Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1.A:

Un hotel compra azúcar y sal a su proveedor habitual. El azúcar lo compra a 7*m* euros el kilogramo y la sal a 2 *m* euros el kilogramo. La última compra ha sido de 22.5 kilogramos en total, entre azúcar y sal, y por ella ha pagado 98 *m* euros.

a) **[0.5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) donde las incógnitas $\boldsymbol{x}$ e *y* sean las cantidades de azúcar y sal compradas.

b) **[2 puntos]** Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el precio de la sal fuese de 0.2 euros el kilogramo? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el precio de la sal. ¿Cuántos kilogramos compró de azúcar en tal caso?

Problema 1.B:

Una empresa monta dos tipos de palés. Cada palé de tipo *A* requiere 3 horas de preparación en el taller *T*1 y 4 horas de preparación en el taller *T*2. Cada palé de tipo *B* requiere 1 hora de preparación en el taller *T*1 y 3 horas de preparación en el taller *T*2. Cada semana se dispone de un total de 30 horas para uso del taller *T*1 y de 60 horas de uso del taller *T*2. Cada palé de tipo *A* contiene una caja y cada palé de tipo *B* contiene dos cajas, existiendo el compromiso comercial de entregar al menos 4 cajas semanales.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos palés de cada tipo puede preparar en una semana para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría preparar cuatro palés de cada tipo en una semana?

b) **[0.75 puntos]** Si se obtiene un beneficio neto de 2 000 euros por la venta de cada panel de tipo *A* y de 1000 euros por cada palé de tipo *B* ¿cuántos debería preparar de cada tipo para maximizar el beneficio neto? ¿A cuánto ascendería dicho beneficio?

Problema 2.A:

Dada la función $\boldsymbol{f(x)=\frac{a\cdot x}{3x^2+1}}$ se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar el valor de $\boldsymbol{a}$ que verifica que $\boldsymbol{F(0)=0}$ y $\boldsymbol{F(1)=\frac{4}{3}\cdot ln(4)}$ donde $\boldsymbol{F}$ denota una primitiva de $\boldsymbol{f}$.

b) **[2 puntos]** Considerando el valor de $\boldsymbol{a}$ obtenido en el apartado anterior, estudiar y representar gráficamente la función $\boldsymbol{f}$ en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje *OX* entre $\boldsymbol{x=-1}$ y $\boldsymbol{x=1}$.

Problema 2.B:

Se ha investigado el tiempo en minutos (f) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento en días (x) de los deportistas, obteniéndose que:

$$f(x) = 2 + \frac{300}{x + 30}, x \geq 0$$

a) **[2 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio ¿Aumenta en algún momento el tiempo que se tarda en realizar la prueba?

b) **[0.5 puntos]** Por mucho que entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de dos minutos? ¿Cuánto tiempo hay que entrenar para hacer la prueba en menos de 4 minutos?

Problema 3.A:

Cierto estudio de mercado revela que el 45 % de los entrevistados consume el producto *A* y el 60 % de los entrevistados consume el producto *B*. Además, se obtiene que el porcentaje de entrevistados que consume ambos productos es del 20 %. Si seleccionamos al azar un individuo de los entrevistados.

a) **[1.25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que consuma el producto A pero no consuma el producto *B*?

b) **[1.25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que consuma alguno de los dos productos?

Problema 3.B:

Los estudiantes de un instituto pueden optar por cursar inglés o francés. En un determinado curso hay 500 estudiantes de los que 460 estudian inglés y el resto francés. La mitad de los estudiantes que estudian inglés son mujeres. De los que estudian francés, el 75 % son mujeres.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) **[1.25 puntos]** Elegida una estudiante al azar entre mujeres ¿cuál es la probabilidad de que estudie francés?

Problema 4A:

Antes de un referéndum, se desea realizar un estudio para estimar los resultados del mismo.

a) **[1 punto]** ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de personas que votarán *SÍ* a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.04 y un nivel de confianza del 99 %?

b) **[1.5 puntos]** En una muestra aleatoria de 500 votantes se obtuvo que 100 de ellos tienen la intención de votar *SÍ*. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de personas que votarán *SÍ* en el referéndum

Problema 4B:

El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede expresar mediante una distribución normal con desviación típica 0.4 años.

a) **[1.5 puntos]** Si se toma una muestra aleatoria de 600 usuarios y se obtiene que el tiempo medio de renovación de sus teléfonos fue de 1.8 años, construye a partir de dicha muestra un intervalo de confianza para el tiempo medio de renovación, al 90 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo de renovación a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.3 años y un nivel de confianza del 90 %?

*Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1.28) = 0.90; F(1.64) = 0.95; F(1.96) = 0.975; F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1.A:

Un hotel compra azúcar y sal a su proveedor habitual. El azúcar lo compra a 7m euros el kilogramo y la sal a 2 m euros el kilogramo. La última compra ha sido de 22.5 kilogramos en total, entre azúcar y sal, y por ella ha pagado 98 m euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades de azúcar y sal compradas.

b) Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que el precio de la sal fuese de 0.2 euros el kilogramo? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el precio de la sal. ¿Cuántos kilogramos compró de azúcar en tal caso?

SOLUCION

Sean x los kilogramos de azúcar e y los de sal.

El sistema es $\begin{cases} x+y=22.5 \\ 7mx+2my=98m \end{cases}$

donde la primera ecuación representa el total kilogramos y la segunda su precio.

Resolvemos. Tenemos dos casos

Caso 1. Si $m \neq 0$. Podemos entonces dividir por m. Tenemos dos casos

$$\begin{cases} x+y=22.5 \\ 7mx+2my=98m \end{cases} \text{ equivale a } \begin{cases} x+y=22.5 \\ 7x+2y=98 \end{cases}$$

Despejando y en la primera ecuación queda $7x+2(22.5-x)=98$ que

operando resulta

$5x=98-45$ y finalmente $x=10.6$. De la otra ecuación $y=22.5-10.6=11.9$

Es un sistema con solución única (compatible y determinado).

Caso 2. Si $m=0$. En estas circunstancias, el sistema es $\begin{cases} x+y=22.5 \\ 0=0 \end{cases}$

La segunda ecuación no aporta nada y podemos eliminarla. Hay infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado). Podría añadirse que solo tienen sentido cantidades positivas, luego x puede tomar cualquier valor con $0 \leq x \leq 22.5$ en tanto $y=22.5-x$.

Podemos ya responder a las cuestiones del enunciado. Si el precio de la sal fuera 0.2 entonces 0.2 = 2m de donde m = 0.1.

Sí, es posible que el precio de la sal fuese 0.2 euros por kilogramo.

En tal caso compraría 10.6 kilogramos de azúcar. De hecho, hay solución única siempre que el precio sea no nulo y las cantidades que compra serías exactamente las mismas.

Problema 1.B:

Una empresa monta dos tipos de palés. Cada palé de tipo A requiere 3 horas de preparación en el taller T1 y 4 horas de preparación en el taller T2. Cada palé de tipo B requiere 1 hora de preparación en el taller T1 y 3 horas de preparación en el taller T2. Cada semana se dispone de un total de 30 horas para uso del taller T1 y de 60 horas de uso del taller T2. Cada palé de tipo A contiene una caja y cada palé de tipo B contiene dos cajas, existiendo el compromiso comercial de entregar al menos 4 cajas semanales.

¿Cuántos palés de cada tipo puede preparar en una semana para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría preparar cuatro palés de cada tipo en una semana?

Si se obtiene un beneficio neto de 2 000 euros por la venta de cada panel de tipo A y de 1 000 euros por cada palé de tipo B ¿cuántos debería preparar de cada tipo para maximizar el beneficio neto? ¿A cuánto ascendería dicho beneficio?

SOLUCION

Sean x los palés de tipo A e y los de tipo B. Sea:

La restricción de tiempo en el taller T1 viene dada por $r: 3x + y \leq 30$ en tanto la restricción de tiempo en el taller T2 es $s: 4x + 3y \leq 60$. En cuanto al número mínimo de cajas, corresponde a $s: x + 2y \geq 4$. Hacemos las tablas respectivas para dibujarlas

$r: 3x + y = 30$

x	y
0	30
10	0

$s: 4x + 3y = 60$

x	y
0	20
15	0

$t: x + 2y = 4$

x	y
4	0
0	2

Calculamos los puntos de corte. Uno de ellos debe ser la solución.

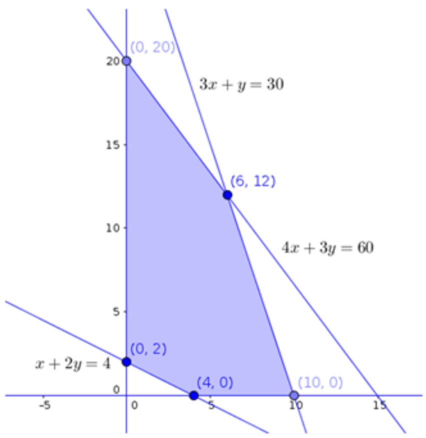
$P = t \cap OX,\ Q = t \cap OY,\ R = s \cap OY$

$$S = r \cap s = \begin{cases} 3x + y = 30 \\ 4x + 3y = 60 \end{cases} \begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \end{cases}$$

$$T = s \cap OX$$

De donde P(4, 0), Q(0, 2), R(0, 20), S (6, 12) y T (10, 0).

La región factible es pues la siguiente:



Se ve gráficamente que los otros puntos de corte no están en el primer cuadrante. Podrían calcularse también sin dificultad.

El punto x = 4, y = 4 cumple todas las restricciones. Por tanto:

Sí, podrían preparase **4** palés de cada tipo.

Sea $B(x, y) = 2\,000x + 1\,000y$ el beneficio en euros.

Para maximizarlo, calculamos cuánto vale en los puntos extremos.

$$B(4, 0) = 8\,000$$

$$B(0, 2) = 2\,000$$

$$B(0, 20) = 20\,000$$

$$B(6, 12) = 24\,000$$

$$B(10, 0) = 20\,000$$

Es claro pues que el beneficio máximo se alcanza en el punto (6, 12). En conclusión:

El beneficio máximo se alcanza produciendo **6** palés de tipo A y **12** palés de tipo B.

Dicho beneficio son **24 000 euros**.

Problema 2.A:

Dada la función $f(x) = \frac{a \cdot x}{3x^2+1}$ se pide:

Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = \frac{4}{3} \cdot ln(4)$ donde F denota una primitiva de f.

Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje OX entre $x = -1$ y $x = 1$.

SOLUCION

Calculamos la primitiva de f.

$$F(x) = \int \frac{a \cdot x}{3x^2 + 1} dx = \frac{a}{6} ln|3x^2 + 1| + k$$

$$\begin{cases} F(0) = \frac{a}{6} ln(1) + k \\ F(1) = \frac{a}{6} ln(4) + k \end{cases}$$

$$F(0) = \frac{a}{6} 0 + k = 0 \Longrightarrow k = 0$$

$$F(1) = \frac{a}{6} ln(4) = \frac{4}{3} ln(4) \Longrightarrow a = 8$$

La solución es $\boldsymbol{a = 8}$

Sea $a = 8$

$$y = \frac{8x}{3x^2 + 1}$$

Estudiemos primero su dominio. El único problema aparecería si se anulara el denominador. Ahora bien, eso no puede ocurrir pues la ecuación $3x^2 + 1 = 0$ no tiene solución alguna. El dominio son todos los reales. Es fácil notar que la función es impar $f(-x) = -f(x)$ por lo que bastaría estudiarla en $(0, \infty)$. No obstante, vamos a hacer el estudio en todos los reales, el hecho de ser impar nos servirá de comprobación.

Calculamos los límites en los infinitos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

que nos da una asíntota horizontal y = 0 en ambos infinitos. No hay, por tanto, asíntota oblicua.

La función f es continua y derivable en todo su dominio D, corta al eje OY en el punto (0, 0) y al eje OX también en (0, 0)

Para estudiar su crecimiento, calculamos su derivada.

$$f'(x) = \frac{8(3x^2+1)-8x(6x)}{(3x^2+1)^2} = \frac{-24x+8}{(3x^2+1)^2}.$$

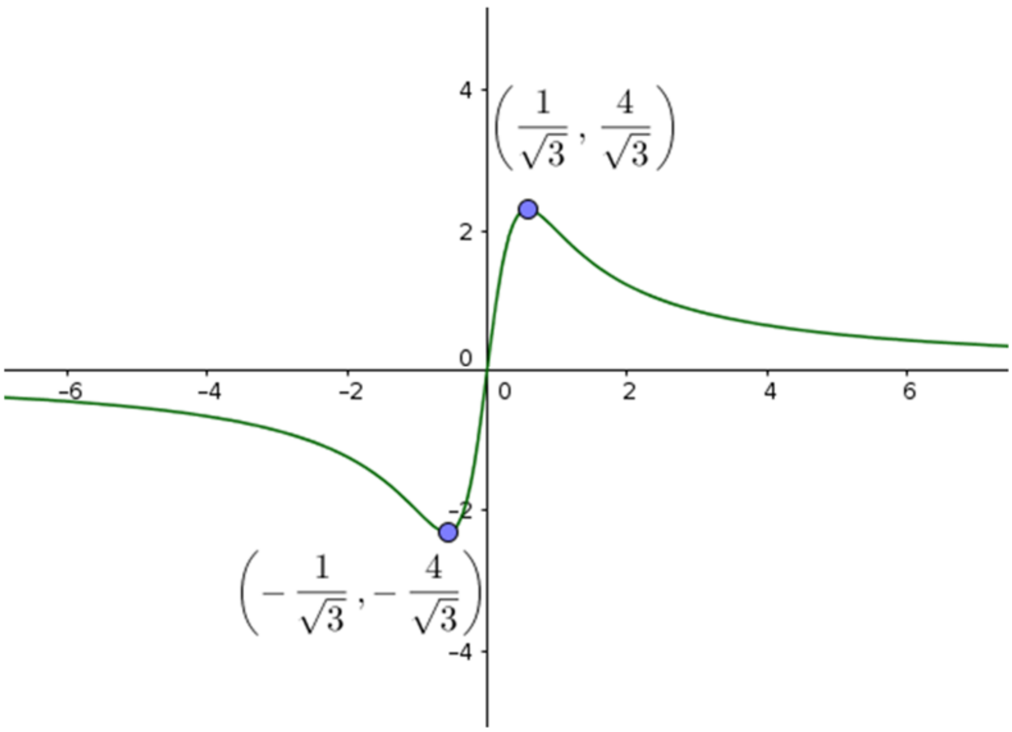
Para que se anule, debe ser $-24x^2 + 8 = 0$ que da como valores $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$.

Dando valores intermedios, $f'(-1) = -16 < 0$, $f'(0) = 8 > 0$ y $f'(1) = -16 < 0$ obtenemos que es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ y creciente en $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

El estudio de la concavidad es muy complejo, por lo que lo omitiremos.

Dando como valores los puntos donde cambia la derivada tenemos $f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-4}{\sqrt{3}}$ y $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Estamos ya en posición de dibujar la gráfica.



Obsérvese la simetría. Vamos a calcular el área, utilizando dicha simetría.

$$Área = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx = 2\int_{0}^{1} f(x)dx = 2\frac{4}{3}ln|3x^2+1|\Big]_0^1 = \frac{8}{3}ln(4)$$

Nótese que podría hacerse también como $\int_0^1 f(x)dx - \int_{-1}^0 f(x)dx$ y el resultado sería el mismo.

El área es $\boldsymbol{\frac{8}{3}ln(4)}$ aproximadamente **3.70.**

Problema 2.B:

Se ha investigado el tiempo en minutos(f) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento en días (x)de los deportistas, obteniéndose que:

$$f(x) = 2 + \frac{300}{x+30}, x \geq 0$$

Estudia y representa gráficamente la función $f$en todo su dominio ¿Aumenta en algún momento el tiempo que se tarda en realizar la prueba?

Por mucho que entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de dos minutos? ¿Cuánto tiempo hay que entrenar para hacer la prueba en menos de 4 minutos?

SOLUCION

En primer lugar, debemos notar que, aunque la función puede definirse en todos los reales (salvo el -30 que anula al denominador) no tiene sentido en los negativos, pues obviamente no hay tiempos negativos de entrenamiento. De hecho, es donde nos dicen que está definida.

En $[0, +\infty)$ dicha función es continua.

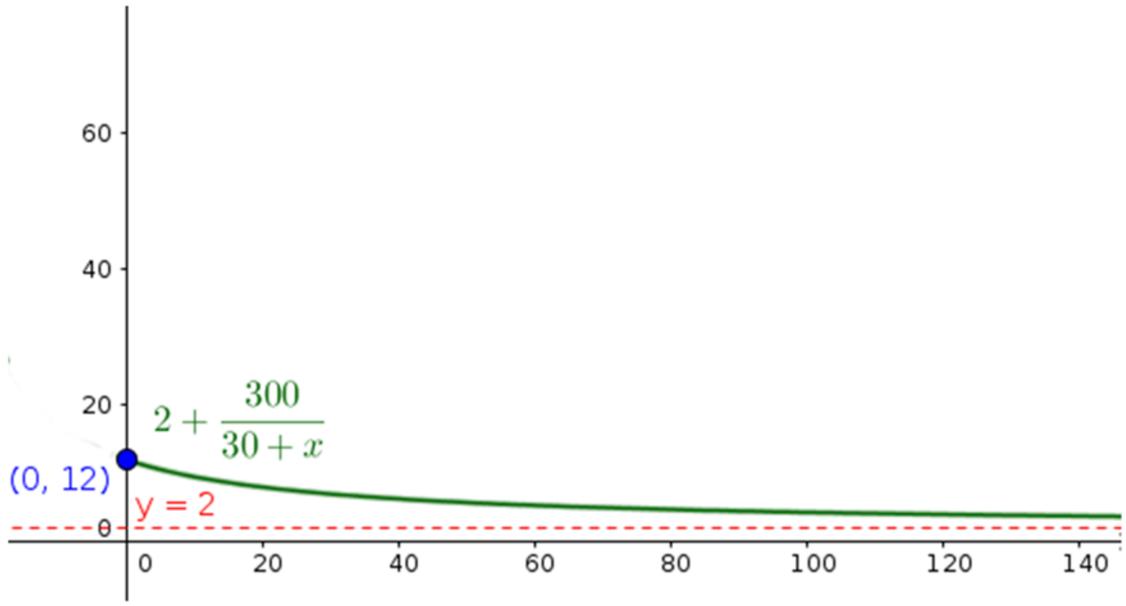
Si derivamos, $f'(x) = \frac{-300}{(x+30)^2} < 0$ por lo que la función es siempre decreciente. A más entrenamiento, menos tiempo en hacer la prueba siempre. En otras palabras:

No, el tiempo en realizar la prueba no aumenta en ningún momento

La segunda derivada es $f''(x) = \frac{600}{(x+30)^3} > 0$ con lo que la función siempre tiene curvatura positiva (ramas hacia arriba).

Puesto que no hay discontinuidades y las derivadas primera y segunda no se anulan, los únicos puntos que necesitamos dar son los extremos del dominio. $f(0) = 12$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$. De paso, notamos que hay una asíntota horizontal en $+\infty$ de modo que no hay asíntota oblicua en ese infinito. En $-\infty$no tiene sentido estudiarla, pues solo está definida a partir de cero.

El dibujo es pues:



Se ve ya en el dibujo que no es posible hacer la prueba en menos de dos minutos, por mucho que se entrene. De un modo más formal, al ser la función decreciente y su límite en infinito 2, todos sus valores deben ser superiores a 2. En resumen:

No, por mucho que se entrene, es imposible hacer la prueba en menos de dos minutos (ni tampoco en dos minutos exactamente)

Igualamos a 4. $f(x) = 4$ es $2 + \frac{300}{x+30} = 4$que operando resulta

$$2 = \frac{300}{30 + x} \Leftrightarrow x + 30 = \frac{300}{2}$$

De donde $x = 120$ días. A partir de ahí es menor el tiempo que 4 minutos.

Para hacer la prueba en menos de cuatro minutos, hay que entrenar más de **120 días**

Problema 3.A:

Cierto estudio de mercado revela que el 45% de los entrevistados consume el producto A y el 60 % de los entrevistados consume el producto B. Además, se obtiene que el porcentaje de entrevistados que consume ambos productos es del 20 %. Si seleccionamos al azar un individuo de los entrevistados:

¿Cuál es la probabilidad de que consuma el producto A pero no consuma el producto B?

¿Cuál es la probabilidad de que consuma alguno de los dos productos?

SOLUCION

Construimos una tabla de contingencia. Estos son los datos originales:

	Consume A (%)	NO consume A (%)	Totales (%)
Consume B (%)	20		60
NO consume B (%)			
Totales (%)	45		

Completamos pues los datos. Recordemos que al final de cada columna y fila están las sumas

	Consume A (%)	NO consume A (%)	Totales (%)
Consume B (%)	20	40	60
NO consume B (%)	25	15	40
Totales (%)	45	55	100

Podemos pues resolver las cuestiones sin dificultad, sin más que mirar la tabla.

La probabilidad de consumir el producto A pero no el B es del **0.25**, del 25 %

Basta sumar $P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 20\% + 40\% + 25\% = 85\%$

La probabilidad de consumir alguno de los dos productos es del **0.85**, del 85 %

Problema 3.B:

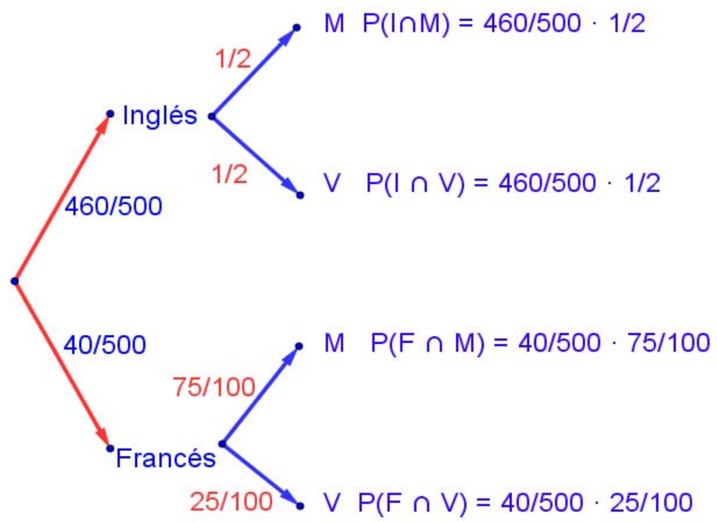
Los estudiantes de un instituto pueden optar por cursar inglés o francés. En un determinado curso hay 500 estudiantes de los que 460 estudian inglés y el resto francés. La mitad de los estudiantes que estudian inglés son mujeres. De los que estudian francés, el 75 % son mujeres.

Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Elegida una estudiante al azar entre mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que estudie francés?

SOLUCION

La manera más sencilla de resolverlo es hacer un diagrama de árbol. Llamamos F = "Estudiar francés", I = "Estudiar inglés (no estudiar francés)", M = "Ser mujer", V = "Ser varón (no ser mujer)".



Naturalmente, es posible simplificar las fracciones, pero resulta más claro usar los datos originales.

Usando la Fórmula de la Probabilidad Total tenemos

$$P(M) = P(M/I)P(I) + P(M/F)P(F) = \frac{1}{2}\cdot\frac{460}{500} + \frac{75}{100}\cdot\frac{40}{500} = \frac{13}{25}$$

La probabilidad de ser mujer es **13/25**, aproximadamente **0.52.**

Se trata de una condicionada, de modo que necesitamos la Fórmula de la Probabilidad Condicionada

$$P(F/M) = \frac{P(M\cap F)}{P(M)} = \frac{P(M/F)P(F)}{P(M)} = \frac{\frac{75}{100}\cdot\frac{40}{500}}{\frac{13}{25}} = \frac{3}{26}$$

Si el estudiante es mujer, la probabilidad de que estudie francés es **3/26**, aproximadamente **0.12**.

Problema 4A:

Antes de un referéndum, se desea realizar un estudio para estimar los resultados del mismo.

¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de personas que votarán SÍ a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.04 y un nivel de confianza del 99 %?

En una muestra aleatoria de 500 votantes se obtuvo que 100 de ellos tienen la intención de votar SÍ. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de personas que votarán SÍ en el referéndum

SOLUCIÓN

Se trata de una distribución binomial, $B(n, p)$ donde queremos calcular un intervalo de confianza para p

Sabemos que, si calculamos la media muestral, puede aproximarse por una normal

$\overline{X} = N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$, de donde $Z = \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = N(0,1)$. Ahora bien, no conocemos una estimación de p, de modo que no tenemos otro remedio que considerar el caso más desfavorable, $p = 1/2$

El intervalo es del 99 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.99$

$F(M) - F(-M) = 0.99$que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.99$ y finalmente $F(M) = \frac{0.99+1}{2} = 0.995$ que nos da $M = 2.58$

Por tanto, el intervalo es $-2.58 < \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < 2.58$. El intervalo es pues

$$\left(p - 2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

que también puede escribirse como $p \pm 2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

El error de estimación es, por tanto $2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Como ya habíamos dicho, no tenemos una estimación de p, por lo que tomamos $p = 1/2$. Nos dicen además que el error de estimación es 0.04, por lo que, igualando tenemos:

$2.58 \cdot \sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{n}} = 0.04$ es decir $\frac{1.29}{\sqrt{n}} = 0.04$ que despejando da $n = \left(\frac{1.29}{0.04}\right)^2 \approx 1\,040.06$

Como debe ser un número natural, tomamos el siguiente

El tamaño muestral mínimo necesario son **1 041** personas

Siendo al 99 %, podemos aprovechar algunos cálculos del apartado anterior.

El intervalo es $\left(p - 2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\ p + 2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

Ahora sí que tenemos una estimación para p. Es $p = 100/500 = 0.2$. No solo eso, tenemos el tamaño muestral, $n = 500$. Sustituyendo, el intervalo resulta ser

$$\left(0.2 - 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{500}}, 0.2 + 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{500}}\right)$$

Basta hacer la operación y queda $(0.1539, 0.2461)$

El intervalo es **(0.1539, 0.2461)** o, en porcentaje (15.39 %, 24.61 %)

Problema 4B:

El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede expresar mediante una distribución normal con desviación típica 0.4 años.

Si se toma una muestra aleatoria de 600 usuarios y se obtiene que el tiempo medio de renovación de sus teléfonos fue de 1.8 años, construye a partir de dicha muestra un intervalo de confianza para el tiempo medio de renovación, al 90% de confianza.

¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo de renovación a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.3 años y un nivel de confianza del 90 %?

SOLUCIÓN

Tipificamos la normal. La media muestral es normal $\overline{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Nos dan los parámetros $\sigma = 0.4$ y $n = 600$ en tanto μes desconocida.

Por tanto $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{0.4}{\sqrt{600}}} = N(0,1)$. Operando es $\frac{0.4}{\sqrt{600}} = 0.016$

El intervalo es del 90 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.9$

$F(M) - F(-M) = 0.9$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.9$ y finalmente $F(M) = \frac{0.9+1}{2} = 0.95$ que nos resulta en $M = 1.64$

Por tanto, la desigualdad queda $-1.64 < \frac{\overline{X}-\mu}{0.016} < 1.64$.

El intervalo es pues $\left(\overline{X} - 1.64 \cdot 0.016,\ \overline{X} + 1.64 \cdot 0.016\right)$ que sustituyendo la media muestral por 1.8 resulta ser $(1.8 - 1.64 \cdot 0.016, 1.8 + 1.64 \cdot 0.016) = (1.773, 1.827)$

que también puede escribirse como $p \pm 2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

El error de estimación es, por tanto $2.58 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

El intervalo de confianza es **(1.773, 1.827)**

Siendo al 90 %, podemos aprovechar algunos cálculos del apartado anterior.

El intervalo era $\left(\overline{X} - 1.64 \cdot \frac{0.4}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1.64 \cdot \frac{0.4}{\sqrt{n}}\right)$ de modo que el error es $\frac{0.4}{\sqrt{n}}$

Igualando a 0.03 tenemos $\frac{1.64 \cdot 0.4}{\sqrt{n}} = 0.03$ que despejando da $n = \left(\frac{0.4 \cdot 1.64}{0.03}\right)^2 \approx 478.15$

Como debe ser un número natural, tomamos el siguiente

Es necesario un tamaño muestral mínimo de **479** observaciones

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL
CURSO: **2020–2021**

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

Problema 1:

Un bar realiza todas las semanas un pedido de cerveza y vino a uno de sus dos proveedores. El proveedor A le vende la cerveza a un euro el litro y el vino a dos euros el litro. El proveedor B le vende la cerveza al mismo precio que el A, pero el litro de vino se lo vende a m euros. Si realiza el pedido semanal al proveedor A paga 1.000 euros, mientras que si lo realiza al proveedor B paga $500m$ euros.

$a)$ Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean los litros de cerveza y vino, respectivamente, comprados cada semana.

$b)$ ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que el precio del litro de vino en el proveedor B sea también de dos euros? En caso afirmativo, ¿cuánto vino compra por semana, si el pedido semanal de cerveza es de 400 litros? Determina la cantidad de cerveza y vino comprada semanalmente en cualquier otro caso, es decir, cuando el precio del litro de vino en el proveedor B no sea de dos euros.

Problema 2:

Las cantidades mínimas diarias recomendadas que debe ingerir una determinada mascota son: 6 unidades de hidratos de carbono, 18 unidades de proteínas y 4 unidades de grasa. Una empresa dedicada al cuidado de este tipo de mascotas plantea diseñar una dieta para las mismas basada en el consumo de latas de dos marcas distintas M_1 y M_2. Se sabe que cada lata de la marca M_1 contiene 3 unidades de hidratos de carbono, 3 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas y que cada lata de la marca M_2 contiene 1 unidad de hidratos de carbono, 9 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Además se sabe que el precio de cada lata de la marca M_1 es de 22 euros y que el precio de cada lata de la marca M_2 es de 24 euros.

$a)$ ¿Cuántas latas de cada tipo se puede dar en un día a la mascota para cumplir todos los requisitos anteriores relativos a su dieta? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se le podría dar una lata de la marca M_1 y dos latas de la marca M_2?

$b)$ ¿Cuántas latas de cada tipo se debería dar en un día a la mascota para que el precio de su alimentación sea mínimo? ¿y para minimizar el número de latas de tipo M_1 que come ese día?

Problema 3:

Se ha investigado la energía que produce una placa solar (f) en función del tiempo transcurrido, en horas, desde que amanece (x), obteniéndose que:

$$f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & si\ \ 0 \le x \le 8 \\ \frac{a}{x^2} & si\ 8 < x \le 12 \end{cases}.$$

$a)$ Determinar el valor de a para que la energía producida varíe de forma continua al variar el tiempo transcurrido desde que amanece.

$b)$ Considerando el valaor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánta energía produce en ese momento?

Problema 4:

Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, se pide:

$a)$ Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 10$.

$b)$ Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3{,}2$ y $x = -2$.

Problema 5:

Los cursos de monitor de esquí en determinada estación se reparten en tres turnos, A, B y C. Los alumnos del turno A representan el 20 % del alumnado, los del turno B representan el 30 % del alumnado y los del turno C representan el 50 % restante. Además se sabe que el porcentaje de alumnos que aprueban el curso es del 95 % en el turno A, 90 % en el B y 92 % en el C. Si se elige un alumno al azar,

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso y no sea del turno B?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso o sea del turno B?

Problema 6:

En el primer curso de un grado, el 60 % de los estudiantes son mujeres y el 40 % restante son hombres. Además, se sabe que el 80 % de las mujeres y el 75 % de los hombres aprobaron el examen de matemáticas. Si se elige un estudiante de ese curso al azar,

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya suspendido matemáticas?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado matemáticas?

Problema 7:

Se quiere hacer un estudio para estimar el porcentaje de declaraciones de la renta que son fraudulentas.

$a)$ ¿Cuál será el tamaño mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de declaraciones fraudulentas a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,026 y un nivel de confianza del 90 %?

$b)$ En una muestra aleatoria de 1.000 declaraciones se obtuvo que 110 de ellas eran fraudulentas. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de declaraciones fraudulentas.

Problema 8:

Una fábrica de quesos quiere estudiar el tiempo que tarde el producto en estropearse si no se envasa. Para ello, considera una muestra de 324 quesos y observa que el tiempo medio hasta que se estropean es de 27 días. Se supone además que el tiempo hasta que se estropea el producto sigue una distribución normal con desviación típica 4 días.

$a)$ Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio que tarda en estropearse este tipo de queso al 99 % de confianza.

$b)$ ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,5 días y un nivel de confianza del 99 %?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Un bar realiza todas las semanas un pedido de cerveza y vino a uno de sus dos proveedores. El proveedor A le vende la cerveza a un euro el litro y el vino a dos euros el litro. El proveedor B le vende la cerveza al mismo precio que el A, pero el litro de vino se lo vende a m euros. Si realiza el pedido semanal al proveedor A paga 1 000 euros, mientras que si lo realiza al proveedor B paga $500\ m$ euros.

$a)$ Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean los litros de cerveza y vino, respectivamente, comprados cada semana.

$b)$ ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que el precio del litro de vino en el proveedor B sea también de dos euros? En caso afirmativo, ¿cuánto vino compra por semana, si el pedido semanal de cerveza es de 400 litros? Determina la cantidad de cerveza y vino comprada semanalmente en cualquier otro caso, es decir, cuando el precio del litro de vino en el proveedor B no sea de dos euros.

Solución:

$a)$ Sean x los litros de cerveza e y los de vino.

Como el proveedor A le vende la cerveza a un euro el litro y el vino a dos euros el litro y paga 1.000 euros: $x+2y=1\ 000$

Como el proveedor B le vende la cerveza al mismo precio que el A, pero el litro de vino se lo vende a m euros y paga $500\ m$ euros: $x+my=500m$

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es: $\left.\begin{matrix} x+2y=1\ 000 \\ x+my=500m \end{matrix}\right\}$.

donde la primera ecuación representa el coste total si hace el pedido en A y la segunda lo mismo si el pedido es en B

$b)$ Resolvemos. Lo más sencillo es restar las dos ecuaciones. Tenemos entonces:

$(2-m)y=1000-500m$. Como no se puede dividir por 0, tenemos dos casos.

Caso 1. Si $m\neq 2$. Podemos entonces dividir por $2-m$. La segunda ecuación es

$(2-m)y=1000-500m=500(2-m)$ así que $y=\frac{500(2-m)}{(2-m)}=500$

Llevándolo a la primera ecuación obtenemos $x=0$

Caso 2. Si $m=2$: El sistema es $\begin{cases} x+2y=1000 \\ x+2y=1000 \end{cases}$ solo tiene una ecuación independiente. La solución existe, pero no es única. Se necesita saber x o y. En un caso que nos piden, $x=400$ da

$400+2y=1000$ es decir $y=300$

Podemos ya responder a las cuestiones del enunciado. Son muchas, de modo que responderemos en puntos.

La solución siempre existe.

No siempre es única. Si $\boldsymbol{m=2}$hay infinitas soluciones, si $\boldsymbol{m\neq 2}$ hay solo una.

Sí, es posible que el precio del vendedor B sea de 2 euros. La solución en tal caso no sería única.

Si el precio fuera 2 euros y se piden 400 litros de cerveza, entonces se pedirían 300 litros de vino.

En el caso de que $\boldsymbol{m \neq 2}$ la petición es siempre la misma. **Ningún litro de cerveza y 500 litros de vino**.

Otra forma: Escribimos las matrices de coeficientes y ampliada del sistema:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{pmatrix} \ y \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\,000 \\ 1 & m & 500m \end{pmatrix}.$$

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 2.$ $\qquad |C| = 0 \Rightarrow m - 2 = 0;\ \ m = 2.$

Para $m = 2$, el rango de la matriz de los coeficientes C es 1, y para el resto de valores es 2.

Para $m = 2$, el rango de la matriz ampliada $A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1.000 \\ 1 & 2 & 1.000 \end{pmatrix}$ es 1, y para el resto de valores es 2.

Luego por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema siempre tiene solución, siendo compatible y determinado, es decir, con una única solución, para $m \neq 2$, y siendo compatible indeterminado, es decir, con infinitas soluciones si $m = 2$.

Es posible que el segundo proveedor también venda el vino a 2 euros el litro. Si el pedido de cerveza es de 400: si $m = 2, x = 400$: $400 + 2y = 1\,000 \rightarrow\ 2y = 600 \rightarrow y = 300$.

La compra semanal de vino es de $300\ litros$

Resolvemos el sistema original en función de m: $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 1\,000 \\ x + my = 500m \end{array}\right\}$ usando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1\,000 & 2 \\ 500m & m \end{vmatrix}}{m-2} = \frac{1\,000m - 1\,000m}{m-2} = \frac{0}{m-2} = 0;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1\,000 \\ 1 & 500m \end{vmatrix}}{m-2} = \frac{500m - 1\,000}{m-2} = \frac{500(m-2)}{m-2} = 500.$$

Si el precio del vino no es de 2 euros entonces compra $\boldsymbol{500\ litros}$ de vino y ninguno de cerveza.

Problema 2:

Las cantidades mínimas diarias recomendadas que debe ingerir una determinada mascota son: 6 unidades de hidratos de carbono, 18 unidades de proteínas y 4 unidades de grasa. Una empresa dedicada al cuidado de este tipo de mascotas plantea diseñar una dieta para las mismas, basada en el consumo de latas de dos marcas distintas M_1 y M_2. Se sabe que cada lata de la marca M_1 contiene 3 unidades de hidratos de carbono, 3 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas y que cada lata de la marca M_2 contiene 1 unidad de hidratos de carbono, 9 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Además, se sabe que el precio de cada lata de la marca M_1 es de 22 euros y que el precio de cada lata de la marca M_2 es de 24 euros.

$a)$ ¿Cuántas latas de cada tipo se puede dar en un día a la mascota para cumplir todos los requisitos anteriores relativos a su dieta? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se le podría dar una lata de la marca M_1 y dos latas de la marca M_2?

$b)$ ¿Cuántas latas de cada tipo se debería dar en un día a la mascota para que el precio de su alimentación sea mínimo? ¿y para minimizar el número de latas de tipo M_1 que come ese día?

Solución:

a) Sea x la cantidad de latas de la marca M_1 e y las de la marca M_2.

La restricción de hidratos de carbono viene dada por $h: 3x + y \geq 6$, la de proteínas $p: 3x + 9y \geq 18$ en tanto que la de grasas corresponde a $g: x + y \geq 4$ Hacemos las tablas respectivas para dibujarlas

$h: 3x + y = 6$

x	y
0	6
2	0

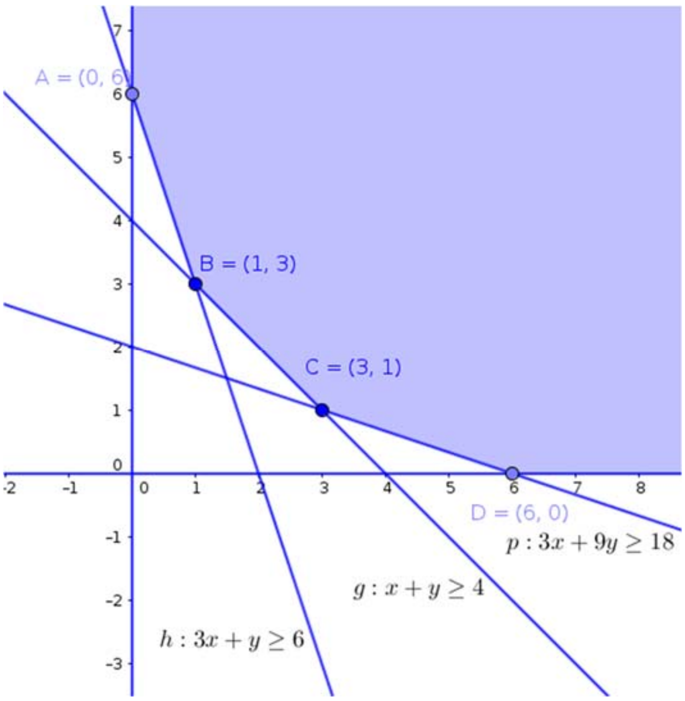
$p: 3x + 9y = 18$

x	y
0	2
6	0

$g: x + y = 4$

x	y
4	0
0	4

Dibujamos el conjunto de soluciones posibles



Gráficamente se ven ya los cuatro puntos que pueden ser solución óptima.

Los calculamos pues

$$A = h \cap OY = (0{,}6),\ D = p \cap OX = (6{,}0), R = s \cap OY$$

$$B = h \cap g = \begin{cases} 3x + y = 6 \\ x + y = 4 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$C = p \cap g = \begin{cases} 3x + 9y = 18 \\ x + y = 4 \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

De donde $A(0, 6)$, $B(1, 3)$, $C(3, 1)$, $D(6, 0)$

El punto x = 1, y = 2 nos da $x + y = 3 < 4$. No cumple la restricción de grasas, de modo que no se puede.

No, con una lata de M_1 y dos de M_2 no basta para la mascota

[De hecho tampoco cumple la de hidratos de carbono, la única que cumple es la de proteínas. Con fallar una bastaría para que no se pudiera, con más razón con dos]

b) Sea $C(x, y) = 22x + 24y$ el coste en euros.

Para minimizarlo, calculamos cuánto vale en los puntos extremos.

- $C(0, 6) = 144$
- $C(1, 3) = 94$
- $B(3, 1) = 90$
- $B(6, 0) = 132$

Es claro pues que el coste mínimo se alcanza en el punto (3, 1). En conclusión:

El coste mínimo se alcanza dando **tres** latas de M_1 y **una** de M_2

Podríamos hacer lo mismo para minimizar el número de latas de M_1, con la función $N(x, y) = x$. Pero es que hay un punto extremo que da cero latas de M_1, el punto (0, 6). Y menos de 0 no puede haber. Así pues:

El mínimo de latas de M_1 se alcanza no dando **ninguna** de M_1 y **seis** de M_2

Problema 3:

Se ha investigado la energía que produce una placa solar (f) en función del tiempo transcurrido, en horas, desde que amanece (x), obteniéndose que:

$$f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & si\ \ 0 \le x \le 8 \\ \frac{a}{x^2} & si\ 8 < x \le 12 \end{cases}.$$

$a)$ Determinar el valor de a para que la energía producida varíe de forma continua al variar el tiempo transcurrido desde que amanece.

$b)$ Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánta energía produce en ese momento?

Solución:

$a)$ Calculamos los dos límites laterales en x = 8, que es donde cambia la definición de la función. El límite lateral izquierdo es $80 - 64 = 16$ en tanto el lateral izquierdo es $a/8^2 = a/64$.

Igualando tenemos $16 = \frac{a}{64}$ de donde $a = 1024$. Obsérvese que es el único punto problemático, ya que $10x - x^2$ es una función polinómica siempre continua y $\frac{a}{x^2}$ es una función de proporcionalidad inversa que no es continua en el origen, pero que ese punto no pertenece al dominio por lo que es continua para x mayor que cero, en particular a partir de 8.

La energía es continua sí y solo sí $\boldsymbol{a = 1024}$

$b)$ Sea $a = 1024$

$$f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & 0 \le x \le 8 \\ \frac{1024}{x^2} & 8 < x \le 12 \end{cases}$$

Estudiemos primero su dominio. Ya hemos visto que es continua pues el denominador de $\frac{1024}{x^2}$ se anula solo en 0 que corresponde a $10x - x^2$. Su dominio es pues [0, 12]

La derivada de la función es $f'(x) = \begin{cases} 10 - 2x & 0 < x < 8 \\ -\frac{2048}{x^3} & 8 < x < 12 \end{cases}$. Obsérvese que en los límites podría haber problemas y por eso hemos cambiado las desigualdades, ahora son estrictas. Es irrelevante para el estudio del crecimiento.

Analicemos cada función por separado: $\frac{-2048}{x^3} < 0$ para todos los valores de x. $10 - 2x = 0$ para $x = 5$. Para estudiar el signo damos valores. $f'(0) = 10 > 0$y $f'(6) = -2 < 0$.

Por tanto, $f(x)$ es creciente en (0, 5) y decreciente en (0, 8) y (8, 12).

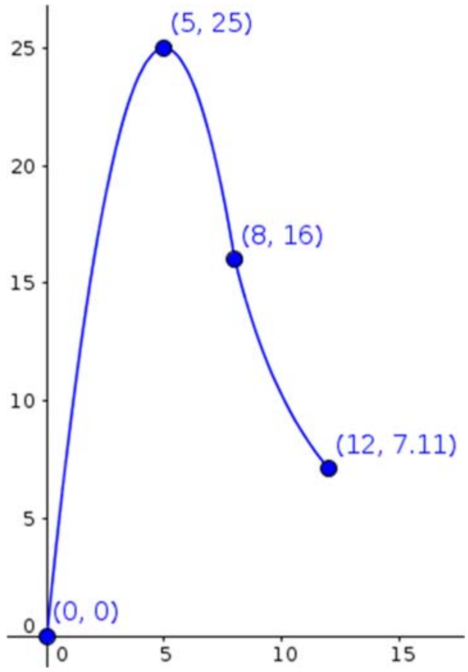
Para la segunda derivada, tenemos

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & 0 < x < 8 \\ \frac{6144}{x^4} & 8 < x < 12 \end{cases}$$

que es negativa (ramas hacia abajo) en (0, 8) y positiva (ramas hacia arriba) en (8, 12)

Los valores en los extremos son $f(0) = 10 \cdot 0 - 0^2 = 0$ y $f(12) = \frac{1024}{12^2} = \frac{64}{9} \approx 7.11$. Hemos visto ya $f(8) = 16$. Falta $f(5) = 10(5) - 5^2 = 25$

Estamos ya en posición de dibujar la gráfica.



El máximo de la función se alcanza en $x = 5$ que da $f(5) = 25$

Así pues:

La energía es máxima a las **cinco** horas de amanecer y se producen $\mathbf{25}$ unidades de energía.

[El problema no especifica las unidades de energía que se utilizan]

Problema 4:

Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, se pide:

$a)$ Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 10$.

$b)$ Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3.2\ y\ x = -2$.

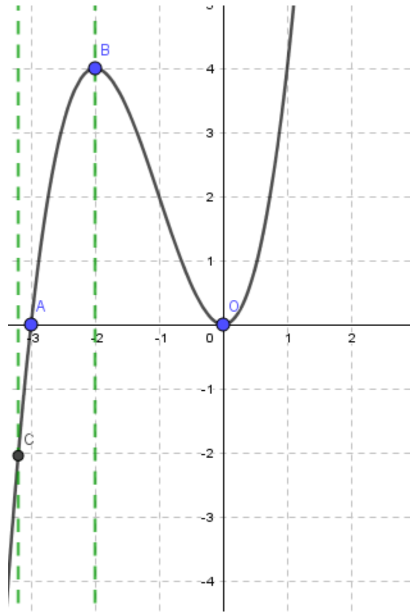
Solución:

$a)$ Es una función polinómica, su integral es inmediata:

$F(x) = \int f\,(x) \cdot dx = \int (x^3 + 3x^2) \cdot dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + C = \frac{x^4}{4} + x^3 + C.$

$F(2) = 10 \Rightarrow \frac{2^4}{4} + 2^3 + C = 10;\ \ 4 + 8 + C = 0 \Rightarrow C = -12.$

La primitiva F de f que verifica que $F(2) = 10$ es $\boldsymbol{F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 12}$



$b)$ Puntos de intersección con los ejes coordenados:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \rightarrow O(0,0);\ x_2 = -3 \rightarrow A(-3,0)$$

Con el eje de ordenadas es $O(0,0)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto donde sea derivable, es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0;\ \ 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2.$

La función es creciente en $(-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$, y decreciente es $(-2,0)$. Como para $x = -2$ pasa de creciente a decreciente, en ese punto tiene un máximo relativo. Como para $x = 0$ pasa de decreciente a creciente, en ese punto tiene un mínimo: $O(0,0)$.

$f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 = -8 + 12 = 4 \Rightarrow B(-2,4)$ es el máximo

En el intervalo $(-3.2,-3)$ la función es negativa, y en $(-3,0)$ es positiva por lo que la superficie es:

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-3.2}^{-3} f(x) \cdot dx + \int_{-3}^{-2} f(x) \cdot dx = -[F(x)]_{-3.2}^{-3} + [F(x)]_{-3}^{-2} \\ &= -(F(-3) - F(-3.2)) + F(-2) - F(-3) = F(-3.2) - 2F(-3) + F(-2) \\ &= \left[\frac{(-3.2)^4}{4} + (-3.2)^3\right] - 2 \cdot \left[\frac{(-3)^4}{4} + (-3)^3\right] + \left[\frac{(-2)^4}{4} + (-2)^3\right] \\ &= \frac{104.8576}{4} - 32.768 - \frac{81}{2} + 54 + 4 - 8 = 17.232 + 26.2144 - 40.5 \\ &= 43.4464 - 40.5 = 2.9464 \end{aligned}$$

$S = 2.95\ u^2$

Problema 5:

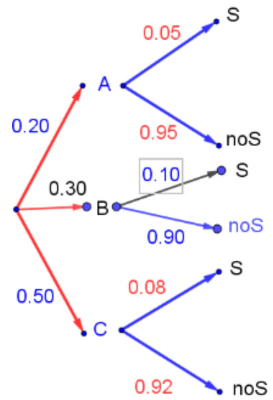
Los cursos de monitor de esquí en determinada estación se reparten en tres turnos, A, B y C. Los alumnos del turno A representan el 20 % del alumnado, los del turno B representan el 30 % del alumnado y los del turno C representan el 50 % restante. Además, se sabe que el porcentaje de alumnos que aprueban el curso es del 95 % en el turno A, 90 % en el B y 92 % en el C. Si se elige un alumno al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso y no sea del turno B?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado el curso o sea del turno B?

Solución:

Llamamos A, B y C a los sucesos ser de los turnos A, B y C respectivamente. Y llamamos S al suceso "suspender" y noS al suceso "aprobar". Hacemos el árbol que represente los datos del enunciado:



a) Si no es del turno A, es que es de los turnos B o C:

$P(A \cap noS) + P(C \cap noS) = P(A) \cdot P(noS/A) + P(C) \cdot P(noS/C) =$

$= 0.20 \cdot 0.95 + 0.50 \cdot 0.92 = 0.190 + 0.460 = 0.65.$

La probabilidad de que haya aprobado el curso y no sea del turno B es $\mathbf{0.65}$.

b) Ahora es una unión de sucesos:

$$P(noS \cup B) = P(noS) + P(B) - P(noS \cap B).$$

Conocemos $P(B) = 0.30$

Calculamos $P(noS)$

$P(noS) = P(A) \cdot P(noS/A) + P(B) \cdot P(noS/B) + P(C) \cdot P(noS/C) = 0.20 \cdot 0.95 + 0.30 \cdot 0.90 + 0.50 \cdot 0.92 = 0.19 + 0.27 + 0.46 = 0.92.$

Calculamos $P(noS \cap B)$

$$P(noS \cap B) = P(B) \cdot P(noS/B) = 0.30 \cdot 0.90 = 0.27$$

Sustituyendo:

$P(noS \cup B) = 0.92 + 0.30 - 0.27 = 0.95.$

La probabilidad de que haya aprobado el curso o sea del turno B es $\mathbf{0.95}$.

Problema 6:

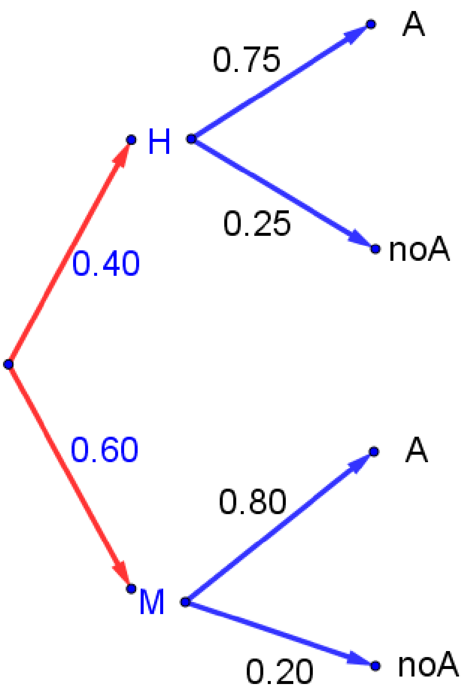
En el primer curso de un grado, el 60 % de los estudiantes son mujeres y el 40 % restante son hombres. Además, se sabe que el 80 % de las mujeres y el 75 % de los hombres aprobaron el examen de matemáticas. Si se elige un estudiante de ese curso al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya suspendido matemáticas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado matemáticas?

Solución:

Llamamos M al suceso ser mujer y H a ser hombre. Llamamos A al suceso "aprobar" y noA a "no aprobar". Llevamos los datos del enunciado a un diagrama de árbol:



a) Es la probabilidad de una intersección:

$P(H \cap noA) = P(H) \cdot P(noA/H) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.10.$

La probabilidad de que sea hombre y haya suspendido matemáticas es $\mathbf{0.10.}$

b) Ahora es una suma de probabilidades:

$P(A) = P(M) \cdot P(A/M) + P(H) \cdot P(A/H) = 0.6 \cdot 0.80 + 0.4 \cdot 0.75 = 0.48 + 0.30 = 0.78.$

La probabilidad de que haya aprobado matemáticas es $\mathbf{0.78}$

Problema 7:

Se quiere hacer un estudio para estimar el porcentaje de declaraciones de la renta que son fraudulentas.

a) ¿Cuál será el tamaño mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de declaraciones fraudulentas a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.026 y un nivel de confianza del 90 %?

b) En una muestra aleatoria de 1 000 declaraciones se obtuvo que 110 de ellas eran fraudulentas. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de declaraciones fraudulentas.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 90 %:

$1-\alpha = 0.90 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0.90 = 0.1 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645; (1-0.05 = 0.9500 \ \rightarrow z = 1.645).$

Como se desconoce la proporción muestral consideramos el caso más desfavorable, que es, $p = q = 0.5$. Sabemos que: $p = 0.5;\ \ q = 0.5;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645;\ \ E = 0.026.$

Sabiendo que el error máximo es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$:

$$E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{E^2} = 1.645^2 \cdot \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.026^2} = 2.7060 \cdot \frac{0.25}{0.000676} = 2.7060 \cdot 369.82 = 1\,000.7.$$

El tamaño mínimo necesario es de $\mathbf{1\,001}$ $declaraciones$

b) Nos dicen ahora que: $n = 1\,000;\ \ p = \frac{110}{1\,000} = 0.11;\ \ q = 1-0.11 = 0.89;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p, q\ y\ n$, es:

$$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \rightarrow \left(0.11 - 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.11 \cdot 0.89}{1.000}}, \quad 0.11 + 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.11 \cdot 0.89}{1.000}}\right) =$$

$$(0.11 - 1.645 \cdot 0.0099, 0.11 + 1.645 \cdot 0.0099) = (0.11 - 0.0163, 0.11 + 0.0163) = (0.0937, 0.1263).$$

$$\mathbf{(0.0937, 0.1263)}$$

Problema 8:

Una fábrica de quesos quiere estudiar el tiempo que tarde el producto en estropearse si no se envasa. Para ello, considera una muestra de 324 quesos y observa que el tiempo medio hasta que se estropean es de 27 días. Se supone además que el tiempo hasta que se estropea el producto sigue una distribución normal con desviación típica 4 días.

a) Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio que tarda en estropearse este tipo de queso al 99 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero tiempo medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.5 días y un nivel de confianza del 99 %?

Solución:

a) Calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 99 %:

$1-\alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 1-0.99 = 0.01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.575; (1-0.005 = 0.9950 \rightarrow z = 2.575).$

Sabemos que: $n = 324;\ \ \overline{x} = 27;\ \ \sigma = 4;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(27 - 2.575 \cdot \frac{4}{\sqrt{324}},\quad 27 + 2.575 \cdot \frac{4}{\sqrt{324}}\right) =$$

$(27 - 2.575 \cdot 0.2222,\ 27 + 2.575 \cdot 0.2222) = (27 - 0.5722,\ 27 + 0.5722) = (26.4278, 27.5722).$

Intervalo de confianza: $(\mathbf{26.4278};\ \mathbf{27.5722})$

b) Ahora sabemos que: $\sigma = 4;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575;\ \ E = 0.5.$

La fórmula del error es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Despejamos n:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2.575 \cdot \frac{4}{0.5}\right)^2 = (2.575 \cdot 8)^2 = 20.6^2 = 424.36.$$

Como mínimo el tamaño de la muestra debe ser de $\boldsymbol{425\ quesos}$