Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Álvaro Garmendia Antolín

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Ese examen tiene ocho problemas. Debes responder a cuatro de ellos. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar el número necesario. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programables, resolución de ecuaciones, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

Problema 1:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Obtener los valores de los parámetros $m\ y\ n$ para que la matriz A coincida con su traspuesta, y no tenga inversa.

$b)$ Para $m = 0\ y\ n = 3$, obtener, si se puede, la matriz inversa.

$c)$ Para $m = 0\ y\ n = 3$, resolver la ecuación matricial: $X \cdot A + 2 \cdot I_3 = A^2$.

Problema 2:

Una empresa produce dos tipos de camisas con perlas blancas, grises y rosas. Para hacer una camisa del tipo A hacen falta 20 perlas blancas, 20 grises y 30 rosas, mientras que para una camisa del tipo B se necesitan 10 perlas blancas, 20 grises y 60 rosas. La empresa dispone de un máximo de 900 perlas blancas y 1 400 grises, y decide utilizar al menos 1 800 perlas rosas. Se sabe que el beneficio que se obtiene por cada camisa del tipo A es de 60 euros, y por cada camisa del tipo B de 50 euros.

$a)$ Calcula cuántas unidades de cada tipo de camisa debe producir para obtener el máximo beneficio, así como el valor de dicho beneficio.

$b)$ ¿Es posible que la empresa fabrique 40 camisas del tipo A y 20 camisas del tipo B? Razona la respuesta.

Problema 3:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & si\ \ x < 1 \\ ax + \frac{2}{x} & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$:

$a)$ Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.

$b)$ En el caso $a = 1/2$, determina la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 2$.

$c)$ En el caso $a = 2$, realiza la representación gráfica de la función; para ello, calcula los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión cuando $x < 1$.

$d)$ Calcula $I = \int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) \cdot dx$.

Problema 4:

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 11$:

$a)$ Calcula el valor de los parámetros $a\ y\ b$ para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $P(2, 5)$.

$b)$ En el caso de $a = \frac{3}{8}\ y\ b = \frac{-9}{2}$, estudia los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función.

$c)$ En el caso de $a = \frac{3}{8}\ y\ b = \frac{-9}{2}$, representa y calcula el área de la región limitada por la función, el eje de abscisas OX y las rectas $x = -2\ y\ x = 2$.

Problema 5:

Dos cajas, A y B, contienen bolas de colores con la siguiente composición: la caja A contiene 5 blancas, 3 negras y 2 rayadas y la B, 4 blancas y 6 negras. Por otro lado, tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y los otras dos con la letra B. Tiramos el dado, y sacamos una bola al azar de la caja que indica el dado:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea rayada?

c) La bola extraída ha resultado ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la caja B?

Problema 6:

Sea A, B, C, D, E y F sucesos de un determinado experimento aleatorio.

a) Sabemos que $P(A) = 0.5;\ P(A \cup B) = 0.7\ y\ P(A \cap B) = 0.4$. Halla la probabilidad de que ocurra B.

b) Sabemos que $P(C) = 0.4;\ P(D) = 0.3\ y\ P(C \cup D) = 0.5$. Halla la probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D.

c) Sabemos que $P(E) = 0.6;\ P(F) = 0.8.$ y que los sucesos E y F son independientes. Calcula la probabilidad de que no ocurran ninguno de los dos sucesos.

Problema 7:

En un test de empatía el 40 % de la población examinada obtuvo un resultado inferior a 4 puntos. Sabemos que el resultado del test sigue una distribución normal de media 4.8 puntos.

a) Calcula la desviación típica de la distribución.

b) Si la desviación típica es 3.14 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 35 % de la población?

c) Si la desviación típica es 3.14 puntos, ¿qué porcentaje de la población tiene un resultado que se diferencia de la media en menos de 2 puntos?

Problema 8:

El gasto que realizan los jóvenes de una determinada ciudad durante un fin de semana es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 6 puntos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple, y se obtiene que el intervalo de confianza para la media es $(24.47,\ 26.43)$ con un nivel de confianza del 95 %. Calcula el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
b) Se ha seleccionado otra muestra de tamaño 49 para estimar μ. Calcula el error máximo admisible cometido para dicha estimación con un nivel de confianza del 97 %.

RESPUESTAS

Problema 1:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Obtener los valores de los parámetros $m\ y\ n$ para que la matriz A coincida con su traspuesta, y no tenga inversa.

$b)$ Para $m = 0\ y\ n = 3$, obtener, si se puede, la matriz inversa.

$c)$ Para $m = 0\ y\ n = 3$, resolver la ecuación matricial: $X \cdot A + 2 \cdot I_3 = A^2$.

Solución:

$a)$ Para que una matriz cuadrada no tenga inversa es necesario que se anule su determinante. Lo calculamos:

$$|A| = 0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2n + m - 1 - n - 1 + 2m = 3m + n - 2 = 0 \rightarrow 3m + n = 2.$$

Calculamos la transpuesta de la matriz A e imponemos que coincida con la matriz:

$$A = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$ Obtenemos que m debe valer -1.

Sustituimos ese valor en la ecuación: $3m + n = 2$ y calculamos n:

$3 \cdot (-1) + n = 2$. Obtenemos que n debe valer 5.

$$\boldsymbol{m = -1;\ n = 5.}$$

$b)$ Para $m = 0\ y\ n = 3$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, y su determinante:

$$|A| = 6 - 1 - 3 - 1 = 1 \neq 0,$$

Por lo que sí tiene matriz inversa. Podemos calcularla por el método de Gauss o por la definición.

Usamos el Método de Gauss:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\{F_3 \rightarrow F_3 - F_1\} \qquad \left\{F_2 \rightarrow \tfrac{1}{3}F_2\right\}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{Bmatrix} F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \qquad \{F_3 \rightarrow 3 \cdot F_3\} \qquad \begin{Bmatrix} F_1 \rightarrow F_1 - \frac{4}{3}F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 - \frac{1}{3}F_3 \end{Bmatrix}$$

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
www.apuntesmareaverde.org.es

La matriz inversa es: $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

$c)$ Resolvemos en primer lugar la ecuación matricial, despejando la matriz X, transponiendo términos y multiplicando por A^{-1}:

$$X \cdot A + 2 \cdot I_3 = A^2 \rightarrow \ X \cdot A = A^2 - 2 \cdot I_3 \rightarrow \ X \cdot A \cdot A^{-1} = (A^2 - 2 \cdot I_3) \cdot A^{-1} \rightarrow$$

$$X \cdot I = (A^2 - 2 \cdot I_3) \cdot A^{-1} \rightarrow$$

$$X = (A^2 - 2 \cdot I_3) \cdot A^{-1}$$

Para $m = 0\ y\ n = 3$ sustituimos A y A^{-1} en $X = (A^2 - 2 \cdot I_3) \cdot A^{-1}$. Todas las matrices las tenemos ya calculadas:

$$X = (A^2 - 2 \cdot I_3) \cdot A^{-1} = (\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot I_3) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-9} & \mathbf{-7} & \mathbf{9} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}.$$

Problema 2:

Una empresa produce dos tipos de camisas con perlas blancas, grises y rosas. Para hacer una camisa del tipo A hacen falta 20 perlas blancas, 20 grises y 30 rosas, mientras que para una camisa del tipo B se necesitan 10 perlas blancas, 20 grises y 60 rosas. La empresa dispone de un máximo de 900 perlas blancas y 1 400 grises, y decide utilizar al menos 1 800 perlas rosas. Se sabe que el beneficio que se obtiene por cada camisa del tipo A es de 60 euros, y por cada camisa del tipo B de 50 euros.

a) Calcula cuántas unidades de cada tipo de camisa debe producir para obtener el máximo beneficio, así como el valor de dicho beneficio.

b) ¿Es posible que la empresa fabrique 40 camisas del tipo A y 20 camisas del tipo B? Razona la respuesta.

Solución:

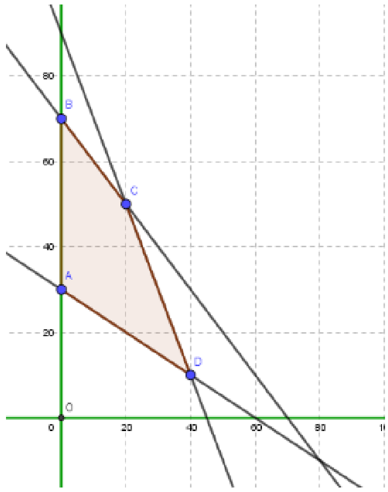
a) Es un problema de programación lineal. Llamamos x al número de camisas del tipo A e y a las del tipo B que fabrica la empresa.

Siguiendo el enunciado las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 20x+10y \le 900 \\ 20x+20y \le 1\,400 \\ 30x+60y \ge 1\,800 \\ x \ge 0; y \ge 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y \le 90 \\ x+y \le 70 \\ x+2y \ge 60 \\ x \ge 0; y \ge 0 \end{array}\right\}.$

Buscamos los vértices.

Dibujamos las rectas y determinamos la región factible:

La zona factible es el polígono que aparece sombreado en la figura.



La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 60x + 50y$.

Los vértices de la región factible son los siguientes:

$A: \left.\begin{array}{r} x+2y = 60 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 30 \Rightarrow A(0,30).$

$B: \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x+y = 70 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0,70).$

$C: \left.\begin{array}{r} 2x+y = 90 \\ x+y = 70 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y = 90 \\ -x-y = -70 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 20; y = 50 \Rightarrow C(20,50).$

$D: \left.\begin{array}{r} 2x+y = 90 \\ x+2y = 60 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x+2y = 180 \\ -x-2y = -60 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 120;\ \ x = 40;\ \ 40+2y = 60 \Rightarrow D(40,10).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,30) = 60 \cdot 0 + 50 \cdot 30 = 0 + 1\,500 = 1\,500.$
$B \Rightarrow f(0,70) = 60 \cdot 0 + 50 \cdot 70 = 0 + 3\,500 = 3\,500.$
$C \Rightarrow f(20,50) = 60 \cdot 20 + 50 \cdot 50 = 1\,200 + 2\,500 = 3\,700.$
$D \Rightarrow f(40,10) = 60 \cdot 40 + 50 \cdot 10 = 2\,400 + 500 = 2\,900.$
El máximo se produce en el punto $C(20,50)$.

Debe fabricar **20** camisas tipo ***A*** y **50** camisas tipo ***B***, con un beneficio de **3 700 euros**

b) El punto $P(40,20)$ no satisfacerse todas las restricciones del enunciado. Por ejemplo, debe ser:

$2x + y \le 90$ y sin embargo $2 \cdot 40 + 20 = 100 > 90$

Con las restricciones dadas no es posible fabricar 40 camisas del tipo A y 20 del tipo B.

Problema 3:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & si \;\; x < 1 \\ ax + \frac{2}{x} & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$:

$a)$ Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.

$b)$ En el caso $a = 1/2$, determina la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 2$.

$c)$ En el caso $a = 2$, realiza la representación gráfica de la función; para ello, calcula los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión cuando $x < 1$.

$d)$ Calcula $I = \int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) \cdot dx$.

Solución:

$a)$ La función dada es una función definida a trozos, formada por una función polinómica, continua en toda la recta real y una función suma de una polinómica y de una de proporcionalidad inversa, que no sería continua en $x = 0$, pero definida para $x \geq 1$, por lo que ese valor no pertenece a su dominio.

Por tanto, el único punto de continuidad dudosa es en el de unión de ambas ramas, es decir en $x = 1$. Para imponer que la función sea continua en ese punto debemos saber que:

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \to \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^3 + 3x^2) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(ax + \dfrac{2}{x}\right) = a + 2 = f(1) \end{cases} \to \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \to$$

$4 = a + 2 \to a = 2$.

La función es continua en toda la recta real si $\boldsymbol{a = 2}$

$b)$ El valor $x = 2 \geq 1$, luego está en la segunda rama. Y si $a = 1/2$ la función resulta $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

Debemos calcular el punto de tangencia y la derivada primera en ese punto:

Para $x = 2$ es $f(2) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2$, por lo cual el punto de tangencia es $P(2,2)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} \to m = f'(2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \to m = 0$.

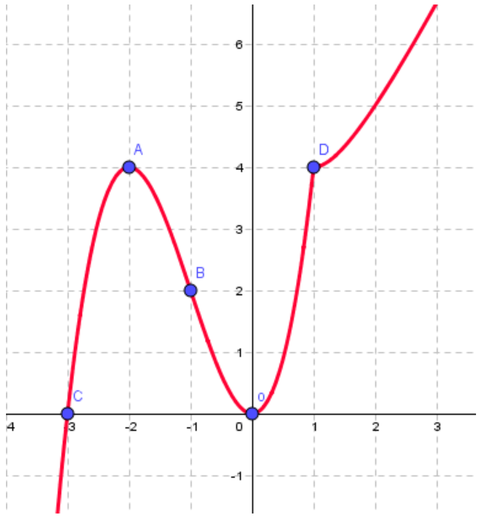
Al ser la pendiente 0, la recta tangente va a ser una recta horizontal $y = 2$.

Pero vamos a calcularla paso a paso: La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(2,2)$ con $m = 0$ es:

$$y - 2 = 0 \cdot (x - 2) = 0$$

La recta tangente es $\boldsymbol{y = 2}$

$c)$ Para $a = 2$ la función resulta ser $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & si\ \ x < 1 \\ 2x + \frac{2}{x} & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$. Como ya hemos visto en el apartado a) en este caso la función es continua, luego los máximos y mínimos serán donde se anule la derivada primera:



$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x & si\ \ x < 1 \\ 2 - \dfrac{2}{x^2} & si\ \ x > 1 \end{cases} \rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x + 6 & si\ \ x < 1 \\ \dfrac{4}{x^3} & si\ \ x > 1 \end{cases}$$

Para $x = 1$ puede no existir la derivada.

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x \ = 0 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0\ ambos\ x < 1 \\ 2 - \dfrac{2}{x^2} = 0 \ \rightarrow \ x_3 = -1, x_3 = 1, ninguno\ x > 1 \end{cases}$$

$$f(0) = 3(0)^2 + 6(0) = 0$$

$f''(0) = 6(0) + 6 = 6 > 0$, luego O(0, 0) es un mínimo relativo.

$$f(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 = -8 + 12 = 4$$

$f''(-2) = 6(-2) + 6 = -12 + 6 = -6 < 0$, luego $A(-2, 4)$ es un máximo relativo.

La derivada segunda sólo se anula en $x = -1 < 1$.

$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 = 2$, luego $B(-1, 2)$ es un punto de inflexión

Mínimo relativo: $O(\mathbf{0}, \mathbf{0})$; Máximo relativo: $A(-\mathbf{2}, \mathbf{4})$; Punto de inflexión: $B(-\mathbf{1}, \mathbf{2})$

Otros puntos de la curva son: $C(-3, 0)$ punto de corte con el eje de abscisas; $D(1, 4)$ punto de unión de ambas ramas, donde la función es continua pero no es derivable.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que se indica en la figura adjunta.

$d)$ La integral pedida está formada por cuatro integrales inmediatas:

$$I = \int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) \cdot dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + 2lnx - 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^4}{4} + x^3 + Lx^2 + \frac{4}{x} + C$$

$$I = \int \left(x^3 + 3x^2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) \cdot dx = \boldsymbol{\frac{x^4}{4} + x^3 + Lx^2 + \frac{4}{x} + C}$$

Problema 4:

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 11$:

$a)$ Calcula el valor de los parámetros a y b para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $P(2, 5)$.

$b)$ En el caso de $a = \frac{3}{8}$ y $b = \frac{-9}{2}$, estudia los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función.

$c)$ En el caso de $a = \frac{3}{8}$ y $b = \frac{-9}{2}$, representa y calcula el área de la región limitada por la función, el eje de abscisas OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

Solución:

$a)$ Imponemos en primer lugar que la función pase por el punto $P(2, 5) \Rightarrow f(2) = 5$:

$$f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + 11 = 5 \to \ 8a + 2b = -6 \to \ 4a + b = -3.$$

Como la función dada es una función polinómica es continua en toda la recta real, luego para que tenga un extremo relativo debe anularse la derivada en ese punto: $P(2, 5) \Rightarrow f'(2) = 0$

$$f'(x) = 3ax^2 + b \to f'(2) = 3a \cdot 2^2 + b = 0 = 12a + b = 0.$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones:

$\left.\begin{array}{r} 4a + b = -3 \\ 12a + b = 0 \end{array}\right\}$ Restamos a la segunda la primera: $8a = 3 \to a = \frac{3}{8}$

$\to 4 \cdot \frac{3}{8} + b = -3 \to \ \frac{3}{2} + b = -3 \to 3 + 2b = -6 \to \ 2b = -9 \to . \ b = -\frac{9}{2}$

$$\boldsymbol{a = \frac{3}{8}; \ b = -\frac{9}{2}}$$

$b)$ Para $a = \frac{3}{8}$ y $b = -\frac{9}{2}$ ya hemos visto que el punto $P(2, 5)$ es un extremo relativo.

La función es $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11$.

Como la función es polinómica y por tanto continua en toda la recta real, para que tenga un extremo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el extremo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto pues entonces el punto sería un punto de inflexión de tangente horizontal.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{2}$ $\qquad$ $f'(x) = 0 = \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{2} \to \ x^2 - 4 = 0 \to \ x^2 = 4 \to x_1 = -2, x_2 = 2.$

$$f(-2) = \frac{3}{8} \cdot (-2)^3 - \frac{9}{2} \cdot (-2) + 11 = -3 + 20 = 17$$

$f(2) = \frac{3}{8} \cdot 2^3 - \frac{9}{2} \cdot 2 + 11 = 3 - 9 + 11 = 5$

$$f''(x) = \frac{9}{4}x \to f''(-2) = \frac{9}{4} \cdot (-2) = -\frac{9}{2} < 0 \;\Rightarrow \mathit{Máximo\ relativo\ para}\ x = -2$$
$$\Rightarrow Máx.: A(-2, 17)$$

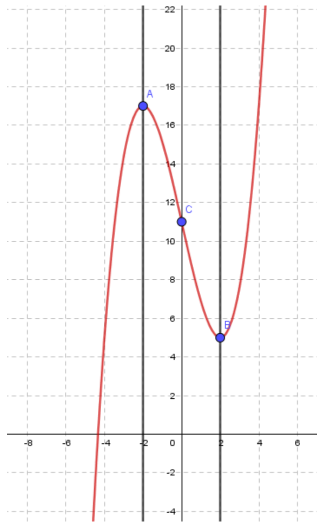
$$f''(2) = \tfrac{9}{4} \cdot 2 = \tfrac{9}{2} > 0 \;\Rightarrow \mathit{Mínimo\ relativo\ para}\ x = 2 \Rightarrow Mín.: B(2, 5).$$

Punto de inflexión: $f''(x) = \frac{9}{4}x = 0 \to x = 0 \to f(0) = 11 \Rightarrow P.I.: C(0, 11)$

Máximo relativo: $\boldsymbol{A(-2, 17)}$; Mínimo relativo: $\boldsymbol{B(2, 5)}$; Punto de inflexión: $\boldsymbol{C(0, 11)}$

$c)$ Hacemos una representación gráfica aproximada de la función $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11$.

El área pedida es: $S = \int_{-2}^{2} f(x) \cdot dx = \int_{-2}^{2} \left(\frac{3}{8}x^3 - \frac{9}{2}x + 11\right) \cdot dx =$



Son tres integrales inmediatas de tipo potencial:

$$= \left[-\frac{3x^4}{32} - \frac{9x^2}{4} + 11x\right]_{-2}^{2} =$$

Sustituimos los límites de integración:

$$\left(-\frac{3 \cdot 2^4}{32} - \frac{9 \cdot 2^2}{4} + 11 \cdot 2\right) - \left[-\frac{3 \cdot (-2)^4}{32} - \frac{9 \cdot (-2)^2}{4} + 11 \cdot (-2)\right] =$$

$$= (-3 - 9 + 22) - (-3 - 9 - 22) = 10 + 34 = 44.$$

$$S = \int_{-2}^{2} f(x) \cdot dx = \boldsymbol{44\ u^2}$$

Problema 5:

Dos cajas, A y B, contienen bolas de colores con la siguiente composición: la caja A contiene 5 blancas, 3 negras y 2 rayadas y la B, 4 blancas y 6 negras. Por otro lado, tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y los otras dos con la letra B. Tiramos el dado, y sacamos una bola al azar de la caja que indica el dado:

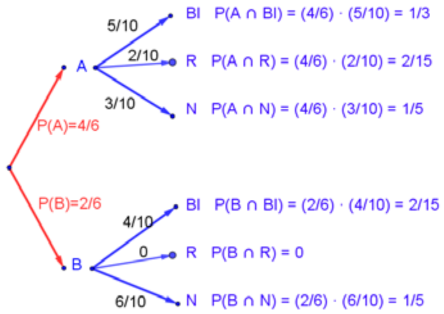
a) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea rayada?

c) La bola extraída ha resultado ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la caja B?

Solución:

Representamos la situación en un diagrama en árbol. Llamamos A al suceso sacar la bola de la caja A y B al suceso sacarla de la caja B. Llamamos Bl al suceso que la bola sea blanca, R si es rayada y N si lo es negra. La probabilidad de sacar la bola de la caja A es 4/6 ya que el dado tiene cuatro caras marcadas con esa letra, y la de B, 2/6.



a) Para obtener la probabilidad de que la bola sea blanca debemos sumar las dos ramas que terminan en Bl.

$$P=P(Bl)=P(A\cap Bl)+P(B\cap Bl)=P(A)\cdot P(Bl/A)+P(B)\cdot P(Bl/B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{2}{15}=\frac{5+2}{15}=\frac{7}{15}=0.4667.$$

La probabilidad de que la bola sea blanca es de $\mathbf{\frac{7}{15}=0.4667}$.

b) Ahora sumaremos también las dos ramas, donde una de ellas es cero.

$$P=P(R)=P(A\cap R)+P(B\cap R)=P(A)\cdot P(R/A)+P(B)\cdot P(R/B)==\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{2}{15}+0=\frac{2}{15}=0.1333.$$

La probabilidad de que la bola sea rayada es de $\mathbf{\frac{2}{15}=0.1333.}$

c) Debemos calcular una probabilidad condicionada.

Sabemos que $P(B\cap Bl)=P(Bl\cap B)=\ P(Bl)\cdot P(B/Bl)$ = $P(B)\cdot P(Bl/B)$, por lo que:

$$P(B/Bl)=\frac{P(B\cap Bl)}{P(Bl)}=\frac{P(B)\cdot P(Bl/B)}{P(Bl)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{7}{15}}=\frac{2}{7}=0.2857.$$

La bola extraída ha resultado ser blanca. La probabilidad de que proceda de la caja B es $\mathbf{\frac{2}{7}=0.2857}$

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 6:

Sea A, B, C, D, E y F sucesos de un determinado experimento aleatorio.

$a)$ Sabemos que $P(A) = 0.5;\ P(A \cup B) = 0.7\ y\ P(A \cap B) = 0.4$. Halla la probabilidad de que ocurra B.

$b)$ Sabemos que $P(C) = 0.4;\ P(D) = 0.3\ y\ P(C \cup D) = 0.5$. Halla la probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D.

$c)$ Sabemos que $P(E) = 0.6;\ P(F) = 0.8$. y que los sucesos E y F son independientes. Calcula la probabilidad de que no ocurran ninguno de los dos sucesos.

Solución:

$a)$ Nos dicen que: $P(A) = 0.5;\ P(A \cup B) = 0.7\ y\ P(A \cap B) = 0.4$. Sabemos que:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Por lo que:

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0.7 - 0.5 + 0.4 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(B) = 0.6}$$

$b)$ Nos dicen que: $P(C) = 0.4;\ P(D) = 0.3\ y\ P(C \cup D) = 0.5$. La probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D es $P(C/\overline{D})$ probabilidad condicionada que vale:

$$P(C/\overline{D}) = \frac{P(C \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(C) - P(C \cap D)}{1 - P(D)}.$$

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \Rightarrow P(C \cap D) = P(C) + P(D) + P(C \cup D) = 0.4 + 0.3 - 0.5 = 0.2.$$

Sustituyendo los valores dados y obtenido:

$$P(C/\overline{D}) = \frac{0.4 - 0.2}{1 - 0.3} = \frac{0.2}{0.7} = 0.2857.$$

$$\boldsymbol{P(C/\overline{D}) = 0.2857.}$$

$c)$ Nos dicen que: $P(E) = 0.6;\ P(F) = 0.8$. y que los sucesos E y F son independientes, es decir: $P(E) \cdot P(F) = P(E \cap F)$.

Nos piden la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos, es decir: $P(\overline{E} \cap \overline{F})$

Por las Leyes de Morgan sabemos:

$$P(\overline{E} \cap \overline{F}) = 1 - P(E \cup F) = 1 - [P(E) + P(F) - P(E \cap F)] = 1 - (0.6 + 0.8 - 0.48) =$$

$$1 - 0.92 = 0.08.$$

$$\boldsymbol{P(\overline{E} \cap \overline{F}) = 0.08}$$

Problema 7:

En un test de empatía el 40 % de la población examinada obtuvo un resultado inferior a 4 puntos. Sabemos que el resultado del test sigue una distribución normal de media 4.8 puntos.

$a)$ Calcula la desviación típica de la distribución.

$b)$ Si la desviación típica es 3.14 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 35 % de la población?

$c)$ Si la desviación típica es 3.14 puntos, ¿qué porcentaje de la población tiene un resultado que se diferencia de la media en menos de 2 puntos?

Solución:

$a)$ Nos dice el enunciado que: $P(X<4)=0.4;\ \ \mu=4.8.$

Tipificamos la variable: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ $\quad P(X<4)=0.4\Rightarrow P\left(Z<\frac{4-4.8}{\sigma}\right)=P\left(Z<\frac{-0.8}{\sigma}\right)=0.4;$

$P\left(Z\geq\frac{0.8}{\sigma}\right)=0.4=1-P\left(Z<\frac{0.8}{\sigma}\right);\ \ P\left(Z<\frac{0.8}{\sigma}\right)=0.6.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ al valor 0.6 le corresponde un valor entre 0.25 y 0.26. Por proporcionalidad estimamos dicho valor:

$$\left.\begin{matrix}0.5984---0.25\\0.6026---0.26\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}42---0.01\\16----x\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=\frac{0.16}{42}=0.004\rightarrow\frac{0.8}{\sigma}=0.254;\ \ \sigma=\frac{0.8}{0.254}=3.15.$$

La desviación típica de la distribución vale $\mathbf{3.15}$.

$b)$ Siendo β la puntuación que supera el 35 % de la población, se tienen los siguientes datos:

$P(X<\beta)=1-0.35=0.65;\ \ \mu=4.8;\ \ \sigma=3.14$. Tipificando la variable: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{\beta-4.8}{3.14}$.

$$P(X<\beta)=0.65=\ P\left(Z<\frac{\beta-4.8}{3.14}\right)$$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de manera inversa, al valor 0.65 le corresponde a un valor entre 0.38 y 0.39. Mediante una proporción lo calculamos:

$$\left.\begin{matrix}0.6480\rightarrow0.38\\0.6517\rightarrow0.39\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}37-0.01\\20-x\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=\frac{0.20}{37}=0.005\Rightarrow\frac{\beta-4.8}{3.14}=0.385\Rightarrow$$
$$\beta-4.8=0.385\cdot3.14=1.209\Rightarrow\beta\cong6.$$

La puntuación de $\mathbf{6}$ es superada únicamente por el 35 % de la población.

$c)$ El enunciado nos dice: $\mu=4.8;\ \ \sigma=3.14$. Tipificando la variable: $Z=\frac{X-4.8}{3.14}$. Y nos piden

$$P(4.8-2\leq X\leq4.8+2)=P(2.8\leq X\leq6.8)=P\left(\frac{2.8-4.8}{3.14}\leq Z\leq\frac{6.8-4.8}{3.14}\right)=P\left(\frac{-2}{3.14}\leq Z\leq\frac{2}{3.14}\right)=$$
$$=P(-0.64\leq Z\leq0.64)=P(Z<0.64)-[1-P(Z<0.64)]=P(Z<0.64)-1+P(Z<0.64)$$
$$=2\cdot P(Z<0.64)-1=2\cdot0.7389-1==1.4778-1=0.4778.$$

El porcentaje de la población tiene un resultado que se diferencia de la media en menos de 2 puntos es del $\mathbf{47.78}$ %.

Problema 8:

El gasto que realizan los jóvenes de una determinada ciudad durante un fin de semana es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 6 puntos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple, y se obtiene que el intervalo de confianza para la media es $(24.47,\ 26.43)$ con un nivel de confianza del 95 %. Calcula el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se ha seleccionado otra muestra de tamaño 49 para estimar μ. Calcula el error máximo admisible cometido para dicha estimación con un nivel de confianza del 97 %.

Solución:

a) La media es desconocida y $\sigma = 6$. El intervalo de confianza para la media es $(24.47,\ 26.43)$, por lo que: $E = \frac{26.43-24.47}{2} = \frac{1.96}{2} = 0.98$. Estimamos la media muestral como el punto medio del intervalo: $\overline{x} = \frac{24.47+26.43}{2} = \frac{50.9}{2} \Rightarrow \overline{x} = 25.45$.

Nos dicen que el nivel de confianza es del 95 %:

$1-\alpha = 0.95;\ \alpha = 1-0.95 = 0.05;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.\ (1-0.025 = 0.9750; z = 1.96).$

Por lo tanto: $\sigma = 6;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96;\ \ E = 0.98.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{6}{0.98}\right)^2 = 12^2 = 144.$

El tamaño mínimo de la muestra elegida es de $\mathbf{144}$ jóvenes. La media muestral es: $\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{25.45}$

b) Los datos son ahora diferentes: El nivel de confianza es del 97 %.

$1-\alpha = 0.97\ \rightarrow\ \alpha = 1-0.97 = 0.03\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.015} = 2.17.\ (1-0.015 = 0.9850\ \rightarrow z = 2.17).$

Y nos dicen que: $n = 49;\ \ \sigma = 6;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17.$

El error máximo admisible valdrá:

$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{6}{\sqrt{49}} = 2.17 \cdot \frac{6}{7} \Rightarrow E = 1.86.$

El error máximo admisible es de $\mathbf{1.86}$

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Ese examen tiene ocho problemas. Debes responder a cuatro de ellos. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar el número necesario. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programables, resolución de ecuaciones, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

Problema 1:

Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = 5x + 4y$ en el recinto definido por las siguientes restricciones: $\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + y \geq 5 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$.

$a)$ Representa el recinto mencionado.

$b)$ Obtén los puntos en que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de ésta en dichos puntos.

Problema 2:

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$? Razona la respuesta.

$b)$ Resolver la ecuación matricial: $X \cdot A = 2B^t + I_2$.

Problema 3:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x + 2 & si \ -2 \leq x < 0 \\ -x + 2 & si \ \ 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x + 4 & si \ \ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$:

$a)$ Analiza la continuidad de la función en el intervalo $[-2, 4]$.

$b)$ Realiza la representación gráfica de la función.

$c)$ Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX.

Problema 4:

El coste de producción de una empresa, $f(x)$, medido en miles de euros, depende de la cantidad de producto fabricada, x, medida en toneladas.

$$f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$$

La capacidad de producción máxima es de 2 toneladas.

$a)$ Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función coste de producción de la empresa.

$b)$ Determina la cantidad que la empresa debe producir para minimizar el coste de producción. ¿Cuál sería dicho coste mínimo?

$c)$ ¿Con qué cantidad alcanza la empresa su máximo coste de producción? Determinar dicho coste máximo.

Problema 5:

En una biblioteca hay 60 novelas de acción y 20 de terror. Janire elige una novela al azar y se la lleva. A continuación, Eneko elegirá otra novela al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Janire y Eneko elijan novelas de acción?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Eneko sea de acción?

c) Si la novela que ha elegido Eneko es de acción, ¿cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Janire haya sido de terror?

Problema 6:

Lucía tiene dos dioptrías en un ojo y una dioptría en el otro, y Nerea dos dioptrías en cada ojo. Cada chica tiene una bolsa con 10 lentillas de una dioptría y otras 10 lentillas de dos dioptrías. Cada una sacará al azar dos lentillas de su bolsa.

a) ¿Cuál es la probabilidad que tiene cada chica de elegir las lentillas que necesita?

b) En la bolsa de Lucía hay dos lentillas defectuosas. Con el fin de separarlas del resto, sacará una tras otra hasta que las encuentre. ¿Cuál es la probabilidad de que consiga encontrar las dos defectuosas en el tercer intento?

Problema 7:

Según un estudio de la Dirección General de Tráfico el número de horas de prácticas necesarias para la obtención del carnet de conducir sigue una distribución normal $N(24, 9)$.

a) Calcula la probabilidad de obtener el permiso de conducir con menos de 20 horas de prácticas.

b) ¿Cuántas horas ha necesitado Andrea para conseguir el carnet de conducir, si se sabe que el 89 % de los conductores y conductoras ha necesitado más horas que ella?

Problema 8:

Para conocer el gasto medio anual que las familias de una determinada población realizan en servicios de hostelería, se ha tomado una muestra aleatoria de familias a partir de la cual se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media es $(820, 830)$ con un nivel de confianza del 95 %. Se sabe que el gasto anual tiene una distribución normal con desviación típica 80 euros.

a) Calcula la media obtenida a partir de la muestra.

b) Calcula el número de familias que han formado parte de la muestra.

Autor: Álvaro Garmendia Antolín
www.apuntesmareaverde.org.es

RESPUESTAS

Problema 1:

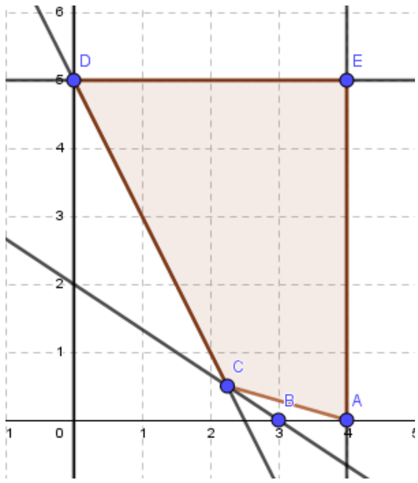
Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x,y)=5x+4y$ en el recinto definido por las siguientes restricciones: $\begin{cases} 2x+3y\geq 6 \\ 2x+y\geq 5 \\ 0\leq x\leq 4 \\ 0\leq y\leq 5 \end{cases}$.

$a)$ Representa el recinto mencionado.

$b)$ Obtén los puntos en que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de ésta en dichos puntos.

Solución:

$a)$ Es un problema de programación lineal. Para representar la región factible buscamos los puntos de intersección de las rectas que lo limitan y para delimitarlo comprobamos que el origen $O(0,0)$ no verifica las restricciones.



La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A: \left.\begin{matrix} y=0 \\ x=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(4,0).$

$B: \left.\begin{matrix} y=0 \\ 2x+3y=6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=3 \Rightarrow B(3,0).$

$D: \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D(0,5).$

$E: \left.\begin{matrix} y=5 \\ x=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow E(4,5).$

$C: \left.\begin{matrix} 2x+3y=6 \\ 2x+y=5 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 2x+3y=6 \\ -2x-y=-5 \end{matrix}\right\} \rightarrow 2y=1 \rightarrow y=\frac{1}{2} \rightarrow 2x+\frac{1}{2}=5 \rightarrow 4x+1=10 \rightarrow 4x=9 \rightarrow x=\frac{9}{4} \Rightarrow C\left(\frac{9}{4},\frac{1}{2}\right).$

$b)$ La función objetivo es $f(x,y)=5x+4y$.

Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible son

$A: f(4,0)=5\cdot 4+4\cdot 0=20+0=20.$

$B: f(3,0)=5\cdot 3+4\cdot 0=15+0=15.$

$C: f\left(\frac{9}{4},\frac{1}{2}\right)=5\cdot\frac{9}{4}+4\cdot\frac{1}{2}=\frac{45}{4}+2=\frac{53}{4}=13.25.$

$D: f(0,5)=5\cdot 0+4\cdot 5=0+20=20.$

$E: f(4,5)=5\cdot 4+4\cdot 5=20+20=40.$

El máximo, 40, se produce en el punto $E(\mathbf{4},\mathbf{5})$ y el mínimo, 13.25, en el punto $C\left(\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$.

Problema 2:

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$? Razona la respuesta.

$b)$ Resolver la ecuación matricial: $X \cdot A = 2B^t + I_2$.

Solución:

$a)$ Para comprobarlo hacemos las operaciones indicadas:

$$(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$$

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$.

$2A \cdot B = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$.

$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 + 2A \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -16 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}.$$

En general, se verifica que $(A+B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$, y como el producto de matrices no tiene la propiedad conmutativa, no siempre se verifica, pero en este caso, sí:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$$

$b)$ Despejamos la matriz X multiplicando por la matriz inversa de A, y hacemos operaciones.

$$X \cdot A = 2B^t + I_2 \to X \cdot A \cdot A^{-1} = (2B^t + I_2) \cdot A^{-1} \to X \cdot I_2 = (2B^t + I_2) \cdot A^{-1} \to$$

$$X = (2B^t + I_2) \cdot A^{-1}.$$

Damos valores a las matrices y efectuamos las operaciones

$2B^t + I_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculamos la matriz inversa por dos procedimientos:

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 7;$ $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -7 \end{pmatrix};$ $Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{7}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por Gauss:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -7 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2/7 \\ 0 & 1 & 0 & -1/7 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2/7 \\ 0 & -1/7 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \to 7F_1 + 2F_2 \qquad F_1 \to \left(\frac{-1}{7}\right) F_1;\ F_2 \to \left(\frac{-1}{7}\right) F_2$$

$$X = (2B^t + I_2) \cdot A^{-1} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 35 & 10 \\ 14 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 35 & 10 \\ 14 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 3:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x+2 \ si \ -2 \leq x < 0 \\ -x+2 \ si \ 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x + 4 \ si \ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$:

$a)$ Analiza la continuidad de la función en el intervalo $[-2, 4]$.

$b)$ Realiza la representación gráfica de la función.

$c)$ Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX.

Solución:

$a)$ Es una función a trozos formada por tres funciones polinómicas continuas en toda la recta real. Puede perder la continuidad únicamente en los puntos de unión de los trozos, $x = 0 \ y \ x = 2$. Los estudiamos:

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

Estudio en $x = 0 \to \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+2) = 2 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(-x+2) = 2 = f(0) \end{cases} \to \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \to.$

$$f(x) \ es \ continua \ para \ x = 0$$

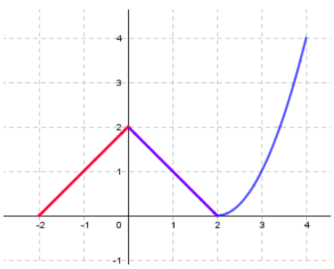
Estudio en $x = 2 \to \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(-x+2) = 0 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(x-2)^2 = 0 = f(2) \end{cases} \to \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \to$

$$f(x) \ es \ continua \ para \ x = 2$$

La función es continua en todo el intervalo $[-2, 4]$

$b)$ La función está formada por dos segmentos de rectas y uno de parábola.

En el intervalo $[-2, 0)$ la función es el segmento de extremos los puntos $A(-2, 0) \ y \ B(0, 2)$. En el intervalo $[0, 2)$ la función es el segmento de extremos los puntos $B(0, 2) \ y \ C(2, 0)$. En el intervalo $[2, 4]$ la función es la parábola $y = x^2 - 4x + 4$, que es convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2; son puntos de la parábola $C(2, 0), D(3, 1) \ y \ E(4, 4)$.



$c)$ De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, está formada por dos regiones, un triángulo de área 4, calculándola como base por altura divido por 2, y la limitada por la parábola:

$\int_2^4 (x^2 - 4x + 4) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_2^4 =$

$\left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2\right) = \frac{64}{3} - 32 + 16 - \frac{8}{3} + 8 - 8 = \frac{56}{3} - 12$

Sumamos 4.

$$S = \frac{20}{3} \ u^2 \cong 6.67 \ u^2$$

Problema 4:

El coste de producción de una empresa, $f(x)$, medido en miles de euros, depende de la cantidad de producto fabricada, x, medida en toneladas.

$$f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$$

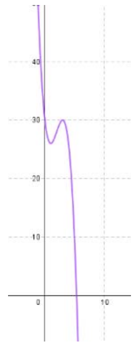
La capacidad de producción máxima es de 2 toneladas.

$a)$ Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función coste de producción de la empresa.

$b)$ Determina la cantidad que la empresa debe producir para minimizar el coste de producción. ¿Cuál sería dicho coste mínimo?

$c)$ ¿Con qué cantidad alcanza la empresa su máximo coste de producción? Determinar dicho coste máximo.

Solución:



$a)$ La función es una cúbica. Por el enunciado, sólo tiene sentido para valores positivos, $x \geq 0$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = -9 + 12x - 3x^2$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow -9 + 12x - 3x^2 = 0;\; x^2 - 4x + 3 = 0;\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$

$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow x = 1, x = 3.$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función en los intervalos $(0, 1)\ y\ (1, 3)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

$x \in (0, 1) \rightarrow$ La función es decreciente; $x \in (1, 3) \rightarrow$ La función es creciente; $x > 3$, la función es decreciente

Parece que el enunciado dice que la variable x es menor que 2, pues la capacidad de producción máxima es de 2 toneladas, y el dominio de la función es $D(f) \Rightarrow [0, 2]$, por lo que:

$x \in (0, 1)$: La función es decreciente; $x \in (1, 2]$: La función es creciente

$b)$ El mínimo se alcanza para $x = 1$: $f(1) = 30 - 9 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 - 1^3 = 30 - 9 + 6 - 1 = 26.$

El coste mínimo de producción es de 26 000 euros y se obtiene para una producción de 1 tonelada

$c)$ El máximo de la cúbica se alcanza para $x = 3$ que está fuera del dominio $[0, 2]$, por lo que el máximo deberá alcanzarse en los extremos del dominio:

$f(0) = 30.$

$f(2) = 30 - 9 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 - 2^3 = 30 - 18 + 24 - 8 = 28.$

El coste máximo de producción es de 30 000 euros y se obtiene para una producción de 0 toneladas

Problema 5:

En una biblioteca hay 60 novelas de acción y 20 de terror. Janire elige una novela al azar y se la lleva. A continuación, Eneko elegirá otra novela al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Janire y Eneko elijan novelas de acción?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Eneko sea de acción?

c) Si la novela que ha elegido Eneko es de acción, ¿cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Janire haya sido de terror?

Solución:

a) Llamamos A al suceso. elegir una novela de acción, y T a elegir una novela de terror

$$P = P(A, A) = \frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} = \frac{3 \cdot 59}{4 \cdot 79} = \frac{177}{316} = 0.5601.$$

La probabilidad de que Janire y Eneko elijan novelas de acción es de $\mathbf{0.5601}$

b) Ahora Janire puede elegirla de acción o de terror:

$$P = P(A, A) + P(T, A) = \frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} + \frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79} = \frac{3 \cdot 59}{4 \cdot 79} + \frac{1 \cdot 60}{4 \cdot 79} = \frac{237}{316} = 0.75.$$

La probabilidad de que la novela elegida por Eneko sea de acción es de $\mathbf{0.75}$

c) Nos piden ahora una probabilidad condicionada:

$$P = P(T/A) = \frac{P(T,\ A)}{P(A,A)+P(T,A)} = \frac{\frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79}}{\frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} + \frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79}} = \frac{20 \cdot 60}{60 \cdot 59 + 20 \cdot 60} = \frac{20}{79} = 0.2532.$$

Si la novela que ha elegido Eneko es de acción, la probabilidad de que la novela elegida por Janire haya sido de terror es de $\mathbf{0.2532}$

Problema 6:

Lucía tiene dos dioptrías en un ojo y una dioptría en el otro, y Nerea dos dioptrías en cada ojo. Cada chica tiene una bolsa con 10 lentillas de una dioptría y otras 10 lentillas de dos dioptrías. Cada una sacará al azar dos lentillas de su bolsa.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad que tiene cada chica de elegir las lentillas que necesita?

$b)$ En la bolsa de Lucía hay dos lentillas defectuosas. Con el fin de separarlas del resto, sacará una tras otra hasta que las encuentre. ¿Cuál es la probabilidad de que consiga encontrar las dos defectuosas en el tercer intento?

Solución:

$a)$ Llamamos 1 al suceso sacar una lentilla de una dioptría, y 2 a sacar una de dos dioptrías

$Lucía: P = P(1,2) + P(2,1) = \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} + \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} = 2 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{10}{19} = 0.5263.$

$Nerea: P = P(2,2) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{38} = 0.2368.$

La probabilidad que tienen Nerea de sacar las lentillas que necesita es $\mathbf{0.5263}$, y la que tiene Nerea es $\mathbf{0.2368}$

$b)$ Llamamos D al suceso lentilla defectuosa, y C al suceso lentilla correcta. Las posibilidades para sacarlas en tres intentos son: $(C, D, D), (D, C, D)$

$P = P(C, D, D) + P(D, C, D) = \frac{18}{20} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18} + \frac{2}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{18} = 2 \cdot \frac{2}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{95} = 0.0105.$

La probabilidad de que consiga encontrar las dos defectuosas en el tercer intento es $\mathbf{0.0105}$

Problema 7:

Según un estudio de la Dirección General de Tráfico el número de horas de prácticas necesarias para la obtención del carnet de conducir sigue una distribución normal $N(24, 9)$.

$a)$ Calcula la probabilidad de obtener el permiso de conducir con menos de 20 horas de prácticas.

$b)$ ¿Cuántas horas ha necesitado Andrea para conseguir el carnet de conducir, si se sabe que el 89 % de los conductores y conductoras ha necesitado más horas que ella?

Solución:

$a)$ Nos dicen que: $\mu = 24$; $\sigma = 9$. $X: N(\mu;\ \sigma) = N(24, 9)$.

Tipificamos la variable: $Z = \frac{X-24}{9}$.

$$P = P(X < 20) = P\left(Z < \frac{20-24}{9}\right) = P\left(Z < \frac{-4}{9}\right) = P(Z < -0.44) == P(Z \geq 0.44) =$$
$$1 - P(Z \leq 0.44) = 1 - 0.6700 = 0.3300.$$

La probabilidad de obtener el permiso de conducir con menos de 20 horas de prácticas es de $\mathbf{0.33}$.

$b)$ Queremos determinar β tal que: $P(X > \beta) = 0.89$

$P = P(X > \beta) = 0.89 \Rightarrow P\left(Z > \frac{\beta-24}{9}\right) = 1 - \left(Z \leq \frac{\beta-24}{9}\right) = 0.89 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\beta-24}{9}\right) = 0.11.$

Por ser la probabilidad menor que 0.5, el valor de $\frac{\beta-24}{9}$ es negativo, por lo cual:

$P\left(Z \leq -\frac{\beta-24}{9}\right) = 1 - 0.11 = 0.89.$

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0, 1)$ a 0.89 le corresponde, aproximadamente, 1.23:

$-\frac{\beta-24}{9} = 1.23;\ \beta - 24 = -11.07;\ \beta = 24 - 11.07 = 12.93.$

Andrea ha necesitado aproximadamente **13** horas en conseguir su carnet.

Problema 8:

Para conocer el gasto medio anual que las familias de una determinada población realizan en servicios de hostelería, se ha tomado una muestra aleatoria de familias a partir de la cual se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media es $(820, 830)$ con un nivel de confianza del 95 %. Se sabe que el gasto anual tiene una distribución normal con desviación típica 80 euros.

$a)$ Calcula la media obtenida a partir de la muestra.

$b)$ Calcula el número de familias que han formado parte de la muestra.

Solución:

$a)$ Tomamos como media muestral el punto medio del intervalo:

$\overline{x} = \frac{830+820}{2} = \frac{1\,650}{2} = 825.$

La media obtenida a partir de la muestra es de $\mathbf{825}$

$b)$ Usamos que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Vamos a calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

Para un nivel de confianza del 95 % es: $1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.$

$(1 - 0.025 = 0.9750 \rightarrow z = 1.96).$

Por tanto: $z_{\frac{\alpha}{2}=1.96}$

Calculamos: $E = \frac{830-820}{2} = \frac{10}{2} = 5.$

Sabemos entonces que: $\sigma = 80$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$; $E = 5.$

Sustituimos en $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ para calcular n.

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{80}{5}\right)^2 = (1.96 \cdot 16)^2 = 31.36^2 = 983.45.$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de $\mathbf{984}$ familias.