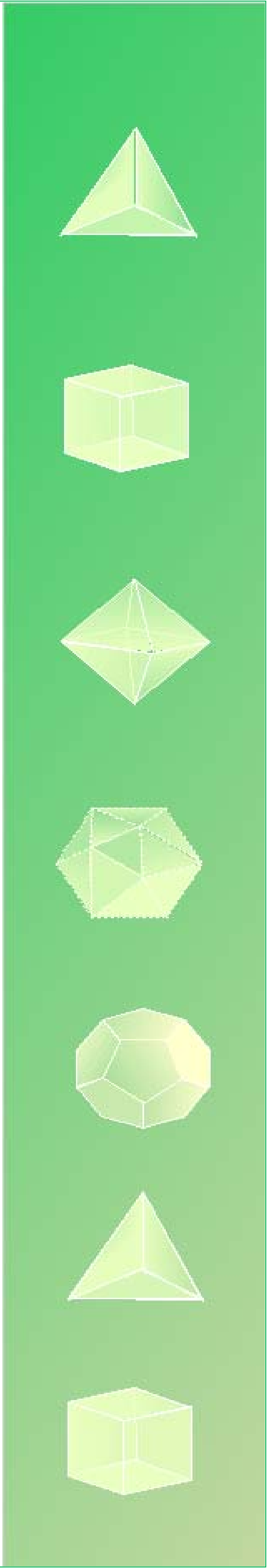


MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

GALICIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Paula Orta

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade 2021

Código: 20

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

1. Números e Álxebra:

Sexa $A = (a_{ij})$ a matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = 2, \\ (-1)^j (i-1) & \text{se} \quad i \neq 2. \end{cases}$ Explique se A e $A + I$ son ou non invertibles e calcule as inversas cando existan. (Nota: a_{ij} é o elemento de A que está na fila i e na columna j, e I é a matriz identidade.)

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$

3. Análise:

De entre todos os rectángulos situados no primeiro cuadrante que teñen dous lados sobre os eixes de coordenadas e un vértice sobre a recta $x + 2y = 4$, determine os vértices do que ten maior área.

4. Análise:

Dada a función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{se} \quad x \leq 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{se} \quad x > 0, \end{cases}$ calcule a área da rexión encerrada pola gráfica de f e as rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

5. Xeometría:

a) Obteña a ecuación implícita do plano π que pasa polos puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,3)$.

b) Calcule o punto simétrico de $P(10,-5,5)$ con respecto ao plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

6. Xeometría:

a) Ache o valor de a se o plano $\pi: ax + y + z = 0$ é paralelo á recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + \lambda, \end{cases}$

b) Estude a posición relativa dos planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ e $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$ en función do parámetro m.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcule $P(A)$ sabendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ e $P(A \cup B) = 0.8$.

b) Diga se os sucesos A e B son ou non independentes, se se sabe que

$$P(A) = 0.6, \qquad P(B) = 0.3 \qquad \text{e} \qquad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82.$$

8. Estatística e Probabilidade:

O portador dunha certa enfermidade ten un 10% de probabilidades de contaxiala a quen non estivo exposto a ela. Se entra en contacto con 8 persoas que non estiveron expostas, calcule:

a) A probabilidade de que contaxie a un máximo de 2 persoas.

b) A probabilidade de que contaxie a 2 persoas polo menos.

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade 2021	Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

1. Números y Álgebra:

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = 2, \\ (-1)^j(i-1) & \text{si} \quad i \neq 2. \end{cases}$ Explique si A y $A + I$ son o no invertibles y calcule las inversas cuando existan. (Nota: a_{ij} es el elemento de A que está en la fila i y en la columna j, e I es la matriz identidad.)

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema $\begin{cases} x + 2y = m, \\ my + 3z = 1, \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1. \end{cases}$

3. Análisis:

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

4. Análisis:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$ calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.

b) Calcule el punto simétrico de $P(10,-5,5)$ con respecto al plano $\pi: 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

6. Geometría:

a) Halle el valor de a si el plano $\pi: ax + y + z = 0$ es paralelo a la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + \lambda, \end{cases}$

b) Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ y $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$ en función del parámetro m.

7. Estadística y Probabilidad:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule $P(A)$ sabiendo que $P(B) = 2P(A)$, $P(A \cap B) = 0.1$ y $P(A \cup B) = 0.8$.

b) Diga si los sucesos A y B son o no independientes, si se sabe que

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.3 \quad \text{y} \quad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.82.$$

8. Estadística y Probabilidad:

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10% de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestas, calcule:

a) La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.

b) La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de dimensión $tres \times tres$ definida de la forma siguiente:

$a_{ij} = \begin{cases} 1 \quad si \quad i = 2 \\ (-1)^j (i-1) \; si \; i \neq 2 \end{cases}$. Explique si A y $A + I$ son o no invertibles y calcula las inversas cuando existan.

Nota: a_{ij} es el elemento de A que está en la fila i y en la columna j, e I es la matriz identidad.

Solución:

$a_{11} = (-1)^1 \cdot 0 = 0$; $a_{12} = (-1)^2 \cdot 0 = 0$; $a_{13} = (-1)^3 \cdot 0 = 0$

$a_{21} = 1$; $a_{22} = 1$; $a_{23} = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$a_{31} = (-1)^1 \cdot 2 = -2$; $a_{32} = (-1)^2 \cdot 2 = 2$; $a_{33} = (-1)^3 \cdot 2 = -2$

A no tiene inversa ya que tiene una fila de ceros $\Rightarrow |A| = 0$

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \; |A+I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0 \Rightarrow$$

$A + I$ si tiene inversa.

$$(A+I)^{-1} = \frac{[Ad(A+I)]^t}{|A+I|}$$

$$Ad(A+I) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad [Ad(A+I)]^t = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Problema 2:

Discuta el sistema: $\begin{cases} x + 2y = m \\ my + 3z = 1 \\ x + (m+2)y + (m+1)z = m+1 \end{cases}$ según los valores del parámetro m.

Solución:

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 1 & m+2 & m+1 & m+1 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes y la ampliada respectivamente.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = m(m+1) + 6 - 3(m+2) = m^2 + m + 6 - 3m - 6 = m^2 - 2m$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m(m-2) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \quad o \quad m = 2$$

- $Si \quad m \neq 0 \quad y \quad m \neq 2 \quad \Rightarrow \quad rg(A) = rg(\overline{A}) = 3$
- Si m = 0 $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2; \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow rg(\overline{A}) = 3$
- Si m = 2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \\ & & 2 \\ 0 & 3 & \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 2 - 4 - 4 = 0 \Rightarrow rg(\overline{A}) = 2$

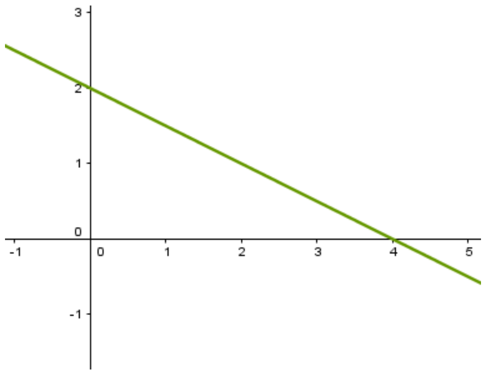
DISCUSIÓN:

- $Si \quad m \neq 0 \quad y \quad m \neq 2 \quad \Rightarrow \quad rg(A) = rg(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Una única solución).
- Si m = 0 $\Rightarrow$ rg(A) $\neq$ rg($\overline{A}$) $\Rightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución).
- Si m = 2 $\Rightarrow$ rg(A) = rg($\overline{A}$) = 2 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones).

Problema 3:

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados en los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

Solución:



Sea el rectángulo formado por los vértices: A(0, 0); B(x, 0); C(x, y) y D(0, y) con x $\in$ (0, 4).

Como C(x, y) $\in$ r: $x + 2y = 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$

$A = x \cdot y = x(-\frac{1}{2}x + 2) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

$A' = -x + 2; A' = 0 \Leftrightarrow -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2; y = -1 + 2 = 1;$

A'' = -1 < 0 por lo que en x = 2 hay un máximo.

Por tanto, los vértices pedidos son:

A(0, 0); B(2, 0); C(2, 1) y D(0, 1)

Autora: Paula Orta
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 4:

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & si\ \ x\le 0 \\ -x^2-x-1 & si\ \ x>0 \end{cases}$, calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y=4x-7$ e $y=1$.

Solución:

$f(x)$ es una función continua en todo su dominio. $f(0)=-1$.

$y=x^2-x-1$ es una parábola abierta hacia arriba.

Su vértice es: $V=\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{4}\right)$ no pertenece al dominio.

$y=-x^2-x-1$ es una parábola abierta hacia abajo.

Su vértice es: $V=\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$ no pertenece al dominio.

Calculo los puntos de corte de la función con las rectas.

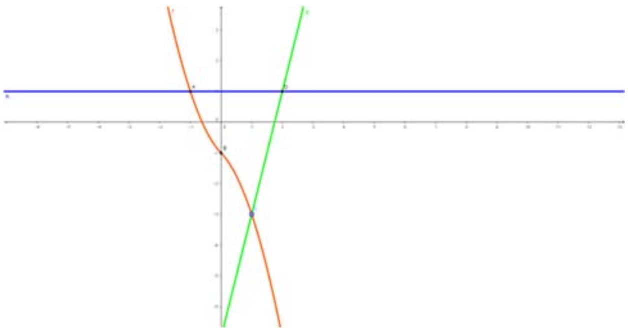
Con la recta $y=1$, el punto de corte es: (-1, 1)

La recta $y=4x-7$ es una recta creciente que pasa por los puntos (0, -7), (1, -3), (2, 1), siendo este último el punto de intersección de las dos rectas.

El punto de corte de la función con la recta $y=4x-7$ es:

$-x^2-x-1=4x-7$; $x^2+5x-6=0$; $x=1$ y $x=-6$; Por lo que el punto de corte es (1, -3).

Ahora puedo representar las funciones:



$$A=\int_{-1}^{0}[1-(x^2-x-1)]dx+\int_{0}^{1}[1-(-x^2-x-1)]dx+\int_{1}^{2}[1-(4x-7)]dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(1-x^2+x+1)dx+\int_{0}^{1}(1+x^2+x+1)dx+\int_{1}^{2}(1-4x+7)dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+x+2)dx+\int_{0}^{1}(x^2+x+2)dx+\int_{1}^{2}(-4x+8)dx=\left.\frac{-x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0}+\left.\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{0}^{1}+(-2x^2+8x)]_1^2$$

$$=(0-(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2))+(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2-0)+((-8+16)-(-2+8))=$$

$$=-\frac{2+3-12}{6}+\frac{2+3+12}{6}+8-6=\frac{7}{6}+\frac{17}{6}+2=\frac{24}{6}+2=4+2=6u^2$$

$$A=6u^2$$

Problema 5:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por los puntos: $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.

b) Calcule el punto simétrico de $P(10,-5,5)$ con respecto al plano de ecuación general

$\pi \equiv 6x+3y+2z-6=0$.

Solución:

a) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$ y $\vec{v}=\overrightarrow{AC}=(-1,0,3)$ son dos vectores directores del plano pedido.

$$\pi : \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ 0 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6(x-1)+3y+2z=0 \Leftrightarrow 6x-6+3y+2z=0$$

El plano pedido es $\pi : 6x+3y+2z-6=0$

b) Primero calculo la proyección ortogonal de P sobre π: Q, este punto será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, donde P' es el simétrico de P.
Para calcular Q, primero calculo la ecuación de la recta r, perpendicular al plano, pasando por P.
$\vec{n}=(6,3,2)$ vector normal del plano es un vector director de r.

$$r : \begin{cases} x = 10+6t \\ y = -5+3t & t \in \mathbb{R} \\ z = 5+2t \end{cases}$$

6(10+6t) + 3(-5+3t) + 2(5+2t) – 6 = 0; 60 + 36t – 15 + 9t + 10 + 4t – 6 = 0;
49t + 49 = 0; 49t = -49; t = -1
Por tanto $Q = r \cap \pi$; Q = (4,-8,3).
Sea P'(x', y', z') el simétrico pedido.

$$\frac{10+x'}{2} = 4 \Rightarrow x' = -2$$

$$\frac{-5+y'}{2} = -8 \Rightarrow y' = -11$$

$$\frac{5+z'}{2} = 3 \Rightarrow z' = 1$$

El simétrico pedido es: **P'= (-2, -11, 1)**

Problema 6:

a) Halle el valor de a si el plano $\pi \equiv ax + y + z = 0$ es paralelo a la recta r de ecuación: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda, \lambda \in R. \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$

b) Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + mz + m = 0$ y $\pi_2 \equiv (m-1)x + y + 3z = 0$ en función del parámetro m.

Solución:

a) $\vec{n} = (a,1,1)$ vector normal del plano.

$\vec{d} = (1,1,1)$ vector director de la recta.

$\pi \| r \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{d} = 0$

(a,1,1) · (1,1,1) = 0 $\Leftrightarrow$ a + 1 + 1 = 0 $\Leftrightarrow$ a + 2 = 0 $\Leftrightarrow$

***a* = -2**

b) $\dfrac{2}{m-1} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{m}{3} \Leftrightarrow m = 3$

- Si m = 3

$\left.\begin{matrix} \pi_1 : 2x + y + 3z + 3 = 0 \\ \pi_2 : 2x + y + 3z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Los planos son paralelos (no coincidentes).

- Si $m \neq 3 \Rightarrow$ Los planos son secantes (se cortan en una recta).

- Si m = 3; Los planos son paralelos (no coincidentes).
- Si $m \neq 3 \Rightarrow$ Los planos son secantes (se cortan en una recta).

Problema 7:

$a)$ Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Calcule $P(A)$ sabiendo que $P(B) = 2P(A), P(A \cap B) = 0.1\ y\ P(A \cup B) = 0.8.$

$b)$ Diga si los sucesos A y B son o no independientes, si se sabe que: $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3\ y$

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.82.$

Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

0.8 = P(A) + 2P(A) – 0.1 $\Leftrightarrow$ 0.8 + 0.1 = 3P(A) $\Leftrightarrow$ 3P(A) = 0.9 $\Leftrightarrow$

$\boldsymbol{P(A)}$ **= 0.3**

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

$0.82 = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0.82 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.18$

P(A) · P(B) = 0.6 · 0.3 = 0.18

Por tanto, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$

Los sucesos A y B son **independientes**.

Problema 8:

El portador de una cierta enfermedad tiene un 10 % de probabilidades de contagiarla a quien no estuvo expuesto a ella. Si entra en contacto con 8 personas que no estuvieron expuestos, calcula:

$a)$ La probabilidad de que contagie a un máximo de 2 personas.

$b)$ La probabilidad de que contagie a 2 personas por lo menos.

Solución:

X = "nº de personas contagiadas" $x \in B(n, p)$ donde n = 8; p = 0.1 y q = 0.9

a) $P(x \le 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = \binom{8}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^8 + \binom{8}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^7 + \binom{8}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^6 =$

$= 0.9^8 + 8 \cdot 0.1 \cdot 0.9^7 + 28 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^6 = 0.9619$

Por tanto, $\boldsymbol{P(x \le 2) = 0.9619}$

b) $P(x \ge 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - [P(x=0) + P(x=1)] = 1 - (0.9^8 + 8 \cdot 0.1 \cdot 0.9^7) = 0.1869$

Por tanto, $\boldsymbol{P(x \ge 2) = 0.1869}$

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade

2021

Código: 20

MATEMÁTICAS II

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira.

1. Números e Álxebra:
Despexe X na ecuación matricial $B(X-I)=A$, onde I é a matriz identidade e A e B son matrices cadradas, con B invertible. Logo, calcule X se

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-2&2&-2\end{pmatrix} \quad e \quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}.$$

2. Números e Álxebra:
Discuta, segundo os valores do parámetro m, o seguinte sistema: $\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$

3. Análise:
a) Enuncie o teorema de Bolzano.
b) Obteña os valores de a, b e c que fan que $f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$ cumpra $f(0)=1$ e teña extremos relativos en $x=\pm1$. Dicir logo se os extremos son máximos ou mínimos.

4. Análise:
a) Enuncie o teorema de Rolle.
b) Calcule a área da rexión encerrada polas gráficas de $f(x)=x+6$ e $g(x)=\begin{cases}-2x & \text{se} \quad x<0, \\ x^2 & \text{se} \quad x\geq 0.\end{cases}$

5. Xeometría:
a) Obteña a ecuación implícita do plano π con ecuacións paramétricas π: $\begin{cases} x=1-\lambda, \\ y=2+\mu, \\ z=1+\lambda+2\mu, \end{cases} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$
b) Calcule o valor de m para que os seguintes puntos sexan coplanarios: $A(0,m,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ e $D(2,0,2)$. Obteña a ecuación implícita do plano π que os contén.

6. Xeometría:
Calcule o punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto ao plano $\pi: 2x-y+z+3=0$.

7. Estatística e Probabilidade:
Nunha determinada cidade, o 8% da poboación practica ioga, o 20% ten mascota e o 3% practica ioga e ten mascota. Se nesa cidade se elixe unha persoa ao azar, calcule:
a) A probabilidade de que non practique ioga e á vez teña mascota.
b) A probabilidade de que teña mascota sabendo que practica ioga.

8. Estatística e Probabilidade:
O grosor das pranchas de aceiro que se producen nunha certa fábrica segue unha distribución normal de media 8 mm e desviación típica 0.5 mm. Calcule a probabilidade de que unha prancha elixida ao azar teña un grosor comprendido entre 7.6 mm e 8.2 mm.

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA
Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade
2021
Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera.

1. Números y Álgebra:
Despeje X en la ecuación matricial $B(X-I)=A$, donde I es la matriz identidad y A y B son matrices cuadradas, con B invertible. Luego, calcule X si

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. Números y Álgebra:
Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx + y + z = 2m, \\ mx + (m+1)y + z = 1, \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1. \end{cases}$

3. Análisis:
a) Enuncie el teorema de Bolzano.
b) Obtenga los valores de a, b y c que hacen que $f(x)=ax^3+bx^2-3x+c$ cumpla $f(0)=1$ y tenga extremos relativos en $x=\pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

4. Análisis:
a) Enuncie el teorema de Rolle.
b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x)=x+6$ y $g(x)=\begin{cases} -2x & \text{si} \quad x<0, \\ x^2 & \text{si} \quad x\geq 0. \end{cases}$

5. Geometría:
a) Obtenga la ecuación implícita del plano π con ecuaciones paramétricas π: $\begin{cases} x=1-\lambda, \\ y=2+\mu, \\ z=1+\lambda+2\mu, \end{cases} \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$
b) Calcule el valor de m para que los siguientes puntos sean coplanarios: $A(0,m,0)$, $B(0,2,2)$, $C(1,4,3)$ y $D(2,0,2)$. Obtenga la ecuación implícita del plano π que los contiene.

6. Geometría:
Calcule el punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto al plano $\pi: 2x-y+z+3=0$.

7. Estadística y Probabilidad:
En una determinada ciudad, el 8% de la población practica yoga, el 20% tiene mascota y el 3% practica yoga y tiene mascota. Si en esa ciudad se elige una persona al azar, calcule:
a) La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.
b) La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

8. Estadística y Probabilidad:
El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Despeja X en la ecuación matricial $B(X-I)=A$, siendo I la matriz identidad de orden tres y $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-2&2&-2\end{pmatrix}$ $y\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}$. Luego, calcula el valor de la matriz X.

Solución:

B(x – I) = A; $B^{-1}\cdot B(X-I)=B^{-1}\cdot A$; $X-I=B^{-1}\cdot A$;

$$\boldsymbol{X = B^{-1}\cdot A + I}$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix};\ B^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&2&2\\-6&6&-6\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&2&2\\-6&6&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&2\\-6&6&-5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&2\\-6&6&-5\end{pmatrix}}$$

Problema 2:

Discuta el sistema: $\begin{cases} mx + y + z = 2m \\ mx + (m+1)y + z = 1 \\ mx + (m+1)y + 2z = m+1 \end{cases}$ según los valores del parámetro m.

Solución:

Sean $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 2m \\ m & m+1 & 1 & 1 \\ m & m+1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ la matriz de coeficientes y la ampliada respectivamente.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 2 \end{vmatrix} = 2m(m+1) + m + m(m+1) - m(m+1) - m(m+1) - 2m = 2m^2 + 2m + m - m^2 - m - 2m = m^2$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

- $Si \quad m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 3 = r(\bar{A})$
- Si m = 0; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 2 - 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow r(\bar{A}) = 3$.

DISCUSIÓN:

- $Si \quad m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = r(\bar{A}) = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Existe una única solución).
- $Si \quad m = 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) \neq r(\bar{A}) \Rightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución).

Problema 3:

a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Obtenga los valores de a, b y c de manera que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ cumpla $f(0) = 1$ y tenga extremos relativos en $x = \pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

Solución:

a) Teorema de Bolzano:

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado [a, b] y signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$ ($f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

b) $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3$

Por ser x = 1 un extremo $\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b - 3 = 0$

Por ser x = -1 un extremo $\Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b - 3 = 0$

Resolviendo el sistema, obtenemos que a = 1 y b = 0.

Por tanto a = 1; b = 0 y c = 1.

$f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$

x = 1 es un mínimo.

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$

x = -1 es un máximo.

Problema 4:

a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Calcule el área de la región encerrado por las gráficas de las $f(x) = x + 6$ y $g(x) = \begin{cases} -2x & si\ \ x < 0 \\ x^2 & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$.

Solución:

a) Teorema de Rolle:

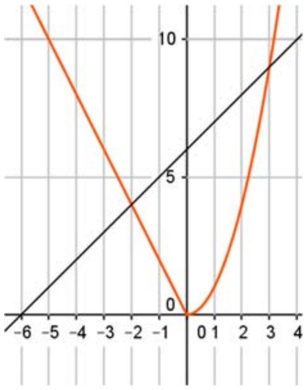
Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y derivable en el abierto (a, b).

Si f(a) = f(b) , entonces existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

b) Primero calculo los puntos de corte de las dos funciones:

- $x + 6 = -2x \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$
- $x + 6 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (La solución x = -2 no nos interesa por ser negativa).

Por tanto los puntos de corte de las gráficas son (-2, 4) y (3, 9).



$$A = \int_{-2}^{0} [x + 6 - (-2x)]dx + \int_{0}^{3} (x + 6 - x^2)dx = \int_{-2}^{0} (3x + 6)dx + \int_{0}^{3} (-x^2 + x + 6)dx =$$

$$\left.\frac{3x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{0} + \left.(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{0}^{3} = 0 - (6 - 12) + (-9 + \frac{9}{2} + 18) - 0 = 6 + 9 + \frac{9}{2} = \frac{39}{2}u^2$$

Por tanto: $A = \frac{39}{2}u^2$

Problema 5:

$a)$ Obtenga la ecuación implícita del plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in R$.

$b)$ Calcule el valor de m para que sean coplanarios los puntos $A(0, m, 0)$, $B(0, 2, 2)$, $C(1, 4, 3)$ y $D(2, 0, 2)$. Obtenga la ecuación implícita del plano β que los contiene.

Solución:

a) π pasa por el punto P(1, 2, 1) y está generado por los vectores $\vec{u} = (-1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$.

$$\pi : \begin{vmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & y-2 \\ 1 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

-(x-1) + 2(y-2) – (z-1) = 0; -x + 1 + 2y – 4 – z + 1 = 0

Por tanto: $\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{-x + 2y - z - 2 = 0}$

b) $\overrightarrow{BC} = (1, 2, 1)$ y $\overrightarrow{BD} = (2, -2, 0)$ son linealmente independientes, por lo que determinan un plano.

Calculo la ecuación implícita del plano que pasa por B y está generado por estos dos vectores. Después obligaré a A a pertenecer a ese plano, así los cuatro puntos serán coplanarios.

$$\beta : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & -2 & y-2 \\ 1 & 0 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

2x + 2(y-2) – 6(z-2) = 0; 2x + 2y – 4 – 6z +12 = 0; 2x + 2y – 6z + 8 = 0

Por tanto: $\beta : x + y - 3z + 4 = 0$

$A \in \beta \Leftrightarrow m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -4$

Por tanto, si $\boldsymbol{m = 4}$; A, B, C y D son coplanarios.

Problema 6:

Calcule el punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto al plano $\pi \equiv 2x - y + z + 3 = 0$.

Solución:

Primero calculo la proyección ortogonal de P sobre π: Q; Q será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ donde P' es el simétrico pedido.

Para calcular Q, calculo la ecuación de la recta r perpendicular al plano pasando por P.

Q = $r \cap \pi$.

$\vec{n} = (2,-1,1)$ vector normal del plano es un vector director de la recta r.

Por tanto: $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

2(1 + 2t) – (1 - t) + (2 + t) + 3 = 0; 2 + 4t – 1 + t + 2 + t + 3 = 0; 6t + 6 = 0 $\Rightarrow$ t = -1

Sustituyendo en las ecuaciones de la recta, obtenemos Q = (-1, 2, 1).

Sea P' (x',y',z') el simétrico pedido.

$$\frac{x'+1}{2} = -1 \Rightarrow x' = -2 - 1 = -3$$

$$\frac{y'+1}{2} = 2 \Rightarrow y' = 4 - 1 = 3$$

$$\frac{z'+2}{2} = 1 \Rightarrow z' = 2 - 2 = 0$$

Por tanto el simétrico de P es **P' (-3, 3, 0)**

Problema 7:

En una determinada ciudad, el 8 % de la población practica yoga, el 20 % tiene mascota y el 3 % practica yoga y tiene mascota. Se elige una persona al azar de esa ciudad, calcule:

$a)$ La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota.

$b)$ La probabilidad de que tenga mascota sabiendo que practica yoga.

Solución:

Considero los sucesos Y = "practicar yoga" y M = "tener mascota".

P(Y) = 0.08; P(M) = 0.20; P($Y \cap M$) = 0.03

a) P($\overline{Y} \cap M$) = P(M) – P($Y \cap M$) = 0.20 – 0.03 = 0.17

La probabilidad de que no practique yoga y a la vez tenga mascota es **0.17**

b) $P(M/Y) = \frac{P(M \cap Y)}{P(Y)} = \frac{0.03}{0.08} = 0.375$

La probabilidad de que tanga mascota sabiendo que practica yoga es **0.375.**

Problema 8:

El grosor de las planchas de acero que se producen en una cierta fábrica sigue una distribución normal de media 8 mm y desviación típica 0.5 mm. Calcule la probabilidad de que una plancha elegida al azar tenga un grosor comprendido entre 7.6 mm y 8.2 mm.

Solución:

Sea X = "grosor en mm de una plancha de acero". $x \in N(8, 0.5)$

$P(7.6 \leq x \leq 8.2) = P\left(\frac{7.6-8}{0.5} \leq z \leq \frac{8.2-8}{0.5}\right) = P(z \leq 0.4) - [1 - P(z \leq 0.8)] = 0.6554 - 1 + 0.7881 = 0.4435$

$$\boldsymbol{P(7.6 \leq x \leq 8.2) = 0.4435}$$