MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

MADRID

Autor: Javier Rodrigo Hitos

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2020-2021**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A,B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2 + x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x.$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π.

b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$.

c) (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especimenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

Autor: Javier Rodrigo Hitos
www.apuntesmareaverde.org.es

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} ax-2y+(a-1)z=4 \\ -2x+3y-6z=2 \\ -ax+y-6z=6 \end{array}\right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para $a=1$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x<0 \\ x\,e^x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi,2)$. Demuestre que existe un punto $x_0\in[0,1]$ de manera que $f(x_0)=2$.

c) (0.75 puntos) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los planos $\pi_1\equiv x+y=1$ y $\pi_2\equiv x+z=1$.

a) (1.5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) (0.5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0,2,0)$ y es perpendicular al plano π_2.

c) (0.5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

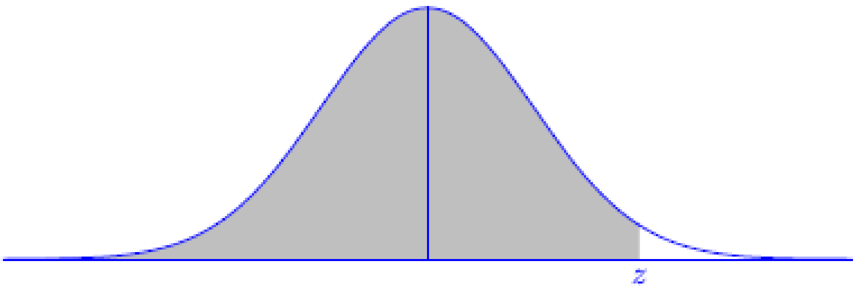
a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2" y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?

d) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución N(0, 1), $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

Por cada ecuación bien planteada: 0.5 puntos. Por la solución del sistema: 1 punto. Si se resuelve correctamente un sistema incorrecto: hasta 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

A.2.

Por hallar los puntos de corte: 0.75 puntos. Por plantear la integral correcta: 0.5 puntos. Por calcular la primitiva: 0.5 puntos. Por aplicar la Regla de Barrow: 0.5 puntos. Por el resultado correcto: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

A.4.

a) Planteamiento modelo: 0.5 puntos. Por cada porcentaje pedido: 0.25 puntos.
b) Reconocer la binomial: 0.25 puntos. Parámetros correctos: 0.25 puntos. Expresión de la probabilidad: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo correcto: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

RESPUESTAS OPCIÓN A

Problema A.1:

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1 560 euros, que corresponden a tres empresas, A, B y C. Sabiendo que el valor actual de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acciones que le corresponde a cada hermano.

Solución

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/9iMcwbp14VI

Llamamos x al número de acciones A, y al número de acciones B, y z al número de acciones C.

Con los datos del enunciado planteamos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=540\\ 3x+y+6z&=1\,560\\ y&=2z\end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x+y+z&=540\\ 3x+y+6z&=1\,560\\ y-2z&=0\end{aligned}\right\}$$

Lo resolvemos usando la **Regla de Cramer**:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}540 & 1 & 1\\ 1560 & 1 & 6\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 6\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}}=\frac{-1080+1560-3240+3.120}{-2+3-6+6}=\frac{4680-4320}{1}=360.$$

$$y=\begin{vmatrix}1 & 540 & 1\\ 3 & 1560 & 6\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=-3120+3240=120.$$

$$z=\begin{vmatrix}1 & 1 & 540\\ 3 & 1 & 1560\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=1620-1560=60.$$

Lo que le corresponde a cada hermano:

$$\boldsymbol{x=\frac{360}{3}=120;\;\; y=\frac{120}{3}=40;\;\; z=\frac{60}{3}=20.}$$

Problema A.2:

Calcula el área de la región limitada por las gráficas de las siguientes funciones:

$f(x) = 2 + x - x^2$ y $g(x) = 2x^2 - 4x$.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/LJsWgHYpRHQ

Buscamos los puntos de intersección de ambas funciones:

$$f(x) = g(x) \to 2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x \to 3x^2 - 5x - 2 = 0 \to$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} \to x = -\frac{1}{3};\ \ x = 2.$$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{18-3-1}{9} = \frac{14}{9} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{3}, \frac{14}{9}\right)$.

$f(2) = 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow B(2, 0)$.

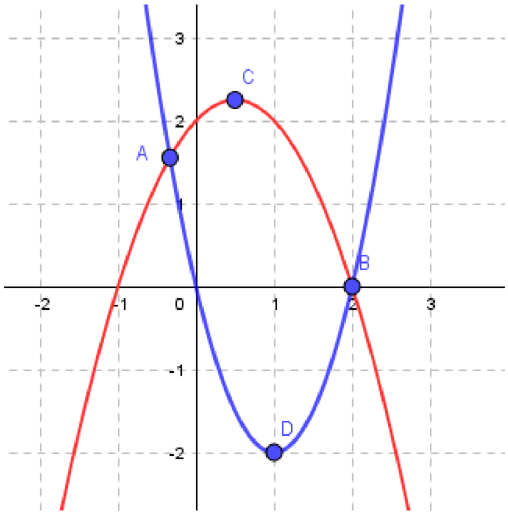
Las funciones se cortan en los puntos: $A\left(-\frac{1}{3}, \frac{14}{9}\right)$ y $B(2, 0)$

Buscamos sus extremos:

$f'(x) = 1 - 2x = 0 \to x = \frac{1}{2} \to f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} \to C\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

$g'(x) = 4x - 4 = 4(x-1) = 0 \to x = 1 \to D(1, -2)$.

El punto $C\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ es un máximo de $f(x)$ y el punto $D(1, -2)$ es un mínimo de $g(x)$



Representamos las gráficas, con lo que:

$$S = \int_{-\frac{1}{3}}^{2} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{2} [(2 + x - x^2) - (2x^2 - 4x)] \cdot dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{2} (-3x^2 + 5x + 2) \cdot dx$$

$$= \left[-\frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 2x\right]_{-\frac{1}{3}}^{2} = \left[-x^3 + \frac{5x^2}{2} + 2x\right]_{-\frac{1}{3}}^{2}$$

$$= \left(-2^3 + \frac{5 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2\right) - \left[-\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = -8 + 10 + 4 - \frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3}$$

$$= 6 - \frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3} = \frac{324 - 2 - 15 + 36}{54} = \frac{360 - 17}{54} = \frac{343}{54} \cong 6.35\ u^2.$$

El área es: $S = \boldsymbol{\frac{343}{54}} \cong \boldsymbol{6.35\ u^2}$.

Problema A.3:

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

$a)$ Calcular el ángulo que forman r y π.

$b)$ Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $\beta \equiv z - y = 0$.

$c)$ Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Solución:

video ***Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/3ytiu1fmSqU***

$a)$ Vectores ortogonales a la recta r son: $(-1,-1,1)$ y $(2,\ 3,-1)$. Hallamos su producto vectorial para obtener el vector de dirección de la recta r.

$$\overrightarrow{v_r'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = i + 2j - 3k + 2k - 3i - j = -2i + j - k \to \overrightarrow{v_r} = (2,-1,1).$$

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2,1,-1)$.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \cos\beta.$$

Podemos calcular el ángulo que forman dos vectores:

$$\cos\beta = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{v_r}|}.$$

Por ser los ángulos α y β complementarios sabemos que: $sen\ \alpha = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{v_r}|}$.

$$sen\ \alpha = \frac{(2,1,-1)\cdot(2,-1,1)}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{4-1-1}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333 \to$$

La recta r y el plano π forman un ángulo $\boldsymbol{\alpha = arc\ sen\ 0.3333 = 19°\ \ 28'\ 16''}$.

$b)$ Calculamos el punto P de intersección de la recta r y el plano π:

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases} \\ \pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ 2x + y - z = -3 \end{array}\right\}.$$

El punto de corte es $P(-3,1,-2)$.

La recta s que pasa por $P(-3,1,-2)$ y es perpendicular al plano $\beta \equiv y - z = 0$ tiene como vector director al vector normal del plano: $\overrightarrow{n_\beta} = (0,1,-1)$.

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es $s \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano β con la recta s es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv y - z = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \to 1 + \lambda - (-2 - \lambda) = 0 \to 1 + \lambda + 2 + \lambda = 0 \to \ \ 2\lambda = -3 \to \lambda = -\frac{3}{2} \to$$

$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} x=-3 \\ y=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \\ z=-2+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \rightarrow M\left(-3,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

Calculamos los vectores:

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=\left[\left(-3,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)-(-3,1,-2)\right]=\left(0,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{MP'}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OM}=\left[(x,y,z)-\left(-3,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).\right]=\left(x+3,y+\frac{1}{2},z+\frac{1}{2}\right).$$

Para que P' sea el simétrico de P' se debe verificar que:

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MP'} \rightarrow \left(0,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\left(x+3,y+\frac{1}{2},z+\frac{1}{2}\right) \rightarrow \left\{\begin{matrix} x+3=0 \rightarrow x=-3 \\ y+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2} \rightarrow y=-2 \\ z+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \rightarrow z=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow P'(-3,-2,1).$$

El simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $\beta \equiv z-y=0$ es $\boldsymbol{P'(-3,-2,1)}$

$c)$ Sabemos que: $P(-3,1,-2)$, punto de intersección de la recta r y el plano π. Buscamos un punto de la recta r.

$$r \equiv \left.\begin{matrix} -x-y+z=0 \\ 2x+3y-z=-1 \end{matrix}\right\} \rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=\lambda \\ 2x+3y=-1+\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow r \equiv \left\{\begin{matrix} x=1+2\lambda \\ y=-1-\lambda. \\ z=\lambda \end{matrix}\right.$$

Por ejemplo, para $\lambda=0$: $Q(1,-1,0)$.

La recta q que pasa por ese punto y tiene por vector director al normal del plano π, que es $\vec{n}=(2,1,-1)$; es la siguiente: $q \equiv \left\{\begin{matrix} x=1+2\mu \\ y=-1+\mu. \\ z=-\mu \end{matrix}\right.$

El punto Q' es la intersección de q y π:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv 2x+y-z=-3 \\ q \equiv \left\{\begin{matrix} x=1+2\mu \\ y=-1+\mu \\ z=-\mu \end{matrix}\right. \end{matrix}\right\} \rightarrow 2\cdot(1+2\mu)-1+\mu-(-\mu)=-3 \rightarrow \mu=-\frac{2}{3} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x=-\frac{1}{3} \\ y=-1-\frac{2}{3}=-\frac{5}{3} \\ z=\frac{2}{3} \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

$$Q'\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right).$$

La recta r' pedida, proyección ortogonal de r sobre π es la que pasa por los puntos $P(-3,1,-2)$ y $Q'\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$.

$$r' \equiv \frac{x+3}{-\frac{1}{3}+3}=\frac{y-1}{-\frac{5}{3}-1}=\frac{z+2}{\frac{2}{3}+2} \rightarrow \frac{x+3}{\frac{8}{3}}=\frac{y-1}{-\frac{8}{3}}=\frac{z+2}{\frac{8}{3}}.$$

La recta r' pedida, proyección ortogonal de r sobre π es: $\boldsymbol{x+3=1-y=z+2}$

Problema A.4:

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal de media 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

$a)$ ¿Qué porcentaje de individuos de esta espacie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

$b)$ Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que el menos uno no supere los 10 meses de vida?

$c)$ ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/E08i7gHUeaw

$a)$ Nos dicen que: $X \to N(\mu;\ \sigma) = N(8.8;\ 3)$. Tipificamos: $Z = \frac{X-8.8}{3}$.

$$P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10-8.8}{3}\right) = P\left(Z > \frac{1.2}{3}\right) = P(Z > 0.4) = 1 - P(Z \leq 0.4) = 1 - 0.6554 = 0.3446.$$

El porcentaje de individuos de esta especie que supera los 10 meses es de $\mathbf{34.46}$ **%**

$$P(7 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{7-8.8}{3} \leq Z \leq \frac{10-8.8}{3}\right) = P\left(\frac{-1.8}{3} \leq Z \leq \frac{1.2}{3}\right) = P(-0.6 \leq Z \leq 0.4)$$
$$= P(Z < 0.4) - [1 - P(Z < 0.6)] == P(Z < 0.4) - 1 + P(Z < 0.6)$$
$$= 0.6554 - 1 + 0.7257 = 1.3811 - 1 = 0.3811$$

El porcentaje de individuos que ha vivido entre 7 y 10 meses es de $\mathbf{38.11}$ %

$b)$ La probabilidad de que un individuo no supere los 10 meses de vida es la siguiente:

$$P(X \leq 10) = 1 - P(X > 10) = 1 - 0.3446 = 0.6554.$$

Distribución binomial: $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$, siendo $n = 4;\ \ p = 0.6554;\ \ q = 1 - p = 0.3446;\ \ r \geq 1.$

$$P(r \geq 1) = 1 - P(r = 0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot 0.6554^0 \cdot 0.3446^{4-0} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0.3446^4 = 1 - 0.0141 = 0.9859.$$

Si se toman al azar 4 especímenes, la probabilidad de que el menos uno no supere los 10 meses de vida es de $\mathbf{0.9859}$

$c)$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-8.8}{3}$.

$$P(8.8 - c \leq X \leq 8.8 + c) = P\left(\frac{8.8-c-8.8}{3} \leq Z \leq \frac{8.8+c-8.8}{3}\right) = 0.98 \to$$
$$P\left(\frac{-c}{3} \leq Z \leq \frac{c}{3}\right) = P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - \left[1 - P\left(Z < \frac{c}{3}\right)\right] = P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - 1 + P\left(Z < \frac{c}{3}\right) =$$
$$= 2 \cdot P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - 1 = 0.98;\ \ P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = \frac{1.98}{2} = 0.9900.$$

Buscamos ese valor en la tabla $N(0,1) \to 2.33 \to \frac{c}{3} \cong 2.33 \to c \cong 7.$

El valor de c tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluya el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie es de $\boldsymbol{c \cong 7}$

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} ax-2y+(a-1)z&=4\\ -2x+3y-6z&=2\\ -ax+y-6z&=6 \end{aligned}\right\}.$$

$a)$ Discuta el sistema según los diferentes valores de a.

$b)$ Resuelva el sistema para $a=1$.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/aGJuoPVALdI

$a)$ Escribimos las matrices de coeficientes y ampliada:

$$M=\begin{pmatrix} a & -2 & a-1\\ -2 & 3 & -6\\ -a & 1 & -6 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & -2 & a-1 & 4\\ -2 & 3 & -6 & 2\\ -a & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los rangos:

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & -2 & a-1\\ -2 & 3 & -6\\ -a & 1 & -6 \end{vmatrix}=-18a-2(a-1)-12a+3a(a-1)+6a+24=-24a-2a+2+$$

$$3a^2-3a+24=3a^2-29a+26=0;\ \ x=\frac{29\pm\sqrt{29^2-12\cdot 26}}{2\cdot 3}=\frac{29\pm 23}{6}\Rightarrow a_1=1,\ \ a_2=\frac{26}{3}.$$

Por lo tanto, para $a\neq 1$ y para $a\neq\frac{26}{3}$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada, e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Calculamos los rangos para $a=1$. El rango de la matriz de los coeficientes es 2, pues $\begin{vmatrix} 3 & -6\\ 1 & -6 \end{vmatrix}\neq 0$

Calculamos el rango de la matriz ampliada:

$$rango\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4\\ -2 & 3 & -6 & 2\\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}=rango\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & -6 & 10\\ 0 & -1 & -6 & 10 \end{pmatrix}=2$$

$$\begin{Bmatrix} F_2\to F_2+2F_1\\ F_3\to F_3+F_1 \end{Bmatrix} \qquad\qquad \{F_2=F_3\}$$

El rango de la matriz ampliada es 2, igual al rango de la matriz de los coeficientes y menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible e indeterminado.

Calculamos los rangos para $a=\frac{26}{3}$. El rango de la matriz de los coeficientes es 2, pues $\begin{vmatrix} 3 & -6\\ 1 & -6 \end{vmatrix}\neq 0$

Calculamos el rango de la matriz ampliada:

$$rango\begin{pmatrix} \frac{26}{3} & -2 & \frac{23}{3} & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -\frac{26}{3} & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} 26 & -6 & 23 & 12 \\ -6 & 9 & -18 & 6 \\ -26 & 3 & -18 & 18 \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} 13 & -2 & 23 & 2 \\ -3 & 3 & -18 & 1 \\ -13 & 1 & -18 & 3 \end{pmatrix} = 3.$$

Ya que: $\begin{vmatrix} 13 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ -13 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 117 - 6 + 26 + 78 - 13 - 18 = 221 - 35 \neq 0 \Rightarrow 221 - 37 \neq 0$

El rango de la matriz ampliada es 3, distinto al rango de la matriz de los coeficientes, por lo que el sistema es incompatible.

La discusión completa del sistema es:

- Si $a = \frac{26}{3}$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2, distinto del de la matriz ampliada que es 3, el sistema es **incompatible**.
- Si $a = 1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2, igual al de la matriz ampliada y menor que el número de incógnitas que es 3 sistema es compatible **indeterminado**.
- Si $a \neq \frac{26}{3}$ y $a \neq 1$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada, y al número de incógnitas el sistema es **compatible determinado**.

$b)$ Si $a = 1$ el sistema es $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ -2x + 3y - 6z &= 2 \\ -x + y - 6z &= 6 \end{aligned}\right\}$, que es compatible indeterminado, como acabamos de ver. Haciendo $z = -\lambda$:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ -2x + 3y - 6z &= 2 \\ -x + y - 6z &= 6 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ -x + y &= 6 + 6\lambda \\ -2x + 3y &= 6\lambda + 2 \end{aligned} \quad z = -\lambda\right\} \rightarrow \begin{aligned} x &= 2y + 4 \\ -y &= 10 + 6\lambda \\ z &= -\lambda \end{aligned}$$

$\rightarrow x - 2 \cdot (-10 - 6\lambda) = 4 \rightarrow \ x = -16 - 12\lambda.$

$$\boldsymbol{x = -16 - 12\lambda; -y = 10 + 6\lambda\,; z = -\lambda, \forall\lambda \in R}$$

Autor: Javier Rodrigo Hitos

Problema B.2:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} sen\, x \;\; si \;\; x < 0 \\ x \cdot e^x \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases}$:

$a)$ Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

$b)$ Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.

$c)$ Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x) \cdot dx$.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/py-Zo0AzgW0

$a)$ La función es definida a trozos, formada por la función seno, continua y derivable en toda la recta real, y por una función exponencial, también continua y derivable en toda la recta real. El único punto dudoso es por tanto el de unión de ambos trozos, $x = 0$.

Para estudiar la continuidad en $x = 0$, estudiamos el valor de la función en ese punto y el valor de los límites laterales:

$$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} sen\, x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} (x \cdot e^x) = 0$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ sabemos que la función es continua para $x = 0$

Ya hemos visto que también el único punto dudoso para la derivabilidad es el punto de unión de ambas ramas, $x = 0$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x \;\; si \; x < 0 \\ e^x(x+1) \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

Luego $f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos x = \cos 0 = 1 = f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x \, (x+1) = e^0 \, (0+1) = 1$

por lo que $f'(0^-) = f'(0^+) = 1$

$$\boldsymbol{f(x) \; es \; continua \; y \; derivable \; en \; x = 0}$$

$b)$ Si la primera derivada de una función es positiva o negativa entonces la función es creciente o decreciente, respectivamente.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x \;\; si \; x < 0 \\ e^x(x+1) \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases}.$$

En el intervalo $(-\pi, 0)$: la función $f'(x) = \cos x$ es negativa en el intervalo $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ y es positiva en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. En el intervalo $(0, 2)$: $f'(x) = e^x \cdot (x+1) > 0$. Por lo tanto:

Si $\boldsymbol{x} \in \left(-\boldsymbol{\pi}, -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$ entonces $f'(x) < 0$, luego la función es **decreciente**

Si $\boldsymbol{x} \in \left(-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \mathbf{2}\right)$ entonces $f'(x) > 0$ y la función es **creciente**

El Teorema de los valores intermedios o **desigualdad de Darboux** dice que "si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$"

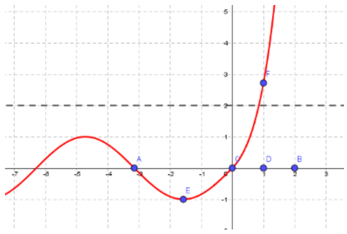
Para demostrar que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$ se tiene en cuenta que la función es continua en $[0, 1]$, que $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$ y que $f(1) = 1 \cdot e^1 = e > 2$, por lo que como $0 < 2 < e$, queda demostrado que:

$$Existe\ al\ menos\ un\ x_0 \in [0, 1]\ de\ manera\ que\ \ f(x_0) = 2$$

También se puede demostrar usando el **teorema de Bolzano** que dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$":

Probar que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$ es equivalente a probar que la función $g(x) = f(x) - 2$ tiene una raíz real en el intervalo $[0, 1]$. En el intervalo $[0, 1]$ la función:

$$g(x) = f(x) - 2 = x \cdot e^x - 2.$$



Es continua en el intervalo $[0, 1]$,

$g(0) = 0 \cdot e^0 - 2 = 0 - 2 = -2 < 0$,

$g(1) = 1 \cdot e^1 - 2 = e - 2 > 0$. Tiene distinto signo en los extremos. Luego

$g(x)$ tiene al menos una raíz real en $[0, 1]$. Por lo tanto

$$Existe\ al\ menos\ un\ x_0 \in [0, 1]\ de\ manera\ que\ \ f(x_0) = 2$$

$c)$ Debemos integrar la función en cada uno de los subintervalos:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x) \cdot dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sen\ x \cdot dx + \int_{0}^{1} x \cdot e^x \cdot dx$$

La primera integral es inmediata y la segunda la hacemos por partes:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sen\ x \cdot dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -\cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 0 = -1$$

$$-\cos 0 + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 0 = -1$$

Utilizamos el método de integración por partes: $\int u dv = uv - \int v du$

I	$u = x$	$du = dx$
	$v = \int e^x dx = e^x$	$dv = e^x dx$

Sustituimos:

$\int_0^1 x \cdot e^x \cdot dx = [x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx]_0^1 = [x \cdot e^x - e^x]_0^1 = (1 \cdot e^1 - e^1) - (0 \cdot e^0 - e^0) = 1.$

Por lo tanto: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x) \cdot dx = -1 + 1 = 0.$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x) \cdot dx = \mathbf{0}$$

Problema B.3:

Sean los planos $\pi_1 \equiv x+y=1$ y $\pi_2 \equiv x+z=1$.

a) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) Halle la recta que pasa por el punto $P(0,2,0)$ y es perpendicular al plano π_2.

c) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes Xe Y.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/LQ_4yL6udS0

a) La distancia del origen de coordenadas al plano $Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula:

$$d(O,\pi)=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Todos los planos paralelos al plano $\pi_1 \equiv x+y-1=0$ tienen por expresión general:

$$\pi \equiv x+y+D=0.$$

Aplicamos la fórmula al plano $\pi \equiv x+y+D=0$:

$$d(O,\pi)=2 \rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{|D|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |D|=2\sqrt{2} \rightarrow D_1=-2\sqrt{2}, D_2=2\sqrt{2}.$$

Los planos pedidos son:

$$\boldsymbol{\pi' \equiv x+y-2\sqrt{2}=0 \ y \ \pi'' \equiv x+y+2\sqrt{2}=0}$$

b) Un vector normal del plano π_2 es $\overrightarrow{n_2}=(1,0,1)$, por lo que la recta r pedida lo tendrá como vector director. Como además conocemos un punto $P(0,2,0)$, sus ecuaciones paramétricas son:

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2 \\ z=\lambda \end{cases}}$$

c) Buscamos los puntos de intersección del plano $\pi_1 \equiv x+y-1=0$ con los ejes Xe Y:

$$Eje\ X: \left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv x+y-1=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \rightarrow x-1=0;\ \ x=1 \rightarrow A(1,0,0).$$

$$Eje\ Y: \left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv x+y-1=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \rightarrow y-1=0;\ \ y=1 \rightarrow B(0,1,0).$$

La distancia entre los puntos $A(1,0,0)$ y $B(0,1,0)$ es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(0,1,0)-(1,0,0)]=(-1,1,0).$$

$$d(\overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{d(\overrightarrow{AB})=\sqrt{2}\,u}$$

Problema B.4:

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

$c)$ ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2" y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?

$d)$ ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

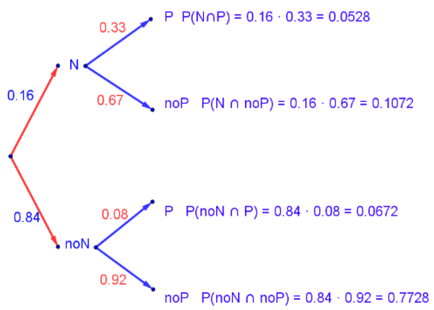
Solución:

video

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/VIK1B2OO7Bg

Denominamos por N a superar el nivel permitido de NO_2, y P a superar el nivel permitido de partículas. Llevamos a un diagrama de árbol los datos del enunciado. Comprobamos operaciones viendo que las probabilidades en cada nudo suman 1, y que:

$$0.0528 + 0.1072 + 0.0672 + 0.7728 = 1.$$



$a)$ Debemos calcular:

$$P(N \cap P) = P(N) \cdot P(P/N) = 0.16 \cdot 0.33 = 0.0528$$

La probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos es de $\mathbf{0.0528}$.

$b)$ Utilizamos el suceso contrario. La probabilidad pedida es igual a la unidad menos la probabilidad de que no se supere ninguno de los dos niveles:

$$1 - P(noN \cap noP) = 1 - 0.84 \cdot 0.02 = 1 - 0.7728 = 0.2272$$

La probabilidad de que se supere al menos uno de los dos niveles es $\mathbf{0.2272}$

$c)$ Dos sucesos $A \; y \; B$ son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(N) = 0.16; P(N \cap P) = 0.0528; P(P) = P(N \cap P) + P(noN \cap P) = 0.0528 + 0.0672 = 0.1200.$$

$$P(N) \cdot P(P) = 0.16 \cdot 0.12 = 0.0192 \neq 0.0528 = P(N \cap P).$$

Los sucesos **NO** son independientes

$d)$ Nos piden una probabilidad condicionada:

$$P(N|noP) = \frac{P(N \cap noP)}{P(noP)} = \frac{P(N) \cdot P(noP|N)}{1 - P(P)} = \frac{0.16 \cdot 0.67}{1 - 0.12} = \frac{0.1072}{0.88} = 0.1218.$$

La probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas es de $\mathbf{0.1218}$

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2020-2021**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (1.25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1) (0.5 puntos) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\operatorname{sen} x}$ a.2) (0.75 puntos) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}\right)$

(**Indicación**: use el cambio de variable $t = 1/x$ donde sea necesario).

b) (1.25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b.1) (0.5 puntos) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$ b.2) (0.75 puntos) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv x-1 = y+1 = \dfrac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

b) (0.75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.

c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

b) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (0.75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y, que tenga como soluciones $\{x=1, y=2\}$ y $\{x=0, y=0\}$.

b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x &= \lambda \\ y &= \lambda - 2 \\ z &= \lambda - 1 \end{cases}$$

c) (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, que solo tenga como solución a $x=1$ e $y=2$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = x^3 - |x| + 2.$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.

c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abcisas $y=0$, y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.

b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s.

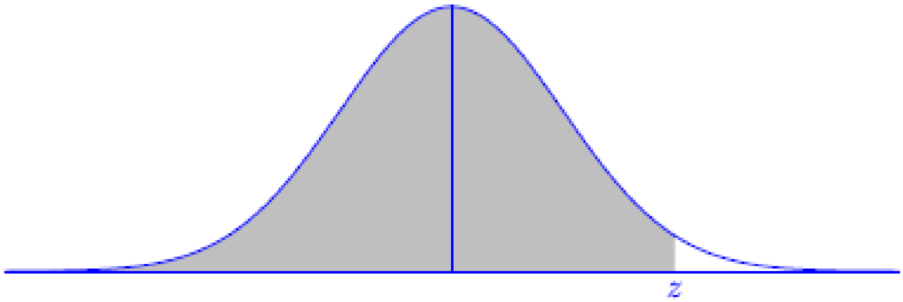
B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

b) (1.5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

Por plantear correctamente cada ecuación: 0.5 puntos. Resolución correcta del sistema planteado: 1 punto. Se darán como máximo 0.5 puntos si se resuelve correctamente un sistema que esté mal planteado.

Estándares de aprendizaje evaluados: Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

A.2.

a.1) Por cada aplicación correcta de L'Hôpital:0.25 puntos.
a.2) Por el cambio de variable: 0.5 puntos. Aplicación de L'Hôpital: 0.25 puntos.
b.1) Por resolver correctamente la integral: 0.5 puntos.
b.2) Por cada integración por partes correcta: 0.25 puntos. Por aplicar correctamente la regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

A.4.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Uso correcto de las fórmulas de Bayes y de la probabilidad total: 1 punto. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

B.1.

En los apartados **a)** y **c)**, dar el ejemplo 0.5 puntos; justificación de que cada ejemplo cumple el enunciado, 0.25 puntos. En el apartado **b)**, llegar al sistema 0.75 puntos; justificación, 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.

B.2.

a) Continuidad: 0.25 puntos. Derivabilidad: 0.5 puntos (repartidos en 0.25 por el planteamiento, y 0.25 por los cálculos).
b) Decidir que $x = 0$ es extremo: 0.25 puntos. Hallar el otro punto crítico: 0.5 puntos. Demostrar que es mínimo: 0.25 puntos.
c) Hallar la primitiva: 0.25 puntos. Aplicar la regla de Barrow: 0.25 puntos. Resultado: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

B.3.

a) Planteamiento: 1 punto. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

B.4.

a) Por identificar la binomial 0.5 puntos. Por expresar la probabilidad 0.5 puntos.
b) Cálculo de parámetros de la normal: 0.5 puntos. Cálculo de la probabilidad: 1 punto (planteamiento: 0.5 puntos; resolución: 0.5 puntos).

Estándares de aprendizaje evaluados: Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar. Conoce las características y los parámetros de la distribución Normal y valora su importancia en el mundo científico. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

RESPUESTAS OPCIÓN A

Problema A.1:

Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

Solución:

video

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente *https://youtu.be/p4XUv7lK4NU*

Llamamos x, y, z al número de seguidores que tienen en la red social Sara, Cristina y Jimena, respectivamente.

Escribimos un sistema de ecuaciones lineales siguiendo el enunciado

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=15\,000 \\ (1-0.25)z=3x \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{5}y=\frac{1}{4}z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=15\,000 \\ 0.75z=3x \\ 10x+4y=5z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=15\,000 \\ 4x-z=0 \\ 10x+4y-5z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow z=4x.$$

Como $z = 4x$ eliminamos la incógnita z del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+4x=15\,000 \\ 10x+4y-20x=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 5x+y=15\,000 \\ -5x+2y=0 \to 2y=5x \end{array}\right\} \to 3y=15\,000 \to \ y=5\,000.$$

Sustituimos el valor de y en la ecuación: $5x + y = 15\,000$

$$5x+5\,000=15\,000 \to \ 5x=10\,000 \to \ x=2\,000. \quad z=8\,000.$$

Sara tiene $2\,000$ seguidores, Cristina tiene $5\,000$, y Jimena $8\,000$

Problema A.2:

a) (1.25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1) (0.5 puntos) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\operatorname{sen} x}$ a.2) (0.75 puntos) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}\right)$

(**Indicación**: use el cambio de variable $t = 1/x$ donde sea necesario).

b) (1.25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b.1) (0.5 puntos) $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$ b.2) (0.75 puntos) $\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/DC2b9f2Lzyk

video

$a_1)$ $L = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-sen\,x} = \frac{0^2\cdot(1-0)}{0-2\cdot 0^2-sen\,0}$, se anulan tanto el numerador como el denominador por lo que aplicamos la **Regla de L'Hôpital**, derivando numerador y denominador:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot(1-2x)+x^2\cdot(-2)}{1-4x-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-4x^2-2x^2}{1-4x-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-6x^2}{1-4x-\cos x} = \frac{0}{1-0-1}$$

Vuelve a salir una indeterminación del mismo tipo, por lo volvemos a aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2-12x}{-4+sen\,x} = \frac{2-0}{-4+sen\,0} = \frac{2}{-4+0} = -\frac{1}{2}$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-sen\,x} = -\frac{1}{2}$$

$$a_2)\ \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{sen\,\frac{1}{x}}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x\cdot sen\,\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2} - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x\cdot sen\,\frac{1}{x}} = 0 - \frac{2}{\infty\cdot 0}$$

El límite del primer sumando es 0, y el segundo tiene una indeterminación del tipo $\infty\cdot 0$. Para calcularlo hacemos operaciones y aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{x\cdot sen\,\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{sen\,\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cdot cos\,\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to\infty}\frac{2}{cos\,\frac{1}{x}} = -\frac{2}{\cos 0} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{sen\,\frac{1}{x}}\right)\right] = -2$$

$b_1)$ Es una integral inmediata de tipo logaritmo. Podemos hacer el cambio de variable

$$x^2-1 = t \ \rightarrow 2x\cdot dx = dt$$

Autor: Javier Rodrigo Hitos

$I = \int \frac{x}{x^2-1} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot Lt + C = \frac{1}{2} \cdot L|x^2-1| + C \Rightarrow$

$$I = \int \frac{x}{x^2-1} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot L|x^2-1| + C$$

$b_2)$ $I = \int_0^1 x^2 e^{-x} \cdot dx$. Hacemos la integral indefinida

La segunda integral se puede resolver por partes.

Utilizamos el método de integración por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

I	$u = x^2$	$du = 2x \cdot dx$
	$v = -e^{-x}$	$dv = e^{-x} \cdot dx$

Sustituimos:

$$\int x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx = x^2 \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot 2x \cdot dx = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \int x \cdot e^{-x} \cdot dx$$

El segundo sumando volvemos a hacerlo por partes: $\int x \cdot e^{-x} \cdot dx$

I	$u = x$	$du = dx$
	$v = -e^{-x}$	$dv = e^{-x} \cdot dx$

$\int x \cdot e^{-x} \cdot dx = x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$

Sustituimos el valor de esta integral:

$$\int x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot \int x^2 \cdot e^{-x} \cdot dx = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot [-e^{-x}(x+1)] + C =$$

$= -x^2 e^{-x} - 2 \cdot e^{-x}(x+1) + C \Rightarrow I = \int x^2 e^{-x} \cdot dx = -e^{-x}(x^2+2x+2) + C.$

Aplicamos los límites de integración:

$I = \int_0^1 x^2 e^{-x} \cdot dx = [-e^{-x}(x^2+2x+2)]_0^1 = -[e^{-1}(1^2+2 \cdot 1+2)] + [e^{-0}(0^2+2 \cdot 0+2)] =$

$= -\frac{1+2+2}{e} + 2 = 2 - \frac{5}{e} \Rightarrow$

$$I = \int_0^1 x^2 e^{-x} \cdot dx = 2 - \frac{5}{e}$$

Problema A.3:

Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv x-1 = y+1 = \dfrac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

b) (0.75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.

c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.

Solución:

video

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente *https://youtu.be/Px6bNWm1k9Y*

$a)$ Un vector director de la recta r es $\vec{v_r} = (1,1,2)$, que es, a su vez, el vector normal del plano perpendicular a la recta.
Un vector normal del plano $\pi \equiv x+y-z=6$ es $\vec{n} = (1,1,-1)$.
El ángulo que forman los dos planos es el mismo que el que forman sus vectores normales.
Hallamos el producto escalar de los dos vectores normales encontrados:

$$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) = 0$$

Como el producto escalar es cero, los vectores son ortogonales.

Los planos son perpendiculares, forman un ángulo de $\mathbf{90°} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ radianes

$b)$ Al ser el vector de dirección de la recta ortogonal al vector normal al plano, recta y plano son paralelos por lo que tiene sentido calcular la distancia entre recta y plano, para ello podemos calcular la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. Un punto de la recta es $P(1,-1,2)$

La distancia de un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ a un plano $Ax+By+Cz+D=0$ es: $d(P,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.
Por tanto:

$$d(r,\pi) = d(P,\pi) = \frac{|1\cdot 1+1\cdot(-1)-1\cdot 2-6|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|1-1-2-6|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

$$\boldsymbol{d(r,\pi)} = \frac{\mathbf{8}}{\sqrt{\mathbf{3}}} = \frac{\mathbf{8}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{u}.$$

$c)$ Buscamos una recta s que no corte al plano π por lo que debe ser paralela a él, es decir, el vector director de s tiene que ser perpendicular al vector normal de π, $\vec{n} = (1,1,-1)$. También sabemos que el vector director de s es perpendicular al vector director de r, $\vec{v_r} = (1,1,2)$, por lo cual, el vector director de s tiene la misma dirección que el producto vectorial $\vec{n} \times \vec{v_r}$:

$$\vec{n} \times \vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2i - j + k - k + i - 2j = 3i - 3j \rightarrow (3.-3.0) \rightarrow \vec{v_s} = (1,-1,0)$$

La recta pedida pasa por $A(1,0,-1)$ y tiene de vector de dirección: $\vec{v_s} = (1,-1,0)$, luego su ecuación paramétrica es:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1}; z = -1$$

Problema A.4:

En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

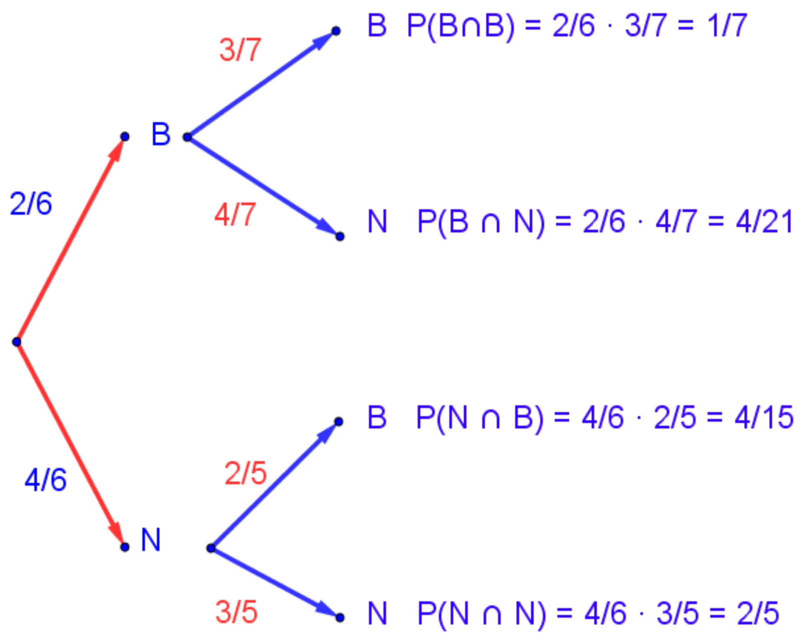
b) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

Solución:

video

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/wTM9DjSwHfU

Llamamos A al suceso sacar bola blanca y N a sacar bola negra. Dibujamos un diagrama de árbol con los datos del problema:



a) Para que las dos bolas extraídas sean de distinto color tiene que ser

$$P = P(B, N) + P(N, B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{21} + \frac{4}{15} = \frac{20+28}{105} = \frac{48}{105} = \frac{16}{35} \cong 0.45714.$$

La probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color es $\mathbf{\frac{16}{35} \cong 0.45714}$

b) Ahora es una probabilidad condicionada a que la segunda bola sea blanca. Miramos las probabilidades en el árbol:

$$P = P(N/B) = \frac{P(N \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{7}+\frac{4}{15}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{15+28}{105}} = \frac{4\cdot 7\cdot 15}{15\cdot 43} = \frac{4\cdot 7}{43} = \frac{28}{43} \cong 0.65116.$$

La probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra sabiendo que la segunda bola ha sido blanca es $\mathbf{\frac{28}{43} \cong 0.65116}$

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

a) (0.75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y, que tenga como soluciones $\{x = 1, y = 2\}$ y $\{x = 0, y = 0\}$.

b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x &= \lambda \\ y &= \lambda - 2 \\ z &= \lambda - 1 \end{cases}$$

c) (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, que solo tenga como solución a $x = 1$ e $y = 2$.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/jGrr0i6er5g

$a)$ Por dos puntos pasa una recta, en este caso $y = 2x$. Por tanto, se trata de encontrar un sistema compatible e indeterminado, con lo que sus dos ecuaciones deben ser linealmente dependientes.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{array}\right\}$$

$b)$ Ahora buscamos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, compatible indeterminado, ya que su solución debe la recta dada, que pasa por el punto $(0, -2, -1)$. Llamamos a x el valor del parámetro y tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} y = x - 2 \\ z = x - 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ x - z = 1 \end{array}\right\}$$

$c)$ Se trata de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, dos de las cuales son linealmente independientes y con soluciones $x = 1\ e\ y = 2$, y la tercera es combinación lineal de las dos primeras. Podría ser el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2\,x - y = 0 \\ x + y = 3 \\ x - 2y = -3 \end{array}\right\}$$

Pero hay infinitas soluciones

Problema B.2:

Sea la función

$$f(x) = x^3 - |x| + 2.$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.

c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abcisas $y = 0$, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente ***https://youtu.be/-HCRhLIu6A8***

La función valor absoluto es continua pero no es derivable en el origen. Su definición es:

$|x| = \begin{cases} -x & si \ \ x < 0 \\ x & si \ \ x \geq 0 \end{cases}$, la función $f(x)$ puede redefinirse de la forma: $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2 & si \ \ x < 0 \\ x^3 - x + 2 & si \ \ x \geq 0 \end{cases}$.

$a)$ La función $f(x)$ es suma de funciones continuas luego es una función continua en toda la recta real. Si la consideramos una función definida a trozos, formada por dos funciones polinómicas es único caso dudoso es el de unión de los trozos. Estudiamos la derivabilidad en el origen:

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

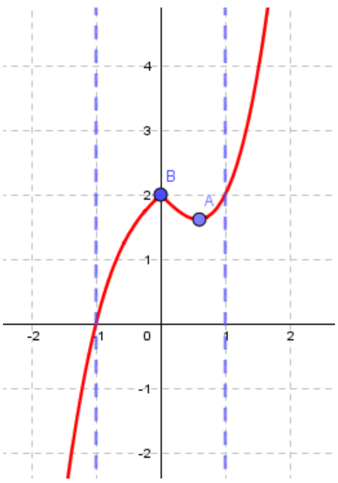
$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 \ si \ x < 0 \\ 3x^2 - 1 \ si \ x > 0 \end{cases}$, luego para $x = 0$, $f'(0) = \begin{cases} 1 & si \ x < 0 \\ -1 & si \ x > 0 \end{cases}$ por lo que no es derivable en 0.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

La función es continua en toda la recta real. La función NO es derivable en $x = 0$. Por tanto $f(x)$ es derivable en $R - \{0\}$

$b)$ Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto en el que exista la derivada, es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x \notin R \\ 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$



Usamos la segunda derivada

$f''(x) = \begin{cases} 6x & si \ \ x < 0 \\ 6x & si \ \ x > 0 \end{cases} \rightarrow f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} > 0 \rightarrow$ Hay un mínimo en $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 = \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 18}{9} = \frac{18 - 2\sqrt{3}}{9}$$

El punto $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{18-2\sqrt{3}}{9}\right) \approx A(0.6, 1.62)$ es un mínimo relativo

Estudiamos el punto $B(0,2)$ en el que no existe la derivada.

Como $f'(0)=\begin{cases}1 & si\ \ x<0\\ -1 & si\ \ x>0\end{cases}$, antes de $B(0,2)$ la función es creciente, y después es decreciente, luego el punto $B(0,2)$ es un máximo relativo.

$A\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{18-2\sqrt{3}}{9}\right)\approx A(0.6,1.62)$ es un mínimo relativo y $B(0,2)$ es un máximo relativo

$c)$ En $(-1,1)$ todas las ordenadas de la función $f(x)$ son positivas, por lo que la superficie pedida es:

$$S=\int_{-1}^{1}f(x)\cdot dx=\int_{-1}^{0}(x^3+x+2)\cdot dx+\int_{0}^{1}(x^3-x+2)\cdot dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{0}^{1}$$

$$=0-\left[\frac{(-1)^4}{4}+\frac{(-1)^2}{2}+2\cdot(-1)\right]+\left(\frac{1^4}{4}-\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right)-0=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2=4-1=3.$$

$$\boldsymbol{S=3\ u^2}$$

Problema B.3:

Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.

b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/FcKSWKmKi0U

a) De las rectas r y s sabemos: Un punto y un vector director de la recta r son $A(2,-1,-4)$ y $\vec{v_r} = (1,1,-3)$. Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta s

$$s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases} \rightarrow z=\lambda; \;\; x=2-\lambda; \;\; y=1+2x+2z; \; y=1+4-2\lambda+2\lambda=5 \;\rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=5 \\ z=\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta s son $B(2,5,0)$ y $\vec{v_s} = (1,0,-1)$.

Como los vectores $\vec{v_r}$ y $\vec{v_s}$ son linealmente independientes, las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso buscamos un vector de origen $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$:

$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2,5,0)-(2,-1,-4)] = (0,6,4) = \;\vec{w}.$

Según que los vectores $\{\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan.

$Rang\ \{\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{w}\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -18+6-4 \neq 0 \rightarrow Rang\ \{\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{w}\} = 3 \rightarrow$ Los vectores son NO coplanarios por lo que las rectas se cruzan.

El vector director de la recta t perpendicular a r y s es uno de igual dirección que el producto vectorial de los vectores directores de las rectas $r\ y\ s$.

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -i-3j-k+j = -i-2j-k \Rightarrow \vec{v_t} = (1,2,1).$$

Buscamos los planos que tengan a dicho vector como vector de orientación, a) π_1 pase por un punto de r y tenga como el otro vector de orientación el vector de dirección de r, y b) π_2 pase por un punto de s y tenga como el otro vector de orientación el vector de dirección de s:

$$\pi_1(A;\, \vec{v_r}, \vec{v_t}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$(x-2)-3(y+1)+2(z+4)-(z+4)+6(x-2)-(y+1)=0=$

$7(x-2)-4(y+1)+(z+4)=7x-14-4y-4+z+4=0$

$\pi_1 \equiv 7x-4y+z-14=0.$

$$\pi_2(B;\ \overrightarrow{v_s},\overrightarrow{v_t}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$-(y-5)+2z+2(x-2)-(y-5)=0=\ 2(x-2)-2(y-5)+2z=$

$$2x-4-2y+10+2z=0=\ 2x-2y+2z+6$$

$\pi_2 \equiv x-y+z+3=0.$

La recta pedida es la intersección de los planos π_1 y π_2:

$$\begin{cases} 7x-4y+z-14=0 \\ x-y+z+3=0 \end{cases}$$

$b)$ Las ecuaciones paramétricas de las rectas tienen las siguientes expresiones:

$$r \equiv \begin{cases} x=2+\mu \\ y=-1+\mu \\ z=-4-3\mu \end{cases} \quad y\ s \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=5 \\ z=\lambda \end{cases}.$$

Un punto cualquiera de cada una de las rectas es:

$P \in r \Rightarrow P(2+\mu,-1+\mu,-4-3\mu)\ y\ Q \in s \Rightarrow Q(2-\lambda,5,\lambda).$

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(\mu+\lambda,-6+\mu,-4-3\mu-\lambda).$

Imponemos que este vector sea perpendicular a ambas rectas:

$$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{v_r}=0 \rightarrow (\mu+\lambda,-6+\mu,-4-3\mu-\lambda)\cdot(1,1,-3)=0=\mu+\lambda-6+\mu+12+9\mu+3\lambda$$

$$11\mu+4\lambda=-6.$$

$$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{v_s}=0 \rightarrow (\mu+\lambda,-6+\mu,-4-3\mu-\lambda)\cdot(1,0,-1)=0=\mu+\lambda+4+3\mu+\lambda=\ 4\mu+2\lambda+4$$

$$2\mu+\lambda=-2.$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 11\mu+4\lambda=-6 \\ 2\mu+\lambda=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 11\mu+2\lambda=-6 \\ -8\mu-4\lambda=8 \end{array}\right\} \rightarrow 3\mu=2 \rightarrow \mu=\tfrac{2}{3}. \rightarrow \tfrac{4}{3}+\lambda=-2 \rightarrow\ 4+3\lambda=-6 \rightarrow \lambda=-\tfrac{10}{3}.$$

Los puntos resultan ser:

$$P(2+\mu,-1+\mu,-4-3\mu) \approx P\left(2+\tfrac{2}{3},-1+\tfrac{2}{3},-4-2\right) \approx P\left(\tfrac{8}{3},-\tfrac{1}{3},-6\right).$$

$$Q(2-\lambda,5,\lambda) \approx Q\left(2+\tfrac{10}{3},5,-\tfrac{10}{3}\right) \approx Q\left(\tfrac{16}{3},5,-\tfrac{10}{3}\right).$$

La distancia pedida es el módulo del vector $\overrightarrow{QP}$:

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\left(\tfrac{8}{3},-\tfrac{1}{3},-6\right)-\left(\tfrac{16}{3},5,-\tfrac{10}{3}\right)=\left(-\tfrac{8}{3},-\tfrac{16}{3},-\tfrac{8}{3}\right).$

$d_{(r,s)}=\left|\overrightarrow{QP}\right|=\tfrac{8}{3}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\tfrac{8}{3}\cdot\sqrt{6}=\tfrac{8\cdot\sqrt{6}}{3}.$

$$d(r,s)=\mathbf{\frac{8\sqrt{6}}{3}} \approx \mathbf{6.532}\ u$$

Problema B.4:

Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

b) (1.5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

Solución:

video

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente https://youtu.be/2RMh10drD6w

a) Como o llueve o no llueve, se trata de una distribución binomial de la que sabemos que:

$p = 0.45;\ \ q = 1 - p = 0.55;\ \ n = 100;\ \ r = 40.$

En una distribución binomial, la probabilidad de que de n elementos, r sean favorables es:

$$P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$$

$$P(40) = \binom{100}{40} \cdot 0.45^{40} \cdot 0.55^{60} = 1.3746 \cdot 10^{28} \cdot 0.45^{40} \cdot 0.55^{60}.$$

La probabilidad de que haya 40 días de lluvia es:

$$P(40) = \binom{100}{40} \cdot 0.45^{40} \cdot 0.55^{60} = 1.3746 \cdot 10^{28} \cdot 0.45^{40} \cdot 0.55^{60}.$$

b) Vamos a aproximar la distribución binomial $B(n, p) = B(100, 0.45)$ por una distribución normal, ya que $n \cdot p > 5\ y\ nq > 5 \to \begin{Bmatrix} 100 \cdot 0.45 = 45 \\ 100 \cdot 0.55 = 55 \end{Bmatrix}.$

$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0.45 = 45.\qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0.45 \cdot 0.55} = \sqrt{24.75} \cong 4.98.$

$X = B(100,\ 0.45) \approx N(45,\ 4.98).$

Tipificamos la variable: $Z \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-45}{4.98}$ y consideramos la corrección de Yates:

$$P = P(39.5 \leq X \leq 40.5) = P\left(\frac{39.5-45}{4.98} \leq Z \leq \frac{40.5-45}{4.98}\right) =$$

$= P\left(\frac{-5.5}{4.98} \leq Z \leq \frac{-4.5}{4.98}\right) = P(-1.10 \leq Z \leq -0.90) = P(0.90 \leq Z \leq 1.10)$

$= P(Z \leq 1.10) - P(Z \leq 0.90) = = 0.8665 - 0.8159 = 0.0506.$

La probabilidad de que llueva 40 días es aproximadamente de $\mathbf{0.05}$ días