Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

SECCIÓN 1, (3 puntos)

Bloque 1:

1. *En el siguiente problema de programación lineal maximiza la función* $f(x,y) = 12x-2y$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$$x \geq y$$
$$x + y \geq 0$$
$$x \leq 3$$

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 puntos)

c) Indica el máximo del problema dado y su valor. (0.25 puntos)

2. *En un examen final de historia al que se presentan 120 alumnos se deja elegir entre 3 opciones (A, B o C). El número de personas que elige la opción A es el triple de número que resulta al sumar las opciones B y C. Hay el doble de personas que realizan la opción C que las que escogen B.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos alumnos eligen cada opción. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

Bloque 2:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+3+t & \text{si } x \leq 1 \\ (x-3)^2+t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t *la función* $f(x)$ *es continua en* $x = 1$*? (0.5 puntos)*

b) Para $t = 0$*, calcula los extremos relativos de la función* $f(x)$ *en el intervalo* $(1, +\infty)$*. (0.5 puntos)*

c) Para $t = 0$*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x)$ *en* $(1, +\infty)$*. (0.5 puntos)*

2. *La función* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ *tiene un punto de inflexión en* $(-1, 6)$ *y en el punto de abscisa* $x = -2$ *la pendiente de la recta tangente es* -4*. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros* a, b *y* c*. (1.5 puntos)*

SECCIÓN 2, (3.5 puntos)

Bloque 1:

3. *En un municipio el 5 % de las personas está en un ERE. De las personas que están en un ERE, el 40 % pertenece al sector turístico. Del resto de las personas del municipio, se sabe que el 10 % de ellos pertenece al sector turístico.*

a) Calcula la probabilidad de que elegida una persona al azar del municipio trabaje en el sector turístico. (0.75 puntos)

b) Sabiendo que una persona pertenece al sector turístico, ¿cuál es la probabilidad de que esté en un ERE? (0.75 puntos)

4. *El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ=20 minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 puntos)

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea μ = 1.3 horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} -(x-t)^2 & si\ x < 0 \\ -2 & si\ x = 0 \\ x^2 - 2 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = 0. (0.5 puntos)

b) Para t = -1, representa gráficamente la función f(x). (1 punto)

4. *Se localiza un compuesto nocivo en un río obteniéndose que su proporción durante cinco días consecutivos de análisis de muestras sigue la función:* $N(x) = \frac{1}{100}(-4x^4 + 128x^2 + 54)$ *con x = días y* $(1 \leq x \leq 5)$.

a) ¿Cuál es la proporción el tercer día ? (0.25 puntos)

b) Determina que día se obtiene el máximo y que día se obtiene el mínimo. (1 punto)

c) ¿A qué valor ascienden ambos? (0.75 puntos)

SECCIÓN 3, (3.5 puntos)

Bloque 1:

5. *En una clase de un ciclo formativo de formación profesional hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.*

a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 puntos)

b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Toledo? (0.75 puntos)

6. *Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar de 10 latas de refresco de cola y ha resultado ser: 70, 75, 85, 100, 60, 80, 120, 95, 65 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos de una lata de refresco de cola se distribuye según una ley normal de desviación típica* $\sigma = 10$ *gramos, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para el contenido medio de azúcar en una lata de refresco de cola. (1 punto)

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ *del contenido en gramos de azúcar es de 90 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2:

5. *Se realiza una encuesta a los habitantes de un pueblo (con respuestas SI, NO o NO SABE/NO CONTESTA) sobre la necesidad de construir otra piscina cubierta. Se pregunta a las 600 personas mayores de edad que viven en el pueblo y los que dicen NO son la mitad de los que NO SABE/NO CONTESTA. Por estudios paralelos de fiabilidad se sabe que el 30 % del total de los que contestan SI o NO, mienten, y el total de estos últimos son 135 personas:*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar qué cantidad de personas eligen cada respuesta. (1.5 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

6. *a) Dadas las matrices* $M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $N = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *comprueba que* $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$. *(1 punto)*

b) Resuelve la ecuación $M \cdot X = N$ *(0.5 puntos)*

RESPUESTAS

SECCIÓN 1

Bloque 1:

1. *En el siguiente problema de programación lineal maximiza la función* $f(x, y) = 12x - 2y$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$x \geq y$
$x + y \geq 0$
$x \leq 3$

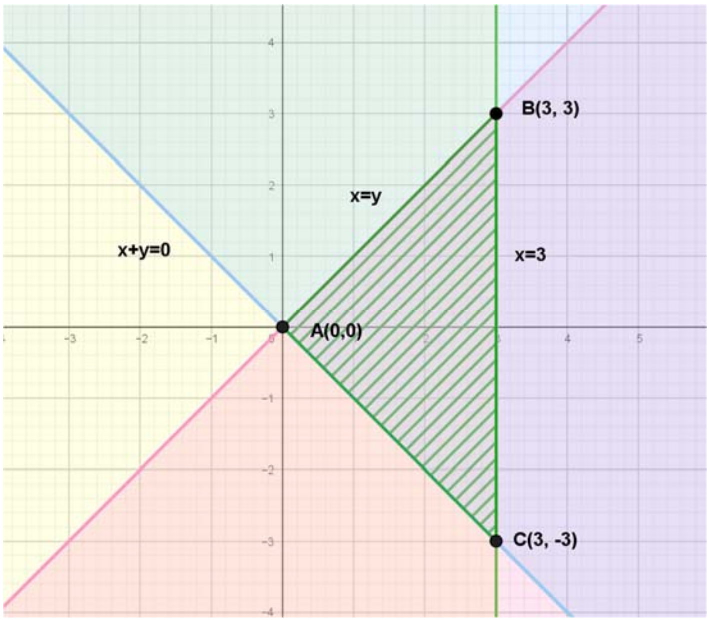
a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 puntos)

c) Indica el máximo del problema dado y su valor. (0.25 puntos)

RESPUESTA

a)



a) Resolvemos los sistemas formados por las ecuaciones de las rectas

$\begin{cases} x + y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ obtenemos $C(3, -3)$ $\begin{cases} x + y = 0 \\ x = y \end{cases}$ obtenemos $A(0, 0)$ $\begin{cases} x = y \\ x = 3 \end{cases}$ obtenemos $C(3, -3)$

Los vértices son $A(0, 0)$, $B(3, 3)$ y $C(3, -3)$

b) Sustituimos los vértices en la función $f(x, y) = 12x - 2y$

A, $f(0, 0) = 12 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$ B, $f(3, 3) = 12 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 30$ C, $f(3, -3) = 12 \cdot 3 - 2 \cdot (-3) = 42$

Máximo se alcanza en $C(3, -3)$ con valor 42

2. *En un examen final de historia al que se presentan 120 alumnos se deja elegir entre 3 opciones (A, B o C). El número de personas que elige la opción A es el triple de número que resulta al sumar las opciones B y C. Hay el doble de personas que realizan la opción C que las que escogen B.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos alumnos eligen cada opción. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

RESPUESTA

Sea x el número de personas que eligen opción A, y el número que eligen B, z el número que eligen C.

a)

Escribimos el sistema $\begin{cases} x+y+z=120 \\ x=3(y+z) \\ z=2y \end{cases}$ operando y ordenando las ecuaciones

b)

$\begin{cases} x+y+z=120 \\ x-3y-3z=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ Calculamos $E'_2 = -E_1 + E_2$ obtenemos

$\begin{cases} x+y+z=120 \\ -4y-4z=-120 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ Calculamos $E''_3 = E'_2 + 2E'_3$ obtenemos

$\begin{cases} x+y+z=120 \\ -4y-4z=-120 \\ -6z=-120 \end{cases}$ de donde $z = 20$, $y = 10$, $x = 90$

90 alumnos eligen la opción A, 10 la opción B y 20 la opción C

Bloque 2:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+3+t & si\ x \leq 1 \\ (x-3)^2+t & si\ x > 1 \end{cases}$

   a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)

   b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

   c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

RESPUESTA

a) Para que f sea continua en $x = 1$, los límites laterales han de ser iguales, los calculamos,

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} [(x-3)^2 + t] = 4 + t$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+3+t) = 4 + t$, luego para cualquier valor de t, f es continua en 1.

La función es continua en $x = 1$ para cualquier valor de t.

b) Para $t = 0$ y $x > 1$, la función es $f(x) = (x-3)^2$, derivamos

$f'(x) = 2(x-3)$ igualamos a 0, $2(x-3) = 0$ obtenemos $x = 3$

derivamos de nuevo $f''(x) = 2$ como es mayor que 0, en $x = 3$ hay un mínimo relativo

Para $t = 0$, en $x = 3$ hay un mínimo relativo.

c) Los intervalos son (1, 3)   y   (3, ∞),   tomamos valores de cada uno de los intervalos y sustituimos en la primera derivada

$f'(2) = 2\cdot(2-3) = -2$ luego la función es decreciente

$f'(5) = 2\cdot(5-3) = 4$ luego la función es creciente

En (1, 3), f es decreciente y en (3, ∞) es creciente.

2. *La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tiene un punto de inflexión en $(-1, 6)$ y en el punto de abscisa $x = -2$ la pendiente de la recta tangente es -4. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 puntos)*

RESPUESTA

Si f tiene un punto de inflexión en $(-1, 6)$, $f(-1) = 6$ y además $f''(-1) = 0$

Si la pendiente de la recta tangente en $x = -2$ es -4 entonces $f'(-2) = -4$

Calculamos las derivadas

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ de donde $f'(-2) = 3\cdot a\cdot(-2)^2 + 2\cdot b\cdot(-2) + c = -4$

$f''(x) = 6ax + 2b$ de donde $f''(-1) = 6\cdot a\cdot(-1) + 2b = 0$

y $f(-1) = 6$ de donde $a\cdot(-1) + b\cdot 1 + c(-1) = 6$, tenemos el sistema

$$\begin{cases} -a + b - c = 6 \\ 12a - 4b + c = -4 \\ -6a + 2b \quad = 0 \end{cases}$$ Calculamos $E'_2 = 12E_1 + E_2$ y $E'_3 = -6E_1 + E_3$ obtenemos

$$\begin{cases} -a + b - c \quad = 6 \\ 8b - 11c = 68 \\ -4b + 6c = -36 \end{cases}$$ Calculamos $E''_3 = E'_2 + 2E'_3$ obtenemos

$$\begin{cases} -a + b - c = 6 \\ 8b - 11c = 68 \\ c = -4 \end{cases}$$ de donde, $c = -4$, $b = 3$ y $a = 1$

$a = 1$, $b = 3$, $c = -4$; $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$

SECCIÓN 2

Bloque 1:

3. *En un municipio el 5 % de las personas está en un ERE. De las personas que están en un ERE, el 40 % pertenece al sector turístico. Del resto de las personas del municipio, se sabe que el 10 % de ellos pertenece al sector turístico.*

a) Calcula la probabilidad de que elegida una persona al azar del municipio trabaje en el sector turístico. (0.75 puntos)

b) Sabiendo que una persona pertenece al sector turístico, ¿cuál es la probabilidad de que esté en un ERE? (0.75 puntos)

RESPUESTA

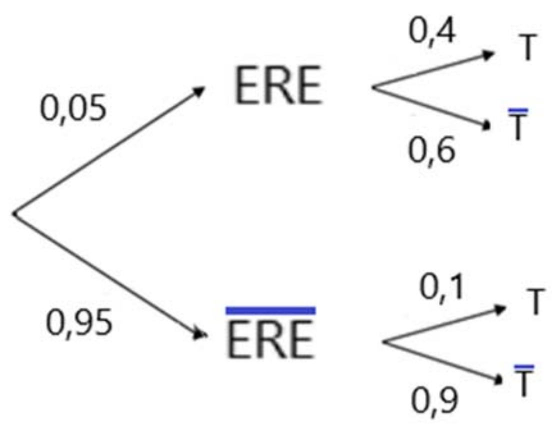
Escribimos las leyendas y construimos el diagrama de árbol:

ERE (E): estar en ERE

$\overline{ERE}$ ($\bar{E}$): no estar en ERE

T: trabajar en sector turístico

$\bar{T}$: no trabajar en sector turístico



a) Por el teorema de la probabilidad total

$P(T) = P(E\cap T) + P(\bar{E}\cap T) = P(E)\cdot P(T/E) + P(\bar{E})\cdot P(T/\bar{E}) = 0.05 \cdot 0.4 + 0.95 \cdot 0.1 = 0.115$

P(trabajar en sector turístico) =0.115

b) Por el teorema de Bayes

$$P(E/T) = \frac{P(E\cap T)}{P(T)} = \frac{P(E)\cdot P(T/E)}{P(T)} = \frac{0.05\cdot 0.4}{0.115} = \frac{0.020}{0.115} = 0.1739$$

P(estar en ERE cuando es del sector turístico) = 0.1739

4. *El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ=20 minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 puntos)

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 1.3$ horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

donde X es la variable "tiempo de uso de móvil por día", X sigue una N(μ, 20)

Nos dan los siguientes datos: $\sigma = 20\ min$ $\quad 1 - \alpha = 0.95,$ $\quad n = 36,$ $\bar{x} = 2h = 120\ min.$

$1 - \alpha = 0.95,$ $\alpha = 0.05$, $\frac{\alpha}{2} = 0.025,$ $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975,$ buscamos en la tabla: $Z_{0.975} = 1.96.$

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(120 - 1.96\frac{20}{\sqrt{36}},\quad 120 + 1.96\frac{20}{\sqrt{36}}\right) = (\,113.4667, 126.53\,)$$

Intervalo de confianza: (113.4667, 126.53)

b) La media poblacional de 1.3h = 78 minutos, que no está en el intervalo calculado, por lo que no se puede admitir que esa sea la media poblacional con un nivel de confianza del 95 %

Si se quiere que el intervalo de confianza tenga menor amplitud se debe aumentar el tamaño de la muestra o disminuir el nivel de confianza; y al contrario para aumentar la amplitud

No se puede admitir que con un nivel de confianza del 95 % esa sea la media poblacional

c) El error máximo admisible viene dado por: $E\ = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Por tanto, para n = 100,

$$1 - \alpha = 0.9464, \qquad \alpha = 0.0536\,, \qquad \frac{\alpha}{2} = 0.0268, \qquad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9732,$$

buscamos en la tabla: $Z_{0.9732} = 1.93.$ Sustituyendo en la fórmula

$$E = 1.93 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 1.93 \cdot 2 = 3.86$$

El error máximo admisible es de 3.86 minutos

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} -(x-t)^2 & si\ x < 0 \\ -2 & si\ x = 0 \\ x^2 - 2 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = 0. (0.5 puntos)

b) Para t = -1, representa gráficamente la función f(x). (1 punto)

RESPUESTA

a) $f(x) = \begin{cases} -(x-t)^2 & si\ x < 0 \\ -2 & si\ x = 0 \\ x^2 - 2 & x > 0 \end{cases}$ para que f sea continua en $x = 0$ los límites laterales en $x = 0$ han de coincidir y su valor ser igual a $f(0)$.

$f(0) = -2$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} [-(x-t)^2] = -t^2$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 - 2) = -2$, igualamos, $-t^2 = -2$, luego $t = \sqrt{2}$ y $t = -\sqrt{2}$.

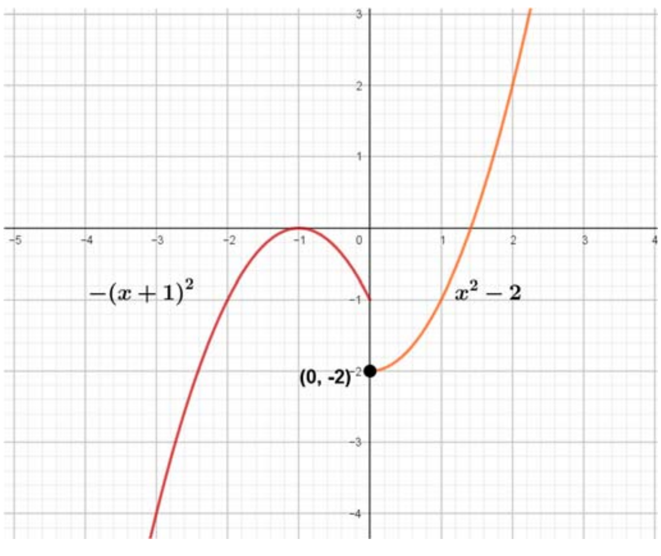
f es continua en $x = 0$ cuando $t = \sqrt{2}$ o $t = -\sqrt{2}$

b) Para $t = -1$ la función es:

$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 & si\ x < 0 \\ -2 & si\ x = 0 \\ x^2 - 2 & x > 0 \end{cases}$ Para $x < 0$ se trata de una parábola abierta hacia abajo $-x^2 - 2x - 1$ con vértice en $x = -2/-2 = 1$, $(1, -4)$, corte con el eje Y en $(0, -1)$ y el eje X en $(-1, 0)$

Para $x > 0$ se trata de una parábola abierta hacia arriba con vértice en $x = 0$, $(0, -2)$, corte con el eje Y en $(0, -2)$ y el eje X en $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

Para $x = 0$, $f(0) = -2$.



4. *Se localiza un compuesto nocivo en un río obteniéndose que su proporción durante cinco días consecutivos de análisis de muestras sigue la función:* $N(x) = \frac{1}{100}(-4x^4 + 128x^2 + 54)$ *con* $x =$ *días y* $(1 \leq x \leq 5)$.

a) ¿Cuál es la proporción el tercer día ? (0.25 puntos)

b) Determina que día se obtiene el máximo y que día se obtiene el mínimo. (1 punto)

c) ¿A qué valor ascienden ambos? (0.75 puntos)

RESPUESTA

a) Calculamos $N(3) = \frac{1}{100}(-4 \cdot 3^4 + 128 \cdot 3^2 + 54) = 8.82$

La proporción el tercer día es de 8.82

b) Calculamos la derivada, $\boldsymbol{N'(x) = \frac{1}{100}(-16x^3 + 256x)}$, resolvemos $\boldsymbol{\frac{1}{100}(-16x^3 + 256x) = 0}$

Nos dicen que $1 \leq x \leq 5$. Obtenemos $x = 0$, $x = 4$ y $x = -4$, descartamos $x = 0$ y $x = -4$ por no estar en el dominio.

Calculamos la segunda derivada:

$N''(x) = \frac{1}{100}(-48x^2 + 256)$ y sustituimos los valores obtenidos:

$N''(4) = \frac{1}{100}(-48 \cdot 4^2 + 256) = -786 < 0$ luego en $x = 4$ hay un máximo

Máxima proporción el día 4 y mínima proporción el día 0

c) Calculamos los valores del máximo, y los valores en los extremos del intervalo:

$$N(1) = \frac{1}{100}(-4 \cdot 1^4 + 128 \cdot 1^2 + 54) = \frac{1}{100}(-4 + 128 + 54) = 1.78$$

$$N(4) = \frac{1}{100}(-4 \cdot 4^4 + 128 \cdot 4^2 + 54) = 10.78$$

$$N(5) = \frac{1}{100}(-4 \cdot 5^4 + 128 \cdot 5^2 + 54) = \frac{1}{100}(-2500 + 3200 + 54) = 7.54$$

El primer día, (día 1) la proporción es mínima e igual a 1.78

El cuarto día (día 4) la proporción es máxima e igual a 10.78

SECCIÓN 3

Bloque 1:

5. *En una clase de un ciclo formativo de formación profesional hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.*

a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 puntos)

b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Toledo? (0.75 puntos)

RESPUESTA

Sean los sucesos, A ser de Albacete, C ser de Cuenca y T ser de Toledo.

Según los datos, $P(A)=\frac{14}{27}=\frac{2}{3}$, $P(C)=\frac{5}{27}$, $P(T)=\frac{8}{27}$

a) Si no le tocan a alumnos que no son de Albacete le tocan a alumnos de Cuenca y/o Toledo que suman 13, luego $P(\bar{A})=\frac{13}{27}$

Nos piden luego $P(\bar{A}\cap\bar{A})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{A})=\frac{13}{27}\cdot\frac{13}{27}=\frac{169}{729}=0.2318$ es el producto porque al poder tocarle la entrada al mismo alumno los sucesos son independientes.

La probabilidad de que le toquen las dos entradas a alumnos que no son de Albacete es 0.2318

b) En este caso como cuando le toca a un alumno ya no participa, los sucesos son dependientes.

Nos piden:

$$P(T\cap T\cap T\cap T\cap T)=P(T)\cdot P(T/T)\cdot P(T/T\cap T)\cdot P(T/T\cap T\cap T)\cdot P(T/T\cap T\cap T\cap T)=$$

$$=\frac{8}{27}\cdot\frac{7}{26}\cdot\frac{6}{25}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{4}{23}=0.0007$$

La probabilidad de que le toquen las cinco entradas a alumnos de Toledo es 0.0007

6. *Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar de 10 latas de refresco de cola y ha resultado ser: 70, 75, 85, 100, 60, 80, 120, 95, 65 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos de una lata de refresco de cola se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para el contenido medio de azúcar en una lata de refresco de cola. (1 punto)

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 90 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ donde X es el contenido en azúcar de una lata de refresco de cola

Nos dan los siguientes datos:

$\sigma = 10,\quad 1 - \alpha = 0.97\ ,\quad \alpha = 0.03\ ,\ \frac{\alpha}{2} = 0.015\ ,\ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \qquad n = 10.$

Calculamos la media muestral:

$$\bar{x} = \frac{70+75+85+100+60+80+120+95+65+90}{10} = 84.$$

Buscamos en la tabla: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.985} = 2.17.$

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(84 - 2.17\frac{10}{\sqrt{10}},\qquad 84 + 2.17\frac{10}{\sqrt{10}}\right) =$$

$$= (77.1379,\ 90.8621)$$

Intervalo de confianza: (77.1379, 90.8621)

b) Si se quiere que el intervalo de confianza tenga menor amplitud se debe aumentar el tamaño de la muestra, lo que haría que la fracción fuera más pequeña y por tanto la cantidad que se suma y resta a la media sería menor o disminuir el nivel de confianza pues esto haría que el valor $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ fuera más pequeño con el mismo resultado indicado antes.

Aumentar el tamaño de la muestra o disminuir el nivel de confianza.

c) 90 ya se encuentra en el intervalo calculado, si aumentamos el nivel de confianza, aumenta la amplitud del intervalo y con más motivo 90 entraría en el intervalo de confianza.

Con una probabilidad del 98.5 % el contenido en azúcar es de 90 gramos en cada frasco de 500 gramos.

Bloque 2:

5. *Se realiza una encuesta a los habitantes de un pueblo (con respuestas SI, NO o NO SABE/NO CONTESTA) sobre la necesidad de construir otra piscina cubierta. Se pregunta a las 600 personas mayores de edad que viven en el pueblo y los que dicen NO son la mitad de los que NO SABE/NO CONTESTA. Por estudios paralelos de fiabilidad se sabe que el 30 % del total de los que contestan SI o NO, mienten, y el total de estos últimos son 135 personas:*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar qué cantidad de personas eligen cada respuesta. (1.5 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

RESPUESTA

Sea x el número de personas que dicen NO, y que dicen SI, z NO SABE/NO CONTESTA.

a) Como el 30 % de $x + y$ son 135, tenemos que $x + y$ = (135/30) · 100 = 450

Escribimos el sistema $\begin{cases} x + y + z = 600 \\ x = \frac{1}{2}z \\ x + y = 450 \end{cases}$

b) Operando y ordenando las ecuaciones

$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ 2x - z = 0 \\ x + y = 450 \end{cases}$ Calculamos $\begin{matrix} E'_2 = -2E_1 + E_2 \\ E'_3 = -E_1 + E_3 \end{matrix}$ obtenemos

$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ -2y - 3z = -1200 \\ -z = -150 \end{cases}$ de donde z = 150, y = 375, x = 75

75 contestan NO, 375 contestan SI y 150 NO SABEN/NO CONTESTAN

6. *a) Dadas las matrices* $M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $N = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *comprueba que* $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$. *(1 punto)*

b) Resuelve la ecuación $M \cdot X = N$ *(0.5 puntos)*

RESPUESTA

a) $M \cdot N = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ como $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t)$

Calculamos $|M \cdot N| = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1$

$(M \cdot N)^t = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ $Adj(M \cdot N)^t = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ como $|M \cdot N| = 1$

$(M \cdot N)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

$|M| = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $M^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(M)^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ como $|M| = 1$

$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$|N| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$, $N^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $Adj(M)^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ como $|N| = 1$

$N^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$N^{-1} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ por tanto

$$\boldsymbol{(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}}$$

b) $M \cdot X = N$ $X = M^{-1} \cdot N$ luego

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}$$

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE **JULIO**

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

SECCIÓN 1, (3 puntos)

Bloque 1:

1. *Una carpintería ofrece tres modelos de mesas cuyo precio varía en función del tipo de madera utilizada y lo clasifica en: gama baja, media y superior. El precio de la mesa de gama superior es el mismo que de las otras dos juntas. Vendiendo 50 mesas de gama media se obtiene el mismo dinero que con 30 de la superior y por la venta de 5 mesas de gama baja, 5 de media y 10 de gama superior se obtienen 7500 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo de mesa. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

2. *En un terreno se dispone de 18 hectáreas para sembrar aguacates y mangos. Para los aguacates deseamos destinar como mucho 16 hectáreas. Por cada hectárea sembrada de aguacates y mangos se obtiene 10000 y 12000 euros respectivamente. Se quiere que la superficie correspondiente a los mangos no sea mayor que la que ocupen los aguacates.*

a) Expresa la función objetivo. (0.25 puntos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto)

c) Determina cuántas hectáreas de cada tipo se debe dedicar a cada producto para conseguir máximo beneficio. (0.25 puntos)

Bloque 2:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+3+t & si\ x<1 \\ 3 & si\ x=1 \\ (x-3)^2+t & si\ x>1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

2. *La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en el punto $(0, -3)$ y la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ es 6. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 puntos)*

SECCIÓN 2, (3.5 puntos)

Bloque 1:

3. *El consumo por persona y semana de azúcar en España sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 60$ gramos. Se hizo un estudio y se observó que la media de consumo por semana de 50 personas fue de 200 gramos. Se pide:*

a) Calcula el intervalo de confianza del 95 % para el consumo medio por persona y semana de azúcar. (1 punto)

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ de consumo por persona y semana de azúcar es 220 gramos con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

4. *De 100 alumnos que han terminado una titulación 6 no han encontrado trabajo el primer año.*

a) Calcula la proporción de alumnos que han encontrado trabajo el primer año. (0.25 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que si elegimos tres alumnos sin repetición, ninguno haya encontrado trabajo el primer año. (0.5 puntos)

c) Si elegimos tres alumnos al azar sin repetición y el primero no ha encontrado trabajo el primer año, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo y el tercero tampoco hayan encontrado trabajo el primer año? (0.75 puntos)

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x < 0 \\ t & si\ x = 0 \\ (x-2)^2 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 0$. (0.5 puntos)

b) Para $t = 2$, representa gráficamente la función $f(x)$. (1 punto)

4. *En un local se venden pizzas en porciones. Las ventas durante cuatro semanas consecutivas siguen la función:* $P(t) = -40t^2 + 240t + 540$, *con t=semanas y* $(1 \leq t \leq 4)$.

a) ¿Cuántas porciones han vendido durante los dos primeras semanas? (0.5 puntos)

b) ¿Durante qué semana se vendieron más porciones y cuántas fueron? (0.75 puntos)

c) ¿Qué semana vendieron menos? ¿Cuántas porciones? (0.75 puntos)

SECCIÓN 3, (3.5 puntos)

Bloque 1:

5. *Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ *y* $D=\begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot C + D^T$. *(0.5 puntos)*

b) Razona si A y B tienen matriz inversa (no es necesario calcularlas). (0.5 puntos)

c) ¿Qué dimensiones tienen las matrices resultantes de los producto $D \cdot C$ *y* $D^T \cdot C^T$*? (no es necesario hacer las multiplicaciones). (0.5 puntos)*

6. *En un concesionario de motos disponen de 100 motos dispuestas para su venta. Las motos son de tres tipos: las que consumen gasolina únicamente, las que usan gasolina y aceite y las eléctricas. Las más numerosas son las que usan gasolina y aceite, y la diferencia entre la cantidad de estas y las de gasolina es igual a la mitad del número de eléctricas. La diferencia entre las de gasolina y las eléctricas es igual a la tercera parte de las que utilizan gasolina y aceite.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas motos hay de cada tipo. (1.5 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

Bloque 2:

5. *Según los datos de 2020, en la universidad española hay un porcentaje de 24.8 % de mujeres estudiando Grados de Informática, el resto son hombres. Además una mujer tiene una probabilidad de 0.95 de terminar informática, mientras que para los hombres es del 0.85.*

a) Elegido un estudiante al azar de informática, ¿cuál es la probabilidad de que consiga terminar la titulación? (0.75 puntos)

b) Sabiendo que un estudiante elegido al azar ha terminado informática, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (0.75 puntos)

6. *Se desea investigar la altura en cm de un tipo de planta, se sabe que la altura sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica* σ *=15 cm. Se tomó una muestra aleatoria de 400 plantas de ese tipo y se comprobó que la altura media de dicha muestra era de 110 cm.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la altura de ese tipo de planta, con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Se puede admitir que la media de altura μ *de ese tipo de planta pueda ser de 109 cm con una confianza del 95 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

RESPUESTAS

SECCIÓN 1

Bloque 1:

1. *Una carpintería ofrece tres modelos de mesas cuyo precio varía en función del tipo de madera utilizada y lo clasifica en: gama baja, media y superior. El precio de la mesa de gama superior es el mismo que de las otras dos juntas. Vendiendo 50 mesas de gama media se obtiene el mismo dinero que con 30 de la superior y por la venta de 5 mesas de gama baja, 5 de media y 10 de gama superior se obtienen 7500 euros.*

   a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo de mesa. (1 punto)

   b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

RESPUESTA

Sea x el precio gama baja, y el precio gama media, z el precio gama superior.

a)

Escribimos el sistema $\begin{cases} 5x + 5y + 10z = 7500 \\ x + y = z \\ 50y = 30z \end{cases}$

b) Simplificando la primera ecuación, dividiendo entre 5; la tercera entre 10 y ordenando todas

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 1500 \end{cases}$ Calculamos $E'_3 = -E_1 + E_3$ obtenemos

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5y - 3z = 0 \\ 3z = 1500 \end{cases}$ de donde $z = 500$, $y = 300$, $x = 200$

Precio gama baja 200 €, precio gama media 300 € y precio gama superior 500 €

2. *En un terreno se dispone de 18 hectáreas para sembrar aguacates y mangos. Para los aguacates deseamos destinar como mucho 16 hectáreas. Por cada hectárea sembrada de aguacates y mangos se obtiene 10000 y 12000 euros respectivamente. Se quiere que la superficie correspondiente a los mangos no sea mayor que la que ocupen los aguacates.*

a) Expresa la función objetivo. (0.25 puntos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto)

c) Determina cuántas hectáreas de cada tipo se debe dedicar a cada producto para conseguir máximo beneficio. (0.25 puntos)

RESPUESTA

	Restricciones	Beneficio
Hectáreas aguacates, x	≤ 16	10 000 €
Hectáreas mangos, y	$y \le x$	12 000 €
Total hectáreas	18	

a) $f(x, y) = 10000x + 12000y$

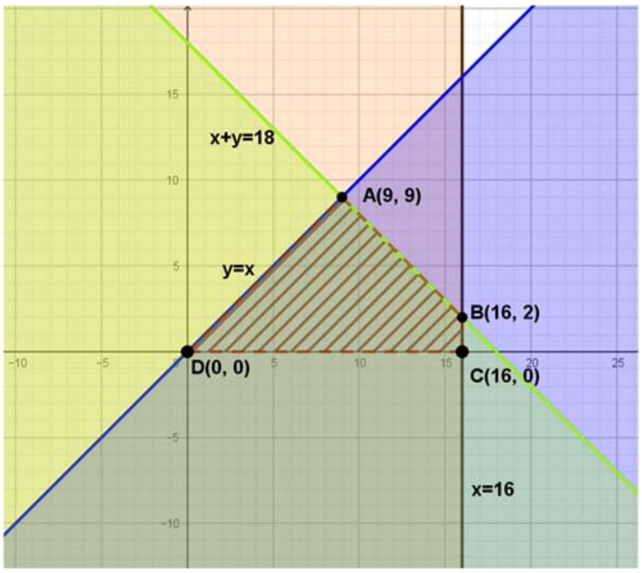
$f(x, y) = 10000x + 12000y$

b)

$$\left.\begin{array}{c} x \ge 0 \quad y \ge 0 \\ x \le 16 \\ y \le x \\ x + y \le 18 \end{array}\right\}$$

Representamos las rectas
$x = 16;\ y = x;\ x + y = 18$

Resolviendo los sistemas
$x + y = 18,\ y = x,\quad A(9, 9)$
$x + y = 18,\ x = 16,\ B(16, 2)$
$x = 16, y = 0,\quad C(16, 0)$
$y = x,\ y = 0,\quad D(0,0)$



c) $f(9, 9) = 10000·9 + 12000·9 = 198000$

$f(16, 2) = 10000·16 + 12000·2 = 184000$

$f(16,0) = 10000·16 + 12000·0 = 160000$

$f(0,0) = 0$

Debe dedicar 9 hectáreas a aguacates y 9 hectáreas a mangos

Bloque 2:

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+3+t & si\ x<1 \\ 3 & si\ x=1 \\ (x-3)^2+t & si\ x>1 \end{cases}$

   a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)

   b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

   c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, +\infty)$. (0.5 puntos)

RESPUESTA

a) $f(x) = \begin{cases} x+3+t & si\ x<1 \\ 3 & si\ x=1 \\ (x-3)^2+t & si\ x>1 \end{cases}$ para que *f* sea continua en ***x* = 1,** los límites laterales en ***x* = 1** han de coincidir y su valor ser igual a *f*(1) = 3

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(x+3+t) = 4+t$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}[(x-3)^2+t] = 4+t, \text{ igualamos, } 4+t=3\ ,\ \ t=-1$$

***f* es continua en *x* = 1 para *t* = –1**

b) $f(x) = (x-3)^2$ en $(1, +\infty)$, con *t* = 0

Derivamos $f'(x) = 2(x-3)$, $2(x-3) = 0$ $x = 3$

Calculamos la segunda derivada $f''(x) = 2 > 0$

Luego en x = 3 hay mínimo relativo $f(3) = (3-3)^2 = 0$

Hay un mínimo en *x* = 3, (3, 0)

c) Por el apartado b) los intervalos de monotonía son:

(1, 3) y $(1, +\infty)$

Como en *x* = 3 hay un mínimo, en (1, 3) la función es decreciente y en $(1, +\infty)$ creciente.

También tomando valores de los intervalos y sustituyendo en la derivada:

$f'(2) = 2(2-3) = -2 < 0$ luego es decreciente en (1, 3)

$f'(5) = 2(5-3) = 4 > 0$ luego es creciente en $(1, +\infty)$

En $(1, 3)$ la función es decreciente y en $(1, +\infty)$ creciente

2. *La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en el punto $(0, -3)$ y la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ es 6. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 puntos)*

RESPUESTA

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Máximo en (0, –3) , entonces $f'(0) = 0$ y $f(0) = -3$

Pendiente en $x = -1$ es 6 entonces $f'(-1) = 6$

Calculamos $f'(x) = 2ax + b$ y $f''(x) = 2a$

Aplicamos a los datos dados

$f(0) = -3$ $\quad a(0)^2 + b(0) + c = -3$ $\quad c = -3$

$f'(0) = 0$ $\quad 2a(0) + b = 0$ $\quad b = 0$

$f'(-1) = 6$ $\quad 2a(-1) + b = 6$ $\quad -2a+b = 6$

Resolviendo el sistema:

$a = -3$ $\quad b = 0$ $\quad c = -3$

$a = -3$, $b = 0$, $c = -3$ y $f(x) = -3x^2 - 3$

SECCIÓN 2

Bloque 1:

3. *El consumo por persona y semana de azúcar en España sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 60$ gramos. Se hizo un estudio y se observó que la media de consumo por semana de 50 personas fue de 200 gramos. Se pide:*

a) Calcula el intervalo de confianza del 95 % para el consumo medio por persona y semana de azúcar. (1 punto)

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ de consumo por persona y semana de azúcar es 220 gramos con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right)$$

Nos dan los siguientes datos:

$$\sigma = 60, \qquad 1 - \alpha = 0.95, \qquad \bar{x} = 200, \qquad n = 50$$

X: consumo azúcar semanal, X sigue una $N(\mu, 60)$

$$\alpha = 0.05\ ,\ \frac{\alpha}{2} = 0.025\ ,\ 1 - \frac{\propto}{2} = 0.975$$

Buscamos en la tabla: $Z_{1-\frac{\propto}{2}} = Z_{0.975} = 1.96.$

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right) = \left(200 - 1.96\frac{60}{\sqrt{50}}, \qquad 200 + 1.96\frac{0}{\sqrt{50}}\right) = (183.37, \qquad 216.63)$$

Intervalo de confianza: (183.37, 216.63)

b) Si se quiere que el intervalo de confianza tenga menor amplitud se debe aumentar el tamaño de la muestra o disminuir el nivel de confianza.

Aumentar el tamaño de la muestra o disminuir nivel de confianza.

c) Si el nivel de confianza fuese del 90 %, 95 % > 90 %, el intervalo de confianza tendría menor amplitud, como 220 ya no se encuentra en el intervalo anterior, al ser menor el nivel de confianza, la amplitud del intervalo va a ser menor y por tanto el valor 220 no va a estar en el intervalo, luego, se puede decir que la media poblacional no va a ser de 220.

No se puede afirmar que la media poblacional sea 220 con una probabilidad del 90 %

4. *De 100 alumnos que han terminado una titulación 6 no han encontrado trabajo el primer año.*

a) Calcula la proporción de alumnos que han encontrado trabajo el primer año. (0.25 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que si elegimos tres alumnos sin repetición, ninguno haya encontrado trabajo el primer año. (0.5 puntos)

c) Si elegimos tres alumnos al azar sin repetición y el primero no ha encontrado trabajo el primer año, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo y el tercero tampoco hayan encontrado trabajo el primer año? (0.75 puntos)

RESPUESTA

Sea T el suceso encontrar trabajo el primer año, $P(T)$ = 94/100 = 0.94

a) Como $P(T)$ *= 94/100 = 0.94*

El 94 % encuentran trabajo el primer año

b) Nos piden $P(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 \cap \overline{T}_3) = P(\overline{T}_1) \cdot P(\overline{T}_2/\overline{T}_1) \cdot P(\overline{T}_3/\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2) = \frac{6}{100} \cdot \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{100} = 0.00012$

La probabilidad de que de tres ninguno encuentre trabajo es de $\mathbf{0.00012}$

c) $P(\overline{T}_2 \cap \overline{T}_3/\overline{T}_1) = \frac{P(\overline{T}_2 \cap \overline{T}_3)}{P(\overline{T}_1)} = \frac{\frac{5}{100} \cdot \frac{4}{100}}{\frac{6}{100}} = \frac{20}{600} = \frac{1}{30} = 0.033$

La probabilidad de que el segundo y el tercero no encuentren trabajo cuando el primero no ha encontrado es de $\mathbf{0.033}$

Bloque 2:

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x<0 \\ t & si\ x=0 \\ (x-2)^2 & si\ x>0 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = 0. (0.5 puntos)

b) Para t = 2, representa gráficamente la función f(x). (1 punto)

RESPUESTA

a) $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x<0 \\ t & si\ x=0 \\ (x-2)^2 & si\ x>0 \end{cases}$ para que *f* sea continua en ***x* = 0,** los límites laterales en ***x* = 0** han de coincidir y su valor ser igual a *f*(0) = *t*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+2)^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-2)^2 = 4, \text{ igualamos, } t = 4$$

***f* es continua en *x* = 0 para *t* = 4**

b) Para *t* = 2 la función es:

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x<0 \\ 2 & si\ x=0 \\ (x-2)^2 & si\ x>0 \end{cases}$$

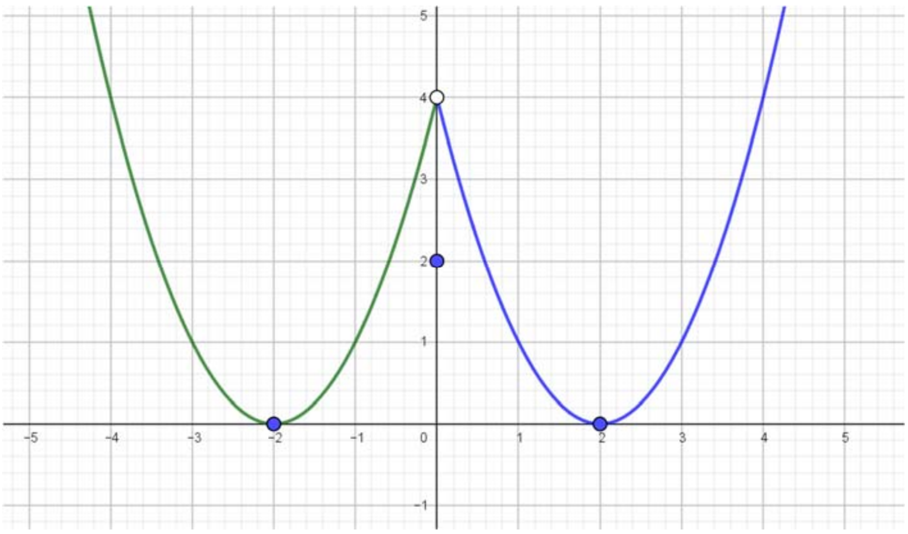
- Para $x < 0$ se trata de una parábola abierta hacia arriba, x^2+4x+4

con vértice en $x = -4/2 = -2$, (–2, 0), corte con el eje *Y* en (0, 4) y el eje *X* en (–2, 0)

- Para $x > 0$ se trata de una parábola abierta hacia arriba, x^2-4x+4

con vértice en $x = 4/2 = 2$, (2, 0), corte con el eje *Y* en (0, 4) y el eje *X* en (2, 0)

- Para $x = 0$, $f(0) = 2$.



4. *En un local se venden pizzas en porciones. Las ventas durante cuatro semanas consecutivas siguen la función:* $P(t) = -40t^2 + 240t + 540$, *con t=semanas y* $(1 \leq t \leq 4)$.

a) ¿Cuántas porciones han vendido durante los dos primeras semanas? (0.5 puntos)

b) ¿Durante qué semana se vendieron más porciones y cuántas fueron? (0.75 puntos)

c) ¿Qué semana vendieron menos? ¿Cuántas porciones? (0.75 puntos)

RESPUESTA

$$f(t) = -40t^2 + 240t + 540$$

a) Calculamos

$$f(2) = -40 \cdot 2^2 + 240 \cdot 2 + 540 = -160 + 480 + 540 = 860$$

En las dos primeras semanas se han vendido 860 porciones

b) Calculamos

$$f'(t) = -80t + 240$$

Resolvemos

$$-80t + 240 = 0\,, \quad t = 3$$

Calculamos

$f''(t) = -80 < 0$, luego en $x = 3$ hay un máximo relativo.

$$f(3) = -40 \cdot 3^2 + 240 \cdot 3 + 540 = -360 + 720 + 540 = 900$$

Cuando más se vende es 900 porciones la tercera semana.

c) La gráfica de la función es una parábola abierta hacia abajo con máximo en $t = 3$, el mínimo debe estar en los extremos, es decir, en $t = 1$ o en $t = 4$

$$f(1) = -40 \cdot 1^2 + 240 \cdot 1 + 540 = -40 + 240 + 540 = 700$$

$$f(4) = -40 \cdot 4^2 + 240 \cdot 4 + 540 = -640 + 960 + 540 = 800$$

Se vendieron menos porciones la primera semana, 700 porciones.

SECCIÓN 3

Bloque 1:

5. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ *y* $D = (-6 \quad 3)$

a) Calcula $A \cdot C + D^T$. *(0.5 puntos)*

b) Razona si A y B tienen matriz inversa (no es necesario calcularlas). (0.5 puntos)

c) ¿Qué dimensiones tienen las matrices resultantes de los producto $D \cdot C$ *y* $D^T \cdot C^T$*? (no es necesario hacer las multiplicaciones). (0.5 puntos)*

RESPUESTA

a) Escribimos $D^t = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot C + D^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A \cdot C + D^t = \begin{pmatrix} -6 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}}$$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix} = 9 - 3 = 6 \neq 0$, Por tanto A tiene inversa.

$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$, luego B no tiene inversa.

A tiene inversa y B no tiene.

c) El producto $D{\cdot}C$ es de matrices 2 x 1 y 1 x 2, por tanto su resultado es una matriz de orden 2 x 2.

En el producto de sus traspuestas sería 2 x 1 y 1 x 2 luego el resultado es de 2 x 2

Los dos productos dan una matriz de orden 2 x 2.

6. En un concesionario de motos disponen de 100 motos dispuestas para su venta. Las motos son de tres tipos: las que consumen gasolina únicamente, las que usan gasolina y aceite y las eléctricas. Las más numerosas son las que usan gasolina y aceite, y la diferencia entre la cantidad de estas y las de gasolina es igual a la mitad del número de eléctricas. La diferencia entre las de gasolina y las eléctricas es igual a la tercera parte de las que utilizan gasolina y aceite.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas motos hay de cada tipo. (1.5 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

RESPUESTA

Sea x el número de motos gasolina, y las de gasolina y aceite, z las eléctricas.

a)

Escribimos el sistema $\begin{cases} x+y+z=100 \\ y-x=\frac{1}{2}z \\ x-z=\frac{1}{3}y \end{cases}$

b) Ordenamos el sistema

$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 2x-2y+z=0 \\ 3x-y-3z=0 \end{cases}$ Calculamos $\begin{matrix} E'_2=-2E_1+E_2 \\ E'_3=-3E_1+E_3 \end{matrix}$ obtenemos

$\begin{cases} x+y+z=100 \\ -4y-z=-200 \\ -4y-6z=-300 \end{cases}$ Calculamos $E''_3=-E'_2+E'_3$, obtenemos

$\begin{cases} x+y+z=100 \\ -4y-z=-200 \\ -5z=-100 \end{cases}$ Ya podemos resolver

$z=20$, $y=45$, $x=35$

Hay 35 motos de gasolina, 45 motos de gasolina y aceite y 20 motos eléctricas.

Bloque 2:

5. *Según los datos de 2020, en la universidad española hay un porcentaje de 24.8 % de mujeres estudiando Grados de Informática, el resto son hombres. Además una mujer tiene una probabilidad de 0.95 de terminar informática, mientras que para los hombres es del 0.85.*

a) Elegido un estudiante al azar de informática, ¿cuál es la probabilidad de que consiga terminar la titulación? (0.75 puntos)

b) Sabiendo que un estudiante elegido al azar ha terminado informática, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (0.75 puntos)

RESPUESTA

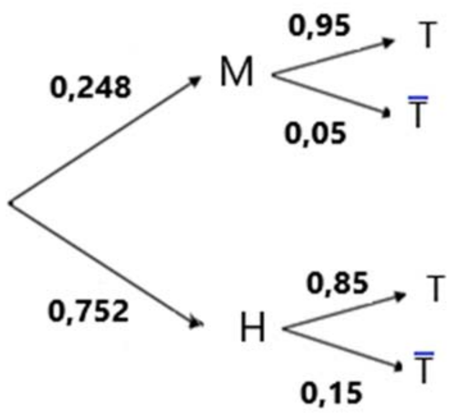
Escribimos las leyendas y construimos el diagrama de árbol:

M: mujeres estudian Informática

H: hombres estudian Informática

T: terminar el grado

$\overline{T}$: no terminar el grado



a) Por el teorema de la probabilidad total

$P(T) = P(M \cap T) + P(H \cap T) = P(M) \cdot P(T/M) + P(H) \cdot P(T/H) = 0.248 \cdot 0.95 + 0.752 \cdot 0.85 = 0.8748$

P(terminar la titulación) = 0.8748

b) Por el teorema de Bayes

$$P(M/T) = \frac{\mathrm{P(M \cap T)}}{\mathrm{P(T)}} = \frac{\mathrm{P(M) \cdot P(T/M)}}{\mathrm{P(T)}} = \frac{0.248 \cdot 0.95}{0.8748} = \frac{0.2356}{0.8748} = 0.2693$$

$\boldsymbol{P}(\text{ser mujer cuando ha terminado el grado}) = 0.2693$

6. *Se desea investigar la altura en cm de un tipo de planta, se sabe que la altura sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ =15 cm. Se tomó una muestra aleatoria de 400 plantas de ese tipo y se comprobó que la altura media de dicha muestra era de 110 cm.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la altura de ese tipo de planta, con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Se puede admitir que la media de altura μ de ese tipo de planta pueda ser de 109 cm con una confianza del 95 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

RESPUESTA

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

donde X es la variable "altura de la planta", X sigue una $N(\mu, 15)$

Nos dan los siguientes datos: $\sigma = 15$ $1-\alpha = 0.95$, n = 400, $\bar{x} = 110$.

$1-\alpha = 0.95$, $\alpha = 0.05$, $\frac{\alpha}{2} = 0.025$, $1-\frac{\alpha}{2} = 0.975$, buscamos en la tabla: $Z_{0.975} = 1.96$.

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(110 - 1.96\frac{15}{\sqrt{400}}, \quad 110 + 1.96\frac{15}{\sqrt{400}}\right) = (108.53, \quad 111.47)$$

Intervalo de confianza: (108.53, 111.47)

b) Si aumenta el nivel de confianza aumenta el valor de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ aumentando la amplitud del intervalo de confianza y viceversa.

Aumentar o disminuir la amplitud del intervalo respectivamente.

c) Como 109 se encuentra dentro del intervalo calculado al 95 %.

Se puede afirmar que la media de la altura de la planta será 109 con una probabilidad del 95 %