Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El estudiante realizará solo **tres ejercicios elegidos entre los seis de que consta el examen.**
2. Una vez elegido un ejercicio ha de hacerlo completo (todos sus apartados).
3. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada ejercicio y de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
6. Si se realizan más de tres ejercicios solo se corregirán los tres primeros, según el orden en el que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
7. **La calificación del examen será el resultado de la puntuación obtenida dividida entre 0,75.**

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Un museo ofrece entradas con tarifas distintas: adulto, niño y jubilado. La suma de las tarifas de adulto y jubilado es cinco veces la tarifa de niño. Además, se sabe que un grupo de 5 adultos, 3 niños y 3 jubilados, ha pagado 222 € ; y otro grupo de 3 adultos, 2 niños y 4 jubilados, 168 € .

A. [1 PUNTO] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular las tres tarifas.

B. [1 PUNTO] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,25 PUNTOS] Resolverlo.

D. [0,25 PUNTOS] El día que una familia formada por 2 adultos, 2 niños y 3 jubilados visita el museo, se ha aplicado un descuento especial de un 15 % a cada tarifa. ¿Cuánto pagan en total?

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa elabora dos productos, A y B, que le proporcionan unos beneficios por kg de 5 y 7 euros respectivamente. Por cuestiones de logística, solo puede producir un máximo de 500 kg a la semana. Las horas semanales de trabajo disponibles son 3200: cada kg de A requiere 4 horas y cada kg de B, 8h. Además, solo dispone de 1500 unidades de materia prima a la semana: cada kg de A necesita 3,75 unidades de materia prima; cada kg de B, 2 unidades. ¿Cuántos kilogramos de cada producto se pueden obtener semanalmente para maximizar los beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \dfrac{3x-15}{4x^2+4x-120}$

A. [0,5 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua?

B. [1 PUNTO] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad? Justifica la respuesta.

C. [1 PUNTO] Calcular los dos límites laterales en x = -6. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \frac{3x^2}{(x+4)^2}$, obtener:

A. [0,25 PUNTOS] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [0,5 PUNTOS] Las asíntotas.

C. [0,75 PUNTOS] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

D. [0,75 PUNTOS] Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

E. [0,25 PUNTOS] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Se realiza una encuesta a un grupo de 2000 personas de diferentes edades para conocer sus hábitos de compra por Internet en el último mes. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	18-40 años	41-60 años	Mayores de 60 años	Total
Ha realizado alguna compra por Internet	468	325	250	1043
No ha comprado ningún producto por Internet	257	207	493	957
Total	725	532	743	2000

Elegida una de las personas del grupo al azar,

A. [0,75 PUNTOS] Calcular la probabilidad de que sea mayor de 60 años y haya realizado alguna compra por Internet en el último mes.

B. [0,75 PUNTOS] Calcular la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 41 y 60 años.

C. [1 PUNTO] Si sabemos que ha realizado alguna compra por Internet en el último mes, ¿cuál es la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 18 y 40 años?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

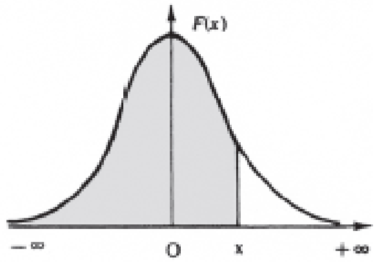
El tiempo que los usuarios de una compañía de telefonía móvil deben esperar para que les atiendan en el Servicio de Atención al Cliente, sigue una distribución normal con desviación típica 2 minutos. Una muestra aleatoria de 450 personas da como resultado un tiempo medio de espera de 14 minutos.

A. [1,25 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 90 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

Distribución normal

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

Un museo ofrece entradas con tarifas distintas: adulto, niño y jubilado. La suma de adulto y jubilado es cinco veces la tarifa de niño. Además, se sabe que un grupo de 5 adultos, 3 niños y 3 jubilados, ha pagado 222 euros; y otro grupo de 3 adultos, 2 niños y 4 jubilados, 168 euros.

a) Plantear el sistema de ecuaciones que permita calcular las tres tarifas.

b) Analizar la compatibilidad de dicho sistema. c) Resolverlo.

d) El día que una familia formada por 2 adultos, 2 niños y 3 jubilados visita el museo, se ha aplicado un descuento especial de un 15 % a cada tarifa. ¿Cuánto pagan en total?

Solución:

a)

Sean x, y, z las tarifas que tiene el museo para adultos, niños y jubilados, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+z=5y \\ 5x+3y+3z=222 \\ 3x+2y+4z=168 \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{r} x-5y+z=0 \\ 5x+3y+3z=222 \\ 3x+2y+4z=168 \end{array}\right\}}.$$

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 222 \\ 3 & 2 & 4 & 168 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}=12+10-45-9-6+100=122-60=62\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ de\ incógnitas.$$

$$\underline{Según\ el\ teorema\ de\ Rouché-Fröbenios \Rightarrow S.C.D.}$$

$c)$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & -5 & 1\\ 222 & 3 & 3\\ 168 & 2 & 4\end{vmatrix}}{62}=\frac{444-2.520-504+4.440}{62}=\frac{4.884-3.024}{62}=\frac{1.860}{62}=30.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 5 & 222 & 3\\ 3 & 168 & 4\end{vmatrix}}{62}=\frac{888+840-666-504}{62}=\frac{1.728-1.170}{62}=\frac{558}{62}=9.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -5 & 0\\ 5 & 3 & 222\\ 3 & 2 & 168\end{vmatrix}}{62}=\frac{504-3.330-444+4.200}{62}=\frac{4.704-3.774}{62}=\frac{930}{62}=15.$$

$\underline{Las\ tarifas\ son: Adultos, \mathbf{30}\ euros; Niños, \mathbf{9}\ euros\ y\ Jubilados, \mathbf{15}\ euros.}$

$d)$

$$P=0{,}85\cdot(2\cdot 30+2\cdot 9+3\cdot 15)=0{,}85\cdot(60+18+45)=0{,}85\cdot 123=$$

$$=104{,}55.$$

$\underline{La\ familia\ paga, después\ del\ descuento, \mathbf{104,55}\ \boldsymbol{euros}.}$

Ejercicio 2:

Una empresa elabora dos productos, A y B, que le proporcionan unos beneficios por kg de 5 y 7 euros respectivamente. Por cuestiones de logística, solo puede producir un máximo de 500 kg a la semana. Las horas semanales de trabajo disponibles son 3.200; cada kg de A requiere 4 horas y cada kg de B, 8 horas. Además, solo dispone de 1.500 unidades de materia prima a la semana; cada kg de A necesita 3,75 unidades de materia prima; cada kg de B, 2 unidades. ¿Cuántos kilogramos de cada producto se pueden obtener semanalmente para maximizar los beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

Solución:

Sean x e y el número de kilogramos de materia prima que requieren los productos A y B que se elaboran en la empresa, respectivamente.

La función de objetivos es $f(x, y) = 5x + 7y$.

Las restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} x + y \leq 500 \\ 4x + 8y \leq 3.200 \\ 3{,}75x + 2y \leq 1.500 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y \leq 500 \\ x + 2y \leq 800 \\ 15x + 8y \leq 6.000 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

① $\Rightarrow x + y \leq 500 \Rightarrow y \leq 500 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	500
y	500	0

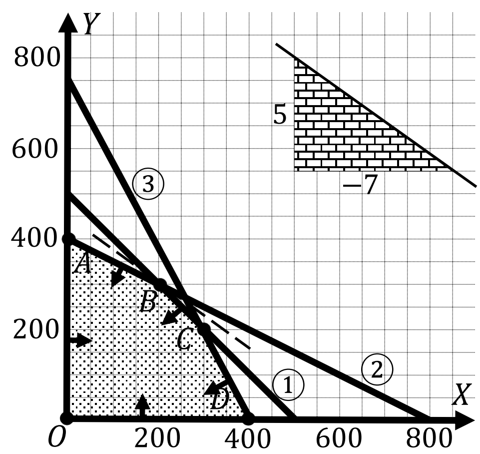
② $\Rightarrow x + 2y \leq 800 \Rightarrow y \leq \frac{800-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	800
y	400	0

③ $\Rightarrow 15x + 8y \leq 6.000 \Rightarrow y \leq \frac{6.000-15x}{8} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	400	0
y	0	750

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + 2y = 800 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 400).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 500 \\ x + 2y = 800 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x - y = -500 \\ x + 2y = 800 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 300;\ \ x = 200 \Rightarrow B(200, 300).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 500 \\ 15x + 8y = 6.000 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -8x - 8y = -4.000 \\ 15x + 8y = 6.000 \end{array}\right\} \Rightarrow 7x = 2000;\ \ x = \frac{2.000}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2.000}{7} + y = 500;\ \ 2.000 + 7y = 3.500;\ \ y = \frac{1.500}{7} \Rightarrow C\left(\frac{2.000}{7}, \frac{1.500}{7}\right).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 15x + 8y = 6.000 \end{array}\right\} \Rightarrow 15x = 6.000;\ \ x = 400 \Rightarrow D(400, 0).$$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 400) = 5 \cdot 0 + 7 \cdot 400 = 0 + 2.800 = 2.800.$$

$$B \Rightarrow f(200, 300) = 5 \cdot 200 + 7 \cdot 300 = 1.000 + 2.100 = 3.100.$$

$$C \Rightarrow f\left(\frac{2.000}{7}, \frac{1.500}{7}\right) = 5 \cdot \frac{2.000}{7} + 7 \cdot \frac{1.500}{7} = 1.428{,}57 + 1.500 = 2.928{,}57.$$

$$D \Rightarrow f(400, 0) = 5 \cdot 400 + 7 \cdot 0 = 2.000 + 0 = 2.000.$$

El valor máximo se produce en el punto $B(200, 300)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 5x + 7y = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{7}x \Rightarrow m = -\frac{5}{7}.$$

$\underline{Máximo\ beneficio: obteniendo\ \mathbf{200\ kg}\ del\ producto\ A\ y\ \mathbf{300}\ del\ producto\ B}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ \mathbf{3.100}\ euros}.$

Ejercicio 3:

Dada la función $f(x) = \frac{3x-15}{4x^2+4x-120}$:

$a)$ ¿En qué puntos es discontinua?

$b)$ ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad? Justifica la respuesta.

$c)$ Calcular los límites laterales en $x = -6$. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

Solución:

$a)$

Una función racional es continua en R, excepto para los valores reales de x que anulan el numerador.

$$4x^2 + 4x - 120 = 0; \;\; x^2 + x - 30 = 0; \;\; x = \frac{-1\pm\sqrt{1+20}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{121}}{2} = \frac{-1\pm 11}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = -6, x_2 = 5.$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ \boldsymbol{R} - \{\boldsymbol{-6}, \boldsymbol{5}\}.}$$

$b)$

Teniendo en cuenta las raíces del denominador la función $f(x)$ puede expresarse de la forma $f(x) = \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = \frac{3(x-5)}{4(x+6)(x-5)}$.

Estudiando las discontinuidades encontradas en el apartado anterior:

$$x = -6 \Rightarrow \lim_{x\to -6} f(x) = \lim_{x\to -6} \frac{3(-6-5)}{4\cdot(-6+6)(6-5)} = \frac{-33}{4\cdot 0\cdot 1} = \frac{-33}{0} = -\infty.$$

$$\underline{Para\ x = -6 \Rightarrow discontinuidad\ inevitable\ de\ salto\ infinito.}$$

$x = 5 \Rightarrow \lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \frac{3(x-5)}{4(x+6)(x-5)} = \frac{3\cdot(5-5)}{4\cdot(5+6)(5-5)} = \frac{3\cdot 0}{44\cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ Indeterminación que puede eliminarse de la forma siguiente:

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \frac{3(x-5)}{4(x+6)(x-5)} = \lim_{x\to 5} \frac{3}{4(x+6)} = \frac{3}{4\cdot(5+6)} = \frac{3}{44}.$$

$$\underline{Para\ x = 5 \Rightarrow discontinuidad\ evitable}.$$

La función puede redefinirse de la forma:

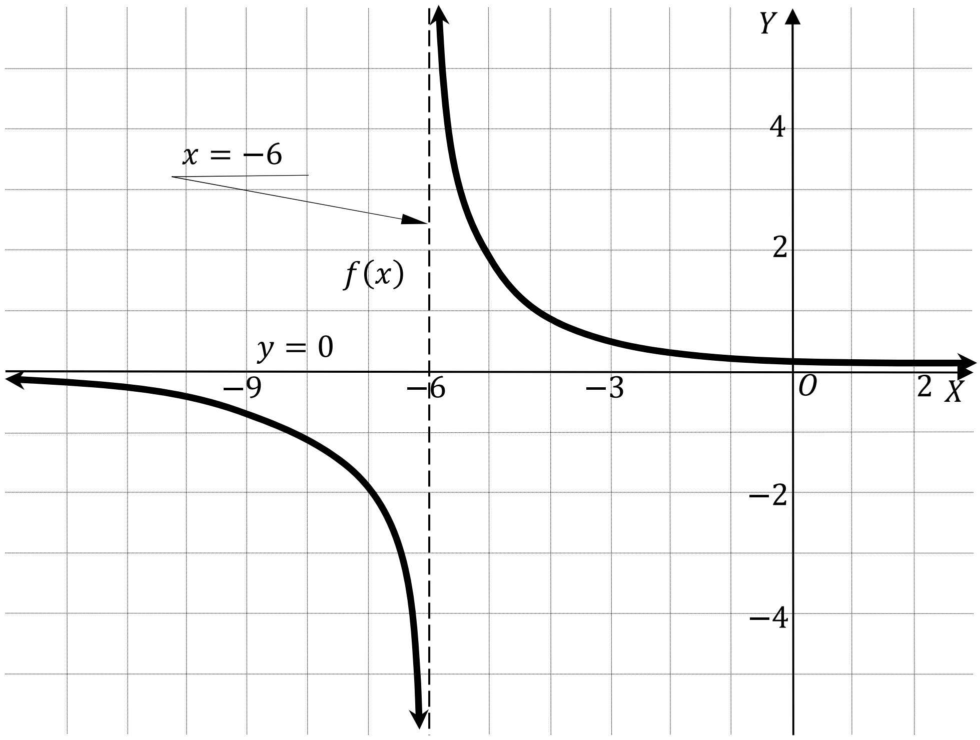
$$\underline{f(x) = \begin{cases} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120}\ si\ \begin{cases} x \neq -6 \\ x \neq 5 \end{cases} \\ \frac{3}{44}\ \ si\ \ x = 5 \end{cases}}.$$

$c)$

$$\lim_{x \to -6^-} f(x) = \lim_{x \to -6^-} \frac{3(x-5)}{4(x+6)(x-5)} = \lim_{x \to -6^-} \frac{3}{4(x+6)} = \frac{3}{4 \cdot 0^-} = \frac{3}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to -6^+} f(x) = \lim_{x \to -6^+} \frac{3}{4(x+6)} = \frac{3}{4 \cdot 0^+} = \frac{3}{0^+} = +\infty.$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x-15}{4x^2+4x-120} = 0$, el eje de abscisas es asíntota horizontal de la función y de lo anterior puede hacerse la representación gráfica, aproximada, de la función, que es la que indica la figura adjunta.



Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Ejercicio 4:

Dada la función $f(x) = \frac{3x^2}{(x+4)^2}$, obtener:

$a)$ Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY

$b)$ Las asíntotas.

$c)$ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

$d)$ Los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

$e)$ Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Solución:

$a)$

Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$(x+4)^2 = 0;\ \ x+4=0;\ \ x=-4 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow R - \{-4\}}}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2}{(x+4)^2} = 0;\ \ 3x^2 = 0;\ \ x^2 = 0;\ x = 0 \Rightarrow O(0,0).$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{3\cdot 0^2}{(0+4)^2} = \frac{0}{16} = 0 \Rightarrow O(0,0).$$

$b)$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{(x+4)^2} = 3 \Rightarrow$$

$$\underline{La\ recta\ \boldsymbol{y=3}\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$(x+4)^2 = 0;\ \ x = -4 \Rightarrow$$

$$\underline{La\ recta\ \boldsymbol{x=-4}\ es\ asíntota\ vertical}.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales}.$$

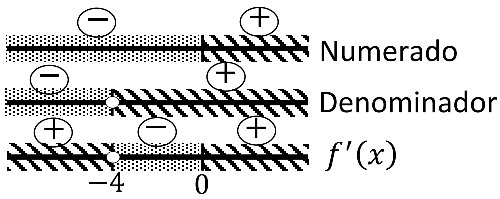
$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{6x\cdot(x+4)^2-3x^2\cdot[2\cdot(x+4)\cdot 1]}{(x+4)^4}=\frac{6x\cdot(x+4)-6x^2}{(x+4)^3}=\frac{6x^2+24x-6x^2}{(x+4)^3}=\frac{24x}{(x+4)^3}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{24x}{(x+4)^3}=0;\ 24x=0\Rightarrow x=0.$$

De la observación de la figura adjunta se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:



$$\underline{Decrecimiento: f'(x)<0\Rightarrow \boldsymbol{x\in(-4,0)}}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x)>0\Rightarrow \boldsymbol{x\in(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)}}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x)=\frac{24\cdot(x+4)^3-24x\cdot[3\cdot(x+4)^2\cdot 1]}{(x+4)^6}=\frac{24\cdot(x+4)-72x}{(x+4)^4}=\frac{24x+96-72x}{(x+4)^4}=\frac{-48x+96}{(x+4)^4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{-48\cdot(x-2)}{(x+4)^4}.$$

$$f''(0)=\frac{-48\cdot(0-2)}{(0+4)^4}=\frac{96}{256}>0\Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x=0.$$

$$f(0)=0\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mínimo: O(0,0)}}.$$

$d)$

Una función es cóncava $(\cap)$ o convexa $(\cup)$ cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$f''(x) = \frac{-48\cdot(x-2)}{(x+4)^4}$. Como el denominador de la segunda derivada es positivo para cualquier valor real del dominio de la función, la segunda derivada será positiva o negativa cuando lo sea su numerador.

$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow \boldsymbol{x\epsilon(2, +\infty)}.}$

$\underline{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow \boldsymbol{x\epsilon(-\infty, -4) \cup (-4, 2)}.}$

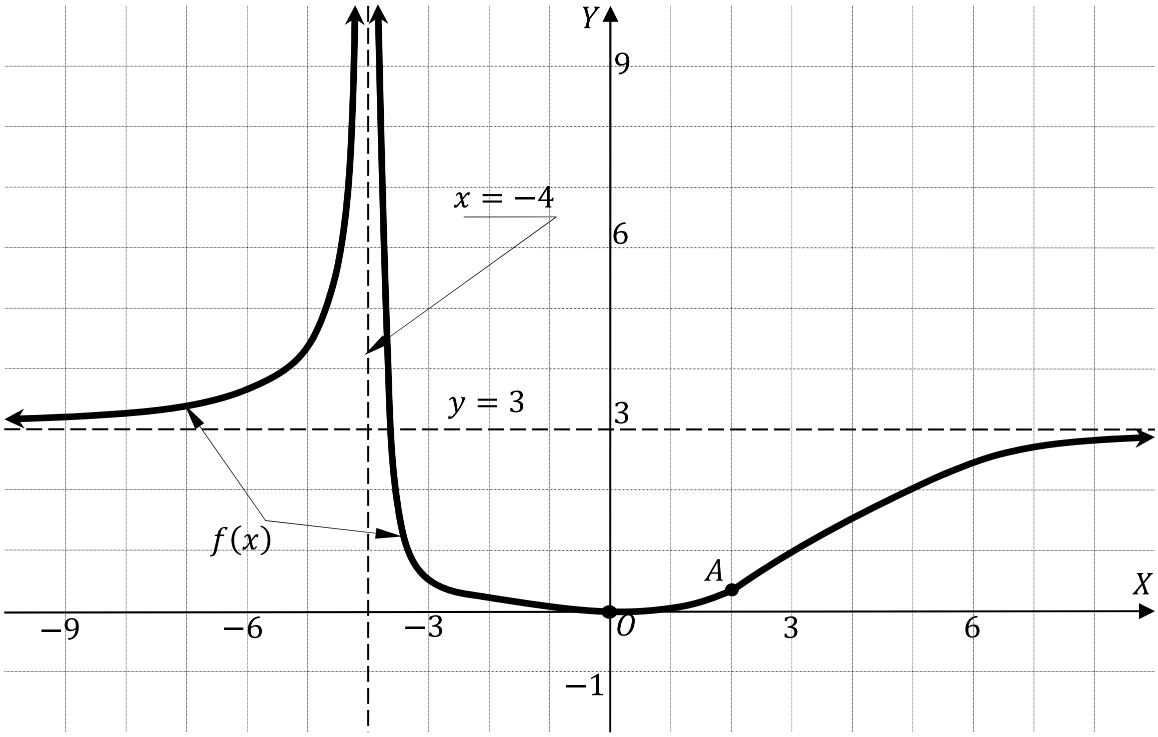
Una función tiene un punto de inflexión cuando pasa de ser cóncava a convexa o viceversa; es decir: cuando se anula su segunda derivada.

$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-48\cdot(x-2)}{(x+4)^4} = 0 \Rightarrow -48\cdot(x-2) = 0;\ \ x = 2.$

$$f(2) = \frac{3\cdot 2^2}{(2+4)^2} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$\underline{\boldsymbol{P.I.} \Rightarrow \boldsymbol{A\left(2, \frac{1}{3}\right)}.}$

$e)$ La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



Ejercicio 5:

Se realiza una encuesta a un grupo de 2.000 personas de diferentes edades para conocer sus hábitos de compra por Internet en el último mes. Los datos completos aparecen en la tabla siguiente:

	18 a 40 años	41 a 60 años	> 60 años	Total
Realiza compras	468	325	250	1.043
No realiza compras	257	207	493	957
Total	725	532	743	2.000

Elegida una persona al azar:

a) Calcular la probabilidad de que sea mayor de 60 años y haya realizado alguna compra por Internet en el último mes.

b) Calcular la probabilidad de que su edad esté comprendida entre 41 y 60 años.

c) Si sabemos que ha realizado alguna compra por Internet en el último mes, ¿cuál es la probabilidad de que su edad esté comprendida entre los 18 y 40 años?

Solución:

a)

$$P = \frac{250}{2.000} = \frac{125}{1.00} = \underline{\frac{1}{8} = 0{,}1250}.$$

b)

$$P = \frac{532}{2.000} = \frac{266}{1.000} = \underline{0{,}2660}.$$

c)

$$P = \frac{468}{1.043} = \underline{0{,}4487}.$$

****

Ejercicio 6:

El tiempo que los usuarios de una compañía de telefonía móvil deben esperar para que les atiendan en el Servicio de Atención al Cliente, sigue una distribución normal con desviación típica de 2 minutos. Una muestra aleatoria de 450 personas da como resultado un tiempo medio de espera de 14 minutos.

$a)$ Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio.

$b)$ ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 90 % sea un tercio del obtenido en el apartado anterior?

Solución:

$a)$

Para un nivel de confianza del 93 % es:

$$1-\alpha = 0{,}93 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}93 = 0{,}07 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}035} = 1{,}805.$$

$$(1-0{,}035 = 0{,}9650 \;\rightarrow z = 1{,}805).$$

Datos: $n = 450;\; \overline{x} = 14;\; \sigma = 2;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}805.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\; y\; n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\; \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(14 - 1{,}805 \cdot \frac{2}{\sqrt{450}};\; 14 + 1{,}805 \cdot \frac{2}{\sqrt{450}}\right);$$

$$(14 - 1{,}805 \cdot 0{,}0943;\; 14 + 1{,}805 \cdot 0{,}0943);\;\; (14 - 0{,}1702;\; 14 + 0{,}1702).$$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{93\,\%} = (13{,}8298;\; 14{,}1702).}}$$

$b)$

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1-\alpha = 0{,}90 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}90 = 0{,}10 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$$

$$(1-0{,}05 = 0{,}9500 \;\rightarrow z = 1{,}645).$$

El error del apartado anterior es $E = 0{,}1702$. $\qquad E = \frac{0{,}1702}{3} = 0{,}0567$

Datos: $\sigma = 2;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645;\; E = 0{,}0567.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}645 \cdot \frac{2}{0{,}0567}\right)^2 =$

$= (1{,}645 \cdot 35{,}2526)^2 = 58^2 = 3.364.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ \mathbf{3.364}\ personas.}$

****

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

1. El estudiante realizará solo **tres ejercicios elegidos entre los seis de que consta el examen.**
2. Una vez elegido un ejercicio ha de hacerlo completo (todos sus apartados).
3. No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada ejercicio y de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
6. Si se realizan más de tres ejercicios solo se corregirán los tres primeros, según el orden en el que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
7. **La calificación del examen será el resultado de la puntuación obtenida dividida entre 0,75.**

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Tres estudiantes de Economía, Cristina, Juan y Pedro, han preparado un trabajo de investigación que deben exponer en clase. Se repartieron las tareas de la siguiente forma: Cristina llevó a cabo la labor de recopilación de datos, en la que empleó un 40 % más que el tiempo que Juan necesitó para redactar el texto. Pedro desempeñó las tareas de revisión y de preparación de la exposición, siendo el tiempo dedicado a ello la mitad del empleado en total por Cristina y Juan.

El tiempo total empleado fue de 18 horas. ¿Cuánto dedicó cada alumno a la elaboración del trabajo?

A. [0,9 PUNTOS] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el tiempo empleado por cada estudiante.

B. [0,8 PUNTOS] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una tienda de material informático dispone de 96 lapiceros con memoria USB y 15 tabletas digitales, para organizar dos tipos de lotes. Un lote A tendrá 3 lapiceros y una tableta; un lote B tendrá 6 lapiceros y una tableta. El precio de venta de un lote A es de 70 euros y el de un lote B, 160 euros. Además, el número de lotes B debe ser como máximo la mitad de lotes A. ¿Cuántos lotes deben prepararse y venderse para obtener unos ingresos máximos? ¿A cuánto ascienden esos ingresos?

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Una agencia de viajes organiza una excursión para los empleados de una empresa. Eso le supone unos gastos fijos por viajero de 475 euros además de los 850 euros del alquiler del autocar. Con un grupo de 20 personas, cobra a cada viajero 525 euros, pero presenta la siguiente oferta a la empresa: por cada nuevo viajero inscrito, rebajará el precio del viaje en 1,25 euros. ¿Con cuántos viajeros consigue unos beneficios máximos? ¿Cuánto paga cada viajero?

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$

A. [0,25 PUNTOS] Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [0,5 PUNTOS] Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

C. [0,5 PUNTOS] Determinar sus intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

D. [0,25 PUNTOS] Dibujar la gráfica de $f(x)$ e indicar la región delimitada por dicha curva y la recta $y = x$.

E. [1 PUNTO] Calcular el área de la región anterior.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

El número de libros que los estudiantes de un instituto leen al año, sigue una distribución normal con desviación típica 1. Una muestra aleatoria de 125 alumnos da como resultado una media de 4 libros.

A. [1,25 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 94 % para la media.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El 23 % de los habitantes de una localidad son menores de 25 años. El 31 % tienen una edad comprendida entre los 26 y 60 años. El 46 % restante es mayor de 60 años. El ayuntamiento ha recibido la petición de instalación de un parque eólico en unos terrenos municipales. Entre la población más joven, el 68 % es partidario de la instalación; entre los habitantes entre 26 y 60 años, lo es el 53 %; y entre los mayores de 60 años, el 42 %.

Seleccionamos un habitante al azar:

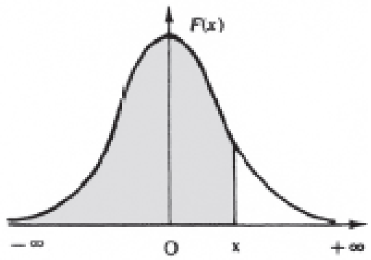
A. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea favorable a la instalación del parque eólico?

B. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea favorable y mayor de 60 años?

C. [1 PUNTO] Si no es favorable, ¿cuál es la probabilidad de que sea menor de 25 años?

Distribución normal

$$F(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	:9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

Tres estudiantes de Economía, Cristina, Juan y Pedro, han preparado un trabajo de investigación que deben exponer en clase. Se repartieron las tareas de la siguiente forma: Cristina llevó a cabo la labor de recopilación de datos, en la que empleó un 40 % más que el tiempo que Juan necesitó para redactar el texto. Pedro desempeñó las tareas de revisión y de preparación de la exposición, siendo el tiempo dedicado a ello la mitad del empleado en total por Cristina y Juan. El tiempo total empleado fue de 18 horas. ¿Cuánto dedicó cada alumno a la elaboración del trabajo?

$a)$ Plantear el sistema de ecuaciones que permita calcular el tiempo empleado por cada alumno.

$b)$ Analizar la compatibilidad de dicho sistema. $c)$ Resolverlo.

Solución:

$a)$

Sean x, y, z los tiempos empleados en la realización del trabajo por Cristina, Juan y Pedro, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x = 1{,}4y \\ z = \frac{x+y}{2} \\ x+y+z = 18 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 5x = 7y \\ 2z = x+y \\ x+y+z = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\left.\begin{array}{r} 5x - 7y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ x+y+z = 18 \end{array}\right\}}.$$

$b)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 18 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 14 + 10 + 7 = 36 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{o}\ de\ incógnitas.$$

$$\underline{Según\ el\ teorema\ de\ Rouché - Fröbenios \Rightarrow S.C.D.}$$

$c)$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & -7 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 18 & 1 & 1\end{vmatrix}}{36}=\frac{18\cdot\begin{vmatrix}-7 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}}{36}=\frac{1\cdot 14}{2}=7.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}5 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 18 & 1\end{vmatrix}}{36}=\frac{-18\cdot\begin{vmatrix}5 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}}{36}=\frac{-1\cdot(-10)}{2}=5.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}5 & -7 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 18\end{vmatrix}}{36}=\frac{18\cdot\begin{vmatrix}5 & -7\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{36}=\frac{5+7}{2}=6.$$

$\underline{Cristina\ trabajó\ 7\ horas;\ Juan,5\ horas\ y\ Pedro,6\ horas.}$

****

Ejercicio 2:

Una tienda de material informático dispone de 96 lapiceros cono memoria USB y 15 tabletas digitales, para organizar dos tipos de lotes. Un lote A tendrá 3 lapiceros y una tableta; un lote B tendrá 6 lapiceros y una tableta. El precio de venda de un lote A es de 70 euros y el de un lote B, 160 euros. Además, el número de lotes B debe ser como máximo la mitad de lotes A. ¿Cuántos lotes deben prepararse y venderse para obtener unos ingresos máximos? ¿A cuánto ascienden esos ingresos?

Solución:

Conjuntos de restricciones ordenadas: $\left.\begin{array}{r} 3x+6y \le 96 \\ x+y \le 15 \\ y \le \frac{x}{2} \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2y \le 32 \\ x+y \le 15 \\ x-2y \ge 0 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow x+2y \le 32 \Rightarrow y \le \frac{32-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	32
y	16	0

② $\Rightarrow x+y \le 15 \Rightarrow y \le 15-x \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

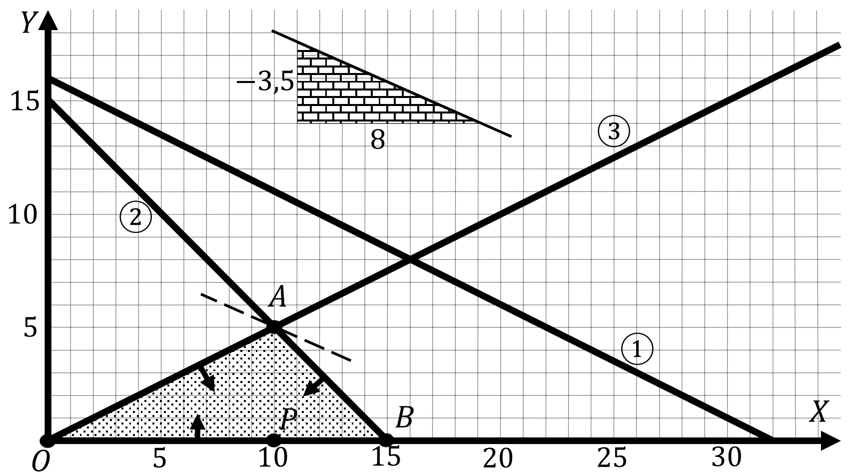
x	0	15
y	15	0

③ $\Rightarrow x-2y \ge 0 \Rightarrow y \le \frac{x}{2} \Rightarrow P(10,0) \to Si.$

x	0	20
y	0	10

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=15 \\ x-2y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y=15 \\ -x+2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=15;\ \ y=5;\ \ x=10 \Rightarrow A(10,5).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+y=15 \end{array}\right\} \Rightarrow x=15 \Rightarrow B(15,0).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=70x+160y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(10,5) = 70 \cdot 10 + 160 \cdot 5 = 700 + 800 = 1\,500.$

$B \Rightarrow f(15,0) = 70 \cdot 15 + 160 \cdot 0 = 1.050 + 0 = 1\,050.$

El máximo se produce en el punto $A(10,5)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 70x + 160y = 0 \Rightarrow y = -\frac{70}{160}x = -\frac{7}{16}x \Rightarrow m = -\frac{3,5}{8}.$

$\underline{El\ \boldsymbol{máximo}\ se\ produce\ fabricando\ \boldsymbol{10\ lotes\ A\ y\ 5\ lotes\ B}}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ \boldsymbol{1\,500\ euros}}.$

****

Ejercicio 3:

Una agencia de viajes organiza una excursión para los empleados de una empresa. Eso le supone unos gastos fijos por viajero de 475 euros además de los 850 euros del alquiler del autocar. Con un grupo de 20 personas, cobra a cada viajero 525 euros, pero presenta la siguiente oferta a la empresa: por cada nuevo viajero inscrito, rebajará el precio del viaje en 1.25 euros. ¿Con cuántos viajeros consigue unos beneficios máximos? ¿Cuánto paga cada viajero?

Solución:

Sean x el número de nuevos viajeros inscritos a partir de los 20 del grupo inicial.

El número de viajeros es $(20 + x)$.

El gasto total es el siguiente:

$G(x) = 475 \cdot (20 + x) + 850 = 9.500 + 475x + 850 = 475x + 10\,350.$

El ingreso total es el siguiente:

$I(x) = (20 + x)(525 - 1{,}25 \cdot x) = 10\,500 - 25x + 525x - 1.25x^2 =$

$= -1.25x^2 + 500x + 10\,500.$

El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los gastos:

$B(x) = I(x) - G(x) = -1.25x^2 + 500x + 10\,500 - (475x + 10\,350) =$

$= -1.25x^2 + 500x + 10\,500 - 475x - 10\,350 \Rightarrow B(x) = -1.25x^2 + 25x + 150.$

Para que el beneficio sea máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$B'(x) = -2.5x + 25 = 0;\ 25x = 250 \Rightarrow x = 10.$

Para justificar que se trata de un máximo basta tener en cuenta que la función beneficios es una función cuadrática cóncava (∩), por ser negativo el coeficiente de x^2, por lo cual la función tiene un máximo para $x = 10$.

$\underline{Se\ consigue\ el\ máximo\ beneficio\ con\ \mathbf{30\ viajeros}}.$

El máximo beneficio es el siguiente:

$B(10) = -1.25 \cdot 10^2 + 25 \cdot 10 + 150 = 125 + 250 + 150 = 525.$

$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ \mathbf{525\ euros}}.$

****

Ejercicio 4:

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$:

$a)$ Obtener sus puntos de corte con los ejes OX y OY.

$b)$ Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

$c)$ Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

$d)$ Dibujar la gráfica de $f(x)$ e indicar la región delimitada por dicha curva y la recta $y = x$.

$e)$ Calcular el área de la región anterior.

Solución:

$a)$

El dominio de la función es R por ser polinómica.

Conviene tener en cuenta que, por ser $f(-x) = -f(x)$, la función es simétrica con respecto al origen.

$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0;\ \ x^3 - 3x = 0;\ \ x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\sqrt{3} \\ x_3 = \sqrt{3} \end{cases}$. Los puntos de corte son:

$$\underline{\boldsymbol{A(-\sqrt{3}, 0), O(0, 0)\ y\ B(\sqrt{3}, 0)}}.$$

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \underline{O(0, 0)}.$

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 3x^2 - 3.\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0;\ x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow \boldsymbol{x\epsilon(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow \boldsymbol{x\epsilon(-1, 1)}}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = 6x.$

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: P(-1, 2)}.$

Por simetría con respecto al origen: $\underline{Mínimo\ relativo: Q(1, 0)}.$

Para $x = 0 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow Ni\ máx.\ ni\ mín.$ (para punto de inflexión).

$\underline{Máximo\ relativo: P(-1, 2)}.\ \underline{Mínimo\ relativo: Q(1, 0)}.$

$c)$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$f''(x) = 6x.$

$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 0).}$

$\underline{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(0, +\infty).}$

Una función tiene un punto de inflexión cuando pasa de ser cóncava a convexa o viceversa; es decir: cuando se anula su segunda derivada.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0.\ f(0) = 0 \Rightarrow$

$\underline{P.I. \Rightarrow O(0, 0)}.$

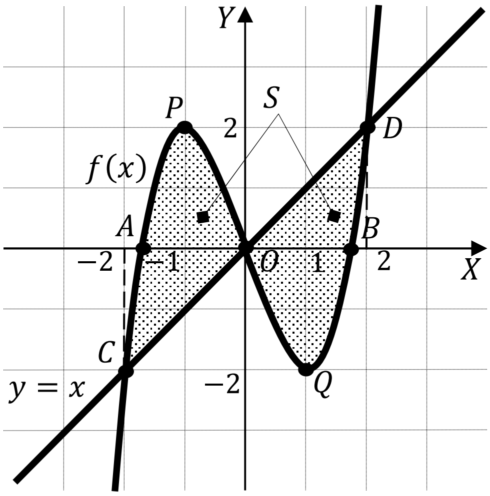
$d)$

Los puntos de corte de la función $f(x)$ y la recta $y = x$ se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$y = f(x) \Rightarrow x = x^3 - 3x;\ \ x^3 - 4x = 0;$

$$x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to O(0, 0) \\ x_2 = -2 \to C(-2, -2). \\ x_3 = 2 \to D(2, 2) \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.



$e)$

Teniendo en cuenta la simetría de la función y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^2 [y - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 [x - (x^3 - 3x)] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^2 (-x^3 + 4x) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = 2 \cdot \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_0^2 = \left[-\frac{x^4}{2} + 4x^2\right]_0^2 =$$

$$= \left(-\frac{2^4}{2} + 4 \cdot 2^2\right) - 0 = -\frac{16}{2} + 16 = 8.$$

$\underline{\boldsymbol{S = 8\ u^2}}.$

****

Ejercicio 5:

El número de libros que los estudiantes de un instituto leen al año, sigue una distribución normal con desviación típica 1. Una muestra aleatoria de 125 alumnos da como resultado una media de 4 libros.

$a)$ Obtener el intervalo de confianza del 94 % para la media.

$b)$ ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97 % sea un cuarto del obtenido en el apartado anterior?

Solución:

$a)$

Para un nivel de confianza del 94 % es:

$1-\alpha=0.94 \ \rightarrow \ \alpha=1-0.94=0.06 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.03}=1.88.$

$(1-0.03=0.9700 \ \rightarrow z=1.88).$

Datos: $n=125; \ \ \overline{x}=4; \ \ \sigma=1; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1.88.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\sigma \ y \ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(4-1.88\cdot\frac{1}{\sqrt{125}}, \ 4+1.88\cdot\frac{1}{\sqrt{125}}\right); \ \ (4-1.88\cdot 0.0894, \ 4+1.88\cdot 0.0894);$

$(4-0.1682, \ 4+0.1682)$

$\underline{\boldsymbol{I.C._{94\,\%}=(3.8318, 4.1682).}}$

$b)$

Para un nivel de confianza del 97 % es:

$1-\alpha=0.97 \ \rightarrow \ \alpha=1-0.97=0.03 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.015}=2.17.$

$(1-0.015=0.9850 \ \rightarrow z=2.17).$

$E=\frac{4.1682-3.8318}{2\cdot 4}=\frac{0.3364}{8}=0.042.$

Datos: $\sigma=1; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2.17; \ \ E=0.042.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2.17\cdot\frac{1}{0.042}\right)^2=$

$=(2.17\cdot 237\,812)^2=516\,052^2=2\,663.10.$

$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de } \boldsymbol{2\,664 \ alumnos}}$

****

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es

Ejercicio 6:

El 23% de los habitantes de una localidad son menores de 25 años. El 31 % tienen una edad comprendida entre los 26 y los 60 años. El 46 % restante es mayor de 60 años. El ayuntamiento ha recibido la petición de instalación de un parque eólico en unos terrenos municipales. Entre la población más joven, el 68 % es partidario de la instalación; entre los habitantes entre 26 y 60 años, lo es el 53 %; y entre los mayores de 60 años, el 42 %. Seleccionamos un habitante al azar:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que sea favorable a la instalación del parque eólico?

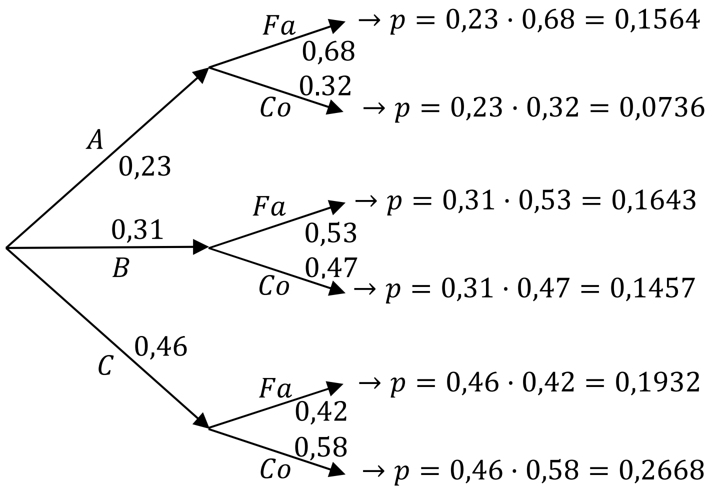
$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que no sea favorable y mayor de 60 años?

$c)$ Si no es favorable, ¿cuál es la probabilidad de que sea menor de 25 años?

Solución:

Para facilitar la construcción del diagrama del árbol llamaremos:

$A \rightarrow Menores\ de\ 25;\ \ B \rightarrow Entre\ 26\ y\ 60;\ \ C \rightarrow Mayores\ de\ 60.$



$a)$

$$P = P(Fa) = P(A \cap Fa) + P(B \cap Fa) + P(C \cap Fa) =$$

$$= P(A) \cdot P(Fa/A) + P(B) \cdot P(Fa/B) + P(C) \cdot P(Fa/C) =$$

$$= 0.23 \cdot 0.68 + 0.31 \cdot 0.53 + 0.46 \cdot 0.42 = 0.1564 + 0.1643 + 0.1932 = \underline{0.5139}.$$

$$\boldsymbol{P(Fa) = \underline{0.5139}}$$

$b)$

$$P = P(C \cap Co) = P(C) \cdot P(Co/C) = 0.46 \cdot 0.58 = \underline{0.2668}.$$

$$\boldsymbol{P(C \cap Co) = \underline{0.2668}.}$$

$c)$ $$P = P(A/Co) = \frac{P(A \cap Co)}{P(Co)} = \frac{P(A) \cdot P(Co/A)}{1 - P(Fa)} = \frac{0.23 \cdot 0.32}{1 - 0.5139} = \frac{0.0736}{0.4861} = \underline{0.1514}.$$

$$\boldsymbol{P(A/Co) = \underline{0.1514}.}$$

****