Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

NAVARRA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Logo de la Comunidad	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Elija tres de los seis ejercicios propuestos.

Problema 1:

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}4 & 2\\-2 & 6\end{pmatrix}$, responda a las siguientes cuestiones:

$a)$ Calcule A^{-1} y B^{-1}.

$b)$ Resuelva la ecuación matricial $C-A=2X-6I$.

$c)$ Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X\cdot B=C$.

Problema 2:

Un empresario quiere dedicar 50 horas laborales a cursos de formación para sus empleados y está considerando dos tipos de formación (F1 y F2). El curso F1 es más atractivo para sus empleados y cada hora de curso conseguiría aumentar la productividad de la empresa en un 1 %, mientras que el curso F2, es menos atractivo para los empleados, pero mejoraría la productividad en un 2 %. El empresario decide dedicar al menos 20 horas al curso F1 y no más de 35 horas al curso F2. Además, los empleados solicitan que se dedique al curso F1 una cantidad igual o superior de horas que al curso F2. ¿Cuántas horas debería dedicar a cada curso de formación si se desea maximizar el aumento de la productividad?

$a)$ Plantee el problema.

$b)$ Resuélvalo gráficamente.

$c)$ Analice gráficamente qué ocurriría si considerando las preferencias de los empleados, el empresario modifica su idea inicial y decide no dedicar más de 10 horas al curso de formación F2.

Problema 3:

Sean las funciones $f(x)=\frac{x^2+4x+3}{2x-2}$ y $g(x)=2x^2+ax+1$.

$a)$ Estudie la continuidad de $f(x)$ y, en su caso, indique el tipo de discontinuidad.

$b)$ Calcule el valor de a para que $g(x)$ tenga un mínimo en $x=1/2$.

$c)$ Calcule $g'(1)$ aplicando la definición de derivada, para el valor del parámetro real $a=-1$.

Problema 4:

$a)$ Calcule las asíntotas de la función $f(x)=\frac{2x^2+5}{x+1}$.

$b)$ Calcule la primitiva de la función $f(x)=(2x+1)^3$, sabiendo que $F(0)=\frac{9}{8}$.

Problema 5:

En una empresa de reservas de viajes y alojamientos por internet, el 75 % de las visitas buscan alojamiento, el 55 % de las visitas buscan vuelo y el 40 % de las visitas buscan alojamiento y vuelo. Se selecciona una visita al azar. Calcule:

a) La probabilidad de que busque vuelo o alojamiento.

b) La probabilidad de que busque alojamiento, sabiendo que no busca vuelo.

c) La probabilidad de que no busque vuelo ni alojamiento.

Problema 6:

El gasto (en euros) por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con varianza 64. Se selecciona una muestra de clientes, obteniéndose los siguientes gastos:

$49{,}8;\ \ 34{,}4;\ \ 42{,}1;\ \ 55{,}7;\ \ 54{,}9;\ \ 53;\ \ 54{,}6;\ \ 53{,}3;\ \ 68{,}9\ \ y\ \ 42{,}4.$

a) Calcule un intervalo de confianza al 93 % para el gasto medio.

b) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo se reduzca a la mitad. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{pmatrix}$, responda a las siguientes cuestiones:

$a)$ Calcule A^{-1} y B^{-1}.

$b)$ Resuelva la ecuación matricial $C-A=2X-6I$.

$c)$ Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X\cdot B=C$.

Solución:

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2.\quad A^t=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix};\ \ Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}}{2}\Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1}=\tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}}.$$

La inversa de B se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(B|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to F_2-2F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to -F_2\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to F_1-2F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right)\Rightarrow\underline{B^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}}.$$

$b)$

$$C-A=2X-6I;\ \ 2X=C-A+6I=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=2X=\begin{pmatrix}8 & 4\\ -2 & 11\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{X=\tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}8 & 4\\ -2 & 11\end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$A\cdot X\cdot B=C;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1};\ \ I\cdot X\cdot I=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}\Rightarrow$$

$$\underline{X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}}.$$

$$X=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & 14\\ -4 & 12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 7\\ -2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{X=\begin{pmatrix}14 & -7\\ 18 & -10\end{pmatrix}}.$$

****

Problema 2:

Un empresario quiere dedicar 50 horas laborales a cursos de formación para sus empleados y está considerando dos tipos de formación (F1 y F2). El curso F1 es más atractivo para sus empleados y cada hora de curso conseguiría aumentar la productividad de la empresa en un 1 %, mientras que el curso F2, es menos atractivo para los empleados, pero mejoraría la productividad en un 2 %. El empresario decide dedicar al menos 20 horas al curso F1 y no más de 35 horas al curso F2. Además, los empleados solicitan que se dedique al curso F1 una cantidad igual o superior de horas que al curso F2. ¿Cuántas horas debería dedicar a cada curso de formación si se desea maximizar el aumento de la productividad?

$a)$ Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente.

$c)$ Analice gráficamente qué ocurriría si considerando las preferencias de los empleados, el empresario modifica su idea inicial y decide no dedicar más de 10 horas al curso de formación F2.

Solución:

$a, b)$

Sean x e y el número de horas dedicadas a los cursos F1 y F2, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+y\le 50 \\ x\ge 20;\quad y\le 35 \\ x\ge y \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow x+y\le 50 \Rightarrow y\le 50-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	50
y	50	0

② $\Rightarrow x\ge y \Rightarrow y\le x \Rightarrow A(20,0)\rightarrow Si.$

x	0	50
y	0	50

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

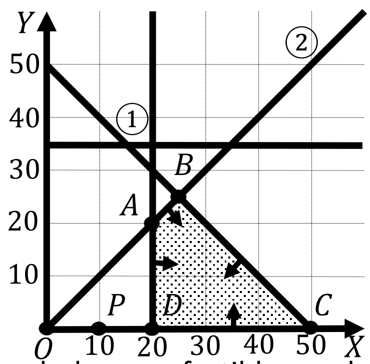
Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=x \\ x=20 \end{array}\right\} \Rightarrow A(20,20).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=50 \\ x=y \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=50;\;\; x=25 \Rightarrow B(25,25).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=50 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=50 \Rightarrow C(50,0).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=20 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(20,0).$



La función de objetivos es $f(x,y)=1{,}01x+1{,}02y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(20,20)=1{,}01\cdot 20+1.02\cdot 20=20{,}2+20{,}4=40{,}6.$

$B \Rightarrow f(25,25)=1{,}01\cdot 25+1.02\cdot 25=25{,}25+25{,}5=50{,}75.$

$C \Rightarrow f(50,0)=1{,}01\cdot 50+1.02\cdot 0=50{,}5+0=50{,}5.$

$D \Rightarrow f(20,0) = 1{,}01 \cdot 20 + 1.02 \cdot 0 = 20{,}2 + 0 = 20{,}2.$

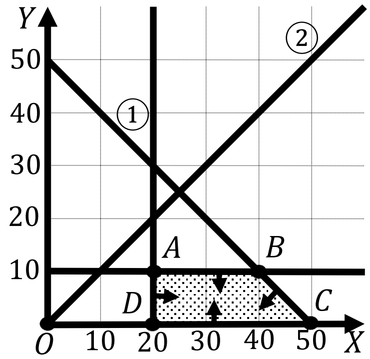
El valor máximo se produce en el punto $B(25, 25)$.

$\underline{La\ productividad\ es\ máxima\ dedicando\ 25\ horas\ a\ cada\ curso}.$

$c)$

Los vértices $D\ y\ C$ siguen siendo los mismos, es decir: $C(50, 0)$ y $D(20, 0)$.

Los nuevos vértices $A\ y\ B$ son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 20 \\ y = 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(20, 10).$

$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y = 50 \\ y = 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + 10 = 50;\ \ x = 40 \Rightarrow B(40, 10).$

Los valores de la función de objetivos en los nuevos vértices $A\ y\ B$ son los siguientes:

$A \Rightarrow f(20,10) = 1{,}01 \cdot 20 + 1.02 \cdot 10 = 20{,}2 + 10{,}2 = 30{,}4.$

$B \Rightarrow f(40,10) = 1{,}01 \cdot 40 + 1.02 \cdot 10 = 40{,}4 + 10{,}2 = 50{,}6.$

$\underline{La\ productividad\ es\ máxima\ dedicando\ 40\ horas\ a\ F1\ y\ 10\ horas\ a\ F2}.$

****

Problema 3:

Sean las funciones $f(x)=\frac{x^2+4x+3}{2x-2}$ y $g(x)=2x^2+ax+1$.

$a)$ Estudie la continuidad de $f(x)$ y, en su caso, indique el tipo de discontinuidad.

$b)$ Calcule el valor de a para que $g(x)$ tenga un mínimo en $x=1/2$.

$c)$ Calcule $g'(1)$ aplicando la definición de derivada, para el valor del parámetro real $a=-1$.

Solución:

$a)$

$$f(x)=\frac{x^2+4x+3}{2x-2}=\frac{x^2+4x+3}{2(x-1)}.$$

La función $f(x)$, por ser racional, tiene como dominio al conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador:

$$2(x-1)=0;\;\; x-1=0;\;\; x=1 \Rightarrow D(f) \Rightarrow R-\{1\}.$$

Para determinar el tipo de discontinuidad para $x=1$ se hacen los límites laterales de la función para este valor:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+4x+3}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1^2+4\cdot 1+3}{2(1^- -1)}=\frac{8}{2\cdot 0^-}=\frac{8}{0^-}=-\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+4x+3}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1^2+4\cdot 1+3}{2(1^+ -1)}=\frac{8}{2\cdot 0^+}=\frac{8}{0^+}=+\infty.$$

$$\underline{f(x)\ presenta\ una\ discontinuidad\ esencial\ de\ salto\ infinito\ para\ x=1}.$$

$b)$

La función $g(x)=2x^2+ax+1$ es una parábola convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2. Su vértice, se nos dice, lo tiene para $x=\frac{1}{2}$:

$$g'(x)=4x+a=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow 4\cdot\frac{1}{2}+a=0;\;\; 2+a=0 \Rightarrow$$

$$\underline{a=-2}.$$

$c)$

Para $a=-1$ la función es $g(x)=2x^2-x+1$.

$$g'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[2\cdot(1+h)^2-(1+h)+1]-[2\cdot 1^2-1+1]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[2\cdot\left(1+2h+h^2\right)-1-h+1\right]-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2+4h+2h^2-h-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h+2h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(3+h) \Rightarrow$$

$$\underline{g'(1)=3}.$$

****

Problema 4:

a) Calcule las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2+5}{x+1}$.

b) Calcule la primitiva de la función $f(x) = (2x+1)^3$, sabiendo que $F(0) = \frac{9}{8}$.

Solución:

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \ \Rightarrow$$

$$\underline{La\ recta\ x = -1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2+5}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5}{x^2+x} = 2.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+5}{x+1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5-2x^2-2x}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x+5}{x-1} = -2.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 2x - 2\ es\ asíntota\ oblicua}.$$

b)

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int (2x+1)^3 \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 2x+1 = t \\ 2\cdot dx = dt \\ dx = \frac{1}{2}\cdot dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot \int t^3 \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4} + C \Rightarrow F(x) = \frac{1}{8}\cdot(2x+1)^4 + C.$$

Sabiendo que $F(0) = \frac{9}{8}$:

$$\frac{1}{8}\cdot(2\cdot 0 + 1)^4 + C = \frac{9}{8};\ \frac{1}{8} + C = \frac{9}{8} \ \Rightarrow C = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{F(x) = \frac{1}{8}\cdot(2x+1)^4 + 1.}$$

****

Problema 5:

En una empresa de reservas de viajes y alojamientos por internet, el 75 % de las visitas buscan alojamiento, el 55 % de las visitas buscan vuelo y el 40 % de las visitas buscan alojamiento y vuelo. Se selecciona una visita al azar. Calcule:

$a)$ La probabilidad de que busque vuelo o alojamiento.

$b)$ La probabilidad de que busque alojamiento, sabiendo que no busca vuelo.

$c)$ La probabilidad de que no busque vuelo ni alojamiento.

Solución:

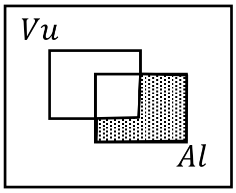
$$Datos: P(Al) = 0{,}75; \;\; P(Vu) = 0{,}55; \;\; P(Al \cap Vu) = 0{,}40.$$

$a)$

$$P = P(Al \cup Vu) = (Al) + P(Vu) - P(Al \cap Vu) = 0{,}75 + 0{,}55 - 0{,}40 =$$

$= 1{,}30 - 0{,}40 = \underline{0{,}90}.$

$$P(Al \cup Vu) = \underline{0{,}90}.$$



$Al \cap \overline{Vu} = Al - (Al \cap Vu)$

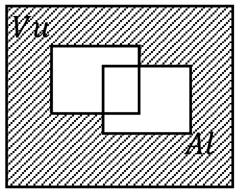
$b)$

$$P = P\left(Al/\overline{Vu}\right) = \frac{P\left(Al \cap \overline{Vu}\right)}{P\left(\overline{Vu}\right)} = \frac{P(Al) - P(Al \cap Vu)}{1 - P(Vu)} =$$

$= \frac{0{,}75-0{,}40}{1-0{,}55} = \frac{0{,}35}{0{,}45} = \underline{0{,}7778}.$

$$P\left(Al/\overline{Vu}\right) = \underline{0{,}7778}.$$

$c)$



$P\left(\overline{Vu} \cap \overline{Al}\right) = 1 - P(Vu \cup Al)$

$$P = P\left(\overline{Vu} \cap \overline{Al}\right) = 1 - P(Al \cup Vu) =$$

$= 1 - 0{,}90 = \underline{0{,}10}.$

$$P\left(\overline{Vu} \cap \overline{Al}\right) = \underline{0{,}10}.$$

****

Problema 6:

El gasto (en euros) por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con varianza 64. Se selecciona una muestra de clientes, obteniéndose los siguientes gastos:

$49{,}8;\ \ 34{,}4;\ \ 42{,}1;\ \ 55{,}7;\ \ 54{,}9;\ \ 53;\ \ 54{,}6;\ \ 53{,}3;\ \ 68{,}9\ \ y\ \ 42{,}4.$

$a)$ Calcule un intervalo de confianza al 93 % para el gasto medio.

$b)$ Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo se reduzca a la mitad. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

Solución:

$i)$

$$\overline{x} = \frac{49{,}8+34{,}4+42{,}1+55{,}7+54{,}9+53+54{,}6+53{,}3+68{,}9+42{,}4}{10} = \frac{50{,}91}{10} = 50{,}91.$$

Para un nivel de confianza del 93 % es:

$1-\alpha = 0{,}93 \ \rightarrow\ \alpha = 1-0{,}93 = 0{,}07 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}035} = 1{,}81.$

$(1-0{,}035 = 0{,}9650 \ \rightarrow z = 1{,}81).$

Datos: $n = 10;\ \ \overline{x} = 50{,}91;\ \sigma = \sqrt{64} = 8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}81.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(50{,}91 - 1{,}81 \cdot \frac{8}{\sqrt{10}};\ 50{,}91 + 1{,}81 \cdot \frac{8}{\sqrt{10}}\right) =$

$= (50{,}91 - 1{,}81 \cdot 2{,}5298;\ 50{,}91 + 1{,}81 \cdot 2{,}5298) =$

$= (50{,}91 - 4{,}5790;\ 50{,}91 + 4{,}5790).$

$$\underline{I.C._{93\ \%} = (46{,}33;\ 55{,}49).}$$

$b)$

$E = \frac{55{,}49-46{,}33}{2} = \frac{9{,}16}{2} = 4{,}58 \Rightarrow E' = \frac{E}{2} = \frac{4{,}58}{2} = 2{,}29.$

Datos: $\sigma = 8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}81;\ \ E' = 2{,}29.$

Siendo $E' = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow\ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E'} \ \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E'}\right)^2 = \left(1{,}81 \cdot \frac{8}{2{,}29}\right)^2 =$

$= (1{,}81 \cdot 3{,}4934)^2 = 6{,}323^2 = 39{,}98.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 40\ clientes.}$$

****

Logo de la Comunidad	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Elija tres de los seis ejercicios propuestos.

Problema 1:

Un cajero automático contiene billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 800 billetes con un importe de 21.000 euros. El número de billetes de 10 euros es igual que el número de billetes de 20 euros y 50 euros juntos. Calcule cuántos billetes hay de cada tipo.

$a)$ Plantee el sistema de ecuaciones lineales.

$b)$ Resuelva el sistema por el método de Gauss.

Problema 2:

Se están considerando dos alimentos, A y B, que contiene tres nutrientes. Cada kg de A contiene 0,1 kg de grasas, 0,6 kg de hidratos de carbono y 0,3 kg de proteínas. Cada kg de B tiene 0,2 kg de grasas, 0,3 kg de hidratos de carbono y 0,5 kg de proteínas. El precio de un kg del alimento A es de 10 euros. El alimento B cuesta el triple que A. Se desea conseguir al menos 18 kg de hidratos de carbono, al menos 15 kg de proteínas y no más de 10 kg de grasas. Se desea, además, no comprar más de 75 kg de A. Determine cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para minimizar el coste total de la compra.

$a)$ Plantee el problema.

$b)$ Resuélvalo gráficamente.

$c)$ Analice gráficamente qué ocurriría si se deseara maximizar la cantidad de una vitamina, sabiendo que cada kg de A tiene 1,5 unidades y cada kg de B tiene 2 unidades de dicha vitamina.

Problema 3:

Sean las funciones $f(x) = -x^2 - 9x + 10$ y $g(x) = 2x^2 - x^3$.

$a)$ Determine, para la función $g(x)$, los puntos de corte con los ejes, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

$b)$ Determine el mínimo de la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

Problema 4:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \le 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & x > 2 \end{cases}$.

$a)$ Estudie la continuidad de la función $f(x)$.

$b)$ Represente gráficamente la función $f(x)$.

$c)$ Calcule el área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[3, 4]$.

Problema 5:

En una pequeña localidad hay 25 candidatos para realizar una actividad de voluntariado, de los que el 60 % son estudiantes, el 32 % son jubilados y el resto trabajadores. Se seleccionan al azar tres candidatos distintos. Calcule:

a) La probabilidad de que todos ellos sean jubilados.

b) La probabilidad de que sean dos estudiantes y un trabajador.

c) La probabilidad de que alguno de ellos sea trabajador.

Problema 6:

Un estudia concluye que el tiempo que tarda un fumador en dejar de fumar se ajusta a una distribución normal. Con una muestra de 144 exfumadores, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio (en meses) en dejar de fumar: $[9{,}58875; 10{,}41125]$.

a) Calcule la varianza poblacional y calcule el tiempo medio en dejar de fumar para la muestra de 144 exfumadores.

b) Construya un intervalo de confianza al 94 % para el tiempo medio en dejar de fumar.

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Un cajero automático contiene billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 800 billetes con un importe de 21.000 euros. El número de billetes de 10 euros es igual que el número de billetes de 20 euros y 50 euros juntos. Calcule cuántos billetes hay de cada tipo.

$a)$ Plantee el sistema de ecuaciones lineales.

$b)$ Resuelva el sistema por el método de Gauss.

Solución:

$a)$

Sean x, y, z el número de billetes de 10, 20 y 50 euros que contiene el cajero automático, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ 10x+20y+50z=21.000 \\ x=y+z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ x+2y+5z=2.100 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}.$$

$b)$

La matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 1 & 2 & 5 & 2.100 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 1 & 2 & 5 & 2.100 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 1.300 \\ 0 & -2 & -2 & -800 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 + 2F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 1.300 \\ 0 & 0 & 6 & 1.800 \end{pmatrix} \Rightarrow 6z = 1.800; \;\; z = 300.$$

$y + 4 \cdot 300 = 1.300; \;\; y + 1.200 = 1.300; \;\; y = 100.$

$x + 100 + 300 = 800; \;\; x + 400 = 800; \;\; x = 400.$

$\underline{El\ cajero\ tiene\ 400\ billetes\ de\ 10\ euros, 100\ de\ 50\ euros\ y\ 300\ de\ 50\ euros}.$

****

Problema 2:

Se están considerando dos alimentos, A y B, que contiene tres nutrientes. Cada kg de A contiene 0,1 kg de grasas, 0,6 kg de hidratos de carbono y 0,3 kg de proteínas. Cada kg de B tiene 0,2 kg de grasas, 0,3 kg de hidratos de carbono y 0,5 kg de proteínas. El precio de un kg del alimento A es de 10 euros. El alimento B cuesta el triple que A. Se desea conseguir al menos 18 kg de hidratos de carbono, al menos 15 kg de proteínas y no más de 10 kg de grasas. Se desea, además, no comprar más de 75 kg de A. Determine cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para minimizar el coste total de la compra.

$a)$ Plantee el problema. $b)$ Resuélvalo gráficamente.

$c)$ Analice gráficamente qué ocurriría si se deseara maximizar la cantidad de una vitamina, sabiendo que cada kg de A tiene 1,5 unidades y cada kg de B tiene 2 unidades de dicha vitamina.

Solución:

$a)$

Sean x e y el número de kilogramos que se adquieren de los alimentos A y B, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 0{,}1x + 0{,}2y \le 10 \\ 0{,}6x + 0{,}3y \ge 18 \\ 0{,}3x + 0{,}5y \ge 15 \\ 0 \le x \le 75;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + 2y \le 100 \\ 2x + y \ge 60 \\ 3x + 5y \ge 150 \\ 0 \le x \le 75;\ y \ge 0 \end{array}\right\}.$

$b)$

① $\Rightarrow x + 2y \le 100 \Rightarrow y \le \frac{100-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	100
y	50	0

② $\Rightarrow 2x + y \ge 60 \Rightarrow y \ge 60 - 2x \Rightarrow O(0,0) \to No.$

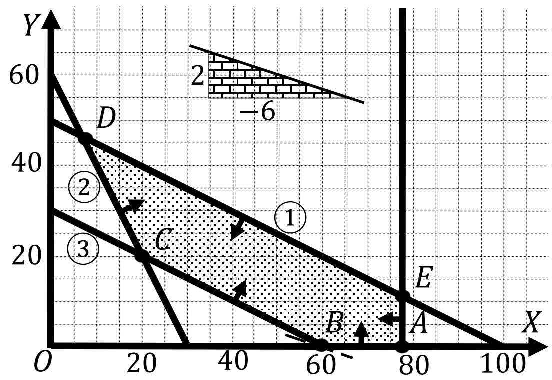
x	0	30
y	60	0

③ $\Rightarrow 3x + 5y \ge 150 \Rightarrow y \ge \frac{150-3x}{5} \Rightarrow O(0,0) \to No.$

x	0	50
y	30	0

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x = 75 \end{array}\right\} \Rightarrow A(75, 0).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x + 5y = 150 \end{array}\right\} \Rightarrow B(50, 0).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 60 \\ 3x + 5y = 150 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 10x + 5y = 300 \\ -3x - 5y = -150 \end{array}\right\} \Rightarrow 7x = 150;\ x = \frac{150}{7};$

$\frac{300}{7} + y = 60;\ \ 300 + 7y = 420;\ \ 7y = 120;\ \ y = \frac{120}{7} \Rightarrow C\left(\frac{150}{7}, \frac{120}{7}\right).$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=100 \\ 2x+y=60 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+4y=200 \\ -2x-y=-60 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=140;\ \ y=\frac{140}{3};$$

$$x+\frac{280}{3}=100;\ 3x+280=300;\ \ 3x=20;\ \ x=\frac{20}{3} \Rightarrow D\left(\frac{20}{3},\frac{140}{3}\right).$$

$$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=75 \\ x+2y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow 75+2y=100;\ \ 2y=25;\ \ y=\frac{25}{2} \Rightarrow E\left(75,\frac{25}{2}\right).$$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=10x+30y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(75,0)=10\cdot 75+30\cdot 0=750+0=750.$

$B \Rightarrow f(50,0)=10\cdot 50+30\cdot 0=500+0=500.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{150}{7},\frac{120}{7}\right)=10\cdot\frac{150}{7}+30\cdot\frac{120}{7}=\frac{1.500+3.600}{7}=\frac{5.100}{7}\cong 728{,}57.$

$D \Rightarrow f\left(\frac{20}{3},\frac{140}{3}\right)=10\cdot\frac{20}{3}+30\cdot\frac{140}{3}=\frac{200+4.200}{3}=\frac{4.400}{3}\cong 1.466{,}67.$

$E \Rightarrow f\left(75,\frac{25}{2}\right)=10\cdot 75+30\cdot\frac{25}{2}=750+375=1.125.$

El mínimo se produce en el punto $B(50,0)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y)=10x+30y=0 \Rightarrow y=-\frac{10}{30}x=-\frac{1}{3} \Rightarrow m=-\frac{2}{6}.$

$\underline{\textit{Mínimo coste comprando } 50\ kg \textit{ del alimento } A}.$

$\underline{\textit{El coste mínimo es de } 500 \textit{ euros}}.$

$c)$

La nueva función de objetivos es $g(x,y)=1{,}5x+2y$.

Los valores de la nueva función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(75,0)=1{,}5\cdot 75+2\cdot 0=112{,}5+0=112{,}5.$

$B \Rightarrow f(50,0)=1{,}5\cdot 50+2\cdot 0=75+0=75.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{150}{7},\frac{120}{7}\right)=1{,}5\cdot\frac{150}{7}+2\cdot\frac{120}{7}=\frac{225+240}{7}=\frac{465}{7}\cong 66{,}43.$

$D \Rightarrow f\left(\frac{20}{3},\frac{140}{3}\right)=1{,}5\cdot\frac{20}{3}+2\cdot\frac{140}{3}=\frac{30+280}{3}=\frac{310}{3}\cong 103{,}33.$

$E \Rightarrow f\left(75,\frac{25}{2}\right)=1{,}5\cdot 75+2\cdot\frac{25}{2}=112{,}5+25=137{,}5.$

El máximo se consigue en el punto $E\left(75,\frac{25}{2}\right)\approx E(75;12{,}5)$.

$\underline{\textit{Se maximiza la vitamina comprando } 50\ kg \textit{ de } A \textit{ y } 12{,}5\ kg \textit{ de } B}.$

****

Problema 3:

Sean las funciones $f(x) = -x^2 - 9x + 10$ y $g(x) = 2x^2 - x^3$.

$a)$ Determine, para la función $g(x)$, los puntos de corte con los ejes, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

$b)$ Determine el mínimo de la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

Solución:

$a)$

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas de la función $g(x) = 2x^2 - x^3$ son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - x^3 = 0;\ \ x^2(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to \underline{O(0,0)} \\ x_2 = 2 \to \underline{A(2,0)} \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,0)}.$$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$g'(x) = 4x - 3x^2. \qquad g''(x) = 4 - 6x.$$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow 4 - 6x = 0;\ \ 2 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Teniendo en cuenta que el dominio de $g(x)$ es R, por ser polinómica, los periodos de concavidad y convexidad son los siguientes:

$$\underline{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)}.$$

$$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)}.$$

Una función polinómica tiene un punto de inflexión para los valores reales de la variable que hacen cero la segunda derivada, siendo distinta la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$g'''(x) = -6 \neq 0 \Rightarrow P.I. para\ x = \frac{2}{3}.$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{9} - \frac{8}{27} = \frac{24-8}{27} = \frac{16}{27} \Rightarrow$$

$$\underline{P.I. \to B\left(\frac{2}{3}, \frac{16}{27}\right)}.$$

$b)$

$$h(x) = f(x) - g(x) = -x^2 - 9x + 10 - (2x^2 - x^3) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10.$$

$$h'(x) = 3x^2 - 6x - 9. \qquad h''(x) = 6x - 6.$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0;\ \ x^2 - 2x - 3 = 0;\ \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} =$$

$= \frac{2\pm4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3.$

$h''(-1) = 6 \cdot (-1) - 6 = -12 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$

$h''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 3.$

$$h(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 10 = -27 + 10 = -17 \Rightarrow$$

$$\underline{Mín. \rightarrow P(3, -17)}.$$

****

Problema 4:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & x > 2 \end{cases}$.

$a)$ Estudie la continuidad de la función $f(x)$.

$b)$ Represente gráficamente la función $f(x)$.

$c)$ Calcule el área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[3, 4]$.

Solución:

$a)$

La función $f(x)$, por ser polinómica, es continua en su dominio, que es R, excepto para $x = 2$ cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

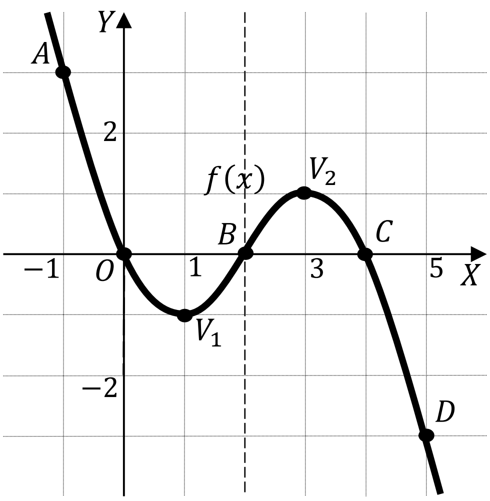
Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 2x) = 4 - 4 = 0 = f(2) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (-x^2 + 6x - 8) = -4 + 12 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R.}$$

$b)$



En el intervalo $(-\infty, 2]$ la función es la parábola $g(x) = x^2 - 2x$, que es convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2, y cuyo vértice es el siguiente:

$g'(x) = 2x - 2 = 0;\ \ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$

$g(1) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow V_1(1, -1).$

Otros puntos de la parábola son los siguientes: $O(0,0), A(-1,0)\ y\ B(2,0)$.

En el intervalo $(2, +\infty)$ la función es la parábola $h(x) = -x^2 + 6x - 8$, que es cóncava (∩), por ser negativo el coeficiente de x^2, y cuyo vértice es el siguiente:

$h'(x) = -2x + 6 = 0;\ -x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$

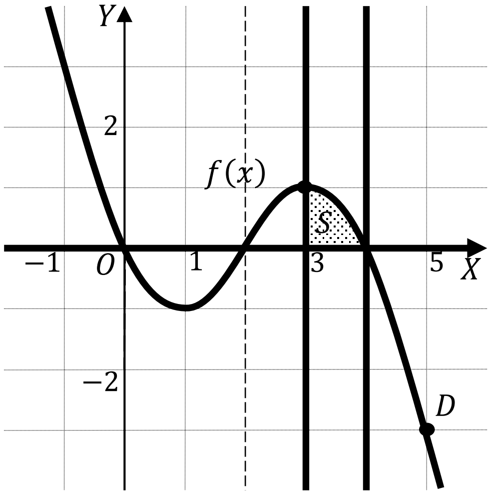
$h(3) = -9 + 18 - 8 = 18 - 17 = 1 \Rightarrow V_2(3, 1).$

La representación gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \leq 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & x > 2 \end{cases}$ es, aproximadamente, la que aparece en la figura anterior.

$c)$

En el intervalo $[3, 4]$ la expresión de la función es $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

De la observación de la figura adjunta se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_3^4 f(x)dx = \int_3^4 (-x^2 + 6x - 8)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 8x\right]_3^4 =$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + \frac{6 \cdot 4^2}{2} - 8 \cdot 4\right) - \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{6 \cdot 3^2}{2} - 8 \cdot 3\right) = -\frac{64}{3} + 48 - 32 + 9 - 27 + 24 =$$

$$= -\frac{64}{3} + 81 - 59 = 22 - \frac{64}{3} = \frac{66 - 64}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{2}{3}\, u^2 \cong 0{,}67\, u^2.}$$

****

Problema 5:

En una pequeña localidad hay 25 candidatos para realizar una actividad de voluntariado, de los que el 60 % son estudiantes, el 32 % son jubilados y el resto trabajadores. Se seleccionan al azar tres candidatos distintos. Calcule:

a) La probabilidad de que todos ellos sean jubilados.

b) La probabilidad de que sean dos estudiantes y un trabajador.

c) La probabilidad de que alguno de ellos sea trabajador.

Solución:

El número de candidatos estudiantes es: $n_1 = 0{,}6 \cdot 25 = 15$.

El número de candidatos jubilados es: $n_2 = 0{,}32 \cdot 25 = 8$.

El número de candidatos trabajadores es: $n_3 = 25 - n_1 - n_2 = 25 - 23 = 2$.

a)

$$P = \frac{8}{25} \cdot \frac{7}{24} \cdot \frac{6}{23} = \frac{1}{25} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{6}{23} = \frac{1}{25} \cdot \frac{7}{1} \cdot \frac{2}{23} = \underline{\frac{14}{575} = 0{,}0243.}$$

$$\underline{P = \frac{14}{575} = 0{,}0243.}$$

b)

$$P = P(EET) + P(ETE) + P(TEE) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} \cdot \frac{2}{23} + \frac{15}{25} \cdot \frac{2}{24} \cdot \frac{14}{23} + \frac{2}{25} \cdot \frac{15}{24} \cdot \frac{14}{23} =$$

$$= 3 \cdot \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} \cdot \frac{2}{23} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{23} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{23} = \underline{\frac{21}{230} = 0{,}0913.}$$

$$\underline{P = \frac{21}{230} = 0{,}0913.}$$

c)

La probabilidad de que alguno de ellos sea trabajador es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que ninguno de ellos sea trabajador:

$$P = 1 - \frac{23}{25} \cdot \frac{22}{24} \cdot \frac{21}{23} = 1 - \frac{1}{25} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{21}{1} = 1 - \frac{1}{25} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{7}{1} = 1 - \frac{77}{100} = \frac{100-77}{100} =$$

$$= \underline{\frac{23}{100} = 0{,}23.}$$

$$\underline{P = \frac{23}{100} = 0{,}23.}$$

****

Problema 6:

Un estudia concluye que el tiempo que tarda un fumador en dejar de fumar se ajusta a una distribución normal. Con una muestra de 144 exfumadores, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio (en meses) en dejar de fumar: $[9{,}58875; 10{,}41125]$.

$a)$ Calcule la varianza poblacional y calcule el tiempo medio en dejar de fumar para la muestra de 144 exfumadores.

$b)$ Construya un intervalo de confianza al 94 % para el tiempo medio en dejar de fumar.

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

Solución:

$a)$

$\overline{x} = \frac{10{,}41125+9{,}58875}{2} = \frac{20{,}0000}{2} \Rightarrow \underline{\overline{x} = 10}.$

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1 - \alpha = 0{,}90 \;\rightarrow\; \alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1{,}645.$

$(1 - 0{,}05 = 0{,}9500 \;\rightarrow z = 1{,}645).$

$E = \frac{10{,}41125-9{,}58875}{2} = \frac{0{,}82250}{2} = 0{,}41125.$

Datos: $n = 144;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645;\;\; E = 0{,}41125.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{z_{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{0{,}41125 \cdot \sqrt{144}}{1{,}645} = \frac{0{,}41125 \cdot 12}{1{,}645} = \frac{1{,}82371}{1{,}645} \Rightarrow$$

$$\underline{\sigma = 3}.$$

$b)$

Para un nivel de confianza del 94 % es:

$1 - \alpha = 0{,}94 \;\rightarrow\; \alpha = 1 - 0{,}94 = 0{,}06 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,03} = 1{,}88.$

$(1 - 0{,}03 = 0{,}9700 \;\rightarrow z = 1{,}88).$

Datos: $n = 144;\;\; \overline{x} = 10;\;\; \sigma = 3;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}88.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\; \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(10 - 1{,}88 \cdot \frac{3}{\sqrt{144}};\; 10 + 1{,}88 \cdot \frac{3}{\sqrt{144}}\right);\;\; (10 - 1{,}88 \cdot 0{,}25;\; 10 + 1{,}88 \cdot 0{,}25);$

$$(10 - 0{,}47;\; 10 + 0{,}47) \;\Rightarrow$$

$$\underline{I.C._{94\,\%} = (9{,}53;\; 10{,}47)}.$$

****