Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

BALEARES

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Barrientos Fernández

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model III

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1 Donat el sistema d'equacions en funció del paràmetre a:

$$x+y+z=5$$
$$5x+ay-z=11$$
$$3x-y+az=2.$$

a) Discutiu per a quins valors de a el sistema té solució i quantes en té en cada cas. (6 punts)

b) Trobau la solució del sistema per $a=2$. (4 punts)

2 Un ajuntament concedeix llicències per a la construcció d'una urbanització de, com a màxim, 120 habitatges, de dos tipus, A i B. Per això l'empresa constructora disposa d'un capital màxim de 15 milions d'euros, essent el cost de construcció de l'habitatge de tipus A de 100000 euros i el de tipus B de 300000 euros. El benefici obtingut per la venda d'un habitatge de tipus A és de 20000 euros i per la venda d'un de tipus B és de 40000 euros.

a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 punts)

c) Calculau el nombre d'habitatges de cada tipus que s'han de construir per tal d'obtenir un benefici màxim. Determinau també aquest benefici màxim. (2 punts)

3 Considerau les següents matrius:

$$M=\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Raonau si és possible calcular els productes $M\cdot N$ i M^2. En el cas que ho sigui, calculau-los. (2 punts)

b) Estudiau per a quins valors de k és $M\cdot N$ invertible. (3 punts)

c) Calculau la inversa de $M\cdot N$ per a $k=1$. (2 punts)

d) Per a $k=1$, trobau la matriu X que compleix $(M\cdot N)\cdot X=B$, on $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3 punts)

4 Donada la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$, definida per a tot $x \in \mathbb{R}$.

a) Trobau a i b sabent que $f(x)$ té un punt crític en el punt $x = 1$ i la seva gràfica passa pel punt $(3, 0)$. (5 punts)

b) Estudiau el creixement i decreixement de $f(x)$ per $a = 3$ i $b = 3$. (5 punts)

5 El benefici $B(x)$, en euros, que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte es representa per la funció:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \quad \text{per a} \quad x \geq 0.$$

a) Calculau el benefici de vendre'n 110 unitats. (1 punt)

b) Representau gràficament la funció. (3 punts)

c) Quantes unitats ha de vendre per tal que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim? (3 punts)

d) Quantes unitats ha de vendre per tenir un benefici igual a 3900 euros? I per tenir un benefici superior a 3900 euros? (3 punts)

6 Considerem la funció a trossos següent

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{ax} + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calculau els valors de a perquè f sigui contínua i derivable. (5 punts)

b) Per a $a = 4$ calculau l'àrea compresa entre la gràfica de $f(x)$ i les rectes $x = 1$, $x = 2$ i $y = 0$. (5 punts)

7 El pes de les persones d'un col·legi major segueix una llei normal de mitjana 70 kg i desviació típica 15 kg. Si escollim a l'atzar una persona del col·legi, calculau la probabilitat dels següents esdeveniments:

a) El seu pes sigui superior a 80 kg. (3 punts)

b) El seu pes sigui inferior a 50 kg. (3 punts)

c) Pesi entre 60 i 120 kg. (4 punts)

8 De dos esdeveniments d'un mateix espai mostral se sap que

$$p(A \cap B) = 0.1 \quad p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.6 \quad P(A/B) = 0.5,$$

$\overline{A}$ i $\overline{B}$ denoten els esdeveniments complementaris de A i B respectivament.

a) Calculau $p(B)$. (3 punts)

b) Calculau $p(A \cup B)$. (3 punts)

c) Són els esdeveniments A i B independents? Raonau la resposta. (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+y+z=5 \\ 5x+ay-z=11 \\ 3x-y+az=2 \end{array}\right\}$ en función del parámetro a:

$a)$ Discutir para qué valores de a el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso.

$b)$ Encuentra la solución del sistema para $a=2$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & a & -1 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & a & -1 & 11 \\ 3 & -1 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos el rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & a & -1 \\ 3 & -1 & a \end{vmatrix}=a^2-5-3-3a-1-5a= a^2-8a-9=0;\, x=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{2}=\frac{8\pm 10}{2}=4\pm 5 \Rightarrow a_1=-1, a_2=9.$$

Para $a\neq -1$ y para $a\neq 9$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada, e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Para $a=-1$: $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=22\neq 0$

Luego el rango de la matriz ampliada es 3, mientras el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Para $a=9$: $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 9 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 9 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$

Luego el rango de la matriz ampliada es 3, mientras el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Para $a\neq -1$ y para $a\neq 9$ el sistema es compatible y determinado, con solución única. Para $a=-1$ y para $a=9$ el sistema es incompatible, no tiene solución.

$b)$ Para $a=2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x+y+z=5 \\ 5x+2y-z=11 \\ 3x-y+2z=2 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolvemos por la *regla de Cramer*:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{2^2-8\cdot 2-9}=\frac{20-11-2-4-5-22}{4-16-9}=\frac{20-44}{-21}=\frac{-24}{-21}=\frac{8}{7};\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 5 & 11 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-21}=$$

$$\frac{22+10-15-33+2-50}{-21}=\frac{34-98}{-21}=\frac{-64}{-21}=\frac{64}{21};\; z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-21}=\frac{4-25+33-30+11-10}{-21}=\frac{48-65}{-21}=\frac{-17}{-21}=\frac{17}{21}.$$

$$x=\frac{8}{7};\;\; y=\frac{64}{21};\;\; z=\frac{17}{21}$$

Problema 2:

Un ayuntamiento concede licencias para la construcción de una urbanización de, como máximo, 120 viviendas de dos tipos, A y B. Para ello la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros, siendo el coste de construcción de la vivienda de tipo A de 100 000 euros y el de tipo B de 300 000 euros. El beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A es de 20 000 euros y por la venta de uno de tipo B es de 40 000 euros.

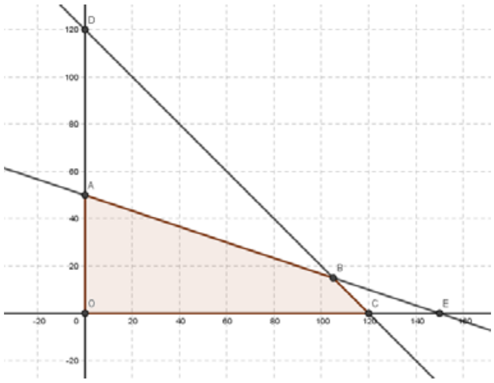
a) Plantea la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas que la delimitan.

c) Calcular el número de viviendas de cada tipo que deben construirse para obtener un beneficio máximo. Determinar también este beneficio máximo.

Solución:

a) Llamamos x e y al número de viviendas de los tipos A y B que construye la empresa, respectivamente.



Las restricciones impuestas son:

$$\left.\begin{array}{r} x+y\le 120 \\ 100\,000x+300\,000y\le 15\,000\,0000 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y\le 120 \\ x+3y\le 150 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

b) La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son:

$$A:\ \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+3y=150 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,50).$$

$$B:\ \left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ x+3y=150 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y=-120 \\ x+3y=150 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=30;\ y=15; x=105 \Rightarrow B(105,15).$$

$$C:\ \left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(120,0).$$

$$O:\ \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow O(0,0).$$

La función objetivo es $f(x,y)=20\,000x+40\,000y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son:

$A: f(0,50)=20\,000\cdot 0+40\,000\cdot 50=0+2\,000\,000=2\,000\,000.$

$B: f(105,15)=20\,000\cdot 105+40\,000\cdot 15=2\,100\,0000+600\,000=2\,700\,000.$

$C: f(120,0)=20\,000\cdot 120+\cdot 0=2\,400\,000+0=2\,400\,000.$

El valor máximo se produce en el punto B.

Problema 3:

Considera las matrices: $M = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Razona si es posible calcular los productos $M \cdot N$ y M^2. En caso de que lo sean, calcular los mismos.

b) Estudia para qué valores de k es invertible $M \cdot N$.

c) Calcular la inversa de $M \cdot N$ para $k = 1$.

d) Para $k = 1$, halla la matriz X que cumple que $(M \cdot N) \cdot X = B$, con $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Para que el producto de matrices sea posible es necesario que el número de columnas de la matriz multiplicando sea igual al número de filas de la matriz multiplicador siendo las dimensiones de la matriz producto el número de filas de la primera y el número de columnas de la segunda:

$$M_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}.$$

$M = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}$ tiene 2 filas y 3 columnas. $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ tiene 3 filas y 2 columnas. Luego es posible multiplicarlas y el resultado será una matriz de 2 filas y 2 columnas.

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2k-1 \\ -7k & 9k+5 \end{pmatrix}.$$

Para M^2 debemos multiplicar una matriz de 2 filas y 3 columnas por una de 2 filas y 3 columnas, lo que no es posible.

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} k & 2k-1 \\ -7k & 9k+5 \end{pmatrix}.$$

b) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M \cdot N| = \begin{vmatrix} k & 2k-1 \\ -7k & 9k+5 \end{vmatrix} = 9k^2 + 5k - (-14k^2 + 7k) = 23k^2 - 2k = k(23k-2) = 0;$$

$\Rightarrow k_1 = 0;\ \ k_2 = \frac{2}{23}$.

$$M \cdot N \text{ es invertible } \forall k \in R - \left\{0, \frac{2}{23}\right\}$$

c) Para $k = 1$ es $M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}$; $|M \cdot N| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 14 \end{vmatrix} = 14 + 7 = 21;$

$(M \cdot N)^t = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 14 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$; $(M \cdot N)^{-1} = \frac{Adj.de\ (M\cdot N)^t}{|M\cdot N|} = \frac{\begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}}{21} = \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

$$(M \cdot N)^{-1} = \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $(M \cdot N) \cdot X = B \Rightarrow\ (M \cdot N)^{-1} \cdot (M \cdot N) \cdot X = (M \cdot N)^{-1} \cdot B \Rightarrow\ X = (M \cdot N)^{-1} \cdot B \Rightarrow$

$$X = (M \cdot N)^{-1} \cdot B = \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 28 & -1 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} 28 & -1 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4:

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$, definida $\forall x \in R$.

$a)$ Encuentra a y b sabiendo que $f(x)$ tiene un punto crítico para $x = 1$ y su gráfica pasa por el punto $P(3,0)$.

$b)$ Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para $a = 3$ y $b = 3$.

Solución:

$a)$ Por tener $f(x)$ un punto crítico para $x = 1$ debe verificarse que $f'(1) = 0$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1 \to f'(1) = 0 = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + 1 \to \ 3a + 2b = -1.$

Por pasar por $P(3,0)$: $f(3) = 0 = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + 3 \to 27a + 9b = -3 \to \ 9a + 3b = -1$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3a + 2b = -1 \\ 9a + 3b = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 9a + 6b = -3 \\ -9a - 3b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3b = -2 \Rightarrow b = -\frac{2}{3}.$$

$$3a + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \Rightarrow \ 9a - 4 = -3 \Rightarrow \ 9a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{9}.$$

$$a = \frac{1}{9}.\ b = -\frac{2}{3}.$$

$b)$ Para $a = 3$ y $b = 3$ la función es $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 9x^2 + 6x + 1$; $f'(x) = 0 = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2 = 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in D(f)$.

La función es creciente $\forall x \in R$

Problema 5:

El beneficio $B(x)$, en euros, que obtiene una empresa por la venta de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $B(x) = -x^2 + 300x - 16\,100$, con $x > 0$.

$a)$ Calcula el beneficio si venden 110 unidades.

$b)$ Representa gráficamente la función.

$c)$ ¿Cuántas unidades ha de vender para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es este beneficio?

$d)$ ¿Cuántas unidades ha de vender para tener un beneficio de 3 900 euros? ¿Y para tener un beneficio superior a 3 900 euros?

Solución:

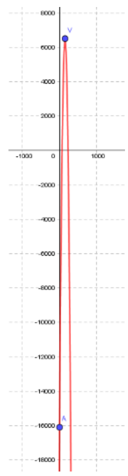
$a)$ $B(x) = -x^2 + 300x - 16\,100 \rightarrow B(110) = -110^2 + 300 \cdot 110 - 16\,100 = 4\,800.$

El beneficio al vender 110 unidades es de 4 800 $euros$

$b)$ La función $B(x) = -x^2 + 300x - 16\,100$ es una parábola cóncava (∩) por ser negativo el coeficiente de x^2. Corta al eje de ordenadas en $A(0,\ -16\,100)$ y cuyo vértice es:

$$B'(x) = -2x + 300 = 0 \Rightarrow x = 150; B(150) = -150^2 + 300 \cdot 150 - 16\,100 = 9\,500$$

$$\Rightarrow V(150, 6500).$$



$c)$ Para obtener el máximo beneficio nos fijamos en el vértice.

Para que el beneficio sea máximo, de 9 500 euros, se deben vender 150 unidades

$d)$ $B(x) = -x^2 + 300x - 16\,100 = 3\,900 \rightarrow -x^2 + 300x - 20\,000 = 0$

Vendiendo 100 o 200 unidades el beneficio es de 3 900 euros

Para obtener un beneficio superior a 3 900 euros se deben vender más de 100 unidades y menos de 200 unidades.

Problema 6:

Considera la función definida a trozos: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si\ \ x<0 \\ e^{ax}+1 & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$.

$a)$ Calcula los valores de a para que f sea continua y derivable.

$b)$ Para $a=4$ calcula el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas de ecuaciones $x=1, x=2\ e\ y=0$.

Solución:

$a)$ La función definida a trozos está formada por dos ramas que son funciones continuas y derivables, pues una es una función polinómica y la otra una función exponencial. Por tanto, el único punto dudoso es el de unión de las dos ramas.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

Para $x=0$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3x+2)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^{ax}+1)=1+1=2=f(0) \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

La función es continua en toda la recta real para todo valor de a.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & si\ x<0 \\ a\cdot e^{ax} & si\ \ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=0: f'(0)=\begin{cases} -3 & si\ \ x<0 \\ a & si\ \ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow\ f'(0^-)=-3=f'(0^+)=a.$

La función es continua y derivable en toda la recta real si $a=-3$

$b)$ Para $a=4$ y para $1<x<2$ la rama de la función es $f(x)=e^{4x}+1>0, \forall x\in R$,por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S=\int_1^2 f(x)\cdot dx=\int_1^2 (e^{4x}+1)\cdot dx=$$

Es una integral inmediata. Aunque también la podemos hacer por un cambio de variables:

$$4x=t\rightarrow\ dx=\frac{1}{4}\cdot dt;\ x=2\rightarrow t=8;\ x=1\rightarrow t=4$$

$\Rightarrow S=\frac{1}{4}\cdot\int_4^8(e^t+1)\cdot dt=\frac{1}{4}\cdot[e^t+t]_4^8=\frac{1}{4}\cdot[(e^8+8)-(e^4+4)]=\frac{1}{4}\cdot(e^8+8-e^4-4)=\frac{1}{4}\cdot(e^8-e^4+4)=\left[\frac{e^4}{4}\cdot(e^4-1)+1\right]$.

$$S=\left[\frac{e^4}{4}\cdot(e^4-1)+1\right]u^2\cong 732.59\,u^2$$

Problema 7:

El peso de las personas de un colegio mayor sigue una ley normal de media 70 kg y desviación típica 15 kg. Si se elige una persona al azar del colegio, calcula la probabilidad de los siguientes eventos:

a) Su peso sea superior a 80 kg.

b) Su peso sea inferior a 50 kg.

c) Su peso esté comprendido entre 60 y 120 kg.

Solución:

Nos dicen que la distribución es normal de: $\mu = 70$; $\sigma = 15$.

$X \to N(\mu, \sigma) = N(70, 15)$. Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-70}{15}$.

a) $P(X > 80) = P\left(Z > \frac{80-70}{15}\right) = P\left(Z > \frac{10}{15}\right) = P(Z > 0.67) = 1 - P(Z < 0.67) = 1 - 0.7486 = 0.2514$.

La probabilidad de que su peso sea superior a 80 kg es $\mathbf{0.2514}$.

b) $P(X < 50) = P\left(Z < \frac{50-70}{15}\right) = P\left(Z < \frac{-20}{15}\right) = P(Z < -1.33) = 1 - P(Z \leq 1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$.

La probabilidad de que su peso sea inferior a 50 kg es $\mathbf{0.0918}$.

c) $P(60 < X < 120) = P\left(\frac{60-70}{15} < Z < \frac{120-70}{15}\right) = P\left(\frac{-10}{15} < Z < \frac{50}{15}\right) = P(-0.67 < Z < 3.33) = P(Z < 3.33) - [1 - P(Z < 0.67)] = P(Z < 3.33) - 1 + P(Z < 0.67) = 0.9996 - 1 + 0.7486 = 1.7482 - 1 = 0.7482$.

La probabilidad de que su peso esté comprendido entre 60 y 120 kg es $\mathbf{0.7482}$.

Problema 8:

De dos acontecimientos $A\ y\ B$ de un mismo espacio muestral se sabe que:

$P(A \cap B) = 0.1; P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.6\ y\ P(A/B) = 0.5,$ donde $\overline{A}\ y\ \overline{B}$ denotan los acontecimientos complementarios de $A\ y\ B$, respectivamente.

$a)$ Calcula $P(B)$.

$b)$ Calcula $P(A \cup B)$.

$c)$ ¿Son los sucesos $A\ y\ B$ independientes? Razona la respuesta.

Solución:

Nos dice el enunciado que: $P(A \cap B) = 0.1; P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.6\ y\ P(A/B) = 0.5.$

$a)$ Como $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ despejamos $P(B)$: $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A/B)} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2.$

$P(B) = 0.2.$

$b)$ Por las leyes de Morgan sabemos que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

Despejamos la unión:

$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0.6 = 0.4.$

$P(A \cup B) = 0.4.$

$c)$ Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.4 = P(A) + 0.2 - 0.1 \Rightarrow P(A) = 0.3.$$

$P(A) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06 \neq 0.1 = P(A \cap B).$

Los sucesos NO son independientes

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

Model I

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1 El vaixell de Dénia a Eivissa porta automòbils i camions a la bodega. Cada camió ocupa quatre places d'automòbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automòbils. Cada automòbil pesa 1000 kg, i cada camió, 9000 kg. El pes total permès per a la càrrega és de 300 000 kg. La companyia cobra 50 euros per cada automòbil i 300 euros per cada camió.

a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 punts)

c) Calculau el nombre de cotxes i camions que s'han de carregar per tal d'obtenir un benefici màxim. Determinau també aquest benefici màxim. (2 punts)

2 Donades les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

a) Calculau A^2. (2 punts)

b) Trobau a, b, c tals que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (8 punts)

3 En una botiga de fruita hem comprat pomes a 0.5 euros cadascuna, alvocats a 1 euro i pinyes a 1.5 euros la peça. En arribar a la caixa ens adonam que portam 70 peces de fruita, el cost total de les quals és de 68 euros. També observam que si les pomes que portam fossin alvocats i els alvocats fossin pomes, la compra ens sortiria 4 euros més barata.

a) Identificau les variables i interpretau l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (5 punts)

b) Determinau el nombre de peces de cada fruita que hem comprat. (5 punts)

4 Considerem la funció definida a trossos següent

$$f(x) = \begin{cases} -4x + a & \text{si} \quad x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calculau els valors de a perquè $f(x)$ sigui contínua. (3 punts)

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

b) És $f(x)$ derivable per $a = 1$? (3 punts)

c) Per $a = 0$, determinau els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$. (4 punts)

5 El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció

$$P(t) = \frac{2 + t + t^2}{t^2 + 2t + 1},$$

on $t \geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts.

a) Quina és la població inicial (t=0) i la població després de 5 anys? (2 punts)

b) A partir de quin moment la població serà inferior a un milió d'individus? (4 punts)

c) Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirà el nombre d'individus de la població? (4 punts)

6 Considerau la funció $f(x) = \frac{3}{x} + 8$.

a) Trobau els punts de la gràfica en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $3x + 4y + 5 = 0$. (4 punts)

b) Calculau les equacions de les rectes tangents als punts trobats a l'apartat anterior. (2 punts)

c) Calculau l'àrea compresa entre la gràfica de la funció $f(x)$ i les rectes $x = 2$, $x = 4$ i $y = 0$. (4 punts)

7 En una mostra aleatòria de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.

a) Calculau un interval de confiança del 95% per estimar l'edat mitjana de la població. (5 punts)

b) Calculau la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perquè en estimar l'edat mitjana d'aquesta població amb un nivell de confiança del 92%, l'error comès sigui inferior a 0.5 anys. (5 punts)

8 En una determinada població resideixen 5000 persones en el centre i 10000 a la perifèria. Se sap que el 95% dels residents en el centre i que el 20% dels que viuen a la perifèria opina que l'ajuntament hauria de restringir l'accés de vehicles privats al centre urbà. Es tria a l'atzar un resident de la població.

a) Quina és la probabilitat que estigui a favor de restringir l'accés de vehicles privats al centre de la ciutat? (3 punts)

b) Quina és la probabilitat que resideixi en el centre i estigui a favor de la restricció d'accés? (3 punts)

c) Si la persona triada opina que s'hauria de restringir l'accés, quina és la probabilitat que resideixi en el centre de la ciutat? (4 punts)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

El barco de Denia a Ibiza transporta automóviles y camiones en su bodega. Cada camión ocupa 4 plazas de automóvil. La bodega puede almacenar hasta 200 automóviles. Cada automóvil pesa 1 000 kg y cada camión, 9 000 kg. El peso total que permita la carga de la bodega es de 300 000 kg y la compañía cobra 50 euros por cada automóvil y 300 euros por cada camión.

a) Plantea la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Calcular el número de coches y camiones que se han de cargar con el fin de obtener el beneficio máximo.

Solución:

Sean las variables: $\boldsymbol{x}$ ={número de automóviles}; $\boldsymbol{y}$ ={número de camiones}

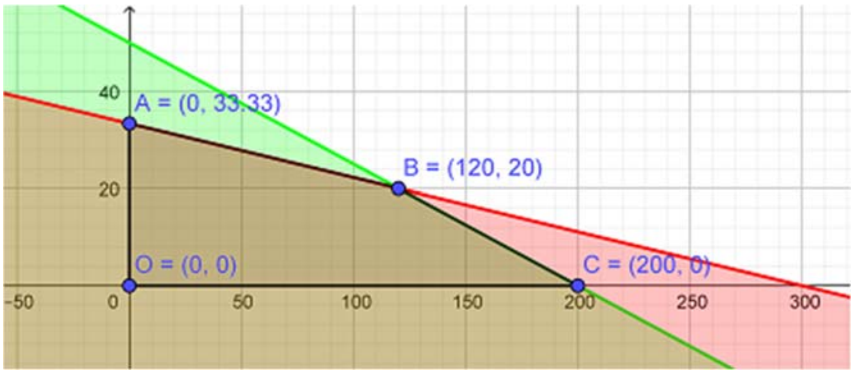
a) Tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+4y \leq 200} \\ \boldsymbol{1000x+9000y \leq 300000} \\ \boldsymbol{x,y \geq 0} \end{cases}$$

La función de beneficio es $\boldsymbol{B(x,y)=50x+300y}$

Las soluciones de este sistema de inecuaciones que delimitan la región factible son $\boldsymbol{O(0,0); A(0,33.33); B(120,20); C(200,0)}$

b) Se delimita la región factible.



c) Sustituyendo las coordenadas de los vértices de la región factible en la función de beneficio

$\boldsymbol{B(x,y)=50x+300y}$ tenemos:

$$B(0,0)=0$$

$$\boldsymbol{B(0,33.3)=1000}$$

$$\boldsymbol{B(120,20)=12\,000}$$

$$\boldsymbol{B(200,0)=10000}$$

El beneficio máximo se alcanza cargando $\boldsymbol{120}$ coches y $\boldsymbol{20}$ camiones. Este beneficio es de 12 000 €.

Problema 2:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcular A^2.

$b)$ Hallar a, b, c tales que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a)

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 1 \\ a+b = 0 \\ b+c = 0 \end{cases}$$

Si $a = 1 \Longrightarrow b = -1 \Longrightarrow c = 1$, la matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $a = -1 \Longrightarrow b = 1 \Longrightarrow c = -1$, la matriz es

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a = \pm 1, b = \mp 1, c = \pm 1}$$

Problema 3:

En una tienda de frutas hemos comprado manzanas a 0.5 euros cada una, aguacates a 1 euros y piñas a 1.5 euros la pieza. Al llegar a la caja nos damos cuenta que llevamos 70 piezas de fruta, el coste total de las cuales es de 68 euros. También observamos que si las manzanas que llevamos fueran aguacates y los aguacates fueran manzanas, la compra nos saldría 4 euros más barata.

$a)$ Identifique las variables e interprete el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales.

$b)$ Determinar el número de piezas de cada fruta que hemos comprado.

Solución:

a) Sean

x ={número de manzanas compradas}
y ={número de aguacates comprados}
x ={número de piñas compradas}
Las ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=70} \\ \boldsymbol{0.5x+y+1.5z=68} \\ \boldsymbol{0.5y+x+1.5z=64} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=70} \\ \boldsymbol{0.5x+y+1.5z=68} \\ \boldsymbol{x+0.5y+1.5z=64} \end{cases}$$

Para resolver el sistema utilizaremos el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0.5 & 1 & 1.5 & 68 \\ 1 & 0.5 & 1.5 & 64 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=2F_3]{F_2=2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & 2 & 3 & 136 \\ 2 & 1 & 3 & 128 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-2F_1]{F_2=F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 2 & 66 \\ 0 & -1 & 1 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3=F_3+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 2 & 66 \\ 0 & 0 & 3 & 54 \end{pmatrix}$$

Las soluciones son

$$\begin{cases} 3z=54 \Longrightarrow z=18 \\ y+2z=66 \Longrightarrow y=30 \\ x+y+z=70 \Longrightarrow x=22 \end{cases}$$

Hemos comprado $\mathbf{22}$ manzanas, $\mathbf{30}$ aguacates y $\mathbf{18}$ piñas

Problema 4:

Consideramos la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} -4x + a & si \quad x \leq -2 \\ x^2 - 5 & si \quad -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$.

a) Calcular los valores de a para que $f(x)$ sea continua.

b) ¿Es $f(x)$ derivable para $x = 1$?

c) Para $a = 0$, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

La función $f(x)$ coincide en los distintos tramos con funciones lineales y con una función cuadrática, que son funciones continuas. El único problema de discontinuidad puede darse en los puntos en que la definición de la función es distinta a izquierda y derecha, es decir en los puntos $x = -2$ y $x = 1$. En estos puntos el límite por la izquierda, el límite por la derecha y el valor de la función en el punto deben coincidir.

En $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} -4x + a = 8 + a$$
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^-} x^2 - 5 = -1$$
$$f(-2) = 8 + a$$

Para que sean iguales

$$8 + a = -1 \Longrightarrow a = -9$$

En $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 - 5 = -4$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} -7x + 3 = -4$$
$$f(1) = -4$$

Aquí la función es continua.

Para que la función sea continua a debe valer $\boldsymbol{a = -9}$

b) La función para $a = 1$ es

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 1 & si & x \leq -2 \\ x^2 - 5 & si & -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & si & x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función no es continua, porque ya vimos en el apartado a) que $f(x)$ solo es continua para $a = -9$. Por tanto, tampoco es derivable.

c) Para $a = 0$ la función es

$$f(x) = \begin{cases} -4x & si & x \leq -2 \\ x^2 - 5 & si & -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & si & x \geq 1 \end{cases}$$

La derivada para los puntos $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ es

$$f'(x) = \begin{cases} -4 & si & x < -2 \\ 2x & si & -2 < x < 1 \\ -7 & si & x > 1 \end{cases}$$

La función es decreciente en los puntos en los que la derivada es negativa, por tanto, en los intervalos $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

En el intervalo $(-2, 1)$ la derivada vale $2x$. Esta función se anula para $x = 0$. Además, para $x < 0$ la derivada es negativa (función decrece), y para $x > 0$ es positiva (la función crece).

En resumen

$$f'(x) = \begin{cases} < 0 & si & x < -2 \\ < 0 & si & -2 < x < 0 \\ > 0 & si & 0 < x < 1 \\ < 0 & si & x > 1 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} Decrece & si & x < -2 \\ Decrece & si & -2 < x < 0 \\ Crece & si & 0 < x < 1 \\ Decrece & si & x > 1 \end{cases}$$

Problema 5:

El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función

$P(t) = \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}$, con $t \geq 0$ mide el número de años transcurridos.

$a)$ ¿Cuál es la población inicial $(t = 0)$ y la población después de 5 años?

$b)$ ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos?

$c)$ Con el paso de los años, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos?

Solución:

a)

$$\boldsymbol{P(0) = \frac{2+0+0}{0+0+1} = 2}$$

La población inicial es de 2 millones de individuos.

b)

$$\boldsymbol{\frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1} < 1 \Rightarrow 2+t+t^2 < t^2+2t+1 \Rightarrow -t+1 < 0 \Rightarrow t > 1}$$

A partir del primer año la población es menor de 1 millón de individuos.

c)

$$\boldsymbol{\lim_{t\to\infty} \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1} = 1}$$

A largo plazo el número de individuos tiende a 1 millón de individuos.

Problema 6:

Considera la función: $f(x) = \frac{3}{x} + 8$.

$a)$ Hallar los puntos de la gráfica de $f(x)$ en el cual las rectas tangentes son paralelas a la recta $3x + 4y + 5 = 0$.

$b)$ Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos hallados en el apartado anterior.

$c)$ Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 2, x = 4\ e\ y = 0$.

Solución:

a)

La recta dada se puede poner como $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$, y por tanto la pendiente es $m = -\frac{3}{4}$.

La derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2}$$

Igualando estos valores

$$-\frac{3}{4} = -\frac{3}{x^2} \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2$$

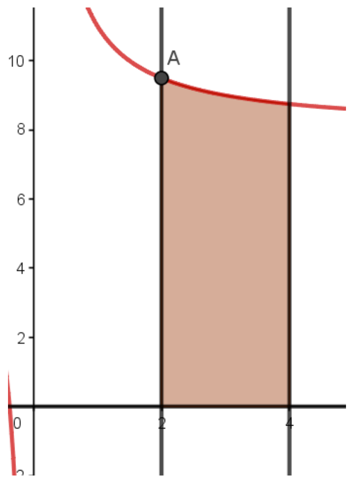
Los puntos en los que la recta tangente es paralela a la recta dada son $\boldsymbol{A}\left(\mathbf{2},\ \frac{\mathbf{19}}{\mathbf{2}}\right)$ y $\left(\mathbf{-2}, \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{2}}\right)$

b) La ecuación de la recta tangente en $(a, f(a))$ es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, por tanto las tangentes pedidas son:

$$y = \frac{19}{2} + \frac{-3}{4}(x - 2);\ y = \frac{13}{2} + \frac{-3}{4}(x + 2)$$

c) $\int_2^4 \left(\frac{3}{x} + 8\right) dx = [3\log(x) + 8x]_2^4 = (3\log(4) + 32) - (3\log(2) + 16) =$

$$= 3\log(2) + 16 \cong 18.0794$$



Problema 7:

En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17.4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la cual procede la muestra es de 2 años.

a) Calcular un intervalo de confianza al 95 % para estimar la edad media de la población.

b) Calcular el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para estimar la edad media de esta población con un nivel de confianza del 92 %, el error cometido sea inferior a 0.5 años.

Solución:

Se trata de una distribución normal de medias con:

$$\left.\begin{matrix}\bar{\mu} = 17.4 \\ \sigma = 2\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix}\bar{x} = 17.4 \\ \sigma_x = \dfrac{2}{\sqrt{256}} = 0.125\end{matrix}\right\}$$

a)

$$N_c = 95\%$$
$$1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow \alpha = 0.05$$

Hallamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$

$$P(z \le z_{\alpha/2}) = \frac{1+0.95}{2} = 0.975$$

Buscamos en la tabla de la normal y encontramos que $z_{\alpha/2} = 1.96$

El intervalo de confianza es

$$I_c = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma_x, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma_x) \Longrightarrow$$
$$I_c = (17.4 - 1.96 \cdot 0.125, 17.4 + 1.96 \cdot 0.125) = (17.155, 17.645)$$

El intervalo de confianza es $(\mathbf{17.155}, \mathbf{17.645})$

b)

Como $N_c = 0.92$ hallamos el valor crítico para este nivel de confianza

$$P(z \le z_{\alpha/2}) = \frac{1+0.92}{2} = 0.96$$
$$z_{\alpha/2} = 1.75$$

El error máximo admisible viene dado por

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = 7 \Longrightarrow n = 49$$

El tamaño mínimo de la muestra es de $\mathbf{49}$ individuos.

Problema 8:

En una determinada población residen 5 000 personas en el centro y 1 000 en la periferia. Se sabe que el 95 % de los residentes en el centro y el 20 % de los que viven en la periferia opina que el ayuntamiento debía restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción del acceso?

c) Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad?

Solución:

Sean los siguientes sucesos: $\boldsymbol{C = \{residir\ en\ el\ centro\}}$; $\boldsymbol{P = \{residir\ en\ la\ periferia\}}$; $\boldsymbol{R = \{estar\ a\ favor\ de\ restringir\ el\ acceso\ de\ vehiculos\ al\ centro\}}$

El enunciado proporciona las siguientes probabilidades.

$$\boldsymbol{p(C) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{p(P) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}}$$

$$\boldsymbol{p(R/C) = 0.95}$$

$$\boldsymbol{p(R/P) = 0.20}$$

a) Se pide $\boldsymbol{p(R)}$:

$$\boldsymbol{p(R) = p(C)\cdot p(R/C) + p(P)\cdot p(R/P) = \frac{1}{3}\cdot 0.95 + \frac{2}{3}\cdot 0.20 = 0.45 = \frac{9}{20}}$$

La probabilidad de que esté a favor es de $\boldsymbol{\frac{9}{20}}$

b) Se pide $\boldsymbol{p(C\cap R)}$

$$\boldsymbol{p(C\cap R) = p(C)\cdot p(R/C) = \frac{1}{3}\cdot 0.95 = \frac{19}{60}}$$

La probabilidad de que resida en el centro y esté a favor es de $\boldsymbol{\frac{19}{60}}$

c) Se pide $\boldsymbol{p(C/R)}$

Por el teorema de Bayes

$$\boldsymbol{p(C/R) = \frac{p(C\cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{19}{60}}{\frac{9}{20}} = \frac{19}{27}}$$

$$p(C/R) = \boldsymbol{\frac{19}{27}}$$