Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

BY NC SA

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con tres ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a dos de un bloque y a uno de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuesta a qué cuatro ejercicios se responden en el examen. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1:

Discute el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x - ay + 2az = 5 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$, en función del parámetro a. Resuelve el sistema si $a = 1$.

Problema 2:

Consideramos la ecuación matricial: $X^2 - X = 2I$, donde I es la matriz identidad.

$a)$ ¿Qué matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cumplen la ecuación?

$b)$ ¿Se puede expresar en general la diferencia $X^2 - X$ como producto de matrices?

$c)$ Si X es una matriz cuadrada de orden n que cumple la ecuación, ¿cuál es su rango?

Problema 3:

En el proceso de fabricación de cierta pintura se mezcla una cantidad (x) de polvo sintético con una cantidad (y) de polvo de un mineral. Se imponen las siguientes restricciones:

$x + 2y \leq 6 \Rightarrow$ (para no rebasar un nivel de toxicidad en el proceso).

$5x + 4y \leq 20 \Rightarrow$ (para mantener la gama de color adecuada).

$y \leq x \Rightarrow$ (para que la viscosidad no sea excesiva).

$a)$ Dibuja en el plano la región factible de cantidades x e y que cumplen las restricciones.

$b)$ ¿Cuál es la máxima cantidad de polvo de mineral que podemos usar?

$c)$ ¿Cuál es la cantidad máxima posible de polvo $(x + y)$ que permiten las restricciones y cuánto incluye de cada tipo?

Bloque 2. Análisis.

Problema 4:

Nos preguntamos por las propiedades de una función de la forma $f(x) = \frac{x(x+b)}{x^2-1}$.

$a)$ ¿Para qué valores de b su gráfica tiene una sola asíntota vertical?

$b)$ Estudia la existencia de extremos relativos de $f(x)$ si $b = -2$.

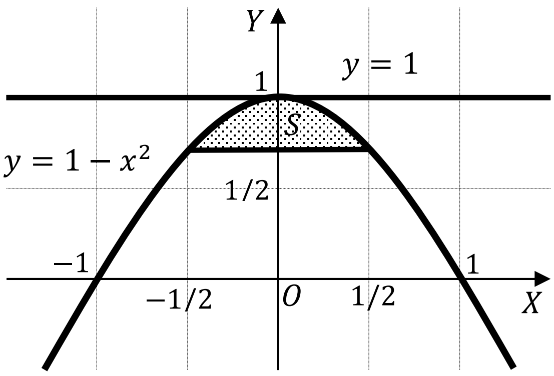
Textos Marea Verde

Problema 5:

Queremos definir una función por trozos, de forma que quede definida en el intervalo $[-2,2]$ según: $f(x)=\begin{cases}3-2x & si\ \ x\in[-2,a)\\ x+4 & si\ \ x\in[a,b)\\ \frac{5}{x} & si\ \ x\in[b,2]\end{cases}$. Calcula los valores de a y b necesarios para que f sea continua, y representa la función gráficamente.

Problema 6:

Calcula el área de la región sombreada de la figura.



Bloque 3. Estadística y probabilidad.

Problema 7:

Jorge y Laura juegan con dados. Los dados son equilibrados y, como es habitual, las caras están numeradas del 1 al 6. Jorge echa un dado, y a continuación Laura echa otro. Laura gana si la diferencia entre los dos resultados obtenidos es (en valor absoluto) mayor que 1.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de Laura?

b) Si han jugado y ha ganado Laura, ¿cuál es la probabilidad de que Jorge haya sacado un 6?

Problema 8:

Una bodega de Rioja elabora vinos blancos, de crianza y reservas de gran calidad. Su producción consiste en un 35 % de vino blanco, un 40 % de vino de crianza y un 25 % de reservas. Aunque tiene mucho cuidado en la selección de los corchos, la probabilidad de que alguna botella se estropee por razón de un corcho inadecuado es del 5 % para el vino blanco, 4 % para el vino de crianza y 2 % para el vino de reserva.

a) Se elige una botella de la bodega al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el vino esté estropeado?

b) Hemos elegido una botella de vino tinto al azar (crianza o reserva), ¿cuál es la probabilidad de que el vino NO esté estropeado?

Problema 9:

Una máquina produce bolas de billar, y sabemos que su peso sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 gr.

a) Si el peso medio de las bolas fuese 165 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 100 bolas supere los 168 gr?

b) El promedio en una muestra de 100 bolas es de 165 gr. Determina un intervalo con el 90 % de confianza para la media del peso de las bolas que produce la máquina.

Textos Marea Verde

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1:

Discute el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + ay = 1 \\ 2x - ay + 2az = 5 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$, en función del parámetro a. Resuelve el sistema si $a = 1$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 2 & -a & 2a & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = a + 2a^2 - 6a + 2a = 0;\;\; 2a^2 - 3a = 0;$$

$a(2a-3) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = \frac{3}{2}$.

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq 3/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = -3C_3\} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 15 = -12 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$Para\ a = \frac{3}{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. A efectos de rango la matriz M' es equivalente a la matriz $M'' = 2 \cdot M' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & 10 \\ 2 & 6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$Rang\ M'' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & 10 \\ 2 & 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_3 \to \tfrac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & 10 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 - F_2 - 4F_1 \\ F_3 - F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & 10 & 10 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \to \tfrac{1}{5}F_3\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M'' = Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = \tfrac{3}{2} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Textos Marea Verde

Para $a=1$; el sistema resulta $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y+2z=5 \\ x+3y-z=0 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{2\cdot 1^2-3\cdot 1}=\frac{1-6+5}{-1}=\frac{0}{-1}=0. \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-5+2+2}{-1}=\frac{-1}{-1}=1.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{6+5+1-15}{-1}=\frac{-3}{-1}=3.$$

$\underline{Solución: \boldsymbol{x=0};\ \ \boldsymbol{y=1};\ \ \boldsymbol{z=3}.}$

Problema 2:

Consideramos la ecuación matricial: $X^2 - X = 2I$, donde I es la matriz identidad.

$a)$ ¿Qué matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cumplen la ecuación?

$b)$ ¿Se puede expresar en general la diferencia $X^2 - X$ como producto de matrices?

$c)$ Si X es una matriz cuadrada de orden n que cumple la ecuación, ¿cuál es su rango?

Solución:

$a)$ $\quad X^2 - X = 2I \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2I;$

$\begin{pmatrix} a^2 & ab-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2I;\ \begin{pmatrix} a^2-a & ab-2b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2-a=2 \\ ab-2b=0 \end{matrix}\right\};$

$\left.\begin{matrix} a(a-1)=2 \\ b(a-2)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 2\ y\ \forall b \in R.$

$\underline{Cumplen\ la\ ecuación\ las\ matrices\ de\ la\ forma\ \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1} \end{pmatrix}, \forall \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}}.$

$b)$ $\quad X^2 - X = 2I;\ X \cdot (X - I) = 2I.$

$\underline{Puede\ hacerse, siempre\ que\ las\ matrices\ X\ sean\ \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1} \end{pmatrix}, \forall \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}}.$

$c)$ $\quad X^2 - X = 2I;\ X \cdot (X - I) = 2I;\ \frac{1}{2} \cdot X \cdot (X - I) = I;\ X \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (X - I)\right] = I \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (X - I) = X^{-1}$. Como existe la inversa de X es, necesariamente, $|X| \neq 0$, por lo cual, su rango coincide con la dimensión de la matriz X.

$\underline{\boldsymbol{Rang\ X = n.}}$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Textos Marea Verde

Problema 3:

En el proceso de fabricación de cierta pintura se mezcla una cantidad (x) de polvo sintético con una cantidad (y) de polvo de un mineral. Se imponen las siguientes restricciones:

$x + 2y \leq 6 \Rightarrow$ (para no rebasar un nivel de toxicidad en el proceso).

$5x + 4y \leq 20 \Rightarrow$ (para mantener la gama de color adecuada).

$y \leq x \Rightarrow$ (para que la viscosidad no sea excesiva).

$a)$ Dibuja en el plano la región factible de cantidades x e y que cumplen las restricciones.

$b)$ ¿Cuál es la máxima cantidad de polvo de mineral que podemos usar?

$c)$ ¿Cuál es la cantidad máxima posible de polvo $(x + y)$ que permiten las restricciones y cuánto incluye de cada tipo?

Solución:

x	0	4
y	5	0

$a)$ Las condiciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} x + 2y \leq 6 \\ 5x + 4y \leq 20 \\ y \leq x \\ x \geq 5;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$

x	0	6
y	3	0

① $\Rightarrow x + 2y \leq 6 \Rightarrow y \leq \frac{6-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

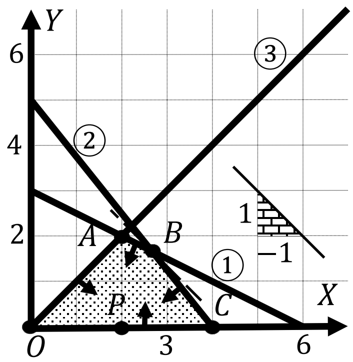
② $\Rightarrow 5x + 4y \leq 20 \Rightarrow y \leq \frac{20-5x}{4} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

③ $\Rightarrow y \geq x \Rightarrow P(2,0) \rightarrow Si.$

x	0	6
y	0	6

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = x \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 6;\ \ x = 2 \Rightarrow A(2,2).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 6 \\ 5x + 4y = 20 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x - 4y = -12 \\ 5x + 4y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$3x = 8;\ \ x = \frac{8}{3};\ \ \frac{8}{3} + 2y = 6;\ \ 8 + 6y = 18;\ \ 3y = 5;\ \ y = \frac{5}{3} \Rightarrow B\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 5x + 4y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x = 20;\ \ x = 4 \Rightarrow C(4,0).$

$b)$ La función de objetivos: $f(x,y) = x + y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(2,2) = 2 + 2 = 4.$

$B \Rightarrow f\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{8}{3} + \frac{5}{3} = \frac{13}{3} = 4.33.$

$C \Rightarrow f(4,0) = 4 + 0 = 4.$

El valor máximo se produce en el punto $B\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right).$

Textos Marea Verde

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{1}x \Rightarrow m = -\frac{1}{1}$.

De la observación de la figura se deduce que el mayor valor de y (polvo de mineral) se produce en el punto $A(2, 2)$, por lo cual:

$\underline{La\ mayor\ cantidad\ de\ polvo\ de\ mineral\ que\ se\ puede\ usar\ es\ de\ 2\ unidades}.$

$c)\ \underline{La\ mayor\ canatidad\ de\ polvo\ que\ se\ puede\ usar\ es\ de\ 13/3\ unidades}.$

$\underline{La\ proporción\ de\ polvos\ sintético\ y\ mineral\ usado\ es\ 8\ y\ 5, respectivamente}.$

Textos Marea Verde

Bloque 2. Análisis.

Problema 4:

Nos preguntamos por las propiedades de una función de la forma $f(x)=\frac{x(x+b)}{x^2-1}$.

$a)$ ¿Para qué valores de b su gráfica tiene una sola asíntota vertical?

$b)$ Estudia la existencia de extremos relativos de $f(x)$ si $b=-2$.

Solución:

$a)$ Las propiedades generales de las funciones racionales son las siguientes:

1.--- Su dominio de definición son los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

2.--- Tiene asíntotas horizontales cuando el grado del denominador es mayor que el grado del numerador.

3.--- Tiene asíntotas oblicuas cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

Las asíntotas verticales son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$x^2-1=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=1.$

En principio, las rectas $x=-1$ y $x=1$ serían asíntotas verticales, pero nos dicen que $f(x)$ debe tener una sola asíntota vertical, por lo cual tiene que poder simplificarse la función, de la forma siguiente:

$$f(x)=\frac{x(x+b)}{x^2-1}=\frac{x(x+b)}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow b=-1 \text{ o } b$$

$$\underline{f(x) \text{ tiene una sola asíntota vertical para } \mathbf{b}=-\mathbf{1} \text{ o para } \mathbf{b}=\mathbf{1}}.$$

$b)$ Para $b=-2 \Rightarrow f(x)=\frac{x(x-2)}{x^2-1}=\frac{x^2-2x}{x^2-1}$.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2-1)-x(x-2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^2+2-2x^3+4x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^2-2x+2}{(x^2-1)^2}=\frac{2(x^2-x+1)}{(x^2-1)^2}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2(x^2-x+1)}{(x^2-1)^2}=0;\;\; x^2-x+1=0;\;\; x=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2-x+1>0, \forall x \in R.$

$$\underline{Para\ b=-2\ la\ función\ f(x)\ no\ tiene\ extremos\ relativos}.$$

Textos Marea Verde

Problema 5:

Queremos definir una función por trozos, de forma que quede definida en el intervalo $[-2,2]$ según: $f(x)=\begin{cases}3-2x\ \ si\ \ x\in[-2,a)\\ x+4\ \ si\ \ x\in[a,b)\\ \frac{5}{x}\ \ si\ \ x\in[b,2]\end{cases}$. Calcula los valores de a y b necesarios para que f sea continua, y representa la función gráficamente.

Solución:

La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para $x=a$ y $x=b$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=a\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a}(3-2x)=3-2a\\ \lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a}(x+4)=a+4=f(a)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)\Rightarrow 3-2a=a+4;\ \ 3a=-1\Rightarrow a=-\tfrac{1}{3}.$$

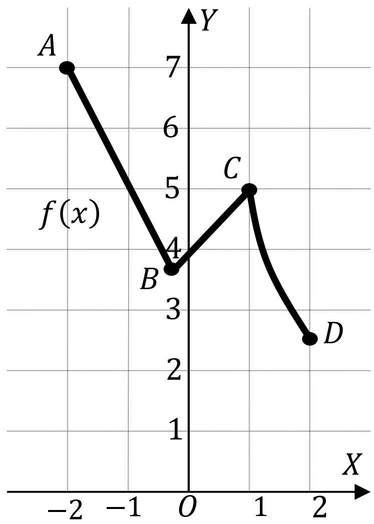
$$Para\ x=b\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\lim\limits_{x\to b}(x+4)=b+4\\ \lim\limits_{x\to b^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b}\frac{5}{x}=\frac{5}{b}=f(b)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to b^-}f(x)=\lim_{x\to b^+}f(x)=f(b)\Rightarrow b+4=\tfrac{5}{b};\ \ b^2+4b-5=0;$$

$$b=\tfrac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\tfrac{-4\pm\sqrt{36}}{2}=\tfrac{-4\pm 6}{2}=-2\pm 3\Rightarrow b_1=-5\notin D(f)\ \Rightarrow b=1.$$

<u>*La función $f(x)$ es continua en su dominio para $\boldsymbol{a}=-\frac{1}{3}$ y $\boldsymbol{b}=\mathbf{1}$.*</u>

La función resulta $f(x)=\begin{cases}3-2x\ \ si\ \ x\in\left[-2,-\frac{1}{3}\right)\\ x+4\ \ si\ \ x\in\left[-\frac{1}{3},1\right)\\ \frac{5}{x}\ \ si\ \ x\in[1,2]\end{cases}$.



Para la representación gráfica de la función se tiene en cuenta que en el intervalo $\left[-2,-\frac{1}{3}\right)$ la función es un segmento de extremos A y B, siendo:

$A\Rightarrow f(-2)=3-2\cdot(-2)=3+4=7\Rightarrow A(-2,7)$.

$B\Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right)=3-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}\Rightarrow B\left(-\frac{1}{3},\frac{11}{3}\right)$.

En el intervalo $\left[-\frac{1}{3},1\right)$ la función es un segmento de extremos B y C, siendo: $C\Rightarrow f(1)=1+4=5\Rightarrow C(1,5)$.

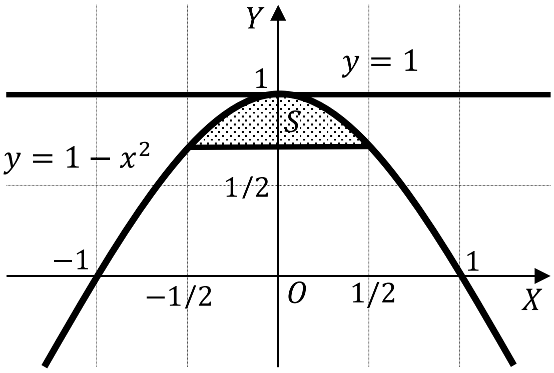
En el intervalo $[1,2]$ la función es una rama hiperbólica de extremos los puntos C y D, siendo: $D\Rightarrow f(2)=\frac{5}{2}\Rightarrow D\left(2,\frac{5}{2}\right)$.

La representación gráfica, aproximada, es la que indica la figura adjunta.

Textos Marea Verde

Problema 6:

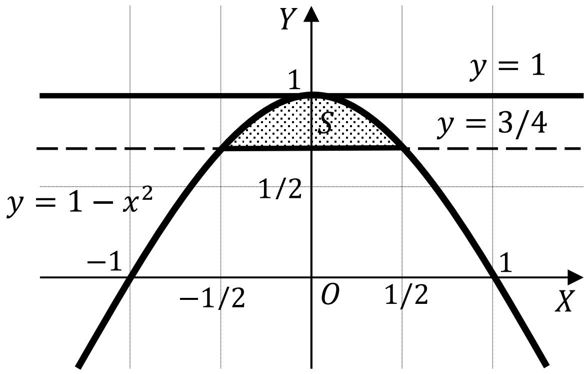
Calcula el área de la región sombreada de la figura.



Solución:

$y\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

Considerando que la parábola $y = 1 - x^2$ es simétrica con respecto al eje de ordenadas por ser $y(-x) = y(x)$ y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S = 2 \cdot \int_0^{1/2} \left[(1 - x^2) - \frac{3}{4}\right] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{1/2} \left(1 - x^2 - \frac{3}{4}\right) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x^2\right) \cdot dx = \left[\frac{x}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left[\frac{\frac{1}{2}}{4} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}\right] - 2 \cdot 0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{3 - 1}{12} = \frac{2}{12} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{1}{6}\, \boldsymbol{u^2} \cong \mathbf{0.17}\, \boldsymbol{u^2}.}$$

Textos Marea Verde

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

Problema 7:

Jorge y Laura juegan con dados. Los dados son equilibrados y, como es habitual, las caras están numeradas del 1 al 6. Jorge echa un dado, y a continuación Laura echa otro. Laura gana si la diferencia entre los dos resultados obtenidos es (en valor absoluto) mayor que 1.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de Laura?

b) Si han jugado y ha ganado Laura, ¿cuál es la probabilidad de que Jorge haya sacado un 6?

Solución:

a) El espacio muestral es $E = \left\{ \begin{array}{l} 11, 12, \underline{13}, \underline{14}, \underline{15}, \underline{16} \\ 21, 22, 23, \underline{24}, \underline{25}, \underline{26} \\ \underline{31}, 32, 33, 34, \underline{35}, \underline{36} \\ \underline{41}, \underline{42}, 43, 44, 45, \underline{46} \\ \underline{51}, \underline{52}, \underline{53}, 54, 55, 56 \\ \underline{61}, \underline{62}, \underline{63}, \underline{64}, 65, 66 \end{array} \right\}$, donde aparecen subrayados los casos favorables a que gane Laura.

Aplicando el concepto básico de probabilidad, es decir, la regla de Laplace:

$$p = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{20}{36} \Rightarrow \underline{p = \frac{5}{9} = 0.5556.}$$

La probabilidad de ganar de Laura es de $\frac{5}{9} = \mathbf{0.5556}$

b) Repitiendo el proceso seguido en el apartado anterior, se trata de aplicar la regla de Laplace de nuevo, donde los casos posibles son los 20 casos en que gana Laura y los casos favorables son los que la segunda cifra es un 6:

$$E = \left\{ \begin{array}{l} 11, 12, \underline{13}, \underline{14}, \underline{15}, \underline{16} \\ 21, 22, 23, \underline{24}, \underline{25}, \underline{26} \\ \underline{31}, 32, 33, 34, \underline{35}, \underline{36} \\ \underline{41}, \underline{42}, 43, 44, 45, \underline{46} \\ \underline{51}, \underline{52}, \underline{53}, 54, 55, 56 \\ \underline{61}, \underline{62}, \underline{63}, \underline{64}, 65, 66 \end{array} \right\}$$

$$p = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{4}{20} \Rightarrow \underline{p = \frac{1}{5} = 0.2.}$$

Si han jugado y ha ganado Laura, la probabilidad de que Jorge haya sacado un 6 es $\frac{1}{5} = \mathbf{0.2}$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es

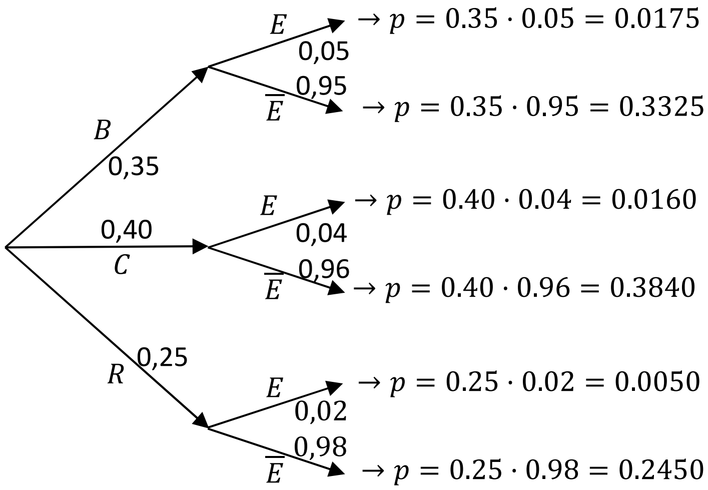
Problema 8:

Una bodega de Rioja elabora vinos blancos, de crianza y reservas de gran calidad. Su producción consiste en un 35 % de vino blanco, un 40 % de vino de crianza y un 25 % de reservas. Aunque tiene mucho cuidado en la selección de los corchos, la probabilidad de que alguna botella se estropee por razón de un corcho inadecuado es del 5 % para el vino blanco, 4 % para el vino de crianza y 2 % para el vino de reserva.

a) Se elige una botella de la bodega al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el vino esté estropeado?

b) Hemos elegido una botella de vino tinto al azar (crianza o reserva), ¿cuál es la probabilidad de que el vino NO esté estropeado?

Solución:



a) $\quad P = P(E) = P(B \cap E) + P(C \cap E) + P(R \cap E) =$

$= P(B) \cdot P(E/B) + P(C) \cdot P(E/C) + P(R) \cdot P(E/R) =$

$= 0.35 \cdot 0.05 + 0.40 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.02 = 0.0175 + 0.0160 + 0.0050 =$

$= \underline{0.0385}$.

La probabilidad de que el vino esté estropeado es de $\underline{\mathbf{0.0385}}$.

b) $P = P(\overline{E}/C \cup R) = \frac{P[\overline{E} \cap (C \cap R)]}{P(C \cup R)} = \frac{P(C \cap \overline{E}) + P(R \cap \overline{E})}{P(C \cup R)} = \frac{P(C) \cdot P(\overline{E}/C) + P(R) \cdot P(\overline{E}/R)}{P(C \cup R)} =$

$= \frac{0.40 \cdot 0.96 + 0.25 \cdot 0.98}{0.40 + 0.25} = \frac{0.3840 + 0.2450}{0.65} = \frac{0.6290}{0.65} = \underline{0.9677}$.

Hemos elegido una botella de vino tinto al azar, la probabilidad de que el vino NO esté estropeado es de $\underline{\mathbf{0.9677}}$

Textos Marea Verde

Problema 9:

Una máquina produce bolas de billar, y sabemos que su peso sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 gr.

a) Si el peso medio de las bolas fuese 165 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 100 bolas supere los 168 gr?

b) El promedio en una muestra de 100 bolas es de 165 gr. Determina un intervalo con el 90 % de confianza para la media del peso de las bolas que produce la máquina.

Solución:

$a)\ Datos:\ \mu = 165;\ \ n = 100 \Rightarrow \sigma = 20.$

$\overline{X} \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(165, \frac{20}{\sqrt{100}}\right) = N(165, 2).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-165}{2}$.

$P = P(\overline{X} > 168) = P\left(Z > \frac{168-165}{2}\right) = P\left(Z > \frac{3}{2}\right) = P(Z > 1{,}5) =$

$= 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = \underline{0.0668}.$

Si el peso medio de las bolas fuese 165 gr, la probabilidad de que el peso medio de 100 bolas supere los 168 gr es de $\underline{\mathbf{0.0668}}$

b) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0.95\ \to\ \alpha = 1 - 0.95 = 0.05\ \to\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.$

$(1 - 0.025 = 0.9750\ \to z = 1.96).$

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 165;\ \sigma = 20;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(165 - 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}};\ 165 + 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right);$

$(165 - 1.96 \cdot 2;\ 165 + 1.96 \cdot 2);\ \ (165 - 3.92;\ 165 + 3.92).$

$\underline{\boldsymbol{I.C.}_{\mathbf{95\,\%}} = (\mathbf{161.08};\ \ \mathbf{167.92}).}$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Textos Marea Verde

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020 – 2021
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.

Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

El **tiempo** disponible para resolver el examen es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación Lineal.

1.1.– En el último sorteo de la lotería primitiva Juan acertó 4 números. Su padre le preguntó qué números había acertado. Juan le planteó el siguiente acertijo para que adivinase tres de ellos: la suma de los tres números es 73; si al mayor de los tres números le quitas 3 unidades, obtienes la suma de los otros dos; el doble del menor de los tres números más el mayor de ellos es el triple del otro número más 8 unidades.

(a) ¿Cuáles eran esos tres números? [**2 puntos**]

(b) ¿Cuál es el cuarto número, si es la mitad de la suma de los dos mayores de los tres anteriores? [**0.5 puntos**]

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

1.2.– Sea A una matriz inversible de orden 2.

(i) Halla las matrices X e Y que cumplen que

$$\begin{cases} AX + Y = I \\ AX - Y = 0 \end{cases}$$

(donde I es la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 es la matriz nula) [**0.75 puntos**].

(ii) En particular, calcula las soluciones X e Y para $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ [**1.75 puntos**].

1.3.– Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen

$$\begin{aligned} &0 \le y,\ \ 0 \le x \le 2\,, \\ &x + y \le 3\,,\ \text{y} \\ &x + 3y \le 6\,. \end{aligned}$$

[**1.25 puntos**]

Averigua el valor máximo que alcanzan en dicha región las siguientes funciones, y en qué puntos lo alcanza cada una:

$$f(x, y) = 7x + 5y \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = x + 5y\,.$$

[**1.25 puntos**]

Bloque 2. Análisis.

2.1.– Representa gráficamente la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 1}\,,$$

de forma que se aprecien claramente su dominio, sus asíntotas verticales y horizontales, sus cortes con los ejes, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos [**2.5 puntos**]

2.2.– Consideramos la función f dada por $f(x) = x^3 - 3x$.

(a) Halla sus extremos relativos [**1.25 puntos**].

Textos Marea Verde

(b) ¿Cuánto vale $f'(1)$? ¿Cuál es la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(1, f(1))$? **[0.75 puntos]**

(c) ¿En qué otro punto $(t, f(t))$ corta dicha recta a la gráfica de f? **[0.5 puntos]**

Nota: si no has sabido responder al apartado (b), en (c) debes resolver la ecuación $f(x) = f(1)$.

2.3.– Haz un dibujo de la gráfica de la función $f(x) = (x-1)(x-4)$, señalando si existen sus máximos y mínimos **[0.75 puntos]**.

Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica y la recta $y = 10$ **[1.75 puntos]**.

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.– Hace un siglo, en cierto país el porcentaje de hombres y mujeres entre la población adulta era en ambos casos del 50 %. El porcentaje de fumadores entre los hombres era del 60 %, mientras que únicamente fumaba la décima parte de las mujeres.

(i) ¿Cuál era el porcentaje de personas fumadoras entre la población adulta de ese país? **[1 punto]**

(ii) Entre las personas fumadoras, ¿cuál era el porcentaje de mujeres? **[1 punto]**

(iii) El abuelo Joaquín decía que una persona era "como Dios manda" si o bien era hombre y fumaba o bien era mujer y no fumaba. ¿Qué porcentaje de personas adultas era como Dios manda, según el abuelo Joaquín? **[0.5 puntos]**

3.2.– Los ingresos mensuales por ventas de un establecimiento siguen una distribución normal, con una desviación típica de 900 €. Con los datos de los últimos 9 meses han calculado, como intervalo de confianza para la media mensual de ingresos, el intervalo comprendido entre 4663 y 5839 €.

(a) ¿Cuál fue el promedio de los ingresos en esos nueve meses? **[0.5 puntos]**

(b) ¿Con qué nivel de confianza se ha obtenido el intervalo? **[1.5 puntos]**

(c) Si con el mismo nivel de confianza el intervalo hubiera sido el comprendido entre 4957 y 5545, ¿cuántos meses habrían formado la muestra? **[0.5 puntos]**

3.3.– Un estudio de la OCDE de 2009 estableció que la estatura media de los adultos varones en España era de 174 cm, con una desviación típica de 8 cm. Asumiremos que la distribución era normal. ¿Cuál era la probabilidad de que un hombre adulto español midiera más de 190 cm? **[1.75 puntos]** Responde utilizando la tabla de la distribución la normal estándar que se incluye al final.

Entre los hombres holandeses, que eran los más altos según aquel estudio, la probabilidad de medir más de 190 cm (suponiendo también una desviación típica de 8 cm y una distribución normal) era 0.15866. ¿Cuál era la estatura media de los hombres holandeses? **[0.75 puntos]**

Textos Marea Verde

Tabla de la distribución normal estándar:

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

BY NC SA

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020 – 2021
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

(1.1) Se sugiere valorar en 1 punto el planteamiento del sistema e igualmente la resolución. No hay que ser más indulgente con la resolución de un sistema equivocado, si no repasan con posterioridad si su solución cumple el enunciado.

(1.2) (ii) se puede resolver (fácilmente) si se consideran las ocho incógnitas de entradas en las matrices X e Y, y se espera que lo hagan así si no saben usar la inversa de A.

(1.3) Para la segunda parte se sugiere repartir 0.75 para f y 0.5 para g,

(2.1) Una sugerencia: 0.25 al dominio, 0.5 las asíntotas, 0.25 los cortes con los ejes, 0.75 el cálculo de f' y 0.5+0.25 crecimiento y extremos, dependiendo de cómo los justifiquen.

(2.2) Se sugiere ser indulgente con los errores en los cálculos de la integral, si esta se plantea correctamente y dan muestra de conocer la primitiva.

(3.3) La puntuación podría modificarse para valorar más la parte más sencilla.

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1:

En el último sorteo de la lotería primitiva Juan acertó 4 números. Su padre le preguntó qué números había acertado. Juan le planteó el siguiente acertijo para que adivinase tres de ellos: la suma de los tres números es 73; si al mayor de los tres números le quitas 3 unidades, obtienen la suma de los otros dos; el doble del menor de los tres números más el mayor de ellos es el triple del otro número más 8 unidades.

a) ¿Cuáles eran esos tres números?

b) ¿Cuál es el cuarto número, si es la mitad de la suma de los dos mayores de los tres números anteriores?

Solución:

a)

Sean los números x, y, z $(x > y > z)$.

Del enunciado se deduce el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=73 \\ x-3=y+z \\ 2z+x=3y+8 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=73 \\ x-y-z=3 \\ x-3y+2z=8 \end{array}\right\}.$$ Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 73 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 8 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-146-9-8+8-219-6}{-2-3-1+1-3-2} = \frac{-146-9-219-6}{-2-3-3-2} = \frac{380}{10} = 38.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 73 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{6+8-73-3+8-146}{-10} = \frac{22-222}{-10} = \frac{-200}{-10} = 20.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 73 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{-8-219+3+73+9-8}{-10} = \frac{85-235}{-10} = \frac{-150}{-10} = 15.$$

$\underline{Los\ números\ son\ \mathbf{38, 20\ y\ 15}}.$

b)

$$w = \frac{38+20}{2} = 19 + 10 = 29.$$

$\underline{El\ cuarto\ número\ es\ el\ \mathbf{29}}.$

****

Textos Marea Verde

Problema 2:

Sea A una matriz invertible de orden 2.

$a)$ Halla las matrices X e Y que cumplen: $\begin{cases} AX+Y=I \\ AX-Y=O \end{cases}$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y O es la matriz nula de orden 2).

$b)$ En particular, calcula las matrices X e Y para $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$a)$

$$\left.\begin{array}{r} AX+Y=I \\ AX-Y=O \end{array}\right\} \Rightarrow 2AX=I;\ \ A\cdot X=\frac{1}{2}\cdot I;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X=\frac{1}{2}\cdot A^{-1}\cdot I=\frac{1}{2}\cdot A^{-1};$$

$I\cdot X=\frac{1}{2}\cdot A^{-1}\Rightarrow \underline{X=\frac{1}{2}\cdot A^{-1}}.$

$$\left.\begin{array}{r} AX+Y=I \\ -AX+Y=-O \end{array}\right\} \Rightarrow 2Y=I\Rightarrow \underline{Y=\frac{1}{2}\cdot I}.$$

$$\underline{\boldsymbol{X=\frac{1}{2}\cdot A^{-1}}}.\ \underline{\boldsymbol{Y=\frac{1}{2}\cdot I}}.$$

$b)$

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$$\underline{\boldsymbol{X=\frac{1}{2}\cdot A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}.\qquad \underline{\boldsymbol{Y=\frac{1}{2}\cdot I=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

****

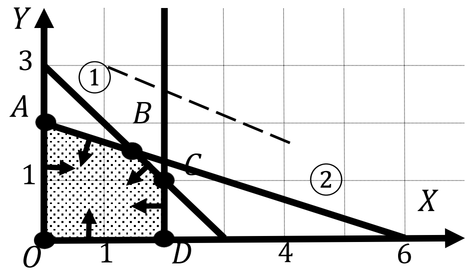
Textos Marea Verde

Problema 3:

Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen las siguientes inecuaciones: $0 \leq y$; $0 \leq x \leq 2$; $x + y \leq 3$; $x + 3y \leq 6$. Averigua el valor máximo que alcanzan en dicha región las siguientes funciones, y en qué puntos lo alcanza cada una: $f(x, y) = 7x + 5y$ y $g(x, y) = x + 5y$.

Solución:

Las restricciones son las siguientes:



$$\left.\begin{array}{r} x + y \leq 3 \\ x + 3y \leq 6 \\ 0 \leq x \leq 2;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 3).$$

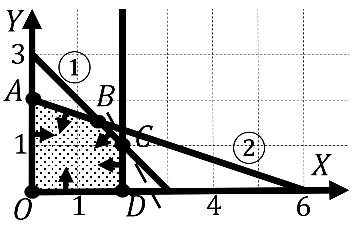
$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ x + 3y = 6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x - y = -3 \\ x + 3y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 3;\ y = \frac{3}{2};\ x + \frac{3}{2} = 3;\ 2x + 3 = 6;$$

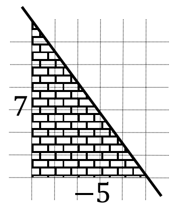
$$2x = 3;\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2 \\ x + y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow C(2, 1). \qquad D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(2, 0).$$

Función $f(x, y) = 7x + 5y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:





$A \Rightarrow f(0, 2) = 7 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 0 + 10 = 10.$

$B \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 7 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{12}{2} = 6.$

$C \Rightarrow f(2, 1) = 7 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 14 + 5 = 19.$

$D \Rightarrow f(2, 0) = 7 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 14 + 0 = 14.$

El valor máximo se produce en el punto $C(2, 1)$.

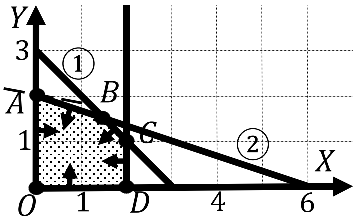
También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

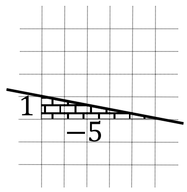
$$f(x, y) = 7x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{5}x \Rightarrow m = -\frac{7}{5}.$$

$\underline{\textit{Obtiene el máximo beneficio para } \boldsymbol{x = 2} \textit{ e } \boldsymbol{y = 1}.}$

Textos Marea Verde

Función $g(x,y) = x + 5y$.





Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow g(0,2) = 1 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 0 + 10 = 10.$

$B \Rightarrow g\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = 3.$

$C \Rightarrow g(2,1) = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 2 + 5 = 7.$

$D \Rightarrow g(2,0) = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 2 + 0 = 2.$

El valor máximo se produce en el punto $A(0,2)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$g(x,y) = x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x \Rightarrow m = -\frac{1}{5}.$

$\underline{\mathit{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ para}\ \boldsymbol{x = 0}\ e\ \boldsymbol{y = 2}}.$

****

Textos Marea Verde

Bloque 2. Análisis.

Problema 4:

Representa gráficamente la función $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}$, de forma que se aprecien claramente su dominio, sus asíntotas verticales y horizontales, sus cortes con los ejes, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos.

Solución:

Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$x^2+2x+1=0;\ \ (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1.$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R-\{-1\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}=1 \Rightarrow \underline{La\ recta\ y=1\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow$

$$\underline{La\ recta\ y=1\ es\ asíntota\ horizontal}\ \ \underline{La\ recta\ x=-1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales}.$$

Cortes eje OX: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}=0;\ \ x^2-2x=0;\ \ x(x-2)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases} x_1=0 \to \underline{O(0,0)} \\ x_2=2 \to \underline{A(2,0)} \end{cases}$. Eje OY: $f(0)=\frac{0^2-2\cdot 0}{0^2+2\cdot 0+1}=\frac{0}{1}=0 \Rightarrow \underline{O(0,0)}$.

$$\underline{O(0,0)};\ \underline{A(2,0)}$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

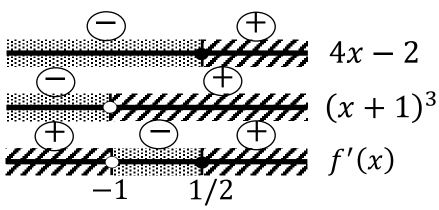
$f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}=\frac{x(x-2)}{(x+1)^2}.$

$f'(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x+1)^2-x(x-2)\cdot[2\cdot(x+1)\cdot 1]}{(x+1)^4}=\frac{(2x-2)\cdot(x+1)-2x(x-2)}{(x+1)^3}=$

$=\frac{2x^2+2x-2x-2-2x^2+4x}{(x+1)^3} \Rightarrow f'(x)=\frac{4x-2}{(x+1)^3}.$

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{4x-2}{(x+1)^3}=0;\ \ 4x-2=0;\ \ 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$

Teniendo en cuenta el dominio de la función y de la observación del esquema adjunto se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:



Textos Marea Verde

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon\left(-1, \frac{1}{2}\right).}$$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es que se anule su primera derivada.

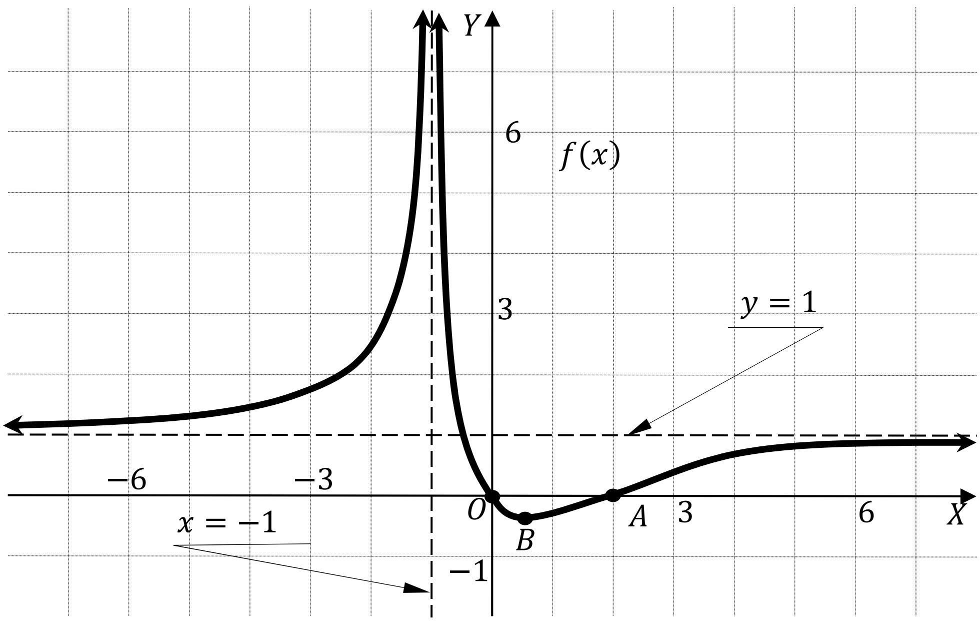
Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{4\cdot(x+1)^3 - (4x-2)[3\cdot(x+1)^2\cdot 1]}{(x+1)^6} = \frac{4\cdot(x+1) - 3\cdot(4x-2)}{(x+1)^4} = \frac{4x+4-12x+6}{(x+1)^4} = \frac{10-8x}{(x+1)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2\cdot(5-4x)}{(x+1)^4}. \quad f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\cdot\left(5-4\cdot\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^4} = \frac{6}{\left(\frac{3}{2}\right)^4} > 0 \Rightarrow Mín. relativo\ para\ x = \frac{1}{2}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2} = \frac{-\frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow Mínimo: B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right).$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

Problema 5:

Considera la función $f(x) = x^3 - 3x$.

$a)$ Halla sus extremos relativos.

$b)$ ¿Cuánto vale $f'(1)$? ¿Cuál es la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P[1, f(1)]$?

$c)$ ¿En qué otro punto $Q[t, f(t)]$ corta dicha recta a la gráfica de f?

Nota: si ha has sabido responder al apartado $b)$, en $c)$ debes resolver la ecuación $f(x) = f(1)$.

Solución:

$a)$ Por ser $f(-x) = -f(x)$ la función es simétrica con respecto al origen.

$f'(x) = 3x^2 - 3.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0;\ \ 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \underline{Máx. \to A(-1, 2)}.$

Por simetría con respecto al origen: $\underline{Mín. \to B(1, -2)}$.

$\underline{Máx. \to A(-1, 2)}.\ \underline{Mín. \to B(1, -2)}.$

$b)$ $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 3 = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \underline{f'(1) = 0}.$

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$m = f'(1) = 0.$

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2.$

El punto de tangencia es $P(1, -2)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(1, -2)$ con $m = 0$ es:

$y + 2 = 0 \cdot (x - 1) = 0.$

$\underline{f'(1) = 0}.\ \underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv y + 2 = 0}.$

$c)$ Los puntos de corte de la función $f(x) = x^3 - 3x$ y la recta $y + 2 = 0$ tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$f(x) = y \Rightarrow x^3 - 3x = -2;\ \ x^3 - 3x + 2 = 0.$

Resolviendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Los puntos de corte se producen para los valores $x = 1$ y $x = -2$.

El punto de tangencia hallado es $P(1, -2)$ y el otro punto pedido es el siguiente:

$\underline{Q(-2, -2)}.$

****

Problema 6:

Haz un dibujo de la gráfica de la función $f(x) = (x-1)(x-4)$, señalando, si existen, sus máximos y mínimos. Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica y la recta $y = 10$.

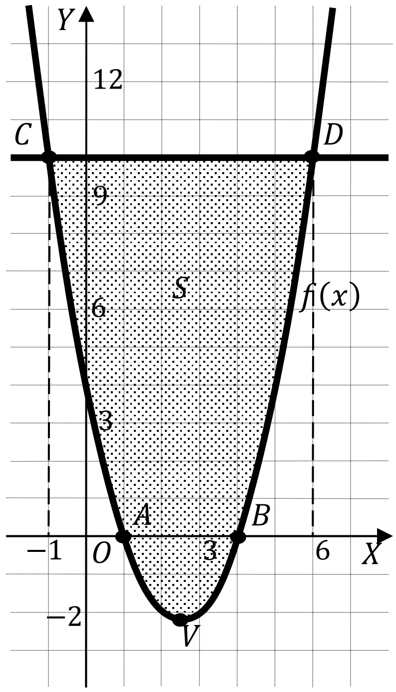
Solución:

La función $f(x) = (x-1)(x-4)$ es una parábola de expresión $f(x) = x^2 - 5x + 4$ es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2, que corta al eje X en los puntos $A(1,0)$ y $B(4,0)$ y cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}.$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - 1\right)\left(\frac{5}{2} - 4\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right).$$



Los puntos de corte de la función $f(x)$ y la recta $y = 10$ tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = y \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 10; \;\; x^2 - 5x - 6 = 0;$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow C(-1, 10) \\ x_2 = 6 \rightarrow D(6, 10) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular todas las ordenadas de $f(x)$ son iguales o menores que las correspondientes ordenadas de la recta $y = 10$, por lo cual la superficie es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{6} [y - f(x)] \cdot dx = \int_{-1}^{6} [10 - (x^2 - 5x + 4)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{6} (-x^2 + 5x + 6) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_{-1}^{6} =$$

$$= \left(-\frac{6^3}{3} + \frac{5 \cdot 6^2}{2} + 6 \cdot 6\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{5 \cdot (-1)^2}{2} + 6 \cdot (-1)\right] =$$

$$= -72 + 90 + 36 - \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6 = 60 - \frac{1}{3} - \frac{5}{2} = \frac{360 - 2 - 15}{6} = \underline{\frac{343}{6}\, u^2 \cong 57.17\, u^2}.$$

$$\underline{S = \frac{343}{6}\, u^2 \cong 57.17\, u^2}$$

****

Textos Marea Verde

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

Problema 7:

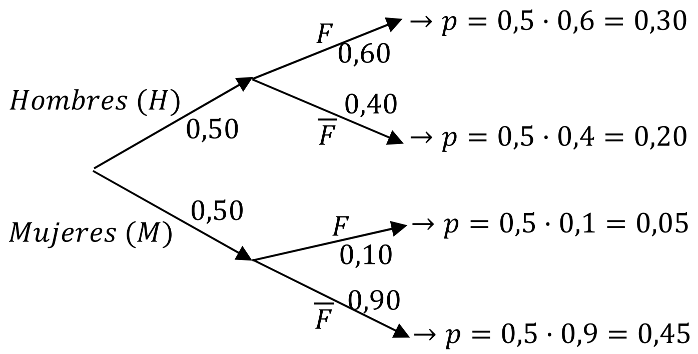
Hace un siglo, en cierto país el porcentaje de hombres y mujeres entre la población adulta era en ambos casos del 50 %. El porcentaje de fumadores entre los hombres era del 60 %, mientras que únicamente fumaba la décima parte de las mujeres.

a) ¿Cuál era el porcentaje de personas fumadoras entre la población adulta de ese país?

b) Entre las personas fumadoras, ¿cuál era el porcentaje de mujeres?

c) El abuelo Joaquín decía que una persona era "como Dios manda" si o bien era hombre o fumaba o bien era mujer y no fumaba. ¿Qué porcentaje de personas adultas eran como Dios manda, según el abuelo Joaquín?

Solución:



a)

$$P = P(F) = P(H \cap F) + P(M \cap F) = P(H) \cdot P(F/H) + P(M) \cdot P(F/M) =$$

$$= 0.50 \cdot 0.60 + 0.50 \cdot 0.10 = 0.30 + 0.05 = \underline{0.35}.$$

El porcentaje de personas fumadoras entre la población adulta de ese país es de **35 %**

b)

$$P = P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M) \cdot P(F/M)}{P(F)} = \frac{0.50 \cdot 0.10}{0.35} = \frac{0.05}{0.35} = 0.1428 = \underline{14.28\ \%}.$$

Entre las personas fumadoras, el porcentaje de mujeres es del $\underline{\mathbf{14.28\ \%}}$

c)

$$P = P(H \cap F) + P\left(M \cap \overline{F}\right) = P(H) \cdot P(F/H) + P(M) \cdot P\left(\overline{F}/M\right) =$$

$$= 0.50 \cdot 0.60 + 0.50 \cdot 0.90 = 0.30 + 0.45 = 0.75 = \underline{75\ \%}.$$

El porcentaje de personas adultas eran como Dios manda, según el abuelo Joaquín es del **75 %.**

****

Textos Marea Verde

Problema 8:

Los ingresos mensuales por ventas de un establecimiento siguen una distribución normal, con una desviación típica de 900 euros. Con los datos de los últimos 9 meses han calculado, como intervalo de confianza para la media mensual de ingresos, el intervalo comprendido entre 4 663 y 5 839 euros.

a) ¿Cuál fue el promedio de los ingresos en esos nueve meses?

b) ¿Con qué nivel de confianza se ha obtenido el intervalo?

c) Si con el mismo nivel de confianza el intervalo hubiera sido el comprendido entre 4 957 y 5 545, ¿cuántos meses habrían formado la muestra?

Solución:

a)

$$\overline{x} = \frac{5.839+4.663}{2} = \frac{10.502}{2} = 5\,251.$$

$\underline{El\ promedio\ de\ los\ ingresos\ mensuales\ de\ los\ 9\ meses\ fue\ de\ \mathbf{5\,251\ euros}.}$

b)

$$E = \frac{5.839-4.663}{2} = \frac{1.176}{2} = 588.$$

$Datos\colon\ \sigma = 900;\ \ n = 9;\ \ E = 588.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \ \Rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{588\cdot\sqrt{9}}{900} = \frac{1.764}{900} = 1.96.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ a 1.96 le corresponde 0.9750:

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9750;\ \ 2 - \alpha = 1.9500 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.95.$

$\underline{El\ intervalo\ se\ ha\ obtenido\ con\ un\ nivel\ del\ confianza\ del\ \mathbf{95}\ \%}.$

c)

$E = \frac{5.545-4.957}{2} = \frac{588}{2} = 294. Datos\colon\ \sigma = 900;\ E = 294;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \ \Rightarrow\ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\ \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{900}{294}\right)^2 =$

$= (1.96 \cdot 3.0612)^2 = 6^2 = 36.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ \mathbf{36}\ meses}$

****

Textos Marea Verde

Problema 9:

Un estudio de la OCDE de 2009 estableció que la estatura media de los adultos varones en España era de 174 cm, con una desviación típica de 8 cm. Asumiremos que la distribución era normal. ¿Cuál era la probabilidad de que un hombre adulto español midiera más de 190 cm? Responde utilizando la tabla de la distribución normal estándar. Entre los hombres holandeses, que eran los más altos según aquel estudio, la probabilidad de medir más de 190 cm (suponiendo también una desviación típica de 8 cm y una distribución normal) era 0.15866. ¿Cuál era la estatura media de los hombres holandeses?

Solución:

$Datos\colon\ \mu = 174;\ \ \sigma = 8.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(174, 8).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-174}{8}.$

$P = P(X > 190) = P\left(Z > \frac{190-174}{8}\right) = P\left(Z > \frac{16}{8}\right) = P(Z > 2) =$

$= [1 - P(Z \leq 2)] = 1 - 0.9772 = \underline{0.0228}.$

$P(X > 190) = 0.15866 \Rightarrow P\left(Z > \frac{190-\mu}{8}\right) = 0.15866;$

$1 - P\left(Z \leq \frac{190-\mu}{8}\right) = 0.15866;\ \ 1 - 0.15866 = P\left(Z \leq \frac{190-\mu}{8}\right);$

$0.84144 = P\left(Z \leq \frac{190-\mu}{8}\right).$

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0,1)$ a 0.84144 le corresponde, aproximadamente, 1.00:

$\frac{190-\mu}{8} = 1;\ \ 190 - \mu = 8;\ \ \mu = 190 - 8 = 182.$

$\underline{La\ estatura\ media\ de\ los\ hombres\ holandeses\ era\ de\ \mathbf{182\ cm}}.$

****

Textos Marea Verde