Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de GALICIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Dolores Vázquez Torrón

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3.33 puntos)** de los que se puede realizar un **MÁXIMO de 3** combinados como se quiera. Si se realizan más ejercicios de los permitidos, **solo se corregirán los tres primeros realizados.**

Problema 1: **Álgebra.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} m & 4 & 4\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

a) Determine para que valores de m existe la matriz inversa de A.

b) Despeje la matriz X tal que $XA+B=C$ e calcúlela para m=1.

Problema 2: **Álgebra.** Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y\le x+2 \qquad x+y\le 6 \qquad x\le 5 \qquad y\ge 0$$

a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices. b) Determine el punto o puntos de esa región en donde la función f(x, y) = x − y alcanza sus valores máximo y mínimo. c) Determine esos valores máximo y mínimo.

Problema 3: **Análisis.** La cantidad de CO_2 (en millones de toneladas) emitidas a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función

$$\boldsymbol{C(t)=\begin{cases} 5-\frac{t}{3} & ,\ 0\le t<6\\ \frac{1}{4}t^2-4t+18 & ,\ 6\le t\le 12\end{cases}}$$ siendo t el tiempo transcurrido en meses desde comienzo del año.

a) Estudie en qué períodos se ha producido un aumento/disminución de la cantidad de CO_2 emitida a la atmósfera.

b) ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de CO_2 emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?

c) Represente la gráfica de la función C(t) teniendo en cuenta el estudio realizado en los apartados anteriores.

Problema 4: **Análisis.** Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función

$B(t)=t^3-18t^2+81t-3$ si $0\le t\le 10$, (t en años)

a) ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año del estudio? **b)** Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios **c)** ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden? **d)** Calcule $\int_1^2 B(t)dt$

Problema 5: **Estadística y Probabilidad.** En una población el 45 % son hombres. El 27% de esa población resulta ser hombre y lector de prensa deportiva, mientras que un 38.5% es mujer y no lectora de esa prensa. a) De las mujeres, ¿qué porcentaje lee prensa deportiva? b) ¿Qué porcentaje es mujer o lee prensa deportiva? c) De los lectores de prensa deportiva, ¿qué porcentaje son hombres? d) ¿Son incompatibles los sucesos ser home y no leer prensa deportiva? Justifique la respuesta.

Problema 6: **Estadística y Probabilidad.** Una compañía de seguros quiere determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en sus prestaciones. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15%.

a) ¿De qué tamaño mínimo debería ser la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0.08 y un nivel de confianza del 95%?

Finalmente, se realiza el estudio con una muestra de 196 clientes, de los que 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. b) Calcule un intervalo de confianza, al 92%, para la proporción de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta. ¿Cuál es el error máximo cometido?

RESPUESTAS

Problema 1: Álgebra.

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Determine para que valores de m existe la matriz inversa de A.

b) Despeje la matriz X tal que $XA+B=C$ e calcúlela para $m = 1$.

Solución:

a) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2m \qquad |A|=0 \Leftrightarrow 2m=0 \Rightarrow \ m=0$$

$$\exists A^{-1} \quad \Leftrightarrow \text{si } m \neq 0$$

b) Despejamos teniendo en cuenta que el producto de matrices no es conmutativo por lo que multiplicaremos por la matriz inversa por el lado adecuado

$$XA+B=C \Rightarrow XA=C-B \Rightarrow XAA^{-1}=(C-B)A^{-1} \Rightarrow XI=(C-B)A^{-1} \Rightarrow$$

$$X=(C-B)A^{-1}$$

$$C-B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow AdjA=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (AdjA)^t=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A|=2$$

$$A^{-1}=\frac{(AdjA)^t}{|A|}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=(C-B)A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X=(C-B)A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}}$$

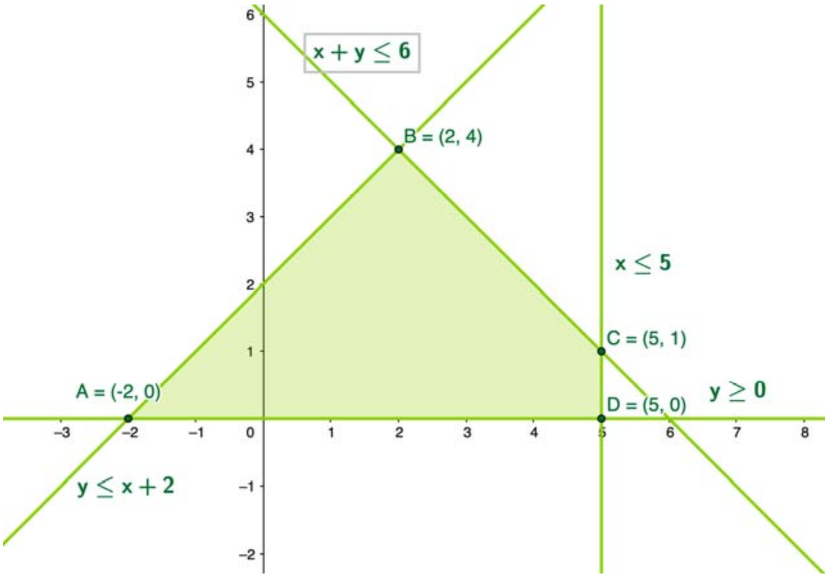
Problema 2: Álgebra.

Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y \le x + 2 \qquad x + y \le 6 \qquad x \le 5 \qquad y \ge 0$$

a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices. b) Determine el punto o puntos de esa región en donde la función $f(x, y) = x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. c) Determine esos valores máximo y mínimo.

Solución:



b-c) Calculamos los vértices de la región factible

A: $(y = 0) \cap (y = x+2) \Longrightarrow x = -2 \quad \Longrightarrow \quad A(-2, 0)$

B: $(y = x + 2) \cap (x + y) = 6$ resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow x + (x + 2) = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(2, 4)$$

C: $(x = 5) \cap (x + y = 6) \Rightarrow y = 1 \Rightarrow C(5, 1)$

D: $(x = 5) \cap (y = 0) \Rightarrow D(5, 0)$

Calculamos el valor de la función objetivo en los vértices de la región factible

$$z = f(x, y) = x - y$$

A: $f(-2, 0) = -2$

B: $f(2, 4) = 2 - 4 = -2$

C: $f(5, 1) = 5 - 1 = 4$

D: $f(5, 0) = 5$

La función objetivo alcanza su máximo en el punto D**(5, 0)** . Dicho máximo es **5**.

La función objetivo alcanza su mínimo en todos los puntos, de coordenadas reales, del segmento de extremos **A(-2, 0), B (2, 4)**. Dicho mínimo es **-2**

Problema 3: Análisis.

La cantidad de CO_2 (en millones de toneladas) emitidas a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función

$$C(t)=\begin{cases} 5-\dfrac{t}{3} & , \quad 0\le t<6 \\ \dfrac{1}{4}t^2-4t+18 & , \quad 6\le t\le 12 \end{cases}$$

siendo t el tiempo transcurrido en meses desde comienzo del año.

a) Estudie en qué períodos se ha producido un aumento/disminución de la cantidad de CO_2 emitida a la atmósfera.

b) ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de CO_2 emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?

Solución:

$C(t)$ en millones de toneladas.

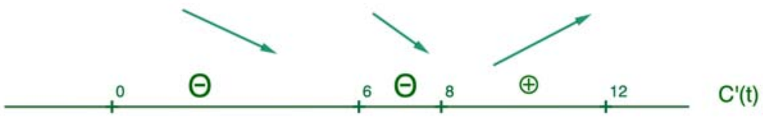
t en meses

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función

$$C'(t)=\begin{cases} -\frac{1}{3} & , \quad 0<t<6 \\ \frac{1}{2}t-4 & , \quad 6<t<12 \end{cases}$$

La derivada se anula en $C'(t)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}t-4=0 \Leftrightarrow t=8$

Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos determinados por los puntos en los que se anula la derivada primera y los puntos en los que cambia la definición de la función, siempre dentro del dominio de la función



Entre el primer y octavo mes se produce una disminución de las emisiones de CO_2 emitidas a la atmósfera.

Entre el octavo mes y final de año se produce un aumento de las emisiones de CO_2 emitidas a la atmósfera

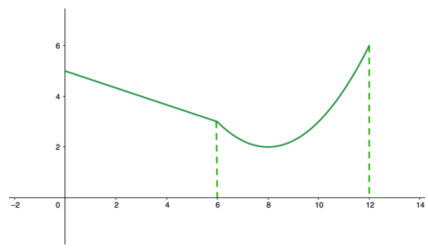
b) En el octavo mes se produce un mínimo de emisiones de CO_2 (función continua en el punto que pasa de ser decreciente a creciente) pero es necesario estudiar los valores de emisión en los extremos del intervalo [0,12], domino de la función para determinar los extremos absolutos.

$C(0) = 5$ $\qquad$ $C(12) = 6$ $\qquad$ $C(8) = 2$

En el octavo mes se produce un mínimo de emisiones de CO_2 (2 millones de toneladas)

En el doceavo mes se produce un máximo de emisiones de CO_2 (6 millones de toneladas)

Aunque no se pide, es conveniente hacer un esbozo de la gráfica de la función (recta de pendiente negativa y parábola) para verificar los resultados obtenidos



Problema 4: Análisis.

Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función

$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3$ si $0 \le t \le 10$, (t en años)

a) ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año del estudio? **b)** Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios **c)** ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden? **d)** Calcule $\int_1^2 B(t)dt$

Solución:

$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3$ si $0 \le t \le 10$, (t en años) $B(t)$ en miles de euros

a) $B(10) = 7$

La empresa obtuvo unos beneficios el último año de 7 000 €

b) Estudiamos el signo de la derivada primera en el intervalo de definición de la función. Para ello se determinan los valores en los que la derivada primera se anula

$$\mathrm{B}'(\mathrm{t}) = 3\mathrm{t}^2 - 36\mathrm{t} + 81$$

$B'(t) = 0$. Resolvemos la ecuación de segundo grado $3\mathrm{t}^2 - 36\mathrm{t} + 81 = 0 \quad \Longrightarrow t = 3,\ t = 9$

Los beneficios crecen en los tres primeros y durante el último año del estudio.

Los beneficios decrecen entre el tercer y noveno año.

c) En $t = 3$ la función tiene un máximo relativo (función continua que pasa de creciente a decreciente)
En $t = 9$ la función tiene un mínimo relativo (función continua que pasa de ser decreciente a creciente)
Estudiamos el valor de la función los valores extremos de su intervalo de definición y en los puntos anteriores para determinar los extremos absolutos:

$B(0) = -3$, $B(3) = 105$, $B(9) = -3$, $B(10) = 7$.

Los beneficios **máximos** se producen el tercer año y ascienden a **105 000 €**

Los beneficios **mínimos** (en este caso pérdidas) se producen en el momento inicial del estudio y en el noveno año con unas pérdidas de **3 000 €**

c) $\int_1^2 (t^3 - 18t^2 + 81t - 3)dt = \left[\frac{t^4}{4} - \frac{18}{3}t^3 + \frac{81t^2}{2} - 3t\right]_1^2 = \left[\frac{t^4}{4} - t^3 + \frac{81t^2}{2} - 3t\right]_1^2 =$

$$= \frac{2^4}{4} - 6 \cdot 2^3 + \frac{81 \cdot 2^2}{2} - 3 \cdot 2 - \left(\frac{1}{4} - 16 + \frac{81}{2} - 3\right) = \frac{321}{4}$$

$$\boldsymbol{\int_1^2 B(t)dt = \frac{321}{4}}$$

Problema 5: Estadística y Probabilidad.

En una población el 45 % son hombres. El 27% de esa población resulta ser hombre y lector de prensa deportiva, mientras que un 38.5% es mujer y no lectora de esa prensa. a) De las mujeres, ¿qué porcentaje lee prensa deportiva? b) ¿Qué porcentaje es mujer o lee prensa deportiva? c) De los lectores de prensa deportiva, ¿qué porcentaje son hombres? d) ¿Son incompatibles los sucesos ser home y no leer prensa deportiva? Justifique la respuesta.

Solución:

Definimos los sucesos

H: ser hombre

M : ser mujer

L: ser lector/a de prensa deportiva

$\bar{L}$: no ser lector/a de prensa deportiva

$P(H) = 0.45$ $P(H \cap L) = 0.27$ $P(M \cap \bar{L}) = 0.385$

Realizamos una tabla de contingencia

	H	M	
L	27	16.5	43.5
$\bar{L}$	18	38.5	56.5
	45	55	100

a) $P(L/M) = \frac{16.5}{55} = 0.3$

De las mujeres el **30 %** lee prensa deportiva

b) $P(M \cup L) = P(M) + P(L) - P(M \cap L) = \frac{55}{100} + \frac{43.5}{100} - \frac{16.5}{100} = 0.82$

El **82 %** son mujeres o leen la prensa deportiva

c) $P(H/L) = \frac{27}{43.5} = 0.62$

El **62 %** de los lectores de prensa deportiva son hombres

d) Los sucesos ser home y no leer prensa deportiva son compatibles ya que $P(H \cap \bar{L})$ = **0.18** $\neq 0$

Problema 6: Estadística y Probabilidad.

Una compañía de seguros quiere determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en sus prestaciones. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15 %.

a) ¿De qué tamaño mínimo debería ser la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0.08 y un nivel de confianza del 95 %?

Finalmente, se realiza el estudio con una muestra de 196 clientes, de los que 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. b) Calcule un intervalo de confianza, al 92 %, para la proporción de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta. ¿Cuál es el error máximo cometido?

Solución:

a) $\hat{p}$ = 0.15 proporción de clientes de la muestra que estaría dispuesto a aceptar subida de tarifas

$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.85$ Error < 0.08

Nivel de confianza 1 - α = 0.95

$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow P(Z \leq Z\alpha_{12}) = 0.975 \quad \Rightarrow \quad Z\alpha_{12} = 1.96$

Por ser el error menor que 0.08 resolvemos la inecuación

$E < 0.08 \Rightarrow 1.96\sqrt{\frac{0.1275}{n}} < 0.08 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.1275}{n}} < 0.041 \quad \Rightarrow \frac{0.1275}{n} < 0.001681 \Rightarrow 75.8 < n$

El tamaño mínimo de la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0.08 y un nivel de confianza del 95 % es de **76 personas**

b) $n = 196 \quad \hat{p} = \frac{37}{196} = 0.19 \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.81$

$1 - \alpha = 0.92 \Rightarrow \alpha = 0.08 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.04$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - 0.04 = 0.96 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1.75$

$$ICp_{0.92} = \left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \quad \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = \left(0.19 - 1.75\sqrt{\frac{0.154}{196}}, 0 - 19 + 1.75\sqrt{\frac{0.154}{196}}\right) = (0.14, 0.24)$$

$ICp_{0.92}$ = $(0.14,\ 0.24)$

El error es el radio (semiamplitud) del intervalo

$$E = \frac{0.24 - 0.14}{2} = 0.05$$

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3.33 puntos)** de los que se puede realizar un **MÁXIMO de 3** combinados como se quiera. Si se realizan más ejercicios de los permitidos, **solo se corregirán los tres primeros realizados.**

Problema .1: **Álgebra**. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$, $B = (a \quad 2 \quad 3)$ y $C = (4 \quad 0 \quad 2)$.

a) Determine los valores x, y, z para los cuales la matriz A no tiene inversa.

b) Calcule A^{-1} para $x = 3$, $y = 1$, $z = 0$.

c) Resuelva el sistema $B \cdot A = C$ para $a = 1$.

Problema .2: **Álgebra.** Un distribuidor de software informático, tiene entre sus clientes a empresas y a particulares. Al finalizar el año debe conseguir al menos 25 empresas como clientes en su cartera, y el número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Además, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Finalmente, cada empresa produce 386 euros de ingresos anuales, mientras que cada particular 229 euros.

a) Plantee el problema para maximizar los ingresos. **b)** Represente gráficamente el conjunto de soluciones.

c) ¿Cuál de esas soluciones le proporcionaría los mayores ingresos al finalizar el año? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

Problema .3: **Análisis**. Después de t horas de funcionamiento el rendimiento de una máquina (en una escala de 0 a 100) viene dado por la función $r(t) = \frac{kt}{t^2+4}$ con $t > 0$

a) Calcule K sabiendo que el rendimiento a las 4 horas es de 76.

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento del rendimiento durante las 7 primeras horas de funcionamiento. **c)** ¿En qué momento se consigue el rendimiento máximo?, ¿Cuál es su valor?

Problema .4: **Análisis**. Una empresa puede vender x unidades al mes de un determinado producto al precio de $518 - x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de $275x$ euros que dependen del número x de unidades.

a) Determine las funciones $I(x)$ y $B(x)$ que expresan los ingresos y beneficios obtenidos por la producción y venta de x unidades, respectivamente. ¿Qué beneficio se obtiene si se producen y se venden 10 unidades?

b) Calcule el número de unidades que hay que producir para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderían dichos beneficios? ¿Cuál sería el precio de venta de una unidad en ese caso?

Problema .5: **Estadística y Probabilidad.** El 40 % de las personas que visitan el Pórtico de la Gloria de la Catedral de Santiago son españolas. Se sabe además que 4 de cada 5 españoles están satisfechos con la visita, mientras que, entre los no españoles, no están satisfechos con la visita el 10 %.

a) Calcule el porcentaje de personas satisfechas con la visita.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté satisfecha con la visita y no sea española?

c) ¿Son independientes los sucesos "no ser español" y "estar satisfecho con la visita"? Razone la respuesta.

Problema .6: **Estadística y Probabilidad.** El peso de las naranjas para zumo recolectadas por un productor es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una media de $\mu = 200$ gramos y una desviación típica de $\sigma = 50$ gramos.

a) Si tomamos una muestra aleatoria de $n = 25$ naranjas, ¿cuál es la probabilidad de que su peso medio está comprendido entre 175 y 215 gramos? **b)** ¿De qué tamaño se ha tomado otra muestra aleatoria si la probabilidad de que el peso medio sea inferior a 210 gramos es del 97.72 %?

RESPUESTAS

Problema .1: Álgebra.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$, $B = (a \quad 2 \quad 3)$ y $C = (4 \quad 0 \quad 2)$.

a) Determine los valores x, y, z para los cuales la matriz A no tiene inversa.

b) Calcule A^{-1} para $x = 3$, $y = 1$, $z = 0$.

c) Resuelva el sistema $B \cdot A = C$ para $a = 1$.

Solución:

a) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = y^2 + xyz - xyz - y^2 z = y^2(1-z)$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow y(1-z) = 0 \Leftrightarrow y = 0, z = 1.$

Para $y = 0$, $z = 1$ y x cualquiera no existe la matriz inversa de A

b) $A = \begin{pmatrix} +3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 1 \neq 0$

$Adj\ A = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ 0 & -3 & +1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad (Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(AdjA)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Resolver $B \cdot A = C \Rightarrow (1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix} = (4 \quad 0 \quad 2)$

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 4 \\ y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases} \quad 3z = -y \Rightarrow x + 2y - y = 2 \Rightarrow x + y = 2$$

$$\begin{cases} x + 2y = 14 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = 2 - y \Rightarrow x = 3$$

$$3 - 2 + 3Z = 2 \Rightarrow z = \frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{x = 3, y = -1\,, z = \frac{1}{3}}$$

Problema .2: Álgebra.

Un distribuidor de software informático, tiene entre sus clientes a empresas y a particulares. Al finalizar el año debe conseguir al menos 25 empresas como clientes en su cartera, y el número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Además, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Finalmente, cada empresa produce 386 euros de ingresos anuales, mientras que cada particular 229 euros.

a) Plantee el problema para maximizar los ingresos. **b)** Represente gráficamente el conjunto de soluciones.

c) ¿Cuál de esas soluciones le proporcionaría los mayores ingresos al finalizar el año? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

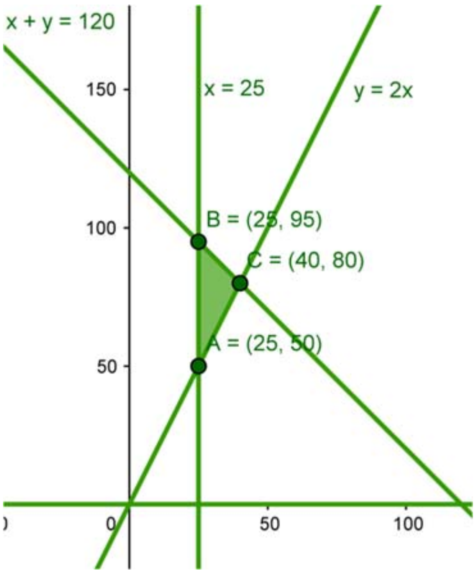
Solución:

a) X: nº de empresas
Y : nº particulares

Maximizar $z = f(x,y) = 386x + 229\text{y}$ sujeto a:

$$\begin{cases} x \geq 25 & r_1 \\ y \geq 2x & r_2 \\ x + y \leq 120 & r_3 \\ x > 0 \, , y \geq 0 & r_4 \; \textit{no necesarias por estar consideradas en las anteriores} \end{cases}$$

b)



A: $x = 25 \cap y = 2x \Longrightarrow A(25,50)$

B: $x = 25 \cap x + y = 120 \Longrightarrow B(25,95)$

C: $y = 2x \cap x + y = 120 \Longrightarrow x = \frac{120}{3} = 40 \Rightarrow y = 80 \Longrightarrow C(40,80)$

c) $z = f(x,y) = 386x + 229y$

$A \to f(25,50) = 21\,100$ €

$B \to f(25,95) = 31\,405$ €

$C \to f(40,80) = 33\,760$ €

Los mayores ingresos, que ascienden a **33 760 €**, se corresponden con **40** clientes de empresa y **80** particulares

Problema .3: Análisis.

Después de t horas de funcionamiento el rendimiento de una máquina (en una escala de 0 a 100) viene dado por la función $r(t) = \frac{kt}{t^2+4}$ con $t > 0$

a) Calcule K sabiendo que el rendimiento a las 4 horas es de 76.
b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento del rendimiento durante las 7 primeras horas de funcionamiento. **c)** ¿En qué momento se consigue el rendimiento máximo?, ¿Cuál es su valor?

Solución:

a) $\mathbf{r}(4) = 76 \Longrightarrow \frac{4k}{4^2+4} = 76 \ \Longrightarrow k = \frac{76\cdot 20}{4} = 380 \ \Longrightarrow$ $\quad \boldsymbol{k = 380}$

b) $r(t) = \frac{380t}{t^2+4}$

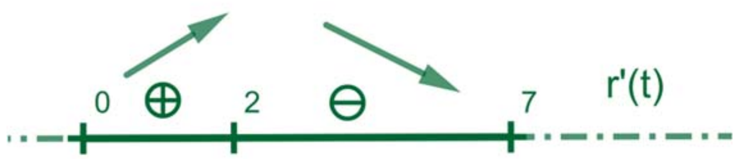
Para estudiar el crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de la derivada primera en su dominio de definición

$$\mathrm{r}'(\mathrm{t}) = \frac{380(\mathrm{t}^2+4) - 380\mathrm{t}\cdot 2\mathrm{t}}{(\mathrm{t}^2+4)^2} = \frac{-380\mathrm{t}^2+1520}{(\mathrm{t}^2+4)^2}$$

Estudiamos para qué valores se anula esta derivada resolviendo la ecuación $\frac{-380\mathrm{t}^2+1520}{(\mathrm{t}^2+4)^2} = 0$

$r'(t) = 0 \Longrightarrow t^2 = 4 \ \Longrightarrow \ t = 2$ (t = -2 no pertenece al dominio de definición de la función)

Estudiamos el signo de la derivada primera



El rendimiento de la máquina aumenta durante las dos primeras horas y disminuye en las siguientes

c) La función es continua en su dominio y en $t = 2$ y pasa de ser creciente a decreciente por lo tanto en ese valor $t = 2$ la función alcanza un máximo relativo siendo el valor del rendimiento $r(2)$ = 95 en una escala de 0 a 100

También podría estudiarse el signo de la derivada segunda en el punto $t = 2$

$$r''(t) = \frac{-760t(t^2+4)^2 - (-380t^2+1520)2(t^2+4)2t}{(t^2+4)^4}$$

$$r''(2) < 0 \ \Longrightarrow t = 2 \text{ máximo relativo}$$

Por lo tanto, el rendimiento de la máquina es máximo el segundo año ($t = 2$) siendo el valor del rendimiento $r(2)$ = 95 en una escala de 0 a 100

Problema .4: Análisis.

Una empresa puede vender x unidades al mes de un determinado producto al precio de $\mathbf{518 - x^2}$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de 275x euros que dependen del número x de unidades.

a) Determine las funciones $I(x)$ y $B(x)$ que expresan los ingresos y beneficios obtenidos por la producción y venta de x unidades, respectivamente. ¿Qué beneficio se obtiene si se producen y se venden 10 unidades?

b) Calcule el número de unidades que hay que producir para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderían dichos beneficios? ¿Cuál sería el precio de venta de una unidad en ese caso?

Solución:

a) x unidades que puede vender al mes

518 - x^2 precio por unidad vendida

Gastos $G(x)$ = 225 + 275x

Función ingresos $I(x) = x(518 - x^2) = 518x - x^3$

Función beneficios $B(x) = I(x) - G(x) = -x^3 + 243x - 225$

$B(10)$ = 1 205 €

Si se producen y venden **10 unidades** se obtiene un beneficio de **1 205 €**

b) Calculamos la derivada primera y estudiamos para que valores se anula con el fin de determinar los posibles extremos de la función beneficio

$$B'(x) = -3x^2 + 243$$

$B'(x) = 0 \iff x^2 = 81 \iff x = 9$ ($x = -9$ no es un punto del dominio de la función beneficio [0, ∞))

Estudiamos el signo de la segunda derivada en $x = 9$

$$B''(x) = -6x$$

$B''(9) < 0 \Longrightarrow x = 9$ la función beneficio alcanza un máximo

Vendiendo **9** unidades al mes se alcanza un beneficio máximo de **1 233 €**. El precio de venta de una unidad en este caso sería de **437 €** (518 - 9^2)

Autora: Dolores Vázquez Torrón
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema .5: Estadística y Probabilidad.

El 40 % de las personas que visitan el Pórtico de la Gloria de la Catedral de Santiago son españolas. Se sabe además que 4 de cada 5 españoles están satisfechos con la visita, mientras que, entre los no españoles, no están satisfechos con la visita el 10 %.

a) Calcule el porcentaje de personas satisfechas con la visita.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté satisfecha con la visita y no sea española?

c) ¿Son independientes los sucesos "no ser español" y "estar satisfecho con la visita"? Razone la respuesta.

Solución:

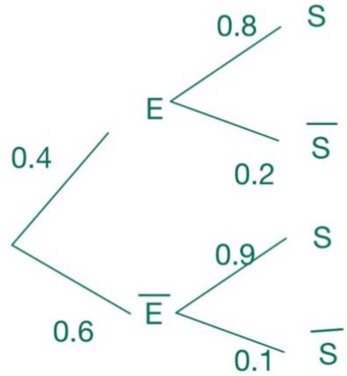
E- ser español/a $\qquad$ $\bar{E}$- no ser español/a

S- Quedar satisfecho/a con la visita al Pórtico de la Gloria $\bar{S}$- no quedar satisfecho/a

$P(E) = 0.4$

$P(S/E) = 4/5 = 0.8$

$P(\bar{S}/\bar{E}) = 0.1$



a) Por el teorema de las probabilidades totales

$P(S) = P(E) \cdot P(S/E) + P(\bar{E}) \cdot P(S/\bar{E}) = 0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.9 = 0.86$

El **86 %** de las personas que visitan el Pórtico de la Gloria están satisfechas con la visita

b) $P(S \cap \bar{E}) = P(\bar{E}) \cdot P(S/\bar{E}) = 0.6 \cdot 0.9 = 0.54$

La probabilidad de que una persona esté satisfecha con la visita y no sea española es de **0.54**

c) $P(S/\bar{E}) = 0.9$

$P(S) = 0.86$

$P(S/\bar{E}) \neq P(S)$ por lo tanto los sucesos "no ser español" y "estar satisfecho con la visita" NO son independientes

También se podría comprobar que $0.94 = P(S \cap \bar{E}) \neq P(S) \cdot P(\bar{E}) = 0.86 \cdot 0.6 = 0.516$

Problema .6: Estadística y Probabilidad.

El peso de las naranjas para zumo recolectadas por un productor es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una media de $\mu = 200$ gramos y una desviación típica de $\sigma = 50$ gramos.

a) Si tomamos una muestra aleatoria de $n = 25$ naranjas, ¿cuál es la probabilidad de que su peso medio está comprendido entre 175 y 215 gramos?

b) ¿De qué tamaño se ha tomado otra muestra aleatoria si la probabilidad de que el peso medio sea inferior a 210 gramos es del 97.72 %?

Solución:

a) Definimos la variable X peso de las naranjas para zumo.

$X \equiv N(200, 50)$

La distribución de la media muestra para n=25l es $\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(200, \frac{50}{\sqrt{25}}\right) = N(200, 10)$

Tipificando $Z = \frac{\bar{X}-200}{10} \equiv N(0, 1)$

$$P(175 \leq \bar{X} \leq 215) = P(\bar{X} \leq 215) - P(\bar{X} \leq 175) = P\left(Z \leq \frac{215-200}{10}\right) - P\left(Z \leq \frac{175-200}{10}\right) =$$

$$= P(Z \leq 1.5) - P(Z \leq -2.5) = P(Z \leq 1.5) - \left(1 - P(Z \leq 2.5)\right) = 0.9332 - (1 - 0.9938) = 0.92$$

La probabilidad de que el peso medio de las naranjas, en una muestra de 25, está comprendido entre 175 y 215 gramos es de **0.92**

b) $P(\bar{X} \leq 210) = 0.9772$

$\bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(200, \frac{50}{\sqrt{n}}\right)$ tipificando $Z = \frac{\bar{X}-200}{\frac{50}{,\sqrt{n}}} \equiv N(0, 1)$

$P\left(Z \leq \frac{210-200}{\frac{50}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z \leq \frac{10}{\frac{50}{\sqrt{n}}}\right)$ = 0.9772

Buscando en la tabla de la distribución N(0, 1) de forma inversa

$$\frac{10}{\frac{50}{\sqrt{n}}} = 2 \Longrightarrow 10\sqrt{n} = 100 \Longrightarrow \sqrt{n} = 10 \Longrightarrow n = 100$$

Se debe tomar una muestra de tamaño **100 naranjas** para que la probabilidad de que el peso medio sea inferior a 210 gramos sea del 97.72 %