MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EvAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

Ejercicio 1:

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) [**1 punto**] Calcula razonadamente el determinante de $A^{\top}$, es decir, la matriz traspuesta de A.

b) [**1,5 puntos**] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.

Ejercicio 2:

2. *a*) [**1,75 puntos**] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & a+1 \\ a \cdot x & & +z & = & a-1 \\ x & -y & +z & = & 3 \end{cases}.$$

b) [**0,75 puntos**] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 0$, si es posible.

Ejercicio 3:

3. *a*) [**1,25 punto**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{2}{3+e^x}dx$.

(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

b) [**1,25 puntos**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx$.

Ejercicio 4:

4. *a*) [**1,25 puntos**] Sea el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r.

b) [**1,25 puntos**] Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 & +2\lambda \\ y = 1 & -2 \cdot a \cdot \lambda \\ z = 0 & +2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

Ejercicio 5:

5. Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(1,1,2)$.

- **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
- **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C, y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D.

Ejercicio 6:

6. *a*) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1,2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

   b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

Ejercicio 7:

7. *a*) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^{x-2} - 1}{2x - 4}$.

   b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 2e^x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases},$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

Ejercicio 8:

8. *a*) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

   b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) [**1 punto**] Calcula razonadamente el determinante de $A^\top$, es decir, la matriz traspuesta de A.

b) [**1,5 puntos**] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A + 3 \cdot A = B$.

RESPUESTA

a) El determinante de A y el de $A^\top$ tienen el mismo valor

Calculamos el determinante de A, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 1 - 2 - 0 - 0 = 1$

$$\boldsymbol{|A^T| = |A| = 1}$$

b) $X \cdot A + 3 \cdot A = B$, $X \cdot A = B - 3 \cdot A$, $X = (B - 3 \cdot A) \cdot A^{-1}$

Calculamos $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t)$, $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Como $|A| = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$B - 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

.

$$X = (B - 3 \cdot A) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -5 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2:

2. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & a+1 \\ a\cdot x & & +z & = & a-1 \\ x & -y & +z & = & 3 \end{cases}.$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 0$, si es posible.

RESPUESTA

a) Escribimos la matriz de coeficientes C y la ampliada A

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, calculamos el determinante de C,

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -a+1+1-a = 2-2a,\ 2-2a = 0$, obtenemos $a = 1$.

Para $\boldsymbol{a = 1}$, sustituimos, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, $r(C) = 2$; como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, $r(A) = 3$.

En resumen,

Si $\boldsymbol{a \neq 1}$	$\boldsymbol{rg(C) = rg(A) = 3}$	**Compatible Determinado (Única solución)**
Si $\boldsymbol{a = 1}$	$\boldsymbol{rg(C) = 2 \neq rg(A) = 3}$	**Incompatible (No hay solución)**

b) Para $a = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $F'_3 = -F_1 + F_3$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Tenemos $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ z = -1 \\ -2y = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-1 = 1 \\ z = -1 \\ x-y-1 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = 2 \\ z = -1 \\ x-y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = 2 \\ z = -1 \\ 2x = 6 \end{cases}$

$$\boldsymbol{x = 3, \quad y = -1, \quad z = -1}$$

Ejercicio 3:

3. *a*) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{2}{3+e^x}dx$.
(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx$.

RESPUESTA

a) $\int \frac{2}{3+e^x}dx$, $e^x = t$, $e^x dx = dt$, $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$, $\int \frac{2}{3+e^x}dx = \int \frac{2}{3+t}\frac{dt}{t}$,

es una integral racional con raíces simples, descomponemos en fracciones,

$$\frac{2}{(3+t)\cdot t} = \frac{A}{3+t} + \frac{B}{t} \ , \qquad 2 = A\cdot t + B\cdot(3+t),$$

$$\left.\begin{matrix} A+B=0 \\ 3B=2 \end{matrix}\right\}$$

Para $t = 0$ $\quad 2 = B\cdot 3 \quad B = \frac{2}{3}$

$t = -3$ $\quad 2 = -3\cdot A \quad A = -\frac{2}{3}$

luego $\int \frac{2}{3+t}\frac{dt}{t} = \int \frac{-\frac{2}{3}}{3+t}dt + \int \frac{\frac{2}{3}}{t}dt = -\frac{2}{3}\ln|3+t| + \frac{2}{3}\ln|t| = \frac{2}{3}\ln\left|\frac{t}{t+3}\right| + C$,

deshaciendo el cambio $\int \frac{2}{3+e^x}dx = \frac{2}{3}\ln\left|\frac{e^x}{e^x+3}\right| + C$

$$\int \frac{2}{3+e^x}dx = \frac{2}{3}\cdot\ln\left|\frac{e^x}{e^x+3}\right| + C = \ln\sqrt[3]{\left(\frac{e^x}{3+e^x}\right)^2} + C$$

b) $\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx = \int \frac{-x}{x^2+3}dx + \int \frac{1}{x^2+3}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx + \int \frac{1}{x^2+(\sqrt{3})^2}dx =$

$= -\frac{1}{2}ln|x^2+3| + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$

$$-\frac{1}{2}\cdot L(x^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot arc\ tg\ \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx = -\frac{1}{2}\cdot ln|x^2+3| + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C = -\frac{1}{2}\cdot ln(x^2+3) + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot arc\ tg\ \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

Ejercicio 4:

4. a) **[1,25 puntos]** Sea el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r.

b) **[1,25 puntos]** Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 & +2\lambda \\ y = 1 & -2 \cdot a \cdot \lambda \\ z = 0 & +2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

RESPUESTA

a) Dado un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y una recta r la distancia es

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{A_rP} \wedge \overrightarrow{V_r}\right|}{\left|\overrightarrow{V_r}\right|}$$

$P(1, 0, 1)$, $\overrightarrow{V_r} = (1,1,-1)$, $A_r = (-1,0,1)$, $\overrightarrow{A_rP} = (1,0,1) - (-1,0,1) = (2,0,0)$

$$\overrightarrow{A_rP} \wedge \overrightarrow{V_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2k + 2j, \quad \overrightarrow{A_rP} \wedge \overrightarrow{V_r} = (0,2,2), \quad \left|\overrightarrow{A_rP} \wedge \overrightarrow{V_r}\right| = \sqrt{0 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$\left|\overrightarrow{V_r}\right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ de donde, $d(P,r) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$$\boldsymbol{d(P,r) = \frac{2\sqrt{6}}{3}\,\mathbf{u.}}$$

b) Para que dos rectas sean paralelas sus vectores directores han de ser proporcionales

$$\frac{2}{a} = \frac{-2a}{-1} = \frac{2}{1}$$

Tomando

$$\frac{2}{a} = \frac{2}{1}, \quad a = 1$$

y

$$\frac{-2a}{-1} = \frac{2}{1}, \quad a = 1$$

Las rectas son paralelas cuando *a* = 1

Ejercicio 5:

5. Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(1,1,2)$.

- [**1,25 puntos**] Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
- [**1,25 punto**] Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C, y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D.

RESPUESTA

a) El volumen viene dado por la expresión $V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$

formamos los vectores:

$\overrightarrow{AB} = (2,1,-1)$ $\quad \overrightarrow{AC} = (1,1,0)$ $\quad \overrightarrow{AD} = (1,1,1)$

Por tanto, el volumen es

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|1| = \frac{1}{6}\ \mathrm{u}^3.$$

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{6}\, u^3 \cong 0.17\, u^3}$$

b) Consideramos el punto $A(0, 0, 1)$ y los vectores $\overrightarrow{AB} = (2,1,-1)$ $\quad \overrightarrow{AC} = (1,1,0)$

La ecuación del plano viene dada por $\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Calculando, $2z - 2 - y - z + 1 + x = 0$, $\quad x - y + z - 1 = 0$, luego $\quad \pi \equiv x - y + z - 1 = 0$

La recta pedida tendrá como vector director el vector normal al plano: $\overrightarrow{n_\pi} = (1,-1,1)$
junto con el punto $D(1, 1, 2)$
la ecuación de la recta es $\quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$

La ecuación del plano es: $\boldsymbol{\pi \equiv x - y + z - 1 = 0}$

La ecuación de la recta es: $\boldsymbol{\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}}$

Ejercicio 6:

6. *a*) [**1 punto**] Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

   b) [**1,5 puntos**] Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

RESPUESTA

a) $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ al pasar por el punto (1, 2), $f(1) = 2$

Luego $f(1) = a \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + b = a + b - 3 = 2,\ a + b = 5$

Como la pendiente de la recta tangente en el punto es 1, $f'(1) = 1$

$f'(x) = 3ax^2 - 4x - 1 \qquad f'(1) = 3 \cdot a \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = 3a - 5 = 1,\ 3a - 5 = 1 \quad 3a = 6$

Resolvemos el sistema $\begin{cases} a + b = 5 \\ 3a - 5 = 1 \end{cases}$ obtenemos $\begin{matrix} a = 2 \\ b = 3 \end{matrix}$

Los valores son: *a* = 2 y *b* = 3

b) Para $x = 0$, utilizamos la definición de continuidad en un punto.

Primero calculamos el $\lim_{x \to 0} f(x)$ y para ello tenemos que tomar límites laterales, ya que por la izquierda del 0 tenemos una función y por la derecha del 0 tenemos otra función.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 - ax + 1) = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} be^x = b$, luego, para que exista el límite y f sea continua en $x = 0$, $b = 1$.

Calculamos la derivada de f: $f'(x) = \begin{cases} 2x - a & x < 0 \\ be^x & x > 0 \end{cases}$ calculamos las derivadas laterales en 0

$$f'_-(0) = 2 \cdot 0 - a = -a$$

$$f'_+(0) = b \cdot e^0 = b = 1$$

Luego para que f sea derivable en $x = 0$, $a = -1$.

***f* es continua y derivable en *x* = 0 para $a = -1$ y *b* = 1**

Ejercicio 7:

7. *a*) [**1 punto**] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}-1}{2x-4}$.

b) [**1,5 puntos**] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si} \quad x<1 \\ \frac{2x-1}{x-2} & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \\ 2e^x & \text{si} \quad x>3 \end{cases},$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

RESPUESTA

a) $\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}-1}{2x-4} = \frac{0}{0}$ indeterminación, aplicamos regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}-1}{2x-4} = \lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}-1}{2x-4} = \frac{1}{2}$$

b) El dominio es todos los números reales menos en x = 2, por anularse el denominador de la función racional definida entre 1 y 3

Sabemos que es continua en todos los números reales por ser una función definida a trozos de funciones continuas, polinómica, racional y exponencial, salvo 1 y 3 por estar definida a izquierda y derecha con diferentes funciones y hay que estudiar si es o no continua y en $x = 2$ que no es continua pues no existe $f(2)$, estudiamos el tipo de discontinuidad.

- En $x = 1$, $f(1) = 1^2 - 2 = -1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2-2) = -1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-1}{x-2} = -1 \end{cases}$$

, como los límites laterales son iguales, $\lim_{x\to 1} f(x) = -1$,

Al ser $f(1) = -1 = \lim_{x\to 1} f(x)$, f es continua en $x = 1$.

- En $x = 2$, no existe $f(2)$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{4}{0} \qquad \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{4}{0^-} - \infty \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{cases} \qquad \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

- En $x = 3$, $f(3) = \frac{2\cdot 3-1}{3-2} = 5$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x-1}{x-2} = 5 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 2e^x = 2\cdot e^3, \end{cases}$$

como los límites laterales son distintos, $\nexists \lim_{x\to 3} f(x)$,

En $x = 2$	***f*** **presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto infinito**
En $x = 3$	***f*** **presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito**

Ejercicio 8:

8. *a*) Se sabe que el 20 % de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80 % sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50 % ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90 % ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

   b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80 % de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

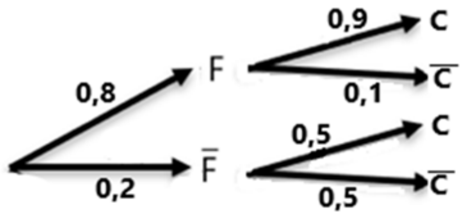
   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

RESPUESTA

a) Para resolver los dos apartados, vamos a realizar un diagrama de árbol, pero antes tenemos que escribir una leyenda:

F: comparte fotografías
$\bar{F}$: no comparte fotografías
C: comenta fotografías
$\bar{C}$: no comenta fotografías



a.1) Aplicamos el teorema de la **probabilidad total**:

$$P(C) = P(F \cap C) + P(\bar{F} \cap C) =$$

$$= P(\mathrm{F}) \cdot P(C/F) + P(\bar{F}) \cdot P(C/\bar{F}) = 0.8 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.5 = 0.82$$

$P(C)$ = 0.82

a.2) Aplicamos el **teorema de Bayes**:

$$P(F/\bar{C}) = \frac{P(\bar{C} \cap \mathrm{F})}{P(\bar{C})} = \frac{P(F) \cdot P(\bar{C}/F)}{P(\bar{C})} = \frac{0.8 \cdot 0.1}{1 - P(C)} = \frac{0.08}{1 - 0.82} = \frac{0.08}{0.18} = 0.4444$$

$$\boldsymbol{P(F/\bar{C}) = 0.4444}$$

b) Sea X la variable, identificar de manera correcta la persona $P(X) = 0.8$
como se procesan 4 fotografías se trata de una distribución Binomial
donde $n = 4$ y $p = 0.8$ $B(4, 0.8)$

b.1) $P(X = 4) = 0.4096$, mirando la tabla $k = 4$ y $p = 0.8$,

Probabilidad de identificar las 4 personas, $P(x = 4) = 0.4096$

b.2) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.0016 = 0.9984$ mirando la tabla $k = 0$ y $p = 0.8$

Probabilidad **de identificar al menos una persona, $P(X \geq 1) = 0.9984$**

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EvAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE **JULIO**

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

Ejercicio 1:

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) [**1 punto**] Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) [**1,5 puntos**] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + 3I = A$.

Ejercicio 2:

2. *a*) [**1,75 puntos**] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +ay & +z & = & 2 \\ x & & +z & = & a \\ ax & +2y & +z & = & 3 \end{cases}.$$

b) [**0,75 puntos**] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Ejercicio 3:

3. *a*) [**1,25 punto**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int x \cdot cos(3x)dx$.

b) [**1,25 puntos**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+1}$.

Ejercicio 4:

4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0$.

a) [**1 punto**] Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

b) [**1,5 puntos**] Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ al plano π_1.

Ejercicio 5:

5. *a*) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1}$.

b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x & \text{si} \quad x>2 \end{cases},$$

estudia su continuidad en $x=0$ y en $x=2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

Ejercicio 6:

6. Sea la función $f(x) = \frac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$.

a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$.

Ejercicio 7:

7. *a*) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + x - 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(1,1)$ y tenga aquí un punto de inflexión.

b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x) - \cos(x)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función $f(x)$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-1,1]$.

Ejercicio 8:

8. *a*) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
8	0	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	0.0004
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	0.0459	0.0046
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	0.0331
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1678	0.4305

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) [**1 punto**] Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) [**1,5 puntos**] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + 3I = A$.

RESPUESTA

a) Calculamos el determinante de A,

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 0 - 3 - 1 = -2$, como es distinto de 0 podemos calcular la inversa.

Calculamos $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t)$, $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Como $|A| = -2$, $\quad A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot X + 3 \cdot I = A$, $\ A \cdot X = A - 3 \cdot I$, $\quad X = A^{-1} \cdot (A - 3 \cdot I) = A^{-1} \cdot A - 3 \cdot A^{-1} \cdot I$

$$X = I - 3 \cdot A^{-1}\,; \quad X = I - 3 \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{11}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-9}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2:

2. *a*) [**1,75 puntos**] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +ay & +z & = & 2 \\ x & & +z & = & a \\ ax & +2y & +z & = & 3 \end{cases}.$$

b) [**0,75 puntos**] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

RESPUESTA

a) Escribimos la matriz de coeficientes C y la ampliada A

$C = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ a & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, calculamos el determinante de C,

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + a^2 - 2 - a = a^2 - a,\ a^2 - a = 0$, obtenemos $a = 1 \ \ y \ \ a = 0$.

Para $\boldsymbol{a = 1}$, sustituimos, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, $r(C) = 2$; como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $r(A) = 2$.

Para $\boldsymbol{a = 0}$, sustituimos, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, $r(C) = 2$; como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, $r(A) = 3$.

En resumen,

Si $\boldsymbol{a \neq 1}$ **y** $\boldsymbol{a \neq 0}$	$\boldsymbol{rg(C) = rg(A) = 3}$	Compatible Determinado (Única solución)
Si $\boldsymbol{a = 1}$	$\boldsymbol{rg(C) = 2 = rg(A) = 2}$	Compatible Indeterminado (inf. soluciones)
Si $\boldsymbol{a = 0}$	$\boldsymbol{rg(C) = 2 \neq rg(A) = 3}$	Incompatible (No hay soluciones)

b) Para $\boldsymbol{a = 2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{matrix} F'_2 = -F_1 + F_2 \\ F'_3 = -2F_1 + F_3 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Tenemos $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -2y \qquad = 0 \\ -2y - z \ = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

$$\boldsymbol{x = 1, \quad y = 0, \quad z = 1}$$

Ejercicio 3:

3. a) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int x \cdot cos(3x)dx$.

   b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{dx}{2x^2+1}$.

RESPUESTA

a) $\int x \cdot \cos(3x)\, dx$, por partes, $u = x$, $du = dx$; $dv = cos(3x)$, $v = 1/3 \cdot sen(3x)$, de donde,

$$\int x \cdot cos(3x)\, dx = x \cdot \frac{1}{3} \cdot sen(3x) - \frac{1}{3} \cdot \int sen(3x)dx = \frac{x}{3} \cdot sen(3x) + \frac{1}{9} \cdot cos(3x) + C$$

Por tanto,

$$\boldsymbol{\int x \cdot cos(3x)\, dx = \frac{x}{3} \cdot sen(3x) + \frac{1}{9} \cdot cos(3x) + C}$$

b) $\int \frac{1}{2x^2+1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}x)^2+1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2}x) + C$

De la fórmula: $\int \frac{u'}{u^2+1} dx$, donde u es una función de x

Por tanto,

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{2x^2+1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2}x) + C}$$

Ejercicio 4:

4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0$.

   a) [**1 punto**] Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

   b) [**1,5 puntos**] Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ al plano π_1.

RESPUESTA

a) Para que los planos sean perpendiculares sus vectores normales también han de serlo,

Vector normal de π_1, $\overline{n_1} = (a, 1, 2)$; Vector normal de π_2, $\overline{n_2} = (2, -1, a)$

Si el producto escalar vale 0, son perpendiculares,

$$\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = (a, 1, 2) \cdot (2, -1, a) = 2a - 1 + 2a = 4a - 1$$

$$4a - 1 = 0, \ \ a = \frac{1}{4}$$

Para $\boldsymbol{a = \frac{1}{4}}$ los planos son perpendiculares

b) Dado un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y un plano $\boldsymbol{\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0}$ la distancia es

$$\boldsymbol{d(P, \pi) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}},$$

Para $a = 1$ la ecuación del plano es $\boldsymbol{\pi_1 \equiv x + y + 2z - 3 = 0}$, sustituyendo en la fórmula,

$$\boldsymbol{d(P, \pi_1) = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} u.}$$

$$\boldsymbol{d(P, \pi_1) = \frac{\sqrt{6}}{6} u.}$$

Ejercicio 5:

5. *a*) [**1 punto**] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1}$.

b) [**1,5 puntos**] Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases},$$

estudia su continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

RESPUESTA

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = \frac{0}{0}$ indeterminación, aplicamos **regla de L'Hôpital**,

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = 1$$

b)

- En $x = 0$, $f(0) = \frac{1}{0-1} = -1$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x-1} = -1 \end{cases}$, como los límites laterales son distintos, $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

- En $x = 2$, $f(2) = \frac{1}{2-1} = 1$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-1} = 1 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x = 2 \end{cases}$, como los límites laterales son distintos, $\nexists \lim_{x \to 2} f(x)$,

En $x = 0$ f presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito
En $x = 2$ f presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito

Ejercicio 6:

6. Sea la función $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$.

   a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

   b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

RESPUESTA

a) $f'(x) = \frac{(4x+2)\cdot(3x^2+3)-(2x^2+2x-2)\cdot(6x)}{(3x^2+3)^2} = \frac{(12x^3+6x^2+12x+6)-(12x^3+12x^2-12x)}{(3x^2+3)^2} =$

$= \frac{-6x^2+24x+6}{(3x^2+3)^2}$, la fracción es 0 si el numerador es 0, igualamos $-6x^2+24x+6=0$,

Obtenemos, $x = 2+\sqrt{5}$ y $x = 2-\sqrt{5}$, estudiamos el signo de la derivada en los intervalos,

$(-\infty, 2-\sqrt{5}\,), f'(-10) < 0\,;$ Decreciente ; $(2-\sqrt{5}\,, 2+\sqrt{5}\,),$ $f'(0) > 0$; Creciente ; $(2+\sqrt{5}\,, \infty\,),$ $f'(10) < 0$ Decreciente ;

$f(2-\sqrt{5}\,) = \frac{20-10\sqrt{5}}{30-12\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; $f(2+\sqrt{5}\,) = \frac{20+10\sqrt{5}}{30+12\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Por tanto, tenemos:

Mínimo relativo en $\left(2-\sqrt{5},\ -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ y máximo relativo en $\left(2+\sqrt{5},\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

b) Ecuación recta tangente: $y = f(a) + f'(a)\cdot(x - a)$, para $a = 1$, $f(1) = 1/3$, $f'(1) = 2/3$, de donde

$y = 1/3 + 2/3\cdot(x-1)$, $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

Recta tangente: $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

Ejercicio 7:

7. *a)* **[1 punto]** Sea la función $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + x - 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(1, 1)$ y tenga aquí un punto de inflexión.

   b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x) - \cos(x)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función $f(x)$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-1, 1]$.

RESPUESTA

a) Si pasa por el punto (1, 1) entonces, $f(1) = 1$

Si en este punto hay un punto de inflexión entonces, $f''(1) = 0$.

$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + 1$

$f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$, aplicamos las condiciones,

$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 1 - 1 = 1, \quad a + b = 1$

$f''(1) = 6 \cdot a \cdot 1 + 2 \cdot b = 0, \quad 6a + 2b = 0, \;\; b = -3a, \;\; a - 3a = 1$

De donde, $a = -\frac{1}{2}$ y $b = -3(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

Los valores son: $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{3}{2}$

b) Enunciado: Si f es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$ entonces, existe al menos un c perteneciente a (a, b), tal que $f'(c) = 0$.

Al ser la derivada en c igual a 0, en c debe existir un extremo relativo.

$f(x) = x \cdot sen(x) - cos(x)$ es una función continua y derivable en todos los números reales al ser suma y producto de funciones polinómicas y trigonométricas que lo son.

$f(-1) = -1 \cdot sen(-1) - cos(-1) = -(-sen(1)) - cos(1) = sen(1) - cos(1)$

$f(1) = 1 \cdot sen(1) - cos(1) = sen(1) - cos(1)$

Como se cumplen las hipótesis del teorema, en [–1, 1] la función tiene al menos un extremo relativo.

Efectivamente f tiene al menos un extremo relativo en [–1, 1]

Ejercicio 8:

8. *a*) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

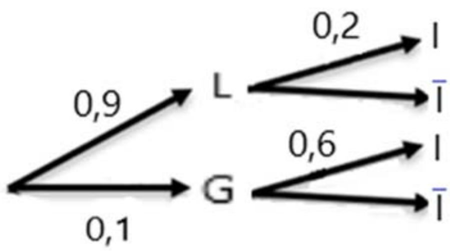
b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

RESPUESTA

a) Para resolver los dos apartados, vamos a realizar un diagrama de árbol, pero antes tenemos que escribir una leyenda:

L: pacientes leves
G: pacientes graves
I: debe ingresar
$\bar{I}$: no debe ingresar



a.1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(I) = P(L \cap I) + P(G \cap I) =$$

$$= P(L) \cdot P(I/L) + P(G) \cdot P(I/G) = 0.9 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.6 = 0.24$$

$P(I)$ = 0.24

a.2) Aplicamos el **teorema de Bayes**:

$$P(L/I) = \frac{P(L \cap I)}{P(I)} = \frac{P(L) \cdot P(I/L)}{P(I)} = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.24} = \frac{0.18}{0.24} = 0.75$$

$$\boldsymbol{P(L/I) = 0.75}$$

b) Sea X la variable, clasificar al paciente como leve $P(X) = 0.9$
como llegan 8 pacientes se trata de una distribución Binomial
donde $n = 8$ y $p = 0.9$ luego $B(8, 0.9)$

b.1) $P(X = 4) = 0.0046$, mirando la tabla $n = 8$, $k = 4$ y $p = 0.9$

Probabilidad de que 4 pacientes sean leves, $P(X = 4) = 0.0046$

b.2) $P(X \leq 7) = 1 - P(X = 8) = 1 - 0.4305 = 0.5695$ mirando la tabla $k = 8$ y $p = 0.9$

Probabilidad **de que como mucho 7 pacientes sean leves, $P(X \geq 7) = 0.5695$**