MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

CANARIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2020–2021

MATERIA: MATEMÁTICAS II	**(1)**
Convocatoria:	

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenido, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Dada la función $f(x) = \frac{ax^2-2}{b-x}$, donde a y b son dos parámetros con valores reales.

a) Calcular el valor de los parámetros a y b que verifican que $f(-2) = 2$ y que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R} - \{5\}$. 1.25 ptos
Escribir la función resultante $f(x)$ y calcular su derivada $f'(x)$.

b) Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ si los parámetros toman los valores $a = -1$ y $b = -3$ 1.25 ptos

1B. Se desea construir una caja sin tapa superior (ver Figura 1). Para ello, se usa una lámina de cartón de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblándola convenientemente después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada una de sus esquinas (ver Figura 2). Se determina como requisito que la caja a construir contenga el mayor volumen posible. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja y su volumen máximo. 2.5 ptos

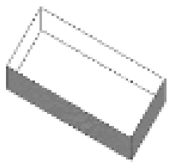


Figura 1

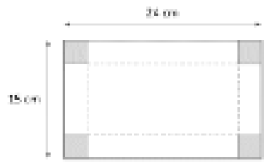


Figura 2

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Calcular el valor de la matriz $M = X^2 - Y^2$, siendo X e Y las matrices que son solución del siguiente sistema: 2.5 ptos

$$\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2B. Un granjero compra un determinado mes 274€ de pienso para su ganado. Con ese dinero obtiene un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes: A, B y C. Se sabe que el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5€, 4€ y 4€, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas. 2.5 ptos

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. Dados los siguientes puntos en el espacio tridimensional:

$$A(0,-2,3),\ B\ (1,-1,4),\ C\ (2,3,3)\ \text{y}\ D(4,5,5)$$

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios. A continuación, calcular la ecuación del plano que los contiene. 1.5 ptos

b) Calcular la ecuación de la recta r, perpendicular al plano $\pi: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda - 3\mu \end{cases}$ que pasa por el punto A 1 pto

3B. Dadas las ecuaciones de los planos

$$\pi_1: 2x + 3y - z = 9 \quad \text{y} \quad \pi_2: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2 - \lambda + 2\mu \\ z = 3 + 3\lambda - \mu \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(1,-1,0)$ y $B(-1,-3,2)$ 1.25 ptos

b) Calcular el ángulo formado por los planos π_1 y π_2 1.25 ptos

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En un cierto instituto el 50% de su alumnado lleva el desayuno desde casa, el 40% lo compra en la cafetería del instituto, y el resto lo adquiere en un bazar cercano al instituto. Solamente un 5% de los desayunos que se llevan desde casa incluyen bebidas azucaradas, pero en los desayunos comprados en la cafetería este porcentaje es del 60% y en los desayunos comprados en el bazar del 80%.

a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado. 0.5 ptos

b) Justificar si es cierto que más de un 30% de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas. 1 pto

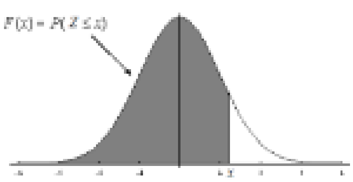
c) Justificar si es cierto que, elegido un desayuno al azar, la probabilidad que un estudiante lo haya traído desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada, es mayor que 0,1 1 pto

4B. Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80 %. Suponiendo independencia de sucesos:

a) Si se lo toman 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes? 1 pto

b) Si se lo toman 225 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe entre 170 y 190 pacientes? 1 pto

c) ¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los que NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes? 0.5 ptos



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1: Análisis

Problema 1.A:

Dada la función $f(x) = \frac{ax^2-2}{b-x}$, donde a y b son dos parámetros con valores reales.

a) Calcular el valor de los parámetros a y b que verifican que $f(-2) = 2$ y que $f(x)$ sea continua en $R - \{5\}$. Escribir la función resultante $f(x)$ y calcular su derivada $f'(x)$.

b) Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ si los parámetros toman los valores $a = -1$ y $b = -3$.

Solución:

a) De la condición $f(-2) = 2$ se obtiene una ecuación: $f(-2) = 2 = \frac{a4\,-\,2}{b-x}\cdot$

Como $f(x)$ no es continua en x = 5, se deduce que el denominador se anula para ese valor de $x \to b - 5 = 0 \Rightarrow b = 5$

Por tanto $2 = \frac{a4\,-\,2}{5+2} \to 14 = 4a - 2 \to 16 = 4a \to a = 4.$

Resolviendo la ecuación se obtiene que $a = 4$. La función resultante es $f(x) = \frac{4x^2-2}{5-x}$

Por lo tanto, $a = 4$ y $b = 5$, de donde la función resultante es $f(x) = \frac{4x^2-2}{5-x}$

Su derivada es $f'(x) = \frac{8x\cdot(5-x)-(4x^2-2)\cdot(-1)}{(5-x)^2} = \frac{40x-8x^2+4x^2-2}{(5-x)^2} = \frac{-4x^2+40x-2}{25-10x+x^2}.$

Por lo tanto, $a = 4$ y $b = 5$, de donde la función resultante es $f(x) = \frac{4x^2-2}{5-x}$ y $f'(x) = \frac{-4x^2+40x-2}{25-10x+x^2}.$

b) La función es $f(x) = \frac{-x^2-2}{-3-x} = \frac{x^2+2}{x+3}$

Asíntotas verticales: $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \to \lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2+2}{x+3} = \infty$

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x+3} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{x+3} = -\infty$ No hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2}{3+x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2+3x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty}[\frac{x^2+2}{x+3} - x] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2-x^2-3x}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-3x}{x+3} = \frac{-3}{1} = -3.$$

La asíntota oblicua es $y = x - 3$.

Asíntotas verticales: $x = -3$. La asíntota oblicua es $y = x - 3$

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

Problema 1.B:

Se desea construir una caja sin tapa superior (ver figura 1). Para ello, se usa una lámina de cartón de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblándola convenientemente después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada una de sus esquinas (ver figura 2). Se determina como requisito que la caja a construir contenga el mayor volumen posible. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja y su volumen máximo.

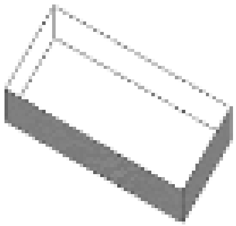


Figura 1

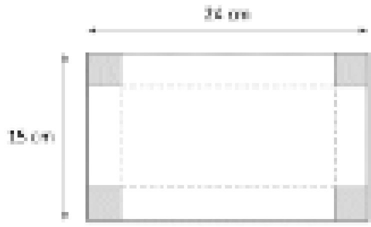


Figura 2

Solución:

Si x es el lado del cuadrado que se recorta en cada esquina, las dimensiones de la caja serán:

$24-2x$ cm de largo, $15-2x$ cm de ancho y x cm de altura. El volumen será, por tanto:

$$V(x)=(24-2x)(15-2x)x=4x^3-78x^2+360x$$

Esta es la función que debemos maximizar, por lo que debemos hallar su derivada:

$$V'(x)=12x^2-156x+360$$

Se iguala a cero la derivada y se resuelve la ecuación resultante:

$$V'(x)=0\Rightarrow 12x^2-156x+360=0\Rightarrow x^2-13x+30=0\Rightarrow$$

$$x=\frac{13\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot 1\cdot 30}}{2a}=\frac{13\pm 7}{2}$$

$x_1=3; x_2=10$ son los posibles extremos de la función. La solución $x_2=10$ no es válida para este problema porque el ancho de la caja sería negativo.

Comprobamos que $x_1=3$ es un máximo mediante la derivada segunda de $V(x)$.

$$V''(x)=24x-156$$

$$V''(3)=24\cdot 3-156=-84<0 \quad \text{por lo tanto} \quad x_1=3 \text{ es un máximo}$$

El volumen máximo es $V(3)=(24-2\cdot 3)(15-2\cdot 3)\cdot 3=18\cdot 9\cdot 3=486\ cm^3$

Las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo deben ser, por tanto, 18 cm de largo, 9 cm de ancho y 3 cm de altura.

El volumen máximo es $\mathbf{486\ cm^3}$. Las dimensiones de la caja deben ser **18 cm** de largo, **9 cm** de ancho y **3 cm** de altura.

Hemos cortado 3 cm en cada esquina.

Bloque 2: Álgebra

Problema 2.A:

Calcular el valor de la matriz $M = X^2 - Y^2$, siendo X e Y las matrices que son solución del sistema: $\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$.

Solución:

$4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

$2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdot (-2) \rightarrow$ $\qquad$ $-4X - 2Y = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$Y = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

$4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; $2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdot (-3) \rightarrow -6X - 3Y = \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

Sumando ahora estas ecuaciones: $-2X = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$; $Y^2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz M pedida es: $M = X^2 - Y^2 = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}}$$

Problema 2.B:

Un granjero compra un determinado mes 274 euros de pienso para su ganado. Con ese dinero obtiene un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes, A, B y C. Se sabe que, si el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5 euros, 4 euros y 4 euros, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas.

Solución:

Sean A = número de sacos de la marca A ; B = número de sacos de la marca B; C = número de sacos de la marca C.

Total de sacos: 66 $A+B+C=66$

Precios por saco: 5 € marca A, 4 € marca B y 4 € marca C

Precio total: 274 € $5A+4B+4C=274$

El número de sacos de la marca C es el doble que el total de sacos de las otras marcas.

C = 2(A + B); $2A+2B-C=0$

El sistema de ecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{r} A+B+C=66 \\ 5A+4B+4C=274 \\ 2A+2B-C=0 \end{array}\right\}$$

Se puede resolver por el **método de Cramer**:

Matriz de coeficientes:

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1\\5&4&4\\2&2&-1\end{pmatrix}; \text{ Su determinante es: } |M|=\begin{vmatrix}1&1&1\\5&4&4\\2&2&-1\end{vmatrix}=-4+10+8-8-8+5=3$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}274&4&4\\66&1&1\\0&2&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5&4&4\\1&1&1\\2&2&-1\end{vmatrix}}=\frac{-274+528-548+264}{-5+8+8-8-10+4}=\frac{792-822}{12-15}=\frac{-30}{-3}=10.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}5&274&4\\1&66&1\\2&0&-1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{-330+548-528+274}{-3}=\frac{822-858}{-3}=\frac{-36}{-3}=12.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}5&4&274\\1&1&66\\2&2&0\end{vmatrix}}{-3}=\frac{548+528-548-660}{-3}=\frac{528-660}{-3}=\frac{-132}{-3}=44.$$

El granjero ha comprado **10** sacos de la marca A, **12** sacos de la marca B y **44** sacos de la marca C.

Otra forma (método de Gauss): Sea M’ la matriz ampliada del sistema:

$$M'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&66\\5&4&4&274\\2&2&-1&0\end{array}\right)\to F_2-5F_1;\ F_3-2F_1;\ M'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&66\\0&-1&-1&56\\0&0&-3&-132\end{array}\right)$$

$$C=\frac{-132}{-3}=44; -B-44=56\Rightarrow B=12; A+12+44=66\Rightarrow A=10$$

Bloque 3: Geometría

Problema 3.A:

Dados los siguientes puntos en el espacio tridimensional: $A(0,-2,3), B(1,-1,4), C(2,3,3)\ y\ D(4,5,5)$.

$a)$ Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios. A continuación, calcular la ecuación del plano que los contiene.

$b)$ Calcular la ecuación de la recta r, perpendicular al plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda - 3\mu \end{cases}$ que pasa por el punto A.

Solución:

a) Para comprobar si los cuatro puntos son coplanarios se estudia si son linealmente dependientes los tres vectores que determinan:

$\overrightarrow{AB} = (1-0, -1-(-2), 4-3) = (1,1,1)$

$\overrightarrow{AC} = (2-0, 3-(-2), 3-3) = (2,5,0)$

$\overrightarrow{AD} = (4-0, 5-(-2), 5-3) = (4,7,2)$

Calculamos el determinante formado por los tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 14 + 0 - 20 - 0 - 4 = 0$$

El determinante es nulo, por tanto, los tres vectores son linealmente dependientes y los puntos A, B, C y D son coplanarios. El plano al que pertenecen estos puntos se puede calcular utilizando un punto y dos vectores:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-(-2) & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5x + 2(y+2) + 3(z-3) = -5x + 2y + 3z - 5 = 0$$

El plano es: $\mathbf{5x - 2y - 3z + 5 = 0}$

b) Si la recta r es perpendicular al plano π, el vector director de la recta es el vector normal al plano:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$$

Podemos tomar como vector director de la recta el vector $\vec{u} = (1,1,1)$

La ecuación de la recta r que pasa por $A(0,-2,3)$ y es perpendicular al plano π es:

$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$ Despejando λ se expresa en forma continua: $x = y + 2 = z - 3$

La recta r es: $\mathbf{x = y + 2 = z - 3}$

Problema 3.B:

Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + 3y - z = 9$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2 - \lambda + 2\mu \\ z = 3 + 3\lambda - \mu \end{cases}$:

$a)$ Hallar la ecuación de la recta paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(1, -1, 0)$ y $B(-1, -3, 2)$.

$b)$ Calcular el ángulo formado por los planos π_1 y π_2.

Solución:

a) Si la recta es paralela a los planos tendrá como vector director el producto vectorial de los vectores normales a los planos.

Vector normal a π_1: $\overrightarrow{n_1} = (2, 3, -1)$

Vector normal a π_2: $\overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ $\overrightarrow{n_2} = (-5, 4, 3)$

El vector director de la recta será, por tanto:

$$\vec{u} = \begin{matrix} \vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k} \\ |23-1| \\ -543 \end{matrix} \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 13\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 23\vec{k} \quad \vec{u} = (13, -1, 23)$$

El punto medio del segmento de extremos A(1, –1, 0) y B(–1, –3, 2) es:

$$M = (\frac{1-1}{2}, \frac{-1-3}{2}, \frac{0+2}{2}) = (0, -2, 1)$$

La ecuación de la recta que pasa por el punto M y es paralela a los planos $\pi_1 y$ π_2 es:

$$r: \begin{cases} x = 13\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 1 + 23\lambda \end{cases}$$

Despejando λ se expresa en forma continua: $\boldsymbol{\frac{x}{13} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{23}}$

b) El ángulo formado por los planos π_1 y π_2 es el ángulo formado por sus vectores normales

$\overrightarrow{n_1} = (2, 3, -1)y\overrightarrow{n_2} = (-5, 4, 3)$

$$\alpha = \arccos(\frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}) = \arccos(\frac{|2 \cdot (-5) + 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 3^2}}) = \arccos(\frac{1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}}) = 87.83º$$

El ángulo formado por los planos π_1 y π_2 es **87.83º** = **87º 50’ 2’’**

Bloque 4: Estadística

Problema 4.A:

En un cierto instituto el 50 % de su alumnado lleva el desayuno desde casa, el 40 % lo compra en la cafetería del instituto, y el resto lo adquiere en un bazar cercano al instituto. Solamente un 5 % de los desayunos que se llevan desde casa incluyen bebidas azucaradas, pero en los desayunos comprados en la cafetería este porcentaje es del 60 % y en los desayunos comprados en el bazar del 80 %.

a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.

b) Justificar si es cierto que más de un 30 % de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas.

c) Justificar si es cierto que, elegido un desayuno al azar, la probabilidad que un estudiante lo haya traído desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada, es mayor que 0.1.

Solución:

a) Se definen los sucesos:

C = "El alumno o alumna lleva el desayuno desde casa"

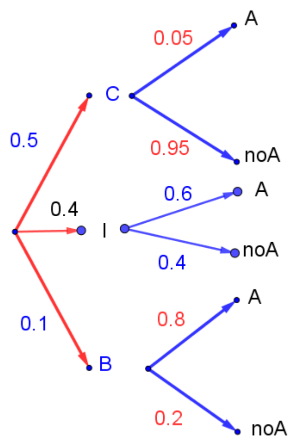
I = "El alumno o alumna compra el desayuno en la cafetería del instituto"

B = "El alumno o alumna compra el desayuno en un bazar cercano al instituto"

A = "El desayuno incluye bebidas azucaradas"

noA = "El desayuno no incluye bebidas azucaradas"

El árbol de probabilidades es:



b) Por el Teorema de la probabilidad total:

$$P(A) = P(C) \cdot P(A/C) + P(I) \cdot P(A/I) + P(B) \cdot P(A/B) = 0.5 \cdot 0.05 + 0.4 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.8 = 0.345$$

La probabilidad de que un desayuno incluya bebidas azucaradas es 0.345, es decir, un 34.5 %.

La afirmación de que más de un 30 % de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas es cierta.

c) Por el Teorema de Bayes:

$$P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(C) \cdot P(A/C)}{P(A)} = \frac{0.5 \cdot 0.05}{0.345} = 0.0724$$

La probabilidad de que un estudiante haya traído el desayuno desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada, es inferior a 0.1, por lo que la afirmación es falsa.

Problema 4.B:

Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80 %. Suponiendo independencia de sucesos:

a) Si se lo toman 100 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes?

b) Si se lo toman 225 pacientes, ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe entre 170 y 190 pacientes?

c) ¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los qne NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes?

Solución:

a) Sea p = probabilidad de que el medicamento elimine el acné a un paciente = 0.8

$q = 1 - p = 0.2$

n = número de pacientes = 100

Se define la variable X = número de pacientes a los que el medicamento elimina el acné

La variable X sigue una distribución binomial. $X \sim B(100, 0.8)$

Se pide la probabilidad $P(X > 75)$

Como $n \cdot p = 100 \cdot 0.8 = 80 > 5$ y $n \cdot q = 100 \cdot 0.2 = 20 > 5$; se aproxima a una distribución normal:

$\mu = n \cdot p = 80;\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = \sqrt{16} = 4;\quad X' \sim N(80, 4)$

Sin la corrección de Yates:

$$P(X > 75) = P(x' > 75) = P(\frac{x' - 80}{4} > \frac{75 - 80}{4}) = P(Z > -1.25) = P(Z < 1.25) = 0.8944$$

La probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes es 0.8944.

Si se hace la corrección de Yates se obtiene:

$$P(X > 75) = P(x' \geq 75.5) = P(\frac{x' - 80}{4} > \frac{75.5 - 80}{4}) = P(Z > -1.125) = P(Z < 1.125) \approx 0.8708$$

La probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes es $\mathbf{0.8708}$

b) n = número de pacientes = 225

Se define la variable X = número de pacientes a los que el medicamento elimina el acné

La variable X sigue una distribución binomial. $X \sim B(225, 0.8)$

Se pide la probabilidad $P(170 < X < 190)$

Como $n \cdot p = 225 \cdot 0.8 = 180 > 5$ y $n \cdot q = 225 \cdot 0.2 = 45 > 5$; Se aproxima a una distribución normal:

$\mu = n \cdot p = 180;\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{225 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = \sqrt{36} = 6;\quad X' \sim N(180, 6)$

Sin la corrección de Yates:

$$P(170 < X < 190) = P(170 < x' < 190) = P\left(\frac{170-180}{6} < \frac{x'-180}{6} < \frac{190-180}{6}\right)$$
$$= P(-1.67 < Z < 1.67) = P(Z < 1.67) - P(Z < -1.67) = P(Z < 1.67) - P(Z > 1.67)$$
$$= P(Z < 1.67) - [1 - P(Z < 1.67)] = 0.9525 - 1 + 0.9525 = 0.905$$

Con la corrección de Yates:

$$P = P\left(\frac{169.5-180}{6} \le Z \le \frac{190.5-180}{6}\right) = P\left(\frac{-10.5}{6} \le Z \le \frac{10.5}{6}\right) = P(-1.75 \le Z \le 1.75) =$$

$P(Z \le 1.75) - P(Z \le -1.75) = P(Z \le 1.75) - [1 - P(Z \le 1.75)] = 2 \cdot P(Z \le 1.75) - 1 =$

$2 \cdot 0.9599 - 1 = 1.9198 - 1 = 0.9198.$

La probabilidad de que el medicamento actúe en un grupo de entre 170 y 190 pacientes es $\mathbf{0.905}$.

Con la corrección de Yates es $\mathbf{0.9198}$.

c) Si se toman el medicamento 500 pacientes, el número esperado de pacientes sobre los que no se eliminará el acné es $n \cdot q = 500 \cdot 0.2 = 100$

El número esperado de pacientes sobre los que NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes es de $\mathbf{100}$ pacientes

Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2020–2021

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(3)
Convocatoria:	

Instrucciones:
- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenido, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+a}{2x-4} & x \leq 0 \\ 10x^2 + x + b & x > 0 \end{cases}$

Calcular los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$. 2.5 ptos

Dar las expresiones de la función $f(x)$ y de su derivada $f'(x)$.

1B. Dadas las funciones: $f(x) = x^2 - 4x$; $g(x) = 4 - 4x$

a) Esbozar el gráfico del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ 1.25 ptos

b) Determinar el área del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ 1.25 ptos

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Sea la matriz $M = A + c \cdot B$, donde c es un número real cualquiera. Calcular los valores de c de forma que el rango $(M) = 1$ 1 pto

b) Sea la matriz $D = A^2 + B \cdot A$. Averiguar la matriz X que cumple la siguiente ecuación matricial: $D \cdot X = -30\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 1.5 pto

2B. En la liga Mate-Basket, las mujeres matemáticas con mayor puntuación son: Lovelace, Noerther y Germain. Las tres acumulan 17500 puntos. Además, lo que ha anotado Germain más 2500 puntos es equivalente a la mitad de lo anotado por Lovelace. Finalmente, Noerther anotó el doble que Germain. ¿Cuál es el ranking de puntuaciones de la liga Mate-Basket de las jugadoras Lovelace, Noerther y Germain? 2.5 ptos

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. Dadas las siguientes ecuaciones en el espacio tridimensional:

$$r: 5 - x = y - 3 = 5 - z$$

$$\pi: 3x - 4y - 8z + 35 = 0$$

a) Comprobar que la recta r y el plano π se cortan en un punto. 1.5 ptos

Averiguar dicho punto.

b) Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $A\,(2, 2, 2)$, paralelo a la recta r, y perpendicular al plano π 1 pto

3B. Dado el plano $\pi: -x + 3y + 2z + 5 = 0$

y las rectas secantes $r: \frac{x-5}{2} = y + 2 = 1 - z$ y $s: \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = z$

a) Sea A el punto de intersección de las rectas r y s. 1.5 ptos

Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y que pasa por A.

b) Calcular el ángulo que forman las rectas r y s. 1 pto

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Con el objetivo de llevar a cabo el proceso de control de calidad de las arandelas, estas se organizan en lotes de 20 arandelas. Si la probabilidad de que una arandela sea defectuosa es de 0,01 y considerando independencia de sucesos:

a) Determinar si la probabilidad de encontrar en un lote 1 o 2 arandelas defectuosas es mayor del 20% 1.25 ptos

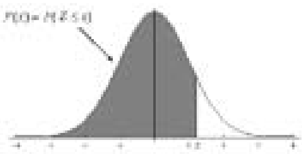
b) Si un lote se rechaza cuando se encuentra al menos una arandela defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de rechazar el lote? 0.75 ptos

c) ¿Cuál es el número esperado de arandelas sin defectos si el lote fuera de 200 arandelas? 0.5 ptos

4B. Suponiendo que el tiempo de espera en la cola de Correos sigue una distribución normal de media 7,5 minutos con 2 minutos de desviación típica.

a) Hallar el porcentaje de personas que esperan más de 9 minutos. 1.25 ptos

b) Correos afirma que: "Menos del 40% de las personas que acuden a Correos esperan entre 7 y 10 minutos". ¿Es correcta la afirmación? 1.25 ptos



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1: Análisis

Problema 1.A:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+a}{2x-4} & x \leq 0 \\ 10x^2 + x + b & x > 0 \end{cases}$. Calcular los valores de a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en R. Dar las expresiones de la función $f(x)$ y de su derivada $f'(x)$.

Solución:

Se estudia en primer lugar la continuidad de la función. Para x < 0 es continua por ser una función racional en la que el numerador y el denominador son funciones polinómicas, que son continuas. Además, el denominador es distinto de cero para x < 0, ya que se anula para x = 2. Para x > 0 también es continua por ser una función polinómica.

Continuidad en x = 0:

$$f(0) = \frac{0^2 + a}{2 \cdot 0 - 4} = -\frac{a}{4}$$

Límites laterales: $\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+a}{2x-4} = \frac{0^2+a}{2 \cdot 0-4} = -\frac{a}{4}$ $\quad \lim_{x \to 0^+} (10x^2 + x + b) = 10 \cdot 0^2 + 0 + b = b$

Para que la función sea continua en $\mathbb{R}$ deben coincidir los límites laterales y *f*(0): $\frac{-a}{4} = b \Rightarrow a = -4b$

La derivada de *f*(x) es:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x \cdot (2x-4) - (x^2+a) \cdot 2}{(2x-4)^2}, si x < 0 \\ 20x + 1, si x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2x^2 - 8x - 2a}{4x^2 - 16x + 16}, si x < 0 \\ 20x + 1, si x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x-a}{2x^2-8x+8}, si x < 0 \\ 20x + 1, si x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = \frac{0^2-4 \cdot 0-a}{2 \cdot 0^2-8 \cdot 0+8} = \frac{-a}{8} \qquad f'(0^+) = 20 \cdot 0 + 1 = 1$$

Para que f sea derivable en x = 0 deben ser iguales las derivadas laterales:

$\frac{-a}{8} = 1 \Rightarrow a = -8$De la ecuación$a = -4b$se obtiene el valor de *b*: $-8 = -4b \Rightarrow b = 2$

Para que *f* sea continua y derivable en $\mathbb{R}$ los valores de *a* y *b* son $\boldsymbol{a = -8, b = 2}$

La función *f* y su derivada son:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-8}{2x-4}, & si \ \ x \leq 0 \\ 10x^2 + x + 2, & si \ x > 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+8}{2x^2-8x+8}, & si \quad x < 0 \\ 20x + 1, & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Problema 1.B:

Dadas las funciones: $f(x) = x^2 - 4x$; $g(x) = 4 - 4x$.

$a)$ Esbozar el gráfico del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

$b)$ Determinar el área del recinto limitado por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

a) Se hallan los puntos de corte de ambas gráficas:

$$\left.\begin{array}{r} y = x^2 - 4x \\ y = 4 - 4x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 4x = 4 - 4x \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) = 12$ Puntos de corte: $A(-2, 12)$; $B(2, -4)$

Puntos de corte de *f*(x) con los ejes de coordenadas:

Con el eje OX: $\left.\begin{array}{r} y = x^2 - 4x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 4$

Puntos: $C(0,0)$; $D(4,0)$El punto D es también el punto de corte de f(x) con el eje OY.

Puntos de corte de *g*(x) con los ejes de coordenadas:

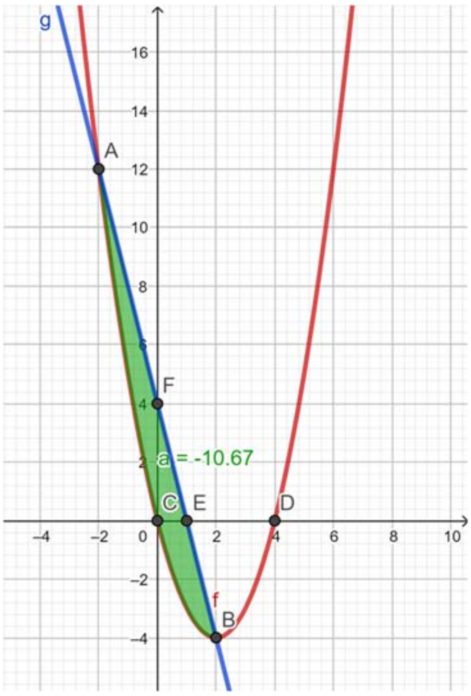
Con el eje OX: $\left.\begin{array}{r} y = 4 - 4x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 - 4x = 0 \Rightarrow x = 1$ Punto: $E(1,0)$

Con el eje OY: $g(0) = 4 - 4 \cdot 0 = 4$ Punto: $F(0,4)$

Vértice de la parábola *f*(x):

$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ El vértice coincide con uno de los puntos de corte de ambas gráficas: $B(2, -4)$

Se representan las gráficas de ambas funciones:



b) El área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g* viene determinado por la integral definida:

$$\int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)]dx = \int_{-2}^{2} [(4 - 4x) - (x^2 - 4x)]dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$$

$$[4x - \frac{x^3}{3}]|_{-2}^{2} = (4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}) - (4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3})$$
$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} u^2$$

El área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g es* $\boldsymbol{\frac{32}{3} u^2}$

Bloque 2: Álgebra

Problema 2.A:

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Sea la matriz $M = A + c \cdot B$, donde c es un número real cualquiera. Calcular los valores de c de forma que $Rang\ M = 1$.

$b)$ Sea la matriz $D = A^2 + B \cdot A$. Averiguar la matriz X que cumple la siguiente ecuación matricial:

$D \cdot X = -30 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Se calcula la matriz M:

$$M = A + c \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{pmatrix}$$

El determinante de M es:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{vmatrix} = (1+c)\cdot(2-c) - (4+4c)\cdot(-1) = 2 - c + 2c - c^2 + 4 + 4c$$
$$= -c^2 + 5c + 6$$

Para que la matriz M tenga rango 1 su determinante debe ser cero.

$$-c^2 + 5c + 6 = 0 \Rightarrow c = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot(-1)\cdot 6}}{2\cdot(-1)} = \frac{-5 \pm 7}{-2} \quad c_1 = -1; c_2 = 6$$

La matriz M tiene rango 1 para $\boldsymbol{c = -1}$ y $\boldsymbol{c = 6}$

b) Se despeja X en la ecuación:

$$D \cdot X = -30 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = -30 \cdot D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz D y su inversa, si existe:

$$D = A^2 + B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$|D| = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 12 & -6 \end{vmatrix} = 12 + 48 = 60 \neq 0$. La matriz D tiene inversa, ya que su determinante es no nulo.

$$Adj(D) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot (Adj(D))^t = \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -12 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/10 & 1/15 \\ -1/5 & -1/30 \end{pmatrix}$$

$$X = -30 \cdot D^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -30 \cdot \begin{pmatrix} -1/10 & 1/15 \\ -1/5 & -1/30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 12 & 7 & 22 \end{pmatrix}$$

La matriz X es $X = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{12} & \mathbf{7} & \mathbf{22} \end{pmatrix}$

Problema 2.B:

En la liga Mate-Basket, las mujeres matemáticas con mayor puntuación son: Lovelace, Noerther y Germain. Las tres acumulan 17.500 puntos. Además, lo que ha anotado Germain más 2.500 puntos es equivalente a la mitad de lo anotado por Lovelace. Finalmente, Noerther anotó el doble que Germain. ¿Cuál es el ranking de puntuaciones de la liga Mate-Basket de las jugadoras Lovelace, Noerther y Germain?

Solución:

Sea L = "puntuación de Lovelace"

N = "puntuación de Noerther"

G = "puntuación de Germain"

En total acumulan 17 500 puntos: $L + N + G = 17\,500$

La puntuación de Germain más 2 500 puntos equivale a la mitad de los puntos de Lovelace:

$$G + 2\,500 = \frac{L}{2} \Rightarrow 2G + 5\,000 = L \Rightarrow L - 2G = 5\,000$$

Noerther anotó el doble que Germain: $N = 2G \Rightarrow N - 2G = 0$

El sistema de ecuaciones que hay que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} L + N + G = 17\,500 \\ L - 2G = 5\,000 \\ N - 2G = 0 \end{array}\right\}$$ Resolvemos por el método de Gauss:

La matriz ampliada del sistema es $M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 17500 \\ 1 & 0 & -2 & 5000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to F_2 - F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 17500 \\ 0 & -1 & -3 & -12500 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to F_3 + F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 17500 \\ 0 & -1 & -3 & -12500 \\ 0 & 0 & -5 & -12500 \end{array}\right) \to$$

$$\left.\begin{array}{r} L + N + G = 17500 \\ -N - 3G = -12500 \\ -5G = -12500 \end{array}\right\} \; G = \frac{-12500}{-5} = 2\,500 \;\; -N - 3 \cdot 2500 = -12500 \Rightarrow N = 5\,000$$

$$L + 5000 + 2500 = 17500 \Rightarrow L = 10\,000$$

Las puntuaciones han sido:

Lovelace: $\mathbf{10\,000}$ puntos

Noerther: $\mathbf{5\,000}$ puntos

Germain: $\mathbf{2\,500}$ puntos

Bloque 3: Geometría

Problema 3.A:

Dadas las siguientes ecuaciones en el espacio tridimensional:

$$r \equiv 5 - x = y - 3 = 5 - z; \;\; \pi \equiv 3x - 4y - 8z + 35 = 0.$$

$a)$ Comprobar que la recta r y el plano π se cortan en un punto. Averiguar dicho punto.

$b)$ Calcular la ecuación del plano que pasa por el punto $A(2,2,2)$, paralelo a la recta r, y perpendicular al plano π.

Solución:

a) Estudiamos la posición relativa del plano π y los planos que determinan la recta r, que son:

$$r: \begin{cases} 5 - x = y - 3 \\ y - 3 = 5 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 8 \\ y + z = 8 \end{cases}$$

El sistema formado por las tres ecuaciones es:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 8 \\ y + z &= 8 \\ 3x - 4y - 8z &= -35 \end{aligned}\right\}$$

La matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -4 & -8 & -35 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = -8 + 3 + 4 = -1 \neq 0$$

El determinante de la matriz A del sistema es no nulo, por tanto, Rango(A) = 3 = Rango(A') y el sistema es compatible determinado, es decir, la recta r y el plano π se cortan en un punto.

Para hallar el punto de corte se puede despejar x y z en la ecuación de la recta y sustituir en el plano π:

$\begin{cases} x + y = 8 \\ y + z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 - y \\ z = 8 - y \end{cases}$, sustituyendo en el plano: $\pi \equiv 3x - 4y - 8z + 35 = 0 \Rightarrow$

$3(8 - y) - 4y - 8(8 - y) + 35 = 0 \Rightarrow y = 5, x = 8 - 5 = 3; z = 8 - 5 = 3$

La recta r y el plano π se cortan en el punto **(3, 5, 3)**.

b) Si el plano es paralelo a la recta r, el vector director de la recta debe ser también un vector director del plano. Vector director de r: $\vec{u} = (-1, 1, -1)$. Si el plano es perpendicular al plano π el vector normal a π debe ser un vector director del plano que debemos hallar. Vector normal a π: $\vec{n} = (3, -4, -8)$. Punto A(2,2,2)

El plano viene dado por la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 2 & z - 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -12(x - 2) - 11(y - 2) + z - 2 = 0 \Rightarrow 12x + 11y - z - 44 = 0$$

El plano que pasa por el punto $A(2,2,2)$, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π es

$$\mathbf{12x + 11y - z - 44 = 0}$$

Problema 3.B:

Dado el plano $\pi \equiv -x+3y+2z+5=0$ y las rectas $r \equiv \frac{x-5}{2} = y+2 = 1-z$ y $s \equiv \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = z$.

$a)$ Sea A el punto de intersección de las rectas r y s. Hallar la ecuación de la recta t que es perpendicular al plano π y que pasa por A.

$b)$ Calcular el ángulo que forman las rectas r y s.

Solución:

a) Expresamos las rectas *r* y *s* como intersección de planos:

$$r \equiv \frac{x-5}{2} = y+2 = 1-z \Rightarrow \begin{cases} x-2y=9 \\ y+z=-1 \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = z \Rightarrow \begin{cases} x+3y=-1 \\ y+2z=0 \end{cases}$$

Se resuelve, por el método de Gauss, el sistema formado por las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y=9 \\ y+z=-1 \\ x+3y=-1 \\ y+2z=0 \end{array}\right\} \text{ Matriz ampliada del sistema: } \quad M' = \begin{pmatrix} 1-209 \\ 011-1 \\ 130-1 \\ 0120 \end{pmatrix} \rightarrow F_3 - F_1$$

$$\begin{pmatrix} 1-209 \\ 011-1 \\ 050-10 \\ 0120 \end{pmatrix} \rightarrow F_3 - 5F_2\,;\ F_4 - F_2 \begin{pmatrix} 1-209 \\ 011-1 \\ 00-5-5 \\ 0011 \end{pmatrix} \rightarrow 5F_4 + F_3$$

$$\begin{pmatrix} 1-209 \\ 011-1 \\ 00-5-5 \\ 0000 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{r} x-2y=9 \\ y+z=-1 \\ -5z=-5 \end{array}\right\} \text{ De la tercera ecuación: } z=\frac{-5}{-5}=1$$

Sustituyendo en la segunda ecuación: $y+1=-1 \Rightarrow y=-2$ y de la primera ecuación se obtiene x:

$x-2\cdot(-2)=9 \Rightarrow x=5$

El punto de corte de las rectas es A(5, –2, 1).

Si la recta es perpendicular al plano π, su vector director es el vector normal al plano: $\vec{n}=(-1,3,2)$

$$\text{La recta } t \text{ es: } \begin{array}{l} x=5-\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=1+2\lambda \end{array}$$

b) El ángulo formado por las rectas r y s.es el ángulo formado por sus vectores directores

$\overrightarrow{u_r}=(2,1,-1)$ y $\overrightarrow{u_s}=(6,-2,1)$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_s}|}\right)=\arccos\left(\frac{|2\cdot6+1\cdot(-2)+(-1)\cdot1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{6^2+(-2)^2+1^2}}\right)=\arccos\left(\frac{9}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{41}}\right)=54.98º$$

El ángulo formado por las rectas r y s es **54.98º** = **54º 28’**

Bloque 4: Estadística

Problema 4.A:

Con el objetivo de llevar a cabo el proceso de control de calidad de las arandelas, estas se organizan en lotes de 20 arandelas. Si la probabilidad de que una arandela sea defectuosa es de 0.01 y considerando independencia de sucesos:

$a)$ Determinar si la probabilidad de encontrar en un lote 1 o 2 arandelas defectuosas es mayor del 20 %.

$b)$ Si un lote se rechaza cuando se encuentra al menos una arandela defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de rechazar el lote?

$c)$ ¿Cuál es el número esperado de arandelas sin defectos si el lote fuera de 200 arandelas?

Solución:

a) Sea X = número de arandelas defectuosas

La variable X sigue una distribución binomial. $X \sim B(20, 0.01)$; $P(X = k) = \binom{20}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{20-k}$

Se pide la probabilidad $P(1 \leq X \leq 2)$

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{20}{1} \cdot 0.01 \cdot 0.99^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0.01^2 \cdot 0.99^{18}$$
$$= 0.1652 + 0.0159 = 0.1811$$

La probabilidad de encontrar 1 o 2 arandelas defectuosas es 0.1811 = 18.11 %, por tanto, no es mayor del 20 %.

b) La probabilidad de que se rechace un lote es $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{20}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{20} = 1 - 0.8179 = 0.1821$

La probabilidad de rechazar un lote es **0.1821**.

c) Si el lote fuera de 200 arandelas, la variable sería Y=número de arandelas no defectuosas

$Y \sim B(200{,}0.99)$

El número esperado de arandelas no defectuosas sería $n \cdot p = 200 \cdot 0.99 = 198$

El número esperado de arandelas no defectuosas es $\mathbf{198}$.

Problema 4.B:

Suponiendo que el tiempo de espera en la cola de Correos sigue una distribución normal de media 7.5 minutos con 2 minutos de desviación típica.

a) Hallar el porcentaje de personas que esperan más de 9 minutos.

b) Correos afirma que: "Menos del 40 % de las personas que acuden a Correos esperan entre 7 y 10 minutos". ¿Es correcta la afirmación?

Solución:

a) Sea X = tiempo de espera en minutos en la cola de Correos

La variable sigue una distribución normal $X \sim N(7.5{,}2)$

Se calcula la probabilidad $P(X > 9)$y tipificando:

$$P(X > 9) = P(\frac{X - 7.5}{2} > \frac{9 - 7.5}{2}) = P(Z > 0.75) = 1 - P(z \leq 0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266$$

El porcentaje de personas que esperan más de 9 minutos es **22.66 %**

b) Se calcula la probabilidad $P(7 \leq X \leq 10)$y tipificando:

$$P(7 \leq X \leq 10) = P(\frac{7 - 7.5}{2} \leq \frac{X - 7.5}{2} \leq \frac{10 - 7.5}{2}) = P(-0.25 \leq Z \leq 1.25) = P(Z \leq 1.25) - P(Z \leq -0.25)$$

$$P(Z \leq 1.25) - P(Z \geq 0.25) = P(Z \leq 1.25) - [1 - P(Z \leq 0.25)] = 0.8944 - [1 - 0.5987] = 0.4931$$

El 49.31 % de las personas esperan en Correos entre 7 y 10 minutos, por lo que la afirmación no es correcta.