Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Javier Ros Castellón

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

Problema 1:

Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A. Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6.000 euros a la semana para el coste total de producción. Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, ¿cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio total sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

Problema 2:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con m un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro m existe la inversa de A?

b) Para $m = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - A^2 = I_3$.

BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

a) Estudie su monotonía y calcule sus extremos.

b) Represente gráficamente la función.

c) Calcule $I = \int f(x) \cdot dx$.

d) Calcule el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Problema 4:

a) Calcule la derivada de las funciones: $f(x) = L\frac{x-1}{x+1}$ y $g(x) = x^3 \cdot e^{2x^2}$.

b) Represente gráficamente la parábola $h(x) = x^2 + x + 1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x) = x^2 + x + 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 0$.

BLOQUE C

Problema 5:

Se desea probar la eficacia de dos tipos de vacunas, A y B, contra un virus determinado. Para ello, se seleccionan 500 voluntarios sin anticuerpos para este virus, a los que se les administra una de las vacunas o un placebo, resultando que 300 reciben la vacuna A, 150 la B y el resto el placebo. Se comprueba que el 90 % de los vacunados con la A y el 95 % de los vacunados con la B, generan anticuerpos, no generando anticuerpos de los que han recibido el placebo. Se selecciona uno de esos voluntarios al azar.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que haya generado anticuerpos?

$b)$ Si dicho voluntario no ha generado anticuerpos, ¿qué probabilidad hay de que se le haya administrado placebo?

Problema 6:

De las compras realizadas en el último período de rebajas del pasado año, el 55 % se dedicaron a productos electrónicos, el 72 % se hicieron a través de Internet y, de las compras que se hicieron por Internet, el 64 % fueron de productos electrónicos. Se elige una compra al azar,

$a)$ Calcule la probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por Internet.

$b)$ Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por Internet o que se hayan comprado productos electrónicos.

$c)$ Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de Internet.

BOQUE D

Problema 7:

$a)$ En una Escuela Politécnica hay matriculados en el último curso 60 estudiantes de Ingeniería Eléctrica, 40 en Ingeniería Informática, 30 en Ingeniería Civil, 50 en Ingeniería Mecánica y 20 en Ingeniería Aeronáutica. Se quiere hacer una encuesta al 20 % de estos estudiantes, de manera proporcional al número de matriculados en cada titulación.

1.- ¿Qué tipo de muestreo se debe emplear?

2.- ¿Cuántos alumnos debe haber en la muestra y cuántos de cada titulación?

$b)$ Dada la población $\{a, 10, 12, 11, 18\}$, ¿cuánto debe valer a, sabiendo que la media de las medias muestrales de tamaño 3, obtenidas mediante muestreo aleatoria simple, es 13.2?

Problema 8:

Se desea estimar la proporción de individuos mayores de edad de una localidad que están en contra de la construcción de una central nuclear en su término municipal. Para ello, se pregunta a 100 individuos mayores de edad de esa localidad, elegidos de forma aleatoria, resultando que 45 de ellos rechazan la construcción de la central.

$a)$ Calcule un intervalo de confianza al 92 % para estimar la proporción real de individuos de esa localidad que están en contra de la construcción de la central?

$b)$ Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar, para que al estimar la proporción de individuos de esa localidad que rechazan la construcción de la central, el error cometido sea inferior al 5 %.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO DEL BLOQUE A

Problema 1:

Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A. Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6 000 euros a la semana para el coste total de producción. Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, ¿cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio total sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

Solución:

Estamos ante un problema de *Programación Lineal*. Debemos obtener, por tanto, la *función objetivo* a optimizar (en este caso maximizar) y las *restricciones* a las que está sujeta.

Los puntos del plano que cumplan todas las restricciones estarán en una región del plano llamada *región factible*. La *solución óptima* será aquella que optimice la función objetivo. Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

Dispongamos los datos del problema en una tabla:

	Número de baterías	Gastos de producción	Beneficio
Batería A	x	$150x$	$130x$
Batería B	y	$100y$	$140y$

Nuestra **función objetivo** a maximizar es:

$$F(x,y) = 130x + 140y$$

Y las **restricciones** a las que debe estar sujeta son:

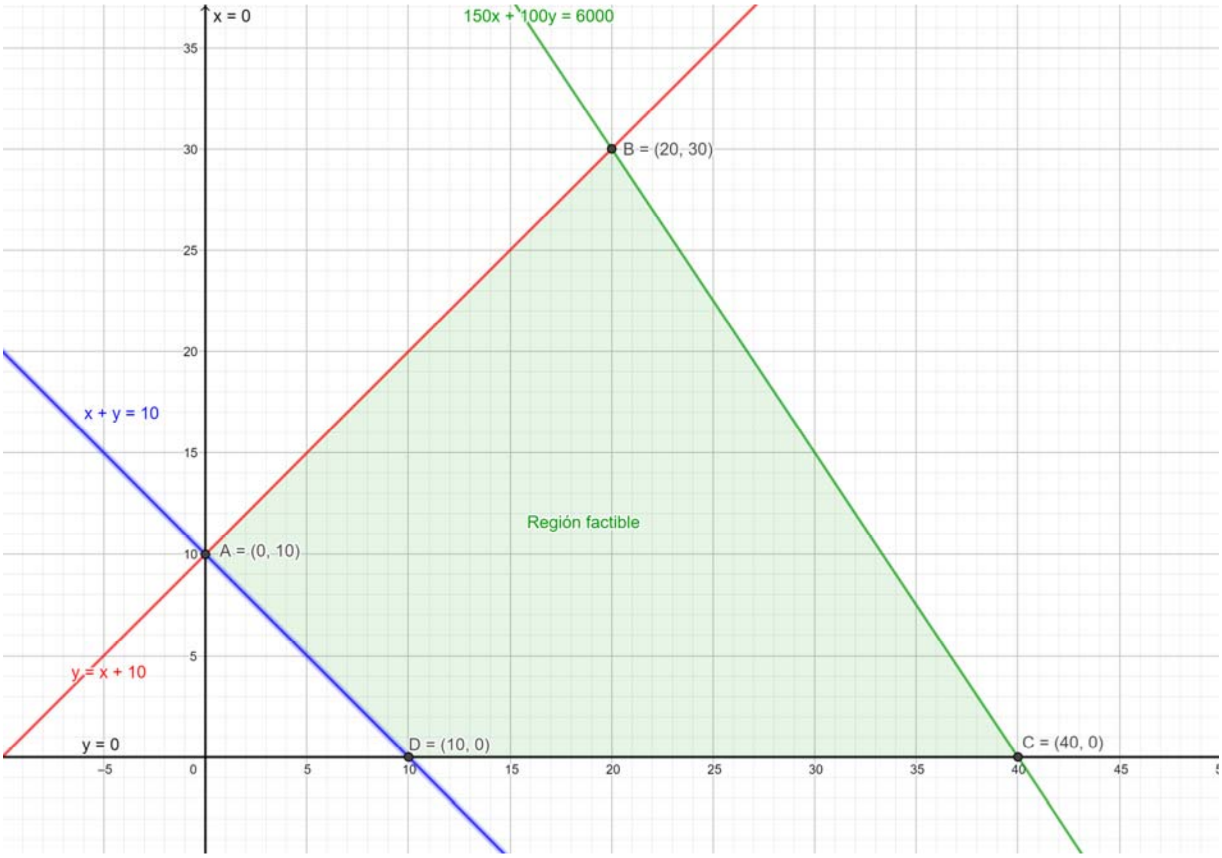
$$\left.\begin{array}{c} x + y \geq 10 \\ \mathrm{y} \leq \mathrm{x} + 10 \\ 150\mathrm{x} + 100\mathrm{y} \leq 6000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

El recinto definido por las inecuaciones dadas es:

Los vértices del recinto son los puntos: $A(0,10)$, $B(20,30)$, $C(40,0)$, $D(10,0)$

Estos puntos se obtienen como intersección de las rectas correspondientes. Así, por ejemplo, el punto $B(20,30)$ se obtiene como intersección de las rectas $y = x + 10$, $150x + 100y = 6000$; etc.

Vértice A	Vértice B	Vértice C	Vértice D
$\left.\begin{array}{c} x + y = 10 \\ x = 0 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{c} y = x + 10 \\ 150x + 100y = 6000 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{c} 150x + 100y = 6000 \\ y = 0 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{c} x + y = 10 \\ y = 0 \end{array}\right\}$
$A(0,10)$	$B(20,30)$	$C(40,0)$	$D(10,0)$



Sabemos que el máximo se encuentra en algún vértice del recinto[1], por lo que evaluamos la función objetivo $F(x,y) = 130x + 140y$ en cada uno de ellos.

$$F(A) = F(0,10) = 130 \cdot 0 + 140 \cdot 10 = 1\,400\ €$$

$$F(B) = F(20,30) = 130 \cdot 20 + 140 \cdot 30 = 6\,800\ €$$

$$F(C) = F(40,0) = 130 \cdot 40 + 140 \cdot 0 = 5\,200\ €$$

$$F(D) = F(10,0) = 130 \cdot 10 + 140 \cdot 0 = 1\,300\ €$$

Por tanto, tendría que producir $\mathbf{20}$ baterías de tipo A y $\mathbf{30}$ de tipo B para obtener un beneficio máximo de $\mathbf{6\,800}$ €.

[1] Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

Problema 2:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con m un parámetro real.

$a)$ ¿Para qué valores del parámetro m existe la inversa de A?

$b)$ Para $m = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - A^2 = I_3$.

Solución:

a) Una matriz cuadrada A de orden n tiene inversa si, y sólo si, su determinante es distinto de cero. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3m - 2m^2 + 3 = -2m^2 + 3m + 5$$

entonces,

$$2m^2 - 3m - 5 = 0 \Rightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{3+7}{4} = \dfrac{10}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{3-7}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

Por tanto, si $\boldsymbol{m \neq \frac{5}{2}, -1}$ existe la inversa de A.

b) Despejamos X en la ecuación matricial dada.

$$X \cdot A - A^2 = I_3 \Rightarrow X \cdot A = A^2 + I_3 \Rightarrow X = (A^2 + I_3) \cdot A^{-1} = A^2 \cdot A^{-1} + I_3 \cdot A^{-1} = A + A^{-1}$$

Así, $\boxed{X = A + A^{-1}}$. Como para $m = 2$ la matriz A tiene inversa[2], calculamos A^{-1}.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = 3$$

Luego

$$A^{-1} = \frac{[Adj(A)]^t}{|A|} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 & -4 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & -1/3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Y finalmente,

$$X = A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & -1/3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = A + A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{8/3} & \mathbf{0} & \mathbf{5/3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2/3} & \mathbf{0} & \mathbf{5/3} \end{pmatrix}$

[2] Recordemos que por el apartado *a)* la matriz A tiene inversa para todos los valores de m distintos de $5/2$ y -1.

RESPUESTAS DEL BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

$a)$ Estudie su monotonía y calcule sus extremos.

$b)$ Represente gráficamente la función.

$c)$ Calcule $I = \int f(x) \cdot dx$.

$d)$ Calcule el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución:

a) Para el estudio de la monotonía y cálculo de sus extremos debemos obtener previamente la función derivada y calcular los valores en los que se anula.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \;=\; \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} 2 \\ 2/3 \end{cases}$$

Obtenemos así los puntos de posible cambio de signo de la derivada. En aquellos intervalos o semirrectas en los que el signo de la derivada primera sea positivo la función será creciente; y en los que tenga signo negativo, será decreciente.

	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, 2\right)$	$(2, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

Así, la función es creciente en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ y decreciente en $\left(\frac{2}{3}, \mathbf{2}\right)$.

Y, como

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}$$

$$f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 0$$

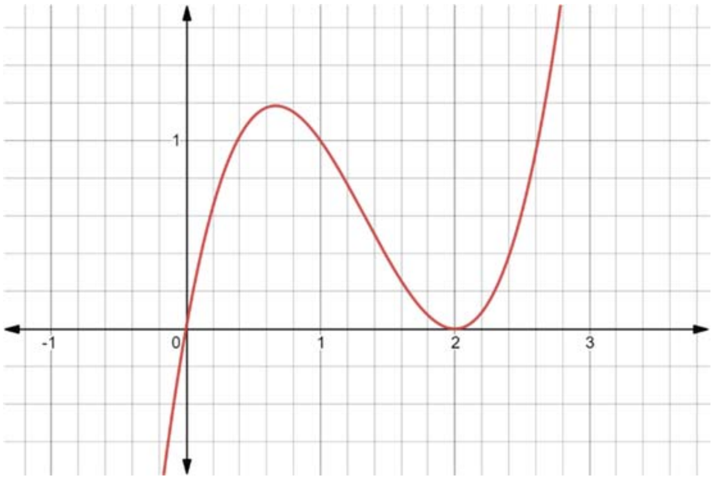
Alcanza un máximo relativo en $\left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)$ y un mínimo relativo en $(\mathbf{2}, \mathbf{0})$.

b) Para la representación gráfica de la función calcularemos, en primer lugar, los puntos de corte con los ejes.

Puntos de corte con el eje X: Hacemos $y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = 0$
Así,

$$y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2\ (doble) \end{cases}$$

Luego la gráfica corta al eje X en los puntos $(0, 0)$ y $(2, 0)$. Como, además, conocemos la monotonía y extremos del apartado anterior la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ sería la siguiente.



c) $\int f(x)dx = \int (x^3 - 4x^2 + 4x\,)dx = \frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$

$$\int f(x)dx = \boldsymbol{\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C}$$

d) Para el cálculo del área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas tenemos:

$$A = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2\right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - 4 \cdot \frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 = \frac{4}{3}u^2$$

El área limitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje de abscisas es $\boldsymbol{A = \frac{4}{3}u^2}$.

Problema 4:

$a)$ Calcule la derivada de las funciones: $f(x) = L\frac{x-1}{x+1}$ y $g(x) = x^3 \cdot e^{2x^2}$.

$b)$ Represente gráficamente la parábola $h(x) = x^2 + x + 1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

$c)$ Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x) = x^2 + x + 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 0$.

Solución:

a) Calculemos las derivadas pedidas

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1\cdot(x+1) - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{2}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{2}{x^2-1}$$

$$g(x) = x^3 \cdot e^{2x^2} \Rightarrow g'(x) = 3x^2 \cdot e^{2x^2} + x^3 \cdot e^{2x^2} \cdot 4x =$$

$$= 3x^2 e^{2x^2} + 4x^4 e^{2x^2} =$$

$$= (3x^2 + 4x^4)e^{2x^2} =$$

$$= x^2(3 + 4x^2)e^{2x^2}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{2}{x^2-1} \quad ; \quad g'(x) = x^2(3+4x^2)e^{2x^2}}$$

b) Represente gráficamente la parábola $h(x) = x^2 + x + 1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

<u>Cálculo del vértice</u>

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$

$$y_v = h\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4}$$

El vértice viene dado, por tanto, por el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

<u>Puntos de corte con el eje X</u>

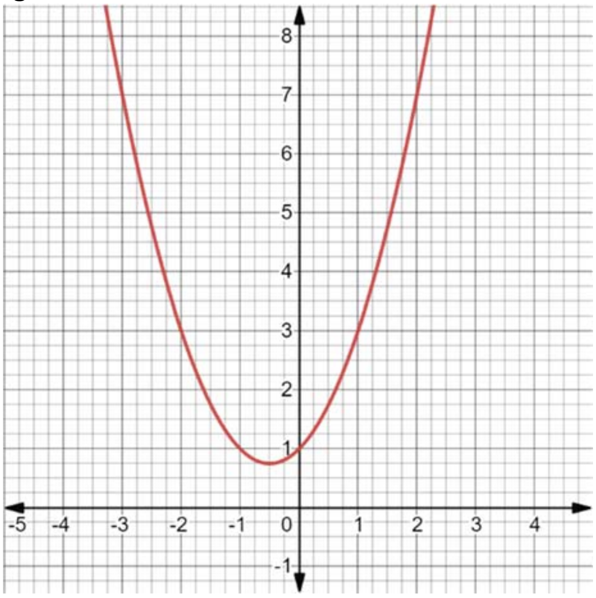
$$y = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

No tiene puntos de corte con el eje X.

Puntos de corte con el eje Y

$$x = 0 \Rightarrow h(0) = 1$$

Y así la gráfica de la función $h(x)$ corta al eje Y en el punto $(0, 1)$.
La gráfica quedaría de la siguiente forma:



c) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x) = x^2 + x + 1$, el eje de abscisas y las rectas $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 0$.

$$A = \int_{-1/2}^{0} h(x)dx = \int_{-1/2}^{0} (x^2 + x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = 0 - \left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{5}{12}u^2$$

El área del recinto es $\boldsymbol{A = \frac{5}{12}u^2}$.

RESPUESTAS DEL BLOQUE C

Problema 5:

Se desea probar la eficacia de dos tipos de vacunas, A y B, contra un virus determinado. Para ello, se seleccionan 500 voluntarios sin anticuerpos para este virus, a los que se les administra una de las vacunas o un placebo, resultando que 300 reciben la vacuna A, 150 la B y el resto el placebo. Se comprueba que el 90 % de los vacunados con la A y el 95 % de los vacunados con la B, generan anticuerpos, no generando anticuerpos de los que han recibido el placebo. Se selecciona uno de esos voluntarios al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya generado anticuerpos?

b) Si dicho voluntario no ha generado anticuerpos, ¿qué probabilidad hay de que se le haya administrado placebo?

Solución:

Sean los sucesos:

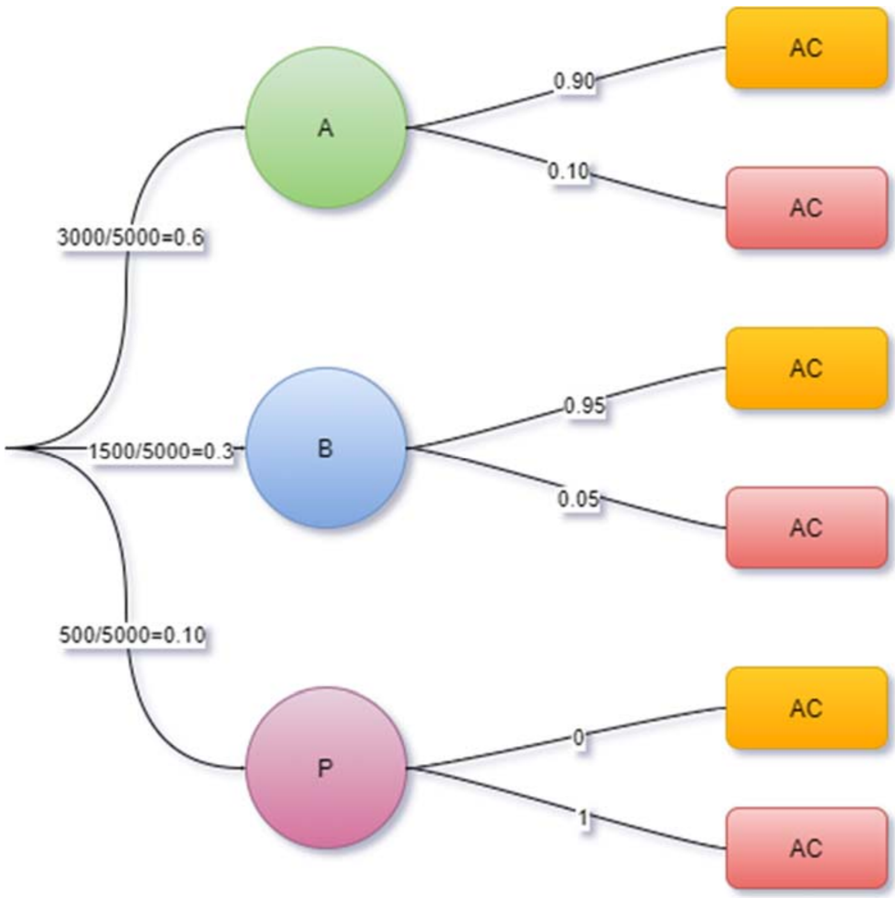
A: *"El voluntario recibe la vacuna A"*

B: *"El voluntario recibe la vacuna B"*

P: *"El voluntario recibe placebo"*

AC: *"El voluntario genera anticuerpos"*

En primer lugar, construiremos el árbol para identificar cada una de las probabilidades que se indican en el enunciado.



Así, resulta sencillo identificar las siguientes probabilidades:

$$p(A)=\frac{3000}{5000}=0.6 \quad p(AC/A)=0.90 \quad p(\overline{AC}/A)=0.10$$
$$p(B)=\frac{1500}{5000}=0.3 \quad p(AC/B)=0.95 \quad p(\overline{AC}/B)=0.05$$
$$p(P)=\frac{500}{5000}=0.10 \quad p(AC/P)=0 \quad p(\overline{AC}/P)=1$$

a) Por el Teorema de la Probabilidad Total

$$\begin{aligned} p(AC) &= p(A)\cdot p(AC/A)+p(B)\cdot p(AC/B)+p(P)\cdot p(AC/P)= \\ &= 0.6\cdot 0.90+0.3\cdot 0.95+0.10\cdot 0=0.825 \end{aligned}$$

La probabilidad de que haya generado anticuerpos es $\boldsymbol{p(AC)=0.825}$

b) Si dicho voluntario no ha generado anticuerpos, ¿qué probabilidad hay de que se le haya administrado placebo? Teorema de Bayes

$$p(P/\overline{AC})=\frac{p(P\cap\overline{AC})}{p(\overline{AC})}=\frac{p(P)\cdot p(\overline{AC}/P)}{1-p(AC)}=\frac{0.10\cdot 1}{1-0.825}=0.5714$$

$$\boldsymbol{p(P/\overline{AC})=0.5714}$$

También podría haberse planteado el problema como una tabla de contingencia:

	AC	$\overline{AC}$	Totales
A	2700	300	3000
B	1425	75	1500
P	0	500	500
Totales	4125	875	5000

Así,

a) $p(AC)=\frac{4125}{5000}=0.825$

b) $p(P/\overline{AC})=\frac{500}{875}=0.5714$

Problema 6:

De las compras realizadas en el último período de rebajas del pasado año, el 55 % se dedicaron a productos electrónicos, el 72 % se hicieron a través de Internet y, de las compras que se hicieron por Internet, el 64 % fueron de productos electrónicos. Se elige una compra al azar,

a) Calcule la probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por Internet.

b) Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por Internet o que se hayan comprado productos electrónicos.

c) Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de Internet.

Solución:

Sean los sucesos:

E: *''Compra realizada en productos electrónicos"*

I: *"Compra realizada a través de Internet"*

Entonces, según el enunciado:

$$p(E) = 55\% = 0.55$$
$$p(I) = 72\% = 0.72$$
$$p(E/I) = 64\% = 0.64$$

a) Como

$$p(E/I) = \frac{p(E \cap I)}{p(I)} = 0.64 \Rightarrow p(E \cap I) = 0.64 \cdot p(I) = 0.64 \cdot 0.72 = 0.4608$$

La probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por Internet es $\boldsymbol{p(E \cap I) = 0.4608}$

b) Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por Internet o que se hayan comprado productos electrónicos.

$$\boldsymbol{p(I \cup E)} = p(I) + p(E) - p(I \cap E) = 0.72 + 0.55 - 0.4608 = \mathbf{0.8092}$$

c) Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de Internet.

$$\boldsymbol{p(\bar{I}/\bar{E})} = \frac{p(\bar{I} \cap \bar{E})}{p(\bar{E})} = \frac{p(\overline{I \cup E})}{1 - p(E)} = \frac{1 - p(I \cup E)}{1 - p(E)} = \frac{1 - 0.8092}{1 - 0.55} = \mathbf{0.424}$$

RESPUESTAS DEL BLOQUE D

Problema 7:

a) En una Escuela Politécnica hay matriculados en el último curso 60 estudiantes de Ingeniería Eléctrica, 40 en Ingeniería Informática, 30 en Ingeniería Civil, 50 en Ingeniería Mecánica y 20 en Ingeniería Aeronáutica. Se quiere hacer una encuesta al 20 % de estos estudiantes, de manera proporcional al número de matriculados en cada titulación.

1.- ¿Qué tipo de muestreo se debe emplear?

2.- ¿Cuántos alumnos debe haber en la muestra y cuántos de cada titulación?

b) Dada la población $\{a, 10, 12, 11, 18\}$, ¿cuánto debe valer a, sabiendo que la media de las medias muestrales de tamaño 3, obtenidas mediante muestreo aleatoria simple, es 13.2?

Solución:

a) Recordemos brevemente algunos conceptos básicos sobre tipos de muestreo.

Muestreo aleatorio simple. Se realiza este tipo de muestreo cuando cada miembro de la población tiene la misma probabilidad de ser escogido en la muestra.

Muestreo aleatorio estratificado. Consiste en dividir previamente la población en grupos homogéneos o estratos, en los que los individuos comparten alguna característica común, y elegir muestras aleatorias simples en cada estrato.

Cuando hay k estratos cada uno con diferentes poblaciones: $N_1, N_2, \dots, N_k$, entonces para conformar una muestra de tamaño n tomamos $n_1, n_2, \dots, n_k$ individuos en cada estrato de modo que

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

y además cada uno de los números $n_1, n_2, \dots, n_k$ ha de ser proporcional a los tamaños de los estratos: $N_1, N_2, \dots, N_k$.

1. En nuestro caso, por tanto, debemos emplear el muestreo aleatorio estratificado.

Se debe emplear **muestreo aleatorio estratificado**.

2. Para el cálculo del número de alumnos en la muestra y en cada uno de los estratos (cada titulación) procederemos de la siguiente manera.

Como tenemos

60 estudiantes de Ingeniería Eléctrica

40 estudiantes de Ingeniería informática

30 estudiantes de Ingeniería Civil

50 estudiantes de Ingeniería Mecánica

20 estudiantes de Ingeniería Aeronáutica

el total de la población será $60 + 40 + 30 + 50 + 20 = 200$ estudiantes.

Como se quiere hacer una encuesta al 20 % de estos estudiantes, el tamaño de la muestra debe ser el 20 % de estos 200 estudiantes; es decir, 40 estudiantes.

El tamaño de la muestra debe ser de $\mathbf{40}$ estudiantes.

Basta ahora hacer reglas de tres para obtener el número de estudiantes de cada titulación que debe hacer en la muestra, resultando:

12 estudiantes de Ingeniería Eléctrica

8 estudiantes de Ingeniería informática

6 estudiantes de Ingeniería Civil

10 estudiantes de Ingeniería Mecánica

4 estudiantes de Ingeniería Aeronáutica

b) Según el Teorema Central del Límite, dada una variable aleatoria X de una población de media μ y desviación típica σ, entonces se verifica que:

1. La distribución de medias muestrales de tamaño n tiene media μ y desviación típica $\sigma/\sqrt{n}$.
2. La distribución de medias muestrales se aproxima a una normal a medida que crece el tamaño de la muestra n.

Como sabemos que la media de las medias muestrales de tamaño $n = 3$, obtenidas mediante muestreo aleatorio simple, es $\bar{X} = \mu = 13.2$, entonces:

$$\bar{X} = \frac{a + 10 + 12 + 11 + 18}{5} = 13.2$$

De donde,

$$\frac{a + 51}{5} = 13.2 \Rightarrow a + 51 = 66 \Rightarrow a = 15$$

$$a = \mathbf{15}$$

Problema 8:

Se desea estimar la proporción de individuos mayores de edad de una localidad que están en contra de la construcción de una central nuclear en su término municipal. Para ello, se pregunta a 100 individuos mayores de edad de esa localidad, elegidos de forma aleatoria, resultando que 45 de ellos rechazan la construcción de la central.

$a)$ Calcule un intervalo de confianza al 92 % para estimar la proporción real de individuos de esa localidad que están en contra de la construcción de la central?

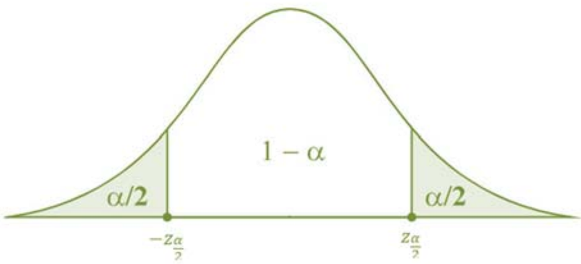
$b)$ Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar, para que al estimar la proporción de individuos de esa localidad que rechazan la construcción de la central, el error cometido sea inferior al 5 %.

Solución:

El **intervalo de confianza para la proporción** de individuos que cumplen una determinada característica en una población, con un nivel de confianza $1-\alpha$ construido a partir de una muestra de tamaño n, es:

$$I.C.(p) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

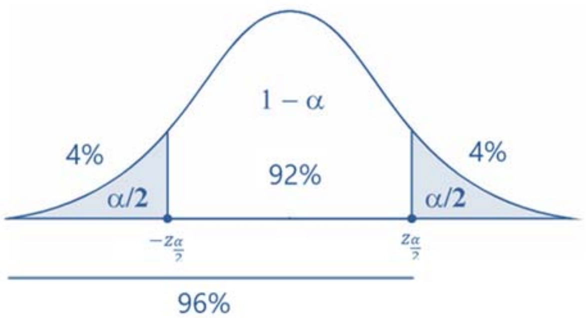
donde $z_{\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $\mathcal{Z} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ que verifica $P\left(-z_{\alpha/2} \leq \mathcal{Z} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$



El **error máximo admisible** en la estimación de la proporción, utilizando el intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza $1-\alpha$, es:

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

a) En nuestro caso el tamaño de la muestra es $n = 100$ y la proporción muestral es $\hat{p} = \frac{45}{100} = 0.45$. Además, el nivel de confianza es $1-\alpha = 92\ \% = 0.92$, luego $z_{\alpha/2} = 1.75$



Por tanto,

$$
\begin{aligned}
I.C.(p) &= \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \\
&= \left(0.45 - 1.75\cdot\sqrt{\frac{0.45\cdot 0.55}{100}}; 0.45 - 1.75\cdot\sqrt{\frac{0.45\cdot 0.55}{100}}\right) = \\
&= (0.45 - 0.0871;\ 0.45 + 0.0871) = \\
&= (0.3629;\ 0.5371)
\end{aligned}
$$

$$I.C.(p) = (\mathbf{0.3629, 0.5371})$$

b) Como el error máximo admisible viene dado por la expresión:

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Según los datos del enunciado, tendremos que:

$$0.05 = 1.75\cdot\sqrt{\frac{0.45\cdot 0.55}{n}}$$

De donde,

$$0.05 = 1.75\cdot\sqrt{\frac{0.2475}{n}} \Rightarrow (0.05)^2 = \left(1.75\cdot\sqrt{\frac{0.2475}{n}}\right)^2$$

Y despejando n, obtenemos que

$$(0.05)^2 = (1.75)^2\cdot\frac{0.2475}{n} \Rightarrow n = (1.75)^2\cdot\frac{0.2475}{(0.05)^2} \Rightarrow n = 303.19$$

Así, el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar para que, al estimar la proporción de individuos de esa localidad que rechazan la construcción de la central, el error cometido sea inferior al 5 %, es de **304** individuos.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

Problema 1:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$.

$a)$ Determine para qué valores del parámetro a, la matriz A tiene inversa.
$b)$ Para $a = 1$, calcule la inversa de A.
$c)$ Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B^t$, siendo $B = (0 \quad 1 \quad -1)$.

Problema 2:

Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x - 4y \le -19;\ \ 3x - 4y \le -13;\ \ x \ge -7;\ -x - y \ge 2.$$

$a)$ Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.
$b)$ ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanzan el mínimo y el máximo de la función $G(x,y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$ en la citada región factible? ¿Cuál es su valor? $c)$ Responda de forma razonada si la función $G(x,y)$ puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}$ en la región factible hallada.

BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & si\ \ x < 0 \\ x^2 - 2x & si\ \ x \ge 0 \end{cases}$.

$a)$ Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f en su dominio. $b)$ Estudie la monotonía de la función f y calcule el mínimo. $c)$ Calcule $I = \int_{-2}^{2} f(x) \cdot dx$.

Problema 4:

El número de diagnosticados de COVID-19 por PCR en Andalucía, medido en miles de personas, se aproxima por la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t - 0.3 & si\ \ 0.2 \le t \le 1.8 \\ 0.1t - 0.12 & si\ \ 1.8 < t \le 5 \\ -0.5t^2 + 8.3t - 28.62 & si\ \ 5 < t \le 10 \end{cases}$$

donde t es el tiempo, medido en meses, a partir del inicio de conteo en el mes de marzo de 2020.
$a)$ Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.
$b)$ ¿En qué instante o instantes es máximo el número de diagnosticados? ¿Cuál es su número?

BLOQUE C

Problema 5:

En una población, se sabe que el 15 % de las personas padece una enfermedad. Si la persona está enferma, un test da positivo en el 92 % de los casos, mientras que si la persona está sana, el test da positivo en el 4 % de los casos (falso positivo). Se elige una persona al azar de esa población.

$a)$ Calcule la probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma.

$b)$ Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo.

$c)$ Calcule la probabilidad de que saliendo el test negativo, la persona esté enferma.

Problema 6:

En una comunidad de vecinos, el 90 % de sus miembros tiene vehículo propio, el 40 % hace uso del transporte público y un 3 % ni tiene vehículo propio ni usa el transporte público. Se elige al azar un miembro de la comunidad.

$a)$ Calcule la probabilidad de que tenga vehículo propio o use el transporte público.

$b)$ Calcule la probabilidad de que use el transporte público y no tenga vehículo propio.

$c)$ Calcule la probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio.

BLOQUE D

Problema 7:

Para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la Unión Europea (UE), se toma una muestra aleatoria de 250 de estos residentes, obteniéndose que 115 estaban a favor de dejar de pertenecer a la UE.

$a)$ Calcule un intervalo de confianza al 99.5 %, para estimar la proporción real de esos residentes que está a favor de la salida del Reino Unido de la UE.

$b)$ Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra, para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la UE, con un error inferior al 5 %.

Problema 8:

Sea X una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 4.

$a)$ ¿Cuál es la desviación típica de la distribución de las medias de las muestral de tamaño 12 de la variable aleatoria X?

$b)$ Para estimar la media poblacional de la variable X, se toma una muestra aleatoria de tamaño 12, obteniéndose los siguientes resultados:

$$11.8;\ \ 10;\ \ 9.8;\ \ 12;\ \ 9.7;\ \ 10.8;\ \ 9.6;\ \ 11.3;\ \ 10.4;\ \ 12.2;\ \ 9.1;\ \ 10.5.$$

Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

$c)$ Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra, para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que 1.2.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

Problema 1:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$.

$a)$ Determine para qué valores del parámetro a, la matriz A tiene inversa.

$b)$ Para $a = 1$, calcule la inversa de A.

$c)$ Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B^t$, siendo $B = (0 \quad 1 \quad -1)$.

Solución:

a) Una matriz cuadrada A de orden n tiene inversa si, y sólo si, su determinante es distinto de cero. En nuestro caso,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = -a - 8 = 8 \Leftrightarrow a = -8$$

Por tanto, la matriz A tiene inversa si, y solo si, $\boldsymbol{a \neq -8}$.

b) Para $a = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Así tenemos que $|A| = -1 - 8 = -9 \neq 0$, luego existe la inversa de A.

Como la matriz adjunta de A, es:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{4}{9}} & \mathbf{\frac{1}{9}} & -\mathbf{\frac{2}{9}} \\ \mathbf{\frac{1}{9}} & -\mathbf{\frac{2}{9}} & \mathbf{\frac{4}{9}} \\ -\mathbf{\frac{2}{9}} & \mathbf{\frac{4}{9}} & \mathbf{\frac{1}{9}} \end{pmatrix}$$

c) Multiplicando la ecuación $A \cdot X = B^t$ por A^{-1} a la izquierda, se obtiene que: $X = A^{-1} \cdot B^t$. Por tanto,

$$X = A^{-1} \cdot B^t = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1/3} \\ \mathbf{-2/3} \\ \mathbf{1/3} \end{pmatrix}$$

Problema 2:

Se consideran las siguientes inecuaciones:

$$5x - 4y \leq -19;\;\; 3x - 4y \leq -13;\;\; x \geq -7;\;\; -x - y \geq 2.$$

$a)$ Represente la región factible definida por las inecuaciones anteriores y determine sus vértices.

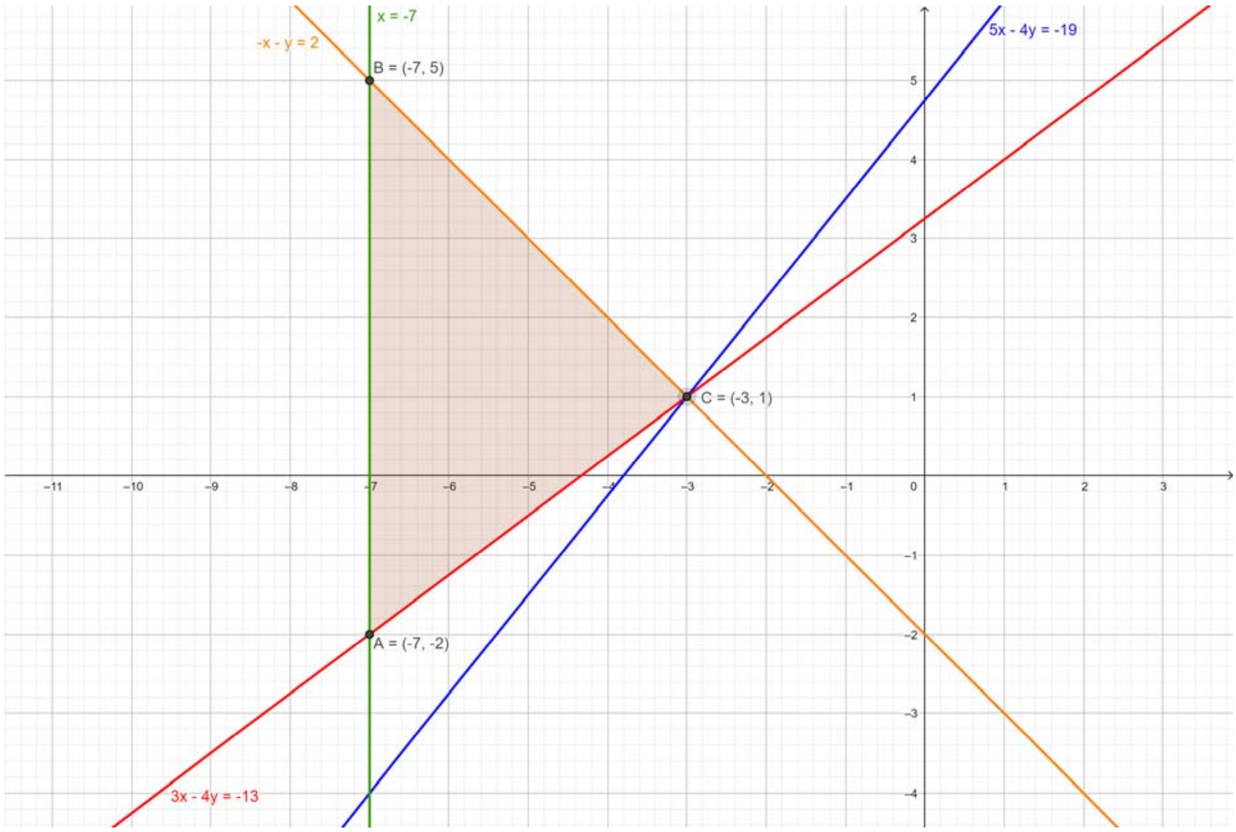
$b)$ ¿Cuáles son los puntos en los que se alcanzan el mínimo y el máximo de la función

$G(x, y) = -\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}y$ en la citada región factible? ¿Cuál es su valor?

$c)$ Responda de forma razonada si la función $G(x, y)$ puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}$ en la región factible hallada.

Solución:

a) La región factible definida por las inecuaciones dadas es:



Los vértices del recinto son los puntos $A(-7, -2)$, $B(-7, -5)$ y $C(-3, 1)$

Estos vértices se obtienen como intersección de las rectas correspondientes. Así, por ejemplo, el punto $A(-7, -2)$ se obtiene como intersección de las rectas $x = -7$, $3x - 4y = -13$; etc.

Vértice A	Vértice B	Vértice C
$\left.\begin{array}{r} x = -7 \\ 3x - 4y = -13 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} x = -7 \\ -x - y = 2 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} 3x - 4y = -13 \\ -x - y = 2 \end{array}\right\}$
$A(-7, -2)$	$B(-7, -5)$	$C(-3, 1)$

b) Para averiguar en qué puntos se alcanzan el mínimo y el máximo de la función objetivo $G(x,y)=-\frac{1}{5}x+\frac{5}{2}y$ en la región factible sustituimos cada vértice en dicha función:

$$\begin{aligned} G(A)=G(-7,-2) &= -\frac{1}{5}\cdot(-7)+\frac{5}{2}\cdot(-2)=-\frac{18}{5}=-3.6 \\ G(B)=G(-7,5) &= -\frac{1}{5}\cdot(-7)+\frac{5}{2}\cdot 5=\frac{139}{10}=13.9 \\ G(C)=G(-3,1) &= -\frac{1}{5}\cdot(-3)+\frac{5}{2}\cdot 1=\frac{31}{10}=3.1 \end{aligned}$$

Por tanto, la función $G(x,y)$ alcanza su mínimo en el vértice $A(-7,-2)$ con un valor de $-18/5$ y un máximo en el vértice $B(-7,-5)$ con un valor de $139/10$.

c) La función $G(x,y)$

no puede alcanzar el valor $\frac{47}{3}\cong 15.66$ ya que es superior al valor máximo que alcanza la función, 13.9.

RESPUESTAS DEL BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & si \;\; x < 0 \\ x^2 - 2x & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$.

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f en su dominio.

b) Estudie la monotonía de la función f y calcule el mínimo.

c) Calcule $I = \int_{-2}^{2} f(x) \cdot dx$.

Solución:

a) La función 2^{x+1} es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, por tanto, la función $f(x)$ también será continua y derivable para $x < 0$.

Además, la función $x^2 - 2x$ es también continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo que la función $f(x)$ también lo será para $x \geq 0$.

Falta, por tanto, estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 0$.

<u>Continuidad en $x = 0$</u>

Sabemos que una función $y = f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si, y solo si,

$$f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Como

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2^{x+1} = 2^{0+1} = 2 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 - 2x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

y, por tanto, la función $f(x)$ no es continua en $x = 0$, donde presenta una discontinuidad de salto finito.

Así, la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

<u>Derivabilidad en $x = 0$</u>

Como la función no es continua en $x = 0$, tampoco es derivable en dicho punto. Luego, la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

En definitiva, la función $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}$.

b) Para el estudio de la monotonía de una función (determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento) debemos estudiar el signo de la derivada primera $f'(x)$. En los puntos en los que $f'(x) > 0$ la función será creciente (↗) y en los puntos en los que $f'(x) < 0$ la función será decreciente (↘).

En nuestro caso, la derivada primera viene dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} 2^{x+1} \ln 2 & si \quad x < 0 \\ 2x - 2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Veamos dónde se anula dicha derivada.

- Si $x < 0$, $2^{x+1} \ln 2 \neq 0$.
- Si $x > 0$, $2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$

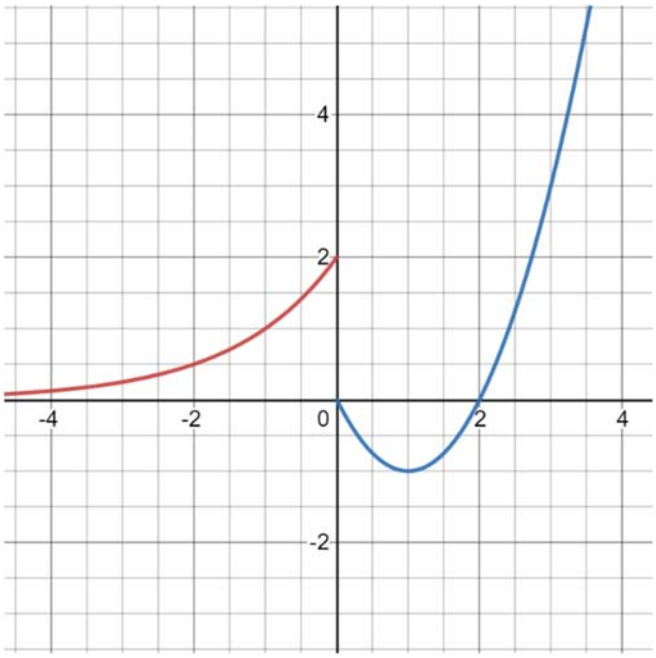
Por tanto,

	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1, +\infty)$
Signo de f'	$+$	$-$	$+$
	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

Así, la función es creciente en $(-\infty, \mathbf{0}) \cup (\mathbf{1}, +\infty)$ y decreciente en $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

La función tiene un **mínimo** en $(1, f(1))$, es decir, en $(\mathbf{1}, -\mathbf{1})$.

Mostramos la gráfica de la función para visualizar los resultados obtenidos.



c) Calculemos la integral pedida:

$$I = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0} 2^{x+1}dx + \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)dx = \left[\frac{2^{x+1}}{\ln 2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} =$$

$$= \frac{1}{ln2}(2 - 2^{-1}) + \left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{8}{3} - 4\right) =$$

$$= \frac{3}{2\ln 2} - \frac{4}{3}$$

$$I = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \mathbf{\frac{3}{2\ln 2} - \frac{4}{3}}$$

Problema 4:

El número de diagnosticados de COVID-19 por PCR en Andalucía, medido en miles de personas, se aproxima por la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases}-t^2+2t-0.3 \quad si \;\; 0.2\le t\le 1.8\\ 0.1t-0.12 \;\; si \;\; 1.8<t\le 5\\ -0.5t^2+8.3t-28.62 \;\; si \;\; 5<t\le 10\end{cases}$$

donde t es el tiempo, medido en meses, a partir del inicio de conteo en el mes de marzo de 2020.

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.

b) ¿En qué instante o instantes es máximo el número de diagnosticados? ¿Cuál es su número?

Solución:

a) El dominio de la función es el intervalo $[0.2, 10]$.

Cada uno de los trozos que forman parte de la función $f(t)$ es un polinomio y, por tanto, la función será continua y derivable en esos intervalos. Falta comprobar la continuidad y derivabilidad en $t = 1.8$ y en $t = 5$.

<u>Continuidad en $t = 1.8$</u>

$$f(1.8)=-1.8^2+2\cdot 1.8-0.3=0.06$$
$$\lim_{x\to 1.8^-} f(t)=-1.8^2+2\cdot 1.8-0.3=0.06$$
$$\lim_{x\to 1.8^+} f(t)=0.1\cdot 1.8-0.12=0.06$$

Por tanto, la función $f(t)$ es continua en $t = 1.8$

<u>Continuidad en $t = 5$</u>

$$f(5)=0.1\cdot 5-0.12=0.38$$
$$\lim_{x\to 5^-} f(t)=0.1\cdot 5-0.12=0.38$$
$$\lim_{x\to 5^+} f(t)=-0.5\cdot 5^2+8.3\cdot 5-28.62=0.38$$

Así, la función $f(t)$ es continua en $t = 5$.

En definitiva, la función $f(t)$ es continua en $[0.2, 10]$.

Pasemos a estudiar la derivabilidad de la función $f(t)$.

La derivada de la función es:

$$f'(t)=\begin{cases}-2t+2 & si & 0.2\le t<1.8\\ 0.1 & si & 1.8<t<5\\ -t+8.3 & si & 5<t\le 10\end{cases}$$

<u>Derivabilidad en $t = 1.8$</u>

$$f'(1.8^-)=\lim_{t\to 1.8^-} f'(t)=\lim_{t\to 1.8^-}(-2t+2)=-2\cdot 1.8+2=-1.6$$
$$f'(1.8^+)=\lim_{t\to 1.8^+} f'(t)=\lim_{t\to 1.8^+} 0.1=0.1$$

Como $f'(1.8^-)\neq f'(1.8^+)$, la función no es derivable en $t = 1.8$

<u>Derivabilidad en $t = 5$</u>

$$f'(5^-) = \lim_{t\to 5^-} f'(t) = \lim_{t\to 5^-} 0.1 = 0.1$$
$$f'(5^+) = \lim_{t\to 5^+} f'(t) = \lim_{t\to 5^+} (-t + 8.3) = -5 + 8.3 = 3.3$$

Como $f'(5^-) \neq f'(5^+)$, la función no es derivable en $t = 5$

Así pues, la función $f(t)$ es derivable en $[0.2, 10] - \{1.8, 5\}$.

En resumen, la función $f(t)$ es **continua en $[0.2,\ 10]$** y **derivable en $[0.2, 10] - \{1.8; 5\}$**.

b) Para obtener el máximo de nuestra función, estudiaremos los cambios de signo de su primera derivada $f'(t)$.

Como

$$f'(t) = \begin{cases} -2t + 2 & si \quad 0.2 \le t < 1.8 \\ 0.1 & si \quad 1.8 < t < 5 \\ -t + 8.3 & si \quad 5 < t \le 10 \end{cases}$$

Si $0.2 < t < 1.8$, entonces $-2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Si $1.8 < t < 5$, entonces la derivada es 0.1 y, por tanto, no se anula.

Si $5 < t < 10$, $-t + 8.3 = 0 \ \Leftrightarrow t = 8.3$

Por tanto,

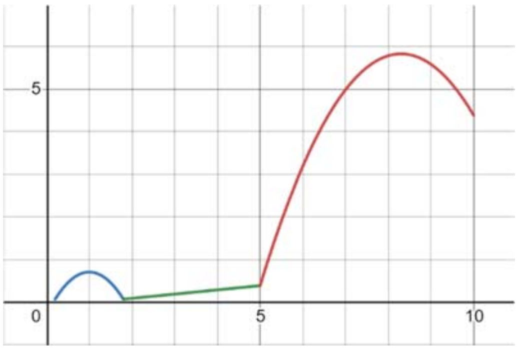
	$(0.2, 1)$	$(1, 1.8)$	$(1.8, 5)$	$(5, 8.3)$	$(8.3, 10)$
Signo de f'	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗	Creciente ↗	Decreciente ↘

Así, los máximos relativos de la función se encuentran en los puntos de abscisas $t = 1$ y $t = 8.3$. Como

$$f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 - 0.3 = 0.7$$
$$f(8.3) = -0.5 \cdot 8.3^2 + 8.3 \cdot 8.3 - 28.62 = 5.825$$

El máximo absoluto de la función se alcanza a los **8.3** meses y es de **$5\ 825$** personas.

Mostramos la gráfica de la función para visualizar los resultados obtenidos.



RESPUESTAS DEL BLOQUE C

Problema 5:

En una población, se sabe que el 15 % de las personas padece una enfermedad. Si la persona está enferma, un test da positivo en el 92 % de los casos, mientras que si la persona está sana, el test da positivo en el 4 % de los casos (falso positivo). Se elige una persona al azar de esa población.

$a)$ Calcule la probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma.

$b)$ Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo.

$c)$ Calcule la probabilidad de que saliendo el test negativo, la persona esté enferma.

Solución:

Sean los sucesos:

E: *"La persona padece la enfermedad en estudio"*

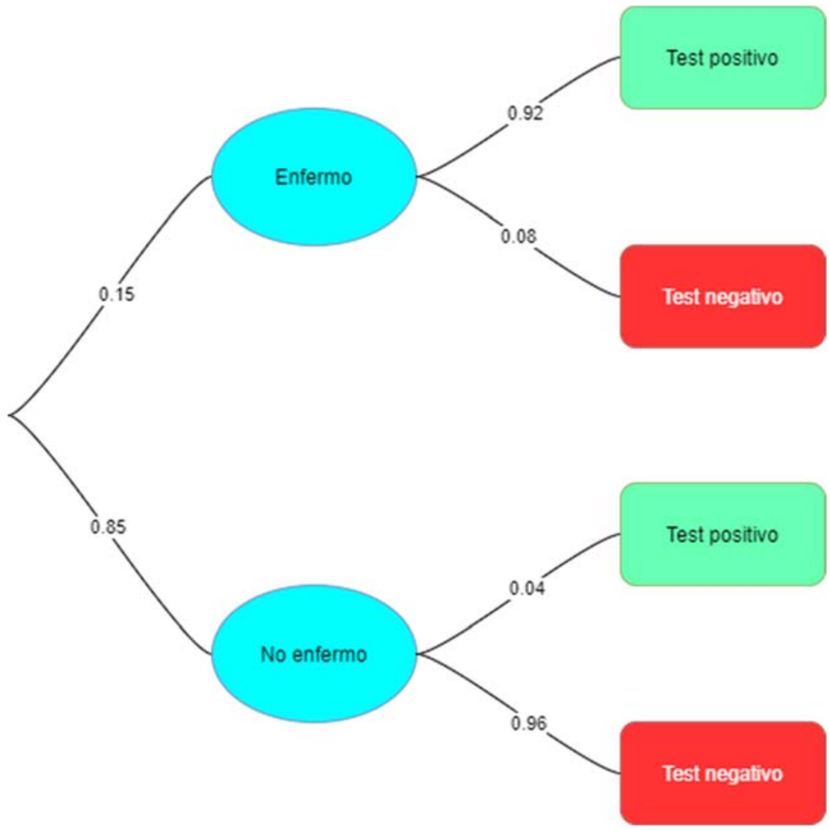
P: *"El test da positivo"*

N: *"El test da negativo"*

Según el enunciado, sabemos que:

$$p(E) = 0.15$$
$$p(P/E) = 0.92$$
$$p(P/\bar{E}\ ) = 0.04$$

Podemos construir el siguiente diagrama en árbol:



a) Por el teorema de la probabilidad total, tenemos que:

$$p(P) = p(E) \cdot p(P/E) + p(\bar{E}) \cdot p(P/\bar{E}) = 0.15 \cdot 0.92 + 0.85 \cdot 0.04 = 0.172$$

Luego, aplicando el teorema de Bayes:

$$p(E/P) = \frac{p(E \cap P)}{p(P)} = \frac{p(E) \cdot p(P/E)}{p(E) \cdot p(P/E) + p(\bar{E}) \cdot p(P/\bar{E})} = \frac{0.15 \cdot 0.92}{0.172} = 0.8023$$

La probabilidad de que, habiendo dado positivo el test, la persona esté enferma es $\mathbf{0.8023}$

b) $p(E \cap N) = p(E) \cdot p(N/E) = 0.15 \cdot (1 - 0.92) = 0.15 \cdot 0.08 = 0.012$

La probabilidad de que la persona esté enferma y el test salga negativo es $\mathbf{0.012}$

c) Por el teorema de Bayes:

$$p(E/N) = \frac{p(E \cap N)}{p(N)} = \frac{0.012}{1 - 0.172} = \frac{0.012}{0.828} = 0.0145$$

La probabilidad de que, saliendo el test negativo, la persona esté enferma es $\mathbf{0.0145}$

Problema 6:

En una comunidad de vecinos, el 90 % de sus miembros tiene vehículo propio, el 40 % hace uso del transporte público y un 3 % ni tiene vehículo propio ni usa el transporte público. Se elige al azar un miembro de la comunidad.

a) Calcule la probabilidad de que tenga vehículo propio o use el transporte público.

b) Calcule la probabilidad de que use el transporte público y no tenga vehículo propio.

c) Calcule la probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio.

Solución:

Sean los sucesos:

A: *"Tener vehículo propio"*

B: *"Hacer uso del transporte público"*

Según el enunciado:

$$p(A) = 0.90$$
$$p(B) = 0.40$$
$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.03$$

a) Sabemos que, por las leyes de Morgan, $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$. Por tanto,
$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.03 \Rightarrow p(\overline{A \cup B}) = 0.03 \Rightarrow 1 - p(A \cup B) = 0.03 \Rightarrow p(A \cup B) = 1 - 0.03 = 0.97$

La probabilidad de que tenga vehículo propio o use el transporte público es $\boldsymbol{p(A \cup B) = 0.97}$

b) La probabilidad de que use el transporte público y no tenga vehículo propio puede expresarse de la siguiente manera:

$$p(B \cap \bar{A}) = p(B - A) = p(B) - p(A \cap B)$$

Como

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

entonces,

$$0.97 = 0.90 + 0.40 - p(A \cap B)$$

de donde $p(A \cap B) = 0.90 + 0.40 - 0.97 = 0.33$, luego:

$$p(B \cap \bar{A}) = p(B - A) = p(B) - p(A \cap B) = 0.40 - 0.33 = 0.07$$

La probabilidad de que use el transporte público y no tenga vehículo propio es $\boldsymbol{p(B \cap \bar{A}) = 0.07}$

c) La probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio se expresa como:

$$p(B/\bar{A}) = \frac{p(B \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{0.07}{1 - 0.90} = \frac{0.07}{0.10} = 0.7$$

La probabilidad de que use el transporte público, sabiendo que no tiene vehículo propio es $\boldsymbol{p(B/\bar{A}) = 0.7}$

RESPUESTAS DEL BLOQUE D

Problema 7:

Para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la Unión Europea (UE), se toma una muestra aleatoria de 250 de estos residentes, obteniéndose que 115 estaban a favor de dejar de pertenecer a la UE.

a) Calcule un intervalo de confianza al 99.5 %, para estimar la proporción real de esos residentes que está a favor de la salida del Reino Unido de la UE.

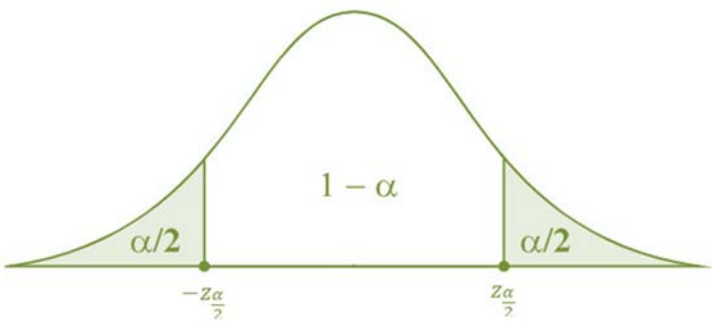
b) Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra, para estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la UE, con un error inferior al 5 %.

Solución:

El **intervalo de confianza para la proporción** de individuos que cumplen una determinada característica en una población, con un nivel de confianza $1-\alpha$ construido a partir de una muestra de tamaño n, es:

$$I.C.(p) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $\mathcal{Z} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ que verifica $P\left(-z_{\alpha/2} \leq \mathcal{Z} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

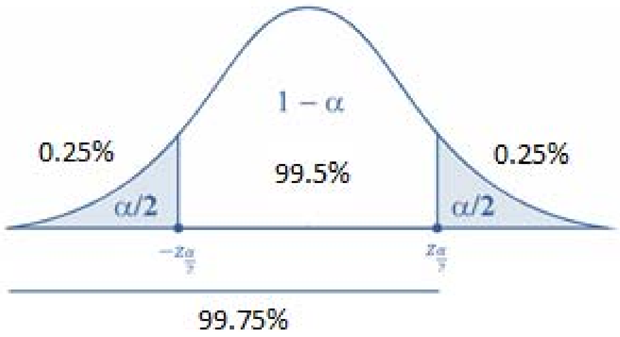


El **error máximo admisible** en la estimación de la proporción, utilizando el intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza $1-\alpha$, es:

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

a) En nuestro caso el tamaño de la muestra es $n = 250$ y la proporción muestral es $\hat{p} = \frac{115}{250} = 0.46$.

   Además, el nivel de confianza es $1-\alpha = 99.5\ \% = 0.995$; luego, observando la tabla de la distribución Normal tipificada, obtenemos que $z_{\alpha/2} = 2.805$.



Por tanto,

$$\begin{aligned} I.C.(p) &= \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} ; \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \\ &= \left(0.46 - 2.805 \cdot \sqrt{\frac{0.46 \cdot 0.54}{250}} ; 0.45 - 2.805 \cdot \sqrt{\frac{0.46 \cdot 0.54}{250}}\right) = \\ &= (0.46 - 0.0884, 0.45 + 0.0884) = \\ &= (0.3716, 0.5484) \end{aligned}$$

$$I.C.(p) = (\mathbf{0.3716, 0.5484})$$

b) Como el error máximo admisible viene dado por la expresión:

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Según los datos del enunciado, tendremos que:

$$0.05 = 2.805 \cdot \sqrt{\frac{0.46 \cdot 0.54}{n}}$$

De donde,

$$0.05 = 2.805 \cdot \sqrt{\frac{0.2484}{n}} \Rightarrow (0.05)^2 = \left(2.805 \cdot \sqrt{\frac{0.2484}{n}}\right)^2$$

Y despejando n, obtenemos que

$$(0.05)^2 = (2.805)^2 \cdot \frac{0.2484}{n} \Rightarrow n = (2.805)^2 \cdot \frac{0.2484}{(0.05)^2} \Rightarrow n = 781.77$$

Así, el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar para que, al estimar la proporción de residentes británicos en España que están a favor de la salida del Reino Unido de la UE, el error cometido sea inferior al 5 %, es de $\mathbf{782}$ individuos.

Problema 8:

Sea X una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 4.

a) ¿Cuál es la desviación típica de la distribución de las medias de las muestral de tamaño 12 de la variable aleatoria X?

b) Para estimar la media poblacional de la variable X, se toma una muestra aleatoria de tamaño 12, obteniéndose los siguientes resultados:

$11.8;\ \ 10;\ \ 9.8;\ \ 12;\ \ 9.7;\ \ 10.8;\ \ 9.6;\ \ 11.3;\ \ 10.4;\ \ 12.2;\ \ 9.1;\ \ 10.5.$

Con los datos obtenidos de la muestra, determine un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

c) Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra, para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que 1.2.

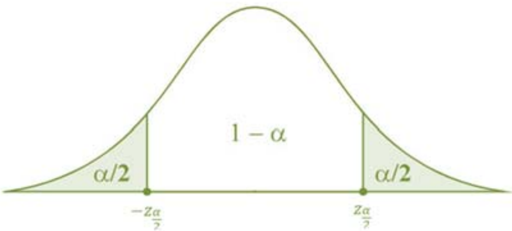
Solución:

Como sabemos, si la variable X sigue una distribución Normal, $X \backsim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$, entonces la variable aleatoria de las medias muestrales $\bar{X}$ sigue también una distribución Normal $\bar{X} \backsim \mathcal{N}\left(\mu;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

También es sabido que el intervalo de confianza para estimar la media viene dado por la expresión:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable Normal tipificada $\mathcal{Z} \backsim \mathcal{N}(0;1)$ que verifica que $p(\mathcal{Z} \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.



Además, el error máximo de la estimación para el intervalo de la media poblacional es:

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

de donde el tamaño mínimo de la muestra necesario para estimar la media poblacional con un error menor que $\mathcal{E}$ es:

$$n = \left(z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2$$

a) En nuestro caso, la variable X sigue una $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ con desviación típica $\sigma = 4$. Como sabemos que las medias de las muestras de tamaño $n = 12$ de la variable X sigue la distribución

$$\bar{X} \backsim \mathcal{N}\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Entonces, $\bar{X} \backsim \mathcal{N}\left(\mu,\frac{4}{\sqrt{12}}\right) \equiv \mathcal{N}\left(\mu,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Por tanto, la desviación típica de la distribución de las medias de las muestras de tamaño 12 de la variable aleatoria X es $\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$.

b) Como el intervalo de confianza pedido viene dado por la expresión:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

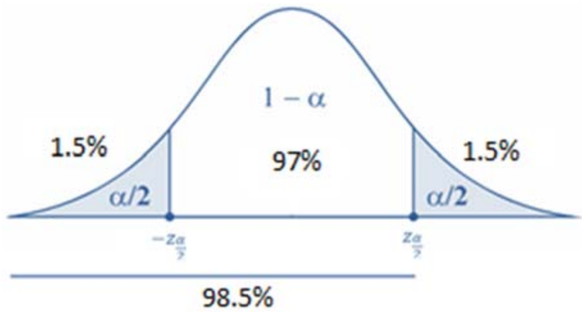
vamos a calcular cada uno de los elementos de dicha expresión.

La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{11.8 + 10 + 9.8 + 12 + 9.7 + 10.8 + 9.6 + 11.3 + 10.4 + 12.2 + 9.1 + 10.5}{12} = 10.6$$

Como el nivel de confianza es del 97 %, $1 - \alpha = 97\ \% = 0.97$, de donde $\alpha = 0.3$ y:

$$p(\mathcal{Z} \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.03}{2} = 0.985$$



Por tanto, observando la tabla de la distribución Normal tipificada obtenemos que $z_{\alpha/2} = 2.17$.

Ya tenemos todo lo necesario para aplicar la fórmula del intervalo de confianza:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(10.6 - 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{12}},\quad 10.6 + 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{12}}\right)$$
$$= (10.6 - 2.5057, 10.6 + 2.5057) = (8.0943, 13.1057)$$

$$I.C.(\mu) = (\mathbf{8.0943}, \mathbf{13.1057})$$

c) En la fórmula del error máximo, despejamos n:

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \Rightarrow n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2$$

Por tanto, el tamaño de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error cometido al estimar la media poblacional sea menor que 1.2, es:

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2 = \left(2.17 \cdot \frac{4}{1.2}\right)^2 = 52.321$$

Luego el tamaño mínimo de la muestra es $n = \mathbf{53}$