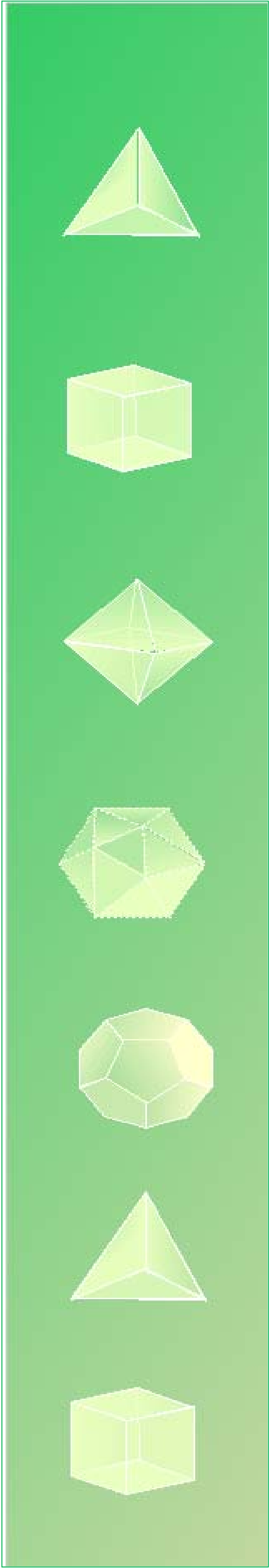


MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

MURCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Sánchez

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2021 - **JUNIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a+2 \end{cases}$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **[1,5 p.]** Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

b) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX - B = C^t$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C.

3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).

Se quiere diseñar una lata de refresco de forma cilíndrica, con tapas inferior y superior. El material para las tapas tiene un coste de 5 euros cada cm^2 y el material para el resto del cilindro tiene un coste de 3 euros cada cm^2.

a) **[1 p.]** Si denotamos por x el radio de las tapas y por y la altura de la lata, demuestre que el coste total del material necesario para construir dicha lata viene dado por $10\pi x^2 + 6\pi xy$.

b) **[1,5 p.]** Si el volumen de la lata es 90π cm^3, determine sus dimensiones (radio y altura) para que el coste del material sea mínimo.

El examen continúa por detrás

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2021 - **JUNIO**

4: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

a) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

b) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int x^2\ln(x)\,dx$. Determine la primitiva de la función $f(x)=x^2\ln(x)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(1,0)$.

5: Considere los planos de ecuaciones $\pi_1: x-y+z=0$ y $\pi_2: x+y-z=2$.

a) **[1 p.]** Compruebe que los planos se cortan y calcule la ecuación de la recta r determinada por la intersección de ambos planos.

b) **[1,5 p.]** Compruebe que el punto $A=(3,2,1)$ no está en π_1 ni en π_2 y calcule la ecuación del plano π_3 que contiene a la recta r y pasa por el punto A.

6: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

Considere los puntos $A=(a,4,3)$, $B=(0,0,5)$ y $C=(0,3,-1)$.

a) **[1 p.]** Calcule los valores de a para los cuales el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en el vértice A.

b) **[1,5 p.]** Tomando el valor de $a=3$, determine la ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es paralelo a la recta dada por $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ 2x+y & = & 3 \end{array}\right.$

7: Un estudio revela que el 10 % de los hombres son daltónicos y que el 1 % de las mujeres son daltónicas. Según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5 % de hombres y un 49,5 % de mujeres. Determine:

a) **[1 p.]** La probabilidad de que una persona elegida al azar sea daltónica.

b) **[1 p.]** Si una persona es daltónica, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) **[0,5 p.]** ¿Son independientes los sucesos "ser una persona daltónica" y "ser mujer"?

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La velocidad de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 120 km/h sigue una distribución normal de media μ km/h y desviación típica σ =10 km/h. Se sabe que el 69,15 % de los vehículos no sobrepasan la velocidad de 130 km/h.

a) **[0,75 p.]** Calcule la media de esta distribución.

b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es el porcentaje de vehículos que no sobrepasan la velocidad máxima permitida?

c) **[1 p.]** La DGT establece una multa de 100 euros a los vehículos que viajan entre 120 y 150 km/h ¿Cuál es la probabilidad de ser sancionado con dicha multa?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases}$ en función del parámetro a.

$a)$ Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.

$b)$ Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

$c)$ Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 1 + 1 + a - a - 1 = 0;\ \ 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 1.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a, es 3 si $a \neq -1$ o si $a \neq 1$. Luego para esos casos el sistema tiene igual rango, 3, para la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada, e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema tiene solución única, es compatible y determinado.

$b)$ Para $a = -1$, $M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene dos filas iguales por lo que su rango es 2, igual al rango de la matriz de los coeficientes y menor que el número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

Para $a = -1$ el sistema es $\left.\begin{array}{r} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\}$. Hacemos $z = -\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y = 4 - \lambda \\ x + y = 1 - \lambda \end{array}\right\} \to 2y = 5 - 2\lambda \to \ \ y = \tfrac{5}{2} - \lambda;\ \left.\begin{array}{r} x - y = -4 + \lambda \\ x + y = 1 - \lambda \end{array}\right\} \to 2x = -3 \to \ \ x = -\tfrac{3}{2}.$$

$$x = -\frac{3}{2};\ \ y = \frac{5}{2} - \lambda;\ \ z = \lambda, \forall \lambda \in R$$

$c)$ Para $a = 1, M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 1 + 4 - 1 - 3 = 2 \neq 0$

Para $a = 1$, luego su rango es 3, distinto del de la matriz de los coeficientes que es 2, por lo que el sistema es incompatible, no tiene solución.

Problema 2:

Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&2&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\2&1\end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

$a)$ Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su inversa.

$b)$ Resuelva la ecuación matricial $AX-B=C^t$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C.

Solución:

$a)$ Una matriz cuadrada es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&2&2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$$

Luego A es regular, tiene inversa.

$$A^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&0&2\end{pmatrix};\ Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\0&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$b)$ $A\cdot X-B=C^t\rightarrow\ A\cdot X=C^t+B\rightarrow\ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(C^t+B)\rightarrow\ X=A^{-1}\cdot(C^t+B)$

$$C^t+B=\begin{pmatrix}-2&1\\0&-1\\-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-2\\1&2\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot(C^t+B)=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\0&-2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-2\\2&3\end{pmatrix}.$$

$$X=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-2\\2&3\end{pmatrix}$$

Problema 3:

En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado $a)$ para realizar el apartado $b)$, aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado $a)$.

Se quiere diseñar una lata de refresco de forma cilíndrica, con tapas inferior o superior. El material para las tapas tiene un coste de 5 euros cada cm^2 y el material para el resto del cilindro tiene un coste de 3 euros cada cm^2.

$a)$ Si denotamos por x el radio de las tapas y por y la altura de la lata, demuestre que el coste total del material necesario para construir dicha lata viene dado por la expresión $10\pi x^2 + 6\pi xy$.

$b)$ Si el volumen de la lata es $90\pi\ cm^3$, determine sus dimensiones (radio y altura) para que el coste del material sea mínimo.

Solución:

$a)$ La superficie de las tapas en cm^2 es: $S_{Tapas} = 2 \cdot \pi \cdot x^2$.

La superficie lateral en cm^2 es: $S_{Lateral} = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot y$.

$$Coste = 5 \cdot S_{Tapas} + 3 \cdot S_{Lateral} = 5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x^2 + 3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot x \cdot y = 10\pi x^2 + 6\pi xy$$

Como había que demostrar.

$b)$ $V = S_{Base} \times Altura = \pi \cdot x^2 \cdot y = 90 \cdot \pi \to y = \frac{90}{x^2}$.

Sustituimos el valor obtenido de y en la expresión del coste:

$Coste = C(x) = 10\pi x^2 + 6\pi x \cdot \frac{90}{x^2} = \frac{10\cdot\pi\cdot x^3 + 540\cdot\pi}{x} = 10\pi \cdot \frac{x^3+54}{x}$.

La condición necesaria para que el coste sea mínimo es que se anule su primera derivada:

$C'(x) = 10\pi \cdot \frac{3x^2\cdot x - (x^3+54)\cdot 1}{x^2} = 10\pi \cdot \frac{3x^3 - x^3 - 54}{x^2} = 10\pi \cdot \frac{2x^3-54}{x^2} = 20\pi \cdot \frac{x^3-27}{x^2}$.

$C'(x) = 0 \Rightarrow 20\pi \cdot \frac{x^3-27}{x^2} = 0;\ \ x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x = 3.$

$y = \frac{90}{x^2} = \frac{90}{3^2} = \frac{90}{9} = 10.$

$$El\ coste\ es\ mínimo\ con\ radio\ de\ 3\ cm\ y\ altura\ de\ 10\ cm$$

Veamos que se trata de un mínimo. La segunda derivada del coste tiene que ser positiva para $x = 3$:

$C''(x) = 20\pi \cdot \frac{3x^2\cdot x^2 - (x^3-27)\cdot 2x}{x^4} = 20\pi \cdot \frac{3x^3 - 2x^3 + 54}{x^3} = 20\pi \cdot \frac{2x^3+54}{x^3} = 40\pi \cdot \frac{x^3+27}{x^3}$.

$$C''(3) = 40\pi \cdot \frac{3^3+27}{3^3} = 80\pi > 0$$

En efecto es un mínimo.

Problema 4:

En este ejercicio las cuestiones $a)$ y $b)$ son totalmente independientes.

$a)$ Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

$b)$ Calcule la integral indefinida: $I=\int x^2\cdot ln(x)\cdot dx$. Determine la primitiva de la función $f(x)=x^2\cdot ln(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $P(1,0)$.

Solución:

$a)$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$$

$b)$ Integramos por partes: $u=Lx\to du=\frac{1}{x}\cdot dx;\ x^2\cdot dx=dv\to v=\frac{x^3}{3}$

$I=\int x^2\cdot ln(x)\cdot dx=Lx\cdot\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=\frac{x^3}{3}\cdot Lx-\frac{1}{3}\cdot\int x^2\cdot dx=\frac{x^3}{3}\cdot Lx-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C=\frac{x^3}{9}\cdot(3Lx-1)+C.$

Las funciones primitivas son:

$F(x)=\frac{x^3}{9}\cdot(3Lx-1)+C.$

Imponemos que pase por el punto $P(1,0)$, por lo que $F(1)=0$:

$F(1)=\frac{1^3}{9}\cdot(3\cdot L1-1)+C=0=\ \frac{1}{9}\cdot(3\cdot0-1)+C\Rightarrow C=\frac{1}{9}.$

$$F(x)=\frac{x^3}{9}\cdot(3Lx-1)+\frac{1}{9}$$

Problema 5:

Considere los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y - z = 2$.

$a)$ Compruebe que los planos se cortan y calcule la ecuación de la recta r determinada por la intersección de ambos planos.

$b)$ Compruebe que el punto $A(3,2,1)$ no está en π_1 ni en π_2 y calcule la ecuación del plano π_3 que contiene a la recta r y pasa por el punto A.

Solución:

$a)$

Dos planos son secantes (se cortan en una recta) cuando sus vectores ortogonales son linealmente independientes.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (1,-1,1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,1,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes, por lo que los planos dados son secantes.

La recta r que determinan los planos π_1 y π_2, expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas, es:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - y = -\lambda \\ x + y = 2 + \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x = 2;\;\; x = 1 \to 1 - y = -\lambda;\;\; y = 1 + \lambda \;\Rightarrow\; \underline{\quad}.$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de r son $P(1,1,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (0,1,1)$.

$b)$ Un punto pertenece a un plano cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{matrix} \pi_1 \equiv x - y + z = 0 \\ A(3,2,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3 - 2 + 1 \neq 0 \Rightarrow A \notin \pi_1.$$

$$\left.\begin{matrix} \pi_2 \equiv x + y - z = 2 \\ A(3,2,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3 + 2 - 1 \neq 2 \Rightarrow A \notin \pi_2.$$

Los puntos $P(1,1,0)$ y $A(3,2,1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = [(3,2,1) - (1,1,0)] = (2,1,1)$.

Ecuación del plano π_3:

$$\pi_3(A;\, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{PA}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = (x-3) + 2(y-2) - 2(z-1) - (x-3) =$$
$$2(y-2) - 2(z-1) \to (y-2) - (z-1) = 0 = \;\; y - 2 - z + 1 = 0 = y - z - 1 \;\Rightarrow \underline{= 0}.$$

$$\pi_3 \equiv y - z - 1 = 0$$

Problema 6:

En este ejercicio las cuestiones $a)\ y\ b)$ son totalmente independientes. Considere los puntos $A(a,4,3), B(0,0,5)\ y\ C(0,3,-1)$.

$a)$ Calcule los valores de a para los cuales el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en el vértice A.

$b)$ Tomando el valor de $a=3$, determine la ecuación del plano π que pasa por los puntos A y B y es paralelo a la recta $s \equiv \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$.

Solución:

$a)$ Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, de vértice en A, para comprobar si son ortogonales:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,0,5)-(a,4,3)] = (-a,-4,2)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(0,3,-1)-(a,4,3)] = (-a,-1,-4)$.

Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 = (-a,-4,2)\cdot(-a,-1,-4) = a^2+4-8 = a^2-4=0 \Rightarrow a_1=-2, a_2=2.$

$$El\ triángulo\ \widehat{ABC}\ es\ rectángulo\ en\ A\ para\ a=-2\ y\ a=2$$

$b)$ Para $a=3, A(3,4,3)\ y\ \overrightarrow{AB}=(-3,-4,2)$.

Un vector director de la recta s es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(2,1,0)$.

$$\overrightarrow{v_s'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2j+k+2k-i = -i+2j+3k \Rightarrow \overrightarrow{v_s}=(1,-2,-3).$$

Para determinar la ecuación del plano escogemos el punto $A(3,4,3)$ y los vectores de orientación del plano: $\overrightarrow{v_s}=(1,-2,-3)$ y $\overrightarrow{AB}=(-3,-4,2)$. La ecuación del plano es:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{v_s},\overrightarrow{AB}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 = -16(x-3)+7(y-4)-10(z-3)$$

$$16x-48-7y+28+10z-30 = 16x-7y+10z-50=0$$

$$\pi \equiv 16x-7y+10z-50=0$$

Problema 7:

Un estudio revela que el 10 % de los hombres son daltónicos y que el 1 % de las mujeres son daltónicas. Según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50.5 % de hombres y un 49.5 % de mujeres. Determine:

a) La probabilidad de que una persona elegida al azar sea daltónica.

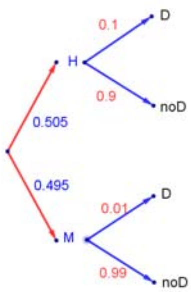
b) Si una persona es daltónica, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) ¿Son independientes los sucesos "ser una persona daltónica" y "ser mujer"?

Solución:

Llamamos H al suceso ser hombre, y M a ser mujer. Llamamos D al suceso ser daltónico.

Llevamos los datos del enunciado a un diagrama en árbol.



a) $P(D) = P(H \cap D) + P(M \cap D) = P(H) \cdot P(D/M) + P(M) \cdot P(D/M)$

$= 0.505 \cdot 0.10 + 0.495 \cdot 0.01 = 0.05050 + 0.00495 = 0.05545.$

La probabilidad de que una persona elegida al azar sea daltónica es de 0.05545

b) Es una probabilidad condicionada:

$$P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{P(M) \cdot P(D/M)}{0.05545} = \frac{0.495 \cdot 0.01}{0.05545} = \frac{0.00495}{0.05545} = 0.08927.$$

Si una persona es daltónica, la probabilidad de que sea mujeres de 0.08927.

c) Sabemos que dos sucesos D y M son independientes cuando $P(D \cap M) = P(D) \cdot P(M)$.

$P(D) \cdot P(M) = 0.05545 \cdot 0.495 = 0.02745 \neq P(D \cap M) = P(M) \cdot P(D/M) = 0.495 \cdot 0.01 = 0.00495.$

Los sucesos "ser una persona daltónica" y "ser mujer" no son sucesos independientes

Problema 8:

En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La velocidad de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 120 km/h sigue una distribución normal de media μ km/h y desviación típica $\sigma = 10$ km/h. Se sabe que el 69.15 % de los vehículos no sobrepasan la velocidad de 130 km/h.

$a)$ Calcule la media de esta distribución.

$b)$ ¿Cuál es el porcentaje de vehículos que no sobrepasan la velocidad máxima permitida?

$c)$ La DGT establece una multa de 100 euros a los vehículos que viajan entre 120 y 150 km/h. ¿Cuál es la probabilidad de ser sancionado con dicha multa?

Solución:

$a)$ El enunciado nos da los siguientes datos:

$\sigma = 10;\ \ P(X \leq 130) = 69.15\ \% = 0.6915.$

Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-\mu}{10}$.

$P\left(Z \leq \frac{X-\mu}{10}\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{130-\mu}{10}\right) = 0.6915.$

Buscamos en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, a 0.6915 le corresponde el valor 0.500, por lo cual:

$\frac{130-\mu}{10} = 0.5;\ \ 130 - \mu = 5 \Rightarrow \mu = 125\ km/h.$

$$\mu = 125\ km/h$$

$b)$ Conocemos $\mu = 125\ km/h$ y $\sigma = 10$;

$$P(X \leq 120) = P\left(Z \leq \frac{120-125}{10}\right) = P\left(Z \leq \frac{-5}{10}\right) = P(Z \leq -0.5) = P(Z > 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085.$$

El 30.85 % de los vehículos no sobrepasa los 120 km/h.

$c)$ $P(120 \leq X \leq 150) = P\left(\frac{120-125}{10} \leq Z \leq \frac{150-125}{10}\right) = P\left(\frac{-5}{10} \leq Z \leq \frac{25}{10}\right) = P(-0.5 \leq Z \leq 2.5) =$
$P(Z \leq 2.5) - [1 - P(Z \leq 0.5)] = P(Z \leq 2.5) - 1 + P(Z \leq 0.5) = 0.9938 - 1 + 0.6915 = 0.6853$

La probabilidad de ser sancionado es de 0.6853

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II

EBAU2021 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & az & = & 0 \\ x & + & 5y & - & az & = & a+1 \end{array}\right.$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Si se denota por $\text{tr}(A)$ la traza de la matriz A (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) y por $|A|$ el determinante de A, compruebe que, para cualquier valor de a, se cumple la ecuación $A^2 = \text{tr}(A)A - |A|I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.

b) **[0,5 p.]** Determine para qué valores de a la matriz A es regular (o inversible).

c) **[1 p.]** Para $a = -3$, resuelva la ecuación matricial $AX - A^t = A$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

3: Dada la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, se pide:

a) **[1,5 p.]** Calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos) y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

4: a) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int x\,\text{sen}(x^2)\,dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución).

b) **[1 p.]** Determine el menor valor de $a > 0$ para el cual se cumple $\int_0^a x\,\text{sen}(x^2)\,dx = 1$.

El examen continúa por detrás

UNIVERSIDAD DE MURCIA · Región de Murcia · Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2021 - **JULIO**

5: Considere las rectas de ecuaciones

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}$$

a) **[0,75 p.]** Compruebe que las rectas se cortan en un punto y calcule su punto de corte.

b) **[1 p.]** Determine el ángulo que forman las dos rectas.

c) **[0,75 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

6: Los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C se encuentra en la recta r dada por

$$r: \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del tercer vértice C sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por A y C.

b) **[1 p.]** Determine si el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en A y calcule su área.

7: Una urna contiene cinco bolas negras, numeradas del 1 al 5, y siete bolas blancas, numeradas del 1 al 7. Se saca de la urna una bola al azar. Calcule:

a) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola sea blanca.

b) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola esté numerada con un número par.

c) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola esté numerada con un número par, sabiendo que es una bola blanca.

d) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola sea blanca y esté numerada con un número par.

e) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola sea blanca, sabiendo que está numerada con un número par.

8: Juan es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Él se defiende diciendo que no es para tanto y que la tutora le tiene manía. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 9 días Juan llega tarde como mucho 2 días, la tutora le sube 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Juan llegue tarde a clase cada día es 0,45, determine:

a) **[1 p.]** El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Juan llega tarde a clase en los próximos 9 días. ¿Cuáles son sus parámetros?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que Juan consiga la ansiada subida de 1 punto en la nota final?

UNIVERSIDAD DE MURCIA   Región de Murcia   Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2021 - **JULIO**

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

OBSERVACIONES GENERALES:

El corrector deberá ajustarse a los criterios de evaluación establecidos en este documento y en la reunión correspondiente. En ningún caso se podrá puntuar por encima de la valoración indicada en cada apartado. Se procurará que, en lo posible, los errores en un apartado no afecten a otros apartados.

Los errores simples de cálculo restarán entre 0,1 y 0,25 puntos. Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar puntuación 0 en ese apartado. Si un error simple ha llevado a un problema más sencillo se disminuirá la puntuación.

Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución serán valoradas con 0 puntos.

Se valorará el correcto uso del vocabulario y de la notación. El alumno puede elegir el método que considere más oportuno para la resolución de una cuestión pero, si esto demuestra la falta de comprensión de conocimientos básicos, la puntuación final puede ser menor que la indicada para dicha cuestión.

OBSERVACIONES PARTICULARES:

CUESTIÓN 1: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene solución única (SCD) para todo valor de a distinto de 3 y de -1 **[0,75 p.]**.
Apartado b) Justificación correcta y razonada de que el sistema tiene infinitas soluciones (SCI) cuando $a=-1$ **[0,5 p.]**. Cálculo correcto de dicha solución dependiente de un parámetro **[0,5 p.]**.
Apartado c) Justificación correcta y razonada de que el sistema no tiene solución (SI) cuando $a=3$ **[0,75 p.]**.

CUESTIÓN 2: [2,5 p.]
Apartado a) Comprobación correcta y razonada de que A cumple la ecuación $A^2=\mathrm{tr}(A)A-|A|I$ para todo valor de a **[1 p.]**.
Apartado b) Justificación de que A es una matriz regular si $a\neq -4$ **[0,5 p.]**.
Apartado c) Expresión correcta de X en términos A, A^{-1} y de A^t **[0,5 p.]**. Cálculo correcto de la solución numérica **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 3: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto de la derivada de la función $f(x)$ **[0,25 p.]**. Cálculo correcto de los dos puntos críticos de la función (y candidatos a ser extremos) $x=0$ y $x=2$ **[0,25 p.]**. Justificación de que la función alcanza un mínimo relativo en $x=0$ **[0,25 p.]** y un máximo relativo en $x=2$ **[0,25 p.]**. Justificación de que la función es decreciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ **[0,25 p.]** y creciente en $(0,2)$ **[0,25 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto y justificado del límite cuando x tiende a $-\infty$ **[0,25 p.]**. Cálculo correcto y justificado del límite cuando x tiende a $+\infty$, resolviendo la indeterminación $\infty\cdot 0$ **[0,75 p.]**.

UNIVERSIDAD DE MURCIA Región de Murcia Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2021 - **JULIO**

CUESTIÓN 4: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida **[1,5 p.]**.
Apartado b) Determinación correcta del valor $a = \sqrt{\pi}$ para que la integral definida tenga el valor 1 **[1 p.]**.

CUESTIÓN 5: [2,5 p.]
Apartado a) Comprobación correcta de que las dos rectas se cortan en una punto y cálculo del punto de corte **[0,75 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto del ángulo de corte **[1 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto de la ecuación del plano pedido **[0,75 p.]**.

CUESTIÓN 6: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y razonado de las coordenadas del vértice C **[1,5 p.]**.
Apartado b) Justificación correcta y razonada de que el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en A **[0,5 p.]**.
Cálculo correcto del área del triángulo **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 7: [2,5 p.]
Apartado a) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[0,5 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[0,5 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[0,5 p.]**.
Apartado d) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[0,5 p.]**.
Apartado e) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 8: [2,5 p.]
Apartado a) Justificación de que se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 9$ y $p = 0,45$ **[1 p.]**.
Apartado b) Cálculo correcto de la media **[0,25 p.]** y de la desviación típica **[0,25 p.]**.
Apartado c) Cálculo correcto de la probabilidad pedida **[1 p.]**.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+ay-z=0 \\ 2x+y+az=0 \\ x+5y-az=a+1 \end{cases}$ en función del parámetro a.

$a)$ Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única.

$b)$ Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

$c)$ Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 5 & -a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 1 & 5 & -a & a+1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 5 & -a \end{vmatrix}=-a-10+a^2+1-5a+2a^2=3a^2-6a-9=0;$$

$$a^2-2a-3=0;\;\; a=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm4}{2}=1\pm2\Rightarrow a_1=-1, a_2=3.$$

El sistema tiene solución única cuando es compatible y determinado, es decir, si: $\begin{Bmatrix} a\neq -1 \\ a\neq 3 \end{Bmatrix}$ pues $Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg$.

El sistema tiene solución única si: $\begin{Bmatrix} a\neq -1 \\ a\neq 3 \end{Bmatrix}$

$b)$ Para $a=-1$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} x-y-z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+5y+z=0 \end{matrix}\right\}$, que es homogéneo y también $Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg$. Por lo que es compatible indeterminado. Para su resolución se desprecia una ecuación, por ejemplo, la tercera, y se parametriza, por ejemplo, $z=3\lambda$;

$$\left.\begin{matrix} x-y=\lambda \\ 2x+y=\lambda \end{matrix}\right\}\Rightarrow 3x=6\lambda;\;\; x=2\lambda.\;\; y=x-\lambda=2\lambda-3\lambda=-\lambda.$$

$$x=2\lambda;\;\; y=-\lambda;\;\; z=3\lambda, \forall\lambda\in R$$

$$c)\ Para\ a=3\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}=4-24\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ a=3\Rightarrow Rang\ M=2;\; Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible$$

Problema 2:

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$a)$ Si se denota por $tr(A)$ la traza de la matriz A (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) y por $|A|$ el determinante de A, compruebe que, para cualquier valor de a, se cumple la ecuación $A^2 = tr(A) \cdot A - |A| \cdot I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.

$b)$ Determine para qué valores de a la matriz A es regular (o inversible).

$c)$ Para $a = -3$, resuelva la ecuación matricial $AX - A^t = A$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución:

$a)$ $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & 4a \\ -4 & 4-a \end{pmatrix}$.

$$tr(A) \cdot A - |A| \cdot I = (2+2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4a \\ -4 & 8 \end{pmatrix} - (4+a) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4a \\ -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+a & 0 \\ 0 & 4+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & 4a \\ -4 & 4-a \end{pmatrix}$$

$$\forall a \in R \; es \; A^2 = tr(A) \cdot A - |A| \cdot I$$

$b)$ Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$.

No es invertible si $a = -4$

$$A \; es \; invertible \; \forall a \in R - \{-4\}.$$

$c)$ $AX - A^t = A \to AX = A + A^t \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A + A^t) \to I \cdot X = A^{-1} \cdot (A + A^t) \Rightarrow$

$$X = A^{-1} \cdot (A + A^t)$$

Para $a = -3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; $A + A^t = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$. $Adj.de\, A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. $A^{-1} = \frac{Adj.de\, A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1} \cdot (A + A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3:

Dada la función $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$ definida para todo valor real de $x\in R$, se pide:

$a)$ Calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos) y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$b)$ Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R por ser producto de dos funciones continuas en toda la recta real, una función exponencial y una función polinómica.

Una función es creciente o decreciente en un punto en que exista la derivada, cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=2x\cdot e^{-x}-x^2\cdot e^{-x}=x\cdot e^{-x}\cdot(2-x).$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x\cdot e^{-x}\cdot(2-x)=0;\ \ e^{-x}>0,\forall x\in R\Rightarrow x_1=0,x_2=2.$$

Por ser $f(x)$ continua en R, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty,0),(0,2)\ y\ (2,+\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x=1\in(0,2)$ es: $f'(1)=1\cdot e^{-1}\cdot(2-1)=\frac{1}{e}>0\Rightarrow Creciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x)>0\Rightarrow Creciente\ si\ x\in(0,2)$$

$$f'(x)<0\Rightarrow Decreciente\ si\ x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty).$$

Los posibles máximos y mínimos relativos son los puntos de abscisa $x_1=0,x_2=2$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x)=x\cdot e^{-x}\cdot(2-x)=e^{-x}\cdot(2x-x^2)\to f''(x)=-e^{-x}\cdot(2x-x^2)+e^{-x}\cdot(2-2x)=e^{-x}\cdot(-2x+x^2+2-2x)=e^{-x}\cdot(x^2-4x+2).$

$f''(0)=e^{-0}\cdot(0^2-4\cdot0+2)=2>0;f(0)=0^2\cdot e^{-0}=0\Rightarrow Mín.O(0,0)$

$f''(2)=e^{-2}\cdot(2^2-4\cdot2+2)=\frac{-2}{e^2}<0;\ f(2)=2^2\cdot e^{-2}=\frac{4}{e^2}\Rightarrow Máx.A\left(2,\frac{4}{e^2}\right).$

$$Mín.O(0,0);\ Máx.A\left(2,\frac{4}{e^2}\right).$$

$b)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2\cdot e^{-x})=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{(-\infty)^2}{e^{-\infty}}=\frac{\infty}{0}=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2\cdot e^{-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{\infty^2}{e^\infty};\ Ind.\Rightarrow$ Aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces:

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{2\cdot\infty}{e^\infty};Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{e^\infty}=\frac{2}{\infty}=0.$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\ \text{y}\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

Problema 4:

a) Calcule la integral indefinida $I = \int x \cdot sen\,(x^2) \cdot dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución).

b) Determine el menor valor de $a > 0$ para el cual se cumple $\int_0^a x \cdot sen^2 x \cdot dx = 1$.

Solución:

a) Hacemos el cambio de variable: $\left\{ \begin{matrix} x^2 = t \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{matrix} \right\}$

$I = \int x \cdot sen\,(x^2) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int sen\, t \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \cos t + C = -\frac{1}{2} \cdot \cos\,(x^2) + C$

$$I = \int x \cdot sen\,(x^2) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos\,(x^2) + C$$

b) $\int_0^a x sen^2 x \cdot dx = 1 = \left[-\frac{1}{2} \cos\,(x^2)\right]_0^a = -\frac{1}{2} \cdot \cos\,(a^2) + \frac{1}{2} \cdot \cos 0 = -\frac{1}{2} \cdot \cos\,(a^2) + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1;$

$-\cos\,(a^2) + 1 = 2;\ \cos\,(a^2) = -1 \Rightarrow a^2 = k\pi \Rightarrow a = \pm\sqrt{k\pi}, k \in N.$

Por ser a el menor valor tal que $a > 0 \Rightarrow k = 1$.

$$a = +\sqrt{\pi}$$

Autor: Javier Sánchez

Problema 5:

Considere las rectas $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$.

$a)$ Compruebe que las rectas se cortan en un punto y calcule su punto de corte.

$b)$ Determine el ángulo que forman las dos rectas.

$c)$ Calcule la ecuación del plano π que contiene a las dos rectas.

Solución:

$a)$ Escribimos las ecuaciones paramétricas de las dos rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(1, 0, 1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, -1)$

$$s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \mu \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 1 - \mu \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta s son $B(-1, 0, 1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2, 1, -1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan.

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$:

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-1, 0, 1) - (1, 0, 1)] = (-2, 0, 0).$$

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente. Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} < 3 \ \Rightarrow \ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ son\ coplanarios.$$

$$Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ en\ un\ punto$$

Como $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$, buscamos el punto sustituyendo:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda - 2\lambda = -1 \\ \lambda + 1 - \lambda = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = \lambda \\ 1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \rightarrow P(3, 2, -1)$$

$$P(3, 2, -1)$$

$b)$ El ángulo que forman las dos rectas es el que forman sus vectores directores.

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = |\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_s}| \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}| \cdot |\overrightarrow{v_s}|} = \frac{|(1, 1, -1) \cdot (2, 1, -1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{18}} = 0.9428$$

$$\beta = 19° \ \ 28' \ 16'$$

$$c)\ \pi(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s};\ A) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 0(x - 1) - y - (z - 1) = \ -y - (z - 1) = 0$$

$$\pi \equiv y + z - 1 = 0$$

Problema 6:

Los puntos $A(2,0,0)\ y\ B(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice, C, se encuentra en la recta $r \equiv \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$.

$a)$ Calcule las coordenadas del tercer vértice C sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por A y C.

$b)$ Determine si el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en A y calcule su área.

Solución:

$a)$ Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-1,12,4)-(2,0,0)] = (-3,12,4)$.

Escribimos la expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x=3\mu;\ \ 12\mu+3z=33 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=3\mu \\ y=0 \\ z=11-4\mu \end{cases}.$$

Por tanto, un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (3,0,-4)$ y un punto C genérico de la recta tiene como expresión general, dependiendo del parámetro μ: $C(3\mu, 0, 11-4\mu)$.

Nos dicen que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por A y C, por lo que: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(3\mu,0,11-4\mu)-(2,0,0)] = (3\mu-2, 0, 11-4\mu)$.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 = (3\mu-2,0,11-4\mu)\cdot(3,0,-4) = 9\mu-6-44+16\mu = 25\mu-50=0;\ \ \mu=2 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{C(6,0,3)}$$

$b)$ Calculamos sabiendo que $\mu = 2$

$\overrightarrow{AC} = (3\mu-2, 0, 11-4\mu) = (4,0,3)$.

Para que el triángulo $\widehat{ABC}$ sea rectángulo en A debe anularse el producto escalar: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$:

$$(-3,12,4)\cdot(4,0,3) = -12+12 = 0 \Rightarrow$$

$$El\ triángulo\ es\ rectángulo\ en\ A$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-3)^2+12^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+0^2+3^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{9+144+16}\cdot\sqrt{16+9} =$$

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{169}\cdot\sqrt{25} = \frac{1}{2}\cdot 13\cdot 5 = \frac{65}{2}\ u^2 = 32.5\ u^2$.

$$Área = \boldsymbol{\frac{65}{2}\ u^2 = 32.5\ u^2}$$

Problema 7:

Una urna contiene cinco bolas negras numeradas del 1 al 5, y siete bolas blancas, numeradas del 1 al 7. Se saca de la urna una bola al azar. Calcule:

$a)$ La probabilidad de que la bola sea blanca.

$b)$ La probabilidad de que la bola esté numerada con un número par.

$c)$ La probabilidad de que la bola esté numerada con un número par, sabiendo que es blanca.

$d)$ La probabilidad de que la bola sea blanca y esté numerada con número par.

$e)$ La probabilidad de que la bola sea blanca, sabiendo que está numerada con un número par.

Solución:

Para la resolución de este ejercicio se utiliza la regla de Laplace.

$a)$ P(blanca) = 7/12 = 0.5833

$b)$ P(par) = (2 + 3)/12 = 5/12 = 0.4167

$c)\ P(par/blanca) = \frac{P(par \cap blanca)}{P(blanca)} = \frac{\frac{3}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7} = 0.4286.$

$d)\ P(par \cap blanca) = \frac{3}{12} = 0.25$

$e)\ P(blanca/par) = \frac{P(blanca \cap par)}{P(par)} = \frac{\frac{3}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5} = 0.6.$

Problema 8:

Juan es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Él se defiende diciendo que no es para tanto y que la tutora le tiene manía. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximos 9 días Juan llega tarde como mucho 2 días, la tutora le sube 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Juan llegue tarde a clase cada día es 0.45, determine:

a) El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Juan llega tarde a clase en los próximos 9 días. ¿Cuáles son sus parámetros?

b) ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c)¿Cuál es la probabilidad de que Juan consiga la ansiada subida de 1 punto en la nota final?

Solución:

a) Es una distribución binomial, ya que o llega tarde o no llega tarde, con los siguientes parámetros:

$$p = 0.45; \;\; q = 1 - p = 0.55; \;\; n = 9$$

b) $\mu = n \cdot p = 9 \cdot 0.45 = 40.5.$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{9 \cdot 0.45 \cdot 0.55} = \sqrt{2.2275} = 1.49.$$

$$\mu = 40.5; \; \sigma = 1.49.$$

c) $P = P(0) + P(1) + P(2) = \binom{9}{0} \cdot 0.45^0 \cdot 0.55^9 + \binom{9}{1} \cdot 0.45^1 \cdot 0.55^8 + \binom{9}{2} \cdot 0.45^2 \cdot 0.55^7 =$

$= 1 \cdot 1 \cdot 0.0046 + 9 \cdot 0.45 \cdot 0.0084 + \frac{9\,!}{7\,!\cdot 2\,!} \cdot 0.2025 \cdot 0.0152 =$

$= 0.0046 + 0.0339 + 36 \cdot 0.0031 = 0.0046 + 0.0339 + 0.1110 = 0.1495.$

La probabilidad de que Juan consiga la ansiada subida de 1 punto en la nota final es de $\mathbf{0.1495}$