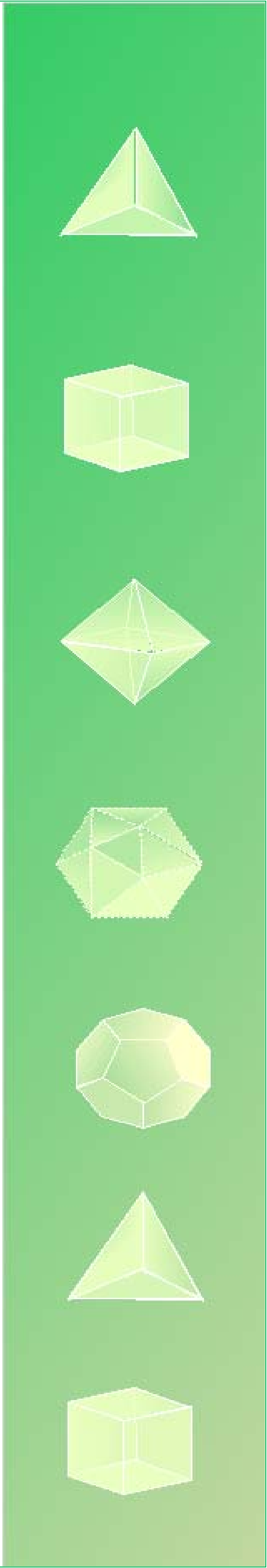


MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

CASTILLA Y LEÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz Yañez-Barnuevo

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** Nº Páginas: 3

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuales son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- **CALCULADORA:** Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1 .- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda = -1$. **(0,8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de n para los que la matriz A^2 tiene inversa. **(1 punto)**

b) Para $n = 2$, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

E3.- (Geometría)

a) Hallar la recta perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ que pasa por el punto $A = (0,0,0)$. **(0,8 puntos)**

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos $P = (1,1,1)$ y $Q = (1,3,-1)$ son simétricos. **(1,2 puntos)**

E4.- (Geometría)

Dados la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$ y el punto $P = (0,0,0)$, hallar la ecuación del plano π que contiene a r y pasa por el punto P. **(2 puntos)**

E5.- (Análisis)

Representar la función $f(x) = e^{(x^2)}$, determinando antes sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus asintotas. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos(3x)}{sen^2(x)}$. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

a) Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 8$, hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que $g(x) \geq f(x)$. **(0,5 puntos)**
b) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

E8.- (Análisis)

Hallar los valores de a, b y c para los cuales el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ cumple las siguientes condiciones:

- $P(0) = 1$
- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en $x = 0$ es $m = 1$.
- $\int_0^2 P(x)dx = 12$. **(2 puntos)**

E9.- (Probabilidad y Estadística)

En un club deportivo, el 55% de los socios son hombres y el 45 % mujeres. Entre los socios, el 60% de los hombres practica la natación, así como el 40% de las mujeres.
a) Describir los sucesos y sus probabilidades, y calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar practique la natación. **(1,25 puntos)**
b) Sabiendo que una persona practica la natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer? **(0,75 puntos)**

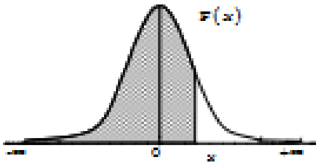
E10.- (Probabilidad y estadística)

El tiempo empleado, en minutos, para obtener la respuesta de un test para detectar cierta enfermedad sigue una distribución normal de media 20 y de desviación típica 4.
a) ¿En qué porcentaje de test se obtiene el resultado entre 16 y 26 minutos? **(1 punto)**
b) ¿Cuántos minutos son necesarios para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96.41% de los test? **(1 punto)**

MATEMÁTICAS II-Propuesta 2/2021. Página **2** de **3**

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

RESPUESTAS DE LA CONVOCATORIA DE JUNIO

Ejercicio 1:

$a)$ Discutir el sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$ según los valores del parámetro λ.

$b)$ Resolverlo para $\lambda = -1$.

Solución:

$a)$ Es un sistema lineal homogéneo por lo que si el rango de la matriz de los coeficientes es 3 entonces sólo tiene la solución trivial, y si es menor que 3 es un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones.

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

Su determinante es:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + 2 + 1 - 1 + 1 + 2\lambda = 0;\ \ 3\lambda = -3;\ \ \lambda = -1.$$

Para $\lambda \neq -1$ el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas por lo que la solución es única, la solución trivial: $x = y = z = 0$, y el sistema es compatible determinado.

Para $\lambda = -1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2, luego el sistema es compatible indeterminado.

$b)$ Para $\lambda = -1$ el sistema es $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Eliminamos la tercera ecuación, y hacemos $z = \lambda$:

$$\left.\begin{matrix} x - y = -\lambda \\ 2x + y = \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow \ \ x = 0;\ \ y = \lambda.$$

$$\boldsymbol{x = 0}, \qquad \boldsymbol{y = \lambda}, \qquad \boldsymbol{z = \lambda}, \qquad \forall \lambda \in R$$

Ejercicio 2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

a) Determinar los valores de n para los que la matriz A^2 tiene inversa.

b) Para $n = 2$, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^2-2n+1 & 0 \\ n-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A^2| = \begin{vmatrix} n^2-2n+1 & 0 \\ n-2 & 1 \end{vmatrix} = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1.$$

La matriz A^2 tiene inversa $\forall n \in R - \{1\}$

b) Para $n = 2$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Despejamos X:

$$A \cdot X + A = 2I \rightarrow \ A \cdot X = 2I - A \rightarrow \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (2I - A) \rightarrow X = A^{-1} \cdot (2I - A)$$

Sustituimos:

$$2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cálculo de A^{-1}:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1; \ \ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \ \ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (2I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}.$$

Autor: Jorge Muñoz Yañez-Barnuevo
www.apuntesmareaverde.org.es

Ejercicio 3:

a) Hallar la recta r perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ que pasa por el punto $A(0, 0, 0)$.

b) Calcular la ecuación del plano β respecto del cual los puntos $P(1, 1, 1)$ y $y\, Q(1, 3, -1)$ son simétricos.

Solución:

El vector normal del plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ es $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

Podemos tomar como vector director de la recta, r, el vector normal del plano: $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1)$.

Conocemos un punto $A(0, 0, 0)$ y el vector de dirección, por lo que la ecuación paramétrica de r es:

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

b) El punto medio del segmento de extremos $P\ y\ Q$ es $M(1, 2, 0)$, que debe ser un punto del plano β.

Los puntos $P(1, 1, 1)$ y $y\ Q(1, 3, -1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(1, 3, -1) - (1, 1, 1)] = (0, 2, -2)$.

$\overrightarrow{PQ}$ es un vector ortogonal al plano. Tomamos como vector ortogonal: $\vec{n} = (0, 1, -1)$

Hallamos la ecuación de dicho plano:

$$\left.\begin{matrix} y - z + D = 0 \\ M(1, 2, 0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 - 0 + D = 0 \Rightarrow \ D = -2 \ \Rightarrow \beta \equiv y - z - 2 = 0.$$

$$\beta \equiv \boldsymbol{y - z - 2 = 0}$$

Ejercicio 4:

Dada la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$ y el punto $P(0,0,0)$, hallar la ecuación del plano π que contiene a r y pasa por el punto P.

Solución:

Un punto y un vector director de r son $A(-1,2,0)$ y $\vec{v} = (1,-1,2)$.

Los puntos $P(0,0,0)$ y $A(-1,2,0)$ pertenecen al plano, y determinan el vector $\overrightarrow{PA} = (-1,2,0)$.

El plano π tiene como vectores de orientación $\vec{v} = (1,-1,2)$ y $\overrightarrow{PA} = (-1,2,0)$ y contiene al punto $P(0,0,0)$ por lo que su ecuación es:

$$\pi(P;\ \vec{v}, \overrightarrow{PA}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 = \ -4x + 2y + z = 0$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv -4x + 2y + z = 0}$$

Ejercicio 5:

Representar la función $f(x) = e^{(x^2)}$, determinando antes sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus asíntotas.

Solución:

La función $f(x)$es exponencial por lo que es continua y derivable en toda la recta real.

Como $f(-x) = e^{[(-x)]^2} = e^{(x^2)} = f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 2x \cdot e^{(x^2)}$. $\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x \cdot e^{(x^2)} = 0 \Rightarrow \ x = 0.$

$x \epsilon (-\infty, 0) \Rightarrow \ f'(x) < 0$, luego la función es decreciente.

$x \epsilon (0, +\infty) \Rightarrow \ f'(x) > 0$, luego la función es creciente.

En $x = 0$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente luego en ese punto tiene un mínimo.

$f(0) = e^{(0^2)} = e^0 = 1 \to A(0, 1)$ es un mínimo relativo (luego comprobamos que es un mínimo absoluto).

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$f''(x) = 2 \cdot e^{(x^2)} \cdot (1 + 2x^2) \Rightarrow \begin{cases} e^{(x^2)} > 0, \forall x \in R \\ 1 + 2x^2 > 0, \forall x \in R \end{cases} \Rightarrow f''(x) > 0, \forall x \in R.$$

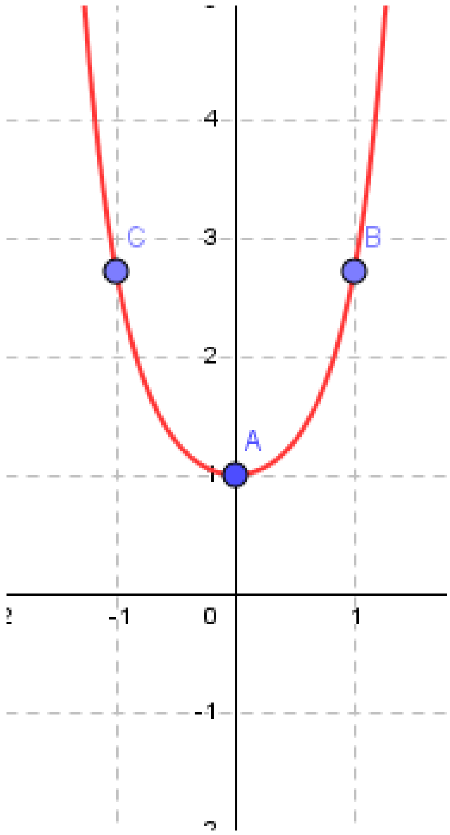
La función es convexa (∪) en todo su dominio.

No tiene asíntotas verticales.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{(x^2)} = e^{+\infty} = +\infty$$

No tiene asíntotas horizontales, ni oblicuas

Otros puntos de la función son: $B(-1, e)$; $C(1, e)$.



Ejercicio 6:

Calcular: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - cos\,(3x)}{sen^2\,x}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - cos\,(3x)}{sen^2\,x} =$$

Para $x = 0$ se anula el numerador y el denominador, por lo que hay una indeterminación, aplicamos la regla de *L'Hôpital*:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + 3 \cdot sen\,(3x)}{2 \cdot sen\,x \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + 3 \cdot sen\,(3x)}{sen\,2x}$$

De nuevo se anula el numerador y el denominador, por lo que hay una indeterminación, aplicamos la regla de *L'Hôpital*:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + 3\cdot 3\cdot cos\,(3x)}{2\cdot cos\,2x} = \frac{e^0 + 9\cdot cos\,0}{2\cdot cos\,0} = \frac{1+9\cdot 1}{2\cdot 1} = 5.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - cos\,(3x)}{sen^2\,x} = \mathbf{5}$$

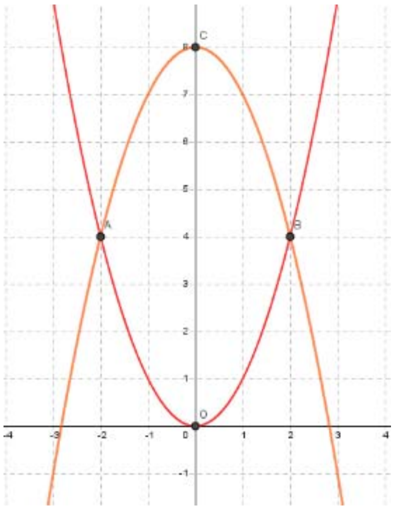
Ejercicio 7:

$a)$Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 8$, hallar los valores $x \in R$ para los que $g(x) \geq f(x)$.

$b)$ Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

$a)$ Ambas funciones $f(x)$ y $g(x)$ son pares, por ser $f(-x) = f(x)$ y $g(-x) = g(x)$, por lo cual, ambas son simétricas con respecto al eje de ordenadas.



Calculamos sus puntos de intersección:

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = -x^2 + 8 \Rightarrow \ 2x^2 = 8 \Rightarrow \ x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2 \rightarrow A(-2,4);\ x_2 = 2 \rightarrow B(2,4)$.

La función $f(x) = x^2$ es una parábola convexa ($\cup$) cuyo vértice es $O(0,0)$.

La función $g(x) = -x^2 + 8$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2 cuyo vértice es el punto $C(0,8)$.

En la representación gráfica se observa que $g(x) \geq f(x), \forall x \in [-2,2]$.

$$g(x) \geq f(x), \forall x \in [-2,2]$$

$b)$ Como todas las ordenadas de $g(x)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de $f(x)$, la superficie a calcular es:

$$S = \int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_{0}^{2} [(-x^2 + 8) - x^2] \cdot dx =$$

$$= 2\int_0^2 (-2x^2 + 8) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{2x^3}{3} + 8x\right]_0^2 = 2 \cdot \left[\left(-\frac{2\cdot 2^3}{3} + 8 \cdot 2\right) - 0\right] = -\frac{32}{3} + 32 = \frac{-32+96}{3} = \frac{64}{3}.$$

$$S = \frac{\mathbf{64}}{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{u^2} \cong 21.33\ u^2$$

Ejercicio 8:

Hallar los valores de a, b y c para los que el polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ cumpla las siguientes condiciones:

- $P(0) = 1$.
- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en $x = 0$ es $m = 1$.
- $\int_0^2 P(x) \cdot dx = 12$.

Solución:

$P(0) = 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$.

Para $x = 0$ es $P(0) = 1$, por lo cual el punto de tangencia es $P(0, 1)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$P'(x) = 2ax + b \Rightarrow P'(0) = 1 = 2a \cdot 0 + b = b \Rightarrow b = 1.$$

Por ahora $P(x) = ax^2 + x + 1$.

$\int_0^2 P(x) \cdot dx = 12 = \int_0^2 (ax^2 + x + 1) \cdot dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = \left[\frac{a \cdot 2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2\right] - 0 = \frac{8a}{3} + 2 + 2 \rightarrow \frac{8a}{3} = 8 \Rightarrow a = 3$.

$$\boldsymbol{a = 3};\ \boldsymbol{b = 1};\ \boldsymbol{c = 1};\ P(x) = 3x^2 + x + 1$$

Ejercicio 9:

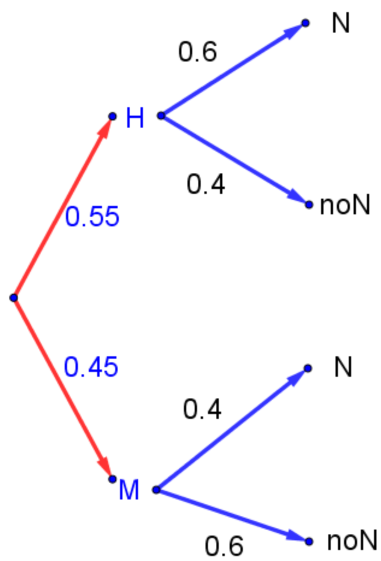
En un club deportivo, el 55 % de los socios son hombres y el 45 % mujeres. Entre los socios, el 60 % de los hombres practica la natación, así como el 40 % de las mujeres.

a) Describir los sucesos y sus probabilidades, y calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar practique la natación.

b) Sabiendo que una persona practica la natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:

a) Llamamos H al suceso ser hombre, y M a ser mujer. Llamamos N al suceso practicar la natación, y noN a no practicarla. Llevamos los datos del enunciado a un diagrama de árbol:



$P(N) = P(H) \cdot P(N/H) + P(M) \cdot P(N/M) = 0.55 \cdot 0.6 + 0.45 \cdot 0.4 = 0.330 + 0.180 = 0.510.$

La probabilidad de que un socio elegido al azar practique la natación es $\mathbf{0.510}$.

b) Ahora es una probabilidad condicionada:

$P(M/N) = \frac{P(M \cap N)}{P(N)} = \frac{P(M) \cdot P(N/M)}{P(N)} = \frac{0.45 \cdot 0.4}{0.510} = \frac{0.180}{0.510} = 0.3529.$

Sabiendo que una persona practica la natación, la probabilidad de que sea mujer es $\mathbf{0.3529}$.

Ejercicio 10:

El tiempo empleado, en minutos, para obtener la respuesta de un test para detectar cierta enfermedad sigue una distribución normal de media 20 y de desviación típica 4.

$a)$ ¿En qué porcentaje de test se obtiene el resultado entre 16 y 26 minutos?

$b)$ ¿Cuántos minutos son necesarios para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96.41 % de los test?

Solución:

$a)$ El enunciado nos dice que: $\mu = 20;\ \ \sigma = 4; X \to N(\mu, \sigma) = N(20, 4).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-20}{4}$.

$$P(16 < X < 26) = P\left(\frac{16-20}{4} \le Z \le \frac{26-20}{4}\right) = P\left(\frac{-4}{4} \le Z \le \frac{6}{4}\right) = P(-1 \le Z \le 1.5) =$$

$$P(Z \le 1.5) - [1 - P(Z \le 1)] = P(Z \le 1.5) - 1 + P(Z \le 1) = 0.9333 - 1 + 0.8413 = 0.7746.$$

En el $\mathbf{77.46}$ % de test se obtiene el resultado entre 16 y 26 minutos.

$b)$ $P(X \le a) = 0.9641 = P\left(Z \le \frac{a-20}{4}\right).$

Buscando en la tabla $N(0, 1)$ a la inversa, a 0.9641 le corresponde 1.8:

$\frac{a-20}{4} = 1.8 \Rightarrow \ \ a - 20 = 7.2 \Rightarrow a = 27.2.$

Para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96.41 % de los test son necesarios $\boldsymbol{27.2\ minutos}$

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** Nº Páginas: 3

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuales son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales,** de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1 .- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-\lambda y=1 \\ 2x+\lambda z=1 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para λ=1. **(0,8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $M=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $N=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, hallar la matriz P que verifica que $M^{-1}PM=N$. **(2 puntos)**

E3. (Geometría)

Dadas las rectas $r\equiv x=y+1=\frac{z-2}{2}$ y $s\equiv\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y s. **(1 punto)**

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y s. **(1 punto)**

E4.- (Geometría)

Dada la recta $r\equiv x-1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$

a) Calcular el plano π_1 que pasa por $A=(1,2,3)$ y es perpendicular a la recta r. **(0,5 puntos)**

b) Calcular el plano π_2 que pasa por $B=(-1,1,-1)$ y contiene a la recta r. **(1,5 puntos)**

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=x^5-5x-1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión. **(2 puntos)**

MATEMÁTICAS II-Propuesta 3/2021. Página **1** de **3**

Autor: Jorge Muñoz Yañez-Barnuevo

E6.- (Análisis)
Calcular el valor de $m > 0$ para el cual se verifica que $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(mx)}{x^2} = 2$. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)
a) Estudiar la continuidad de la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$. **(1 punto)**
b) Calcular $\int x \ln(x^2)\, dx$. **(1 punto)**

E8.- (Análisis)
Se considera la función $f(x) = \mathrm{x} - \cos(x)$
a) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0,\pi/2]$. **(1 punto)**
b) Probar que la ecuación $f(x) = 0$ solo puede tener una solución en el intervalo $[0,\pi/2]$, de modo que la solución del apartado anterior es la única. **(1 punto)**

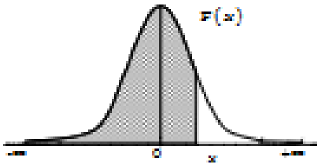
E9.- (Probabilidad y Estadística)
Dentro de una caja hay bolas de varios colores que tienen todas el mismo tamaño y aspecto, siendo algunas de madera y las otras de metacrilato. Concretamente:
• El 48% son blancas y entre ellas dos tercios son de madera.
• El 24% son rojas, y de ellas las tres cuartas partes son de madera.
• El 28% son verdes, de las cuales la mitad son de madera.
Considerando los sucesos: B = "ser blanca", R = "ser roja", V= "ser verde" y M = "ser de madera"
a) Indicar cuales son los valores de $P(M/B)$, $P(M/R)$ y $P(M/V)$. **(0'3 puntos)**
b) Calcular la probabilidad de que al sacar al azar una de las bolas de la caja, sea de madera. **(0'7 puntos)**
c) Si solo sabemos que una de las bolas de la caja, elegida al azar, es de madera, ¿cual es la probabilidad de que sea blanca? **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y Estadística)
Se sabe que el coeficiente intelectual de la población adulta española sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20.
a) ¿Qué porcentaje de españoles adultos se espera que tengan un coeficiente intelectual entre 95 y 105? **(1 punto)**
b) Si se considera que una persona es superdotada cuando su coeficiente intelectual es mayor que 160, calcular el porcentaje de españoles adultos que son superdotados. **(1 punto)**

MATEMÁTICAS II-Propuesta 3/2021. Página **2** de **3**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

MATEMÁTICAS II-Propuesta_3/2021. Página 3 de 3

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Ejercicio 1:

$a)$ Discutir el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-\lambda y=1 \\ 2x+\lambda z=1 \end{cases}$ según los valores del parámetro λ.

$b)$ Resolverlo para $\lambda = 1$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 2\lambda - \lambda = -\lambda^2 + \lambda = -\lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.$$

Si $\lambda \neq 0$ o si $\lambda \neq 1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Para $\lambda = 0$ la matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene el menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0,$$

Por lo que su rango es 3, distinto al rango de la matriz de los coeficientes que es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Para $\lambda = 1$ la matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \qquad \{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\}$$

Al tener una fila de ceros su rango es 2, igual al de la matriz de los coeficientes y menor que el número de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

$b)$ Para $\lambda = 1$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} x+y+z=0 \\ x-y=1 \\ 2x+z=1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado.

Hacemos $x = \mu$; $y = -1 + \mu$; $z = 1 - 2\mu$.

$$\boldsymbol{x = \mu, y = -1 + \mu, z = 1 - 2\mu}, \forall \mu \in R$$

Ejercicio 2:

Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, hallar la matriz P que verifica que $M^{-1} \cdot P \cdot M = N$.

Solución:

Despejamos P de la ecuación matricial multiplicando dos veces por M^{-1}:

$M^{-1} \cdot P \cdot M = N \to M \cdot M^{-1} \cdot P \cdot M \cdot M^{-1} = M \cdot N \cdot M^{-1} \to \ P = M \cdot N \cdot M^{-1}$.

Sustituimos:

$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ luego existe su matriz inversa

$$M^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ Adj.de\ M^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; M^{-1} = \frac{Adj.de\ M^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = M \cdot N \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 3:

Dadas las rectas $r \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$, se pide:

$a)$ Determinar la posición relativa de r y s.

$b)$ Hallar la ecuación del plano que contiene a r y s.

Solución:

$a)$ Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta s:

$$s \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda; \;\; y = 3 + \lambda; \;\; z = 3 + 2\lambda \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta s son $B(0, 3, 3)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1, 1, 2)$.

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0, -1, 2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 2)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son iguales y por tanto linealmente dependientes luego las rectas r y s son paralelas o coincidentes. Si son paralelas, no tienen ningún punto en común, mientras que, si son coincidentes, los tienen todos.

Para diferenciar el caso comprobamos si el punto $A(0, -1, 2) \in r$, también pertenece a la recta s, para lo cual, tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{matrix} s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \\ A(0, -1, 2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda = 0 \\ 3 + \lambda = -1 \\ 3 + 2\lambda = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda = 0 \\ 3 \neq -1 \\ 3 \neq 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \notin s.$$

Las rectas $\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{s}$ **son paralelas**

$b)$ Del plano pedido ya conocemos puntos, $A(0, -1, 2)$ y $B(0, 3, 3)$ y un vector de orientación, el vector de dirección de ambas rectas: $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 2)$. Obtenemos otro vector de orientación:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0, 3, 3) - (0, -1, 2)] = (0, 4, 1).$$

$$\pi(A; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{AB}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 = -7x + 4(z-2) - (y+1) = -7x + 4z - 8 - y - 1$$
$$= -7x - y + 4z - 9$$

$$\boldsymbol{7x + y - 4z + 9 = 0}$$

Ejercicio 4:

Dada la recta $r \equiv x-1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

$a)$ Calcular el plano π_1 que pasa por $A(1,2,3)$ y es perpendicular a la recta r.

$b)$ Calcular el plano π_2 que pasa por $B(-1,1,-1)$ y contiene a la recta r.

Solución:

$a)$ Un vector director de la recta r es $\vec{v_r}=(1,-1,2)$, y por tanto el vector ortogonal al plano buscado, que tendrá la forma: $\pi_1 \equiv x-y+2z+D=0$

Imponemos que pase por el punto $A(1,2,3)$

$$\pi_1 \equiv x-y+2z+D=0 \rightarrow 1-2+2\cdot 3+D=0=5+D=0 \Rightarrow D=-5$$

$$\boldsymbol{\pi_1 \equiv x-y+2z-5=0}$$

$b)$ Ahora del plano pedido conocemos dos puntos, $B(-1,1,-1)$ y un punto de la recta r: $P(1,2,1)$. El vector $\overrightarrow{BP}$ es un vector de orientación del plano, así como el vector $\vec{v_r}=(1,-1,2)$ de dirección de la recta.

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=[(1,2,1)-(-1,1,-1)]=(2,1,2)$.

$$\pi_2\left(B;\ \vec{v_r},\overrightarrow{BP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 = -4(x+1)+2(y-1)+3(z+1) =$$

$$-4x-4+2y-2+3z+3=4x-2y-3z+3$$

$$\boldsymbol{\pi_2 \equiv 4x-2y-3z+3=0}$$

Ejercicio 5:

Dada la función $f(x) = x^5 - 5x - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión.

Solución:

La función dada es polinómica, por lo que es continua y derivable en toda la recta real. Para determinar sus extremos relativos buscamos los puntos dónde se anula la primera derivada:

$f'(x) = 5x^4 - 5 \to f'(x) = 0 = 5x^4 - 5 \to x^4 - 1 = 0 \to x^4 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

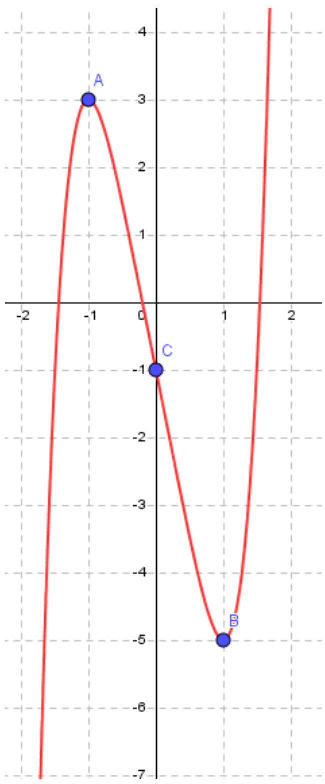
Para saber si una función es creciente o decreciente analizamos el signo de su primera derivada.

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, -1), (-1, 1)\ y\ (1, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Por ejemplo, para $x = 0 \in (-1, 1)$ es: $f'(0) = -5 < 0$ por lo que la función es decreciente.

Y para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ la función es creciente.

Si $\boldsymbol{x} \in (\mathbf{-1}, \mathbf{1})$ es **decreciente**, y si $x \in (-\infty, \mathbf{-1}) \cup (\mathbf{1}, +\infty)$ la función es **creciente**



Para $x = -1$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, por lo que en ese punto se alcanza un máximo:

$f(-1) = (-1)^5 - 5 \cdot (-1) - 1 = -1 + 5 - 1 = 3.$

$A(\mathbf{-1}, \mathbf{3})$ es un **máximo** relativo

Para $x = 1$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, por lo que en ese punto se alcanza un mínimo:

$$f(1) = (1)^5 - 5 \cdot (1) - 1 = 1 - 5 - 1 = -5$$

$B(\mathbf{1}, \mathbf{-5})$ es un **mínimo** relativo

Una función es cóncava $(\cap)$ o convexa $(\cup)$ cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$f''(x) = 20x^3$; Si $x < 0$ entonces $f''(x) < 0$; Si $x > 0$ entonces $f''(x) > 0$.

Para $x \in (-\infty, \mathbf{0})$ la función es **cóncava** $(\cap)$.

Y para $x \in (\mathbf{0}, +\infty)$ es **convexa** $(\cup)$.

Una función tiene un punto de inflexión cuando pasa de ser cóncava a convexa o viceversa, por lo que tendrá un punto de inflexión para $x = 0$.

$(\mathbf{0}, \mathbf{-1})$ es punto de inflexión

Ejercicio 6:

Calcular el valor de $m > 0$ para el cual se verifica que: $\lim_{x \to 0} \frac{1-cos\,(mx)}{x^2} = 2$.

Solución:

Indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos *L'Hôpital*.

$\lim_{x \to 0} \frac{1-cos\,(mx)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{m \cdot sen\,(mx)}{2x} =$

Vuelve a ser indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Volvemos a aplicar *L'Hôpital*.

$= \lim_{x \to 0} \frac{m^2 \cdot \cos(mx)}{2} = \frac{m^2 \cdot \cos 0}{2} = 2 \rightarrow \frac{m^2 \cdot 1}{2} = 2 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m_1 = -2, m_2 = 2.$

Por ser $m > 0$ la única solución es $m = 2$

Ejercicio 7:

$a)$ Estudiar la continuidad de la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 0 \quad , & si\ \ x = 0 \end{cases}$.

$b)$ Calcular $I = \int x \cdot L(x^2) \cdot dx$.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, excepto para $x = 0$ cuya continuidad es dudosa, y vamos a estudiar.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

Para $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} 0 = 0 = f(0) \end{cases}$

- El límite $\lim_{x \to 0^-} \frac{1-\cos x}{x}$ es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos *L'Hôpital*.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{sen\ 0^-}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} 0 = 0$
- $f(0) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

La función es continua en $x = 0$, y por tanto, es continua en toda la recta real.

$b)$ $I = \int x \cdot L(x^2) \cdot dx = \int x \cdot 2 \cdot Lx \cdot dx = 2 \cdot \int x \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow$

La hacemos por partes: $u = Lx \to du = \frac{1}{x} \cdot dx;\ x \cdot dx = dv \to v = \frac{x^2}{2}$

$I = 2 \cdot \int x \cdot Lx \cdot dx = 2 \cdot \left[Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx\right] = 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx\right] = x^2 \cdot Lx - \frac{x^2}{2} + C.$

$$I = \int x \cdot L(x^2) \cdot dx = x^2 \cdot Lx - \frac{x^2}{2} + C.$$

Autor: Jorge Muñoz Yañez-Barnuevo

Ejercicio 8:

Se considera la función $f(x) = x - \cos x$.

a) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Probar que la ecuación $f(x) = 0$ solo puede tener una solución en el intervalo $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, de modo que la solución del apartado anterior sea única.

Solución:

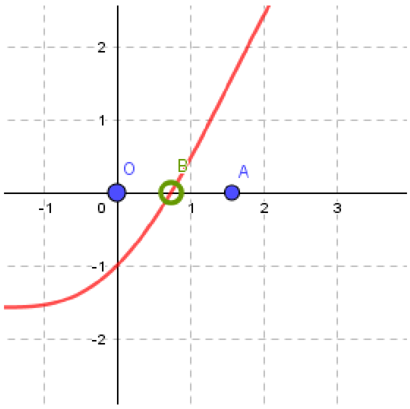
a) El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

Aplicamos el teorema de Bolzano a la función $f(x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

La función $f(x) = x - \cos x$ es continua en R por ser suma algebraica de dos funciones continuas en R.

$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} > 0$.



Luego por el Teorema de Bolzano la función tiene **al menos una raíz** en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) En el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la función es creciente ya que:

$$f'(x) = 1 + sen\ x > 0$$

La derivada no se anula nunca por lo que es imposible que haya otra raíz.

La función tiene una **única** raíz en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Ejercicio 9:

Dentro de una caja hay bolas de varios colores que tienen todas el mismo tamaño y aspecto, siendo algunas de madera y las otras de metacrilato. Concretamente: el 48 % son blancas y entre ellas dos tercios son de madera; el 24 % son rojas, y de ellas las tres cuartas partes son de madera y, el 28 % son verdes, de las cuales la mitad son de madera. Considerando que B, R, V y M indican blanca, roja, verde y de madera, respectivamente:

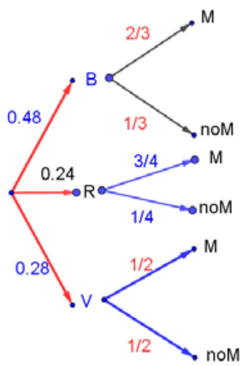
$a)$ Indicar cuales son los valores de $P(M/B)$; $P(M/R)\ y\ P(M/V)$.

$b)$ Calcular la probabilidad de que al sacar al azar una de las bolas de la caja, sea de madera.

$c)$ Si solo sabemos que una de las bolas de la caja, elegida al azar, es de madera, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?

Solución:

Llamamos B, R, V, M y noM al suceso, ser blanca, roja, verde, de madera y no de madera, respectivamente. Y llevamos los datos del enunciado a un diagrama de árbol.



$a)\ P(M/B) = \frac{2}{3} = 0.6667$.

$P(M/R) = \frac{3}{4} = 0.75$.

$P(M/V) = \frac{1}{2} = 0.50$.

$b)\ P(M) = P(B \cap M) + P(R \cap M) + P(V \cap M) = P(B) \cdot P\left(\frac{M}{B}\right) + P(R) \cdot P\left(\frac{B}{R}\right) + P(V) \cdot P\left(\frac{M}{V}\right) =$

$0.48 \cdot \frac{2}{3} + 0.24 \cdot \frac{3}{4} + 0.28 \cdot \frac{1}{2} = 0.32 + 0.18 + 0.14 = 0.64.$

Probabilidad de ser de madera es $\mathbf{0.64}$

$c)\ P(B/M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{P(B) \cdot P(M/B)}{P(M)} = \frac{0.48 \cdot \frac{2}{3}}{0.64} = \frac{032}{0.64} = 0.5.$

Si solo sabemos que una de las bolas de la caja, elegida al azar, es de madera, la probabilidad de que sea blanca es de $\mathbf{0.5}$.

Ejercicio 10:

Se sabe que el coeficiente intelectual de la población adulta española sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20.

$a)$ ¿Qué porcentaje de españoles adultos se espera que tengan un coeficiente intelectual entre 95 y 105?

$b)$ Se considera que una persona es superdotada cuando su coeficiente intelectual es mayor que 160, calcular el porcentaje de españoles adultos que son superdotados.

Solución:

Nos dicen que es una distribución normal de $\mu = 100; \ \ \sigma = 20$:

$X \to N(\mu; \ \sigma) = N(100, 20).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-100}{20}$.

$$a) \ P(95 < X < 105) = P\left(\frac{95-100}{20} < Z < \frac{105-100}{20}\right) = P\left(\frac{-5}{20} < Z < \frac{5}{20}\right) = P(-0.25 < Z < 0.25) = P(Z < 0.25) - [1 - P(Z < 0.25)] = P(Z < 0.25) - 1 + P(Z < 0.25) = 2 \cdot P(Z < 0.25) - 1 =$$

$$2 \cdot 0.5987 - 1 = 1.1974 - 1 = 0.1974 = 19.74 \ \%.$$

Se espera que tenga un coeficiente intelectual entre 95 y 105, un $\mathbf{19.74}$ % de españoles adultos.

$$b) \ P(X > 160) = P\left(Z > \frac{160-100}{20}\right) = P\left(Z > \frac{60}{20}\right) = P(Z > 3) = 1 - P(Z \le 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013 = 0.13 \ \%.$$

El porcentaje de españoles superdotados es de $\mathbf{0.13}$ %.