MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
CURSO: 2020-2021
ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS II**

upna Universidad Pública de Navarra / Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a-1)x - y = 3 \\ (a-1)x + (a+1)y - (2-a)z = -2a \\ (-2a+2)x - ay + (a^2-a-2)z = 3a-1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A^3| = 8$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Encuentra la ecuación general del plano π que es paralelo a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{1}$$

y equidista de ambas.

(2.5 puntos)

P4) Un lado de un paralelogramo está sobre la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$. Otro lado lo determinan los puntos $A(-1,-2,3)$ y $B(2,-2,-1)$. Calcula los otros dos vértices del paralelogramo sabiendo que su perímetro mide $16\ u$.

(2.5 puntos)

P5) Sea la función $f(x) = (x^2 - 3x + 10)^{\log\left[2^{x-1}\cdot\sin\frac{\pi(x+2)}{6}\right]}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

(1.25 puntos)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.25 puntos)

P6) Calcula las asíntotas de esta función y estudia la posición de la curva respecto a ellas:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x - 1}{x^2 - 4}$$

(2.5 puntos)

P7) Sea la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{5x - 2 - x\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2 - 4x + 6}\right)$.

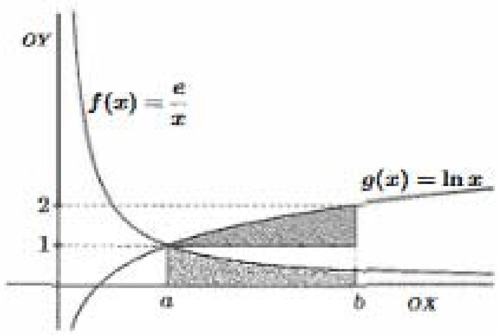
a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = 3/2\ \ln 2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P8) Calcula los valores de las abcisas a y b que aparecen en el gráfico, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales:



(2.5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Estudia el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$$\begin{cases}(a-1)x-y=3\\(a-1)x+(a+1)y-(2-a)z=-2a\\(-2a+2)x-ay+(a^2-a-2)z=3a-1\end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}a-1 & -1 & 0\\ a-1 & a+1 & a-2\\ -2a+2 & -a & a^2-a-2\end{pmatrix}\ y$$

$$M'=\begin{pmatrix}a-1 & -1 & 0 & 3\\ a-1 & a+1 & a-2 & -2a\\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 & 3a-1\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente, teniendo en cuenta que $a^2-a-2=(a+1)(a-2)$:

$$|M|=\begin{vmatrix}a-1 & -1 & 0\\ a-1 & a+1 & a-2\\ -2(a-1) & -a & (a+1)(a-2)\end{vmatrix}=$$

$$=(a-1)(a-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & a+1 & 1\\ -2 & -a & a+1\end{vmatrix}=$$

$$=(a-1)(a-2)\cdot[(a+1)^2+2+a+(a+1)]=$$

$$=(a-1)(a-2)\cdot(a^2+2a+1+3+2a)=(a-1)(a-2)\cdot(a^2+4a+4)=$$

$$(a-1)(a-2)\cdot(a+2)^2=0\Rightarrow a_1=1,a_2=2,a_3=a_4=-2.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$Para\ \begin{Bmatrix}a\neq 1\\ a\neq 2\\ a\neq -2\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{o}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.$$

$$Para\ a=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & -1 & -2\\ 0 & -1 & -2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_2,C_3,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & -2 & 2\end{vmatrix}=2-12-3+4=-11\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ a=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 0 & -4\\ -2 & -2 & 0 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 6 - 8 + 18 - 8 + 5 = 16 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a = 1 \\ a = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & -4 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = -F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = -2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq 1\ y\ a \neq 2$:

$$\begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ a-1 & a+1 & a-2 & -2a \\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 & 3a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & -a-2 & a^2-a-2 & 3a+5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow F_3 \to \frac{F_3}{a+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (a-2)z = 1;\ \ z = \frac{1}{a-2}.$$

$$(a+2)y + (a-2)z = -2a - 3;\ \ (a+2)y + (a-2) \cdot \frac{1}{a-2} = -2a - 3;$$

$$(a+2)y + 1 = -2a - 3;\ \ (a+2)y = -2a - 4 = -2(a+2) \Rightarrow y = -2 \qquad .$$

$$(a-1)x - y = 3;\ \ (a-1)x + 2 = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{a-1}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{1}{a-1}, y = -2, z = \frac{1}{a-2}, \forall a \in R - \{-2, 1, 2\}.}$$

Resolvemos ahora para $a = -2$. El sistema resulta $\left.\begin{matrix} -3x - y = 3 \\ -3x - y - 4z = 4 \\ 6x + 2y + 4z = -7 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación, por ejemplo, la tercera, y haciendo $x = \lambda$:

$y = -3 - 3\lambda$. Restando a la segunda ecuación la primera: $-4z = 1 \Rightarrow z = -\frac{1}{4}$.

$$\underline{Solución: x = \lambda, y = -3 - 3\lambda, z = -\frac{1}{4}, \forall \lambda \in R.}$$

****

Problema 2:

Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A^3| = 8$, siendo $A = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix}$.

Solución:

$|A^3| = 8 \Rightarrow |A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = (|A|)^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow |A| = 2.$

$\begin{vmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{vmatrix} = 2;\ \begin{vmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t(t-1) & t(t+2) & t \\ -(t-1) & -1-t & -2 \end{vmatrix} = 2;$

$(t-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ t & t^2+2t & t \\ -1 & -1-t & -2 \end{vmatrix} = 2.$ (*)

El valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ t & t^2+2t & t \\ -1 & -1-t & -2 \end{vmatrix}$ es el siguiente:

$-2(t^2+2t) - 3t(1+t) - t(t+1) + 3(t^2+2t) + t(1+t) + 2t(1+t) =$

$= (t^2+2t) - t(1+t) = t^2 + 2t - t - t^2 = t.$

Sustituyendo en (*) teniendo en cuanta el valor del determinante:

$(t-1) \cdot t = 2;\ \ t^2 - t - 2 = 0;\ \ t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow$

$\underline{t_1 = -2, t_2 = 2.}$

****

Problema 3:

Encuentra la ecuación general del plano π que es paralelo a las rectas de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{1}$ y equidista de ambas.

Solución:

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases} \Rightarrow y=\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+z=-3-2\lambda \\ x-z=7-6\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=4-8\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2-4\lambda; \quad \left.\begin{matrix} x+z=-3-2\lambda \\ -x+z=-7+6\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2z=-10+4\lambda: \ z=-5+2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2-4\lambda \\ y=\lambda \\ z=-5+2\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $P(2,0,-5)$ y $\overrightarrow{v_r}=(-4,1,2)$.

Un punto y un vector director de s son $Q(3,-2,-2)$ y $\overrightarrow{v_s}=(3,3,1)$.

El vector normal del plano π es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas, por lo cual, es linealmente dependiente del producto vectorial de sus vectores directores:

$$\vec{n}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=i+6j-12k-3k-6i+4j=$$

$$=-5i+10j-15k \Rightarrow \vec{n}=(1,-2,3).$$

El plano π es de la forma $\pi \equiv x-2y+3z+D=0$.

Por ser paralelo el plano a las rectas, la distancia del plano a cada una de las rectas es equivalente a la distancia del plano a cualquier punto de las rectas.

Teniendo en cuente lo anterior y por ser equidistante de las rectas se cumple que:

$$\left.\begin{matrix} d(\pi,r)=d(\pi,P) \\ d(\pi,s)=d(\pi,Q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(\pi,r)=d(\pi,s) \Rightarrow d(\pi,P)=d(\pi,Q).$$

La distancia del punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al plano $Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv x-2y+3z+D=0$ y a los puntos $P(2,0,-5)$ y $Q(3,-2,-2)$:

$$d(\pi,P)=\frac{|1\cdot 2-2\cdot 0+3\cdot(-5)+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{|2-0-15+D|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{|-13+D|}{\sqrt{14}}.$$

$$d(\pi,Q)=\frac{|1\cdot 3-2\cdot(-2)+3\cdot(-2)+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{|3+4-6+D|}{\sqrt{14}}=\frac{|1+D|}{\sqrt{14}}.$$

$$d(\pi,P)=d(\pi,Q) \Rightarrow \frac{|-13+D|}{\sqrt{14}}=\frac{|1+D|}{\sqrt{14}}; \quad |-13+D|=|1+D| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -13+D=1+D \\ -13+D=-1-D \end{matrix}\right\}$. La solución de la primera ecuación carece de sentido lógico, por lo cual:

$$-13+D=-1-D; \quad 2D=12 \Rightarrow D=6.$$

$$\underline{\pi \equiv x-2y+3z+6=0.}$$

****

Problema 4:

Un lado de un paralelogramo está sobre la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Otro lado lo determinan los puntos $A(-1,-2,3)\ y\ B(2,-2,-1)$. Calcula los otros dos vértices del paralelogramo sabiendo que su perímetro mide 16 unidades.

Solución:

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2,1,-2)$.

Los puntos $A(-1,-2,3)\ y\ B(2,-2,-1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2,-2,-1) - (-1,-2,3)] = (3,0,-4)$.

La longitud del lado $\overline{AB}$ es la siguiente:

$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5\ unidades.$

Como el perímetro del paralelogramo es de 16 unidades, la longitud del lado $\overline{BC}$ es la siguiente:

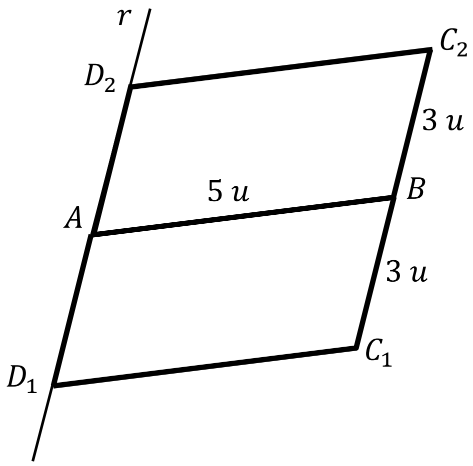
$16 = 2 \cdot (5 + \overline{BC});\ \ 8 = 5 + \overline{BC} \Rightarrow \overline{BC} = 3\ unidades.$

Se comprueba a continuación si alguno de los puntos, A o B, pertenecen a la recta r:

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2} \\ A(-1,-2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1-1}{-2} = \frac{-2+1}{-1} = \frac{3-1}{2} \Rightarrow A \in R.$$

Evidentemente, el punto $B \notin r$, por ser linealmente independientes los vectores $\overrightarrow{v_r} = (2,1,-2)$ y $\overrightarrow{AB} = (3,0,-4)$.

La situación, aproximada, es la que indica el gráfico adjunto.



La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}.$

Un punto genérico de la recta r es el siguiente: $D(1-2\lambda, -1-\lambda, 1+2\lambda)$.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(1-2\lambda, -1-\lambda, 1+2\lambda) - (-1,-2,3)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = (2-2\lambda, 1-\lambda, -2+2\lambda)$.

$\overline{AD} = |\overrightarrow{AD}| = 3\ u \Rightarrow \sqrt{(2-2\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 + (-2+2\lambda)^2} \Rightarrow$

$3^2 = 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 - 8\lambda + 4\lambda^2;\ \ 9 = 9\lambda^2 - 18\lambda + 9;$

$9\lambda^2 - 18\lambda = 0;\ \ \lambda^2 - 2\lambda = 0;\ \ \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_1 = 2.$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow D_1(1,-1,1).$ $\qquad \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BC_1}.$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{OD_1} - \overrightarrow{OA} = [(1,-1,1) - (-1,-2,3)] = (2,1,-2) \\ \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OB} = [(x,y,z) - (2,-2,-1)] = (x-2, y+2, z+1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2,1,-2)=(x-2,y+2,z+1) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x-2=2 \rightarrow x=4 \\ y+2=1 \rightarrow y=-1 \\ z+1=-2 \rightarrow z=-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C_1(4\,,-1\,,-3).$$

$\underline{Primera\ solución: C_1(4\,,-1\,,-3)\ y\ D_1(1,-1\,,1).}$

$\lambda_2=2 \Rightarrow D_2(-3\,,-3\,,5).$ $\qquad \overrightarrow{AD_2}=\overrightarrow{BC_2}.$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AD_2}=\overrightarrow{OD_2}-\overrightarrow{OA}=[(-3\,,-3\,,5)-(-1,-2,3)]=(-2,-1,2) \\ \overrightarrow{BC_2}=\overrightarrow{OC_2}-\overrightarrow{OB}=[(x,y,z)-(2,-2,-1)]=(x-2,y+2,z+1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2,-1,2)=(x-2,y+2,z+1) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x-2=-2 \rightarrow x=0 \\ y+2=-1 \rightarrow y=-3 \\ z+1=2 \rightarrow z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_2(0\,,-3\,,1).$

$\underline{Segunda\ solución: C_2(0,-3,1)\ y\ D_2(-3\,,-3\,,5).}$

****

Problema 5:

Sea la función $f(x) = (x^2 - 3x + 10)^{\log\left[2^{x-1} \cdot sen\, \frac{\pi(x+2)}{6}\right]}$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

$b)$ Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

$a)$

La función $f(x)$ es la expresión de la potencia de dos funciones de la forma: $f(x) = g(x)^{h(x)}$. Para que $f(x)$ sea continua en $[1, 3]$ tienen que serlo $f(x)$ y $g(x)$.

La función $g(x) = x^2 - 3x + 10$ es continua en R, por lo cual lo será en cualquier intervalo finito que se considere.

La función $h(x)$ es logarítmica y, por ello, continua en $[0, \infty)$.

Siendo $h(x) = m(x) \cdot n(x)$, con $m(x) = 2^{x-1}\; y\; n(x) = sen\, \frac{\pi(x+2)}{6}$, para que sea $h(x)$ estrictamente positiva es necesario que $m(x)\; y\; n(x)$ sean estrictamente positivas o estrictamente negativas.

$m(x) = 2^{x-1} > 0, \forall x \in R.$

Estudiamos ahora el signo de la función $n(x) = sen\, \frac{\pi(x+2)}{6}$ en el intervalo $[1, 3]$, para lo cual se estudia su signo en los puntos $x = 1, 2\; y\; 3$:

$n(1) = sen\, \frac{\pi(1+2)}{6} = sen\, \frac{3\pi}{6} = sen\, \frac{\pi}{2} = 1 > 0.$

$n(2) = sen\, \frac{\pi(2+2)}{6} = sen\, \frac{4\pi}{6} = sen\, \frac{2\pi}{3} = sen\, 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$

$n(3) = sen\, \frac{\pi(3+2)}{6} = sen\, \frac{5\pi}{6} = sen\, 150° = sen\, 30° = \frac{1}{2} > 0.$

Como quiera que en el intervalo $[1, 3]$ es $m(x) > 0\; y\; n(x) > 0$:

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ f(x)\ es\ continua\ en\ [1, 3].}$

$b)$

Para demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$ se tiene en cuenta que la función $f(x)$ es continua en $[1, 3]$, como se demostró en el apartado anterior.

Teniendo en cuanta el teorema de los valores intermedios o desigualdad de Darboux, que dice que, "si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)\; y\; f(b)$ al menos una vez".

$f(1) = (1^2 - 3 \cdot 1 + 10)^{\log\left[2^{1-1} \cdot sen\, \frac{\pi(1+2)}{6}\right]} = 8^{\log\left(2^0 \cdot sen\, \frac{\pi}{2}\right)} = 8^{\log(1 \cdot 1)} =$

$= 8^{\log 1} = 8^0 = 1.$

$$f(3) = (3^2 - 3 \cdot 3 + 10)^{\log\left[2^{3-1} \cdot sen\,\frac{\pi(3+2)}{6}\right]} = 10^{\log\left(2^2 \cdot sen\,\frac{5\pi}{6}\right)} =$$

$$= 10^{\log(4 \cdot sen\,150°)} = 10^{\log(4 \cdot sen\,30°)} = 10^{\log\left(4 \cdot \frac{1}{2}\right)} = 10^{\log 2} = 2.$$

$1 < \frac{3}{2} < 2 \Rightarrow$

$$\underline{Existe\ al\ menos\ un\ \alpha \in (1, 3)\ tal\ que\ \ f(\alpha) = \frac{3}{2}, c.q.d.}$$

También se puede resolver este apartado de la forma siguiente:

Demostrar que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$ es equivalente a demostrar que la función $g(x) = f(x) - \frac{3}{2}$ tiene una raíz real en el intervalo $[0, 1]$.

$$g(x) = (x^2 - 3x + 10)^{\log\left[2^{x-1} \cdot sen\,\frac{\pi(x+2)}{6}\right]} - \frac{3}{2}.$$

El teorema de Bolzano dice que "si $g(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$".

A la función $g(x)$ le es aplicable el teorema de Bolzano en el intervalo $[1, 3]$:

$g(1) = f(1) - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} < 0.$ $\qquad$ $g(3) = f(3) - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0.$

Lo anterior demuestra que $g(x)$ tiene al menos una raíz real en $[1, 3]$ y también los pedido, o sea, que:

$$\underline{Existe\ al\ menos\ un\ \alpha \in (1, 3)\ tal\ que\ \ f(\alpha) = \frac{3}{2}, c.q.d.}$$

****

Problema 6:

Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3-4x-1}{x^2-4}$ y estudia la posición de la curva respecto de ellas.

Solución:

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-4x-1}{x^2-4} = \pm\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$

$$\underline{Las\ rectas\ x = -2\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{-8+8-1}{0^-\cdot(-4)} = \frac{-1}{0^+} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty}.$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{-8+8-1}{0^+\cdot(-4)} = \frac{-1}{0^-} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty}.$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{8-8-1}{4\cdot0^-} = \frac{-1}{0^-} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty}.$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{8-8-1}{4\cdot0^+} = \frac{-1}{0^+} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3-4x-1}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4x-1}{x^3-4x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-4x-1}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4x-1-x^3+4}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+3}{x^2-4} = 0.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y = x.}$$

****

Problema 7:

Sea la función $f(x) = L\frac{5x-2-x\cdot sen\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,3]$.

$b)$ Demuestra que exista $a \in (1,3)$ tal que $f'(a) = \frac{3}{2}\cdot L2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

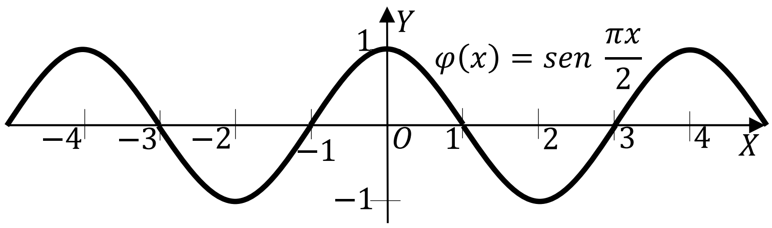
$a)$

Por ser $f(x)$ una función logarítmica es necesario que en el intervalo $[1,3]$ sea positiva la expresión $\frac{5x-2-x\cdot sen\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}$, para lo cual tienen que ser positivas en el mismo intervalo las funciones $g(x) = 5x - 2 - x\cdot sen\frac{\pi x}{2}$ y $h(x) = x^2 - 4x + 6$.

La función $g(x) = 5x - 2 - x\cdot sen\frac{\pi x}{2}$ es continua en R por ser suma, resta o producto de funciones continuas en R y la función $h(x) = x^2 - 4x + 6$ es continua en R por ser polinómica, por lo cual, ambas funciones son continuas en cualquier intervalo finito que se considere, en particular, en el intervalo $[1,3]$.

Para estudiar el signo de la función $g(x) = 5x - 2 - x\cdot sen\frac{\pi x}{2}$ en el intervalo $[1,3]$ se estudia, en particular, el valor de $sen\frac{\pi x}{2}$.

La función $\varphi(x) = sen\frac{\pi x}{2} < 0$ en $(1,3)$, como se observa en la representación gráfica, aproximada de $\varphi(x)$, que es la figura adjunta.



Siendo $sen\frac{\pi x}{2} < 0$ en $(1,3)$, la función $g(x) = 5x - 2 - x\cdot sen\frac{\pi x}{2}$ es estrictamente positiva.

Se estudia ahora la función $f(x)$.

$x^2 - 4x + 6 = 0;\ \ x = \frac{4\pm\sqrt{16-24}}{2} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow x^2 - 4x + 6 > 0, \forall x \in R,$ lo que significa que $h(x) = x^2 - 4x + 6 > 0, \forall x \in R$.

<u>*Lo anterior demuestra que $f(x)$ es continua en* $[1,3]$.</u>

$b)$

El teorema del valor medio o de Lagrange dice que “si una función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a, b), entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

Aplicando el teorema de Lagrange a la función $f(x) = L\frac{5x-2-x\cdot sen\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}$ en el intervalo $[1, 3]$:

$f(3) = L\frac{5\cdot 3-2-3\cdot sen\frac{3\pi}{2}}{3^2-4\cdot 3+6} = L\frac{15-2-3\cdot(-1)}{9-12+6} = L\frac{16}{3} = L16 - L3.$

$f(1) = L\frac{5\cdot 1-2-1\cdot sen\frac{\pi}{2}}{1^2-4\cdot 1+6} = L\frac{5-2-1\cdot 1}{9-12+6} = L\frac{2}{3} = L2 - L3.$

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{L16-L3-(L2-L3)}{2} = \frac{L16-L3-L2+L3}{2} =$

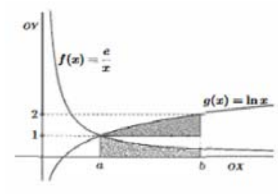
$= \frac{L16-L2}{2} = \frac{L2^4-L2}{2} = \frac{4\cdot L2-L2}{2} = \frac{3L2}{2}.$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ \exists a \in (1, 3)\ tal\ que\ f'(a) = \frac{3}{2}\cdot L2.}$

****

Problema 8:

Calcula los valores de las abscisas a y b que aparecen en el gráfico adjunto, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreados son iguales.



Solución:

El valor de a se obtiene haciendo: $g(a)=La=1 \Rightarrow \underline{a=e}$.

El valor de b se obtiene haciendo: $g(b)=Lb=2 \Rightarrow \underline{b=e^2}$.

$$S_1=\int_a^b [g(x)-1]\,dx=\int_e^{e^2}(Lx-1)\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u=Lx-1 \to du=\frac{1}{x}\cdot dx \\ dx=dv \to v=x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[(Lx-1)\cdot x-\int x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx\right]_e^{e^2}=[x(Lx-1)-\int dx]_e^{e^2}=[x(Lx-1)-x]_e^{e^2}=$$

$$=[xLx-x-x]_e^{e^2}=[xLx-2x]_e^{e^2}=(e^2\cdot Le^2-2e^2)-(eLe-2e)=$$

$$=e^2\cdot 2Le-2e^2-e+2e=2e^2-2e^2+e \Rightarrow \underline{S_1=e\,u^2}.$$

$$S_2=\int_a^b f(x)\cdot dx=\int_e^{e^2}\frac{e}{x}\cdot dx=[eLx]_e^{e^2}=e\cdot Le^2-e\cdot Le=e\cdot 2Le-e=$$

$$=2e-e \Rightarrow \underline{S_2=e\,u^2}.$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ S_1=S_2}.$

****

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
Curso: 2020-2021
Asignatura: MATEMÁTICAS II

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} ax + (a-2)y = a-2 \\ ax + (a^2-2a)y + 2z = a \\ 3ax + (a^2-4)y + z = 4a-4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores de t para que se cumpla $|A \cdot B^{-1}| = 1$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Calcula la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2}$$

(2.5 puntos)

P4) Halla un plano que sea tangente a la esfera de radio 3 y centro $(0,0,0)$, y que corte perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2}$$

Encuentra el punto de tangencia del plano con la esfera, y calcula la ecuación continua de la recta que pasa por ese punto y corta perpendicularmente a r.

(2.5 puntos)

P5) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}$$

(1.25 puntos)

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x}$$

(1.25 puntos)

P6) Se considera la función $f(x)=\log_2\left[\sin\dfrac{\pi(x+1)}{4}+2^{\frac{x-7}{2}}\right]$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[6,7]$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha\in(6,7)$ tal que $f(\alpha)=0$. Enuncia el/los resulatdo(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P7) Se considera la función $f(x)=\sqrt{x+\sin\dfrac{\pi x}{2}}$.

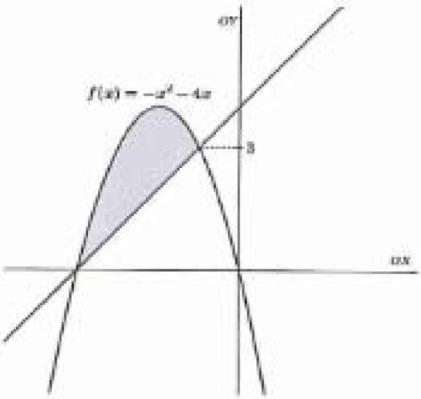
a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,3]$.

(0.75 puntos)

b) Demuestra que existen dos valores $\alpha\in(1,2)$ y $\beta\in(2,3)$ tales que $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$. Enuncia el/los resulatdo(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.75 puntos)

P8) Teniendo en cuenta los datos que aparecen en el siguiente gráfico, calcula el área de la región sombreada.



(2.5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Estudia el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax+(a-2)y=a-2 \\ ax+(a^2-2a)y+2z=a \\ 3ax+(a^2-4)y+z=4a-4 \end{cases}$ dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} a & a-2 & 0 & a-2 \\ a & a^2-2a & 2 & a \\ 3a & a^2-4 & 1 & 4a-4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{vmatrix}=a(a-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 3 & a+2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=a(a-2)[a+6-2(a+2)-1]=a(a-2)(a+6-2a-4-1)=$$

$$=a(a-2)\cdot(-a+1)=0\Rightarrow a_1=0;\ \ a_2=1,a_3=2.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq 1 \\ a\neq 2 \end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \end{pmatrix}\Rightarrow\{C_2=C_4\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=0\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1=-C_2\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{C_1,C_3,C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-1+6-1=4\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ a=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_3,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}=16-4=12\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a=1 \\ a=2 \end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq 0, a \neq 1 \; y \; a \neq 2$:

$$\begin{pmatrix} a & a-2 & 0 & a-2 \\ a & a^2-2a & 2 & a \\ 3a & a^2-4 & 1 & 4a-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & a-2 & 0 & a-2 \\ 0 & a^2-3a+2 & 2 & 2 \\ 0 & a^2-3a+2 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & a-2 & 0 & a-2 \\ 0 & a^2-3a+2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow z = -a \Rightarrow$$

$$(a^2-3a+2)y - 2a = 2; \;\; y = \frac{2a+2}{a^2-3a+2} = \frac{2(a+1)}{(a-1)(a-2)}.$$

$$ax + (a-2)\cdot\frac{2(a+1)}{(a-1)(a-2)} = a-2; \;\; ax + \frac{2(a+1)}{a-1} = a-2; \;\; ax = a-2-\frac{2a+2}{a-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax = \frac{(a-2)(a-1)-2a-2}{a-1} = \frac{a^2-3a+2-2a-2}{a-1} = \frac{a^2-5a}{a-1} = a\cdot\frac{a-5}{a-1} \Rightarrow x = \frac{a-5}{a-1}.$$

$\underline{Solución: x = \frac{a-5}{a-1}, y = \frac{2(a+1)}{(a-1)(a-2)}, z = -a, \forall a \in R - \{0,1,2\}.}$

Resolvemos ahora para $a = -2$. El sistema resulta $\begin{cases} -2y = -2 \\ 2z = 0 \\ -4y = -4 \end{cases}$, que es compatible indeterminado cuya solución es la siguiente:

$\underline{Solución: x = \lambda, y = 1, z = 0, \forall \lambda \in R.}$

****

Problema 2:

Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B^{-1}| = 1$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_1 \to C_1 - C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1+t & t & -t \\ t-1 & t-1 & t \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-2) \cdot \begin{vmatrix} 1+t & t \\ t-1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2) \cdot (t-1) \cdot \begin{vmatrix} 1+t & t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-2) \cdot (t-1) \cdot (1+t-t) = (t-2) \cdot (t-1).$$

$$|B| = \begin{vmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_2 \to C_2 + C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -t \\ 1-2t & 2t-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2t-1) \cdot \begin{vmatrix} t-1 & -t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2t-1) \cdot (t-1).$$

$$|A \cdot B^{-1}| = 1; \; \left|\frac{A}{B}\right| = 1; \; \frac{|A|}{|B|} = 1; \; |A| = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t-2) \cdot (t-1) = (2t-1) \cdot (t-1); \; t-2 = 2t-1 \Rightarrow$$

$$\underline{t = -1}.$$

****

Problema 3:

Calcula la ecuación general de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2}$.

Solución:

$a)$

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda; \;\; x = -\lambda; \;\; z = -2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0,0,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,-1,2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(6,6,2)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-1,5,2)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} = [(6,6,2) - (0,0,2)] = (6,6,0)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -12 - 12 - 60 - 12 = -96 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios \Rightarrow$$

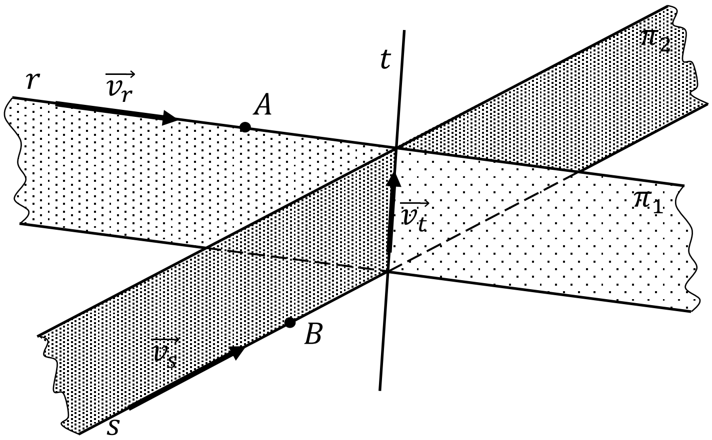
$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$$

El vector director de la recta t es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas $r\ y\ s$.

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 2j + 5k - k - 10i - 2j =$$

$$= -12i - 4j + 4k \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (3,1,-1).$$

Para facilitar la comprensión del desarrollo del ejercicio se acompaña el gráfico adjunto.



Se determinan los planos π_1 y π_2 de las siguientes características:

$$\pi_1(A;\ \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_t}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ \ x + 6y + z + 3z - 2x + y = 0;$$

$-x + 7y + 4z = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x - 7y - 4z = 0.$

$$\pi_2(B;\ \overrightarrow{v_s},\overrightarrow{v_t}) \equiv \begin{vmatrix} x-6 & y-6 & z-2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$-5(x-6) + 6(y-6) - (z-2) - 15(z-2) - 2(x-6) - (y-6) = 0;$

$-7(x-6) + 5(y-6) - 16(z-2) = 0;\ -7x + 42 + 5y - 30 - 16z + 32 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_2 \equiv 7x - 5y + 16z + 44 = 0.$

La recta pedida t es la intersección de los planos obtenidos, π_1 y π_2:

$$\underline{t \equiv \begin{cases} x - 7y - 4z = 0 \\ 7x - 5y + 16z + 44 = 0 \end{cases}.}$$

****

Problema 4:

Halla un plano π que sea tangente a la esfera de radio 3 y centro $O(0,0,0)$, y que corte perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2}$. Encuentra el punto de tangencia del plano con la esfera, y calcula la ecuación continua de la recta que pasa por ese punto y corta perpendicularmente a r.

Solución:

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (2,1,-2)$.

El haz de planos, β, perpendiculares a la recta r tienen la siguiente expresión general: $\beta \equiv 2x + y - 2z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, existes dos planos, π_1 y π_2, que distan 3 unidades del origen y que son tangentes a la esfera de centro en el origen y radio 3.

La distancia del origen de coordenadas al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(O,\pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al $\beta \equiv 2x + y - 2z + D = 0$, sabiendo que la distancia es de 3 unidades:

$$d(P,\pi) = \frac{|D|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 3;\ \ \frac{|D|}{\sqrt{4+1+4}} = 3;\ \ \frac{|D|}{\sqrt{9}} = 3 \Rightarrow D_1 = -9, D_2 = 9.$$

Los planos que cumplen la condición pedida son los siguientes:

$$\underline{\pi_1 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0\ \ y\ \ \pi_2 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0}.$$

La recta r', paralela a r, que pasa por el origen de coordenadas, expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r' \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$.

Los puntos de tangencia pedidos son las intersecciones de la recta r' y los planos π_1 y π_2.

$$\left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0 \\ r' \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 4\lambda + \lambda + 4\lambda - 9 = 0;\ \ 9\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 2 \cdot 1 = 2 \\ y = 1 \\ z = -2 \cdot 1 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P_1(2,1,-2)}.$$

$$\left.\begin{array}{r} \pi_2 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0 \\ r' \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 4\lambda + \lambda + 4\lambda + 9 = 0;\ \ 9\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \cdot (-1) = -2 \\ y = -1 \\ z = -2 \cdot (-1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P_2(-2,-1,2)}.$$

$$\underline{P_1(2,1,-2)};\ \ \underline{P_2(-2,-1,2)}.$$

****

Problema 5:

Calcula los límites: $a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}$.

$b)\ \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot sen\ \frac{1}{x}\right)$.

Solución:

$a)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}=\frac{\infty}{\infty-\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}{\left(\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}\right)\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}{\left(\sqrt{3x^3+2x^2}\right)^2-\left(\sqrt{3x^3}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}{3x^3+2x^2-3x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x}\right)}{2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x}\right)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3}\cdot x}{2x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3}\cdot x}{x}}{\frac{2x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{3x^2+2x}}{x}+\sqrt{3}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{3x^2+2x}{x^2}}+\sqrt{3}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{2}{x}}+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3+\frac{2}{\infty}}+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3+0}+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}=\sqrt{3}.}$$

$b)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot sen\ \frac{1}{x}\right)=\infty\cdot sen\ \frac{1}{\infty}=\infty\cdot 0\Rightarrow Ind.\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{sen\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{sen\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=$$

$$=\frac{sen\ 0}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}=\cos\frac{1}{\infty}=\cos 0\Rightarrow$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot sen\ \frac{1}{x}\right)=1.}$$

****

Problema 6:

Se considera la función $f(x) = \ell og_2 \left[sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \right]$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $[6, 7]$.

$b)$ Demuestra que existe un valor $\alpha \in (6, 7)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

$a)$

La función $f(x)$ es logarítmica, por lo cual, es continua en su dominio, que es $(0, +\infty)$.

Demostrar que $f(x)$ es continua es equivalen a demostrar que es positiva la expresión $sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}}$.

El recorrido de la función seno es $[-1, 1]$, por lo cual: $-1 \leq sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} \leq 1$.

La expresión $2^{\alpha} > 0, \forall\alpha \in R$; también se cumple que: $\begin{cases} \alpha \geq 0 \Rightarrow 2^{\alpha} \geq 1 \\ \alpha < 0 \Rightarrow 0 < 2^{\alpha} < 1 \end{cases}$.

La expresión $2^{\frac{x-5}{2}}$ en el intervalo $(6, 7)$ vale: $\begin{cases} x = 6 \Rightarrow 2^{\frac{6-5}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ x = 7 \Rightarrow 2^{\frac{7-5}{2}} = 2^1 = 2 \end{cases}$. De lo anterior se deduce que: $\sqrt{2} \leq 2^{\frac{x-5}{2}} \leq 2$.

$$-1 + \sqrt{2} \leq sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \leq 1 + 2 \Rightarrow 0.414 \leq sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \leq 3.$$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ la\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ [6, 7]}.$

$b)$

Sabiendo que la función $f(x)$ es continua en $[6, 7]$ le es aplicable el teorema de Bolzano en el intervalo $(6, 7)$.

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

$$f(6) = \ell og_2 \left(sen\ \frac{7\pi}{4} + 2^{\frac{6-5}{2}} \right) = \ell og_2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 2^{\frac{1}{2}} \right) = \ell og_2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right) =$$

$$= \ell og_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \ell og_2 \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} = \ell og_2 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} < 0.$$

$$f(7) = \ell og_2 \left(sen\ \frac{8\pi}{4} + 2^{\frac{7-5}{2}} \right) = \ell og_2 [sen\ (2\pi) + 2^1] = \ell og_2 (0 + 2) =$$

$$= \ell og_2 2 = 1 > 0.$$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ \exists\alpha \in (6,\ 7)\ tal\ que\ f(\alpha) = 0}.$

****

Problema 7:

Se considera la función $f(x) = \sqrt{x + sen\,\frac{\pi x}{2}}$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

$b)$ Demuestra que existen dos valores $\alpha \in (1, 3)$ y $\beta \in (2, 3)$ tales que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

Solución:

$a)$

La función $f(\alpha) = sen\,\alpha \geq 0, \forall \alpha \in [0, 2\pi]$, por lo cual, la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[1, 3]$ por ser la raíz cuadrada de dos funciones continuas y cuya suma es positiva en el intervalo considerado.

$b)$

La función $f(x)$ es derivable en $(1, 3)$, siendo: $f'(x) = \frac{1+\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}}{2\cdot\sqrt{x+sen\,\frac{\pi x}{2}}}$.

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en los intervalos $[1, 2]\ y\ [2, 3]$:

$$[1, 2] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(1) = \sqrt{1 + sen\,\frac{\pi}{2}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ f(2) = \sqrt{2 + sen\,\pi} = \sqrt{2+0} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = f(2).$$

$$[2, 3] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(2) = \sqrt{2 + sen\,\pi} = \sqrt{2+0} = \sqrt{2} \\ f(3) = \sqrt{3 + sen\,\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) = f(3).$$

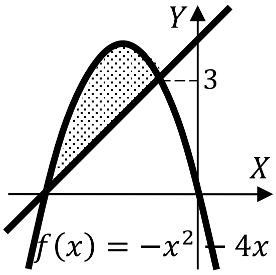
Queda demostrado que:

$$\underline{Existen\ \alpha \in (1, 3), \beta \in (2, 3)\ tales\ que\ f'(\alpha) = f'(\beta) = 0}.$$

****

Problema 8:

Teniendo en cuenta los datos que aparecen en el gráfico, calcula el área de la región sombreada.



Solución:

La función $f(x) = -x^2 - 4x$ corta al eje de abscisas en los puntos siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x = 0;\ -x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0,0) \\ x_2 = -4 \rightarrow A(-4,0) \end{cases}.$$

Los puntos de corte de $f(x)$ con la recta horizontal $y = 3$ tienen por abscisas las raíces de la ecuación que se forma al igualar sus expresiones.

$$-x^2 - 4x = 3;\ \ x^2 + 4x + 3 = 0;\ \ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} =$$

$$= -2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = -1.$$

De las dos raíces halladas, para el cálculo del área pedida, la que nos interesa es el valor $x = -1$. El punto de corte es $B(-1,3)$.

El vector director de la recta es $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1,3) - (-4,0) = (3,3)$, cuya pendiente es $m = 1$, por lo cual, la ecuación de la recta es la siguiente, considerando el punto $A(-4,0)$:

$$y - 0 = 1 \cdot (x+4) \Rightarrow y = x + 4.$$

En el intervalo de la superficie a calcular, $(-4,-1)$, las ordenadas de la función son mayores que las correspondientes ordenadas de la recta, por lo que la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-4}^{-1} [f(x) - y(x)] \cdot dx = \int_{-4}^{-1} [(-x^2 - 4x) - (x+4)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-4}^{-1} (-x^2 - 5x - 4) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_{-4}^{-1} =$$

$$= \left[-\frac{(-1)^3}{3} - \frac{5\cdot(-1)^2}{2} - 4\cdot(-1)\right] - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - \frac{5\cdot(-4)^2}{2} - 4\cdot(-4)\right] =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 - \frac{64}{3} + 40 - 16 = 28 - \frac{63}{3} - \frac{5}{2} = 28 - 21 - \frac{5}{2} = 7 - \frac{5}{2} = \underline{4.5\ u^2}.$$

$$S = \underline{4.5\ u^2}$$

****