = \frac{\frac{10}{45}}{\frac{45-29}{45}} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 0.625.$$

La probabilidad de que la bola extraída de U_1 sea negra, sabiendo que la bola sacada de U_2 también ha sido negra es de $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}} = \mathbf{0.625}$

$c)$ Utilizamos la probabilidad del suceso contrario: La probabilidad de que salga al menos una bola blanca es la unidad menos la probabilidad de que salgan dos bolas negras:

$$P = 1 - P(NU_1)\cdot P\left(\frac{NU_2}{NU_1}\right) = 1 - \frac{5}{9}\cdot\frac{2}{5} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} = 0.7778.$$

La probabilidad de que salga al menos una bola blanca es $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{9}} = \mathbf{0.7778}$

Problema 8:

Una compañía aérea ha observado que los pesos de las maletas de un determinado trayecto siguen una distribución normal de media 7.5 kg y desviación típica 0.4 kg. Calcula la probabilidad que, escogida una maleta al azar:

$a)$ Pese menos de 7.2 kg pero más de 7 kg.

$b)$ Pese entre 7.8 kg y 8 kg.

$c)$ Si en un trayecto hay 90 maletas, ¿cuántas maletas se debe esperar que pesen al menos 8.1 kg?

Solución:

Nos dice que es una distribución normal de media $\mu = 7.5$ kg y desviación típica $\sigma = 0.4$ kg.

$X \to N(\mu, \sigma) = N(7.5, 0.4)$. Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-7.5}{0.4}$.

$a)$ $P = P(7 \le X \le 7.2) = P\left(\frac{7-7.5}{0.4} \le Z \le \frac{7.2-7.5}{0.4}\right) = P\left(\frac{-0.5}{0.4} \le Z \le \frac{-0.3}{0.4}\right) = P(-1.25 \le Z \le -0.75) = [1 - P(Z < 0.75)] - [1 - P(Z < 1.25)] = P(Z < 1.25) - P(Z < 0.75) = 0.8944 - 0.7734 = 0.1210$

La probabilidad de que pese menos de 7.2 kg pero más de 7 kg es $\mathbf{0.1210}$

$b)$ $P(7.8 \le X \le 8) = P\left(\frac{7.8-7.5}{0.4} \le Z \le \frac{8-7.5}{0.4}\right) = P\left(\frac{0.3}{0.4} \le Z \le \frac{0.5}{0.4}\right) = P(0.75 \le Z \le 1.25) = P(Z < 1.25) - P(Z < 0.75) = 0.8944 - 0.7734 = 0.1210$

La probabilidad de que pese entre 7.8 kg y 8 kg es $\mathbf{0.1210}$

$c)$ $P(X > 8.1) = P\left(Z > \frac{8.1-7.5}{0.4}\right) = P\left(Z > \frac{0.6}{0.4}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \le 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$.

Utilizamos una distribución binomial:

$n = 90$. $N = p \cdot n = 0.0668 \cdot 90 = 6.01$.

$\mathbf{6}$ de las maletas pesan más de 8.1 kg.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

Model 1

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1. Considera les matrius:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcula'n els determinants: $\det(\mathbf{A})$, $\det(\mathbf{B})$. (2 punts)

(b) Calcula la matriu producte $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, la matriu transposada $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^t$. (3 punts)

(c) Perquè es compleixi la relació $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, quantes files i columnes ha de tenir la matriu $\mathbf{X}$? (2 punts)

(d) Calcula la matriu $\mathbf{X}$ que satisfà la relació (3 punts)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

2. Una empresa fabrica tres tipus de bombeta: A, B i C. La bombeta tipus A té 10 punts LED, la tipus B té 20 punts LED, i la tipus C té 50 punts LED. El nombre de bombetes de 10 punts LED fabricades diàriament és λ vegades el nombre de bombetes de 50 punts LED. A l'empresa l'interessa saber quantes bombetes de cada tipus pot fabricar diàriament.

(a) Si $\lambda = 2$, i aquesta empresa usa, diàriament, 30000 punts LED amb els quals fabrica 1300 bombetes:

(i) planteja el sistema d'equacions lineals d'aquest problema. (3 punts)

(ii) classifica el sistema d'equacions lineals i, si és possible, determina quantes bombetes de cada tipus es poden fabricar. (4 punts)

(b) Si $\lambda = 3$, i l'empresa fabrica diàriament 1000 bombetes; classifica el sistema d'equacions lineals i determina el nombre de punts LED necessaris. (2 punts)

En aquest cas, quantes bombetes de cada tipus es poden fabricar? (1 punt)

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

3. Considera la funció $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{2x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ b & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

(a) Estudia la continuïtat de la funció f als punts $x_0 \neq 0$. (3 punts)

(b) Calcula la relació que hi ha d'haver entre a i b perquè f sigui una funció contínua al punt $x_0 = 0$. (5 punts)

(c) Si per als valors de $a = 2$ i $b = 1$, f és una funció derivable al punt $x = 0$, calcula $f'(0)$. (2 punts)

4. El nombre d'individus d'una població en un determinat instant de temps, t, expressat en milions d'individus, ve donat per la funció

$$P(t) = \frac{15 + t^2}{(t+1)^2},$$

on la variable real $t \geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000.

(a) Calcula la població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000. (2 punts)

(b) Prova que el nombre d'individus de la població assoleix un mínim. Quin any s'assoleix aquest mínim? Quants d'individus hi haurà l'any del mínim? (4 punts)

(c) Calcula la grandària de la població, això és el nombre d'individus, que hi haurà a llarg termini. (4 punts)

5. Donades les rectes

$$\textbf{(I)} \begin{cases} y &= x + 3, \\ z &= 2x + 2, \end{cases} \qquad \textbf{(II)} \begin{cases} y &= -\frac{1}{2}, \\ x &= 2z + 3, \end{cases}$$

(a) Calcula l'equació vectorial de cada una de les rectes (I) i (II). (1 punt)

(b) Si és possible, calcula el pla paral·lel a la recta (II) que conté a la recta (I). (3 punts)

(c) Calcula el pla perpendicular a la recta (II) que passa pel punt $(-1, 0, 2)$. (3 punts)

(d) Calcula la recta de direcció perpendicular a les de les rectes (I) i (II) que passa per l'origen. (3 punts)

6. Donats els punts

$$P = (1,0,1), \quad Q = (1,1,0), \quad \text{i} \quad R = (0,1,1).$$

(a) Comprova que P, Q i R no estan alineats. (2 punts)

(b) Calcula l'equació vectorial del pla que determinen P, Q i R. (3 punts)

(c) Calcula l'àrea del triangle que té per vèrtexs P, Q i R. (3 punts)

(d) Calcula, de forma raonada, la condició que han de complir a, b i c perquè els punts P, Q, R i $S = (a,b,c)$ pertanyin a un mateix pla. (2 punts)

7. En una urna hi ha 12 bolles vermelles, 8 bolles blanques i 5 bolles blaves. Es realitza l'experiment aleatori d'extreure dues bolles, consecutivament i sense devolució a l'urna. Calcula la probabilitat dels següents esdeveniments:

(a) **A**="les dues bolles són vermelles" (2 punts)

(b) **B**="les dues bolles són del mateix color" (3 punts)

(c) **C**="almenys una bolla és vermella" (3 punts)

(d) **D**="cap de les dues bolles és vermella" (2 punts)

8. L'alçada de les persones d'una classe es distribueix segons una normal de mitjana 160 cm i desviació típica 10 cm. Calcula la probabilitat que, escollida a l'atzar una persona de la classe, la seva alçada:

(a) sobrepassi els 170 cm. (3 punts)

(b) sigui menor que 155 cm. (3 punts)

(c) estigui compresa entre 155 cm i 170 cm (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Calcula los determinantes: det (A), det (B).

b) Calcula la matriz producto $B \cdot A$, la matriz transpuesta $(B \cdot A)^t$.

c) Para que se cumpla la relación $A \cdot X = B \cdot A$, cuántas filas y columnas debe tener la matriz X?

d) Calcula la matriz X que satisface la relación.

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2; |B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -17.$

det $(A) = -2$, det $(B) = -17$.

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$$(B \cdot A)^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

c) Como $A \in M_{2x2}$ y $B \in M_{2x2}$ entonces $B \cdot A \in M_{2x2}$

Si $X \in M_{axb}$, entonces, para poder hacer el producto $A \cdot X$, el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de X, por lo tanto $a = 2$. Además, el resultado de este producto es una matriz que tiene el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que X, por tanto $b = 2$.

X debe ser una matriz con dos filas y dos columnas.

d) **Primera solución:** Si $X = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+2p & n+2q \\ m & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + 2p = 4 \\ n + 2q = 6 \\ m = -3 \\ n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = 4 \\ p = \frac{7}{2} \\ q = 1 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Segunda solución: Como $A \cdot X = B \cdot A \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot A$

Cálculo de la matriz inversa:

$|A| = -2; A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; Resolución de la ecuación matricial

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{\frac{7}{2}} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Problema 2:

Una empresa fabrica tres tipos de bombillas: A, B y C. La bombilla tipo A tiene 10 puntos LED, la de tipo B tiene 20 puntos LED, y la de tipo C tiene 50 puntos LED. El número de bombillas de 10 puntos LED fabricadas diariamente es λ veces el número de bombillas de 50 puntos LED. A la empresa le interesa saber cuántas bombillas de cada tipo puede fabricar diariamente.

$a)$ Si $\lambda = 2$, y esta empresa usa, diariamente, 30 000 puntos LED con los que fabrica 1 300 bombillas:

1-- Plantea el sistema de ecuaciones lineales de este problema.

2-- Clasifica el sistema de ecuaciones lineales y, si es posible, determina cutas bombillas de cada tipo se pueden fabricar.

$b)$ Si $\lambda = 3$, y la empresa fabrica diariamente 1 000 bombillas; clasifica el sistema de ecuaciones lineales y determina el número de puntos LED necesarios. En este caso, ¿cuántas bombillas de cada tipo se pueden fabricar?

Solución:

a) I) Llamando: x = {número de bombillas de 10 puntos LED}; y = {número de bombillas de 20 puntos LED}; z = {número de bombillas de 50 puntos LED }

$$\begin{cases} x = 2z \\ 10x + 20y + 50z = 3000 \\ x + y + z = 1300 \end{cases}$$

II) El sistema tiene solución porque el determinante formado por la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 10 & 20 & 50 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por la regla de Cramer.

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & 50 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A^*\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 10 & 20 & 50 & 30000 \\ 1 & 1 & 1 & 1300 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 30000 & 20 & 50 \\ 1300 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & 50 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-8000}{-10} = 800$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 10 & 30000 & 50 \\ 1 & 1300 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & 50 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1000}{-10} = 100$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 30000 \\ 1 & 1 & 1300 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 10 & 20 & 50 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4000}{-10} = 400$$

b) Las ecuaciones son

$$\begin{cases} x = 3z \\ x + y + z = 1300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ x + y + z = 1000 \end{cases}$$

Estudiemos la compatibilidad y soluciones de este sistema

Las matrices asociadas son

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A^*\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1000 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

El rango de la matriz ampliada no puede ser mas de 2, por tanto, al ser la matriz de los coeficientes y la ampliada iguales, por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado (porque su rango es menor que el número de incógnitas).

Para calcular las soluciones, utilizamos la regla de Cramer

Utilizando la variable z como parámetro, el sistema se puede escribir:

$$\begin{cases} x = 3z \\ x + y = 1300 - z \end{cases}$$

actuando z como parámetro.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3z & 0 \\ 1000 - z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3z}{1} = 3z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3z \\ 1 & 1000 - z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1000 - 4z}{1} = 1000 - 4z$$

y las soluciones se pueden poner como

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1000 - 4t. \\ z = t \end{cases}$$

Se pueden fabricar tantas bombillas como se quieran, siempre que la relación entre el número de bombillas de cada clase esté en la anterior. La única limitación es que el número de bombillas sea mayor o igual que cero. En este caso que $t \geq 0$ y que $1000 - 4t \geq 0 \Rightarrow t \leq 250$.

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1000 - 4t\,, t \in [0, 250] \\ z = t \end{cases}$$

En todos estos casos, el número de LEDs necesarios es

$$N = 10x + 20y + 50z = 10 \cdot 3t + 20 \cdot (1000 - 4t) + 50t = 20000$$

Son necesarios 20 000 LEDs, independientemente del número de bombillas fabricadas, siempre que estén en la relación anterior.

Problema 3:

Considera la función $f: R \to R$ definida por: $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{2x} & si \;\; x \neq 0 \\ b & si \;\; x = 0 \end{cases}$:

$a)$ Estudia la continuidad de la función f es los puntos $x_0 \neq 0$.

$b)$ Calcula la relación que ha de haber entre a y b para que f sea continua para $x = 0$.

$c)$ Si para los valores de $a = 2$ y $b = 1$, f es una función derivable para $x = 0$, calcula $f'(0)$.

Solución:

a) La función $\frac{e^{ax}-1}{2x}$ es el cociente de dos funciones continuas, $e^{ax} - 1$ (que es continua por ser diferencia de dos funciones continuas) y $2x$ que también es una función continua. El único problema de discontinuidad podría ser $x = 0$, que anula el denominador, pero este punto esta fuera de los puntos de continuidad que se quieren analizar.

b) En $x = 0$, utilizando la regla de *L'Hôpital*

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{ax}-1}{2x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{ax}}{2} = \frac{a}{2}$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{ax}-1}{2x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{ax}}{2} = \frac{a}{2}$$
$$f(0) = b$$

Para que la función sea continua, estos tres valores deben ser iguales.

$$\frac{a}{2} = b \Rightarrow \boldsymbol{a = 2b}$$

c) La función $f(x)$ es en este caso

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{2x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

que por lo visto anteriormente es continua, puesto que $a = 2b$

Su derivada es

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}2x - (e^{2x}-1)2}{4x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)+1}{2x^2}$$

y utilizando dos veces la regla de L´Hôpital

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}(2x-1)+1}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}(2x-1)+2e^{2x}}{4x} = \lim_{x \to 0} e^{2x} = 1$$

$$\boldsymbol{f'(0) == 1}$$

Problema 4:

El número de individuos de una población en un determinado momento de tiempo, t, expresada en millones de individuos, viene dada por la función $P(t)=\frac{15+t^2}{(t+1)^2}$, con la variable $t\geq 0$ mide el número de años transcurridos desde el 1 de enero de 2000.

a) Calcula la población que había el 1 de enero del año 2000.

b) Prueba que el número de individuos de la población logra un mínimo. ¿Qué año se alcanza este mínimo? ¿Cuántos individuos habrá el año del mínimo?

c) Calcula el número de individuos que habrá a largo plazo.

Solución:

a) El 1 de Enero del 2000 corresponde al momento en que $t=0$

$$P(0)=\frac{15}{1}=15$$

Habrá **15 millones** de individuos.

b) $P'(t)=\frac{2t(t+1)^2-(15+t^2)2(t+1)}{(t+1)^4}=\frac{2t(t+1)-2(15+t^2)}{(t+1)^3}=\frac{2t-30}{(t+1)^3}$

$$P'(t)=0\Rightarrow\frac{2t-30}{(t+1)^3}=0\Rightarrow t=15$$

$$P''(t)=\frac{2(t+1)^3-(2t-30)3(t+1)^2}{(t+1)^6}=\frac{2(t+1)-3(2t-30)}{(t+1)^4}=\frac{-4t+92}{(t+1)^4}$$

$$P''(15)=\frac{32}{50625}>0$$

$$P(15)=\frac{15}{16}\sim 0.9375$$

En el punto $\left(\mathbf{15},\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{16}}\right)$ hay un mínimo. El mínimo se alcanza el año 2015 con una población aproximada de **937 500** individuos.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{15+t^2}{(t+1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{t^2+15}{t^2+2t+1}=1$

A largo plazo la población se estabilizará alrededor de un **millón** de individuos.

Problema 5:

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} y = x + 3 \\ z = 2x + 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = 2z + 3 \end{cases}$:

$a)$ Calcula las ecuaciones vectoriales de las rectas r y s.

$b)$ Si es posible, calcula el plano paralelo a la recta s que contiene a la recta r.

$c)$ Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(-1, 0, 2)$.

$d)$ Calcula la recta perpendicular a r y s que pasa por el origen.

Solución:

a) Una parametrización de la recta (I) es

$$(x, y, z) = (x, x + 3, 2x + 2) = (0, 3, 2) + x(1, 1, 2)$$

La ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(0, 3,2\ )$ y tiene como vector director $\vec{v}(1, 1, 2)$ es

$$(x, y, z) = (0, 3, 2) + \lambda(1, 1, 2)$$

En la segunda recta (II): $(x, y, z) = \left(2z + 3, -\frac{1}{2}, z\right) = \left(3, -\frac{1}{2}, 1\right) + z(2, 0, 1)$

La ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $B\left(3, -\frac{1}{2}, 1\right)$ y tiene como vector director $\vec{w}(2, 0, 1)$ es

$$(x, y, z) = \left(2z + 3, -\frac{1}{2}, z\right) = \left(3, -\frac{1}{2}, 1\right) + \lambda(2, 0, 1)$$

b) Un plano paralelo a la recta (II) y que contiene a la recta (I) tendrá como vectores directores $\vec{v}$ y $\vec{w}$; y que pasa por un punto de (I) , por ejemplo $A(0, 3, 2)$

$$\pi = \begin{vmatrix} x & y - 3 & z - 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x + 3y - 2z - 5 = 0$$

Este plano contiene a la recta (II), puesto que está construida con un vector director y un punto de (II). Además, el vector $\vec{u}(1, 3, -2)$, que es perpendicular al plano π, es perpendicular a la recta (I), puesto que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. En efecto: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 3, -2\ ) \cdot (\ 1, 1, 2\ ) = 1 + 3 - 4 = 0$

c) Un plano perpendicular a la recta (II) tiene por ecuación $2x + z + k = 0$. Si queremos que pase por el punto $P(-1, 0, 2)$, sustituimos este punto en el haz de planos

$2 \cdot (\ -1\ ) + 2 + k = 0 \Rightarrow k = 0$.

El plano perpendicular a la recta (II) que pasa por el punto P es $\mathbf{2x + z = 0}$

d) Primeramente hay que hallar una dirección $\vec{r}$ perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$

$$\vec{r} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + 3j - 2k$$

El vector perpendicular es $\vec{r}(\ 1,3, -2\ )$

Una recta con esta dirección y que pase por el origen es $\boldsymbol{\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}}$

Problema 6:

Dados los puntos $P(1,0,1)$, $Q(1,1,0)$ y $R(0,1,1)$:

$a)$ Comprueba que $P(1,0,1)$, $Q(1,1,0)$ y $R(0,1,1)$ no están alineados.

$b)$ Calcula la ecuación vectorial del plano que determina $P(1,0,1)$, $Q(1,1,0)$ y $R(0,1,1)$.

$c)$ Calcula el área del triángulo que tiene por vértices $P(1,0,1)$, $Q(1,1,0)$ y $R(0,1,1)$.

$d)$ Calcula, de forma razonada, la condición que ha de cumplir a, b y c para que los puntos $P(1,0,1)$, $Q(1,1,0)$ y $R(0,1,1)$ y $S(a,b,c)$ pertenecen a un mismo plano.

Solución:

a) Los tres puntos estarán alineados si los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ fueran proporcionales

$\overrightarrow{PQ} = (\,1{,}1{,}0\,) - (\,1{,}0{,}1\,) = (\,0{,}1,-1\,)$

$\overrightarrow{PR} = (\,0{,}1{,}1\,) - (\,1{,}0{,}1\,) = (\,-1{,}1{,}0\,)$

Como no se conserva la proporción ni siquiera entre las dos primeras coordenadas $\left(\frac{0}{-1} \neq \frac{1}{1}\right)$:

Los tres puntos **no** están alineados.

b) El plano π pedido tendrá por los vectores directores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y pasará por uno de los tres puntos, por ejemplo P

$$\pi = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{x+y+z-2=0}$$

c) El área del triángulo será $\frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2}$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = i + j + k$$

Con lo que el área es

$$\frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

d) Como ya hemos visto el plano pasa por los puntos $P(1,0,1)$, $Q(1,1,0)$ y $R(0,1,1)$. Para que el punto $S = (a,b,c)$ pertenezca a ese plano, debe cumplir su ecuación, por tanto la condición es que:

$$a + b + c = 2$$

Problema 7:

En una urna hay 12 bolas blancas, 8 bolas negras y 5 bolas rayadas. Se realiza el experimento aleatorio de extraer dos bolas, consecutivamente y sin devolución a la urna. Calcula la probabilidad de los siguientes eventos:

$a)$ Las dos bolas son blancas.

$b)$ Las dos bolas son del mismo color.

$c)$ Al menos una bola es blanca.

$d)$ Ninguna de las bolas es blanca.

Solución:

Sacar dos bolas simultáneamente sin devolución es el mismo experimento que sacar dos bolas consecutivamente, sin devolución. Sean los siguientes sucesos:

R_1 = {sacar bola roja en la primera extracción}

B_1 = {sacar bola banca en la primera extracción}

A_1 = {sacar bola azul en la primera extracción}

R_2 = {sacar bola roja en la segunda extracción}

B_2 = {sacar bola banca en la segunda extracción}

A_2 = {sacar bola azul en la segunda extracción}

a) Se pide $p(R_1 \cap R_2)$

Tenemos que $p(R_1) = \frac{12}{25}$ y si extraemos una roja, la probabilidad de extraer otra roja en la segunda extracción es $p(R_2 \,/\, R_1) = \frac{11}{24}$ porque hay una bola roja menos y una bola en la urna.

Por tanto

$$p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \cdot p(R_2/R_1) = \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} = \frac{11}{50}$$

La probabilidad de que las dos bolas sean blancas es $\mathbf{\frac{11}{50}}$

b) Hay que calcular $p(R_1 \cap R_2) + p(B_1 \cap B_2) + p(A_1 \cap A_2)$

De la misma manera que hemos razonado en el apartado a) con las dos bolas rojas, calculamos la probabilidad de sacar dos bolas blancas y dos azules.

$$p(R_1 \cap R_2) + p(B_1 \cap B_2) + p(A_1 \cap A_2) =$$
$$= p(R_1) \cdot p(R_2/R_1) + p(B_1) \cdot p(B_2/B_1) + p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) =$$
$$= \frac{11}{50} + \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} = \frac{26}{75}$$

La probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color es $\mathbf{\frac{26}{75}}$

c) Hay que calcular la probabilidad de que alguna sea roja, es decir, $p(R_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap A_2) + p(B_1 \cap R_2) + p(A_1 \cap R_2)$:

$$p(R_1 \cap R_2) + p(R_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap A_2) + p(B_1 \cap R_2) + p(A_1 \cap R_2) =$$

$$p(R_1) \cdot p(R_2/R_1) + p(R_1) \cdot p(B_2/R_1) + p(R_1) \cdot p(A_2/R_1) + p(B_1) \cdot p(R_2/B_1) + p(A_1) \cdot p(R_2/A_1) =$$

$$\frac{11}{50} + \frac{12}{25} \cdot \frac{8}{24} + \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{24} + \frac{8}{25} \cdot \frac{12}{24} + \frac{5}{25} \cdot \frac{12}{24} = \frac{37}{50}$$

La probabilidad de que alguna sea roja es $\mathbf{\frac{37}{50}}$

d) La probabilidad de que ninguna de las dos bolas sea roja es el suceso contrario de que alguna de las dos bolas sea roja, por tanto

$$p(\,ninguna\ de\ las\ bolas\ sea\ roja\,) = 1 - p(\,alguna\ de\ las\ bolas\ sea\ roja\,) = 1 - \frac{37}{50} = \frac{13}{50}$$

La probabilidad de que ninguna sea roja es $\mathbf{\frac{13}{50}}$

Problema 8:

La altura de las personas de una clase se distribuye según una normal de media 160 cm y desviación típica 10 cm. Calcula la probabilidad de que, escogida al azar una persona de la clase, su altura:

a) Sobrepase los 170 cm.

b) Sea menor que 155 cm.

c) Está comprendida entre 155 cm y 170 cm.

Solución:

Es una $N(160, 10)$

a)

$$p(X > 170) = p\left(Z > \frac{170 - 160}{10}\right) = p(Z > 1) = 1 - p(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

La probabilidad de que, escogida al azar una persona de la clase, su altura sobrepase los 170 cm es $\mathbf{0.1587}$

b)

$$p(X < 155) = p\left(Z < \frac{155 - 160}{10}\right) = p(Z < -0.5)$$
$$= p(Z > 0.5) = 1 - p(Z \leq 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

La probabilidad de que, escogida al azar una persona de la clase, su altura sea menor que 155 cm es $\mathbf{0.3085}$

c)

$$p(155 < X < 170) = p\left(\frac{155 - 160}{10} < Z < \frac{170 - 160}{10}\right) = p(-0.5 < Z < 1) =$$
$$= p(Z < 1) - p(Z < -0.5) = 0.8413 - 0.3085 = 0.5328$$

La probabilidad de que, escogida al azar una persona de la clase, su altura esté comprendida entre 155 cm y 170 cm es $\mathbf{0.5328}$