MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Álvaro Garmendia Antolín

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES CACIÓN

Ese examen tiene cinco partes. En cada parte debes responder a una única pregunta.

Primera parte

Problema 1:

Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax - y + z = 1 \\ 3x - y + az = a \\ x + (a-1)z = 1 \end{cases}$ en función del parámetro a. Resolver el sistema para $a = 3$, si es posible.

Problema 2:

Sea la matriz $M(a) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determinar para qué valores del parámetro a la matriz A no tiene inversa.

$b)$ Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Segunda parte

Problema 3:

Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, a, -1)$ y $B(b, 1, 1)$ y el plano π de ecuación $x + y - 2z = 2b$.

$a)$ Calcular los valores de los parámetros a y b para que la recta r sea perpendicular al plano π.

$b)$ Calcular los valores de los parámetros a y b para que la recta r esté contenida en el plano π.

Problema 4:

Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(-2, 1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta r de ecuaciones paramétricas $\{x = 1 - 2t, y = 1 + t, z = t\}$. Calcular la distancia de P al punto de corte de ambas rectas.

Tercera parte

Problema 5:

Estudiar los máximos, los mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 5 + 8x^2 - x^4$. Representar la gráfica de f.

Problema 6:

Sea la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$.

$a)$ Obtener los valores de los parámetros A, B y C para que la gráfica de f pase por el punto $P(0, 1)$ y tenga un mínimo en el punto $Q(1, 1)$.

$b)$ ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos? En caso afirmativo, encontrarlos.

Cuarta parte

Problema 7:

Sean las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2, h(x) = \frac{x^2}{8}$.

$a)$ Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de esas tres funciones.

$b)$ Calcular el área de dicho recinto.

Problema 8:

Calcular, explicando los métodos utilizados, las integrales $I = \int (x+2) \cdot sen\ (2x) \cdot dx$ y $J = \int \frac{x+7}{x^2-4x-5} \cdot dx$.

Quinta parte

Problema 9:

En una farmacia se ha recibido un lote de medicamentos de los tipos A, I y M. El 80 % corresponde al medicamento A, el 10 % al I y el resto al M. En la revisión realizada por la farmacéutica se ha observado que hay medicamentos caducados en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de I y el 5 % de M. Se elige una caja de medicamentos al azar. Hallar:

$a)$ La probabilidad de coger un medicamento caducado.

$b)$ Si sabemos que el medicamento está caducado, la probabilidad de que sea del tipo A.

Problema 10:

En una ciudad se han elegido al azar 3.900 personas. Hallar:

$a)$ La probabilidad que al menos 15 de ellas cumplan años el día del patrón de la ciudad.

$b)$ La probabilidad de que el número de personas que cumplan años el día del patrón esté comprendido entre 5 y 15, ambos incluidos.

Solución: Primera parte

Problema 1:

Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax - y + z = 1 \\ 3x - y + az = a \\ x + (a-1)z = 1 \end{cases}$ en función del parámetro a. Resolver el sistema para $a = 3$, si es posible.

Solución:

Cuando nos piden discutir el sistema se refieren a que lo discutamos utilizando el **Teorema de Rouché-Fröbenius**. Para ello tenemos que estudiar los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$(M) = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \\ 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \text{ y } (M|b) = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & a & a \\ 1 & 0 & a-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz de los coeficientes se trata de una matriz $3x3$ su mayor rango es 3 por lo que calculamos el valor del menor de orden 3 (el determinante de toda la matriz). Calculamos el valor del determinante:

Matriz de los coeficientes: $M = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \\ 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$

$$|M| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = -a(a-1) - a + 1 + 3(a-1) = -a^2 + a - a + 1 + 3a - 3 = -a^2 + 3a - 2;$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

Igualamos a cero para encontrar los valores que anulan el determinante:

$$a^2 - 3a + 2 = 0; a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 2.$$

La primera conclusión que podemos sacar es que si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el $RgM = 3$ y como la matriz ampliada es de dimensión $3x4$ y su mayor rango es 3 tenemos que:

$\forall a \in R - \{1,\ 2\}$ el $RgM = 3 = Rg(M|b) = n = \text{ número de incógnitas}$ el sistema es un Sistema Compatible Determinado.

$$Para\ a = 1 \Rightarrow (M|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 1 + 3 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ (M|b) = 3.$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ (M|b) = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow (M|b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = C_4\}.$$

Las columnas tercera y cuarta son iguales luego: $Rang\ (M|b) = 2$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M^* = 2 < nº\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ e\ Indeterminado$$

La discusión completa del sistema es:

- Si $a = 1$ el $RgM = 2 \neq Rg(M|b) = 3$ y el sistema es $Sistema\ Incompatible$
- Si $a = 2$ el $RgM = 2 = Rg(M|b) < nº\ incógnitas$ y el sistema es $Sistema\ Compatible\ Indeterminado$
- $\forall a \in R - \{1,\ 2\}$ el $RgM = 3 = Rg(M|b) = n$ y el sistema es Compatible Determinado

Para $a = 3$ el sistema es por tanto $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 3x - y + 3z = 3 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$, que es compatible determinado. Vamos a resolver utilizando la **Regla de Cramer** ya que sabemos que el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de los coeficientes no es cero. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-3^2+3\cdot 3-2} = \frac{-2-3+1+6}{-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{18+3+3-3-9-6}{-2} = \frac{6}{-2} = -3.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-3+1+3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Luego la solución queda: $\boldsymbol{x = -1}$; $\boldsymbol{y = -3}$; $\boldsymbol{z = 1}$

Vamos a resolverlo también usando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & a & a \\ 1 & 0 & a-1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to (F'_2 = F_2 - F_1);\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema queda:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ \quad 2z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} z = 1 \\ x = 1 - 2z = -1 \\ y = 3x + z - 1 = -3 + 1 - 1 = -3 \end{cases} \to$$

La solución es: $\boldsymbol{x = -1}$; $\boldsymbol{y = -3}$; $\boldsymbol{z = 1}$

Problema 2:

Sea la matriz $M(a) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determinar para qué valores del parámetro a la matriz A no tiene inversa.

$b)$ Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Solución:

$a)$

Una matriz cuadrada es invertible cuando su determinante es diferente de cero. Calculamos su determinante.

$$|M(a)| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = -2a + a^2 - 2a + 3 = a^2 - 4a + 3;$$

Igualamos a cero:

$$a^2 - 4a + 3 = 0 \to a = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 3.$$

El determinante vale cero para $a = 1$ y para $a = 3$. Por lo que:

$$\boldsymbol{La\ matriz\ M(a)\ no\ tiene\ inversa\ para\ a = 1\ y\ para\ a = 3}$$

$b)$ Acabamos de ver que para $a = 2$ la matriz en invertible, por lo que es posible calcularla.

Podemos calcular la inversa por el Método de Gauss o por determinantes.

Vamos a calcularla aplicando la definición: $M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|}$

Para $a = 2$ es $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\quad |M| = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \to M^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$Adj. de\ M^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{M^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}}$$

Podemos comprobar si el cálculo está bien hecho (es opcional pero recomendable) aplicando que: $A \cdot A^{-1} = I$.

Segunda parte

Problema 3:

Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, a, -1)\ y\ B(b, 1, 1)$ y el plano π de ecuación $x + y - 2z = 2b$.

a) Calcular los valores de los parámetros $a\ y\ b$ para que la recta r sea perpendicular al plano π.

b) Calcular los valores de los parámetros $a\ y\ b$ para que la recta r esté contenida en el plano π.

Solución:

a) Para que la recta sea perpendicular al plano debe tener su vector de dirección proporcional al vector ortogonal al plano. Es decir: La recta r y el plano π son perpendiculares cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son linealmente dependientes, por lo tanto, cuando sus componentes son proporcionales:

Los puntos de la recta $A(1, a, -1)\ y\ B(b, 1, 1)$ determinan el vector director:

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(b, 1, 1) - (1, a, -1)] = (b - 1, 1 - a, 2).$$

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, 1, -2)$

Imponemos que sus componentes sean proporcionales

$$\frac{b-1}{1} = \frac{1-a}{1} = \frac{2}{-2} \Rightarrow \frac{b-1}{1} = \frac{1-a}{1} = -1$$

Por lo que:

$$\boldsymbol{a = 2} \text{ y } \boldsymbol{b = 0}$$

b) Ahora, para que la recta r esté contenida en el plano π, es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares, es decir, que su producto escalar sea cero.

Calculamos el producto escalar:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (b - 1, 1 - a, 2) \cdot (1, 1, -2) = 0 = \ b - 1 + 1 - a - 4 \Rightarrow -a + b = 4.$$

Además, si el plano π contiene a la recta r contiene a todos sus puntos y, por lo tanto, imponemos que, por ejemplo, que contenga al punto $A(1, a, -1)$, es decir, imponemos que el punto satisfaga la ecuación del plano.

$$A(1, a, -1)\ \in\ x + y - 2z = 2b \to 1 + a - 2 \cdot (-1) = 2b\ \to\ 1 + a + 2 = 2b$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones encontradas:

$$\left.\begin{array}{r} -a + b = 4 \\ a - 2b = -3 \end{array}\right\}$$

$$\textit{Sumamos las ecuaciones} \to -b = 1 \to\ \ b = -1 - a - 1 = 4 \to a = -5.$$

Para que la recta r esté contenida en el plano π los parámetros deben valer:

$$\boldsymbol{a = -5} \text{ y } \boldsymbol{b = -1}$$

Problema 4:

Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(-2,1,0)$ y corta perpendicularmente a la recta r de ecuaciones paramétricas $\{x=1-2t, y=1+t, z=t\}$. Calcular la distancia de P al punto de corte de ambas rectas.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}.$$

Por lo que un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (-2,1,1)$.

Hay infinitas direcciones de vectores ortogonales a $\overrightarrow{v_r}$. Por ese motivo vamos a buscar todos los planos perpendiculares a la recta r, que tienen la siguiente ecuación:

$$-2x+y+z+D=0.$$

Imponemos que dicho plano pase por el punto $P(-2,1,0)$

$$-2\cdot(-2)+1+0+D=0 \to D=-5 \Rightarrow$$

El plano que pasa por $P(-2,1,0)$ y es perpendicular a r es:

$$-2x+y+z-5=0.$$

Buscamos ahora el punto Q de intersección entre este plano y de la recta r:

$$\left.\begin{array}{r} -2x+y+z-5=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=1-2t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} \end{array}\right\} \to -2(1-2t)+(1+t)+t-5=0 \to$$

$$-2+4t+1+t+t-5=0 \to \; 6t-6=0; \; t-1=0 \to \; t=1 \to \left\{\begin{array}{l} x=1-2=-1 \\ y=1+1=2 \\ z=1 \end{array}\right\}$$

El punto buscado es: $Q(-1,2,1)$.

Calculamos la distancia entre dos puntos: $P(-2,1,0)$ y $Q(-1,2,1)$..

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(-1,2,1)-(-2,1,0)] = (1,1,1).$

$$d = \overline{PQ} = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{\mathbf{3}}\; unidades$$

Nos piden también la recta s que pasa por el punto $P(-2,1,0)$ y tiene como vector director a $\overrightarrow{PQ} = (1,1,1)$, que no hemos utilizado. Su ecuación paramétrica es:

$$\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x=-2+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}}$$

Tercera parte

Problema 5:

Estudiar los máximos, los mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 5 + 8x^2 - x^4$. Representar la gráfica de f.

Solución:

Observamos en primer lugar que $f(-x) = f(x)$, la función es par, simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Tenemos que hacer la derivada primera e igualar a cero para conocer los puntos críticos. Y determinar el signo de la derivada pues una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 16x - 4x^3 = 4x(4 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2.$$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2)\ y\ (2, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 2)$ es:

$$f'(1) = 4 \cdot 1 \cdot (4 - 1^2) = 12 > 0 \Rightarrow creciente.$$

Por lo que los intervalos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

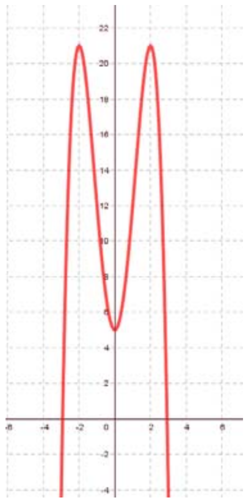
$$f'(x) < 0 \Rightarrow Decrece\ si\ x \in (\mathbf{-2, 0}) \cup (\mathbf{2}, +\infty)$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow Crece\ si\ x \in (-\infty, \mathbf{-2}) \cup (\mathbf{0, 2}).$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto en el que la función sea derivable es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo. También podemos observar si la función pasa de ser creciente a decreciente o viceversa: Así, antes de $x_1 = -2$, la función crece y después decrece, $f(-2) = f(2) = 5 + 8 \cdot 2^2 - 2^4 = 5 + 32 - 16 = 21$ luego en $x_1 = -2$ hay un máximo: $Máximo: (-2, 21)$. En $x_2 = 0$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente luego es un mínimo y $f(0) = 5 \Rightarrow\ Mínimo: (0, 5)$. Al ser la función par ya podemos asegurar que para $x_3 = 2$ hay un máximo: $Máximo: (2, 21)$.



También podemos calcular el signo de la derivada segunda obteniendo lo mismo:

$$f''(x) = 16 - 12x^2.$$

$f''(-2) < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2;$

$f''(0) = 16 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0;$

$f''(2) < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 2.$

$$\boldsymbol{Máximo: (-2, 21)\ y\ (2, 21).\ Mínimo: (0, 5)}$$

Con los datos obtenidos se puede hacer una representación gráfica, aproximada, de la función, que es la indicada en el gráfico adjunto.

Problema 6:

Sea la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$.

$a)$ Obtener los valores de los parámetros A, B y C para que la gráfica de f pase por el punto $P(0,1)$ y tenga un mínimo en el punto $Q(1,1)$.

$b)$ ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos? En caso afirmativo, encontrarlos.

Solución:

$a)$ Imponemos que pase por el punto $P(0,1) \to f(0) = A = 1 \to \ A = 1$

La función es: $f(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + 1$.

Imponemos que pase por el punto $Q(1,1) \to f(1) = 1 \to$

$$f(1) = 1^3 + B \cdot 1^2 + C \cdot 1 + 1 = 1 + B + C + 1 = 1 \ \to \ B + C = -1.$$

Para imponer que tenga un mínimo relativo en $Q(1,1)$ debemos hacer que se anule la derivada primera en ese punto:

$f'(1) = 0 \to f'(x) = 3x^2 + 2Bx + C \to f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2B \cdot 1 + C = 0 \ \to \ \ 2B + C = -3.$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} B + C = -1 \\ 2B + C = -3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -B - C = 1 \\ 2B + C = -3 \end{array}\right\} \to B = -2 \ \to -2 + C = -1 \to C = 1.$$

Hemos cambiado el signo de la primera ecuación y las hemos sumado.

$\boldsymbol{A = 1; B = -2; C = 1}$. La función es $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1}$

$b)$ La función es una función polinómica, por tanto, continua en toda la recta real. Por lo que, para que tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \to f'(x) = 0 \to 3x^2 - 4x + 1 = 0; \ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \to x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1.$

Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto pues en ese caso podría ser un punto de inflexión.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

Calculamos la derivada segunda:

$$f''(x) = 6x - 4.$$

Sustituimos los puntos encontrados:

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = -2 < 0 \ \to f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{1-6+9+27}{27} = \frac{31}{27}$

$$\to \textit{Máximo relativo para } x = \frac{1}{3}: \to \left(\frac{1}{3}, \frac{31}{27}\right)$$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 2 > 0 \ \to f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 1 = 1 \to$

$$\to \textit{Mínimo relativo para } x = 1: \to (1,1).$$

La función obtenida tiene, además del mínimo $Q(1,1)$ un máximo en $\boldsymbol{A\left(\frac{1}{3}, \frac{31}{27}\right)}$

Cuarta parte

Problema 7:

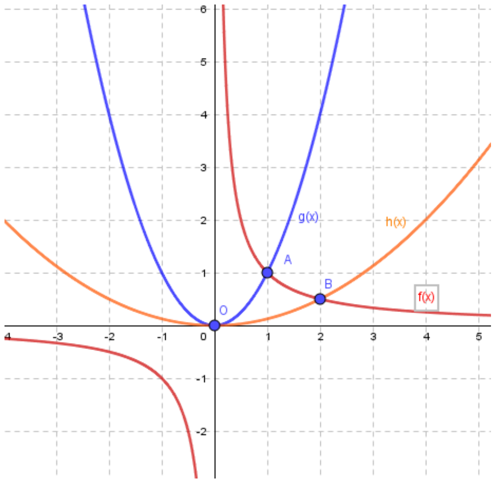
Sean las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2, h(x) = \frac{x^2}{8}$.

$a)$ Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de esas tres funciones.

$b)$ Calcular el área de dicho recinto.

Solución:

$a)$ Dibujamos las gráficas de las tres funciones. $f(x) = \frac{1}{x}$ es la función inversa, una hipérbola. $g(x) = x^2$ y $, h(x) = \frac{x^2}{8}$ son parábolas. Las funciones $f(x)\ y\ g(x)$ se cortan en el punto $A(1,1)$; las funciones $f(x)\ y\ h(x)$ se cortan en el punto $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ y las funciones $g(x)\ y\ h(x)$ se cortan en el punto $O(0,0)$. El recinto pedido es el limitado por los tres puntos: $A(1,1)$, $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ y $O(0,0)$.



$b)$ La superficie a calcular observamos que es:

$$S = \int_0^1 [g(x) - h(x)] \cdot dx + \int_1^2 [f(x) - h(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{8}\right) \cdot dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{8}\right) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{24}\right]_0^1 + \left[Ln(x) - \frac{x^3}{24}\right]_1^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^3}{24}\right) - 0\right] + \left[\left(Ln(2) - \frac{2^3}{24}\right) - \left(Ln(1) - \frac{1^3}{24}\right)\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} + Ln(2) - \frac{1}{3} - Ln(1) + \frac{1}{24} = Ln(2)\ u^2$$

El área del recinto vale: $\boldsymbol{Ln(2)\ u^2 \cong 0.69\ u^2}$

Problema 8:

Calcular, explicando los métodos utilizados, las integrales $I=\int(x+2)\cdot sen\,(2x)\cdot dx$ y $J=\int\frac{x+7}{x^2-4x-5}\cdot dx$.

Solución:

La primera integral se puede resolver por partes.

Utilizamos el método de integración por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

I	$u = x+2$	$du = dx$
	$v=\int sen\,(2x)dx = -\frac{1}{2}cos\,(2x) =$	$dv = sen\,(2x)dx$

Sustituimos:

$I=\int(x+2)\cdot sen\,(2x)\cdot dx = -(x+2)\cdot\frac{1}{2}\cdot cos\,(2x)+\int\frac{1}{2}\cdot cos\,(2x)\cdot dx =$

$= -\frac{1}{2}\cdot(x+2)\cdot cos\,(2x)+\frac{1}{2}\cdot\int cos\,(2x)\cdot dx =$

$= -\frac{1}{2}\cdot(x+2)\cdot cos\,(2x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot sen\,(2x)+C \Rightarrow$

$$I=\int(x+2)\cdot sen\,(2x)\cdot dx = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})\cdot \boldsymbol{cos}\,(\mathbf{2}\boldsymbol{x})+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\cdot\boldsymbol{sen}\,(\mathbf{2}\boldsymbol{x})+\boldsymbol{C}$$

La segunda integral es racional.

Hallamos las raíces del denominador:

$J=\int\frac{x+7}{x^2-4x-5}\cdot dx.$

$x^2-4x-5=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm6}{2}=2\pm3 \Rightarrow x_1=-1, x_2=5.$

$$x^2-4x-5=(x+1)(x-5).$$

Descomponemos en fracciones simples. Identificando los numeradores calculamos los coeficientes:

$\frac{x+7}{x^2-4x-5}=\frac{M}{x+1}+\frac{N}{x-5}=\frac{Mx-5M+Nx+N}{(x+1)(x-5)}=\frac{(M+N)x+(-5M+N)}{x^2-4x-5} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=1\\ -5M+N=7\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=1\\ 5M-N=-7\end{array}\right\} \Rightarrow 6M=-6;\;\; M=-1;\; -1+N=1 \Rightarrow N=2.$

Sustituimos. Las integrales obtenidas son inmediatas de tipo logaritmo:

$$J=\int\frac{x+7}{x^2-4x-5}\cdot dx=\int\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x-5}\right)\cdot dx=-ln|x+1|+2\cdot ln|x-5|+C=L\frac{(x-5)^2}{|x+1|}+C \Rightarrow$$

$$J=\int\frac{x+7}{x^2-4x-5}\cdot dx=-\boldsymbol{ln}|\boldsymbol{x}+\mathbf{1}|+\mathbf{2}\cdot\boldsymbol{ln}|\boldsymbol{x}-\mathbf{5}|+\boldsymbol{C}=L\frac{(x-5)^2}{|x+1|}+C \Rightarrow$$

Quinta parte

Problema 9:

En una farmacia se ha recibido un lote de medicamentos de los tipos A, I y M. El 80 % corresponde al medicamento A, el 10 % al I y el resto al M. En la revisión realizada por la farmacéutica se ha observado que hay medicamentos caducados en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de I y el 5 % de M. Se elige una caja de medicamentos al azar. Hallar:

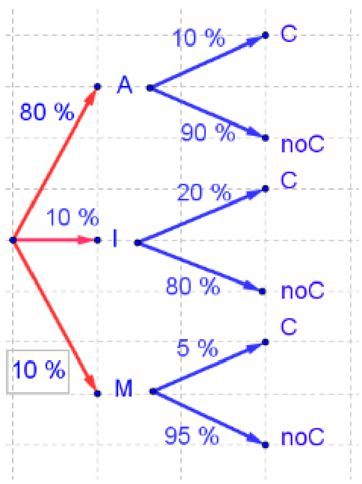
$a)$ La probabilidad de coger un medicamento caducado.

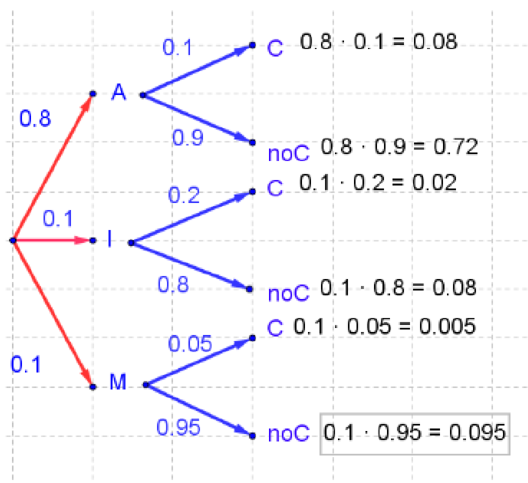
$b)$ Si sabemos que el medicamento está caducado, la probabilidad de que sea del tipo A.

Solución:

Llamamos C al suceso que el medicamento esté caducado y noC si no lo está. Hacemos un diagrama de árbol con los datos que tenemos. Sabemos que en cada nudo la suma de porcentajes es 100. Pasamos los porcentajes a probabilidades:

Multiplicando la rama obtenemos la probabilidad de, por ejemplo, sea de A y además esté caducado: 0.8 · 0.1 = 0.08





$a)$ Para calcular la probabilidad de que un medicamento esté caducado deberemos sumas las probabilidades de las tres ramas:

$$P = P(C) = P(A \cap C) + P(I \cap C) + P(M \cap C) =$$

$$= P(A) \cdot P(C/A) + P(I) \cdot P(C/I) + P(M) \cdot P(C/M) =$$

$$= 0.8 \cdot 0.10 + 0.1 \cdot 0.20 + 0.1 \cdot 0.05 = 0.080 + 0.020 + 0.005 = 0.105.$$

La probabilidad de coger un medicamento caducado es de $\mathbf{0.105}$.

$b)$ Nos piden ahora una probabilidad condicionada. Usamos $P(A \cap C) = P(C) \cdot P(A/C)$, despejamos:

$$P = P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A) \cdot P(C/A)}{P(C)} = \frac{0.8 \cdot 0.10}{0.105} = \frac{0.080}{0.105} = 0.7619.$$

Si sabemos que el medicamento está caducado, la probabilidad de que sea del tipo A es de $\mathbf{0.7619}$

Problema 10:

En una ciudad se han elegido al azar 3 900 personas. Hallar:

a) La probabilidad que al menos 15 de ellas cumplan años el día del patrón de la ciudad.

b) La probabilidad de que el número de personas que cumplan años el día del patrón esté comprendido entre 5 y 15, ambos incluidos.

Solución:

a) Como o cumplen años ese día o no lo cumplen, se trata de una distribución binomial con:

$$n = 3\,900; \;\; p = \frac{1}{365}; \;\; q = 1 - \frac{1}{365} = \frac{364}{365}.$$

Por ser $\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 3\,900 \cdot \frac{1}{365} > 5 \\ n \cdot q = 3\,900 \cdot \frac{527}{600} > 5 \end{array}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

Media: $\mu = n \cdot p = 3\,900 \cdot \frac{1}{365} = 10.68.$

$Desviación\ típica$: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{3\,900 \cdot \frac{1}{365} . \frac{364}{365}} = \sqrt{10.66} \cong 3.26.$

La distribución binomial anterior puede aproximarse por una distribución normal $N(10.68, 3.26)$

$$X = B(3\,900, 1/365) \approx N(10.68, 3.26).$$

Queremos calcular $P(X \geq 15)$. Tipificamos la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-10.68}{3.26}$. Aplicamos la corrección de Yates usando 14.5 en lugar de 15:

$$P = P(X \geq 15) = P\left(Z \geq \frac{14.5 - 10.68}{3.26}\right) = P\left(Z \geq \frac{3.82}{3.26}\right) \cong P(Z \geq 1.17) = 1 - P(Z < 1.17) =$$

Buscamos en la tabla:

$= 1 - 0.8790 = 0.1210.$

La probabilidad que al menos 15 de ellas cumplan años el día del patrón de la ciudad es de $\mathbf{0.1210}$.

b) Ahora queremos calcular $P = P(5 \leq X \leq 15)$. Procedemos de igual modo: Usamos la distribución normal. Tipificamos. Usamos la corrección de Yates

$P = P(5 \leq X \leq 15) = P\left(\frac{4.5-10.68}{3.26} \leq Z \leq \frac{15.5-10.68}{3.26}\right) = P\left(\frac{-6.18}{3.26} \leq Z \leq \frac{4.82}{3.26}\right) =$

$= P(-1.90 \leq Z \leq 1.48) = P(Z \leq 1.48) - P(Z \leq -1.90) =$

Buscamos en la tabla:

$= P(Z \leq 1.48) - [1 - P(Z \leq 1.90)] = P(Z \leq 1.48) - 1 + P(Z \leq 1.90) =$

$= 0.9306 - 1 + 0.9713 = 1.9019 - 1 = 0.9019.$

La probabilidad de que el número de personas que cumplan años el día del patrón esté comprendido entre 5 y 15, ambos incluidos es de $\mathbf{0.9019}$.

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Ese examen tiene cinco partes. En cada parte debes responder a una única pregunta.

Primera parte

Problema 1:

Discutir el sistema $S(a)$ en función de a siendo $S(a) = \begin{cases} ax - y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ x + 2y + az = 3 \end{cases}$. Resolver en función de a, mediante la regla de Cramer, en los casos en que sea posible.

Problema 2:

Sea la matriz $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determinar para qué valores de a la matriz no tiene inversa.

$b)$ Calcular, si es posible, la matriz inversa para $a = 0$, y en caso de que no sea posible razonar por qué no es posible.

Segunda parte

Problema 3:

$a)$ Hallar la ecuación del plano π que pasa por el punto $A(-1, 2, 3)$ y es paralelo a los vectores

$\vec{v} = (-1, -2. -3)$ y $\vec{v} = (1, 3, 5)$.

$b)$ Halla el valor de A para que el plano π calculado en el apartado anterior y el plano

$\beta \equiv Ax - y + 5z = 8$ sean perpendiculares.

Problema 4:

Sea el plano $\pi \equiv 2x - y + Az = 0$. Sea la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$. Hallar A para que r y π sean paralelos. Además, obtener el plano β perpendicular a r y que pasa por el origen.

Tercera parte

Problema 5:

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de a, b y c para que su gráfica pase por $P(0, 2)$ y tenga un extremo en $Q(1, -1)$. ¿Tiene f más extremos?

Problema 6:

Sea $f(x) = x^2 + 9$, y P el punto exterior a su gráfica de coordenadas $P(0, 0)$. Calcular razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica de f que pasen por el punto P.

Cuarta parte

Problema 7:

Dibuja la región encerrada por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5$, y calcular el área de dicha región.

Problema 8:

Calcular las integrales indefinidas I y J, explicando los métodos utilizados para su resolución:

$I = \int x \cdot cos\,(2x) \cdot dx$ y $J = \int \frac{1}{x^2+2x-3} \cdot dx$.

Quinta parte

Problema 9:

En una empresa el 70 % de sus trabajadoras están satisfechas con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 % gana más de 1 000 euros. Entre las que no están satisfechas solo el 20 % gana más de 1 000 euros. Si se elige una trabajadora al azar:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que gane más de 1 000 euros?

$b)$ Si gana más de 1 000 euros, ¿cuál es la probabilidad que esté satisfecha con su contrato?

$c)$ ¿Cuál es la probabilidad de que gane menos de 1 000 euros y esté satisfecha con su contrato?

Problema 10:

En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de 0.4, se pide:

$a)$ Identificar y describir este modelo de probabilidad.

$b)$ Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.

$c)$ Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

RESPUESTAS

Primera parte

Problema 1:

Discutir el sistema $S(a)$ en función de a siendo $S(a)=\begin{cases}ax-y+2z=2\\x-2y-z=1\\x+2y+az=3\end{cases}$. Resolver en función de a, mediante la regla de Cramer, en los casos en que sea posible.

Solución:

Para analizar el sistema estudiamos los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada:

$$M=\begin{pmatrix}a & -1 & 2\\1 & -2 & -1\\1 & 2 & a\end{pmatrix} \text{ y } M|b=\begin{pmatrix}a & -1 & 2 & 2\\1 & -2 & -1 & 1\\1 & 2 & a & 3\end{pmatrix}.$$

Para determinar el rango de la matriz de coeficientes, calculamos su determinante en función del parámetro a:

$$|M|=\begin{vmatrix}a & -1 & 2\\1 & -2 & -1\\1 & 2 & a\end{vmatrix}=-2a^2+4+1+4+2a+a=-2a^2+3a+9$$

Igualamos a cero, para saber para que valores de a se anula:

$2a^2-3a-9=0\to\ a=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{81}}{4}=\frac{3\pm9}{4}\to a=-\frac{3}{2},a=3.$

$\forall a\in R-\{-\frac{3}{2},\ 3\}$ el rango de M es 3, y el rango de la matriz ampliada lo mayor que puede ser es también 3, por lo que ambos son iguales, y por el **Teorema de Rouché Frobenius** sabemos que el sistema es compatible y determinado.

Estudiamos ahora el comportamiento para los otros valores del parámetro:

Para $a=-\frac{3}{2}\to M|b=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & -1 & 2 & 2\\1 & -2 & -1 & 1\\1 & 2 & -\frac{3}{2} & 3\end{pmatrix}$

Estudiamos su rango calculando el determinante de las dos primeras columnas y la cuarta:

$\begin{vmatrix}-\frac{3}{2} & -1 & 2\\1 & -2 & 1\\1 & 2 & 3\end{vmatrix}=9+4-1+4+3+3=22\neq0$. Por lo tanto, el rango de la matriz ampliada es 3, mientras que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Para $a=3\to M|b=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 2\\1 & -2 & -1 & 1\\1 & 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$

Estudiamos su rango calculando el determinante de las dos primeras columnas y la cuarta:

$\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\1 & -2 & 1\\1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-18+4-1+4-6+3=-14\neq0$. El rango de la matriz ampliada es 3, mientras que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

La discusión completa del sistema es:

- Si $a = -\frac{3}{2}$ o bien $a = 3$, el $RgM = 2 \neq RgM|b = 3$ y el sistema es incompatible
- $\forall a \in R - \{-\frac{3}{2},\ 3\}$ el $RgM = 3 = RgM|b = n$ y el sistema es Compatible Determinado

Utilizamos la **regla de Cramer** para resolverlo cuando $a \neq -\frac{3}{2}$ y $a \neq 3$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix}}{-2a^2+3a+9} = \frac{-4a+4+3+12+4+a}{-2\cdot\left(a+\frac{3}{2}\right)(a-3)} = \frac{-3a+23}{-(2a+3)(a-3)} = \frac{3a-23}{(2a+3)(a-3)}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix}}{-(2a+3)(a-3)} = \frac{a^2+6-2-2+3a-2a}{-(2a+3)(a-3)} = -\frac{a^2+a+2}{(2a+3)(a-3)}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-(2a+3)(a-3)} = \frac{-6a+4-1+4-2a+3}{-(2a+3)(a-3)} = \frac{-8a+10}{-(2a+3)(a-3)} = \frac{2(4a-5)}{(2a+3)(a-3)}.$$

$$\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}, \mathbf{3}\right\}, \qquad \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{a} - \mathbf{23}}{(\mathbf{2}\boldsymbol{a}+\mathbf{3})(\boldsymbol{a}-\mathbf{3})}; \boldsymbol{y} = -\frac{\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{a} + \mathbf{2}}{(\mathbf{2}\boldsymbol{a}+\mathbf{3})(\boldsymbol{a}-\mathbf{3})}; \boldsymbol{z} = \frac{\mathbf{2}(\mathbf{4}\boldsymbol{a}-\mathbf{5})}{(\mathbf{2}\boldsymbol{a}+\mathbf{3})(\boldsymbol{a}-\mathbf{3})}$$

Problema 2:

Sea la matriz $M(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & a\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}$.

$a)$ Determinar para qué valores de a la matriz no tiene inversa.

$b)$ Calcular, si es posible, la matriz inversa para $a=0$, y en caso de que no sea posible razonar por qué no es posible.

Solución:

$a)$ Una matriz cuadrada tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero. Calculamos su determinante y lo igualamos a cero:

$$|M(a)|=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & a\\ 0 & a & 1\end{vmatrix}=1+a^2-a^2-a^2=1-a^2=0\to a=-1, a=1.$$

La matriz $M(a)$ **no** tiene inversa si $\boldsymbol{a=-1}$ o si $\boldsymbol{a=1}$.

$b)$ Cuando $a=0$ la matriz es $M(0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, que ya hemos comprobado que es invertible por ser su determinante distinto de cero.

Podemos calcular la matriz inversa por dos procedimientos, por el método de Gauss, y por determinantes: $M^{-1}=\frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|}$

Por el método de Gauss-Jordan:

$$(M|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{\{F_1\to F_1-F_3\}}{\to}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to M^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$M^{-1}=\frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|}\qquad M^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to$$

$$Adj.de\ M^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$M^{-1}=\frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Naturalmente obtenemos la misma matriz inversa por los dos métodos.

$$\boldsymbol{M^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

Segunda parte

Problema 3:

a) Hallar la ecuación del plano π que pasa por el punto $A(-1,2,3)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v}=(-1,-2.-3)$ y $\vec{v}=(1,3,5)$.

b) Halla el valor de A para que el plano π calculado en el apartado anterior y el plano $\beta\equiv Ax-y+5z=8$ sean perpendiculares.

Solución:

a) Al conocer un punto y dos vectores de orientación, escribimos directamente la ecuación del plano:

$$\pi(\vec{v},\vec{u},A)\equiv\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0\ \rightarrow$$

$-10(x+1)-3(y-2)-3(z-3)+2(z-3)+9(x+1)+5(y-2)=0\rightarrow$

$-(x+1)+2(y-2)-(z-3)=0\rightarrow\ -x-1+2y-4-z+3=0\rightarrow$

$$\boldsymbol{\pi\equiv x-2y+z+2=0}$$

b) Para que los planos sean perpendiculares debemos imponer que sus vectores normales sean ortogonales, es decir, que su producto escalar sea cero.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_\pi}=(1,-2,1),\overrightarrow{n_\beta}=(A,-1,5)$.

$$\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{n_\beta}=0=(1,-2,1)\cdot(A,-1,5)=A+2+5=0\rightarrow A=-7.$$

$$\boldsymbol{A=-7}$$

Problema 4:

Sea el plano $\pi \equiv 2x - y + Az = 0$. Sea la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$. Hallar A para que r y π sean paralelos. Además, obtener el plano β perpendicular a r y que pasa por el origen.

Solución:

Para que la recta r y el plano π serán paralelos debemos imponer que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares.

Para obtener el vector directo de la recta, escribimos sus ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases} \to z = \lambda \to \left. \begin{matrix} 4x - 3y = -1 - 4\lambda \\ 3x - 2y = -3 - \lambda \end{matrix} \right\} \to$$

Eliminamos la incógnita y:

$$\left. \begin{matrix} -8x + 6y = 2 + 8\lambda \\ 9x - 6y = -9 - 3\lambda \end{matrix} \right\} \to x = -7 + 5\lambda \to \ \ 2y = 3x + 3 + \lambda = -21 + 15\lambda + 3 + \lambda \to$$

$$2y = -18 + 16\lambda \to y = -9 + 8\lambda \ \to r \equiv \begin{cases} x = -7 + 5\lambda \\ y = -9 + 8\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un vector director de la recta r: $\overrightarrow{v_r} = (5, 8, 1)$ y el vector normal del plano π: $\overrightarrow{n_\pi} = (2, -1, A)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0 = (5, 8, 1) \cdot (2, -1, A) = 10 - 8 + A = 0 \to A = -2$.

$$\boldsymbol{A = -2}$$

Buscamos ahora el plano β perpendicular a r y que pasa por el origen. La ecuación de todos los planos perpendiculares a la recta tiene como vector normal el vector de dirección de la recta: $\overrightarrow{v_r} = (5, 8, 1)$. Su expresión general es por lo tanto: $5x + 8y + z + D = 0$.

Imponemos que pase por el origen, con lo que $D = 0$. Por tanto:

$$\boldsymbol{\beta \equiv 5x + 8y + z = 0}$$

Tercera parte

Problema 5:

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de a, b y c para que su gráfica pase por $P(0,2)$ y tenga un extremo en $Q(1,-1)$. ¿Tiene f más extremos?

Solución:

Imponemos a la función que pase por el punto $P(0,2) \to f(0) = 2$: $\to f(0) = c = 2 \to c = 2$.

Por pasar por el punto $Q(1,-1)$ imponemos que verifique la ecuación:

$f(1) = -1 \to f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 2 = -1 \to \; a + b = -3$.

Debe tener un extremo en $Q(1,-1)$, por lo que se debe anular su derivada

$f'(1) = 0 \to f'(x) = 3ax^2 + 2bx \to f'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 0 \to \; 3a + 2b = 0$.

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, que resolvemos:

$$\left.\begin{aligned} a + b = -3 \\ 3a + 2b = 0 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} -2a - 2b = 6 \\ 3a + 2b = 0 \end{aligned}\right\} \to a = 6 \to 6 + b = -3 \to b = -9.$$

$$\boldsymbol{a = 6;\; b = -9;\; c = 2}$$

Hemos obtenido la función: $f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 2$.

Para que una función derivable en un punto tenga un máximo o mínimo relativo en dicho punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x) = 18x^2 - 18x = 18x(x-1) \to f'(x) = 0 \to 18x(x-1) = 0;\;\; x = 0,\;\; x = 1.$$

Observamos que la unción tiene dos posibles extremos, en $Q(1,-1)$, y en $x = 0, f(0) = 2 \to A(0,2)$

Para diferenciar si esos extremos son máximos o mínimos utilizamos la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 36x - 18.$$

$f''(0) = -18 < 0$

Por tanto, en $\boldsymbol{A(0,2)}$ hay un **máximo relativo**

$f''(1) = 36 \cdot 1 - 18 = 18 > 0$.

Por tanto, en $\boldsymbol{Q(1,-1)}$ hay un **mínimo relativo**

Problema 6:

Sea $f(x) = x^2 + 9$, y P el punto exterior a su gráfica de coordenadas $P(0,0)$. Calcular razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica de f que pasen por el punto P.

Solución:

La ecuación de cualquier recta que pase por el punto $P(0,0)$ $es\ y - 0 = m(x-0) \rightarrow y = mx$.

Imponemos que corte a la función en los puntos de tangencia: $\big(x, f(x)\big) = (x, x^2+9)$. En esos puntos la pendiente de la recta debe coincidir con la derivada de la función:

$m = f'(x) = 2x$.

Por tanto:

$2x = \frac{x^2+9}{x} \rightarrow\ \ 2x^2 = x^2 + 9 \rightarrow\ \ x^2 = 9 \rightarrow x = 3; x = -3 \begin{cases} x_1 = -3 \rightarrow m_1 = -6 \\ x_2 = 3 \rightarrow m_2 = 6 \end{cases}.$

Para $x = 3, f(3) = 3^2 + 9 = 18, m = f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$

El punto de tangencia es $A(3,18)$ y la recta tangente en ese punto: $y = 6x$.

Para $x = -3, f(3) = (-3)^2 + 9 = 18, m = f'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$

El punto de tangencia es $B(-3,18)$ y la recta tangente en ese punto: $y = -6x$.

Hay dos rectas tangentes a la función por el punto $P(0,0)$: las rectas $\boldsymbol{y = 6x}$ y $\boldsymbol{y = -6x}$.

Cuarta parte

Problema 7:

Dibuja la región encerrada por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5$, y calcular el área de dicha región.

Solución:

Buscamos los puntos de intersección de las dos funciones igualándolas:

$$f(x) = g(x) \to x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 5 \to$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \to \ x^2 - x - 2 = 0 \to$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \to x = -1, x = 2 \to A(-1, 4), B(2, 1)\ .$$

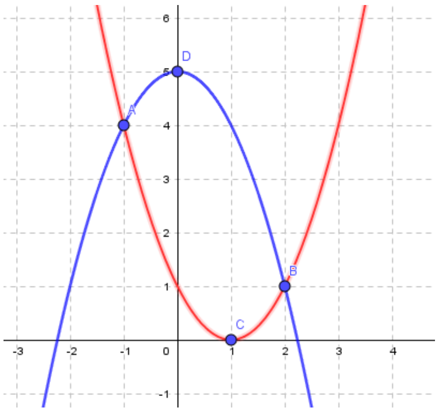
Las dos funciones dadas son parábolas, $f(x) = x^2 - 2x + 1$ es una parábola convexa $(\cup)$ cuyo vértice es:

$f'(x) = 2x - 2 = 0 \to x = 1, f(1) = 0 \to Vértice: C(1, 0).$

La función $g(x) = -x^2 + 5$ es una parábola cóncava $(\cap)$ cuyo vértice es:

$g'(x) = -2x = 0 \to x = 0,\ g(0) = 5 \to Vértice: D(0, 5).$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo $[-1, 2]$ todas las ordenadas de $g(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de $f(x)$, por lo cual la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-1}^{2} [(-x^2 + 5) - (x^2 - 2x + 1)] \cdot dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4) \cdot dx =$$

Es un integra inmediata de una función polinómica:

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{2} = \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = \left(-\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 2^2 + 4 \cdot 2\right) - \left[-\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4 \cdot (-1)\right] =$$

$$= -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \frac{2}{3} - 1 + 4 = 15 - \frac{18}{3} = 15 - 6 = 9.$$

$$\boldsymbol{S = 9\ u^2}$$

Problema 8:

Calcular las integrales indefinidas I y J, explicando los métodos utilizados para su resolución:

$I = \int x \cdot cos\ (2x) \cdot dx$ y $J = \int \frac{1}{x^2+2x-3} \cdot dx$.

Solución:

La primera integral se puede resolver por partes.

Utilizamos el método de integración por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

I	$u = x$	$du = dx$
	$v = \int cos\ (2x)dx = \frac{1}{2} sen\ (2x) =$	$dv = cos\ (2x)dx$

Sustituimos:

$I = \int x \cdot cos\ (2x) \cdot dx = x \cdot \frac{1}{2} \cdot sen\ (2x) - \int \frac{1}{2} \cdot sen\ (2x) \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot sen\ (2x) - \frac{1}{2} \cdot \int sen\ (2x) \cdot dx =$

$= \frac{x}{2} \cdot sen\ (2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot cos\ (2x) + C = \frac{1}{4} \cdot [2x \cdot sen\ (2x) + cos\ (2x)] + C.$

$$I = \int x \cdot cos\ (2x) \cdot dx = \boldsymbol{\frac{x}{2} \cdot sen\ (2x) + \frac{1}{4} \cdot cos\ (2x) + C}$$

La segunda integral $J = \int \frac{1}{x^2+2x-3} \cdot dx$ es racional. Hallamos las raíces del denominador:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \to \ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \to x = -3, x = 1$$

Por tanto:

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1).$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{M}{x+3} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx - M + Nx + 3N}{(x+3)(x-1)} = \frac{(M+N)x + (-M+3N)}{x^2+2x-3}$$

Calculamos los coeficientes igualando: $(M+N)x + (-M+3N) = 1 \to \left.\begin{array}{r} M + N = 0 \\ -M + 3N = 1 \end{array}\right\} \to$

$4N = 1;\ \ N = \frac{1}{4};\ \ M = -\frac{1}{4}.$

Sustituyendo obtenemos dos integrales inmediatas de tipo logaritmo:

$J = \int \frac{1}{x^2+2x-3} \cdot dx = \int \left(\frac{-1/4}{x+3} + \frac{1/4}{x-1} \right) \cdot dx = \frac{1}{4} L|x+3| - \frac{1}{4} L|x-1| + C = \frac{1}{4} L \left| \frac{x+3}{x-1} \right| + C.$

$$J = \int \frac{1}{x^2+2x-3} \cdot dx = \boldsymbol{\frac{1}{4} L \left| \frac{x+3}{x-1} \right| + C}$$

Quinta parte

Problema 9:

En una empresa el 70 % de sus trabajadoras están satisfechas con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 % gana más de 1 000 euros. Entre las que no están satisfechas solo el 20 % gana más de 1 000 euros. Si se elige una trabajadora al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane más de 1 000 euros?

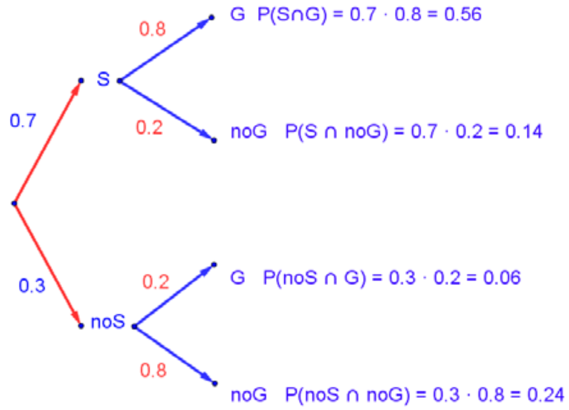
b) Si gana más de 1 000 euros, ¿cuál es la probabilidad que esté satisfecha con su contrato?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane menos de 1 000 euros y esté satisfecha con su contrato?

Solución:

Llamamos S al suceso estar satisfecha con su trabajo, y llamamos G a ganar más de 1 000 euros.

Nos dan los siguientes datos: $P(S) = 0.7$; $P(G/S) = 0.8$; $P(G/noS) = 0.2$. Los llevamos a un diagrama de árbol, que completamos sabiendo que en cada nudo la suma de probabilidades es 1.



Comprobamos que en efecto: 0.56 + 0.14 + 0.06 + 0.24 = 1

a) Para calcular la probabilidad de que gane más de 1 000 euros tenemos que sumar las probabilidades del árbol que terminan en G.

$$P = P(G) = P(S \cap G) + P(noS \cap G) = 0.7 + 0.8 + 0.3 + 0.2 = 0.56 + 0.06 = 0.62$$

La probabilidad de ganar más de mil euros es $\mathbf{0.62}$

b) Nos piden ahora una probabilidad condicionada: $P(S/G)$. Usamos la definición:

$$P(S/G) = \frac{P(S \cap G)}{P(G)} = \frac{0.7 \cdot 0.8}{0.62} = \frac{0.56}{0.62} = 0.9032$$

Si gana más de 1 000 euros, la probabilidad que esté satisfecha con su contrato es $\mathbf{0.9032}$

c) Nos piden ahora una probabilidad de la intersección, que vemos directamente en el árbol: $P(S \cap noG)$.

$$P = P(S \cap noG) = 0.7 \cdot 0.2 = 0.14.$$

La probabilidad de que gane menos de 1 000 euros y esté satisfecha con su contrato es de $\mathbf{0.14.}$

Problema 10:

En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de 0.4, se pide:

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.

b) Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.

c) Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

Solución:

a) En una plaza de aparcamiento únicamente pueden ocurrir dos cosas, que esté ocupado o que no lo esté, por tanto, es el modelo de probabilidad es una distribución binomial de las siguientes características:

$$p = 0.4;\ \ q = 0.6;\ \ n = 30\ \Rightarrow X \sim \boldsymbol{B(30; 0.4)}$$

b) La probabilidad de que de n elementos r sean favorables es la siguiente: $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

En este caso: $n = 30, r = 8\ , p = 0.8, q = 0.6$.

$$P = \binom{30}{8} \cdot 0.4^8 \cdot 0.6^{22} = \frac{30!}{22! \cdot 8!} \cdot 0.4^8 \cdot 0.6^{22} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0.4^8 \cdot 0.6^{22} =$$

$$29 \cdot 27 \cdot 13 \cdot 25 \cdot 23 \cdot 0.4^8 \cdot 0.6^{22} = 5.852.925 \cdot 8.6260 \cdot 10^{-9} = 0.0505$$

c) En lugar de sumar muchas binomiales nos conviene transformar la distribución binomial en una normal:

$\mu = n \cdot p = 30 \cdot 0.4 = 12.\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{30 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = \sqrt{7.2} \cong 2.68.$

$$X = B(30;\ 0.4) \approx N(12;\ 2.68).$$

Tipificamos la variable: $Z \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-12}{2.68}$, y usamos la corrección de Yates sumando al intervalo 0.5 a cada lado:

$P = P(10 \leq B \leq 20) = P(9.5 \leq X \leq 20.5) = P\left(\frac{9.5-12}{2.68} \leq Z \leq \frac{20.5-12}{2.68}\right) = P\left(\frac{-2.5}{2.68} \leq Z \leq \frac{8.5}{2.68}\right) =$

$= P(-0.93 \leq Z \leq 3.17) = P(Z < 3.17) - [1 - P(Z < 0.93)] =$

$= P(Z < 3.17) - 1 + P(Z < 0.93) = 0.9992 - 1 + 0.8238 = 1 - 1.8230 = 0.8230.$

La probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados es de $\mathbf{0.8230}$.