MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas. Es estudiante ha de elegir 5 preguntas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregirá la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas y las soluciones.

Problema 1:

Demostrar que la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $M^2 + \lambda_1 M + \lambda_2 I = O$ y determinar los escalares λ_1 y λ_2 de R (donde I y O son las matrices 2×2 identidad y cero)

Problema 2:

Discutir y resolver (cuando sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $\lambda \in R$: $\left.\begin{array}{r} x - y = \lambda \\ x - \lambda y = \lambda \\ \lambda x - y = \lambda \end{array}\right\}$.

Problema 3:

Dados el plano $\pi \equiv kx + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

a) Determinar los valores del parámetro $\lambda \in R$ para que el plano π contenga a r.

b) Para $k = 0$, calcular el ángulo que forman π y r.

Problema 4:

Sea el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$. Encontrar un plano β, paralelo a π, tal que el triángulo formado por los puntos de corte de β con los ejes tenga de área $2\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

Problema 5:

Estudiar asíntotas, monotonía (crecimiento y decrecimiento), extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = e^{-x^2}$.

Problema 6:

Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ se cortan en al menos dos puntos. Para cada uno de los puntos de corte, encontrar un intervalo que lo contenga de longitud menor o igual que 1. Razonar las respuestas exponiendo y verificando los resultados (teoremas) que los justifiquen.

Problema 7:

Calcular la integral racional: $I = \int \frac{3x}{x^2+x-2} \cdot dx$.

Problema 8:

Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Representar la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, 2]$.

b) Calcular el área de la región anterior.

Problema 9:

Un mecánico compra ruedas de dos marcas A y B. Compra el 40 % de la marca A que tiene un 3 % de ruedas defectuosas. Y compra el resto a la marca B con un 1 % de defectuosas. El mecánico tiene que cambiar una rueda y elige una al azar.

a) Calcular la probabilidad de que dicha rueda sea defectuosa.

b) Si la rueda es defectuosa, calcular la probabilidad de que sea de la marca A.

Problema 10:

Las notas del examen de Matemáticas II de la EBAU siguen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica 1,5. Se elige al azar un alumno de Matemáticas II de la EBAU:

a) Calcular la probabilidad de que un alumno haya aprobado (≥ 5).

b) Calcular la nota que tiene que sacar un alumno para que su nota sea superior al 97,50 % de las notas.

RESPUESTAS

Problema 1:

Demostrar que la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $M^2 + \lambda_1 M + \lambda_2 I = O$ y determinar los escalares $\lambda_1\ y\ \lambda_2$ de R (donde $I\ y\ O$ son las matrices 2×2 identidad y cero)

Solución:

$$M^2 + \lambda_1 M + \lambda_2 I = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 I = O;$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\lambda_1 + \lambda_2 = -5 \\ \underline{\lambda_1 = -4} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\lambda_2 = 3}.$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-8+3 & 4-4 \\ 4-4 & 4-8+3 \end{pmatrix} = O.$$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ M\ verifica\ la\ ecuación\ dada\ para\ \boldsymbol{\lambda_1 = -4}\ y\ \boldsymbol{\lambda_2 = 3}}.$

_.

Problema 2:

Discutir y resolver (cuando sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $\lambda \in R$: $\left.\begin{array}{r} x-y=\lambda \\ x-\lambda y=\lambda \\ \lambda x-y=\lambda \end{array}\right\}$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz ampliada en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M'|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 \end{vmatrix}=\lambda\cdot(-\lambda-1-\lambda+\lambda^2+1+1)=$$

$$=\lambda\cdot(\lambda^2-2\lambda+1)=\lambda(\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=1.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \lambda\neq 0 \\ \lambda\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ \lambda=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ \lambda=0 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2=n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M'=Rang\ M=1.$$

$$\underline{Para\ \lambda=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=1<n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Problema 3:

Dados el plano $\pi \equiv kx + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

$a)$ Determinar los valores del parámetro $\lambda \in R$ para que el plano π contenga a r.

$b)$ Para $k = 0$, calcular el ángulo que forman $\pi\ y\ r$.

Solución:

$a)$ Para que la recta r esté contenida en el plano π es condición necesaria que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares.

El vector director de la recta es $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, -1)$ y un vector normal del plano π es $\vec{n} = (k, 1, -1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (2, 1, -1) \cdot (k, 1, -1) = 0;\ \ 2k + 1 + 1 = 0;\ \ 2k + 2 = 0;$$

$$k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1.$$

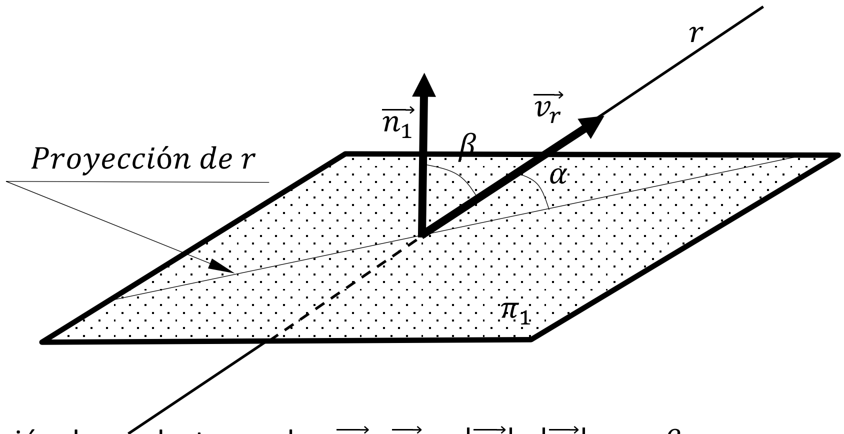
El plano resulta $\pi \equiv -x + y - z = 0$. Si el plano contiene a la recta tiene que contener a todos sus puntos. Un punto de r es $P(4, 2, -2)$.

Si el plano π contiene al punto P tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv -x + y - z = 0 \\ P(4, 2, -2) \end{array}\right\} \Rightarrow -4 + 2 - (-2) = -2 + 2 = 0 \Rightarrow Se\ satisface.$$

$$\underline{El\ plano\ \pi\ contiene\ a\ la\ recta\ r\ para\ k = -1.}$$

$b)$ Para $k = 0$ el plano es $\pi_1 \equiv y - z = 0$ y su vector normal es $\overrightarrow{n_1} = (0, 1, -1)$.



Por definición de producto escalar: $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{v_r} = |\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \cos\beta$.

$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{v_r}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{v_r}|}$. Por ser $\alpha\ y\ \beta$ complementarios: $sen\ \alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{v_r}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{v_r}|}$.

$$sen\ \alpha = \frac{(0,1,-1)\cdot(2,1,-1)}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{0+1+1}{\sqrt{0+1+1}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774 \Rightarrow \alpha = arc\ sen\ 0{,}5774 = 35°\ \ 15'\ 52''.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ ángulo\ de\ 35°\ \ 15'\ 52''.}$$

Problema 4:

Sea el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$. Encontrar un plano β, paralelo a π, tal que el triángulo formado por los puntos de corte de β con los ejes tenga de área $2\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

Solución:

El plano β tiene por expresión $\beta \equiv x + y + z + D = 0$.

Los puntos de corte con les ejes del plano β son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \beta \equiv x + y + z + D = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x + D = 0;\ \ x = -D \Rightarrow A(-D, 0, 0).$$

$$Eje\ Y \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \beta \equiv x + y + z + D = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y + D = 0;\ \ y = -D \Rightarrow B(0, -D, 0).$$

$$Eje\ Z \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \beta \equiv x + y + z + D = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z + D = 0;\ \ z = -D \Rightarrow C(0, 0, -D).$$

Los puntos $A(-D, 0, 0)$, $B(0, -D, 0)$ y $C(0, 0, -D)$ determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0, -D, 0) - (-D, 0, 0)] = (D, -D, 0)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(0, 0, -D) - (-D, 0, 0)] = (-D, 0, D)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{3};\ \ \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ D & -D & 0 \\ -D & 0 & D \end{matrix}\right\| = 4\sqrt{3};$$

$$D^2 \cdot \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = 4\sqrt{3};\ \ D^2 \cdot |-i - k - j| = 4\sqrt{3};\ \ D^2 \cdot |-i - j - k| = 4\sqrt{3};$$

$$D^2\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = 4\sqrt{3};\ D^2 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3};\ D^2 = 4 \Rightarrow D_1 = -2, D_2 = 2.$$

Cumplen la condición pedida los siguientes planos:

$$\underline{\beta_1 \equiv x + y + z - 2 = 0\ \ y\ \ \beta_2 \equiv x + y + z + 2 = 0}.$$

Problema 5:

Estudiar asíntotas, monotonía (crecimiento y decrecimiento), extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = e^{-x^2}$.

Solución:

El dominio de $f(x) = e^{-x^2}$ es $\boldsymbol{R}$ por ser una función exponencial.

Por ser $f(-x) = f(x)$ la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X) es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales\ ni\ asíntotas\ oblicuas}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$.

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 0)}.\ \underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x\epsilon(0, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow e^{-x^2} \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow x = 0$.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = -2 \cdot \left[1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2}\right] = -2 \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2)$.

$f''(0) = -2 \cdot e^0(1 - 0) = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0$.

$f(0) = f(x) = e^{-0} = 1 \Rightarrow$

$$\underline{Máximo\ relativo: A(0, 1)}.$$

Una función tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada y es distinta de cero su tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$f''(x) = -2 \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2)$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow -2 \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0;\ \ e^{-x^2} \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0;$

$2x^2 = 1;\ \ x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$f'''(x) = -2 \cdot \left[-2x \cdot e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2) + e^{-x^2} \cdot (-4x)\right] =$

$= -2 \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} \cdot [(1 - 2x^2) + 2] = 4x \cdot e^{-x^2} \cdot (3 - 2x^2)$.

$f'''\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow Puntos\ de\ inflexión\ para\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ y\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$.

$$Puntos\ de\ inflexión: \underline{P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)\ y\ Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)}.$$

Problema 6:

Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ se cortan en al menos dos puntos. Para cada uno de los puntos de corte, encontrar un intervalo que lo contenga de longitud menor o igual que 1. Razonar las respuestas exponiendo y verificando los resultados (teoremas) que los justifiquen.

Solución:

Los puntos de corte de dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - x^2 = e^x \Rightarrow h(x) = e^x + x^2 - 2.$

Demostrar que las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ se cortan al menos en dos puntos es equivalente a demostrar que la función $h(x) = e^x + x^2 - 2$ tiene al menos dos raíces reales.

La función $h(x) = e^x + x^2 - 2$ es continua y derivable en su dominio, que es ***R***, por lo cual lo será en cualquier intervalo finito que se considere.

El **teorema de Bolzano** dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

Considerando, por ejemplo, los intervalos $[-2, 0]\ y\ [0, 1]$ y aplicando el teorema de Bolzano a cada uno de ellos, resulta:

$$[-2, 0] \Rightarrow \begin{cases} h(-2) = e^{-2} + (-2)^2 - 2 = \frac{1}{e^2} + 4 - 2 = \frac{1}{e^2} + 2 > 0 \\ h(0) = e^0 + 0^2 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \end{cases}.$$

$$[0, 1] \Rightarrow \begin{cases} h(0) = -2 < 0 \\ h(1) = e^1 + 1^2 - 2 = e + 1 - 2 = e - 1 > 0 \end{cases}.$$

$\underline{Las\ funciones\ f(x)\ y\ g(x)\ se\ cortan\ en\ los\ intervalos\ [-2, 0]\ y\ [0, 1]}.$

Para obtener intervalos menores o iguales que la unidad consideramos, en primer lugar, el intervalo $[-1, 0]$ en el cual, aplicamos de nuevo el teorema de Bolzano:

$$[-1, 0] \Rightarrow \begin{cases} h(-1) = e^{-1} + (-1)^2 - 2 = \frac{1}{e} + 1 - 2 = \frac{1}{e} - 1 < 0 \\ h(0) = e^0 + 0^2 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \end{cases}.$$

$\underline{Las\ funciones\ f(x)\ y\ g(x)\ se\ cortan\ en\ el\ intervalo\ [-2, -1]}.$

Se considera, ahora, el intervalo $[0, 1/2]$ al cual se aplica el teorema de Bolzano:

$$[0, 1/2] \Rightarrow \begin{cases} h(0) = -2 < 0 \\ h\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \sqrt{e} + \frac{1}{4} - 2 = \sqrt{e} - \frac{7}{4} \cong 1{,}65 - \frac{7}{4} < 0 \end{cases}.$$

$\underline{Las\ funciones\ f(x)\ y\ g(x)\ se\ cortan\ en\ el\ intervalo\ [0, 1/2]}.$

Problema 7:

Calcular la integral racional: $I=\int \frac{3x}{x^2+x-2}\cdot dx$.

Solución:

$$x^2+x-2=0;\;\; x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\;\Rightarrow\; x_1=-2, x_2=1.$$

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1).$$

$$\frac{3x}{x^2+x-2}=\frac{M}{x+2}+\frac{N}{x-1}=\frac{Mx-M+Nx+2N}{(x+2)(x-1)}=\frac{(M+N)x+(-M+2N)}{x^2+x-2}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}M+N=3\\-M+2N=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3N=3;\;\; N=1;\;\; M+1=3\;\Rightarrow M=2.$$

$$I=\int\frac{3x}{x^2+x-2}\cdot dx=\int\left(\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x-1}\right)\cdot dx=2\cdot L|x+2|+L|x-1|+C=$$

$$=L\sqrt{\frac{(x+2)^2}{|x-1|}}+C\Rightarrow$$

$$\underline{I=\int\frac{3x}{x^2+x-2}\cdot dx=L|(x+2)^2\cdot(x-1)|+C.}$$

Problema 8:

Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

$a)$ Representar la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, 2]$.

$b)$ Calcular el área de la región anterior.

Solución:

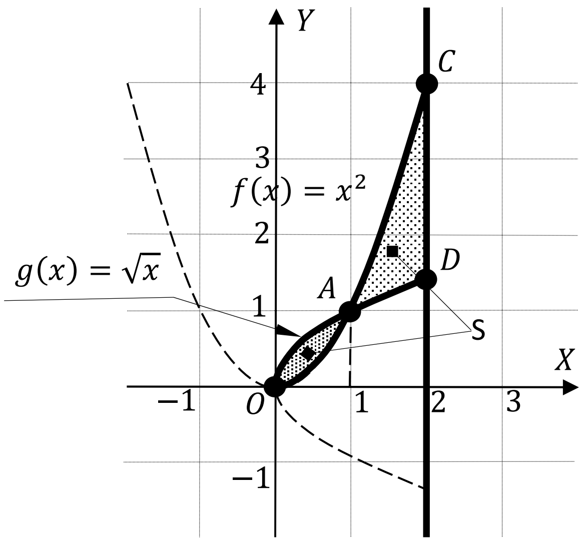
$a)$ Los puntos de corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen por abscisas las soluciones reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = \sqrt{x} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = \sqrt{x};\;\; x^4 = x^2;\;\; x^4 - x^2 = 0;\;\; x^2(x^2-1) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2(x^2-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$. ($x = -1$ carece de sentido lógico).

Los puntos de corte son $O(0, 0)$ y $A(1, 1)$.

$f(2) = 2^2 = 4 \Rightarrow C(2, 4)$. $\qquad g(2) = +\sqrt{2} \Rightarrow D\left(2, \sqrt{2}\right)$.



La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la expresada en la figura adjunta.

$b)$ De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) \cdot dx + \int_1^2 \left(x^2 - \sqrt{x}\right) \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2\right) \cdot dx + \int_1^2 \left(x^2 - x^{\frac{1}{2}}\right) \cdot dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1^3}{3}\right) - 0\right] + \left[\left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\right] = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} - \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{2 \cdot \left(5 - 2\sqrt{2}\right)}{3}\, u^2 \cong 1{,}45\, u^2.}$$

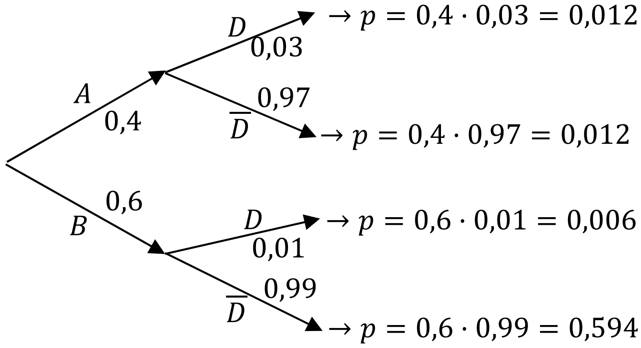
Problema 9:

Un mecánico compra ruedas de dos marcas A y B. Compra el 40 % de la marca A que tiene un 3 % de ruedas defectuosas. Y compra el resto a la marca B con un 1 % de defectuosas. El mecánico tiene que cambiar una rueda y elige una al azar.

$a)$ Calcular la probabilidad de que dicha rueda sea defectuosa.

$b)$ Si la rueda es defectuosa, calcular la probabilidad de que sea de la marca A.

Solución:



$a)$

$$P = P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) =$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}03 + 0{,}6 \cdot 0{,}01 = 0{,}012 + 0{,}006 = \underline{0{,}018}.$$

La probabilidad de que la rueda sea defectuosa es 0,018

$b)$

$$P = P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(D)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}03}{0{,}018} = \frac{0{,}012}{0{,}018} = \underline{0{,}6667}.$$

Si la rueda es defectuosa, la probabilidad de que sea de la marca A es 0,6667.

Problema 10:

Las notas del examen de Matemáticas II de la EBAU siguen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica 1,5. Se elige al azar un alumno de Matemáticas II de la EBAU:

$a)$ Calcular la probabilidad de que un alumno haya aprobado (≥ 5).

$b)$ Calcular la nota que tiene que sacar un alumno para que su nota sea superior al 97,50 % de las notas.

Solución:

$a)$ $Datos$: $\mu = 6{,}5;\ \ \sigma = 1{,}5.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(6{,}5;\ 1{,}5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-6{,}5}{1{,}5}$.

$$P = P(X \geq 5) = P\left(Z \geq \frac{5-6{,}5}{1{,}5}\right) = P\left(Z \geq \frac{-1{,}5}{1{,}5}\right) = P(Z \geq -1) = P(Z < 1) =$$

$= \underline{0{,}8413}.$

La probabilidad de que un alumno haya aprobado es 0,8413

$b)$ Se debe hallar γ tal que: $P = P(X < \gamma) = 0{,}9750 \Rightarrow P\left(Z < \frac{\gamma-6{,}5}{1{,}5}\right) = 0{,}9750.$

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0{,}1)$ a 0,9750 le corresponde 1,96:

$\frac{\gamma-6{,}5}{1{,}5} = 1{,}96;\ \gamma - 6{,}5 = 2{,}94;\ \ \gamma = 6{,}5 + 2{,}94 = 9{,}44.$

$\underline{El\ alumno\ tiene\ que\ sacar\ una\ nota\ de\ 9{,}44}.$

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2020-2021

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min.

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. El estudiante ha de **elegir 5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo **se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas**. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar las respuestas y las soluciones**

PREGUNTAS

1. Sea la igualdad matricial $M \cdot X = N$, donde $M = \begin{pmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz X? (Justicar la respuesta). (0,5 puntos)

b) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ es la matriz M invertible? (1 punto)

c) ¿Puede ser $M \cdot N$ invertible para algún valor de $k \in \mathbb{R}$? (0,5 puntos)

2. Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$: (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{rcrl} ax & + & y & = 1 \\ x & + & ay & = a \\ ax & + & 2y & = 1 \end{array}\right\}$$

3. Sean las rectas r y s dadas por $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases}$, $s : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$.

a) Obtener un plano Π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s. (1 punto)

b) Calcular la distancia entre las dos rectas. (1 punto)

4. Calcular un vector de módulo 3 que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$. (2 puntos)

5. a) Estudiar la continuidad de la siguiente función $f(x)$ para $x \neq 0$ (con $a \in \mathbb{R}$): (0,5 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) Calcular el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$. (1,5 puntos)

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

Materia: **Matemáticas II** — Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min.

6. Sea la función $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{x^2 - 4}$.

a) Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de la función $f(x)$. (1,5 puntos)

b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$. (0,5 puntos)

7. Resolver la integral $\displaystyle\int \ln^2(x)\,dx$. (2 puntos)

8. Dadas las funciones $f(x) = 3x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$, calcular el área de la región limitada por sus gráficas. (2 puntos)

9. En un estudio a 1000 estudiantes europeos, 500 saben hablar inglés, 300 saben hablar español, y 100 de ellos hablan los dos idiomas. Se elige un estudiante al azar del estudio:

a) Calcular la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas. (1 punto)

b) Calcular la probabilidad de que hable español, sabiendo que habla inglés. (1 punto)

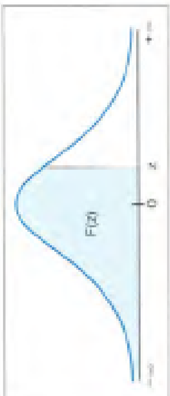
10. La duración de un Smartphone se ajusta a una normal de media 3 años y desviación típica de 1 año. El fabricante da una garantía de 3,5 años a sus Smartphone.

a) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure menos que la garantía. (1 punto)

b) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure más de 5 años. (1 punto)

Tabla de distribución normal $N(0,1)$

$F(z) = P(Z \le z)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

RESPUESTAS

Problema 1:

Sea la igualdad matricial $M \cdot X = N$, donde $M = \begin{pmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $y\ N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz X? Justificar la respuesta.

$b)$ ¿Para qué valores de $k \in R$ es la matriz M invertible?

$c)$ ¿Puede ser $M \cdot N$ invertible para algún valor de $k \in R$?

Solución:

$a)$

Para que pueda efectuarse el producto de dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual que el número de filas de la segunda matriz y, la matriz producto, tiene las mismas filas de la primera y las mismas columnas de la segunda: $M_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}$.

En el caso que nos ocupa: $M_{(3,3)} \cdot X_{(3,2)} = N_{(3,2)}$

$\underline{La\ matriz\ X\ tiene\ que\ tener\ 3\ filas\ y\ 2\ columnas}.$

$b)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 2 - 2k + 2k - k + 2k = k^2 + k - 2 = 0;$$

$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow k_1 = -2, k_2 = 1.$

$\underline{La\ matriz\ M\ es\ invertible\ \forall k \in R - \{-2, 1\}}.$

$c)$

Para que una matriz sea invertible tiene que ser cuadrada.

Según se ha expresado en el apartado $a)$: $M_{(3,3)} \cdot N_{(3,2)} = P_{(3,2)}$.

Por lo expresado anteriormente y para cualquier valor de $k \in R$:

$\underline{M \cdot N\ no\ es\ invertible\ por\ no\ ser\ su\ producto\ una\ matriz\ cuadrada}.$

****

Problema 2:

Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in R$: $\left.\begin{array}{r} ax+y=1 \\ x+ay=a \\ ax+2y=1 \end{array}\right\}$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} \ y \ M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|M'|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix}=a^2+2+a^2-a^2-2a^2-1=-a^2+1=0;\ a^2=1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1=-1, a_2=1.$

$$\underline{Para \ \left\{\begin{array}{c} a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Para $a=-1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M=2.$

Para $a=1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M=2.$

$$\underline{Para \ \left\{\begin{array}{c} a=-1 \\ a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2=n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

Resolvemos para $a=-1$ y para $a=1$.

Para $a=-1$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} -x+y=1 \\ x-y=-1 \\ -x+2y=1 \end{array}\right\}$, equivalente al siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=-1 \\ -x+2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{x=-1;\ y=0.}$$

Para $a=1$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ x+y=1 \\ x+2y=1 \end{array}\right\}$, equivalente al siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ x+2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y=-1 \\ x+2y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{x=1;\ y=0.}$$

****

Problema 3:

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$.

$a)$ Obtener un plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

$b)$ Calcular la distancia entre las dos rectas.

Solución:

$a)$

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow z = \mu \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 2 - \mu \\ x - y = 4 + \mu \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 6;\ \ x = 3;\ \ 3 + y = 2 - \mu;$$

$$y = -1 - \mu\ \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 - \mu \\ z = \mu \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $A(1, 2, 1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, -3, 0)$.

Un punto y un vector director de s son $B(3, -1, 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (0, -1, 1)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-3(x - 1) - (z - 1) - (y - 2) = 0;\ -3x + 3 - z + 1 - y + 2 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv 3x + y + z - 6 = 0}.$$

$b)$

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas $r\ y\ s$ se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(3, -1, 0) - (1, 2, 1)] = (2, -3, -1)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

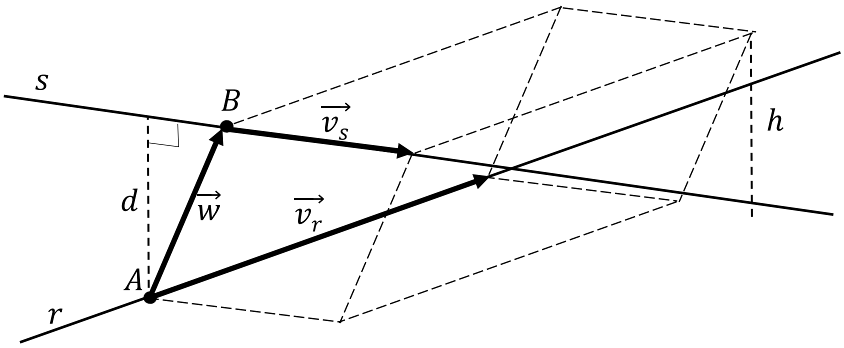
$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 6 + 3 = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3\ \Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$

Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, y el vector $\overrightarrow{w} = (2, -3, -1)$ hallado en el apartado anterior.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}) = |\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| \cdot h = |\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| \cdot d \Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w})|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|}.$$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w})|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{matrix} \right\|}{\left| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix} \right|} = \frac{|-2|}{|-3i-k-j|} = \frac{2}{\sqrt{3^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{11}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{d(r,s) = \frac{\sqrt{11}}{2} u.}}$$

****

Problema 4:

Calcular un vector de módulo 3 que sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

Solución:

Un vector, $\vec{w}$, perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es su producto vectorial:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2j + k - 2k + i = i - 2j - k = (1, -2, -1).$$

Un vector unitario de $\vec{w}$, $\overrightarrow{w'}$, (versor) es el que se obtiene al dividirlo por su módulo: $\overrightarrow{w'} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{\vec{w}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{\vec{w}}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{\vec{w}}{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{-\sqrt{6}}{6}\right)$.

El vector pedido, $\vec{z}$, es $\vec{z} = \pm 3 \cdot \overrightarrow{w'}$:

$$\underline{\overrightarrow{z_1} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \ \ y \ \ \overrightarrow{z_2} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right).}$$

****

Problema 5:

5º) $a)$ Estudiar la continuidad de la siguiente función $f(x)$ para $x \neq 0$ (con $a \in R$):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ a & si\ x = 0 \end{cases}.$$

$b)$ Calcular el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$.

Solución:

$a)$

La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, excepto para $x = 0$ cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}\ (*) \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} a = a = f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{\frac{1}{2} = a}.$$

$$(*)\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{e^0 - 1 - 0}{0^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hotipal\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} =$$

$$= \frac{e^0 - 1}{2 \cdot 0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hotipal\} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}}.$$

$b)$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = 0\ para\ a = \frac{1}{2}}.$$

****

Problema 6:

Sea la función $f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-4}$.

$a)$ Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de la función $f(x)$.

$b)$ Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$.

Solución:

$a)$

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2 \Rightarrow D(f) \Rightarrow R - \{-2, 2\}$.

Corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-4} = 0;\ \ 2 - x^2 = 0;\ \ x^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2} \rightarrow B(-\sqrt{2}, 0)\ y\ x_2 = \sqrt{2} \rightarrow C(\sqrt{2}, 0)$.

Por ser $f(-x) = f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje Y.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2-x^2}{x^2-4} = -1.$$

$\underline{La\ recta\ y = -1\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función.}$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$\underline{Las\ rectas\ x = -2\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales}.$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{-2x \cdot (x^2-4) - (2-x^2) \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^3+8x-4x+2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{4x}{(x^2-4)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x}{(x^2-4)^2} = 0;\ \ 4x = 0;\ \ x = 0.$$

Como es denominador es siempre positivo para los valores pertenecientes al dominio de la función, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea su numerador, por lo cual, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, -2) \cup (-2, 0)}.$

$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (0, 2) \cup (2, +\infty)}.$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{4\cdot(x^2-4)^2-4x\cdot[2\cdot(x^2-4)\cdot 2x]}{(x^2-4)^4} = \frac{4\cdot(x^2-4)-16x}{(x^2-4)^3} = \frac{4x^2-16-16x}{(x^2-4)^3} = \frac{4\cdot(x^2-4x-4)}{(x^2-4)^3}.$$

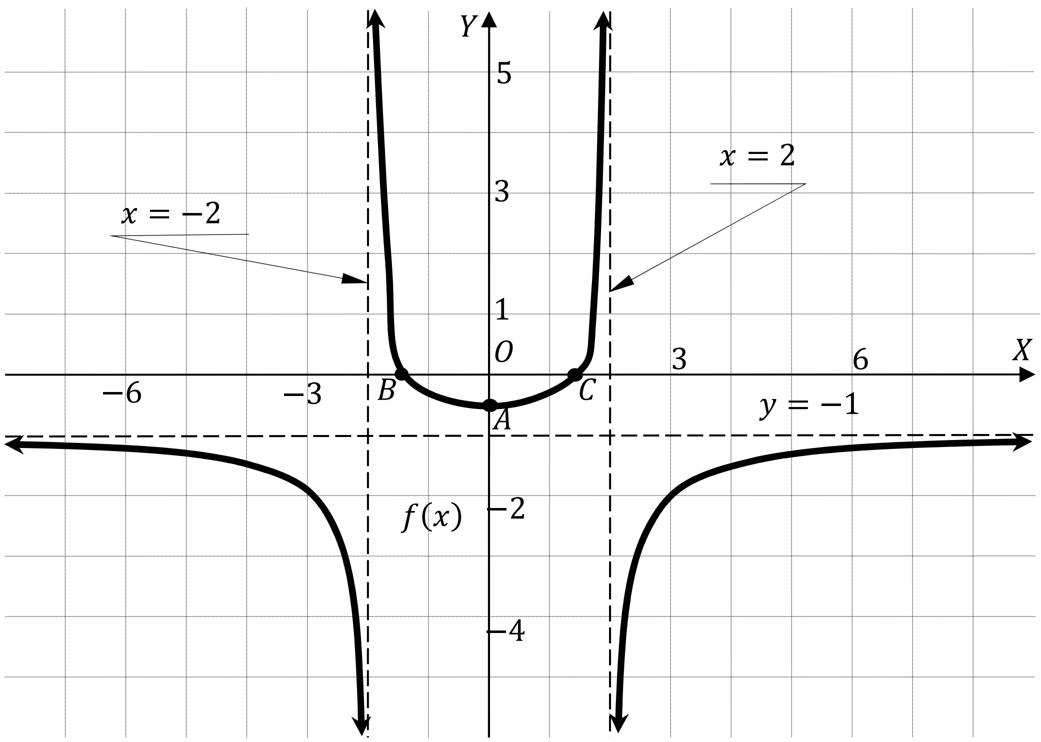
$$f''(0) = \frac{4\cdot(-4)}{(-4)^3} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mín.: A\left(0, -\frac{1}{2}\right).}}$$

$b)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

Problema 7:

7º) Calcular la integral racional: $I = \int L^2x \cdot dx$.

Solución:

$$I = \int L^2x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = L^2x \rightarrow du = 2 \cdot Lx \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^2x \cdot x - \int x \cdot 2 \cdot Lx \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot L^2x - 2 \cdot \int Lx \cdot dx = x \cdot L^2x - 2I_1 = I. \quad (*)$$

$$I_1 = \int Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{matrix} \right\} \Rightarrow Lx \cdot x - \int x \cdot dx = x \cdot Lx - \frac{x^2}{2} = I_1.$$

Sustituyendo el valor hallado de I_1 en (*):

$$I = x \cdot L^2x - 2 \cdot \left(x \cdot Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C = x \cdot L^2x - 2x \cdot Lx + x^2 + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{I \int L^2x \cdot dx = x \cdot (L^2x - 2 \cdot Lx + x) + C.}}$$

****

Problema 8:

Dadas las funciones $f(x) = 3x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$, calcular el área de la región limitada por sus gráficas.

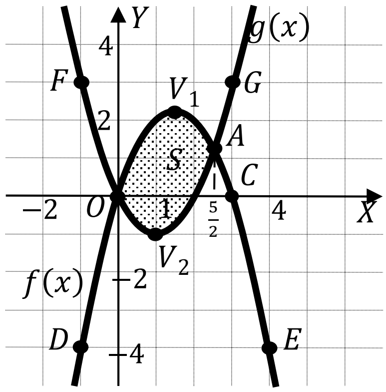
Solución:

Los puntos de corte de dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 3x - x^2 = x^2 - 2x;\ 2x^2 - 5x = 0;\ \ x(2x-5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \rightarrow O(0,0);\ \ x_2 = \frac{5}{2} \rightarrow g\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} \rightarrow A\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right).$$

La función $f(x) = 3x - x^2$ es una parábola cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el punto siguiente:



$$f'(x) = 3 - 2x. \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 3 - 2x = 0;\ \ x = \frac{3}{2}.$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow V_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right).$$

Otros puntos de la parábola son $C(0,3), D(-1,-4)$ y $E(4,-4)$.

La función $g(x) = x^2 - 2x$ es una parábola convexa $(\cup)$, por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el punto siguiente:

$$g'(x) = 2x - 2. \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0;\ \ x - 1 = 0;\ \ x = 1.$$

$$g(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow V_2(1,-1).$$

Otros puntos de la parábola son $F(-1,3)$ y $G(3,3)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, $\left(0, \frac{5}{2}\right)$, todas las ordenadas de $f(x)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de $g(x)$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{5}{2}} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_0^{\frac{5}{2}} [(3x - x^2) - (x^2 - 2x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^{\frac{5}{2}} (3x - x^2 - x^2 + 2x) \cdot dx = \int_0^{\frac{5}{2}} (-2x^2 + 5x) \cdot dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right]_0^{\frac{5}{2}} =$$

$$= \left[-\frac{2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3}{3} + \frac{5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2}{2}\right] - 0 = -\frac{250}{24} + \frac{125}{8} = \frac{-250+375}{24} = \frac{125}{24}.$$

$$\boldsymbol{S = \frac{125}{24}\ u^2 \cong 5.21\ u^2.}$$

****

Problema 9:

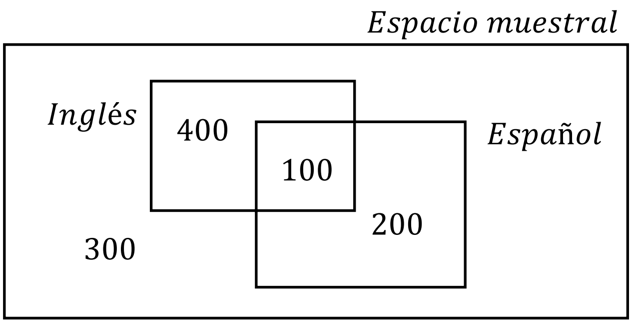
En un estudio a 1 000 estudiantes europeos, 500 saben hablar inglés, 300 saben hablar español, y 100 de ellos hablan los dos idiomas. Se elige un estudiante al azar del estudio:

$a)$ Calcular la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas.

$b)$ Calcular la probabilidad de que hable español, sabiendo que habla inglés.

Solución:

Una forma sencilla de resolver este ejercicio es mediante un diagrama de Venn.



Aplicando la regla de Laplace:

$a)$

$$P=\frac{700}{1.000}=\underline{\frac{7}{10}=0.7.}$$

$b)$

$$P=P(E/I)=\frac{P(I\cap E)}{P(I)}=\frac{100}{500}=\underline{\frac{1}{5}=0.2.}$$

Otra forma de resolver el ejercicio es la siguiente:

$Datos:\ N=1.000;\ \ I=500;\ \ E=300;\ \ I\cap E=100.$

$a)$

$$P=P(I\cup E)=\frac{700}{1.000}=\underline{\frac{7}{10}=0.7.}$$

$$P(I\cup E)=\underline{\frac{7}{10}=0.7.}$$

$b)$

$$P=P(E/I)=\frac{P(I\cap E)}{P(I)}=\frac{\frac{100}{1.000}}{\frac{500}{1.000}}=\frac{100}{500}=\underline{\frac{1}{5}=0.2.}$$

$$P(E/I)=\underline{\frac{1}{5}=0.2.}$$

****

Problema 10:

La duración de un Smartphone se ajusta a una normal de media 3 años y desviación típica de 1 año. El fabricante da una garantía de 3.5 años a sus Smartphone.

a) Calcular la probabilidad de que un Smartphone dure menos que la garantía.

b) Calcular la probabilidad de un Smartphone dure más de 5 años.

Solución:

$Datos: \ \mu = 3; \ \ \sigma = 1.$

$X \rightarrow N(\mu; \ \sigma) = N(3, 1).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-3}{1}.$

a)

$$P = P(X < 3.5) = P\left(Z < \frac{3.5-3}{1}\right) = P(Z < 0.5) = \underline{0.6915}.$$

$$P(X < 3.5) = \underline{0.6915}.$$

b)

$$P = P(X > 5) = P\left(Z > \frac{5-3}{1}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = \underline{0.0228}.$$

$$P(X > 5) = \underline{0.0228}.$$

****