Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2021
Comunidad autónoma de
CANARIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Lidia Esther Fumero Acosta

Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2020–2021

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	
Convocatoria:	JUNIO

Elegir un MÁXIMO de CUATRO preguntas de las OPCIONES A y B de la siguiente manera: UNA entre A1y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4. Indicar, antes de cada respuesta, letra y número. Cada pregunta se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

OPCIÓN A

A1. Una tienda vende quesos de las marcas A (el 35%), B (el 38%) y C (el resto). Respectivamente, el 2%, el 3% y el 2,5% tienen exceso de sal.

a) Determinar el árbol de probabilidades.

b) Calcular la probabilidad de que un queso elegido al azar no tenga exceso de sal.

c) Si un queso elegido al azar tiene exceso de sal, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca C?

A2. Con base en los datos proporcionados por una muestra aleatoria de una población, se desea estimar la proporción de votantes a un determinado partido político.

a) Si de una muestra de 750 personas, 300 dicen que lo votan, calcular, con un nivel de confianza del 97%, un intervalo para la proporción de votantes de la población a ese partido.

b) Si, en otra muestra, la proporción de votantes ha sido 0,3 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0,05, con un nivel de confianza del 99%, calcular el tamaño de dicha muestra.

A3. El ayuntamiento de un pueblo ha construido una pista de hielo provisional cuya gráfica está limitada por las rectas $r_1: x = 0$, $r_2: x = 50$, $r_3: y = 45$ y la parábola $f: y = -\frac{1}{125}x^2 + \frac{2}{5}x$. Si se mide en metros,

a) Dibujar la gráfica. Calcular el volumen de agua en (m^3) que se necesita para llenar la pista sabiendo que la profundidad del agua es de 7 cm (0,07 metros).

b) El consumo eléctrico mensual para mantener congelada la pista es de 28 Kwh/ m^2. El precio del Kwh es de 0,13 €/Kwh. Calcular el coste de mantener la pista congelada durante un mes.

c) Aparte del coste del consumo eléctrico, la gestión de la pista (mantenimiento, alquiler del terreno, salario de los empleados, etc.) tiene un coste fijo mensual de 5000€; hay además un coste variable debido a averías, fugas de agua, días de calor … Si se espera que acudan a patinar 600 personas al mes, calcular cuál debe ser el precio de la entrada para cubrir todos los costes mensuales, suponiendo que los costes variables alcanzan un 25% de los costes fijos de gestión.

A4. Una empresa dedicada al comercio del textil desea liquidar 400 camisas y 300 pantalones. Para ello lanza dos ofertas: la oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón por 30€, y la oferta B consiste en un lote de dos camisas y un pantalón, que se vende a 40 €. Hay que ofrecer al menos 40 lotes de la oferta A y al menos 20 de la oferta B.

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible.

c) Para maximizar las ganancias, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo? ¿Cuál es la ganancia máxima?

OPCIÓN B

B1. A partir de una muestra de 81 adultos, se estima que la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio está entre 3,608 y 4,392 horas (ambos incluidos). Suponiendo hipótesis de normalidad, con una desviación típica de $\frac{9}{5}$ horas:

a) ¿Cuál es la media muestral obtenida?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Usando la estimación puntual de la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de horas semanales dedicadas por 16 adultos a hacer ejercicio sea mayor o igual que 4,1 horas?

B2. Se ha realizado una encuesta a los 20000 estudiantes de la universidad sobre su actitud ante el botellón. De ellos, 13200 son partidarios y el resto no. Conocida esta cifra, el vicerrectorado de cultura va a organizar 100 charlas informativas sobre este tema, a cada una de las cuales asistirán 30 estudiantes de la universidad elegidos al azar.

a) Calcular la proporción de estudiantes partidarios del botellón en la universidad. ¿Cuál es la distribución de probabilidad aproximada de la proporción de estudiantes partidarios del botellón en las charlas?

b) Ha comenzado una de estas charlas. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los asistentes haya más de 21 alumnos favorables al botellón?

c) ¿En cuántas charlas cabe esperar que haya más de 15 y menos de 19 estudiantes partidarios del botellón?

B3. La tasa de paro (expresada en porcentaje sobre la población en edad de trabajar) registrada en cierta región europea durante los últimos 72 trimestres se ha comportado de acuerdo a la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{125}(4x^2 - 80x + 1025) & 0 \le x < 35 \\ \dfrac{1}{625}(13x^2 - 1560x + 54300) & 35 \le x \le 72 \end{cases}$$

donde x representa el trimestre.

a) Representar gráficamente la función. Justificando las respuestas, explicar si es continua, y determinar cuándo es creciente y cuándo es decreciente.

b) ¿En qué trimestre alcanzó la tasa de paro su mínimo? ¿Cuándo alcanzó el máximo? ¿Cuáles fueron los valores de las tasas de paro mínima y máxima?

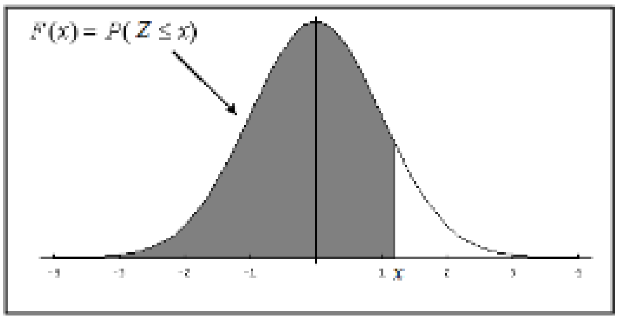
c) ¿En qué trimestre se superó por primera vez el 10% de paro?

B4. Tres nietos desean hacer un regalo de 60 € a su abuela y deciden reunir esta cantidad de la siguiente forma: Luis, el mayor, aporta el triple de lo que aportan los otros dos juntos. Carmen aporta 3 € por cada dos que aporta Pedro.

a) Plantear el sistema de ecuaciones lineales.

b) Resolver el sistema.

c) ¿Cuánto aporta cada nieto?



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO OPCIÓN A

Problema A.1:

Una tienda vende quesos de las marcas A (35 %), B (38 %) y C (el resto). Respectivamente, el 2 %, 3 % y 2.5 % tienen exceso de sal.

a) Determinar el árbol de probabilidades.

b) Calcular la probabilidad de que un queso elegido al azar no tenga exceso de sal.

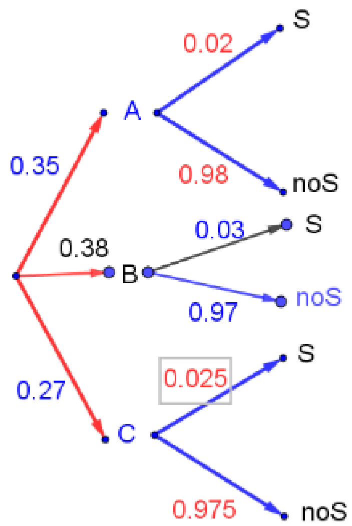
c) Si un queso elegido al azar tiene exceso de sal, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca C?

Solución:

a) Sean los sucesos A = "El queso es de la marca A", B = "El queso es de la marca B", C = "El queso es de la marca C", S = "El queso tiene exceso de sal" y S = noS = "El queso no tiene exceso de sal"

$$P(C) = 1 - 0.35 - 0.38 = 0.27$$

a) El árbol de probabilidades es:



b) Por el Teorema de la probabilidad total:

$P(\overline{S}) = P(A) \cdot P(\overline{S}/A) + P(B) \cdot P(\overline{S}/B) + P(C) \cdot P(S/C) = 0.35 \cdot 0.980 + 0.38 \cdot 0.970 + 0.27 \cdot 0.975 = 0.3430 + 0.3686 + 0.2632 = 0.9748.$

La probabilidad de que un queso elegido al azar no tenga exceso de sal es $\mathbf{0.97485.}$

c) Por el Teorema de Bayes:

$$P = P(C/S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{P(C) \cdot P(S/C)}{1 - P(\overline{S})} = \frac{0.27 \cdot 0.025}{1 - 0.97485} = 0.2684.$$

La probabilidad de que un queso sea de la marca C, sabiendo que tiene exceso de sal, es $\mathbf{0.2684}$.

Problema A.2:

Con base en los datos proporcionados por una muestra aleatoria de una población, se desea estimar la proporción de votantes a un determinado partido político.

a) Si de una muestra de 750 personas, 300 dicen que lo votan, calcular, con un nivel de confianza del 97 %, un intervalo para la proporción de votantes de la población a ese partido.

b) Si, en otra muestra, la proporción de votantes ha sido 0.3 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.05, con un nivel de confianza del 99 %, calcular el tamaño de dicha muestra.

Solución:

a) Sea P= proporción de votantes al partido político

n = 750 es el tamaño de la muestra

$\hat{p}=\frac{300}{750}=0.4$ es la proporción muestral de votantes al partido político

97 % es el nivel de confianza, es decir, $1-\alpha=0.97 \Rightarrow \alpha=0.03$

$$P(Z\le z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.03}{2}=0.985\Rightarrow z_{\alpha/2}=2.17$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right)=$$

$$\left(0.4-2.17\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot0.6}{750}},0.4+2.17\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot0.6}{750}}\right)=(0.3612,0.4388)$$

La proporción de votantes al partido político estará entre 0.3612 y 0.4388, con un nivel de confianza del 97 %.

b) $\hat{p}=0.3$

Error inferior a 0.05

Nivel de confianza: 99 % $1-\alpha=0.99\Rightarrow\alpha=0.01$

$$P(Z\le z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.01}{2}=0.995\Rightarrow z_{\alpha/2}=2.575$$

El error es $E=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$ Igualando el error a 0.05 obtenemos el tamaño de la muestra:

$$z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}=0.05\Rightarrow2.575\cdot\sqrt{\frac{0.3\cdot0.7}{n}}=0.05\Rightarrow2.575\cdot\sqrt{0.3\cdot0.7}=0.05\cdot\sqrt{n}\Rightarrow\left(\frac{2.575\cdot\sqrt{0.3\cdot0.7}}{0.05}\right)^2=n$$

n = 556.97

El tamaño de la muestra es de 557 personas, como mínimo, para obtener una estimación de la proporción de votantes con un error inferior a 0.05.

Problema A.3:

El ayuntamiento de un pueblo ha construido una pista de hielo provisional cuya gráfica está limitada por las rectas $r_1 \equiv x = 0, r_2 \equiv x = 50, r_4 \equiv y = 45$ y la parábola $y = f(x) = -\frac{1}{125}x^2 + \frac{2}{5}x$. Si se mide en metros:

$a)$ Dibujar la gráfica. Calcular el volumen de agua (en m^3) que se necesita para llenar la pista sabiendo que la profundidad del agua es de 7 cm (0.07 metros).

$b)$ El consumo eléctrico mensual para mantener congelada la pista es de 28 Kwh/m^2. El precio del Kwh es de 0.13 euros/Kwh. Calcular el coste de mantener la pista congelada durante un mes.

$c)$ Aparte del coste del consumo eléctrico, la gestión de la pista (mantenimiento, alquiler del terreno, salario de los empleados, etc.) tiene un coste fijo mensual de 5 000 euros; hay además un coste variable debido a averías, fugas de agua, días de calor … Si se espera que acudan a patinar 600 personas al mes, calcular cuál debe ser el precio de la entrada para cubrir todos los costes mensuales, suponiendo que los costes variables alcanzan un 25 % de los costes fijos de gestión.

Solución:

a) Para calcular el vértice igualamos a cero la derivada de la función:

$$y' = f'(x) = \frac{-2}{125}x + \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow -2x + 50 = 0 \Rightarrow x = 25$$

Vértice: V(25, 5)

$$f(0) = \frac{-1}{125} \cdot 0^2 + \frac{2}{5} \cdot 0 = 0 \qquad f(50) = \frac{-1}{125} \cdot 50^2 + \frac{2}{5} \cdot 50 = 0$$

Puntos: O(0, 0) A(50, 0)

La gráfica es:

La superficie de la pista viene dada por la integral definida:

$$\int_0^{50}[45-f(x)]\cdot dx=\int_0^{50}\left[45-\left(-\frac{1}{125}x^2+\frac{2}{5}x\right)\right]\cdot dx=\int_0^{50}\left(\frac{1}{125}x^2-\frac{2}{5}x+45\right)\cdot dx=$$

$$\left[\frac{1}{125}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{2}{5}\cdot\frac{x^2}{2}+45x\right]_0^{50}=\left[\frac{x^3}{375}-\frac{x^2}{5}+45x\right]_0^{50}=\left(\frac{50^3}{375}-\frac{50^2}{5}+45\cdot 50\right)-0=$$

$$\frac{5^3\cdot 1.000}{375}-\frac{5^2\cdot 100}{5}+2.250=\frac{1:000}{3}-500+2.250=\frac{1:000}{3}+1.750=\frac{1:000+5.250}{3}=\frac{6.250}{3}=2.083.\hat{3}\ m^2.$$

<u>Otra forma</u>:

También se puede hallar el área restando el área bajo la parábola al área del rectángulo limitado por los ejes de coordenadas y las rectas x = 50 e y = 45.

Área bajo la parábola:

$$\int_0^{50} f(x)\,dx=\int_0^{50}\left(\frac{-1}{125}x^2+\frac{2}{5}x\right)2=\left[\frac{-x^3}{375}+\frac{x^2}{5}\right]\Bigg|_0^{50}=\left(\frac{-50^3}{375}+\frac{50^2}{5}\right)-0=\frac{-125000}{375}+\frac{2500}{5}=\frac{500}{3}\approx 166.\hat{6}\,m^2$$

El área de la pista sería $50\cdot 45-166.\hat{6}=2083.\hat{3}\,m^2$

Como la profundidad del agua es 0.07 m, el volumen del agua será: $V=2083.\hat{3}\cdot 0.07=145.8\,\hat{3}\,m^3$

El volumen de agua que se necesita para llenar la pista es $145.833\ m^3 = 145\ 833.33\ \ell$

b) Consumo eléctrico mensual: 28 Kwh/m²

Precio del Kwh: 0.13 euros/Kwh

El consumo eléctrico mensual de la pista es $2083.\hat{3}\cdot 28=58333.\hat{3}\ Kwh$

El coste será $58333.\hat{3}\cdot 0.13=7583.\hat{3}\,€$

El coste de mantener la pista congelada durante un mes es $7\ 583.33\ euros$ €.

c) Coste fijo mensual: 5 000 euros

Coste variable: 25 % de los costes fijos, es decir, 5000 · 0.25 = 1250 €

Coste de la electricidad: 7583.33 €

Número de personas que se espera que acudan a la pista: 600 personas al mes

El coste total será 5000 € + 1250 + 7583.33 = 13833.33 €

El precio de la entrada será 13833.33/600 = 23.055 €

Para cubrir los costes totales el precio de la entrada debe ser 23.06 €

Problema A.4:

Una empresa dedicada el comercio del textil desea liquidar 400 camisas y 300 pantalones. Para ello lanza dos ofertas: la oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón por 30 euros, y la oferta B consiste en un lote de dos camisas y un pantalón, que se vende a 40 euros. Hay que ofrecer al menos 40 lotes de la oferta A y al menos 20 de la oferta B.

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible.

c) Para maximizar las ganancias, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo? ¿Cuál es la ganancia máxima?

Solución:

a)

Ofertas	Camisas	Pantalones	Precio
A	1	1	30 €
B	2	1	40 €
	400	300	

Como mínimo se deben ofrecer 40 lotes de la oferta A y 20 de la oferta B.

Sean x = número de lotes de la oferta A e y = número de lotes de la oferta B.

El problema de programación lineal es:

$$\left.\begin{array}{l} \max z = 30x + 40y \\ s.a: \quad x + 2y \le 400 \\ \quad\quad x + y \le 300 \\ \quad\quad x \ge 40 \\ \quad\quad y \ge 20 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \max z = 30x + 40y \\ s.a: \quad y \le \dfrac{400 - x}{2} \\ \quad\quad y \le 300 - x \\ \quad\quad x \ge 40 \\ \quad\quad y \ge 20 \end{array}\right\}$$

b) Hallamos los puntos de corte entre las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{400 - x}{2} \\ y = 300 - x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{400 - x}{2} = 300 - x \Rightarrow 400 - x = 600 - 2x \Rightarrow x = 200 \qquad y = 100$$

Punto (200, 100)

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{400 - x}{2} \\ y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{400 - x}{2} = 20 \Rightarrow 400 - x = 40 \Rightarrow x = 360$$

Punto (360, 20)

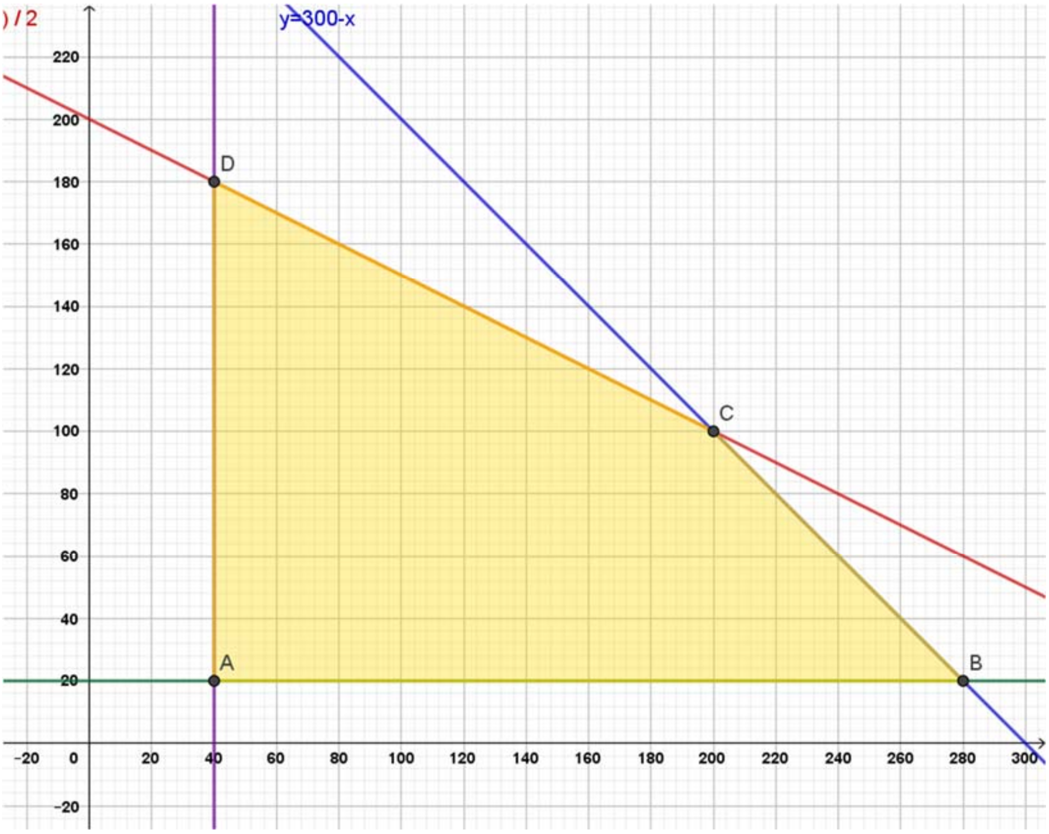
$$\left.\begin{array}{l} y = 300 - x \\ y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow 300 - x = 20 \Rightarrow x = 280$$

Punto (280, 20)

x	$y=\frac{400-x}{2}$
0	200
40	180
400	0

x	$y=300-x$
0	300
40	260
300	0

La región factible es:



c) Hallamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible:

$z(A)=z(40,20)=30\cdot 40+40\cdot 20=1200+800=2000$

$z(B)=z(280,20)=30\cdot 280+40\cdot 20=8400+800=9200$

$z(C)=z(200,100)=30\cdot 200+40\cdot 100=6000+4000=10000$

$z(D)=z(40,180)=30\cdot 40+40\cdot 180=1200+7200=8400$

La función debe ser máxima, por lo tanto la solución es el punto C(200, 100).

Para maximizar las ganancias se deben vender 200 lotes de la oferta A y 100 lotes de la oferta B, obteniendo unas ganancias de 10 000 €

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

A partir de una muestra de 81 adultos, se estima que la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio está entre 3.608 y 4.392 horas (ambos incluidos). Suponiendo hipótesis de normalidad, con una desviación típica de 9/5 horas:

a) ¿Cuál es la media muestral obtenida?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Usando la estimación puntual de la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de horas semanales dedicadas por 16 adultos a hacer ejercicio sea mayor o igual que 4.1 horas?

Solución:

a) Tamaño muestral n = 81

Desviación típica $\sigma = \frac{9}{5} = 1.8$

Intervalo de confianza para la media de horas semanales dedicadas a hacer ejercicio: [3.608, 4.392]

El intervalo de confianza para la media muestral es $\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

La media muestral es el punto medio del intervalo de confianza: $\bar{X} = \frac{3.608 + 4.392}{2} = 4$

La media muestral es 4 horas semanales.

b) El error cometido es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y en este caso es $E = 4.392 - 4 = 0.392$

Si se igualan ambas expresiones y se despeja: $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.392 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.392 \cdot \sqrt{n}}{\sigma} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.392 \cdot \sqrt{81}}{1.8}$

$z_{\alpha/2} = 1.96$ $\quad P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 0.975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95$

El nivel de confianza utilizado es 95 %.

c) Tamaño muestral n = 16

La distribución de probabilidad de la media muestral es $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Tomando como media la obtenida en el apartado a), la distribución es:

$\bar{X} \sim N\left(4, \frac{1.8}{\sqrt{16}}\right) \rightarrow \bar{X} \sim N(4, 0.45)$

probabilidad pedida es:

$P(X \geq 4.1) = P\left(Z \geq \frac{4.1-4}{0.45}\right) = P\left(Z \geq \frac{0.1}{0.45}\right) = P(Z \geq 0.22) = 1 - P(Z < 0.22) = 1 - 0.5871 = 0.4129.$

La probabilidad de que la media de horas semanales dedicadas por 16 adultos a hacer ejercicio sea mayor o igual que 4.1 horas es 0.4129.

Problema B.2:

Se ha realizado una encuesta a 20 000 estudiantes de la universidad sobre su actitud ante el botellón. De ellos, 13 200 son partidarios y el resto no. Conocida esta cifra, el vicerrectorado de cultura va a organizar 100 charlas informativas sobre este tema, a cada una de las cuales asistirán 30 estudiantes de la universidad elegidos al azar.

$a)$ Calcular la proporción de estudiantes partidarios del botellón en la universidad. ¿Cuál es la distribución de probabilidad aproximada de la proporción de estudiantes partidarios del botellón en las charlas?

$b)$ Ha comenzado una de estas charlas. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los asistentes haya más de 21 alumnos favorables al botellón?

$c)$ ¿En cuántas charlas cabe esperar que hay más de 15 y menos de 19 estudiantes partidarios del botellón?

Solución:

a) La proporción de estudiantes partidarios del botellón en la universidad es

$$\hat{p}=\frac{13200}{20000}=0.66$$

La distribución de la proporción muestral de estudiantes partidarios del botellón en las charlas es una distribución normal

$$\hat{P}\sim N\left(p,\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)\rightarrow \hat{P}\sim N\left(0.66,\sqrt{\frac{0.66\cdot(1-0.66)}{30}}\right)\rightarrow \hat{P}\sim N(0.66,0.0865)$$

b) La proporción de alumnos favorables al botellón sería más de $\frac{21}{30}=0.7$

La probabilidad pedida es:

$$P(\hat{P}>0.7)=P\left(\frac{\hat{P}-0.66}{0.0865}>\frac{0.7-0.66}{0.0865}\right)=P(Z>0.46)=1-P(Z\leq 0.46)1-0.6772=0.3228$$

La probabilidad de que entre los asistentes haya más de 21 alumnos favorables al botellón es 0.3228.

c) Si hay más de 15 y menos de 19 estudiantes partidarios del botellón significa que la proporción está entre $\frac{15}{30}=0.5$ y $\frac{19}{30}=0.6\hat{3}$

$$P(0.5<\hat{P}<0.6\hat{3})=P\left(\frac{0.5-0.66}{0.0865}<\frac{\hat{P}-0.66}{0.0865}<\frac{0.6\hat{3}-0.66}{0.0865}\right)=P(-1.85<Z<-0.31) =$$

$$P(0.31<Z<1.85)=P(Z<1.85)-P(Z<0.31)=0.9678-0.6217=0.3461$$

Se organizan 100 charlas: $0.3461\cdot 100=34.61$

Cabe esperar que en 35 charlas, aproximadamente, haya más de 15 y menos de 19 alumnos partidarios del botellón.

Problema B.3:

La tasa de paro (expresada en porcentaje sobre la población en edad de trabajar) registrada en cierta región europea durante los últimos 72 trimestres se ha comportado de acuerdo a la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{125} \cdot (4x^2 - 80x + 1\,025), & 0 \le x < 35 \\ \frac{1}{625} \cdot (13x^2 - 1\,560x + 54\,300), & 35 \le x \le 72 \end{cases}$$, donde x representa el trimestre.

a) Representar gráficamente la función. Justificando las respuestas, explicar si es continua, y determinar cuándo es creciente y cuándo es decreciente.

b) ¿En qué trimestre alcanzó la tasa de paro mínimo? ¿Cuándo alcanzó el máximo? ¿Cuáles fueron los valores de las tasas de paro máxima y mínima?

c) ¿En qué trimestre se superó por primera vez el 10 % de paro?

Solución:

a) Es una función definida a trozos continua, por ser polinómica, en los intervalos [0, 35) y (35, 72].

Estudiamos la continuidad en x = 35:

$$f(35)=\frac{1}{625}\cdot(13\cdot 35^2-1560\cdot 35+54300)=\frac{15625}{625}=25$$

$$\lim_{x\to 35^-}\frac{1}{125}\cdot(4x^2-80x+1025)=\frac{1}{125}\cdot(4\cdot 35^2-80\cdot 35+1025)=\frac{3125}{125}=25$$

$$\lim_{x\to 35^+}\frac{1}{625}\cdot(13x^2-1560x+54300)=25$$

$$\lim_{x\to 35^+}f(x)=\lim_{x\to 35^-}f(x)=f(35)$$ por lo tanto, la función es continua en su dominio.

La derivada de la función es:

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{125}\cdot(8x-80), 0\le x<35\\ \frac{1}{625}\cdot(26x-1\,560), 35<x\le 72\end{cases}$$

Hallamos los vértices de ambas parábolas:

$$\frac{1}{125}\cdot(8x-80)=0\Rightarrow 8x-80=0\Rightarrow x=10 \qquad f(10)=\frac{1}{125}\cdot(4\cdot 10^2-80\cdot 10+1025)=\frac{625}{125}=5$$

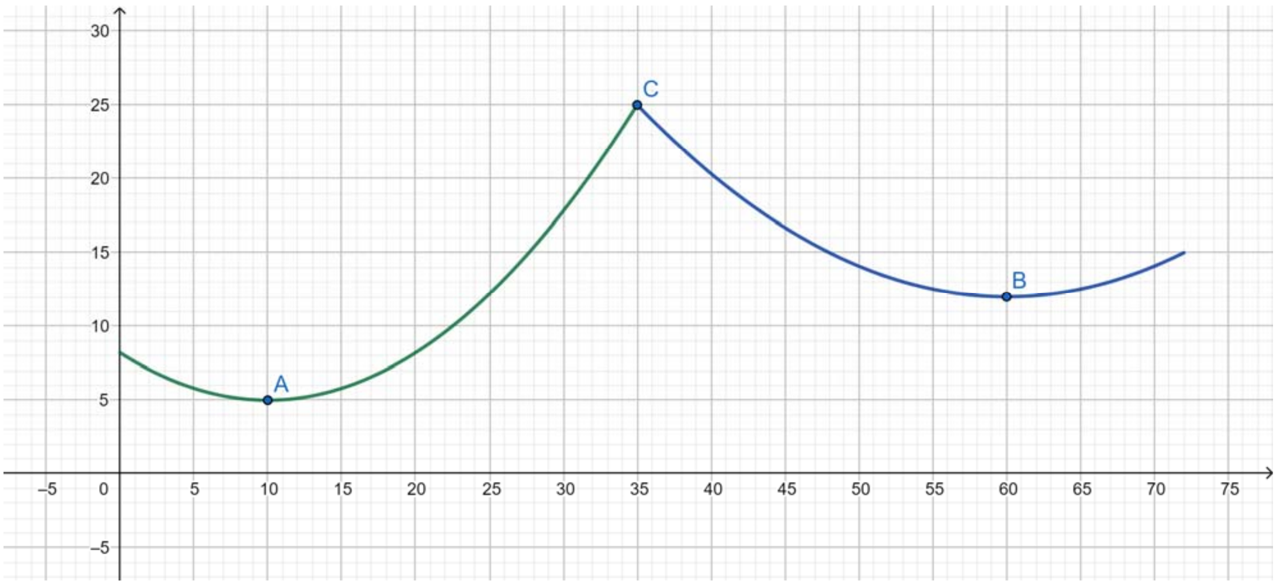
$$\frac{1}{625}\cdot(26x-1560)=0\Rightarrow 26x-1560=0\Rightarrow x=60 \qquad f(60)=\frac{1}{625}\cdot(13\cdot 60^2-1560\cdot 60+54300)=\frac{7500}{625}=2$$

Hallamos otros puntos:

$$f(0)=\frac{1}{125}\cdot(4\cdot 0^2-80\cdot 0+1025)=\frac{1025}{125}=8.2$$

$$f(72)=\frac{1}{625}\cdot(13\cdot 72^2-1560\cdot 72+54300)=\frac{9372}{625}=14.9952$$

Se representa la gráfica con los puntos obtenidos:



La función es creciente en (10, 35) U (60, 72) y decreciente en (0, 10) U (35, 60).

b) La tasa de paro fue mínima en el trimestre 10 y fue del 5 %.

La tasa de paro alcanzó el máximo en el trimestre 35 y fue del 25 %.

c) A partir de la gráfica se deduce que la tasa de paro supera el 10 % en torno al trimestre 23. Lo comprobamos igualando a 10 la función:

$$\frac{1}{125}\cdot(4\cdot x^2-80\cdot x+1025)=10\Rightarrow 4\cdot x^2-80\cdot x+1025=1250\Rightarrow 4\cdot x^2-80\cdot x-225=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}=\frac{80\pm\sqrt{(-80)^2-4\cdot 4\cdot(-225)}}{2\cdot 4}=\frac{80\pm 100}{8}\qquad x_1=22.5\quad ;\quad x_2=-2.5$$

La solución negativa no es válida en el contexto del problema.

La tasa de paro superó por primera vez el 10 % en el trimestre 23.

Problema B.4:

Tres nietos desean hacer un regalo de 60 euros a su abuela y deciden reunir esta cantidad de la siguiente forma: Luís, el mayor, aporta el triple de que aportan los otros dos juntos. Carmen aporta 3 euros por cada dos que aporta Pedro.

$a)$ Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones lineales.

$b)$ Resolver el sistema.

$c)$ ¿Cuánto aporta cada nieto?

Solución:

a) Sea x = dinero aportado por Luis, y = dinero aportado por Carmen, z = dinero aportado por Pedro

El dinero aportado entre los tres es 60 €. $x+y+z=60$

Luis aporta el triple que los otros dos juntos. $x=3\cdot(y+z)\Rightarrow x-3y-3z=0$

Carmen aporta 3 € por cada 2 € que aporta Pedro. $\frac{y}{z}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2y-3z=0$

El sistema de ecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ x-3y-3z=0 \\ 2y-3z=0 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos por el método de Gauss:

La matriz del sistema es:

$$M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -4 & -4 & -60 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\cdot F_3 + F_2} M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -4 & -4 & -60 \\ 0 & 0 & -10 & -60 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ -4y-4z=-60 \\ -10z=-60 \end{array}\right\} \quad z=\frac{-60}{-10}=6\ ;\ -4y-4\cdot 6=-60\Rightarrow y=9\ ;\quad x+9+6=60\Rightarrow x=45\ .$$

Luis aporta 45 €, Carmen 9 € y Pedro 6 €.

Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2020–2021

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	(3)
Convocatoria:	Julio

Elegir un MÁXIMO de CUATRO preguntas de las OPCIONES A y B de la siguiente manera: UNA entre A1y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4. Indicar, antes de cada respuesta, letra y número. Cada pregunta se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

OPCIÓN A

A1. En una clínica veterinaria el 40% de los animales que acuden a consulta son perros, el 30% gatos, el 20% aves y el resto otros animales. El 70% de los perros acude con cita previa y el resto acude como urgencia; entre los gatos, el 60% viene con cita previa y el resto como urgencia; solo un 10% de las aves viene como urgencia; el resto de animales viene siempre como urgencia.

a) Construir el árbol de probabilidades para este problema.

b) De todos los animales que vienen con cita previa, ¿Qué porcentaje son perros?

c) ¿Qué porcentaje de las consultas realizadas en la clínica son urgencias?

A2. En la primera fase de un examen de oposición, se realiza un test que consta de 90 preguntas a contestar verdadero o falso. Se aprueba si se contestan correctamente al menos 50 preguntas. Un opositor, para responder, lanza una moneda y contesta verdadero si sale cara y falso si sale cruz. Hallar:

a) Probabilidad de aprobar el examen.

b) Probabilidad de acertar más de 51 y menos de 60 preguntas.

c) Probabilidad de acertar a lo sumo 40 preguntas.

A3. Durante los últimos 10 años, los costos en comunicaciones de una empresa, en decenas de miles de euros, vienen dados por la función:

$$C(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-1)^2}{3} + 4 & , t \in [0,4] \\ \dfrac{18-t}{2} & , t \in (4,10] \end{cases}$$

siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

a) ¿Es continua $C(t)$?

b) ¿Cuándo $C(t)$ es derivable? ¿Cuándo creció y cuándo decreció $C(t)$?

c) ¿Cuándo alcanzó $C(t)$ el máximo y el mínimo absolutos? ¿Cuáles fueron los valores máximos y mínimos absolutos?

A4. Se quieren plantar plataneras y naranjeros. Cada platanera cuesta 5 euros y cada naranjero 2 euros. Para facilitar la recogida, el número de plataneras no debe superar el doble del de naranjeros ni ser inferior a su mitad. Además, se puede dedicar un máximo de 900 euros a poner esta plantación. Se espera que cada platanera produzca un beneficio de 15 euros y cada naranjero 8 euros.

a) Plantear el correspondiente problema de Programación Lineal

b) Representar la región factible e indicar sus vértices

c) Determinar la cantidad de plantas de cada tipo que se deben plantar para maximizar el beneficio global.

OPCIÓN B

B1. Una naviera que opera entre islas ha decidido evaluar el peso de los vehículos que transporta para ajustar los precios de los billetes. Para ello ha tomado una muestra aleatoria de 64 vehículos, obteniendo un peso medio de 1123 kg con una desviación típica de 190 kg.

a) Suponiendo que la variable peso es normal, calcular un intervalo de confianza al 97% para el peso medio de todos los vehículos transportados por la naviera.

b) ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se desea estimar el peso medio de los vehículos con un error inferior a 20 kg y una confianza del 99%?

c) Sabiendo que el 10% de los vehículos que viajan con la naviera son todoterrenos, ¿cuál es la probabilidad de que entre los 64 de la muestra haya más de 8 todoterrenos?

B2. Se realiza un sondeo preelectoral, encuestando a 2500 personas, de las que 1500 manifiestan su intención de votar.

a) Con un 95% de confianza, ¿entre qué valores puede estimarse que se encontrará el nivel de abstención?

b) ¿Cuál será el correspondiente intervalo de confianza al 98%?

c) Si se mantienen las proporciones del sondeo inicial, ¿de qué tamaño tendrá que ser la muestra para hacer dicha estimación con un error menor del 1,5% y con una confianza del 99%?

B3. La superficie de lona necesaria para fabricar un toldo está delimitada por las funciones:

$$y = (x-2)^2,\ y = 2x + 4$$

a) Hacer un dibujo de dicha superficie.

b) Si se mide en metros, calcular el área de la superficie.

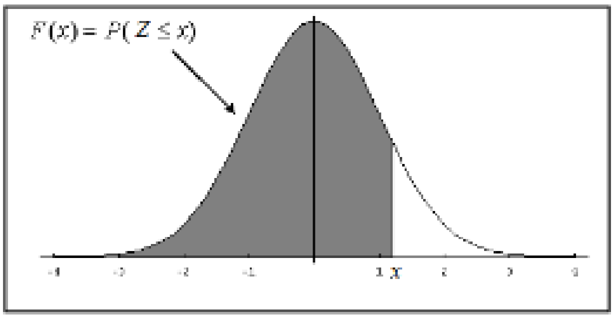
c) Si el precio del metro cuadrado de lona es igual a 4 €, ¿cuánto es necesario gastar para hacer tres toldos iguales?

B4. En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos: A, sin defecto, todos al mismo precio de 20 euros; B, con defecto no apreciable, con una rebaja del 20% sobre el precio de los anteriores y C, con defecto apreciable, con una rebaja del 60% sobre el precio de los que no tienen defecto. Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros, y los que tienen defecto suponen el 40% de los que no lo tienen.

a) Plantear el sistema de ecuaciones.

b) Resolver correctamente.

c) ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA OPCIÓN A

Problema A.1:

En una clínica veterinaria el 40 % de los animales que acuden a consulta son perros, el 30 % gatos, el 20 % aves y el resto otros animales. El 70 % de los perros acude con cita previa y el resto acude como urgencia; entro los gatos, el 60 % viene con cita previa y el resto como urgencia; solo un 10 % de las aves viene como urgencia; el resto de animales viene siempre como urgencia.

$a)$ Construir el árbol de probabilidades para este problema.

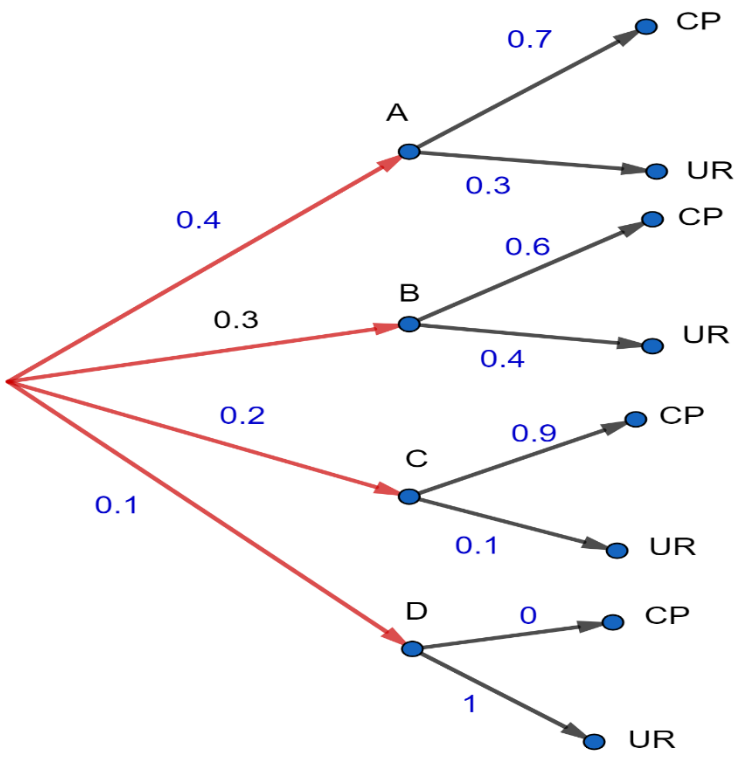
$b)$ De todos los animales que vienen con cita previa, ¿qué porcentaje son perros?

$c)$ ¿Qué porcentaje de las consultas realizadas en la clínica son urgencias?

Solución:

a) Sea A = "el animal es un perro", B = "el animal es un gato", C = "el animal es un ave", D = "el animal no es un perro, ni un gato ni un ave", CP = "el animal acude con cita previa", UR = "el animal acude por una urgencia"

El árbol de probabilidades es:



b) Se pide el porcentaje de perros entre todos los animales que vienen con cita previa, es decir, hay que calcular la probabilidad de que el animal sea un perro, sabiendo que tiene cita previa.

Calculamos en primer lugar la probabilidad de que el animal tenga cita previa:

$$P(CP)=P(A)\cdot P(CP/A)+P(B)\cdot P(CP/B)+P(C)\cdot P(CP/C)+P(D)\cdot P(CP/D)$$

$$= 0.4\cdot 0.7+0.3\cdot 0.6+0.2\cdot 0.9+0.1\cdot 0=0.64$$

Ahora la probabilidad de que el animal sea perro, sabiendo que tiene cita previa es:

$$P(A/CP)=\frac{P(A\cap CP)}{P(CP)}=\frac{P(A)\cdot P(CP/A)}{P(CP)}=\frac{0.4\cdot 0.7}{0.64}=0.4375$$

El porcentaje de perros entre los animales que vienen con cita previa es 43.75 %

c) La probabilidad de que un animal venga por una urgencia es:

$$P(UR)=1-P(CP)=1-0.64=0.36$$

El 36 % de las consultas realizadas son urgencias.

Problema A.2:

En la primera fase de un examen de oposición, se realiza un test que consta de 90 preguntas a contestar verdadero o falso. Se aprueba si se contestan correctamente al menos 50 preguntas. Un opositor, para responder, lanza una moneda y contesta verdadero si sale cara y falso si sale cruz. Hallar:

a) Probabilidad de aprobar el examen.

b) Probabilidad de acertar más de 51 y menos de 60 preguntas.

c) Probabilidad de acertar a lo sumo 40 preguntas.

Solución:

a) Sea X = número de respuestas correctas

n = 90 preguntas

La variable sigue una distribución binomial, ya que cada pregunta es un experimento con dos resultados posibles, acierto y fallo en la respuesta, con una probabilidad de 1/2 cada uno.

$$X \sim B(n,p) \rightarrow X \sim B(90, \frac{1}{2})$$

Como n es un número elevado, se aproxima a una distribución normal, ya que se dan las condiciones:

$$n \cdot p = 90 \cdot \frac{1}{2} = 45 > 5 \qquad n \cdot q = 90 \cdot \frac{1}{2} = 45 > 5$$

$$\mu = n \cdot p = 45 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{90 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{10}$$

La variable X se aproxima entonces a la normal $X' \sim N\left(45, \frac{3}{2} \cdot \sqrt{10}\right)$

Para aprobar el examen hay que responder correctamente 50 preguntas como mínimo, por lo que la probabilidad pedida es $P(X \geq 50)$ y con la corrección de Yates es:

$$P(X' \geq 49.5) = P\left(\frac{X' - 45}{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{10}} \geq \frac{49.5 - 45}{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{10}}\right) = P(Z \geq 0.95) = 1 - P(Z < 0.95) = 1 - 0.8289 = 0.1711$$

La probabilidad de aprobar el examen es 0.1711.

b) La probabilidad pedida es $P(51 < X < 60)$ y con la aproximación a la distribución normal y la corrección de Yates:

$$P(51 < X < 60) = P(51.5 \leq X' \leq 59.5) = P\left(\frac{51.5 - 45}{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{10}} \leq Z \leq \frac{59.5 - 45}{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{10}}\right) = P(1.37 \leq Z \leq 3.06)$$

$$= P(Z \leq 3.06) - P(Z \leq 1.37) = 0.9989 - 0.9147 = 0.0842$$

La probabilidad de acertar más de 51 y menos de 60 preguntas es 0.0842.

c) La probabilidad de acertar a lo sumo 40 preguntas es $P(X \leq 40)$ y haciendo de nuevo la aproximación a la distribución normal y la corrección de Yates:

$$P(X' \leq 40.5) = P\left(\frac{X'-45}{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{10}} \leq \frac{40.5-45}{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{10}}\right) = P(Z \leq -0.95) = P(Z \geq 0.95) = 1-0.8289 = 0.1711$$

La probabilidad de acertar a lo sumo 40 preguntas es 0.1711.

Problema A.3:

Durante los últimos 10 años, los costos en comunicaciones de una empresa, en docenas de miles de euros, vienen dados por la función $C(t) = \begin{cases} \frac{(t-1)^2}{3} + 4, t \in [0,4] \\ \frac{18-t}{2}, t \in (4,10] \end{cases}$, siendo t el tiempo en años.

Justificando la respuesta:

a) ¿Es continua $C(t)$?

b) ¿Cuánto $C(t)$ es derivable? ¿Cuándo creció y cuándo decreció $C(t)$?

c) ¿Cuánto alcanzó $C(t)$ el máximo y el mínimo absolutos? ¿Cuáles fueron los valores máximos y mínimos absolutos?

Solución:

a) La función $C(t)$ es continua en el intervalo [0, 4) por ser polinómica, concretamente una parábola. En el intervalo (4, 10] es continua también por ser polinómica, en este caso una recta.

Estudiamos la continuidad de $C(t)$ en t = 4:

$$C(4) = \frac{(4-1)^2}{3} + 4 = 7$$

$$\lim_{t \to 4^-} \frac{(t-1)^2}{3} + 4 = \frac{(4-1)^2}{3} + 4 = 7$$

$$\lim_{t \to 4^+} \frac{18-t}{2} = \frac{18-4}{2} = 7$$

$$\lim_{t \to 4^-} C(t) = \lim_{t \to 4^+} C(t) = C(4)$$

La función es continua en t = 4.

La función $C(t)$ es continua en [0, 10].

b) Hallamos la derivada de la función $C(t)$ en [0, 4) U (4, 10]:

$$C'(t) = \begin{cases} \frac{2 \cdot (t-1)}{3}, & t \in [0,4) \\ \frac{-1}{2}, & t \in (4,10] \end{cases}$$

Estudiamos ahora la derivabilidad en t = 4:

$$C'(4^-) = \lim_{t \to 4^-} C'(t) = \lim_{t \to 4^-} \frac{2 \cdot (t-1)}{3} = \frac{2 \cdot (4-1)}{3} = 2$$

$$C'(4^+) = \lim_{t \to 4^+} C'(t) = \lim_{t \to 4^+} \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2}$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función $C(t)$ no es derivable en t = 4.

La función es derivable en [0, 4) U (4, 10].

Estudiamos la monotonía de la función:

En el intervalo [0, 4) igualamos a cero $C'(t)$. $\frac{2\cdot(t-1)}{3}=0\Rightarrow t=1$

Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos determinados por los puntos críticos t = 1 y t = 4:

Intervalos	[0, 1)	(1, 4)	(4, 10]
Signo de $C'(t)$	Negativo	Positivo	Negativo
Monotonía	Decreciente	Creciente	Decreciente

La función es creciente en (1, 4) y decreciente en [0, 1) U (4, 10].

c) La función alcanza un máximo en t = 4 porque la función pasa de ser creciente a decreciente. En t = 1 alcanza un mínimo porque la función pasa de ser decreciente a creciente.

Calculamos el valor de la función en estos valores de t y también en los extremos del intervalo de definición de la función, es decir, en t = 0 y en t = 1.

$C(0)=\frac{(0-1)^2}{3}+4=\frac{13}{3}$ $\quad C(1)=\frac{(1-1)^2}{3}+4=4$ $\quad C(4)=\frac{(4-1)^2}{3}+4=7$ $\quad C(10)=\frac{18-10}{2}=4$

La función alcanzó su máximo absoluto en t = 4 y su valor es 7. Es decir, el cuarto año alcanzó unos costes de 7 · 10 000 = 80 000 €, ya que C(t) representa los costes en decenas de miles de euros.

La función alcanzó un mínimo absoluto en t = 1 y en t = 10, con un valor de 4. Por lo tanto, los costes mínimos fueron 4 · 10 000 = 40 000 € y se alcanzaron en el primer año y en el décimo.

$\boldsymbol{Máximo\ absoluto: B(4,7);\ Mínimos\ absolutos: V(1,4)\ y\ C(10,4)}$

Problema A.4:

Se quiere plantar plataneras y naranjeros. Cada platanera cuesta 5 euros y cada naranjero 2 euros. Para facilitar la recogida, el número de plataneras no debe superar el doble del de naranjeros ni ser inferior a su mitad. Además, se puede dedicar un máximo de 900 euros a poner esta plantación. Se espera que cada platanera produzca un beneficio de 15 euros y cada naranjero 8 euros.

$a)$ Plantear el correspondiente problema de programación lineal.

$b)$ Representar la región factible e indicar sus vértices.

$c)$ Determinar la cantidad de plantas de cada tipo que se deben plantar para maximizar el beneficio global.

Solución:

a) Sean x = número de plataneras e y = número de naranjeros.

Cada platanera cuesta 5 € y cada naranjero 2 €.

El número de plataneras no debe superar el doble del de naranjeros, es decir, $x \leq 2y$

El número de plataneras no debe ser inferior a la mitad del número de naranjeros: $x \geq \frac{y}{2}$

Se puede dedicar un máximo de 900 € a la plantación: $5x + 2y \leq 900$

El número de plataneras y el número de naranjeros no pueden ser negativos: $x \geq 0 \; ; \quad y \geq 0$

Beneficios esperados: 15 € por cada platanera y 8 € por cada naranjero.

La función objetivo es $z = 15 + 8y$

El problema de programación lineal es:

$$\left.\begin{array}{r} max\, z = 15x + 8y \\ s.a: \quad x \leq 2y \\ x \geq \frac{y}{2} \\ 5x + 2y \leq 900 \\ x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} max\, z = 15x + 8y \\ s.a: \quad y \geq \frac{x}{2} \\ y \leq 2x \\ y \leq \frac{900 - 5x}{2} \\ x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Hallamos los puntos de corte entre las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} y = \frac{x}{2} \\ y = \frac{900 - 5x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{900 - 5x}{2} \Rightarrow x = 900 - 5x \Rightarrow x = 150 \qquad y = \frac{150}{2} = 75$$

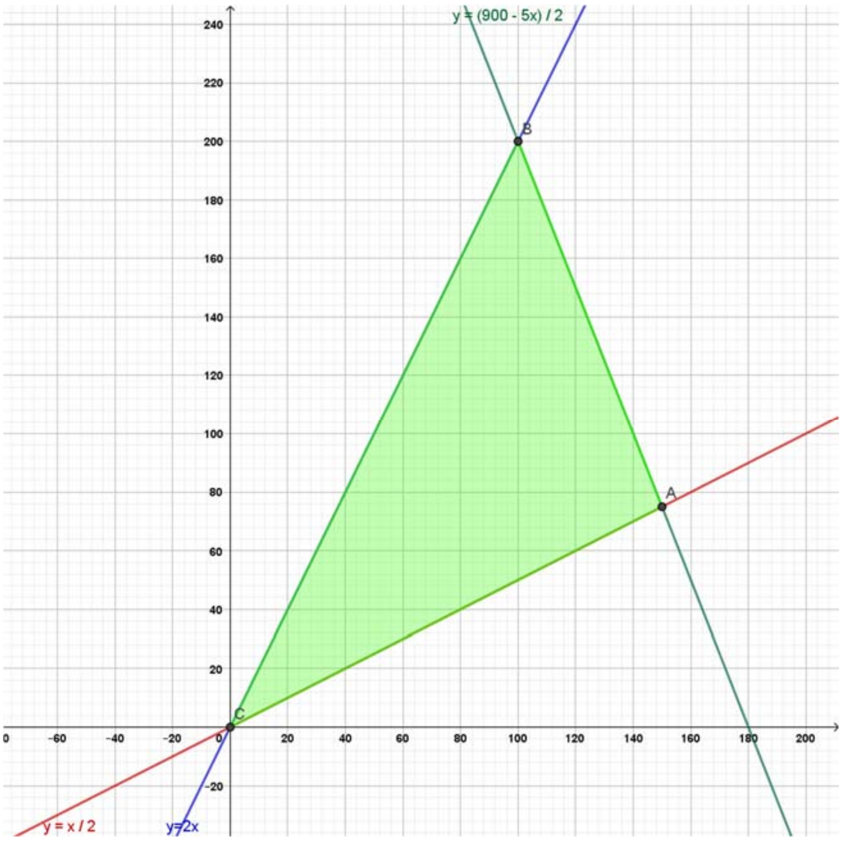
Punto A (150, 75)

$$\left.\begin{array}{r} y = 2x \\ y = \frac{900 - 5x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = \frac{900 - 5x}{2} \Rightarrow 4x = 900 - 5x \Rightarrow x = 100 \qquad y = 2 \cdot 100 = 200$$

Punto B(100, 200)

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x}{2} \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x}{2}=2x \Rightarrow x=4x \Rightarrow x=0 \qquad y=0$$ Punto C(0, 0)

La región factible es la región limitada por las rectas $y=\dfrac{x}{2}$, $y=2x$, $y=\dfrac{900-5x}{2}$ ya que los puntos del plano que cumplen las tres restricciones están por encima de la primera recta $\left(y\geq\dfrac{x}{2}\right)$ y por debajo de las otras dos $\left(y\leq 2x \ ; \quad y\leq\dfrac{900-5x}{2}\right)$.



c) El beneficio será máximo en uno de los vértices de la región factible, por lo que debemos evaluar la función objetivo en cada punto:

$z(A)=z(150,75)=15\cdot 150+8\cdot 75=2250+600=2850$

$z(B)=z(100,200)=15\cdot 100+8\cdot 200=1500+1600=3100$

$z(C)=z(0,0)=15\cdot 0+8\cdot 0=0$

La función objetivo es máxima en el punto B.

El beneficio será máximo si se plantan 100 plataneras y 200 naranjeros y dicho beneficio será de 3 100 €.

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Una naviera que opera entre islas ha decidido evaluar el peso de los vehículos que transporta para ajustar los precios de los billetes. Para ello ha tomado una muestra aleatoria de 64 vehículos, obteniéndose un peso medio de 1 123 kg con una desviación típica de 190 kg.

$a)$ Suponiendo que la variable peso es normal, calcular un intervalo de confianza al 97 % para el peso medio de todos los vehículos transportados por la naviera.

$b)$ ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se desea estimar el peso medio de los vehículos con un error inferior a 20 kg y una confianza del 99 %?

$c)$ Sabiendo que el 10 % de los vehículos que viajan con la naviera son todoterrenos, ¿cuál es la probabilidad de que entre los 64 de la muestra haya más de 8 todoterrenos?

Solución:

a) Tamaño muestral n = 64; X = peso de los vehículos transportados por la naviera

Peso medio de los vehículos: $\bar{X}=1123\,kg$. Desviación típica muestral: $s=190\,kg$

Tomaremos la desviación típica muestral como estimador de la desviación típica poblacional: σ

Nivel de confianza: 97 %, es decir $1-\alpha=0.97\Rightarrow\alpha=0.03$

$$P(Z\le z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.03}{2}=0.985\Rightarrow z_{\alpha/2}=2.17$$

El intervalo de confianza para la media muestral es:

$$\left(\bar{X}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(1123-2.17\cdot\frac{190}{\sqrt{64}},1123+2.17\cdot\frac{190}{\sqrt{64}}\right)=(1071.4625,1174.5375)$$

El intervalo de confianza para el peso medio de los vehículos transportados por la naviera, con un nivel de confianza del 97 %, es **(1 071.4625, 1 174.5375)**.

b) El error cometido es $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y en este caso debe ser inferior a 20 kg.

Nivel de confianza: 99 %, es decir $1-\alpha=0.99\Rightarrow\alpha=0.01$

$$P(Z\le z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.01}{2}=0.995\Rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{2.57+2.58}{2}=2.575$$

Si se iguala el error a 20 kg y se despeja:

$$z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=20\Rightarrow z_{\alpha/2}\cdot\sigma=20\cdot\sqrt{n}\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{20}=n\Rightarrow n=\left(\frac{2.575\cdot190}{20}\right)^2\Rightarrow n=598{,}41$$

La muestra debe ser de **599** vehículos como mínimo para que el error sea inferior a 20 kg.

c) Consideramos la variable X = número de vehículos todoterreno.

Probabilidad de que un vehículo sea todoterreno: p = 0.1

La variable X sigue una distribución binomial $X \sim B(n,p) \rightarrow X \sim B(64{,}0.1)$

Hay que calcular $P(X>8)$

Como n es un número elevado, se aproxima a una distribución normal, ya que se dan las condiciones:

$n \cdot p = 64 \cdot 0.1 = 6.4 > 5$ $\qquad$ $n \cdot q = 64 \cdot 0.9 = 57.6 > 5$

$\mu = n \cdot p = 6.4$ $\qquad$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{64 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 2.4$

La variable X se aproxima entonces a la normal $X' \sim N(6.4{,}2.4)$

La probabilidad que hay que calcular es $P(X>8)$ y con la corrección de Yates es:

$$P(X' \geq 8.5) = P\left(\frac{X'-6.4}{2.4} \geq \frac{8-6.4}{2.4}\right) = P(Z \geq 0.875) = 1 - P(Z<0.875) = 1 - \frac{0.8078+0.8106}{2} = 0.1908$$

Como z = 0.875 está entre 0.87 y 0.88, a la misma distancia de ambos, hallamos la probabilidad $P(Z<0.875)$ sumando las dos probabilidades que aparecen en la tabla y dividiendo entre dos.

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	[redacted]	[redacted]	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133

La probabilidad de que haya más de 8 todoterrenos entre los 64 vehículos de la muestra es **0.1908**.

Problema B.2:

Se realiza un sondeo preelectoral, encuestando a 2 500 personas, de las que 1 500 manifiestan su intención de votar.

$a)$ Con un 95 % de confianza, ¿entre qué valores puede estimarse que se encontrará el nivel de abstención?

$b)$ ¿Cuál será el correspondiente intervalo de confianza al 98 %?

$c)$ Si se mantienen las proporciones del sondeo inicial, ¿de qué tamaño tendrá que ser la muestra para hacer dicha estimación con un error menor del 1.5 % y con una confianza del 99 %?

Solución:

a) Sea P = proporción de personas que NO manifiestan su intención de votar

n = 2500 es el tamaño de la muestra. De ellas hay que 1000 que no manifiestan que vayan a votar.

$\hat{p}=\frac{1000}{2500}=0.4$ es la proporción muestral de personas que NO van a votar

95 % es el nivel de confianza, es decir, $1-\alpha=0.95 \Rightarrow \alpha=0.05$

$$P(Z\le z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.05}{2}=0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2}=1.96$$

El intervalo de confianza es: $\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right)$ =

= $\left(0.4-1.96\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot0.6}{2500}},0.4+1.96\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot0.6}{2500}}\right)=(0.3808,0.4192)$

La abstención estará entre 0.3808 y 0.4192, es decir, **entre un 38.08 % y un 41.92 %**, con un nivel de confianza del 97 %.

b) Nivel de confianza: 98 %: $1-\alpha=0.98 \Rightarrow \alpha=0.02$

$$P(Z\le z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.02}{2}=0.99 \Rightarrow z_{\alpha/2}=2.33$$

Intervalo de confianza: $\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right)$ =

$$\left(0.4-2.33\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot0.6}{2500}},0.4+2.33\cdot\sqrt{\frac{0.4\cdot0.6}{2500}}\right)=(0.3772,0.4228)$$

La abstención estará entre 0.3772 y 0.4228, es decir, **entre un 37.72 % y un 42.28 %**, con un nivel de confianza del 98 %.

c) $\hat{p}=0.3$

Error inferior al 1.5 %, es decir, E< 0.015

Nivel de confianza: 99 % $1-\alpha=0.99 \Rightarrow \alpha=0.01$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0.01}{2}=0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2}=2.575$$

El error es $E=z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$

Igualando el error a 0.015 obtenemos el tamaño de la muestra:

$$z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}=0.015 \Rightarrow 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{n}}=0.015 \Rightarrow 2.575 \cdot \sqrt{0.4 \cdot 0.6}=0.015 \cdot \sqrt{n} \Rightarrow \left(\frac{2.575 \cdot \sqrt{0.4 \cdot 0.6}}{0.015}\right)^2=n$$

n = 7072.67

La muestra tendrá que ser de **7 073 personas** como mínimo para que el error sea inferior al 15 %.

Problema B.3:

La superficie de lona necesaria para fabricar un toldo está delimitada por las funciones: $y = (x-2)^2$, $y = 2x + 4$.

a) Hacer un dibujo de dicha superficie.

b) Si se mide en metros, calcular el área de la superficie.

c) Si el precio del metro cuadrado de lona es igual a 4 euros, ¿cuánto es necesario gastar para hacer tres toldos iguales?

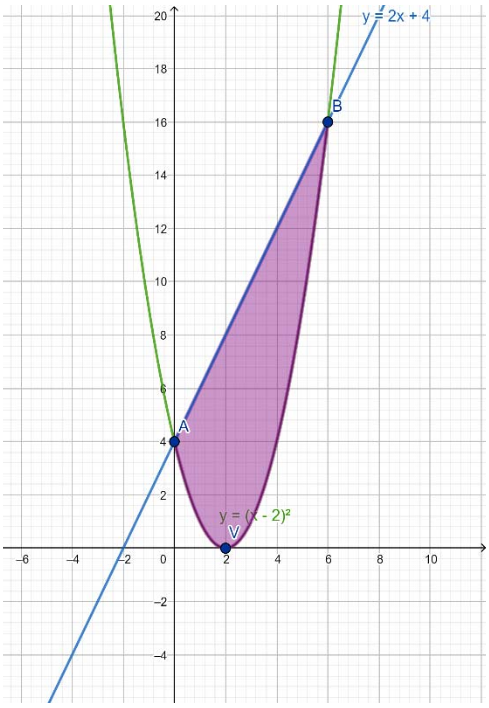
Solución:

a) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas:

$$\left.\begin{array}{l} y=(x-2)^2 \\ y=2x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-4x+4=2x+4 \Rightarrow x^2-6x=0 \Rightarrow x_1=0 \quad ; x_2=6 \qquad y_1=4 \quad ; y_2=16$$

Calculamos el vértice de la parábola: $y'=2x-4=0 \Rightarrow x_v=2 \quad y_v=0$

Con los puntos de corte A(0, 4), B(6, 16) y el vértice de la parábola V(2, 0) representamos las gráficas:



b) El área de la región delimitada por las gráficas es la integral definida:

$$\int_0^6 [2x+4-(x-2)^2]dx = \int_0^6 [2x+4-x^2+4x-4]dx = \int_0^6 (6x-x^2)dx = \left[3x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^6 = 3\cdot 6^2-\frac{6^3}{3}-0=36$$

La superficie de la lona es **36 m²**.

c) Cada toldo valdrá 4 · 36 = 144 € y los tres toldos 3 · 144 = 432 €.

Los tres toldos costarán **432 €**.

Problema B.4:

En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos: A, sin defecto, todos al mismo precio de 20 euros; B, con defecto no apreciable, con una rebaja del 20 % sobre el precio de los anteriores y C, con defecto apreciable, con una rebaja del 60 % sobre el precio de los que no tienen defecto. Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1 280 euros, y los que tienen defecto suponen el 40 % de los que no lo tienen.

a) Plantear el sistema de ecuaciones lineales.

b) Resolver correctamente.

c) ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?

Solución:

a) Sean A = número de pantalones sin defecto, B = número de pantalones con defecto no apreciable y

C = número de pantalones con defecto apreciable

Los de tipo A cuestan 20 €.

Los de tipo B tienen una rebaja del 20 % sobre el precio de los de tipo A, es decir, su precio es el 80 % de 20 €. Precio de los pantalones de tipo B = 0.8 · 20 = 16 €.

Los de tipo C tienen una rebaja del 60 % sobre el precio de los de tipo A, es decir, su precio es el 40 % de 20 €. Precio de los pantalones de tipo C = 0.4 · 20 = 8 €.

En total hay 70 pantalones. $A+B+C=70$

El precio total es 1 280 €. $20A+16B+8C=1280 \Rightarrow 5A+4B+2C=320$

Los que tienen defecto son el 40 % de los que no lo tienen:

$$B+C=\frac{40}{100}\cdot A \Rightarrow 4A-10B-10C=0 \Rightarrow 2A-5B-5C=0$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\left.\begin{array}{r} A+B+C=70 \\ 5A+4B+2C=320 \\ 2A-5B-5C=0 \end{array}\right\}$$

b) Se puede resolver por el método de Gauss:

La matriz del sistema es:

$$M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 5 & 4 & 2 & 320 \\ 2 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-5F_1;\ F_3-2F_1]{} M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -30 \\ 0 & -7 & -7 & -140 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-7F_2]{} M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -1 & -3 & -30 \\ 0 & 0 & 14 & 70 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} A+B+C=70 \\ -B-3C=-30 \\ 14C=70 \end{array}\right\} \quad C=\frac{70}{14}=5 \quad -B-3\cdot 5=-30 \Rightarrow B=15 \quad A+15+5=70 \Rightarrow A=50$$

La solución del sistema de ecuaciones es **A = 50, B = 15** y **C = 5**.

c) Hay **50** pantalones de tipo A, **15** de tipo B y **5** de tipo C.