Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Textos Marea Verde

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia) ,

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: ANTONIO MENGUIANO

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D). Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior. Todos los resultados deben estar suficientemente justificados. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

BLOQUE A

1º) Una pastelería decide preparar dos tipos de cajas de pastelitos para regalar a los clientes en su inauguración. En total dispone de 120 piononos y 150 pestiños. En la caja del primer tipo habrá 3 piononos y 2 pestiños y en la del segundo tipo 4 piononos y 6 pestiños. Deben preparar al menos 9 cajas del segundo tipo. Determine cuántas cajas de cada tipo deberá preparar para realizar el máximo número de regalos posible. En este caso, indique cuántos piononos y cuántos pestiños se utilizarán.

2º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (2 \quad -1 \quad 0)$, $C = (1 \quad 3 \quad -1)$, donde a es un número real.

a) Halle los valores del parámetro a para que la matriz A tenga inversa.

b) Para $a = 2$, calcule la matriz inversa de A.

c) Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C$.

BLOQUE B

3º) a) Se considera la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales. Calcule los valores de a, b y c, sabiendo que la gráfica de f posee un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(0, 18)$ es -3.

b) Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje de abscisas y la gráfica de la función $g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$.

4º) a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 6x - 3 & si \ \ x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 2 & si \ \ x > 1 \end{cases}$ con a y b números reales. Determine los valores de a y b para que f sea continua y derivable en todo su dominio.

b) Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje OX y y la gráfica de la función $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

BLOQUE C

5º) En un estudio realizado en una sucursal bancaria se ha determinado que el 70 % de los créditos concedidos son hipotecarios y el 25 % de los créditos superan los 200.000 euros. El 20 % de los créditos son hipotecarios y de más de 200.000 euros. Se elige al azar un cliente al que han concedido un crédito. Calcule la probabilidad de que:

$a)$ El crédito no sea hipotecario y no supere los 200.000 euros.

$b)$ Si su crédito no es hipotecario, este no supere los 200.000 euros.

$c)$ Si su crédito supera los 200.000 euros, que este no sea hipotecario.

6º) En su tiempo libre, el 65 % de los estudiantes de un centro educativo juega con videojuegos, el 45 % lee libros y el 15 % no hace ninguna de las dos cosas. Elegido al azar un estudiante de dicho centro, calcule la probabilidad de que:

$a)$ Juegue con videojuegos o lea libros.

$b)$ Juegue con videojuegos y no lea libros.

$c)$ Lea libros sabiendo que no juega con videojuegos.

BLOQUE D

7º) La resistencia media a la ruptura de una nueva gama de herramientas sigue una distribución Normal de desviación típica $15\ MPa$ (megapascales). Se seleccionan al azar 100 herramientas forjadas en la misma máquina durante el mismo proceso de producción, obteniéndose una resistencia de $800\ MPa$.

$a)$ Realizando la estimación con un nivel de confianza del 92 %, ¿entre qué valores se estima la resistencia media poblacional de esta gama de herramientas?

$b)$ Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo en la estimación de la resistencia media a la ruptura sea menor que $2\ MPa$?

8º) Se quiere estudiar la proporción de perros que están vacunados en Andalucía. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 400 perros de los que 320 resultan estar vacunados.

$a)$ Obtenga un intervalo con un nivel de confianza del 92 % para estimar la proporción de perros vacunados en Andalucía y calcule el error máximo cometido.

$b)$ En una nueva muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuántos perros, como mínimo, hay que elegir para que el error sea menor que 0,02?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE A

1º) Una pastelería decide preparar dos tipos de cajas de pastelitos para regalar a los clientes en su inauguración. En total dispone de 120 piononos y 150 pestiños. En la caja del primer tipo habrá 3 piononos y 2 pestiños y en la del segundo tipo 4 piononos y 6 pestiños. Deben preparar al menos 9 cajas del segundo tipo. Determine cuántas cajas de cada tipo deberá preparar para realizar el máximo número de regalos posible. En este caso, indique cuántos piononos y cuántos pestiños se utilizarán.

SOLUCIÓN

Sean x *e* y el número de cajas de los tipos primero y segundo que se preparan en la pastelería, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 3x+4y \le 120 \\ 2x+6y \le 150 \\ x \ge 0;\ y \ge 9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x+4y \le 120 \\ x+3y \le 75 \\ x \ge 0;\ y \ge 9 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 3x+4y \le 120 \Rightarrow y \le \frac{120-3x}{4} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	40
y	30	0

② $\Rightarrow x+3y \le 75 \Rightarrow y \le \frac{75-x}{3} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	30
y	25	15

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=9 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,9).$ $\quad B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+3y=75 \end{array}\right\} \Rightarrow y=25 \Rightarrow B(0,25).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+4y=120 \\ x+3y=75 \end{array}\right\} \Rightarrow$

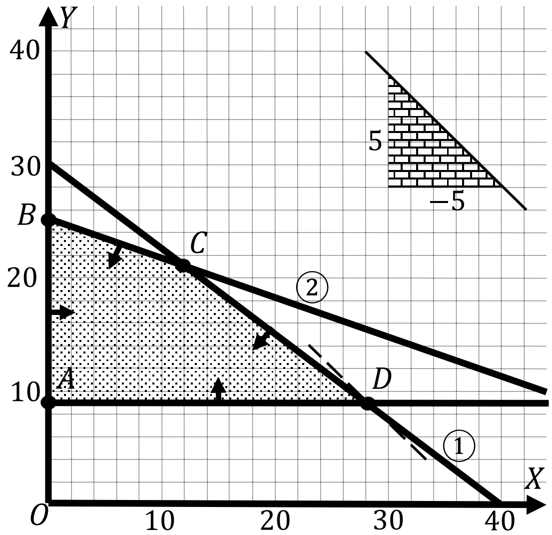
$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3x-4y=-120 \\ 3x+9y=225 \end{array}\right\} \Rightarrow 5y=105;$

$y=21; x+63=75;\ x=75-63=12 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(12,21).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=9 \\ 3x+4y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x+36=120;$

$3x=120-36=84;\ x=28 \Rightarrow D(28,9).$



La función de objetivos es $f(x,y)=x+y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,9)=0+9=9.$ $\quad B \Rightarrow f(0,25)=0+25=25.$

$C \Rightarrow f(12,21)=12+21=33.$ $\quad D \Rightarrow f(28,9)=28+9=37.$

El valor máximo se produce en el punto $D(28,9)$.

También se hubiera obtenido el punto $D(28, 9)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{1}x = -\frac{5}{5}x \Rightarrow m = -\frac{5}{5}$.

$\underline{Máximos\ regalos\ preparando\ 28\ cajas\ del\ primero\ y\ 9\ del\ segundo}$**.**

$Piononos: 28 \cdot 3 + 9 \cdot 4 = 84 + 36 = 120.$

$Pestiños: 28 \cdot 2 + 9 \cdot 6 = 56 + 54 = 110.$

$\underline{Se\ utilizan\ 120\ piononos\ y\ 110\ pestiños}$**.**

2º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=(2 \quad -1 \quad 0)$, $C=(1 \quad 3 \quad -1)$, donde a es un número real.

$a)$ Halle los valores del parámetro a para que la matriz A tenga inversa.

$b)$ Para $a=2$, calcule la matriz inversa de A.

$c)$ Para $a=2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C$.

SOLUCIÓN

$a)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = a^2+3-4a=0;\ \ a^2-4a+3=0;\ \ a=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=2\pm 1 \Rightarrow a_1=1, a_2=3.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R-\{1,3\}}.$$

$b)$ Para $a=2$ la matriz es $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = 2^2-4\cdot 2+3=4-8+3=-1. \quad A^t=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}}.$$

$c)$ $X\cdot A+I_3=B^t\cdot C;\ \ X\cdot A=B^t\cdot C-I_3;\ \ X\cdot A\cdot A^{-1}=(B^t\cdot C-I_3)\cdot A^{-1};$

$X\cdot I=(B^t\cdot C-I_3)\cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X=(B^t\cdot C-I_3)\cdot A^{-1}}.$ (*)

$$B^t\cdot C-I_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot(1 \quad 3 \quad -1)-I_3=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^t \cdot C - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*):

$$X = (B^t \cdot C - I_3) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -28 & -21 & 19 \\ 16 & 12 & -11 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

BLOQUE B

3º) a) Se considera la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, con a, b y c números reales. Calcule los valores de a, b y c, sabiendo que la gráfica de f posee un extremo relativo en el punto de abscisa $x=3$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(0,18)$ es -3.

b) Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje de abscisas y la gráfica de la función $g(x)=x^3-4x^2-3x+18$.

SOLUCIÓN

a) $f'(x)=3x^2+2ax+b$.

Por tener un extremo relativo para $x=3$: $f'(3)=0$:

$3\cdot 3^2+2a\cdot 3+b=0;\;\; 27+6a+b=0;\;\; 6a+b=-27.\quad (1)$

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto, por lo cual: $m=f'(0)=-3$:

$3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b=-3 \Rightarrow \underline{b=-3}$.

Sustituyendo en (1) el valor de b: $6a-3=-27;\;\; 6a=-24 \Rightarrow \underline{a=-4}$.

Por contener la función al punto $P(0,18)$ es $f(0)=18$:

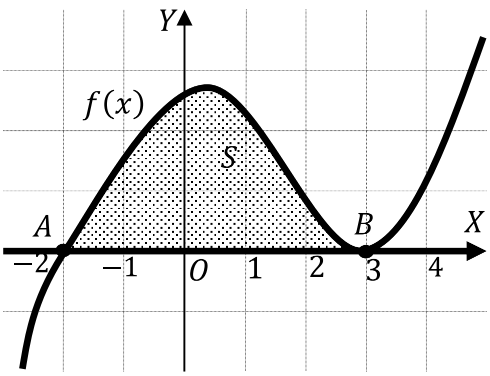
$f(0)=0^3+a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=18 \Rightarrow$

$$\underline{c=18}.$$

b) Las abscisas de los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son las raíces de la ecuación $x^3-4x^2-3x+18=0$. Se resuelve por Ruffini:

Los puntos de corte son $A(-2,0)$ y $B(3,0)$.

	1	-4	-3	18
-2		-2	12	-18
	1	-6	9	$\boxed{0}$
3		3	-9	
	1	-3	$\boxed{0}$	
3		3		
	1	$\boxed{0}$		



Por ser doble la raíz $x=3$, la función tiene en $B(3,0)$ un máximo o un mínimo relativo. Para diferenciarlo tenemos en cuenta que $g(0)=18$, por lo cual, el punto $B(3,0)$ es un mínimo relativo.

La representación gráfica, aproximada, de la unción se expresa en la gráfica.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente, teniendo en cuenta que, en el intervalo de la superficie, todas las ordenadas de la función son positivas:

$$S=\int_{-2}^{3} f(x)\,dx=\int_{-2}^{3}(x^3-4x^2-3x+18)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+18x\right]_{-2}^{3}=$$

$$=\left(\frac{3^4}{4}-\frac{4\cdot 3^3}{3}-\frac{3\cdot 3^2}{2}+18\cdot 3\right)-\left[\frac{(-2)^4}{4}-\frac{4\cdot(-2)^3}{3}-\frac{3\cdot(-2)^2}{2}+18\cdot(-2)\right]= \quad =\frac{81}{4}-36-\frac{27}{2}+54-4-\frac{32}{3}+6+36=56+\frac{81}{4}-\frac{27}{2}-\frac{32}{3}=\frac{672+243-162-128}{12}=\frac{915-290}{12}\Rightarrow$$

$$\underline{S=\frac{625}{12}\,u^2\cong 52{,}08\,u^2}.$$

4º) a) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 6x-3 \ \ si \ \ x\leq 1 \\ ax^2+bx+2 \ \ si \ \ x>1 \end{cases}$ con a y b números reales. Determine los valores de a y b para que f sea continua y derivable en todo su dominio.

b) Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje OX y y la gráfica de la función $g(x)=-2x^2+8x-6$.

SOLUCIÓN

a) Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, independientemente de los valores reales de a y b, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(6x-3)=3=f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(ax^2+bx+2)=a+b+2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Rightarrow a+b+2=3;\ \ a+b=1. \quad (1)$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando el correspondiente valor de b.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} 6 \ \ si \ \ x\leq 1 \\ 2ax+b \ \ si \ \ x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-)=6 \\ f'(1^+)=2a+b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1^-)=f'(1^+) \Rightarrow 6=2a+b;\ \ 2a+b=6. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a+b=1 \\ 2a+b=6 \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{r} -a-b=-1 \\ 2a+b=6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{a=5}. \quad \underline{b=-4}.$$

b) La parábola $g(x)=-2x^2+8x-6$, que es cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto siguiente:

$$g'(x)=-4x+8=0 \Rightarrow -4(x-2)=0 \Rightarrow x=2.$$

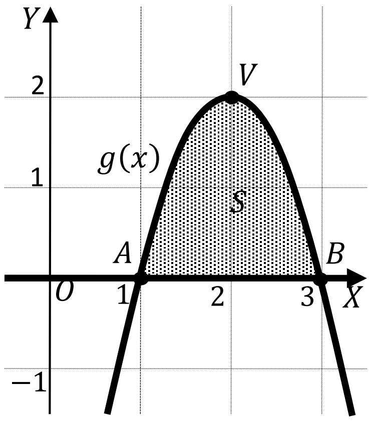
$$g(2)=-2\cdot 2^2+8\cdot 2-6=-8+16-6=2 \Rightarrow V(2,2).$$

Los puntos de corte de la parábola con el eje X son los siguientes

$$g(x)=0;\ -2x^2+8x+6=0;\ \ x^2-4x+3=0;\ \ x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=$$

$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \Rightarrow A(1,0) \\ x_2 = 3 \Rightarrow B(3,0) \end{cases}.$

en la figura adjunta.



En el intervalo $(1, 3)$ todas las ordenadas de la función $g(x)$ son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_1^3 g(x) \cdot dx = \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6) \cdot dx = \left[-2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 6x\right]_1^3$$

$= \left[-2 \cdot \frac{x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right]_1^3 = \left(-2 \cdot \frac{3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3\right) - \left(-2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot 1 - 6 \cdot 1\right) =$

$$= -18 + 36 - 18 + \frac{2}{3} - 4 + 6 = 2 + \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{8}{3}\ u^2 \cong 2{,}67\ u^2.}$$

BLOQUE C

5º) En un estudio realizado en una sucursal bancaria se ha determinado que el 70 % de los créditos concedidos son hipotecarios y el 25 % de los créditos superan los 200.000 euros. El 20 % de los créditos son hipotecarios y de más de 200.000 euros. Se elige al azar un cliente al que han concedido un crédito. Calcule la probabilidad de que:

a) El crédito no sea hipotecario y no supere los 200.000 euros.

b) Si su crédito no es hipotecario, este no supere los 200.000 euros.

c) Si su crédito supera los 200.000 euros, que este no sea hipotecario.

SOLUCIÓN

$A \rightarrow Crédito\ hipotecario.$ $\qquad B \rightarrow Crédito\ mayor\ de\ 200.000\ euros.$

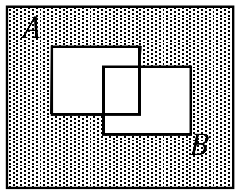
$Datos\!: \ P(A) = 0{,}70; \ \ P(B) = 0{,}25; \ \ P(A \cap B) = 0{,}20.$

a) $\quad P = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B). \quad (*)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= 0{,}70 + 0{,}25 - 0{,}20 = 0{,}95 - 0{,}20 \Rightarrow P(A \cup B) = 0{,}75.$

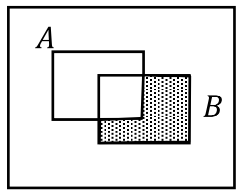
Sustituyendo este valor en (*): $P = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}75 = \underline{0{,}25}.$



$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$

b) $\quad P = P\left(\overline{B}/\overline{A}\right) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{1-P(A \cup B)}{1-P(A)} = \frac{1-0{,}75}{1-0{,}70} = \frac{0{,}25}{0{,}30} = \underline{\frac{5}{6} = 0{,}8333}.$

c) $P = P\left(\overline{A}/B\right) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)-P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}25-0{,}20}{0{,}25} = \frac{0{,}05}{0{,}25} = \underline{\frac{1}{5} = 0{,}2}.$



$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

6º) En su tiempo libre, el 65 % de los estudiantes de un centro educativo juega con videojuegos, el 45 % lee libros y el 15 % no hace ninguna de las dos cosas. Elegido al azar un estudiante de dicho centro, calcule la probabilidad de que:

a) Juegue con videojuegos o lea libros.

b) Juegue con videojuegos y no lea libros.

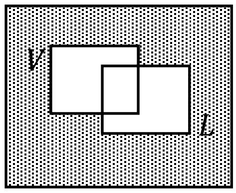
c) Lea libros sabiendo que no juega con videojuegos.

SOLUCIÓN

$$Datos:\ P(V)=0{,}65;\ \ P(L)=0{,}45;\ \ P\left(\overline{V}\cap\overline{L}\right)=0{,}15.$$

$a)\qquad P\left(\overline{V}\cap\overline{L}\right)=1-P(V\cup L)\Rightarrow$

$\Rightarrow P=P(V\cup L)=1-P\left(\overline{V}\cap\overline{L}\right)=1-0{,}15=\underline{0{,}85}.$



$P\left(\overline{V}\cap\overline{L}\right)=1-P(V\cup L)$

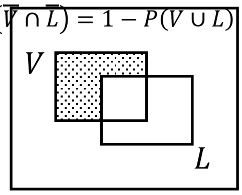
$b)\ P=P\left(V\cap\overline{L}\right)=P(V)-P(V\cap L).\qquad$ (*)

$P(V\cap L)=P(V)+P(L)-P(V\cup L)=$

$=0{,}65+0{,}45-0{,}85=1{,}10-0{,}85\Rightarrow P(V\cap L)=0{,}25.$

Sustituyendo este valor en (*):

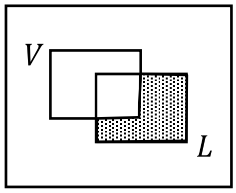
$P=P(V)-P(V\cap L)=0{,}65-0{,}25=\underline{0{,}40}.$



$\overline{V}\cap L=V-(V\cap L)$

$c)\qquad P=P\left(L/\overline{V}\right)=\frac{P\left(L\cap\overline{V}\right)}{P\left(\overline{V}\right)}=\frac{P(L)-P(V\cap L)}{1-P(V)}=\frac{0{,}45-0{,}25}{1-0{,}65}=$

$=\frac{0{,}20}{0{,}35}=\underline{\frac{4}{7}=0{,}5714}.$



$L\cap\overline{V}=L-(V\cap L)$

BLOQUE D

7º) La resistencia media a la ruptura de una nueva gama de herramientas sigue una distribución Normal de desviación típica $15\ MPa$ (megapascales). Se seleccionan al azar 100 herramientas forjadas en la misma máquina durante el mismo proceso de producción, obteniéndose una resistencia de $800\ MPa$.

a) Realizando la estimación con un nivel de confianza del 92 %, ¿entre qué valores se estima la resistencia media poblacional de esta gama de herramientas?

b) Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo en la estimación de la resistencia media a la ruptura sea menor que $2\ MPa$?

SOLUCIÓN

a) Para un nivel de confianza del 92 % es:

$1-\alpha = 0{,}92 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}92 = 0{,}08 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}04} = 1{,}75.$

$(1-0{,}04 = 0{,}9600 \ \rightarrow z = 1{,}75).$

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 800;\ \ \sigma = 15;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}75.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(800 - 1{,}75 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}};\ 800 + 1{,}75 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}\right);\ \ \ (800 - 1{,}75 \cdot 1{,}5;\ 800 + 1{,}75 \cdot 1{,}5);$
$(800 - 2{,}625;\ 800 + 2{,}625).$

$$\underline{I.C._{92\ \%} = (797{,}375;\ 802{,}625)}.$$

b) Datos: $\sigma = 15;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}75;\ \ E = 2.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}75 \cdot \frac{15}{2}\right)^2 =$
$= (1{,}75 \cdot 7{,}5)^2 = 13{,}125^2 = 172{,}26.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 173\ herramientas}$$

8º) Se quiere estudiar la proporción de perros que están vacunados en Andalucía. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 400 perros de los que 320 resultan estar vacunados.

a) Obtenga un intervalo con un nivel de confianza del 92 % para estimar la proporción de perros vacunados en Andalucía y calcule el error máximo cometido.

b) En una nueva muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuántos perros, como mínimo, hay que elegir para que el error sea menor que 0,02?

SOLUCIÓN

a) Para un nivel de confianza del 92 % es:

$$1-\alpha=0{,}92 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}92=0{,}08 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}04}=1{,}75.$$

$$(1-0{,}04=0{,}9600 \;\rightarrow z=1{,}75).$$

Datos: $n=400;\;\; p=\frac{320}{400}=0{,}8;\;\; q=1-0{,}8=0{,}2;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}8-1{,}75\cdot\sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{400}};\; 0{,}8+1{,}75\cdot\sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{400}}\right);$$

$$(0{,}8-1{,}75\cdot 0{,}02;\; 0{,}8+1{,}75\cdot 0{,}02);\;\; (0{,}8-0{,}035;\; 0{,}8+0{,}035)$$

$$\underline{I.C._{92\,\%}=(0{,}765;\;\; 0{,}835).}$$

$$E=\frac{0{,}835-0{,}765}{2}=\frac{0{,}070}{2}\Rightarrow$$

$$\underline{E\,=0{,}035.}$$

b) Datos: $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75;\;\; E=0{,}02;\;\; p=0{,}8;\;\; q=0{,}2.$

$$E^2=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{n}\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{E^2}=1{,}75^2\cdot\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{0{,}02^2}=3{,}0625\cdot\frac{0{,}16}{0{,}0004}=$$

$$=3{,}0625\cdot 400=1.225.$$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 1.225\ perros.}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D). Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior. Todos los resultados deben estar suficientemente justificados. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

1º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

$a)$ Determine la matriz X que verifica $A\cdot X+B=A^2\cdot C$.

$b)$ Determine las dimensiones de dos matrices P y Q siendo $A\cdot P^t+C=C\cdot(Q\cdot B)$.

2º) Se consideran el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y-2x\le 7;\ -x+3y\le 21;\ \ x+2y\le 19;\ x+y\le 14.$$

$a)$ Represente dicho recinto y determine sus vértices.

$b)$ Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=x+4y$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.

$c)$ ¿Podría tomar la función objetivo F el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.

BLOQUE B

3º) $a)$ Se considera la función $f(x)=x^3+bx^2+cx-1$ donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremo en el punto de abscisa $x=\frac{1}{3}$ y además la gráfica de la función f pase por el punto $P(-2,-3)$.

$b)$ Dada la función $g(x)=-x^3-x^2+x+1$, realice el esbozo de su gráfica, estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

4º) El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la vente de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dada por la siguiente función: $B(x)=-0{,}02x^2+1{,}3x-15, x\ge 0$.

$a)$ Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX.

$b)$ ¿Para qué valores de x la función no tiene pérdidas?

$c)$ ¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?

$d)$ ¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5.000 euros?

BLOQUE C

5º) En una determinada región hay tres universidades A, B y C. De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60 % procedían de la universidad A, el 30 % de la universidad B y el resto de C. Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0,4 y para un estudiante de B es 0,5.

a) Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es $0{,}395$, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.

b) Calcule la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B.

6º) Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que: $P(A \cup B) = \frac{3}{7}$, $P(A^c) = \frac{5}{7}$, $P(B^c) = \frac{2}{3}$.

a) ¿Son A y B independientes? ¿Son A y B incompatibles?

b) Calcule $P(A^c \cap B^c)$.

c) Calcule $P(B/A^c)$.

BLOQUE D

7º) Una fábrica de tornillos quiere hacer un estudio sobre la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 1.500 tornillos, resultando que 1.425 cumplen las especificaciones del fabricante.

a) Determine un intervalo de confianza para la proporción de tornillos que cumplen con las especificaciones del fabricante con un nivel de confianza del 97 %.

b) Manteniendo la proporción muestral y el nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuál tendría que ser el tamaño mínimo de la nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1 %?

8º) El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 días.

a) Se elige una muestra aleatoria de 100 titulados obteniéndose una media muestral de 8,1 días. Calcule un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

b) Con un nivel de confianza del 92 %, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido, al estimar el número medio de días que estos titulados tardan en encontrar trabajo, sea inferior a un día.

c) Suponiendo $\mu = 7{,}61$ días y tomando muestras aleatorias de 36 titulados, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

BLOQUE A

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determine la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2 \cdot C$.

$b)$ Determine las dimensiones de dos matrices P y Q siendo $A \cdot P^t + C = C \cdot (Q \cdot B)$.

SOLUCIÓN

$a)\ A \cdot X + B = A^2 \cdot C;\ \ A \cdot X = A^2 \cdot C - B;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A^2 \cdot C - B);$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot A^2 \cdot C - A^{-1} \cdot B = I \cdot A \cdot C - A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underline{X = A \cdot C - A^{-1} \cdot B}.$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 + 2F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to -F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_3 - 2F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_3 \to \tfrac{1}{3}F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1 - F_3 \\ F_2 \to F_2 - F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A \cdot C - A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - A^{-1} \cdot B =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -13 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{13}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{19}{3} \\ -\frac{13}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} \end{pmatrix}.}$$

$b)$ Para que pueda efectuarse el producto de dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual que el número de filas de la segunda matriz y, la matriz producto, tiene las mismas filas de la primera y las mismas columnas de la segunda: $M_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}$.

Supongamos que las dimensiones de las matrices son $P_{(t,x)}$ y $Q_{(y,z)}$. La dimensión de P^t es ${P^t}_{(x,t)}$.

Las dimensiones de las matrices conocidas son $A_{(3,3)}, B_{(3,2)}$ y $C_{(3,2)}$.

$A \cdot P^t + C \Rightarrow A_{(3,3)} \cdot {P^t}_{(x,t)} + C_{(3,2)} \Rightarrow D_{(x,t)} + C_{(3,2)} \Rightarrow x = 3, t = 2 \Rightarrow \underline{P_{(2,3)}}$.

$C \cdot (Q \cdot B) \Rightarrow C_{(3,2)} \cdot \left[Q_{(y,z)} \cdot B_{(3,2)}\right] = C_{(3,2)} \cdot E_{(y,2)} \Rightarrow y = 2, z = 3 \Rightarrow \underline{Q_{(2,3)}}$.

2º) Se consideran el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y - 2x \leq 7;\ -x + 3y \leq 21;\ \ x + 2y \leq 19;\ x + y \leq 14.$$

a) Represente dicho recinto y determine sus vértices.

b) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = x + 4y$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.

c) ¿Podría tomar la función objetivo F el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.

SOLUCIÓN

a)

$① \Rightarrow y - 2x \leq 7 \Rightarrow y \leq 7 - 2x \Rightarrow O(0, 0) \to Si.$

x	0	2
y	7	14

$② \Rightarrow -x + 3y \leq 21 \Rightarrow y \leq \frac{21+x}{3} \Rightarrow O(0, 0) \to Si.$

x	0	3
y	7	8

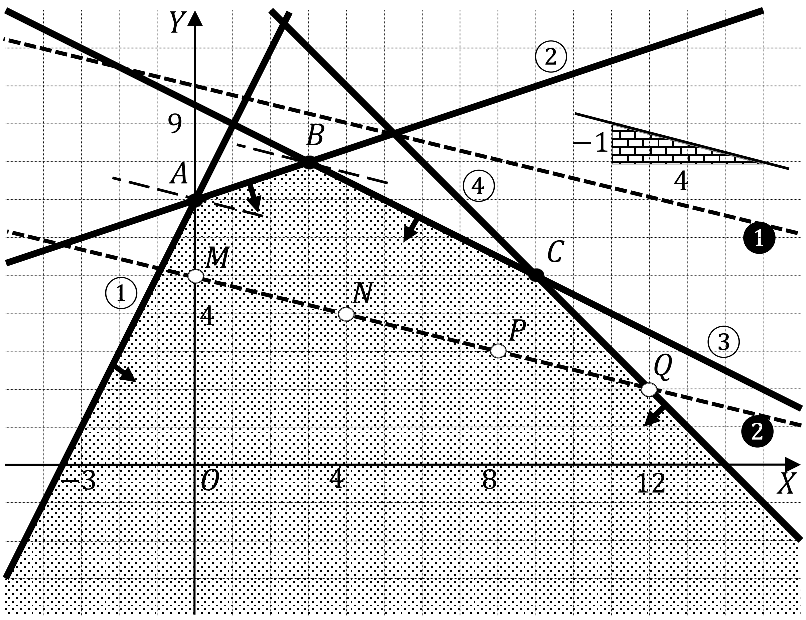
$③ \Rightarrow x + 2y \leq 19 \Rightarrow y \leq \frac{19-x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \to Si.$

x	1	7
y	9	6

$④ \Rightarrow x + y \leq 14 \Rightarrow y \leq 14 - x \Rightarrow O(0, 0) \to Si.$

x	7	9
y	7	5

La zona factible, que es abierta, es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} y - 2x = 7 \\ -x + 3y = 21 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -2x + y = 7 \\ -x + 3y = 21 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2x - y = -7 \\ -2x + 6y = 42 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5y = 35;$$

$y = 7;\ -2x + 7 = 7;\ \ x = 0 \Rightarrow \underline{A(0, 7)}.$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+3y=21 \\ x+2y=19 \end{array}\right\} \Rightarrow 5y=40;\;\; y=8;\; x+16=19;\;\; x=3 \Rightarrow \underline{B(3,8)}.$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=19 \\ x+y=14 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2y=19 \\ -x-y=-14 \end{array}\right\} \Rightarrow y=5;\;\; x=9 \Rightarrow \underline{C(9,5)}.$$

b) Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow F(0,7) = 0 + 4 \cdot 7 = 0 + 28 = 28.$

$B \Rightarrow F(3,8) = 3 + 4 \cdot 8 = 3 + 32 = 35.$

$C \Rightarrow F(9,5) = 9 + 4 \cdot 5 = 9 + 20 = 29.$

$$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ B(3,8)\ y\ su\ valor\ es\ 35.}$$

$$\underline{El\ mínimo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ A(0,7)\ y\ su\ valor\ es\ 28.}$$

También se hubiera obtenido los puntos anteriores por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$F(x,y) = x + 4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x \Rightarrow m = \frac{-1}{4}.$

c) Como puede observarse en el apartado anterior:

$$\underline{No\ es\ posible\ que\ la\ función\ alcance\ el\ valor\ 40.\ (El\ máximo\ es\ 35).}$$

Gráficamente, serían los puntos de la recta ❶ $\Rightarrow y = \frac{40-x}{4}$ que no pertenecen a la zona factible.

Sin embargo, si es posible que la función alcance el valor 20; serían todos los valores de la zona factible que satisfacen: $F(x,y) = x + 4y = 20$.

Gráficamente, serían los puntos de la recta ❷ $\Rightarrow y = \frac{20-x}{4}$ que pertenecen a la zona factible, que para valores enteros de x son los siguientes:

$x = 0 \Rightarrow M(0,5);\;\; x = 4 \Rightarrow N(4,4);\;\; x = 8 \Rightarrow P(8,3);\;\; x = 12 \Rightarrow Q(12,2).$

BLOQUE B

3º) $a)$ Se considera la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx - 1$ donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremo en el punto de abscisa $x = \frac{1}{3}$ y además la gráfica de la función f pase por el punto $P(-2, -3)$.

$b)$ Dada la función $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$, realice el esbozo de su gráfica, estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

SOLUCIÓN

$a)$ $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c.$

Por tener la función un extremo para $x = \frac{1}{3} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$

$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2b \cdot \frac{1}{3} + c = 0;\ 1 + 2b + 3c = 0;\ 2b + 3c = -1.$ (1)

Por pasar la función f pase por el punto $P(-2, -3) \Rightarrow f(-2) = -3.$

$f(-2) = -3 \Rightarrow (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) - 1 = -3;$

$-8 + 4b - 2c - 1 = -3;\ \ 4b - 2c = 6;\ \ 2b - c = 3.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 2b + 3c = -1 \\ 2b - c = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2b + 3c = -1 \\ -2b + c = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow 4c = -4 \Rightarrow \underline{c = -1}.$$

$2b - (-1) = 3;\ \ 2b + 1 = 3;\ \ 2b = 2 \Rightarrow \underline{b = 1}.$

$b)$ Las abscisas de los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son las raíces de la ecuación $-x^3 - x^2 + x + 1 = 0$. Se resuelve por Ruffini:

	-1	-1	1	1
1		-1	-2	-1
	-1	-2	-1	$\boxed{0}$
-1		1	1	
	-1	-1	$\boxed{0}$	
-1		1		
	-1	$\boxed{0}$		

Los puntos de corte son $A(-1, 0)$ y $B(1, 0)$.

Los extremos relativos de la función son los siguientes:

$g'(x) = -3x^2 - 2x + 1.\quad g''(x) = -6x - 2.$

$g'(x) = 0;\ \ -3x^2 - 2x + 1 = 0;\ \ 3x^2 + 2x - 1 = 0;$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} =$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \frac{-1 \pm 2}{3} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}.$

$g''(-1) = -6 \cdot (-1) - 2 = 6 - 2 > 0 \Rightarrow Mín.relativo\ para\ x = -1.$

$g(-1) = -(-1)^3 - (-1)^2 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow Mín. \Rightarrow A(-1, 0),$

$g''\left(\frac{1}{3}\right) = -6 \cdot \frac{1}{3} - 2 = -2 - 2 < 0 \Rightarrow Máx.relativo\ para\ x = \frac{1}{3}.$

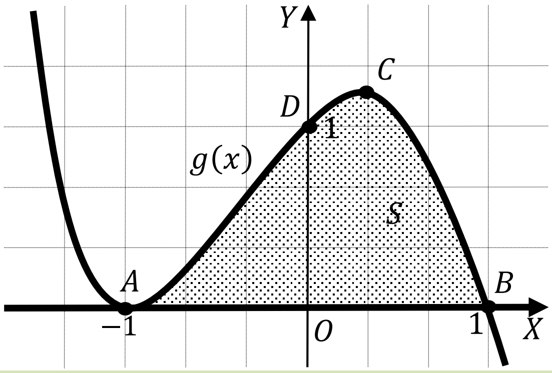
$g\left(\frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1 = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{-1-3+36}{27} = \frac{32}{27} \Rightarrow Mín. \Rightarrow$

$\Rightarrow C\left(\frac{1}{3}, \frac{32}{27}\right).$

El corte con el eje Y es $D(0, 1)$.

Teniendo en cuenta que la función es continua en R y los extremos relativos calculados, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: g'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon\left(-1, \frac{1}{3}\right).}$$



$$\underline{Decrecimiento: g'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)}$$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta, de donde se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{1} (-x^3 - x^2 + x + 1) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} = \left(-\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1\right) - \left[-\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} - 1\right] =$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{4}{3}\, u^2 \cong 1{,}33\, u^2.}$$

4º) El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la vente de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dada por la siguiente función: $B(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x - 15, x \geq 0$.

$a)$ Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX.

$b)$ ¿Para qué valores de x la función no tiene pérdidas?

$c)$ ¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?

$d)$ ¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5.000 euros?

SOLUCIÓN

$a)$ La función $B(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x - 15$ es una parábola cóncava $(\cap)$ por ser negativo el coeficiente de x^2 y cuyo vértice es el siguiente:

$$B'(x) = -0{,}04x + 1{,}3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1{,}3}{0{,}04} = \frac{130}{4} = 32{,}5.$$

$$B(32{,}5) = -0{,}02 \cdot 32{,}5^2 + 1{,}3 \cdot 32{,}5 - 15 = -21{,}125 + 42{,}25 - 15 =$$

$$= 42{,}25 - 36{,}125 = 6{,}125 \Rightarrow V(32{,}5; 6{,}125).$$

Los puntos de corte de la función con los ejes coordenados son los siguientes:

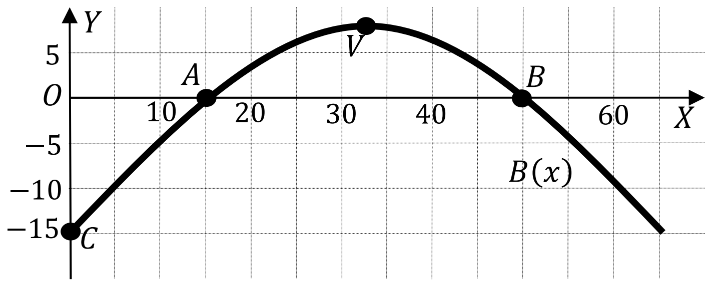
$$Eje\ X \Rightarrow B(x) = 0 \Rightarrow -0{,}02x^2 + 1{,}3x - 15 = 0;\ \ 2x^2 - 130x + 1.500 = 0;$$

$$x^2 - 65x + 750 = 0;\ x = \frac{65 \pm \sqrt{4.225 - 3.000}}{2} = \frac{65 \pm 35}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \to A(15, 0) \\ x_2 = 50 \to B(50, 0) \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow C(0, -15).$$

La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.

En el eje X se expresan los miles de kilogramos de aceituna y en el je Y se expresa el beneficio en miles de euros.



$b)$ $\underline{No\ hay\ pérdidas\ vendiendo\ entre\ 15.000\ y\ 50.000\ kg\ de\ aceitunas}$.

$c)$ $\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ vendiendo\ 32.500\ kg\ de\ aceitunas}$.

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ es\ de\ 6.125\ euros}$.

$$d)\ B(x) = 5 \Rightarrow -0{,}02x^2 + 1{,}3x - 15 = 5;\ \ 2x^2 - 130x + 2.000 = 0;$$

$$x^2 - 65x + 1.000 = 0;\ x = \frac{65 \pm \sqrt{4.225 - 4.000}}{2} = \frac{65 \pm 15}{2} \Rightarrow x_1 = 25, x_2 = 40.$$

$\underline{Obtiene\ 5.000\ euros\ vendiendo\ 25.000\ y\ 40.000\ kg\ de\ aceitunas}$.

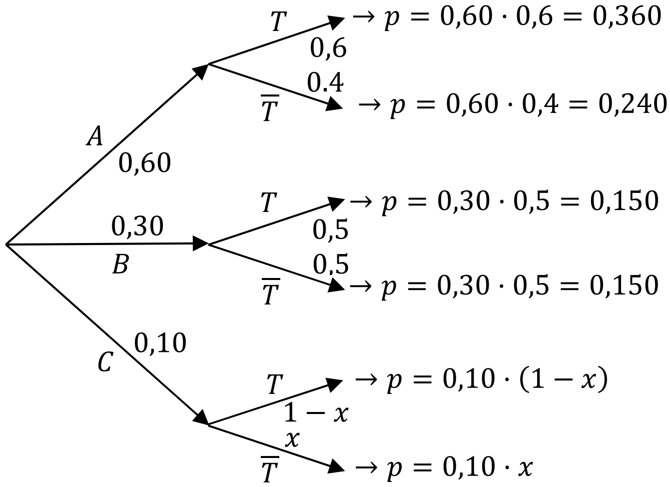
BLOQUE C

5º) En una determinada región hay tres universidades A, B y C. De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60 % procedían de la universidad A, el 30 % de la universidad B y el resto de C. Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0,4 y para un estudiante de B es 0,5.

a) Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es 0,395, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.

b) Calcule la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B.

SOLUCIÓN



$a)\qquad P = P(\overline{T}) = 0{,}395 \Rightarrow P(A \cap \overline{T}) + P(B \cap \overline{T}) + P(C \cap \overline{T}) =$

$= P(A) \cdot P(\overline{T}/A) + P(B) \cdot P(\overline{T}/B) + P(C) \cdot P(\overline{T}/C) =$

$= 0{,}60 \cdot 0{,}4 + 0{,}30 \cdot 0{,}5 + 0{,}10 \cdot x = 0{,}240 + 0{,}150 + 0{,}10 \cdot x = 0{,}395;.$

$0{,}10 \cdot x = 0{,}395 - 0{,}390 = 0{,}005 \Rightarrow x = 0{,}05 \Rightarrow 1 - x = 1 - 0{,}05 = 0{,}95.$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ encuentre\ trabajo\ es\ 0{,}95}$**.**

$b)\ P = P(A/\overline{T}) + P(B/\overline{T}) = \frac{P(A \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} + \frac{P(B \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P(A \cap \overline{T}) + P(B \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} =$

$= \frac{P(A) \cdot P(\overline{T}/A) + P(B) \cdot P(\overline{T}/B)}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}60 \cdot 0{,}4 + 0{,}30 \cdot 0{,}5}{0{,}395 \cdot} = \frac{0{,}240 + 0{,}150}{0{,}395} = \frac{0{,}390}{0{,}395} = \underline{0{,}9873}.$

6º) Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que: $P(A \cup B) = \frac{3}{7}$, $P(A^c) = \frac{5}{7}$, $P(B^c) = \frac{2}{3}$.

$a)$ ¿Son A y B independientes? ¿Son A y B incompatibles?

$b)$ Calcule $P(A^c \cap B^c)$. $c)$ Calcule $P(B/A^c)$.

SOLUCIÓN

$Datos$: $P(A \cup B) = \frac{3}{7}$, $P(A^c) = \frac{5}{7}$, $P(B^c) = \frac{2}{3}$.

$a)$ $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$. $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{2}{7} + \frac{1}{3} - P(A \cap B)$;

$P(A \cap B) = \frac{2}{7} + \frac{1}{3} - \frac{3}{7} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{7-3}{21} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{21}$.

Dos sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

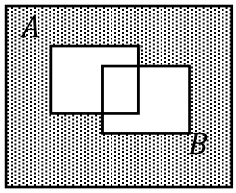
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \frac{4}{21} \neq \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{A \text{ y } B \text{ no son independientes}}.$$

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P(A \cap B) = 0$.

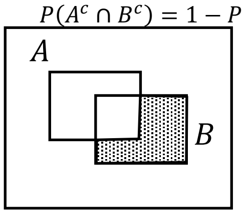
$P(A \cap B) = \frac{4}{21} \neq 0 \Rightarrow$

$$\underline{A \text{ y } B \text{ no son incompatibles}}.$$



$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B)$

$b)$ $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{7} = \underline{\frac{4}{7}}$.



$B \cap A^c = B - (A \cap B)$

$c)$ $P(B/A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{B(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{4}{21}}{1 - \frac{2}{7}} = \frac{\frac{7-4}{21}}{\frac{5}{7}} =$

$= \frac{3 \cdot 7}{21 \cdot 5} \Rightarrow \underline{P(B/A^c) = \frac{1}{5}}$.

BLOQUE D

7º) Una fábrica de tornillos quiere hacer un estudio sobre la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 1.500 tornillos, resultando que 1.425 cumplen las especificaciones del fabricante.

a) Determine un intervalo de confianza para la proporción de tornillos que cumplen con las especificaciones del fabricante con un nivel de confianza del 97 %.

b) Manteniendo la proporción muestral y el nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuál tendría que ser el tamaño mínimo de la nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1 %?

SOLUCIÓN

a) Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1-\alpha = 0{,}97 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}97 = 0{,}03 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}015} = 2{,}17.$$

$$(1-0{,}015 = 0{,}9850 \ \rightarrow z = 2{,}17).$$

Datos: $n = 1.500$; $p = \frac{1.425}{1.500} = 0{,}95$; $q = 1-0{,}95 = 0{,}05$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}95 - 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}95 \cdot 0{,}05}{1.500}};\ 0{,}95 + 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}95 \cdot 0{,}05}{1.500}}\right);$$

$(0{,}95 - 2{,}17 \cdot 0{,}0056;\ \ 0{,}95 + 2{,}17 \cdot 0{,}0056)$; $(0{,}95 - 0{,}0122;\ \ 0{,}95 + 0{,}0122)$.

$$\underline{I.C._{97\,\%} = (0{,}9378;\ \ 0{,}9622).}$$

b) Datos: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17$; $E = 0{,}01$; $p = 0{,}95$; $q = 0{,}05$.

$$E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{E^2} = 2{,}17^2 \cdot \frac{0{,}95 \cdot 0{,}05}{0{,}01^2} = 4{,}7089 \cdot \frac{0{,}0475}{0{,}0001} =$$

$= 4{,}7089 \cdot 475 = 2.236{,}73.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 2.237\ tornillos.}$$

8º) El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 días.

a) Se elige una muestra aleatoria de 100 titulados obteniéndose una media muestral de 8,1 días. Calcule un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

b) Con un nivel de confianza del 92 %, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido, al estimar el número medio de días que estos titulados tardan en encontrar trabajo, sea inferior a un día.

c) Suponiendo $\mu = 7{,}61$ días y tomando muestras aleatorias de 36 titulados, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

SOLUCIÓN

a) Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}97 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}97 = 0{,}03 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}015} = 2{,}17.$$

$$(1 - 0{,}015 = 0{,}9850 \ \rightarrow z = 2{,}17).$$

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 8{,}1;\ \ \sigma = 3;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(8{,}1 - 2{,}17 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}};\ 8{,}1 + 2{,}17 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}}\right);\ \ (8{,}1 - 2{,}17 \cdot 0{,}3;\ 8{,}1 + 2{,}17 \cdot 0{,}3);$$

$(8{,}1 - 0{,}651;\ 8{,}1 + 0{,}651).$

$$\underline{I.C._{97\ \%} = (7{,}449;\ 8{,}751)}.$$

b) Para un nivel de confianza del 92 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}92 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}92 = 0{,}08 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}04} = 1{,}75.$$

$$(1 - 0{,}04 = 0{,}9600 \ \rightarrow z = 1{,}75).$$

Datos: $\sigma = 3;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}75;\ \ E = 1.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \ \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}75 \cdot \frac{3}{1}\right)^2 =$

$= 5{,}25^2 = 27{,}56.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 28\ titulados}.$$

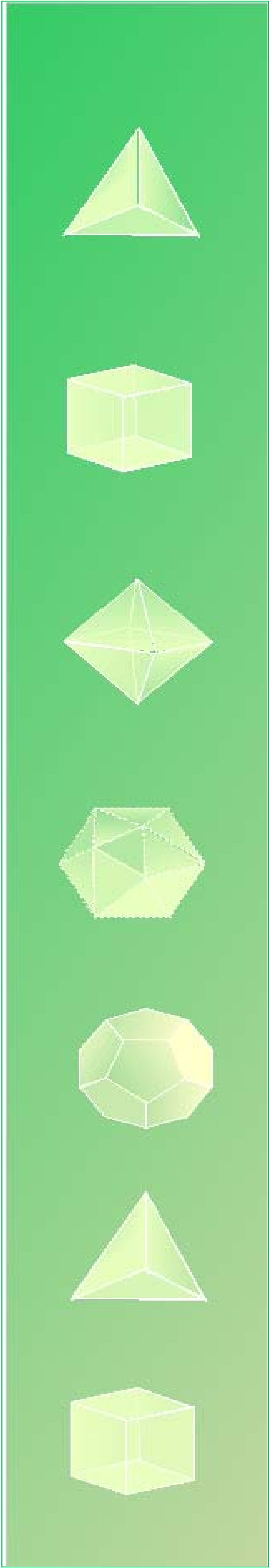
c) Se trata de una distribución normal cuya desviación típica es la de los apartados anteriores dividida por la raíz cuadrada de la muestra.

$Datos:\ \mu = 7{,}61;\ \ \sigma = 3;\ \ n = 36.$

$$X \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(7{,}61;\ \frac{3}{\sqrt{36}}\right) = N(7{,}61;\ 0{,}5). \quad Z = \frac{X - 7{,}61}{0{,}5}.$$

$$P = P(X > 8) = P\left(Z > \frac{8 - 7{,}61}{0{,}5}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}39}{0{,}5}\right) = P(Z > 0{,}78) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0{,}78) = 1 - 0{,}7823 = \underline{0{,}2177}.$$



Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

ARAGÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Problema 1:

1º) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

$a)$ Calcular el valor de m para que la ecuación matricial $X \cdot A = B$ tenga solución única.

$b)$ Para $m = 1$, resuelva la ecuación matricial anterior.

$c)$ Resuelva el sistema de ecuaciones: $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Problema 2:

2º) Una empresa de transportes valora la apertura de sucursales rurales y/o urbanas. Las sucursales rurales emplean a tres personas, requieren de una inversión de 100.000 euros para su apertura y generan unos ingresos de 15.000 euros al mes. Las sucursales urbanas emplean a 6 personas, requieren de 150.000 euros de inversión y generan un ingreso de 18.000 euros al mes. La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales, han decidido limitar el número de nuevas sucursales a 25 y se han comprometido a crear como mínimo 60 empleos.

$a)$ Plantea un problema de programación lineal que permita calcular el número de sucursales de cada tipo que deben abrirse para maximizar el ingreso mensual.

$b)$ Resuelva el problema anterior y calcule el ingreso mensual máximo que se obtendría.

$c)$ En la solución óptima, ¿cuántos empleos generará?, ¿se gasta todo el dinero disponible?

Problema 3:

3º) En una empresa el coste total, en euros, se producir q unidades viene dado por la función: $C(q) = 300q - 10q^2 + q^3/3$.

$a)$ Calcule la función coste marginal $[C_m(q) = C'(q)]$. ¿A partir de qué unidad el coste marginal aumenta al aumentar la producción?

$b)$ Determine el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio, que es: $CM(q) = \frac{C(q)}{q}$.

$c)$ Si el precio de venta unitario, en euros, del artículo en el mercado es $P(q) = 240 - 2q$. Determine para qué nivel de producción se maximiza el beneficio (ingresos menos costes).

Problema 4:

4º) Se considera la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+2\sqrt{3} & si\ \ x\le 0 \\ \sqrt{ax+b} & si\ 0<x\le 3 \\ \frac{7}{2}-\frac{x}{6} & si\ \ x>3 \end{cases}$, donde a,b son parámetros reales. Se pide:

$a)$ Determina el valor de los parámetros para que $f(x)$ sea continua.

$b)$ Para dichos valores, analice si $f(x)$ es derivable en $x=0$ y en $x=3$.

$c)$ Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x)$ si $x\in[6,9]$ y las coordenadas de los puntos donde se alcanzan dichos valores.

Problema 5:

5º) Responde a las dos cuestiones siguientes:

$a)$ Se ha realizado una encuesta sobre la compra de ropa por internet, en concreto sobre compra de ropa nueva y compra de ropa de segunda mano. De los entrevistados, el 90 % dice que compra ropa (usada o nueva), el 15 % compra ropa de ambos tipos y el 60 % no compra ropa de segunda mano. Para un encuestado elegido al azar:

$a_1)$ Calcule la probabilidad de que compre ropa nueva y no de segunda mano.

$a_2)$ Si dice que no compra ropa de segunda mano, ¿cuál es la probabilidad de que tampoco compre ropa nueva?

$b)$ En una encuesta realizada a 64 jóvenes 8 se mostraron contrarios a llevar mascarillas en el interior de recintos de ocio. Calcule un intervalo de confianza al 97 % para determinar la proporción de jóvenes que son contrarios al uso de mascarilla en interiores de recintos de ocio. Por otro lado, el alcalde de la ciudad considera que si existe un 25 % de jóvenes adversos al uso de mascarilla se requiere aplicar algún tipo de medida de concienciación. A la vista del intervalo calculado, ¿se debería implantar alguna medida de concienciación?

Problema 6:

6º) Por una prueba de acceso a la Universidad realizada a los estudiantes de segundo de Bachillerato, se sabe que las calificaciones obtenidas se distribuyen según una distribución normal.

$a)$ Si la media de la prueba selectiva es de 65 puntos y la desviación típica 8. Calcule la probabilidad de que la nota media de 25 estudiantes elegidos al azar sea mayor de 63 puntos.

$b)$ Calcule un intervalo de confianza para la nota media de ingreso en DADE, con un nivel de confianza del 92 %, sabiendo que ingresan 100 estudiantes, que la nota media de acceso es de 80 puntos y que la desviación típica es 8,8 puntos.

$c)$ Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo del intervalo de confianza calculado en el apartado anterior se reduzca a la mitad (con los datos del apartado b).

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}\ y\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

$a)$ Calcular el valor de m para que la ecuación matricial $X\cdot A=B$ tenga solución única.

$b)$ Para $m=1$, resuelva la ecuación matricial anterior.

$c)$ Resuelva el sistema de ecuaciones: $B\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$a)\ X\cdot A=B;\ \ X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1};\ \ X\cdot I=B\cdot A^{-1}\Rightarrow \underline{X=B\cdot A^{-1}}.$ (*)

Para resolver la ecuación matricial pedida tiene que hacerse uso de la matriz inversa de A y, para que A sea invertible, es condición necesaria que sea distinto de cero su determinante.

$$|A|\neq 0\Rightarrow\begin{vmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}\neq 0;\ -4m+8-3m\neq 0;\ \ 7m\neq 8\Rightarrow$$

$$\underline{m\neq\frac{8}{7}}.$$

$b)$ Para $m=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. $|A|=-4+8-3=1$. $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

$$Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{1}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*):

$$X=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -15 & -2 & 4 \\ -19 & -3 & 5 \end{pmatrix}}.$$

$$\underline{X=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -15 & -2 & 4 \\ -19 & -3 & 5 \end{pmatrix}}$$

$c)$ $$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0 \Rightarrow Rang\ B = 0.$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right\}.$$

Se trata de un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes tiene rango 2, menor que el número de incógnitas, por lo cual, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado.

Haciendo, por ejemplo, $z = -\lambda$, las soluciones son:

$$\underline{x = \lambda, y = \lambda, z = -\lambda, \forall \lambda \in R.}$$

Problema 2:

2º) Una empresa de transportes valora la apertura de sucursales rurales y/o urbanas. Las sucursales rurales emplean a tres personas, requieren de una inversión de 100.000 euros para su apertura y generan unos ingresos de 15.000 euros al mes. Las sucursales urbanas emplean a 6 personas, requieren de 150.000 euros de inversión y generan un ingreso de 18.000 euros al mes. La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales, han decidido limitar el número de nuevas sucursales a 25 y se han comprometido a crear como mínimo 60 empleos.

a) Plantea un problema de programación lineal que permita calcular el número de sucursales de cada tipo que deben abrirse para maximizar el ingreso mensual.

b) Resuelva el problema anterior y calcule el ingreso mensual máximo que se obtendría.

c) En la solución óptima, ¿cuántos empleos generará?, ¿se gasta todo el dinero disponible?

Solución:

a) Sean x e y el número de sucursales rurales y urbanas que abre la empresa, respectivamente.

Las restricciones que plantea el ejercicio son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+6y \geq 60 \\ 100.000x+150.000y \leq 3.000.000 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y \geq 20 \\ 2x+3y \leq 60 \\ x+y \leq 25 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

b)

$(1) \Rightarrow x+2y \geq 20 \Rightarrow y \geq \frac{20-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	20
y	10	0

$(2) \Rightarrow 2x+3y \leq 60 \Rightarrow y \leq \frac{60-2x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

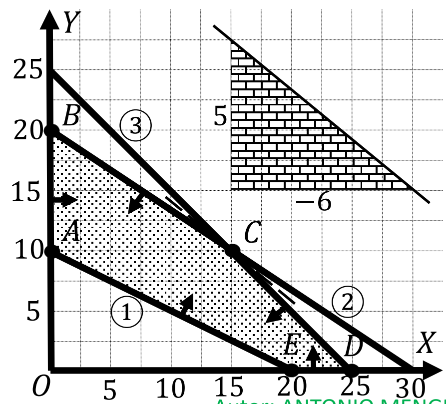
x	0	30
y	20	0

$(3) \Rightarrow x+y \leq 25 \Rightarrow y \leq 25-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	25
y	25	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow y=10 \Rightarrow A(0,10).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 2x+3y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow y=20 \Rightarrow B(0,20).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=60 \\ x+y=25 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+3y=60 \\ -2x-2y=-50 \end{array}\right\} \Rightarrow y=$ $10;\ \ x=15 \Rightarrow C(15,10).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+y=25 \end{array}\right\} \Rightarrow x=25 \Rightarrow D(25,0).$

$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+2y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow x=20 \Rightarrow E(20,0).$

La función de objetivos es $f(x,y)=15.000x+18.000y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,10)=15.000 \cdot 0+18.000 \cdot 10=0+180.000=180.000.$

$B \Rightarrow f(0,20)=15.000 \cdot 0+18.000 \cdot 20=0+360.000=360.000.$

$C \Rightarrow f(15,10)=15.000 \cdot 15+18.000 \cdot 10=225.000+180.000=405.000.$

$D \Rightarrow f(25,0)=15.000 \cdot 25+18.000 \cdot 0=375.000+0=375.000.$

$E \Rightarrow f(20,0)=15.000 \cdot 20+18.000 \cdot 0=300.000+0=300.000.$

El valor máximo se produce en el punto $C(15,10)$.

También se hubiera obtenido el punto $C(15,10)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y)=15.000x+18.000y=0 \Rightarrow y=-\frac{15.000}{18.000}x=-\frac{5}{6}x \Rightarrow m=-\frac{5}{6}.$

$\underline{Máximo\ beneficio\ abriendo\ 15\ sucursales\ rurales\ y\ 10\ urbanas}.$

$\underline{Se\ produciría\ un\ beneficio\ máximo\ de\ 405.000\ euros}.$

$c)$ 15 sucursales rurales y 10 urbanas: $n=15 \cdot 3+10 \cdot 6=45+60=105.$

$\underline{La\ solución\ óptima\ generará\ 105\ empleos}.$

El gasto es: $15 \cdot 100.000+10 \cdot 150.000=3.000.000.$

$\underline{En\ la\ solución\ óptima\ se\ gasta\ todo\ el\ dinero\ disponible}.$

Problema 3:

3º) En una empresa el coste total, en euros, se producir q unidades viene dado por la función: $C(q) = 300q - 10q^2 + q^3/3$.

a) Calcule la función coste marginal $[C_m(q) = C'(q)]$. ¿A partir de qué unidad el coste marginal aumenta al aumentar la producción?

b) Determine el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio, que es: $CM(q) = \frac{C(q)}{q}$.

c) Si el precio de venta unitario, en euros, del artículo en el mercado es $P(q) = 240 - 2q$. Determine para qué nivel de producción se maximiza el beneficio (ingresos menos costes).

Solución:

a) $C_m(q) = C'(q) = 300 - 20q + q^2$.

Una función es creciente cuando su derivada es positiva.

$(C_m)'(q) = C''(q) = -20 + 2q > 0;\ -10 + q > 0 \Rightarrow q > 10.$

Por ser la función coste marginal una parábola convexa (∪) por ser positivo el coeficiente de q^2:

$$\underline{El\ coste\ marginal\ aumenta\ a\ partir\ de\ producir\ 10\ unidades.}$$

b) $CM(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{300q - 10q^2 + q^3/3}{q} = 300 - 10q + \frac{1}{3}q^2.$

Una función tiene un mínimo cuando se anula su primera derivada y es positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$(CM)'(q) = -10 + \frac{2}{3}q.$ $(CM)''(q) = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow Mínimo.$

$(CM)'(q) = 0 \Rightarrow -10 + \frac{2}{3}q = 0;\ -30 + 2q = 0;\ -15 + q = 0 \Rightarrow q = 15.$

$$\underline{El\ nivel\ de\ producción\ se\ minimiza\ produciento\ 15\ unidades.}$$

c) Los ingresos son el producto de los elementos producidos por el precio de cada uno de ellos:

$I(q) = q \cdot P(q) = q \cdot (240 - 2q) \Rightarrow I(q) \Rightarrow I(q) = 240q - 2q^2.$

$B(q) = I(q) - C(q) = (240q - 2q^2) - \left(300q - 10q^2 + \frac{1}{3}q^3\right) =$

$= 240q - 2q^2 - 300q + 10q^2 - \frac{1}{3}q^3 \Rightarrow B(q) = -\frac{1}{3}q^3 + 8q^2 - 60q.$

El beneficio es máximo cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$B'(q) = -q^2 + 16q - 60.$ $B''(q) = -2q + 16.$

$B'(q) = 0 \Rightarrow -q^2 + 16q - 60 = 0;\ q^2 - 16q + 60 = 0;\ \ q = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{2} =$

$= \frac{16 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2} = 8 \pm 2 \Rightarrow q_1 = 6, q_2 = 10.$

$B''(6) = -2 \cdot 6 + 16 = 4 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ q = 6.$

$B''(10) = -2 \cdot 10 + 16 = -4 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ q = 10.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ produciendo\ 10\ unidades}$**.**

Problema 4:

4º) Se considera la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+2\sqrt{3} & si \;\; x\le 0 \\ \sqrt{ax+b} & si \; 0<x\le 3 \\ \frac{7}{2}-\frac{x}{6} & si \;\; x>3 \end{cases}$, donde a, b son parámetros reales. Se pide:

$a)$ Determina el valor de los parámetros para que $f(x)$ sea continua.

$b)$ Para dichos valores, analice si $f(x)$ es derivable en $x=0$ y en $x=3$.

$c)$ Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x)$ si $x\in[6,9]$ y las coordenadas de los puntos donde se alcanzan dichos valores.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0 \; y \; x=3$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a \; y \; b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\; x=0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+2\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{ax+b}=\sqrt{b} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \Rightarrow 2\sqrt{3}=\sqrt{b} \Rightarrow \underline{b=12}.$$

La función resulta: $f(x)=\begin{cases} x^2+2\sqrt{3} & si \;\; x\le 0 \\ \sqrt{ax+12} & si \; 0<x\le 3 \\ \frac{7}{2}-\frac{x}{6} & si \;\; x>3 \end{cases}$.

$$Para\; x=3 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{ax+12}=\sqrt{3a+12}=f(3) \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{7}{2}-\frac{x}{6}\right)=\frac{7}{2}-\frac{3}{6}=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3) \Rightarrow \sqrt{3a+12}=3;\;\; 3a+12=9 \Rightarrow \underline{a=-1}.$$

$$\boldsymbol{\underline{a=-1}.\; \underline{b=12}.}$$

$b)$ La función resulta: $f(x)=\begin{cases} x^2+2\sqrt{3} & si \;\; x\le 0 \\ \sqrt{-x+12} & si \; 0<x\le 3 \\ \frac{7}{2}-\frac{x}{6} & si \;\; x>3 \end{cases}$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & si \;\; x\le 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{-x+12}} & si \; 0<x\le 3 \\ -\frac{1}{6} & si \;\; x>3 \end{cases}.$$

$$Para\ x = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = \frac{-1}{2\sqrt{12}} \end{cases} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x = 0.}$$

$$Para\ x = 3 \Rightarrow \begin{cases} f'(3^-) = \frac{-1}{2\sqrt{-3+12}} = -\frac{1}{6} \\ f'(3^+) = -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow f'(3^-) = f'(3^+) \Rightarrow$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ para\ x = 3.}$$

$c)$ Para $x \in [6, 9]$ la función resulta $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{x}{6}$, que es una recta de pendiente negativa, por lo cual, es decreciente en el intervalo considerado.

Sus valores máximo y se producen para los valores $x = 6$ y para $x = 9$, respectivamente.

$f(6) = \frac{7}{2} - \frac{6}{6} = \frac{5}{2} \Rightarrow$

$$\underline{Valor\ máximo\ de\ la\ función:\ \frac{5}{2}\ en\ P\left(6, \frac{5}{2}\right).}$$

$$f(9) = \frac{7}{2} - \frac{9}{6} = \frac{21-9}{6} = \frac{12}{6} \Rightarrow$$

$$\underline{Valor\ mínimo\ de\ la\ función:\ \frac{1}{9}\ en\ Q(9, 2).}$$

Problema 5:

5º) Responde a las dos cuestiones siguientes:

$a)$ Se ha realizado una encuesta sobre la compra de ropa por internet, en concreto sobre compra de ropa nueva y compra de ropa de segunda mano. De los entrevistados, el 90 % dice que compra ropa (usada o nueva), el 15 % compra ropa de ambos tipos y el 60 % no compra ropa de segunda mano. Para un encuestado elegido al azar:

$a_1)$ Calcule la probabilidad de que compre ropa nueva y no de segunda mano.

$a_2)$ Si dice que no compra ropa de segunda mano, ¿cuál es la probabilidad de que tampoco compre ropa nueva?

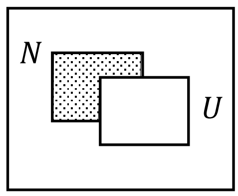
$b)$ En una encuesta realizada a 64 jóvenes 8 se mostraron contrarios a llevar mascarillas en el interior de recintos de ocio. Calcule un intervalo de confianza al 97 % para determinar la proporción de jóvenes que son contrarios al uso de mascarilla en interiores de recintos de ocio. Por otro lado, el alcalde de la ciudad considera que si existe un 25 % de jóvenes adversos al uso de mascarilla se requiere aplicar algún tipo de medida de concienciación. A la vista del intervalo calculado, ¿se debería implantar alguna medida de concienciación?

Solución:

$a)$ $\quad Datos\text{: } P(N\cup U)=0{,}90;\ \ P(N\cap U)=0{,}15;\ \ P(\overline{U})=0{,}60.$

$a_1)$

$$P(U)=1-P(\overline{U})=1-0{,}60 \Rightarrow P(U)=0{,}40.$$



$N\cap\overline{U}=N-(N\cap U)$

$$P(N\cup U)=P(N)+P(U)-P(N\cap U)\Rightarrow$$

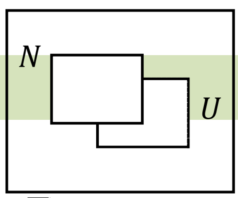
$$\Rightarrow P(N)=P(N\cup U)+P(N\cap U)-P(U)=0{,}90+0{,}15-0{,}40\Rightarrow$$
$P(N)=0{,}65.$

$$P(N\cap\overline{U})=P(N)-P(N\cap U)=0{,}65-15\Rightarrow \underline{P(N\cap\overline{U})=0{,}50}.$$

$$\underline{P(N\cap\overline{U})=0{,}50.}$$

$a_2)$ $P(\overline{N}|\overline{U})=\frac{P(\overline{N}\cap\overline{U})}{P(\overline{U})}=\frac{1-P(N\cup U)}{P(\overline{U})}=\frac{1-0{,}90}{0{,}60}=\frac{0{,}10}{0{,}60}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{P(\overline{N}|\overline{U})=0{,}167.}$$



$P(\overline{N}\cap\overline{U})=1-P(N\cup U)$

$b)$ Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1-\alpha=0{,}97\ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}97=0{,}03\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}015}=2{,}17.$$

$$(1-0{,}015=0{,}9850\ \rightarrow z=2{,}17).$$

Datos: $n=64;\ \ p=\frac{8}{64}=0{,}125;\ \ q=1-0{,}125=0{,}875;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente:

$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0{,}125 - 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}125 \cdot 0{,}875}{64}};\ 0{,}125 + 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}125 \cdot 0{,}875}{64}}\right);$$

$(0{,}125 - 2{,}17 \cdot 0{,}0413;\ 0{,}125 + 2{,}17 \cdot 0{,}0413);$

$(0{,}125 - 0{,}0897;\ 0{,}125 + 0{,}0897).$

$$\underline{I.C._{97\,\%} = (0{,}0353;\ 0{,}2147)}.$$

Por no estar incluido el valor del 25 % $(0{,}25)$ en el intervalo de confianza:

$$\underline{No\ es\ necesario\ tomar\ medidas\ de\ concienciación}.$$

Problema 6:

6º) Por una prueba de acceso a la Universidad realizada a los estudiantes de segundo de Bachillerato, se sabe que las calificaciones obtenidas se distribuyen según una distribución normal.

a) Si la media de la prueba selectiva es de 65 puntos y la desviación típica 8. Calcule la probabilidad de que la nota media de 25 estudiantes elegidos al azar sea mayor de 63 puntos.

b) Calcule un intervalo de confianza para la nota media de ingreso en DADE, con un nivel de confianza del 92 %, sabiendo que ingresan 100 estudiantes, que la nota media de acceso es de 80 puntos y que la desviación típica es 8,8 puntos.

c) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo del intervalo de confianza calculado en el apartado anterior se reduzca a la mitad (con los datos del apartado b).

Solución:

$a)\ Datos\colon\ \mu = 65;\ \ n = 25;\ \ \sigma = 8.$

$X \to N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(65;\ \frac{8}{\sqrt{25}}\right) = N(65;\ 1{,}6).$ Tipificando: $Z = \frac{X-65}{1{,}6}$.

$P = P(X > 63) = P\left(Z > \frac{63-65}{1{,}6}\right) = P\left(Z > \frac{-2}{1{,}6}\right) = P(Z > -1{,}25) =$

$= P(Z \leq 1{,}25) = \underline{0{,}8944}.$

$$P(X > 63) = \underline{0{,}8944}.$$

b) Para un nivel de confianza del 92 % es:

$1 - \alpha = 0{,}92\ \to\ \alpha = 1 - 0{,}92 = 0{,}08\ \to\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}04} = 1{,}75.$

$(1 - 0{,}04 = 0{,}9600\ \to z = 1{,}75).$

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 80;\ \ \sigma = 8{,}8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}75.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(80 - 1{,}75 \cdot \frac{8{,}8}{\sqrt{100}};\ 80 + 1{,}75 \cdot \frac{8{,}8}{\sqrt{100}}\right);\ (80 - 1{,}75 \cdot 0{,}88;\ 80 + 1{,}75 \cdot 0{,}88);$

$(80 - 1{,}54;\ 80 + 1{,}54)$

$$\underline{I.C._{92\ \%} = (78{,}46;\ 81{,}54).}$$

$c)$ $E = \frac{81{,}54-78{,}46}{2} = \frac{3{,}08}{2} = 1{,}54.$

Datos: $n = 100;\ \ \sigma = 8{,}8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}75;\ \ E = \frac{1{,}54}{2} = 0{,}77.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}75 \cdot \frac{8{,}8}{0{,}77}\right)^2 =$

$= (1{,}75 \cdot 11{,}4286)^2 = 20^2 = 400.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 400\ estudiantes}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Dado el sistema lineal: $\left.\begin{array}{r} (m+1)x = m-2 \\ 2x+y=-3 \\ 3x-2y+mz=-8 \end{array}\right\}$. Se pide:

$a)$ Exprese el sistema anterior en forma matricial $(A \cdot X = B)$ y determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible determinado.

$b)$ ¿Existe algún valor del parámetro m para que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuelva el sistema.

$c)$ Para $m = 1$, calcule $X = A^{-1} \cdot B$, siendo A, B las matrices del apartado $a)$.

Problema 2:

2º) Fernanda dispone de 10.000 euros para invertir. Le han recomendado dos productos que en el último año tuvieron buenos resultaros: criptomonedas y fondos de inversión garantizados. Por lo que ha leído en la prensa espera que la rentabilidad anual de las criptomonedas sea del 30 % y la de los fondos de inversión sea del 5 %. Para que la inversión no sea demasiado arriesgada quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas y, además, le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3.000 euros y un mínimo de 1.000 euros.

$a)$ Plantea un problema de programación lineal que permita determinar cómo debe invertir Fernanda sus ahorros para obtener la máxima rentabilidad.
$b)$ Resuelva el problema anterior y calcule la rentabilidad máxima conseguida con la inversión.
$c)$ Su gestor le dice que por la coyuntura económica actual el riesgo de inversión es del 35 % para las criptomonedas y 0 % para los fondos. Si Fernanda quisiera minimizar el riesgo de la inversión, justifica si invertir 1.000 euros en criptomonedas y 5.000 en fondos es una solución óptima (con las restricciones del enunciado).

Problema 3:

3º) Dada: $f(x) = 50 + \frac{1-x}{100} + \frac{1}{1-x}$. Se pide:
$a)$ Calcule el dominio y, si existen, las asíntotas verticales y horizontales.
$b)$ Razone que $f(x)$ tiene dos extremos relativos, uno mínimo y otro máximo. ¿El valor en el mínimo de la función es mayor o menor que el valor en el máximo?
$c)$ Supongamos que x representa el precio de venta de un kg de solomillo según la época del año, $x \in [5, 21]$ euros el kilo, y $f(x)$ el ingreso diario de un mayorista (en cientos de euros) por la venta del producto. ¿A qué precio debe vender para obtener el máximo ingreso? ¿A cuántos euros asciende dicho ingreso máximo?

Problema 4:

4º) La primera derivada de una cierta función es $f'(x) = x(x-1)^2$.

$a)$ ¿En qué intervalo $f(x)$ es creciente? y ¿decreciente? Calcule los extremos relativos.

$b)$ ¿En qué intervalo es cóncava la gráfica de $f(x)$? ¿y convexa? Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$.

$c)$ Determine $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 10$.

Problema 5:

5º) Responda a las cuestiones siguientes:

$a)$ Una aseguradora ha lanzado seguros multidispositivos a jóvenes para contingencias de hurto, roturas, daños, etc., de patinetes, teléfonos móviles y ordenadores portátiles. Los seguros de patinetes suponen el 40 % de su cartera, los móviles representan el 45 % y los portátiles el resto de su cartera. La compañía conoce que un 51% de patinetes, un 40 % de teléfonos móviles y un 9 % de ordenadores dan lugar a un parte de siniestro.

$a_1)$ Calcule la probabilidad de que se comunique un parte de siniestro.

$a_2)$ Si llegara un parte de siniestro, calcule la probabilidad de haber sido una contingencia por un teléfono móvil.

$a_3)$ Si llegara un parte de siniestro, ¿cuál de los tres dispositivos es más probable que haya causado la contingencia?

$b)$ En una ciudad se ha encuestado a 100 personas preguntándoles si tenían contratado algún seguro para su teléfono móvil. Se obtuvo como resultado que 15 personas tenían contratado este tipo de seguro. Determine un intervalo de confianza al 99 % para la proporción de personas de esa ciudad que tienen contratado un seguro para su móvil.

Problema 6:

6º) El tiempo de espera para recibir en casa "tu compra en pocos minutos" se distribuye según una distribución normal de varianza 16 minutos.

$a)$ Si la media para el tiempo de espera fuera de 12 minutos, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de 7 pedidos fuese de más de 10 minutos?

$b)$ Si la media obtenida a partir de una muestra aleatoria de 49 encargos fue de 12 minutos, calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97 %.

$c)$ Con datos de 16 encargos se ha calculado el intervalo de confianza $(9{,}7;\ 13{,}5)$ minutos para el tiempo medio en recibir el pedido. Determine el nivel de confianza de ese intervalo.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) Dado el sistema lineal: $\left.\begin{array}{r}(m+1)x=m-2\\ 2x+y=-3\\ 3x-2y+mz=-8\end{array}\right\}$. Se pide:

$a)$ Exprese el sistema anterior en forma matricial $(A\cdot X=B)$ y determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible determinado.

$b)$ ¿Existe algún valor del parámetro m para que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuelva el sistema.

$c)$ Para $m=1$, calcule $X=A^{-1}\cdot B$, siendo A, B las matrices del apartado $a)$.

Solución:

$a)$ $\left.\begin{array}{r}(m+1)x=m-2\\ 2x+y=-3\\ 3x-2y+mz=-8\end{array}\right\}\Rightarrow A\cdot X=B\Rightarrow \underline{\begin{pmatrix}m+1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -2 & m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m-2\\ -3\\ -8\end{pmatrix}}.$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}m+1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -2 & m\end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix}m+1 & 0 & 0 & m-2\\ 2 & 1 & 0 & -3\\ 3 & -2 & m & -8\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix}m+1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -2 & m\end{vmatrix}=m(m+1)=0\Rightarrow m_1=-1, m_2=0.$$

$$\underline{\Rightarrow Para \begin{Bmatrix}m\neq -1\\ m\neq 0\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$b)$ $Para\ m=-1\Rightarrow A'=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 0 & -3\\ 3 & -2 & -1 & -8\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ A'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}0 & 0 & -3\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & -2 & -8\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=3\cdot(-4-3)=-21\neq 0\Rightarrow Rang\ A'=3.$$

$Para\ m=-1\Rightarrow Rang\ A=2;\ \ Rang\ A'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.$

$Para\ m=0\Rightarrow A'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0 & -3\\ 3 & -2 & 0 & -8\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ A'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & -2 & -8\end{vmatrix}=-8+8+6-6=0\Rightarrow Rang\ A'=2.$$

$$\underline{Para\ m=0\Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=2<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve el sistema para $m = 0$, que resulta: $\left.\begin{array}{r} x = -2 \\ 2x + y = -3 \\ 3x - 2y = -8 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado.

$\underline{Solución\!: x = -2, y = 1, z = \lambda, \forall\lambda \in R.}$

$c)$ Para $m = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. $|A| = 2$. $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}}{2} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 21 \end{pmatrix}}.$$

La solución del sistema es: $x = -\frac{1}{2}, y = -2, z = -\frac{21}{2}$**.**

Problema 2:

2º) Fernanda dispone de 10.000 euros para invertir. Le han recomendado dos productos que en el último año tuvieron buenos resultaros: criptomonedas y fondos de inversión garantizados. Por lo que ha leído en la prensa espera que la rentabilidad anual de las criptomonedas sea del 30 % y la de los fondos de inversión sea del 5 %. Para que la inversión no sea demasiado arriesgada quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas y, además, le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3.000 euros y un mínimo de 1.000 euros.

$a)$ Plantea un problema de programación lineal que permita determinar cómo debe invertir Fernanda sus ahorros para obtener la máxima rentabilidad.

$b)$ Resuelva el problema anterior y calcule la rentabilidad máxima conseguida con la inversión.

$c)$ Su gestor le dice que por la coyuntura económica actual el riesgo de inversión es del 35 % para las criptomonedas y 0 % para los fondos. Si Fernanda quisiera minimizar el riesgo de la inversión, justifica si invertir 1.000 euros en criptomonedas y 5.000 en fondos es una solución óptima (con las restricciones del enunciado).

Solución:

$a)$ Sean x e y las cantidades que invierte Fernanda en criptomonedas y en fondos de inversión, respectivamente, expresados en miles de euros.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} x+y\leq 10 \\ x\leq y \\ 3\geq x\geq 1;\ y\geq 0; \end{array}\right\}$**. (cantidades en miles de euros).**

$b)$

$① \Rightarrow x+y\leq 10 \Rightarrow y\leq 10-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

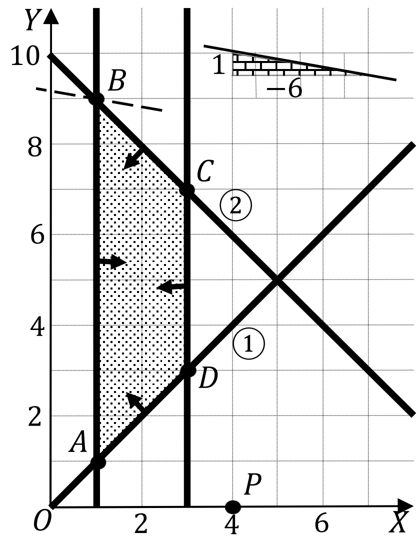
x	0	10
y	10	0

$② \Rightarrow x\leq y \Rightarrow y\geq x \Rightarrow P(4,0)\rightarrow No.$

x	0	10
y	0	10

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=1 \\ x=y \end{array}\right\} \Rightarrow y=1 \Rightarrow A(1,1).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=1 \\ x+y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow y=9 \Rightarrow B(1,9).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=3 \\ x+y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow y=7 \Rightarrow C(3,7).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=3 \\ x=y \end{array}\right\} \Rightarrow y=3 \Rightarrow D(3,3).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=0{,}3x+0{,}05y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(1,1) = 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}05 \cdot 1 = 0{,}3 + 0{,}05 = 0{,}35.$

$B \Rightarrow f(1,9) = 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}05 \cdot 9 = 0{,}3 + 0{,}45 = 0{,}75.$

$C \Rightarrow f(3,7) = 0{,}3 \cdot 3 + 0{,}05 \cdot 7 = 0{,}9 + 0{,}35 = 1{,}25.$

$D \Rightarrow f(3,3) = 0{,}3 \cdot 3 + 0{,}05 \cdot 3 = 0{,}9 + 0{,}15 = 1{,}05.$

El máximo se produce en el punto $C(3,7)$. También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 0{,}3x + 0{,}05y = 0 \Rightarrow y = -\frac{0{,}3}{0{,}05}x = -\frac{1}{6}x \Rightarrow m = -\frac{1}{6}.$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ invirtiendo\ \begin{cases} 3.000\ euros\ en\ criptomonedas \\ 7.000\ euros\ en\ fondos\ de\ inversión \end{cases}}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 1.250\ euros}.$$

$c)$ La nueva función de objetivos es la siguiente: $g(x,y) = 0{,}35x + 0y$.

Los valores de la nueva función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow g(1,1) = 0{,}35 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0{,}35 + 0 = 0{,}35.$

$B \Rightarrow g(1,9) = 0{,}35 \cdot 1 + 0 \cdot 9 = 0{,}35 + 0 = 0{,}35.$

$C \Rightarrow g(3,7) = 0{,}35 \cdot 3 + 0 \cdot 7 = 1{,}05 + 0 = 1{,}05.$

$D \Rightarrow g(3,3) = 0{,}35 \cdot 3 + 0 \cdot 3 = 1{,}05 + 0 = 1{,}05.$

El mínimo se produce en los puntos $A(1,1)\ y\ B(1,9)$, lo cual supone que se minimiza la función en todos los puntos del segmento $\overline{AB}$. Como quiera que el punto $Q(1,5)$ pertenece al segmento $\overline{AB}$.

$$\underline{Invertir\ 1.000\ euros\ en\ criptomonedas\ y\ 5.000\ en\ fodos\ es\ óptimo}.$$

Problema 3:

3º) Dada: $f(x) = 50 + \frac{1-x}{100} + \frac{1}{1-x}$. Se pide:

a) Calcule el dominio y, si existen, las asíntotas verticales y horizontales.

b) Razone que $f(x)$ tiene dos extremos relativos, uno mínimo y otro máximo. ¿El valor en el mínimo de la función es mayor o menor que el valor en el máximo?

c) Supongamos que x representa el precio de venta de un kg de solomillo según la época del año, $x \in [5, 21]$ euros el kilo, y $f(x)$ el ingreso diario de un mayorista (en cientos de euros) por la venta del producto. ¿A qué precio debe vender para obtener el máximo ingreso? ¿A cuántos euros asciende dicho ingreso máximo?

Solución:

a) $$f(x) = 50 + \frac{1-x}{100} + \frac{1}{1-x} = \frac{5.000\cdot(1-x)+(1-x)^2+100}{100(1-x)} =$$

$$= \frac{5.000-5.000x+1-2x+x^2+100}{100(1-x)} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-5.002x+5.100}{100(1-x)}.$$

Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$100(1-x) = 0;\ \ x = 1 \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R - \{1\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5.002x+5.100}{100(1-x)} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$1 - x = 0;\ \ x = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

b) La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$$f'(x) = 0 - \frac{1}{100} + \frac{-1\cdot(-1)}{(1-x)^2} = -\frac{1}{100} + \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{100} = \frac{1}{(1-x)^2};\ \ (1-x)^2 = 100;\ \ 1 - x = \sqrt{100} = \pm 10 \Rightarrow$$

$$1 - x = -10 \Rightarrow x_1 = 11;\ \ 1 - x = 10 \Rightarrow x_2 = -9.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x) = -0 + \frac{0\cdot(x+1)^3 - 1\cdot[2\cdot(1-x)\cdot(-1)]}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

$f''(11) = \frac{2}{(1-11)^3} = \frac{2}{-1.000} < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo para $x = 11$.

$f(11) = 50 + \frac{1-11}{100} + \frac{1}{1-11} = 50 - \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = 50 - \frac{1}{5} = \frac{249}{5} \Rightarrow$

$$\underline{Máx.\ A\left(11, \frac{249}{5}\right).}$$

$f''(-9) = \frac{2}{(1+9)^3} = \frac{2}{1.000} > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo para $x = -9$.

$$f(-9) = 50 + \frac{1+9}{100} + \frac{1}{1+9} = 50 + \frac{1}{5} = \frac{251}{5} \Rightarrow$$

$$\underline{Mín.\ B\left(-9, \frac{251}{5}\right).}$$

El valor de la función en el mínimo es mayor que en el máximo $\left(\frac{251}{5} > \frac{240}{5}\right)$; esto es comprensible teniendo que cuenta que la función no es continua.

$c)$ Al intervalo $[5, 21]$ pertenece $x = 11$ que hace máxima la función y, también, la función es continua en este intervalo, por lo cual, el valor del máximo es absoluto en el intervalo.

$f(11) = \frac{249}{5} = 49{,}8.$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ vendiendo\ el\ solomillo\ a\ 11\ euros\ el\ kilo.}$$

$$\underline{El\ ingreso\ máximo\ es\ de\ 4.980\ euros.}$$

Problema 4:

4º) La primera derivada de una cierta función es $f'(x) = x(x-1)^2$.

$a)$ ¿En qué intervalo $f(x)$ es creciente? y ¿decreciente? Calcule los extremos relativos.

$b)$ ¿En qué intervalo es cóncava la gráfica de $f(x)$? ¿y convexa? Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$.

$c)$ Determine $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 10$.

Solución:

$c)$ $\quad f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int [x(x-1)^2] \cdot dx = \int [x \cdot (x^2 - 2x + 1)] \cdot dx =$

$= \int (x^3 - 2x^2 + x) \cdot dx \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$

$f(0) = 10 \Rightarrow \frac{0^4}{4} - \frac{2 \cdot 0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + C = 10 \Rightarrow C = 10.$

$$\underline{f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 10}.$$

$a)$ La función polinómica $f(x)$ es continua en su dominio, que es R.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-1)^2 = 0;\ \ x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1.$

Para estudiar los periodos de crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de la derivada en los periodos en que las raíces de la primera derivada dividen al dominio de la función, que son: $(-\infty, 0), (0, 1)\ y\ (1, +\infty)$.

$Para\ x = -1 \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(-1) = -1 \cdot (-1-1)^2 = -4 < 0.$

$Para\ x = \frac{1}{2} \in (0, 1) \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{1}{8} > 0.$

$Para\ x = 2 \in (1, +\infty) \Rightarrow f'(2) = 2 \cdot (2-1)^2 = 2 > 0.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0)}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, +\infty)}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$f''(x) = 1 \cdot (x-1)^2 + x \cdot 2 \cdot (x-1) \cdot 1 = (x-1) \cdot [(x-1) + 2x] \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x) = (x-1)(3x-1).$

$f''(0) = (0-1)(0-1) = 1 > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo para $x = 0$.

$f(0) = 10 \Rightarrow \underline{Mín.\ A(0, 10)}.$

$$\underline{Mín.\ \ A(0,10)}$$

$f''(1) = (1-1)(3-1) = 0 \Rightarrow$ Ni máximo ni mínimo $\Rightarrow$ Para P. I.

$b)$ Una función es cóncava $(\cap)$ o convexa $(\cup)$ cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$f''(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(3x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1.$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la segunda derivada dividen el dominio de la función en los periodos $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ y $(1, +\infty)$, donde la función es, alternativamente, cóncava o convexa.

Considerando, por ejemplo, $x = 0 \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$:

$f''(0) = (-1)(-1) = 1 > 0 \Rightarrow convexa\ para\ x = 0.$

De lo anterior se deducen los periodos de concavidad y convexidad, que son los siguientes:

$$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right).}$$

$$\underline{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty).}$$

Una función tiene un punto de inflexión cuando pasa de ser cóncava a convexa o viceversa, es decir: cuando se anula su segunda derivada.

$f''(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(3x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3}.$

$f(1) = \frac{1^4}{4} - \frac{2 \cdot 1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 10 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 10 = \frac{3-8+6+120}{12} = \frac{121}{12} \Rightarrow$

$$\underline{P.I.: B\left(1, \frac{121}{12}\right).}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4}{4} - \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} + 10 = \frac{1}{4 \cdot 81} - \frac{2}{81} + \frac{1}{18} + 10 = \frac{324-8+18+3.240}{4 \cdot 81} =$$

$$= \frac{324 - 8 + 18 + 3.240}{4 \cdot 81} = \frac{3.574}{4 \cdot 81} = \frac{1.787}{162} \Rightarrow$$

$$\underline{P.I.: C\left(\frac{1}{3}, \frac{1.787}{162}\right).}$$

Problema 5:

5º) Responda a las cuestiones siguientes:

a) Una aseguradora ha lanzado seguros multidispositivos a jóvenes para contingencias de hurto, roturas, daños, etc., de patinetes, teléfonos móviles y ordenadores portátiles. Los seguros de patinetes suponen el 40 % de su cartera, los móviles representan el 45 % y los portátiles el resto de su cartera. La compañía conoce que un 51% de patinetes, un 40 % de teléfonos móviles y un 9 % de ordenadores dan lugar a un parte de siniestro.

a_1) Calcule la probabilidad de que se comunique un parte de siniestro.

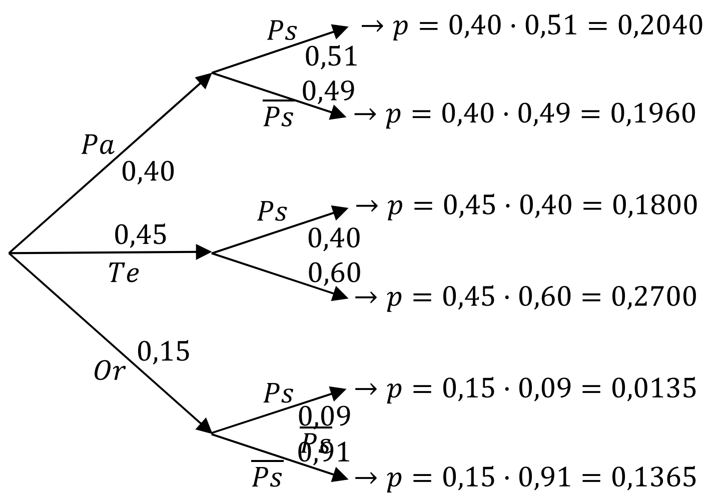
a_2) Si llegara un parte de siniestro, calcule la probabilidad de haber sido una contingencia por un teléfono móvil.

a_3) Si llegara un parte de siniestro, ¿cuál de los tres dispositivos es más probable que haya causado la contingencia?

b) En una ciudad se ha encuestado a 100 personas preguntándoles si tenían contratado algún seguro para su teléfono móvil. Se obtuvo como resultado que 15 personas tenían contratado este tipo de seguro. Determine un intervalo de confianza al 99 % para la proporción de personas de esa ciudad que tienen contratado un seguro para su móvil.

Solución:

a)



a_1) $P = P(Ps) = P(Pa \cap Ps) + P(Te \cap Ps) + P(Or \cap Ps) =$

$= P(Pa) \cdot P(Ps/Pa) + P(Te) \cdot P(Ps/Te) + P(Or) \cdot P(Ps/Or) =$

$= 0{,}40 \cdot 0{,}51 + 0{,}45 \cdot 0{,}40 + 0{,}15 \cdot 0{,}09 = 0{,}2040 + 0{,}1800 + 0{,}0135 = \underline{0{,}3975}.$

a_2) $P = P(Te/Ps) = \frac{P(Te \cap Ps)}{P(Ps)} = \frac{P(Te) \cdot P(Ps/Te)}{P(Ps)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}40}{0{,}3975} = \frac{0{,}18}{0{,}3975} = \underline{0{,}4825}.$

a_3) $P = P(Pa/Ps) = \frac{P(Pa \cap Ps)}{P(Ps)} = \frac{P(Pa) \cdot P(Ps/Pa)}{P(Ps)} = \frac{0{,}40 \cdot 0{,}51}{0{,}3975} = \frac{0{,}204}{0{,}3975} = \underline{0{,}5132}.$

$$P = P(Or/Ps) = \frac{P(Or \cap Ps)}{P(Ps)} = \frac{P(Or) \cdot P(Ps/Or)}{P(Ps)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}09}{0{,}3975} = \frac{0{,}0135}{0{,}3975} = \underline{0{,}0340}.$$

$\underline{\textit{Es más probable que presenta parte de siniestro el usuario de patinete}}$**.**

b) En una ciudad se ha encuestado a 100 personas preguntándoles si tenían contratado algún seguro para su teléfono móvil. Se obtuvo como resultado que 15 personas tenían contratado este tipo de seguro. Determine un intervalo de confianza al 96 % para la proporción de personas de esa ciudad que tienen contratado un seguro para su móvil.

Para un nivel de confianza del 96 % es:

$1 - \alpha = 0{,}96 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}96 = 0{,}04 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}02} = 2{,}055.$

$(1 - 0{,}02 = 0{,}9800 \ \rightarrow z = 2{,}055).$

Datos: $n = 100; \ \ p = \frac{15}{100} = 0{,}15; \ \ q = 1 - 0{,}15 = 0{,}85; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0{,}15 - 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{100}}; \ 0{,}15 + 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{100}}\right);$$

$(0{,}15 - 2{,}055 \cdot 0{,}0357; \ 0{,}15 + 2{,}055 \cdot 0{,}0357); \ (0{,}15 - 0{,}0734; \ 0{,}15 + 0{,}0734).$

$$\underline{I.C._{96\ \%} = (0{,}0766; \ 0{,}2234)}.$$

Problema 6:

6º) El tiempo de espera para recibir en casa "tu compra en pocos minutos" se distribuye según una distribución normal de varianza 16 minutos.

a) Si la media para el tiempo de espera fuera de 12 minutos, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de 7 pedidos fuese de más de 10 minutos?

b) Si la media obtenida a partir de una muestra aleatoria de 49 encargos fue de 12 minutos, calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97 %.

c) Con datos de 16 encargos se ha calculado el intervalo de confianza $(9{,}7;\ 13{,}5)$ minutos para el tiempo medio en recibir el pedido. Determine el nivel de confianza de ese intervalo.

Solución:

$a)\ Datos:\ \mu = 12;\ \ \sigma = \sqrt{16} = 4;\ \ n = 7.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N\left(12, \frac{4}{\sqrt{7}} \cong 1{,}51\right).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-12}{1{,}51}$.

$P = P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10-12}{1{,}51}\right) = P\left(Z > \frac{-2}{1{,}51}\right) = P(Z > -1{,}32) =$

$= 1 - P(Z > 1{,}32) = P(Z \leq 1{,}32) = \underline{0{,}9066}.$

$$P(X > 10) = \underline{0{,}9066}$$

b) Para un nivel de confianza del 97 % es:

$1 - \alpha = 0{,}97\ \to\ \alpha = 1 - 0{,}97 = 0{,}03\ \to\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}015} = 2{,}17.$

$(1 - 0{,}015 = 0{,}9850\ \to z = 2{,}17).$

Datos: $n = 49;\ \ \overline{x} = 12;\ \ \sigma = 4;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(12 - 2{,}17 \cdot \frac{4}{\sqrt{49}};\ 12 + 2{,}17 \cdot \frac{4}{\sqrt{49}}\right);\ \ (12 - 2{,}17 \cdot 0{,}5714;\ 12 + 2{,}17 \cdot 0{,}5714);$

$(12 - 1{,}24;\ 12 + 1{,}24).$

$$\underline{I.C._{97\,\%} = (10{,}76;\ 13{,}24)}.$$

$c)\quad \overline{x} = \frac{13{,}5+9{,}7}{2} = \frac{23{,}2}{2} = 11{,}6.\quad E = \frac{13{,}5-9{,}7}{2} = \frac{3{,}8}{2} = 1{,}9.$

Datos: $\overline{x} = 11{,}6;\ \ \sigma = 4;\ \ E = 1{,}9;\ \ n = 16.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{1{,}9 \cdot \sqrt{16}}{4} = 1{,}9.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ a 1,9 le corresponde el valor 0,9713;

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9713;\ \ 2 - \alpha = 1{,}9426;\ \ \alpha = 2 - 1{,}9426 = 0{,}0574.$

$1 - \alpha = 1 - 0{,}0574 = 0{,}9426.$

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ es\ del\ 94{,}26\ \%}.$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2022

Comunidad autónoma de ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad de Oviedo	Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU) **CURSO 2021-2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.
TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.
El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

1A. Un inversor ha obtenido un beneficio de 1280 euros después de invertir un total de 22000 euros en dos empresas distintas. Estos beneficios se desglosan como sigue: la cantidad invertida en la primera empresa le ha proporcionado un m % de beneficios y la cantidad invertida en la segunda empresa le ha proporcionado un 6 % de beneficios.

a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la cantidad invertida en cada una de las dos empresas.

b) **[2 puntos]** Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los beneficios para la primera empresa sean del 4 %? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el porcentaje de beneficio para lo invertido en la primera empresa. En ese caso, ¿cuál fue la cantidad invertida en cada una de las dos empresas?

1B. En un almacén hay lavadoras y frigoríficos. Por necesidades del mercado el número de frigoríficos debe ser mayor o igual que el de lavadoras, pero no puede superar el doble del de lavadoras. Se necesitan al menos 20 frigoríficos y no hay más de 30 lavadoras disponibles para tener en el almacén. Por cada lavadora se obtiene un beneficio de 200 euros y por cada frigorífico se obtiene un beneficio de 250 euros.

a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo se pueden tener en el almacén para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían tener 20 lavadoras y 50 frigoríficos?

b) **[0,75 puntos]** ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo habría que tener para maximizar el beneficio al vender todo lo del almacén? ¿y para minimizar el número de lavadoras?

2A. El salario diario (f) de un trabajador durante los primeros cinco años en una determinada empresa se ajusta a la siguiente función, donde x representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$$f(x) = \begin{cases} 35 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 25 + 10x & \text{si } 1 \le x < 2 \\ -0{,}5x^2 + 4x + a & \text{si } 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** Estudia la continuidad de la función, determinando el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.

b) **[1,75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento el salario fue máximo? ¿y mínimo?

2B. Dada la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 0$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 4$.

3A. El 30 % de los estudiantes de un instituto hace deporte. De los que hacen deporte, el 40 % toca un instrumento y de los que no hacen deporte, una cuarta parte toca un instrumento. Elegido un estudiante de ese instituto al azar:

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte, pero no toque un instrumento?

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte o toque un instrumento?

3B. Una empresa tiene contratados dos operarios, Eva y Juan, para producir determinadas piezas. Eva realiza el 60 % de la producción de esas piezas y el resto lo realiza Juan. Eva obtiene una pieza defectuosa el 10 % de las veces, subiendo ese porcentaje hasta el 25 % en el caso de Juan.

a) **[1,25 puntos]** Seleccionada una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

b) **[1,25 puntos]** Si se encuentra una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido hecha por Juan?

4A. Se quiere hacer un estudio para estimar la proporción de personas que han viajado a América.*

a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de personas que han viajado a América a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 90 %?

b) **[1,5 puntos]** En una muestra aleatoria de 2000 personas, se sabe que 600 han viajado a América. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción poblacional de personas que han viajado a América.

4B. La duración de un tipo de pila, en horas, sigue una distribución normal con desviación típica de 80 horas.*

a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para la duración media de ese tipo de pila, a partir de una muesttra de 100 pilas, en la que se ha obtenido que la suma de las duraciones de todas ellas ha sido de 55000 horas.

b) **[1 punto]** Si el tamaño muestral siguiese siendo de 100 pilas, pero la media aumenta, ¿qué le ocurriría a los extremos del intervalo anterior? ¿aumentarían o disminuirían? Y si la media siguiese siendo la misma, pero el tamaño muestral hubiese aumentado, ¿qué le ocurriría a la amplitud del intervalo anterior? ¿aumentaría o disminuiría?

---

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1A. Solución:

1A. *a*) Si representamos por x e y la cantidad invertida en la primera y segunda empresa, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y &= 22000 \\ 0{,}01mx + 0{,}06y &= 1280 \end{cases}$$

b) La discusión de este sistema se puede hacer, por ejemplo, por uno de los dos métodos considerados a continuación.

- **Gauss.**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0{,}01m & 0{,}06 & 1280 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0 & 0{,}06-0{,}01m & 1280-220m \end{array}\right)$$

Como $0{,}06 - 0{,}01m = 0 \Leftrightarrow m = 6$ se tiene que:

- Si $m = 6$, la última fila es $(0 \quad 0 \mid -40)$, con lo que el sistema es incompatible.
- En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}01m & 0{,}06 \end{vmatrix} = 0{,}06 - 0{,}01m = 0 \Longleftrightarrow m = 6$$

se tiene que:

- Para $m = 6$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 22000 \\ 0{,}06 & 1280 \end{vmatrix} = -40 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

concluimos que el sistema es incompatible.

- Para $m \neq 6$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $ran(A) = 2$ y por tanto $ran(A) = ran(A') =$ nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m = 6$	S.I.
$m \neq 6$	S.C.D.

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de $m \neq 6$ y dicha solución es única.

En particular, por tanto, es posible que $m = 4$, es decir, que los beneficios para la primera empresa sean del 4 %.

En tal caso, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que $m = 4$, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0 & 0{,}02 & 400 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x + y = 22000 \\ 0{,}02y = 400 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema escalonado:

$$\begin{cases} y = 400/0{,}02 = 20000 \\ x = 22000 - 20000 = 2000 \end{cases}$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, $|A| = 0{,}02$, puesto que $m = 4$.

Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 22000 & 1 \\ 1280 & 0{,}06 \end{vmatrix} = 40, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 22000 \\ 0{,}04 & 1280 \end{vmatrix} = 400.$$

Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{40}{0{,}02} = 2000, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{400}{0{,}02} = 20000.$$

Con lo cual, si el beneficio en la primera empresa es del 4 %, ha invertido en ella 2000 euros y 20000 euros en la otra.

Problema 1B. Solución:

1B. *a)* Si representamos por x e y el número de lavadoras y frigoríficos, respectivamente, en el almacén, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} y \geq x \\ y \leq 2x \\ y \geq 20 \\ x \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ y \geq 20 \\ x \leq 30 \end{cases}$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto rayado en la figura 1. Los extremos de dicho recinto son los puntos A = (10, 20), B = (20, 20), C = (30, 30) y D = (30, 60).

No podría haber 20 lavadoras y 50 frigoríficos, puesto que el punto (20, 50) no pertenece a la región factible ($2x - y = 40 - 50 = -10 < 0$).

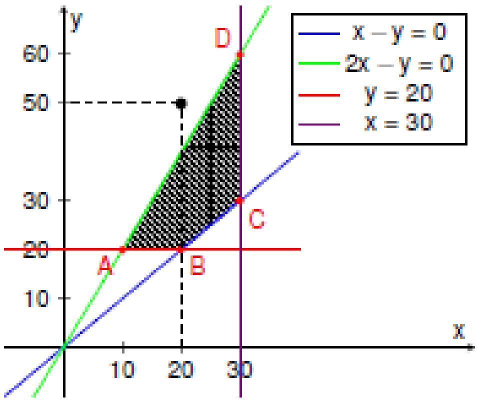


Figura 1: Región factible.

b) El beneficio con la venta total es $z_1(x, y) = 200x + 250y$. Así, queremos maximizar la función objetivo z_1 sujeta a las restricciones anteriores. Puesto que:

$$z_1(A) = 7000 \text{ euros}$$
$$z_1(B) = 9000 \text{ euros}$$
$$z_1(C) = 13500 \text{ euros}$$
$$z_1(D) = 21000 \text{ euros}$$

se tiene que el beneficio máximo se alcanza si se tienen 30 lavadoras y 60 frigoríficos.

Si lo que se busca es minimizar el número lavadoras, entonces la función objetivo es $z_2(x, y) = x$. Como

$$z_2(A) = 10$$
$$z_2(B) = 20$$
$$z_2(C) = 30$$
$$z_2(D) = 30$$

el mínimo se alcanza si se tienen 10 lavadoras y 20 frigoríficos.

Problema 2A. Solución:

2A. *a)* La función f viene dada por distintos polinomios en los tres intervalos considerados al definirla, con lo que los únicos posibles puntos de discontinuidad son x = 1 y x = 2. Se tiene que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 35 = 35, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 25+10x = 35 \quad \text{y} \quad f(1) = 25+10 = 35$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 25+10x = 45, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} -0{,}5x^2+4x+a = 6+a \quad \text{y} \quad f(2) = 6+a$$

con lo que f es continua en x = 1 y existe el límite en x = 2 si 45 = 6 + a o, lo que es lo mismo, si a = 39. En tal caso el límite coincide con el valor de la función y, por tanto, si a = 39, f es continua en todo su dominio.

b) El dominio de definición de f es el intervalo [0, 5]. La función es constante en el intervalo [0, 1) y es una recta en el intervalo [1, 2). Además hemos visto que es continua, con f(0) = f(1) = 35, f(2) = 45 y f(5) = 46,5. Además se tiene que $f(x) \neq 0$ para cualquier $x \in [0, 5]$, con lo que f no corta a los ejes más que en el punto (0, 35).

Si analizamos la expresión de la función en el intervalo [2, 5] tenemos que $f'(x) = -x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$, $f''(x) = -1 < 0$, con lo que x = 4 es un máximo relativo y la función en ese intervalo es cóncava hacia abajo. Además a partir de la derivada primera obtenemos que crece en el intervalo (2, 4) y decrece en (4, 5).

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 2.

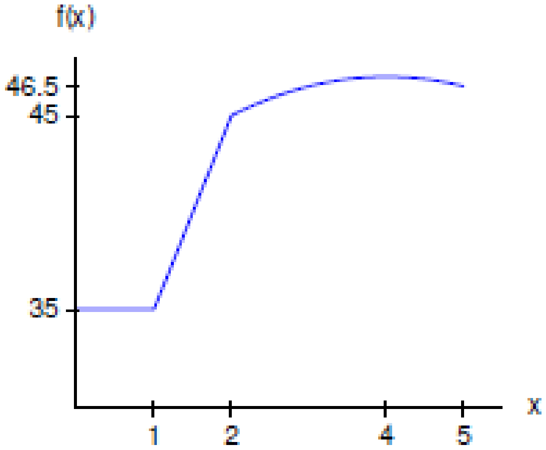


Figura 2: Representación gráfica de f.

Así pues, el salario máximo fue a los 4 años (x = 4) y el mínimo durante el primer año ($x \in [0, 1]$).

Problema 2B. Solución:

2B. *a)* Como $f(x) = x^2 - 2x - 3$, entonces $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + C$, con lo que $F(0) = C = 0 \Leftrightarrow C = 0$ y $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

b) Como f es un polinomio, está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua en todo su dominio. Además se tiene que $f(0) = -3$ y que $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ o $x = -1$, con lo que f también corta a los ejes en los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$.

Además

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x^2 - 2x - 3) = +\infty$$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando su primera derivada:

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Como $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 1)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (1, \infty)$, se tiene que f decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, \infty)$. Además se tiene que $f(1) = -4$.

Si calculamos la segunda derivada se tiene que $f''(x) = 2 > 0$, co lo que f es cóncava hacia arriba (convexa) en todo su dominio.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 3.

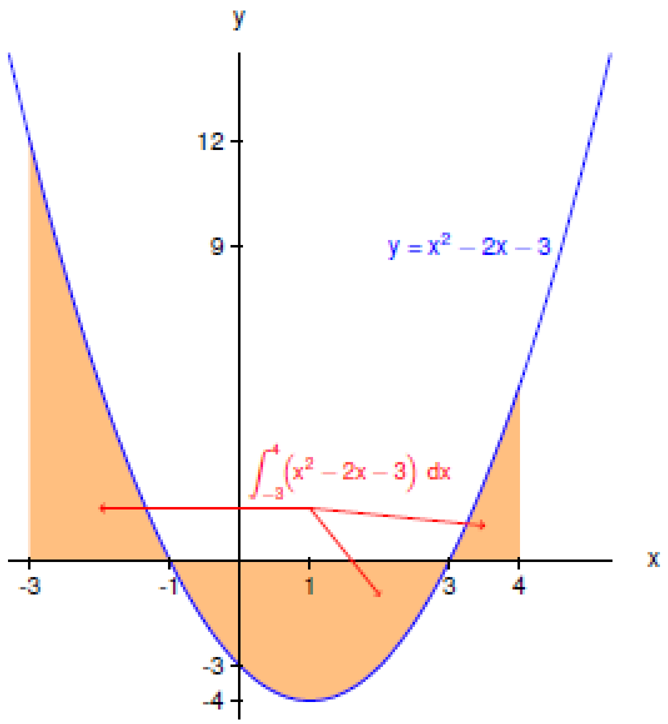


Figura 3: Representación gráfica de f.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 4$ es igual a:

$$\left|\int_{-3}^{-1} f(x)dx\right| + \left|\int_{-1}^{3} f(x)dx\right| + \left|\int_{3}^{4} f(x)dx\right| = |F(-1) - F(-3)| + |F(3) - F(-1)| + |F(4) - F(3)| =$$

$$|5/3 - (-9)| + |(-9) - 5/3| + |-20/3 - (-9)| = 71/3.$$

Problema 3A. Solución:

3A. Si denotamos por D el suceso «hacer deporte» y por T el suceso «tocar un instrumento», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(D) = 0{,}3$$
$$P(T/D) = 0{,}4$$
$$P(T/\overline{D}) = 0{,}25$$

y con esto, las probabilidades pedidas son:

a) $P(D \cap \overline{T}) = P(D) - P(D \cap T) = P(D) - P(T/D)P(D) = 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$.

b) $P(T \cup D) = P(T) + P(D) - P(T \cap D) = P(T) + 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3$, con lo que solo nos queda calcular $P(T)$. Ahora bien, $P(T) = P(T/D)P/D) + P(T/\overline{D})P(\overline{D}) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}295$, con lo que $P(T \cup D) = 0{,}295 + 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}475$.

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	D	$\overline{D}$	
T	0,12	0,175	0,295
$\overline{T}$	0,18	0,525	0,705
	0,3	0,7	1

Problema 3B. Solución:

3B. Si denotamos por E el suceso «la pieza fue realizada por Eva», por J el suceso «la pieza fue realizada por Juan» y por D el suceso «la pieza es defectuosa», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(E) = 0,6 \qquad P(J) = 0,4$$
$$P(D/E) = 0,1 \qquad P(D/J) = 0,25$$

con lo que las probabilidades pedidas son:

a) $P(D) = P(D \cap E) + P(D \cap J) = P(D/E)P(E) + P(D/J)P(J) = 0,1 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,4 = 0,16.$

b) $P(J/D) = \frac{P(D/J)P(J)}{P(D)} = \frac{0,25 \cdot 0,4}{0,16} = 0,625.$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	E	J	
D	0,06	0,1	0,16
$\overline{D}$	0,54	0,3	0,84
	0,6	0,4	1

Problema 4A. Solución:

4A. *a)* Al estimar la proporción poblacional, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\epsilon} \right)^2$$

donde

- ϵ representa el error de estimación, en este caso $\epsilon \leq 0{,}05$,
- p representa la proporción poblacional, que es un valor desconocido. Al no conocer el valor de p y no poder estimarlo, puesto que aún no tenemos una muestra, se considera el caso más desfavorable posible, es decir, el valor que maximiza la desviación típica, que es p = 0,5 y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0{,}9$ para una variable Z con distribución N(0, 1) o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}95$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$.

De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(1{,}64 \frac{\sqrt{0{,}5(1-0{,}5)}}{0{,}05} \right)^2 = 268{,}96$$

Así pues, el tamaño mínimo muestral con el que podemos asegurar que se cumplen las condiciones es de 269 personas.

b) Si representamos por $\hat{p}$ la proporción de personas que han viajado a América en la muestra con n = 2000 personas, se tiene que $\hat{p} = 600/2000 = 0{,}3$.

El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha) \cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

donde $\hat{p}$ representa la proporción muestral, n el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ para una variable Z con distribución N(0, 1).

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de declaraciones fraudulentas, al 90 % de confianza, es:

$$\left(0{,}3 - 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}3(1-0{,}3)}{2000}}, 0{,}3 + 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}3(1-0{,}3)}{2000}} \right) = (0{,}2832; 0{,}3168),$$

puesto que ya habíamos visto que $\hat{p} = 0{,}3$, n = 2000 y que al 90 % de nivel de confianza se tiene que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$.

Así pues, tenemos una confianza del 90 % de que el verdadero porcentaje de personas que ha viajado a América está entre el 28,32 % y el 31,68 %.

Problema 4B. Solución:

4B. Si denotamos por X la v.a. «duración, en horas, de la pila», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 80$ horas, es decir, $X \to N(\mu, 80)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ para la cual se obtiene una media muestral $\overline{x} = 55000/100 = 550$ horas.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde

- $\overline{x}$ representa la media muestral, en este caso $\overline{x} = 550$ horas,
- n representa el tamaño de muestra, en este caso $n = 100$,
- σ representa la desviación típica poblacional, en este caso $\sigma = 80$ horas y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0{,}99$ para una variable Z con distribución N(0, 1), o lo que es lo mismo, el valor que cumple que $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}995$. Con lo cual, en este caso $z_{\alpha/2} = 2{,}58$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la duración media de esta pila, al 99 % de confianza es:

$$\left(550 - 2{,}58\frac{80}{\sqrt{100}}, 550 + 2{,}58\frac{80}{\sqrt{100}}\right) = (529{,}36; 570{,}64),$$

es decir, tenemos una confianza del 99 % de que la duración media está entre 529,36 y 570,64 horas.

b) Si la media muestral aumentase, según vimos en la expresión del intervalo de confianza del apartado anterior, ambos extremos del intervalo aumentarían en la misma cantidad. Lo cual es lógico, puesto que si la media en la muestra es mayor, esperaríamos valores mayores para la media poblacional.

En cambio, si la media muestral se conserva, pero el tamaño muestral aumenta (por ejemplo considerando 1000 pilas con una duración media de 550 horas), de nuevo si vamos a la expresión del intervalo de confianza, vamos que la amplitud es $2 \cdot z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, con lo que al dividir entre un número mayor, la amplitud disminuiría. De nuevo esto es lógico, puesto que al tener más información, el intervalo esperamos que sea más preciso.

Universidad de Oviedo	Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU) **CURSO 2021-2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.
TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.
El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 5:

Problema 6:

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Solución:

Problema 2:

Solución:

Problema 3:

Solución:

Problema 4:

Solución:

Problema 5:

Solución:

Problema 6:

Solución:

Problema 7:

Solución:

Problema 8:

Solución:

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

BALEARES

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Sólo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

1º) Hace un año una sociedad de capital riesgo invirtió 100.000 euros en acciones de tres empresas, que llamaremos A, B y C. Ahora, las acciones de la empresa A han aumentado de valor en un 50 %, las de la empresa B han aumentado en un 10 % y, en cambio las de la empresa C han perdido un 15 % de su valor. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102.000 euros. Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas.

a) Identifique las variables e interprete el enunciado mediante un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Calcule la cantidad de dinero que la sociedad invirtió en acciones en cada empresa.

Problema 2:

2º) En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0,9 m^2 de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo se necesitan 1,2 m^2 de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m^2 de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 euros por una del segundo

a) Plantea la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Calcular el número de bolsas de cada tipo que tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determinar también este beneficio máximo.

Problema 3:

3º) Dado el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x-ay+2z=0 \\ ax-4y-4z=0 \\ 4x+3y-2z=0 \end{array}\right\}$ en función del parámetro a.

a) Discuta para qué valores de a el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso.

b) Encuentre la solución para $a=-2$.

Problema 4:

4º) Considere la función a trozos siguiente: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si \;\; x<0 \\ x^3+ax+2 & si \;\; x\geq 0 \end{cases}$.

a) Calcula los valores de a para que $f(x)$ sea continua y derivable.

b) Para $a=4$ calcule el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x=0$, $x=1$ e $y=0$.

Problema 5:

5º) El gasto mensual en euros en lotería de un trabajador viene determinado por su salario mediante la función $f(x) = \frac{100x}{b+x^2}$, en la que $x \geq 0$ representa el salario en miles de euros y $b > 0$ es un parámetro.

$a)$ Encuentre el valor de b para el cual el máximo del gasto se obtiene con un salario mensual de 2.000 euros.

$b)$ Para $b = 9$, determine el salario para que el gasto sea máximo. ¿A cuánto asciende este gasto?

$c)$ Para $b = 9$, ¿para qué salarios el gasto mensual es superior a 10 euros?

Problema 6:

6º) Si el precio de la entrada de un cine es de 8 euros, van 500 personas. El propietario sabe por experiencia que por cada aumento de 1,5 euros en el precio de la entrada van 30 espectadores menos. Encuentre:

$a)$ La función que determina el número de espectadores en función del precio de la entrada.

$b)$ La función que determina los ingresos del cine en función del precio de la entrada.

$c)$ El precio de la entrada para que los ingresos del propietario sean máximos.

$d)$ El número de espectadores que irán al cine cuando el precio sea el que corresponde a los ingresos máximos y estos ingresos máximos.

Problema 7:

7º) La producción en kilogramos de naranjas por naranjo en Sóller sigue una distribución normal de desviación típica 2 y media desconocida.

$a)$ Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para que al estimar la media poblacional con un nivel de confianza del 94 %, el error cometido sea inferior a 1,5 kilogramos.

$b)$ Si se toma una muestra aleatoria de 10 naranjos, con las siguiente producciones en kilogramos: $30;\ 25;\ 4;\ 70;\ 45;\ 60;\ 21;\ 32;\ 9;\ 47$. Calcule un intervalo de confianza del 97 % para estimar la producción media de naranjas por árbol.

Problema 8:

8º) En cierta empresa de exportación, el 62,5 % de los empleados habla inglés. Por otra parte, entre los empleados que hablan inglés, el 80 % habla también alemán. Entre los empleados que no hablan inglés, sólo la tercera parte sí habla alemán.

$a)$ ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas?

$b)$ ¿Qué porcentaje de empleados habla alemán?

$c)$ Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Hace un año una sociedad de capital riesgo invirtió 100.000 euros en acciones de tres empresas, que llamaremos A, B y C. Ahora, las acciones de la empresa A han aumentado de valor en un 50 %, las de la empresa B han aumentado en un 10 % y, en cambio las de la empresa C han perdido un 15 % de su valor. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102.000 euros. Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas.

a) Identifique las variables e interprete el enunciado mediante un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Calcule la cantidad de dinero que la sociedad invirtió en acciones en cada empresa.

Solución:

a) Sean x, y, z las cantidades invertidas por la sociedad en las empresas A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=100.000 \\ 1{,}50x+1{,}10y+0{,}85z=102.000 \\ x+y=z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\left.\begin{array}{r} x+y+z=100.000 \\ 30x+22y+17z=2.040.000 \\ x+y-z=0 \end{array}\right\}.}$$

b) Restando a la primera ecuación la tercera: $2z=100.000 \Rightarrow z=50.000$.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+50.000=100.000 \\ 30x+22y+850.000=2.040.000 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y=50.000 \\ 30x+22y=1.190.000 \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=50.000 \\ 15x+11y=595.000 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -11x-11y=-550.000 \\ 15x+11y=595.000 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x=45.000;$$

$x=\frac{45.000}{4}=11.250$. $11.250+y=50.000 \Rightarrow y=38.750$.

$$\underline{Invirtió\ 11.250, 38.750\ y\ 50.000\ euros\ en\ A, B\ y\ C, respectivamente.}$$

Problema 2:

2º) En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0,9 m^2 de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo se necesitan 1,2 m^2 de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m^2 de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 euros por una del segundo

a) Plantea la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Calcular el número de bolsas de cada tipo que tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determinar también este beneficio máximo.

Solución:

a) Sean x e y el número de bolsas de los modelos primero y segundo que se fabrican en el taller, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}9x + 1{,}2y \le 60 \\ 8x + 4y \le 400 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 9x + 12y \le 600 \\ 2x + y \le 100 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

$$\underline{\left.\begin{array}{r} 3x + 4y \le 200 \\ 2x + y \le 100 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}}.$$

b)

$① \Rightarrow 3x + 4y \le 200 \Rightarrow y \le \frac{200-3x}{4} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

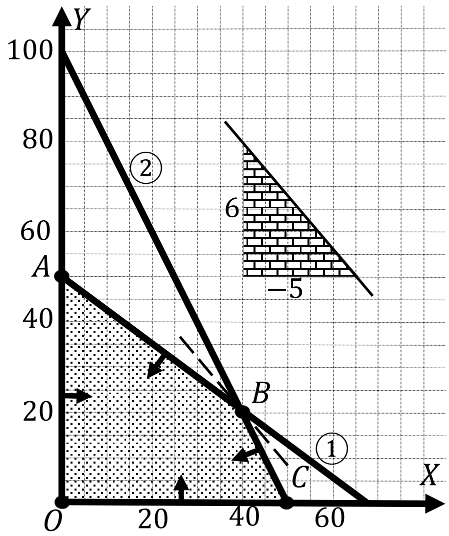
x	0	40
y	50	20

$② \Rightarrow 2x + y \le 100 \Rightarrow y \le 100 - 2x \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	50
y	100	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 3x + 4y = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 50 \Rightarrow \underline{A(0,50)}.$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 200 \\ 2x + y = 100 \end{array}\right\} \begin{array}{r} -3x - 4y = -200 \\ 8x + 4y = 400 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x = 200;\ \ x = 40;\ \ y = 20 \Rightarrow \underline{B(40,20)}.$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x + y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 50 \Rightarrow \underline{C(50,0)}.$$

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

$c)$ La función de objetivos es $f(x,y) = 30x + 25y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,50) = 30 \cdot 0 + 25 \cdot 50 = 0 + 1.250 = 1.250.$

$B \Rightarrow f(40,20) = 30 \cdot 40 + 25 \cdot 20 = 1.200 + 500 = 1.700.$

$C \Rightarrow f(50,0) = 30 \cdot 50 + 25 \cdot 0 = 1.500 + 0 = 1.500.$

El valor máximo se produce en el punto $B(40,20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 30x + 25y = 0 \Rightarrow y = -\frac{30}{25}x = -\frac{6}{5}x \Rightarrow m = -\frac{6}{5}.$

$$\underline{Máximo\ beneficio\ fabricando\ 40\ bolsas\ del\ 1^{er}\ modelo\ y\ 20\ del\ 2º}.$$

$$\underline{Máximo\ beneficio\ si\ fabrica\ 40\ bolsas\ del\ primer\ modelo\ y\ 20\ del\ segundo}.$$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 1.700\ euros}.$$

Problema 3:

3º) Dado el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x-ay+2z=0 \\ ax-4y-4z=0 \\ 4x+3y-2z=0 \end{array}\right\}$ en función del parámetro a.

a) Discuta para qué valores de a el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso.

b) Encuentre la solución para $a=-2$.

Solución:

a) La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Por tratarse de un sistema lineal homogéneo, a efectos de rango, las matrices de coeficientes y ampliada son equivalentes.

El rango de la matriz de coeficientes en función de a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=8+6a+16a+32+12-2a^2=0;$$

$$-2a^2+22a+52=0;\ \ a^2-11a-26=0;\ \ a=\frac{11\pm\sqrt{121+104}}{2}=\frac{11\pm\sqrt{225}}{2}==\frac{11\pm 15}{2}\Rightarrow$$

$$a_1=-2;\ \ a_2=13.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e iguales al número de incógnitas; en el caso que nos ocupa el número de incógnitas es tres, por lo cual:

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} a\neq -2 \\ a\neq 13 \end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ M=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} a\neq -2 \\ a\neq 13 \end{array}\right\} el\ sistema\ tiene\ únicamente\ la\ solución\ trivial\ x=y=z=0.}$$

Por contener la matriz de coeficientes el menor $\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\neq 0$:

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} a=-2 \\ a=13 \end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ M=2<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

b) Para $a=-2$ el sistema resulta $\left\{\begin{array}{l} x+2y+2z=0 \\ -2x-4y-4z=0 \\ 4x+3y-2z=0 \end{array}\right.$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se elimina una ecuación (segunda).

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+2z=0 \\ 4x+3y-2z=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \text{Haciendo } z=\lambda:$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=-2\lambda \\ 4x+3y=2\lambda \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} 4x+8y=-8\lambda \\ -4x-3y=-2\lambda \end{array}\right\}\Rightarrow 5y=-10\lambda;\ \ y=-2\lambda.$$

$$x+2y=-2\lambda;\ \ x-4\lambda=-2\lambda\Rightarrow x=2\lambda.$$

$$\underline{Solución: x=2\lambda,\ \ y=-2\lambda,\ \ z=\lambda,\ \ \forall\lambda\in R.}$$

Problema 4:

4º) Considere la función a trozos siguiente: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si\ \ x<0 \\ x^3+ax+2 & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$.

a) Calcula los valores de a para que $f(x)$ sea continua y derivable.

b) Para $a=4$ calcule el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x=0$, $x=1$ e $y=0$.

Solución:

a) Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$, por ser polinómica, es continua en R, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3x+2)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^3+ax+2)=2=f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \Rightarrow \forall a \in R.$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=0$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de a.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & si\ \ x<0 \\ 3x^2+a & si\ \ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-)=-3 \\ f'(0^+)=a \end{cases} \Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+) \Rightarrow a=-3.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ y\ derivable\ en\ x=0\ para\ a=-3}.$$

b) Para $a=4$ la función resulta $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si\ \ x<0 \\ x^3+4x+2 & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$.

En el intervalo $(0,1)$ la función es $f(x)=x^3+4x+2$, cuyas ordenadas son todas positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S=\int_0^1 (x^3+4x+2)\cdot dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{4x^2}{2}+2x\right]_0^1=\left[\frac{x^4}{4}+2x^2+2x\right]_0^1=$$

$$=\left(\frac{1^4}{4}+2\cdot 1^2+2\cdot 1\right)-0=\frac{1}{4}+2+2=4+\frac{1}{4}\Rightarrow$$

$$\underline{S=\frac{17}{4}\ u^2=4{,}25\ u^2}.$$

Problema 5:

5º) El gasto mensual en euros en lotería de un trabajador viene determinado por su salario mediante la función $f(x) = \frac{100x}{b+x^2}$, en la que $x \geq 0$ representa el salario en miles de euros y $b > 0$ es un parámetro.

$a)$ Encuentre el valor de b para el cual el máximo del gasto se obtiene con un salario mensual de 2.000 euros.

$b)$ Para $b = 9$, determine el salario para que el gasto sea máximo. ¿A cuánto asciende este gasto?

$c)$ Para $b = 9$, ¿para qué salarios el gasto mensual es superior a 10 euros?

Solución:

$a)$ Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada en ese punto y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f'(x) = \frac{100\cdot(b+x^2)-100x\cdot 2x}{(b+x^2)^2} = \frac{100\cdot b+100x^2-200x^2}{(b+x^2)^2} = \frac{100b-100x^2}{(b+x^2)^2} = 100\cdot\frac{b-x^2}{(b+x^2)^2}.$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 100\cdot\frac{b-2^2}{(b+2^2)^2} = 0 \Rightarrow b-4 = 0 \Rightarrow b = 4.$$

Se justifica a continuación de que se trata de un máximo para $b = 4$:

$$f'(x) = 100\cdot\frac{4-x^2}{(4+x^2)^2}.$$

$$f''(x) = 100\cdot\frac{-2x\cdot(4+x^2)^2-(4-x^2)\cdot[2\cdot(4+x^2)\cdot 2x]}{(4+x^2)^4} = 100\cdot\frac{-2x\cdot(4+x^2)-4x\cdot(4-x^2)}{(4+x^2)^3} =$$

$$= 100\cdot\frac{-8x-2x^3-16x+4x^3}{(4+x^2)^3} = 100\cdot\frac{2x^3-24x}{(4+x^2)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{200x\cdot(x^2-12)}{(4+x^2)^3}.$$

$$f''(2) = \frac{200\cdot 2\cdot(2^2-12)}{(4+2^2)^3} = \frac{400\cdot(-8)}{(4+2^2)^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ b = 4\ y\ x = 2, c.q.j.$$

$$\underline{El\ gasto\ mensual\ es\ máximo\ para\ b = 4\ y\ un\ salario\ de\ 2.000\ euros}.$$

$b)$ Para $b = 9$ la función es $f(x) = \frac{100x}{9+x^2}$.

$$f'(x) = 100\cdot\frac{9-x^2}{(9+x^2)^2} = 0 \Rightarrow 9-x^2 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

$$f''(x) = 100\cdot\frac{-2x\cdot(9+x^2)^2-(9-x^2)\cdot[2\cdot(9+x^2)\cdot 2x]}{(9+x^2)^4} = 100\cdot\frac{-2x\cdot(9+x^2)-4x\cdot(9-x^2)}{(9+x^2)^3} =$$

$$= 100\cdot\frac{-18x-2x^3-36x+4x^3}{(9+x^2)^3} = 100\cdot\frac{2x^3-54x}{(9+x^2)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{200x\cdot(x^2-54)}{(9+x^2)^3}.$$

$$f''(3) = \frac{200\cdot 3\cdot(3^2-54)}{(9+3^2)^3} = \frac{600\cdot(-45)}{18^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 3.$$

$$\underline{Para\ b = 9\ el\ gasto\ es\ máximo\ con\ un\ salario\ de\ 3.000\ euros\ mensuales}.$$

Para $b = 9 \Rightarrow f(3) = \frac{100\cdot 3}{9+3^2} = \frac{300}{18} = \frac{100}{6} = 16{,}67.$

$$\underline{El\ gasto\ mensual\ es\ de\ 16{,}67\ euros}.$$

$c)$ $\quad b = 9 \Rightarrow f(x) = \frac{100 \cdot x}{9+x^2} > 10;\ \frac{10x}{9+x^2} > 1;\ 10x > 9 + x^2;\ -x^2 + 10x - 9 > 0.$

La función $f(x) = -x^2 + 10x - 9$ es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyos puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:

$$x^2 - 10x + 9 = 0;\ x = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = 5 \pm 4 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 9.$$

$\underline{\textit{Gasto mayor de } 10\ € \textit{ con un sueldo mayor de } 1.000\ € \textit{ y menor de } 9.000\ €.}$

Problema 6:

6º) Si el precio de la entrada de un cine es de 8 euros, van 500 personas. El propietario sabe por experiencia que por cada aumento de 1,5 euros en el precio de la entrada van 30 espectadores menos. Encuentre:

$a)$ La función que determina el número de espectadores en función del precio de la entrada.

$b)$ La función que determina los ingresos del cine en función del precio de la entrada.

$c)$ El precio de la entrada para que los ingresos del propietario sean máximos.

$d)$ El número de espectadores que irán al cine cuando el precio sea el que corresponde a los ingresos máximos y estos ingresos máximos.

Solución:

$a)$ Sea x el precio de la entrada y $N(x)$ el número de espectadores, que es una función lineal afín, por lo cual, su expresión es de la forma $N(x) = mx + n$.

Para determinar los valores de m y n se tiene en cuenta que $N(8) = 500$ y, por ejemplo: $N(9{,}5) = 470$.

$$\left.\begin{array}{l} N(8) = 500 \ \rightarrow 8\mathrm{m} + \mathrm{n} = 500 \\ N(9{,}5) = 470 \ \rightarrow 9{,}5\mathrm{m} + \mathrm{n} = 470 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -8m - n = -500 \\ 9{,}5m + n = 470 \end{array}\right\} \Rightarrow 1{,}5m = -30;$$

$15m = -300 \Rightarrow m = -20. \quad 8 \cdot (-20) + \mathrm{n} = 500; \ \ \mathrm{n} = 500 + 160 \Rightarrow \mathrm{n} = 660.$

$$\underline{N(x) = -20x + 660}.$$

$b)$ La función ingresos se obtiene multiplicando el número de espectadores por el precio de la entrada:

$I(x) = N(x) \cdot x = (-20x + 660) \cdot x \Rightarrow$

$$\underline{I(x) = -20x^2 + 660x}.$$

$c)$ Por ser la función ingresos una parábola cóncava (∩), por ser negativo el coeficiente de x^2, por lo cual su máximo se obtiene cuando se anula su primera derivada.

$I'(x) = -40x + 660 = 0; \ -2x + 33 = 0 \Rightarrow x = \frac{33}{2} = 16{,}5.$

$$\underline{Se\ obtienen\ máximos\ ingresos\ vendiendo\ las\ entradas\ a\ 16{,}5\ euros}.$$

$d)$ $N(16{,}5) = -20 \cdot 16{,}5 + 660 = -330 + 660 = 330.$

$$\underline{Se\ obtienen\ máximos\ ingresos\ cuando\ asisten\ 330\ espectadores}.$$

$I(16{,}5) = -20 \cdot 16{,}5^2 + 660 \cdot 16{,}5 = 16{,}5 \cdot (-20 \cdot 16{,}5 + 660) =$

$= 16{,}5 \cdot (-330 + 660) = 16{,}5 \cdot 330 = 5.445.$

$$\underline{Los\ máximos\ ingresos\ son\ de\ 5.445\ euros}.$$

Problema 7:

7º) La producción en kilogramos de naranjas por naranjo en Sóller sigue una distribución normal de desviación típica 2 y media desconocida.

a) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para que al estimar la media poblacional con un nivel de confianza del 94 %, el error cometido sea inferior a 1,5 kilogramos.

b) Si se toma una muestra aleatoria de 10 naranjos, con las siguiente producciones en kilogramos: $30;\ 25;\ 4;\ 70;\ 45;\ 60;\ 21;\ 32;\ 9;\ 47$. Calcule un intervalo de confianza del 97 % para estimar la producción media de naranjas por árbol.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 94 % es:

$$1-\alpha=0{,}94\ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}94=0{,}06\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}03}=1{,}88.$$

$$(1-0{,}03=0{,}9700\ \rightarrow z=1{,}88).$$

Datos: $\sigma=2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}88;\ \ E=1{,}5.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}88\cdot\frac{2}{1{,}5}\right)^2=$

$=(1{,}88\cdot 1{,}3333)^2=2{,}5067^2=6{,}28.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 7\ naranjos}$$

b) $\overline{x}=\frac{30+25+4+70+45+60+21+32+9+47}{10}=\frac{129+105+62+47}{10}=\frac{343}{10}=34{,}3.$

Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1-\alpha=0{,}97\ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}97=0{,}03\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}015}=2{,}17.$$

$$(1-0{,}015=0{,}9850\ \rightarrow z=2{,}17).$$

Datos: $n=10;\ \ \overline{x}=34{,}3;\ \ \sigma=2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(34{,}3-2{,}17\cdot\frac{2}{\sqrt{10}};\ 34{,}3+2{,}17\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}\right);$$

$(34{,}3-2{,}17\cdot 0{,}6325;\ 34{,}3+2{,}17\cdot 0{,}6325);\ \ (34{,}3-1{,}3724;\ 34{,}3+1{,}3724).$

$$\underline{I.C._{97\,\%}=(32{,}9276;\ 35{,}6724).}$$

Problema 8:

8º) En cierta empresa de exportación, el 62,5 % de los empleados habla inglés. Por otra parte, entre los empleados que hablan inglés, el 80 % habla también alemán. Entre los empleados que no hablan inglés, sólo la tercera parte sí habla alemán.

a) ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas?

b) ¿Qué porcentaje de empleados habla alemán?

c) Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés?

Solución:

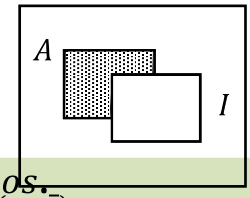
$$Datos: \ P(I) = 0{,}625; \ \ P(A/I) = 0{,}800; \ \ P(A/\overline{I}) = \frac{1}{3} = 0{,}333.$$

a) $\quad P(A/I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = 0{,}800 \Rightarrow P(A \cap I) = 0{,}8 \cdot P(I) = 0{,}8 \cdot 0{,}625 = 0{,}5.$

$$\underline{Hablan\ las\ dos\ lenguas\ el\ 50\ \%\ de\ los\ empleados}.$$

b) $\quad P(A/\overline{I}) = \frac{P(A \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{P(A) - P(A \cap I)}{1 - P(I)} = \frac{1}{3}; \ \ \frac{P(A) - 0{,}5}{1 - 0{,}625} = \frac{1}{3};$

$3 \cdot P(A) - 1{,}5 = 0{,}375; \ \ 3 \cdot P(A) = 1{,}875 \Rightarrow P(A) = 0{,}625.$



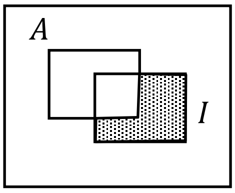
$P(A \cap \overline{I}) = P(A) - P(A \cap I)$

$$\underline{Hablan\ Alemán\ el\ 62{,}5\ \%\ de\ los\ empleados.}$$

c) $\quad P = P(I/\overline{A}) = \frac{P(I \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(A) - P(A \cap I)}{1 - P(A)} = \frac{0{,}625 - 0{,}5}{1 - 0{,}625} =$

$$= \frac{0{,}125}{0{,}375}$$

$$\Rightarrow \underline{P(I/\overline{A}) = \frac{1}{3} = 0{,}3333.}$$



$I \cap \overline{A} = I - (A \cap I)$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Sólo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) El barco de Denia a Ibiza transporta automóviles y camiones en su bodega. Cada camión ocupa 4 plazas de automóvil. La bodega puede almacenar hasta 200 automóviles. Cada automóvil pesa 1.000 kg y cada camión, 9.000 kg. El peso total que permita la carga de la bodega es de 300.000 kg y la compañía cobra 50 euros por cada automóvil y 300 euros por cada camión.

a) Plantea la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Calcular el número de coches y camiones que se han de cargar con el fin de obtener el beneficio máximo.

Problema 2:

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

a) Calcular A^2.

b) Hallar a, b, c tales que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema 3:

3º) En una tienda de frutas hemos comprado manzanas a 0,5 euros cada una, aguacates a 1 euros y piñas a 1,5 euros la pieza. Al llegar a la caja nos damos cuenta que llevamos 70 piezas de fruta, el coste total de las cuales es de 68 euros. También observamos que si las manzanas que llevamos fueran aguacates y los aguacates fueran manzanas, la compra nos saldría 4 euros más barata.

a) Idendifique las variables e interprete el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Determinar el número de piezas de cada fruta que hemos comprado.

Problema 4:

4º) Consideramos la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} -4x + a & si \quad x \le -2 \\ x^2 - 5 & si \quad -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$.

a) Calcular los valores de a para que $f(x)$ sea continua.

b) ¿Es $f(x)$ derivable para $x = 1$?

c) Para $a = 0$, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Problema 5:

5º) El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función $P(t) = \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}$, con $t \geq 0$ mide el número de años transcurridos.

$a)$ ¿Cuál es la población inicial $(t = 0)$ y la población después de 5 años?

$b)$ ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos?

$c)$ Con el paso de los años, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos?

Problema 6:

6º) Considera la función: $f(x) = \frac{3}{x} + 8$.

$a)$ Hallar los puntos de la gráfica de $f(x)$ en el cual las rectas tangentes son paralelas a la recta $3x + 4y + 5 = 0$.

$b)$ Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos hallados en el apartado anterior.

$c)$ Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 2$, $x = 4$ e $y = 0$.

Problema 7:

7º) En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17,4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la cual procede la muestra es de 2 años.

$a)$ Calcular un intervalo de confianza al 95 % para estimar la edad media de la poblsción.

$b)$ Calcular el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para estimar la edad media de esta población con un nivel de confianza del 92 %, el error cometido sea inferior a 0,5 años.

Problema 8:

8º) En una determinada población residen 5.000 personas en el centro y 1.000 en la periferia. Se sabe que el 95 % de los residentes en el centro y el 20 % de los que viven en la periferia opina que el ayuntamiento debía restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción del acceso?

$c)$ Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) El barco de Denia a Ibiza transporta automóviles y camiones en su bodega. Cada camión ocupa 4 plazas de automóvil. La bodega puede almacenar hasta 200 automóviles. Cada automóvil pesa 1.000 kg y cada camión, 9.000 kg. El peso total que permita la carga de la bodega es de 300.000 kg y la compañía cobra 50 euros por cada automóvil y 300 euros por cada camión.

a) Plantea la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Calcular el número de coches y camiones que se han de cargar con el fin de obtener el beneficio máximo.

Solución:

a) Sean x e y el número de automóviles y de camiones que se almacenan en la bodega del barco, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} x+4y\le 200 \\ 1.000x+9.000y\le 300.000 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+4y\le 200 \\ x+9y\le 300 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

b)

$$(1) \Rightarrow x+4y\le 200 \Rightarrow y\le \frac{200-x}{4} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$$

x	200	0
y	0	50

$$(2) \Rightarrow x+9y\le 300 \Rightarrow y\le \frac{300-x}{9} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$$

x	120	30
y	20	30

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

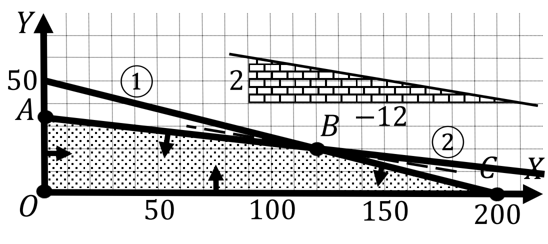
Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+9y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{100}{3} \Rightarrow A\left(0,\frac{100}{3}\right).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+4y=200 \\ x+9y=300 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-4y=-200 \\ x+9y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y=100;\ \ y=20;\ \ x+80=200;\ \ x=120 \Rightarrow B(120,20).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+4y=200 \end{array}\right\} \Rightarrow x=200 \Rightarrow C(200,0).$$



c) La función de objetivos es $f(x,y)=50x+300y$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f\left(0,\frac{100}{3}\right)=50\cdot 0+300\cdot\frac{100}{3}=0+10.000=10.000.$$

$B \Rightarrow f(120,20) = 50 \cdot 120 + 300 \cdot 20 = 6.000 + 6.000 = 12.000.$

$C \Rightarrow f(200,0) = 50 \cdot 200 + 300 \cdot 0 = 10.000 + 0 = 10.000.$

El valor máximo se produce en el punto $B(120,20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 50x + 300y = 0 \Rightarrow y = -\frac{50}{300}x = -\frac{1}{6}x \Rightarrow m = -\frac{2}{12}.$

$$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ cargando\ 120\ automóviles\ y\ 20\ camiones.}$$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 12.000\ euros.}$$

Problema 2:

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

a) Calcular A^2.

b) Hallar a, b, c tales que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}}.$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{Soluciones: \begin{cases} a_1 = 1; \;\; b_1 = -1; \;\; c_1 = 1 \\ a_2 = -1; \;\; b_2 = 1; \;\; c_2 = -1 \end{cases}}.$$

Problema 3:

3º) En una tienda de frutas hemos comprado manzanas a 0,5 euros cada una, aguacates a 1 euros y piñas a 1,5 euros la pieza. Al llegar a la caja nos damos cuenta que llevamos 70 piezas de fruta, el coste total de las cuales es de 68 euros. También observamos que si las manzanas que llevamos fueran aguacates y los aguacates fueran manzanas, la compra nos saldría 4 euros más barata.

a) Idendifique las variables e interprete el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Determinar el número de piezas de cada fruta que hemos comprado.

Solución:

a) Sean x, y, z el número de unidades de naranjas, aguacates y piñas que se compran en la tienda, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ 0{,}5\cdot x+1\cdot y+1{,}5\cdot z=68 \\ 1\cdot x+0{,}5\cdot y+1{,}5z=64 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ x+2y+3z=136 \\ 2x+y+3z=128 \end{array}\right\}.$$

b) Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & 2 & 3 & 136 \\ 2 & 1 & 3 & 128 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 2 & 66 \\ 0 & -1 & 1 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 + F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 2 & 66 \\ 0 & 0 & 3 & 54 \end{pmatrix} \Rightarrow 3z = 54;\ \ z = 18. \qquad y + 2z = 66;$$

$y + 36 = 66 \Rightarrow y = 30. \quad x + 30 + 18 = 70 \Rightarrow x = 22.$

$$\underline{Hemos\ comprado\ 22\ naranjas, 30\ aguacates\ y\ 18\ piñas}.$$

Problema 4:

4º) Consideramos la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases}-4x+a & si \quad x\leq -2\\ x^2-5 & si \quad -2<x<1\\ -7x+3 & si \quad x\geq 1\end{cases}$.

a) Calcular los valores de a para que $f(x)$ sea continua.

b) ¿Es $f(x)$ derivable para $x=1$?

c) Para $a=0$, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) La función $f(x)$, por ser polinómica, es continua en su dominio, que es R, excepto para $x=-2 \; y \; x=1$ cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=-2 \Rightarrow \begin{cases}\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2}(-4x+a)=a+8=f(-2)\\ \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2}(x^2-5)=4-5=-1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(x)=f(-2) \Rightarrow a+8=-1 \Rightarrow a=-9.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x=-2\ para\ a=-8}.$$

b) Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad para $x=1$ se estudia su continuidad.

$$Para\ x=1 \Rightarrow \begin{cases}\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2-5)=1-5=-4\\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}(-7x+3)=-7+3=-4=f(1)\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Rightarrow f(x)\ es\ continua\ en\ x=1.$$

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases}-4 & si \quad x\leq -2\\ 2x & si \quad -2<x<1\\ -7 & si \quad x\geq 1\end{cases}.$$

Para $x=1 \Rightarrow \begin{cases}f'(1^-)=2\cdot 1=2\\ f'(1^+)=-7\end{cases} \Rightarrow f'(1^-)\neq f'(1^+)$

$$\underline{f(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x=1}.$$

c) Para $a=0$ la función es $f(x)=\begin{cases}-4x & si \quad x\leq -2\\ x^2-5 & si \quad -2<x<1\\ -7x+3 & si \quad x\geq 1\end{cases}$ y su función derivada es $f'(x)=\begin{cases}-4 & si \quad x\leq -2\\ 2x & si \quad -2<x<1\\ -7 & si \quad x\geq 1\end{cases}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

De la observación de la derivada se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (0,1)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (1, +\infty)}.$$

Problema 5:

5º) El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función $P(t) = \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}$, con $t \geq 0$ mide el número de años transcurridos.

a) ¿Cuál es la población inicial $(t = 0)$ y la población después de 5 años?

b) ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos?

c) Con el paso de los años, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos?

Solución:

a) $P(0) = \frac{2+0+0^2}{0^2+2\cdot 0+1} = \frac{2}{1} = 2.$

$\underline{\textit{La población inicial era de } 2.000.000 \textit{ individuos}}.$

$P(5) = \frac{2+5+5^2}{5^2+2\cdot 5+1} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9} = 0{,}888888.$

$\underline{\textit{Después de } 5 \textit{ años la población era de } 888.888 \textit{ individuos}}.$

b) $P(t) = \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1} < 1;\ \ 2+t+t^2 < t^2+2t+1;\ \ 1 < t.$

$\underline{\textit{La población es menor de un millón de individuos a partir de un año}}.$

c) $\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1} = 1.$

$\underline{\textit{Con el tiempo la población se estabiliza en un millón de individuos}}.$

Problema 6:

6º) Considera la función: $f(x)=\frac{3}{x}+8$.

a) Hallar los puntos de la gráfica de $f(x)$ en el cual las rectas tangentes son paralelas a la recta $3x+4y+5=0$.

b) Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos hallados en el apartado anterior.

c) Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x=2, x=4\ e\ y=0$.

Solución:

a) La pendiente de la recta $3x+4y+5=0$ es $m=-\frac{3}{4}$.

La pendiente de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$f'(x)=-\frac{3}{x^2}$. $m=f'(x) \Rightarrow -\frac{3}{4}=-\frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2=4;\ \ x_1=-2, x_2=2$.

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$f(-2)=\frac{3}{-2}+8=\frac{13}{2} \Rightarrow \underline{T_1\left(-2,\frac{13}{2}\right)}$. $f(2)=\frac{3}{2}+8=\frac{19}{2} \Rightarrow \underline{T_2\left(2,\frac{19}{2}\right)}$.

$$\underline{T_1\left(-2,\frac{13}{2}\right)};\ \underline{T_2\left(2,\frac{19}{2}\right)}.$$

b) La ecuación de la recta punto-pendiente es $y-y_0=m(x-x_0)$.

$y-\frac{13}{2}=-\frac{3}{4}\cdot(x+2);\ \ 4y-26=-3x-6 \Rightarrow \underline{t_1 \equiv 3x+4y-20=0}$.

$y-\frac{19}{2}=-\frac{3}{4}\cdot(x-2);\ \ 4y-38=-3x+6 \Rightarrow \underline{t_2 \equiv 3x+4y-44=0}$.

c) En el intervalo de la superficie a calcular, $(2,4)$, todas las ordenadas de la función $f(x)=\frac{3}{x}+8$ son positivas, por lo cual:

$S=\int_2^4 f(x)\cdot dx=\int_2^4\left(\frac{3}{x}+8\right)\cdot dx=[3Lx+8x]_2^4=$

$=(3L4+8\cdot 4)-(3L2+8\cdot 2)=6L2+32-3L2-16=3L2+16 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{S=(3L2+16)\ u^2 \cong 18{,}08\ u^2}.$$

Problema 7:

7º) En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17,4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la cual procede la muestra es de 2 años.

a) Calcular un intervalo de confianza al 95 % para estimar la edad media de la poblsción.

b) Calcular el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para estimar la edad media de esta población con un nivel de confianza del 92 %, el error cometido sea inferior a 0,5 años.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$

$(1-0{,}025=0{,}9750 \;\rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=256;\;\; \overline{x}=17{,}4;\;\; \sigma=2;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\sigma\;y\;n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(17{,}4-1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{256}};\;17{,}4+1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{256}}\right);$

$(17{,}4-1{,}96\cdot 0{,}125;\;17{,}4+1{,}96\cdot 0{,}125);\;\;(17{,}4-0{,}245;\;17{,}4+0{,}245).$

$$\underline{I.C._{95\,\%}=(17{,}155;\;17{,}645).}$$

b) Para un nivel de confianza del 92 % es:

$1-\alpha=0{,}92 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}92=0{,}08 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}04}=1{,}75.$

$(1-0{,}04=0{,}9600 \;\rightarrow z=1{,}75).$

Datos: $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75;\;\; E=0{,}5;\;\; \sigma=2.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \;\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}75\cdot\frac{2}{0{,}5}\right)^2=$

$=(1{,}75\cdot 4)^2=7^2=49.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 50\ individuos.}$$

Problema 8:

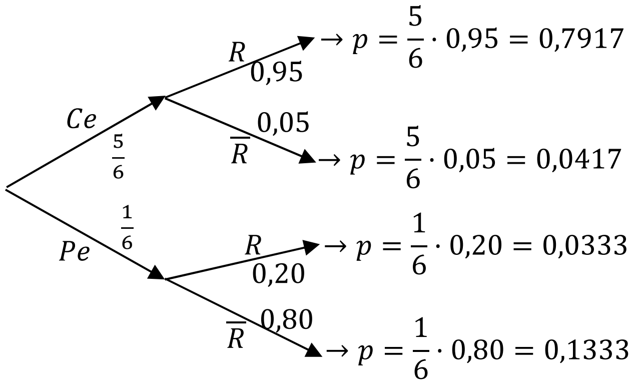
8º) En una determinada población residen 5.000 personas en el centro y 1.000 en la periferia. Se sabe que el 95 % de los residentes en el centro y el 20 % de los que viven en la periferia opina que el ayuntamiento debía restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción del acceso?

c) Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad?

Solución:



a) $P = P(R) = P(Ce \cap R) + P(Pe \cap R) =$

$= P(Ce) \cdot P(R/Ce) + P(Pe) \cdot P(R/Pe) = \frac{5}{6} \cdot 0,95 + \frac{1}{6} \cdot 0,20 = 0,7917 + 0,0333 = \underline{0,8250}.$

$$P(R) = \underline{0,8250}.$$

b) $P = P(Ce \cap R) = P(Ce) \cdot P(R/Ce) = \frac{5}{6} \cdot 0,95 = \underline{0,7917}.$

c) $P = P(Ce/R) = \frac{P(Ce \cap R)}{P(R)} = \frac{P(Ce) \cdot P(R/Ce)}{P(R)} = \frac{\frac{5}{6} \cdot 0,95}{0,8250} = \frac{0,7917}{0,8250} = \underline{0,9596}.$

La resolución del ejercicio mediante una tabla de contingencias es la siguiente:

	Centro	Periferia	Total
Residentes	5.000	1.000	6.000
A favor	4.750	200	4.950
En contra	250	800	1.050

Aplicando la regla de Laplace:

a) $P = \frac{A\ favor}{Total} = \frac{4.950}{6.000} = \underline{0,8250}.$

b) $P = \frac{A\ favor\ del\ centro}{Total} = \frac{4.750}{6.000} = \underline{0,7917}.$

c) $P = \frac{Del\ centro}{A\ favor} = \frac{4.750}{4.950} = \underline{0,9596}.$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2022
Comunidad autónoma de
CANARIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Resolver un máximo de cuatro preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1; UNA entre A2 y B2; UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema A1:

A1) Un centro de estudios utiliza tres servidores para conectarse a Internet. El 40 % de los accesos a la red se realiza a través del servidor uno, el 35 % a través del servidor dos y el resto a través del tres. El 4 % de los accesos a la red que utilizan el servidor 1 resultan bloqueados. También se bloquean el 6 % de los accesos que se producen a través del servidor 2 y el 9 % de los que usan el servidor 3.

$a)$ Dibuja el diagrama en árbol para describir esta situación.

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que un acceso a internet no resulta bloqueado?

$c)$ Si un acceso a Internet resulta bloqueado, ¿cuál es la probabilidad de que el bloqueo haya ocurrido en el servidor 2?

Problema B1:

B1) Una compañía de seguros tiene asegurados 2.500 coches, 560 guaguas y 220 motos. Se estima que las probabilidades de tener un accidente a lo largo de un año son 0,1 para los coches, 0,08 para las guaguas y 0,16 para las motos.

$a)$ ¿Cuál es el número total de vehículos (sumando coches, guaguas y motos) que se puede esperar que tengan un accidente a lo largo del próximo año?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo año tengan un accidente al menos 270 de los coches asegurados?

$c)$ La Administración Tributaria decide inspeccionar las cuentas de esta aseguradora. Para realizar la inspección elige al azar las pólizas de 10 de los vehículos asegurados por la compañía. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los vehículos elegidos haya al menos dos guaguas?

Problema A2:

A2) Se realiza un estudio sobre el gasto en electricidad en los hogares canarios durante el año en curso. A partir de una muestra de 289 viviendas se obtuvo el intervalo de confianza $[128{,}76; 134{,}32]$ para el gasto medio mensual (en euros). Sabiendo que la varianza del gasto en electricidad es de $729\ euros^2$:

$a)$ ¿Cuál fue el gasto medio mensual por hogar en Canarias obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con que se obtuvo el intervalo?

$b)$ Usando como valor de la media la estimación puntual obtenida en al apartado $a)$, y tomando una muestra de 576 hogares, ¿cuál es la probabilidad de que el gasto medio en electricidad de dichos hogares sea mayor que 130 euros?

Problema B2:

B2) En un periódico se lee el siguiente titular: “Un 63 % de los españoles valoran positivamente el teletrabajo”.

$a)$ Sabiendo que para obtener dicha proporción se han realizado 800 encuestas telefónicas, construir un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo.

$b)$ Utilizando el valor publicado por el periódico como estimación inicial de dicha proporción, ¿a cuántas personas habría que encuestar, para estimar la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo, con un error máximo del 1 % y con un nivel de confianza del 88 %?

Problema A3:

A3) Durante los últimos 15 meses se ha consumido agua de un depósito (en decenas de miles de metros cúbicos) según la función:

$$c(m) = \begin{cases} \frac{1}{10}(m^2 - 9m + 30) & si \ \ 0 \le m < 10 \\ \frac{1}{5}(m^2 - 25m + 170) & si \ \ 10 \le m \le 15 \end{cases}.$$

$a)$ Representar gráficamente la función. Justificando las respuestas, decir si es continua, y determinar cuándo es creciente y cuando es decreciente.

$b)$ ¿Cuándo se alcanzaron los consumos mínimo y máximo? ¿Cuáles fueron los correspondientes valores?

$c)$ ¿Cuándo el consumo fue igual a 10 millones de litros $(10.000\ m^3)$?

Problema B3:

B3) En una pared se quiere pintar un mural abstracto. En ese mural hay que pintar la figura encerrada dentro de la parábola $y = x^2 - 1$, y limitada por encima por la recta $y = 11 - x$ y por debajo por el eje OX. Las distancias en los ejes están definidas en metros.

$a)$ ¿Cuántos metros cuadrados mide la figura?

$b)$ El trozo de figura a la izquierda de la recta $x = -1$ se pinta de azul, y el otro trozo a la derecha de gris. Si cada metro cuadrado de pintura azul cuesta 2 euros, y pintar el mural ha costado en total 95 euros, ¿cuánto cuesta cada m^2 de pintura gris?

Problema A4:

A4) Una empresa dedicada a actividades y deportes acuáticos ha vendido en un día, un total de 45 sesiones entre paddle surf, kayak y moto acuática. Los precios por sesión y persona de cada una de estas actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1.700 euros ese día. Si por cada persona que elige kayak hay tres que eligen paddle sur:

$a)$ Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

$b)$ ¿Cuántas personas van a cada actividad?

Problema B4:

B4) Una fábrica de helados produce helados con dos sabores (turrón y pistacho) que se envasan en tarrinas de dos tamaños, pequeño y grande. Las tarrinas pequeñas llevan 200 gramos de helado de turrón y 150 gramos de pistacho; las tarrinas grandes llevan 500 gramos de turrón y 300 de pistacho. La fábrica obtiene un beneficio de 2 euros por la venta de cada tarrina pequeña y de 4,50 euros por la venta de cada tarrina grande. La fábrica produce cada semana 400 kg de helado de turrón y 255 kg de helado de pistacho que envasa en estas tarrinas. Para satisfacer la demanda de las heladerías de la zona, debe producir semanalmente al menos 200 tarrinas pequeñas y 50 grandes. Suponiendo que pueda vender toda la producción:
$a)$ Formular el correspondiente problema de programación lineal.
$b)$ Representar la región factible.
$a)$ ¿Cuántas tarrinas de cada clase debe producir la fábrica cada semana si quiere maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema A1:

A1) Un centro de estudios utiliza tres servidores para conectarse a Internet. El 40 % de los accesos a la red se realiza a través del servidor uno, el 35 % a través del servidor dos y el resto a través del tres. El 4 % de los accesos a la red que utilizan el servidor 1 resultan bloqueados. También se bloquean el 6 % de los accesos que se producen a través del servidor 2 y el 9 % de los que usan el servidor 3.

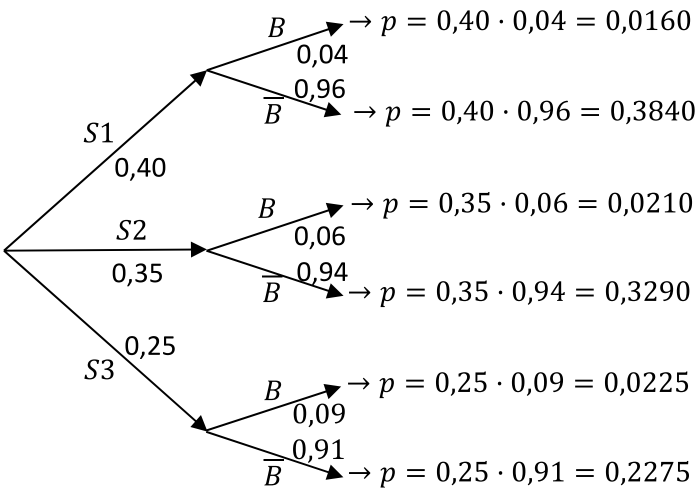
a) Dibuja el diagrama en árbol para describir esta situación.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un acceso a internet no resulta bloqueado?

c) Si un acceso a Internet resulta bloqueado, ¿cuál es la probabilidad de que el bloqueo haya ocurrido en el servidor 2?

Solución:

a)



$b)\ P = P(\overline{B}) = P(S1 \cap \overline{B}) + P(S2 \cap \overline{B}) + P(S3 \cap \overline{B}) =$

$= P(S1) \cdot P(\overline{B}/S1) + P(S2) \cdot P(\overline{B}/S2) + P(S3) \cdot P(\overline{B}/S3) =$

$= 0{,}40 \cdot 0{,}04 + 0{,}35 \cdot 0{,}06 + 0{,}25 \cdot 0{,}09 = 0{,}3840 + 0{,}3290 + 0{,}2275 = \underline{0{,}9405}.$

$$\boldsymbol{P(\overline{B}) = \underline{0,9405}.}$$

$c)\qquad P = P(S2/B) = \frac{P(S2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(S2) \cdot P(B/S2)}{1 - P(\overline{B})} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}06}{1 - 0{,}9405} = \frac{0{,}0210}{0{,}0595} = \underline{0{,}3529}.$

$$\boldsymbol{P(S2/B) = \underline{0,3529}.}$$

Problema B1:

B1) Una coB1pañía de seguros tiene asegurados 2.500 coches, 560 guaguas y 220 motos. Se estima que las probabilidades de tener un accidente a lo largo de un año son 0,1 para los coches, 0,08 para las guaguas y 0,16 para las motos.

$a)$ ¿Cuál es el número total de vehículos (sumando coches, guaguas y motos) que se puede esperar que tengan un accidente a lo largo del próximo año?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo año tengan un accidente al menos 270 de los coches asegurados?

$c)$ La Administración Tributaria decide inspeccionar las cuentas de esta aseguradora. Para realizar la inspección elige al azar las pólizas de 10 de los vehículos asegurados por la compañía. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los vehículos elegidos haya al menos dos guaguas?

Solución:

$a)$ $N = 2.500 \cdot 0{,}1 + 560 \cdot 0{,}08 + 220 \cdot 0{,}16 = 250 + 44{,}8 + 35{,}2 = 330.$

$$\underline{\boldsymbol{Se\ puede\ esperar\ que\ tengan\ accidente\ el\ próximo\ año\ 330\ vehículos.}}$$

$b)$ $\mu = n \cdot p = 2.500 \cdot 0{,}1 = 250.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{2.500 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{225} = 15.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(250, 15).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-250}{15}.$

$P = P(X \geq 270) = P\left(Z \geq \frac{270-250}{15}\right) = P\left(Z \geq \frac{20}{15}\right) = P(Z \geq 1{,}33) =$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = \underline{0{,}0928}.$

$$\boldsymbol{P(X \geq 270) = \underline{0,0928}.}$$

$c)$ Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 10;\ \ p = \frac{560}{2.500+560+220} = \frac{560}{3.280} = \frac{7}{41};\ \ q = 1 - \frac{7}{41} = \frac{34}{41}.$

Por el suceso contrario, la probabilidad de que haya al menos 2 guaguas es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que haya 0 guaguas o 1 guagua.

La fórmula de la probabilidad binomial de n elementos de los cuales se produzcan r viene dada por la fórmula: $P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

$$P = 1 - [P(0) + P(1)] = 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot \left(\frac{7}{41}\right)^0 \cdot \left(\frac{34}{41}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{7}{41}\right)^1 \cdot \left(\frac{34}{41}\right)^9\right] =$$

$$= 1 - \left[1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{34}{41}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{7}{41} \cdot \left(\frac{34}{41}\right)^9\right] = 1 - \left(\frac{34}{41}\right)^9 \left(\frac{34}{41} + \frac{70}{41}\right) = 1 - \left(\frac{34}{41}\right)^9 \cdot \frac{104}{41} =$$

$$= 1 - 0{,}1855 \cdot 2{,}5366 = 1 - 0{,}4704 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P = 0,5296.}}$$

Problema A2:

A2) Se realiza un estudio sobre el gasto en electricidad en los hogares canarios durante el año en curso. A partir de una muestra de 289 viviendas se obtuvo el intervalo de confianza $[128{,}76; 134{,}32]$ para el gasto medio mensual (en euros). Sabiendo que la varianza del gasto en electricidad es de $729\ euros^2$:

a) ¿Cuál fue el gasto medio mensual por hogar en Canarias obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con que se obtuvo el intervalo?

b) Usando como valor de la media la estimación puntual obtenida en al apartado a), y tomando una muestra de 576 hogares, ¿cuál es la probabilidad de que el gasto medio en electricidad de dichos hogares sea mayor que 130 euros?

Solución:

a) $\overline{x} = \frac{128{,}76+134{,}32}{2} = \frac{263{,}08}{2} = 131{,}54.$ $E = \frac{128{,}76-134{,}32}{2} = \frac{5{,}56}{2} = 2{,}78.$

$\rho = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{729} = 27.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ gasto\ medio\ mensual\ por\ hogar\ canario\ fue\ de\ 131{,}54\ euros}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ error\ de\ estimación\ cometido\ fue\ de\ 2{,}78\ euros}}.$$

Sabiendo que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{2{,}22\cdot\sqrt{289}}{27} = \frac{2{,}22\cdot 17}{27} = 1{,}3978.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de manera inversa, al valor aproximado $(1{,}40)$ le corresponde 0,9192, por lo cual:

$$\underline{\boldsymbol{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ fue\ del\ 91{,}92\ \%}}.$$

b) $Datos$: $\mu = 131{,}54;\ \ \sigma = \frac{27}{\sqrt{576}} = 1{,}125.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(131{,}54;\ 1{,}125).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-131{,}54}{1{,}125}$.

$P = P(X > 130) = P\left(Z > \frac{130-131{,}54}{1{,}125}\right) = P\left(Z > \frac{-1{,}54}{1{,}125}\right) = P(Z > -1{,}37) =$

$= P(Z \leq 1{,}37) = \underline{0{,}0147}.$

Problema B2:

B2) En un periódico se lee el siguiente titular: "Un 63 % de los españoles valoran positivamente el teletrabajo".

a) Sabiendo que para obtener dicha proporción se han realizado 800 encuestas telefónicas, construir un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo.

b) Utilizando el valor publicado por el periódico como estimación inicial de dicha proporción, ¿a cuántas personas habría que encuestar, para estimar la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo, con un error máximo del 1 % y con un nivel de confianza del 88 %?

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha=0{,}90 \rightarrow \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$

$(1-0{,}05=0{,}9500 \rightarrow z=1{,}645).$

Datos: $n=800;\ \ p=0{,}63;\ \ q=1-0{,}63=0{,}37;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right).$

$\left(0{,}63-1{,}645\cdot\sqrt{\frac{0{,}63\cdot 0{,}37}{800}};\ 0{,}63+1{,}645\cdot\sqrt{\frac{0{,}63\cdot 0{,}37}{800}}\right);$

$(0{,}63-1{,}645\cdot 0{,}0171;\ 0{,}63+1{,}645\cdot 0{,}0171);$

$(0{,}63-0{,}0281;\ 0{,}63+0{,}0281).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C.}_{90\,\%}=(\mathbf{0{,}6019;\ 0{,}6581}).}$$

b) Para un nivel de confianza del 88 % es:

$1-\alpha=0{,}88 \rightarrow \alpha=1-0{,}88=0{,}12 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}06}=1{,}555.$

$(1-0{,}06=0{,}9400 \rightarrow z=1{,}555).$

Datos: $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}555;\ \ E=1\,\%=0{,}01;\ \ p=0{,}63;\ \ q=0{,}37.$

$$E^2=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{n}\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{E^2}=1{,}555^2\cdot\frac{0{,}63\cdot 0{,}37}{0{,}01^2}=2{,}4180\cdot\frac{0{,}2331}{0{,}0001}=$$

$=2{,}4180\cdot 2.331=5.636{,}42.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ \mathbf{5.637}\ españoles.}}$$

Problema A3:

A3) Durante los últimos 15 meses se ha consumido agua de un depósito (en decenas de miles de metros cúbicos) según la función:

$$c(m)=\begin{cases}\frac{1}{10}(m^2-9m+30) & si\ \ 0\le m<10\\ \frac{1}{5}(m^2-25m+170) & si\ \ 10\le m\le 15\end{cases}.$$

$a)$ Representar gráficamente la función. Justificando las respuestas, decir si es continua, y determinar cuándo es creciente y cuando es decreciente.

$b)$ ¿Cuándo se alcanzaron los consumos mínimo y máximo? ¿Cuáles fueron los correspondientes valores?

$c)$ ¿Cuándo el consumo fue igual a 10 millones de litros $(10.000\ m^3)$?

Solución:

$a)$ La función $c(m)$ es continua en R, excepto para $m=10$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$m=10\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{m\to 10^-}c(m)=\lim\limits_{m\to 10}\left[\frac{1}{10}(m^2-9m+30)\right]=4\\ \lim\limits_{m\to 10^+}c(m)=\lim\limits_{m\to 10}\left[\frac{1}{5}(m^2-25m+170)\right]=4=c(10)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{m\to 10^-}c(m)=\lim_{m\to 10^+}c(m)=c(10)\Rightarrow \underline{c(m)\ es\ continua\ en\ su\ dominio}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$c'(m)=\begin{cases}\frac{1}{10}(2m-9) & si\ \ 0\le m<10\\ \frac{1}{5}(2m-25) & si\ \ 10\le m\le 15\end{cases}.$$

$$c'(m)=0\Rightarrow\begin{cases}m_1=\frac{9}{2}=4{,}5 & si\ \ 0\le m<10\\ m_2=\frac{25}{2}=12{,}5 & si\ \ 10\le m\le 15\end{cases}.$$

Teniendo en cuenta que ambas parábolas son convexas $(\cup)$, por ser positivo el coeficiente de m^2, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: \boldsymbol{c'(m)>0\Rightarrow m\epsilon(4,5;\ 10)\cup(12,5;15)}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: \boldsymbol{c'(m)<0\Rightarrow m\epsilon(0;4,5)\cup(10;12,5)}}.$$

Los puntos de corte con el eje de abscisas de la función son los siguientes:

$0\le m<10\Rightarrow\frac{1}{10}(m^2-9m+30)=0;\ \ m^2-9m+30=0;$

$m=\frac{9\pm\sqrt{81-120}}{2}\Rightarrow m\notin R.$

$10 \le m \le 15 \Rightarrow \frac{1}{5}(m^2 - 25m + 170) = 0;\;\; m^2 - 25m + 170 = 0;$

$m = \frac{25 \pm \sqrt{625-680}}{2} \Rightarrow m \notin R.$

La función $c(m)$ no corta al eje de abscisas.

El punto de corte con el eje de ordenadas es: $c(0) = 3 \Rightarrow A(0,3)$.

$c(10^-) = 4 \Rightarrow B(10,4)$, punto vacío por no pertenecer a la función.

$c(10) = 4 \Rightarrow B(10,4)$.

Los vértices de las parábolas (mínimos) son los siguientes:

$c(m) = \frac{1}{10}(m^2 - 9m + 30) \Rightarrow x_1 = \frac{9}{2} = 4{,}5.$

$c\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{1}{10} \cdot \left[\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 9 \cdot \frac{9}{2} + 30\right] = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2} + 30\right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{81-162+120}{4} =$

$= \frac{1}{10} \cdot \frac{39}{4} = \frac{39}{40} \Rightarrow V_1\left(4{,}5;\, \frac{39}{40}\right).$

$c(m) = \frac{1}{5}(m^2 - 25m + 170) \Rightarrow x_2 = \frac{25}{2}.$

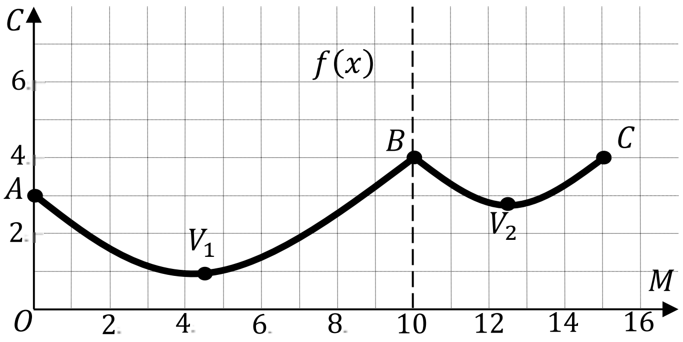
$c\left(\frac{25}{2}\right) = \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\frac{25}{2}\right)^2 - 25 \cdot \frac{25}{2} + 170\right] = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{625}{4} - \frac{625}{2} + 170\right) =$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{625-1.250+680}{4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{55}{4} = \frac{11}{4} \Rightarrow V_2\left(\frac{25}{2}, \frac{11}{4}\right).$

$c(15) = \frac{1}{5} \cdot (15^2 - 25 \cdot 15 + 170) = \frac{225-375+170}{5} = \frac{395-375}{5} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(15,4).$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que se expresa en la figura adjunta.



$b)$ De la representación gráfica de la función se deducen los valores máximos y mínimo de la función, que son los siguientes:

$$\frac{39}{40} = 0{,}975 \Rightarrow$$

$\underline{\boldsymbol{El\ consumo\ mínimo\ se\ produce\ para\ m = 4{,}5\ y\ es\ de\ 9.750\ m^3.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ consumo\ máximo\ se\ produce\ para\ m = 10\ y\ m = 15\ y\ es\ de\ 4.000\ m^3.}}$

$c)$ El consumo fue igual a 10 millones de litros $(10.000\ m^3)$, $c = 1$, teniendo en cuenta que el consumo se expresa en decenas de miles de metros cúbicos.

$$0 \leq m < 10 \Rightarrow c(m) = 1 \Rightarrow \frac{1}{10}(m^2 - 9m + 30) = 1;\ \ m^2 - 9m + 30 = 10;$$

$$m^2 - 9m + 20 = 0;\ \ m = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 4, m_2 = 5.$$

$$10 \leq m \leq 15 \Rightarrow c(m) = 1 \Rightarrow \frac{1}{5}(m^2 - 25m + 170) = 1;$$

$$m^2 - 25m + 170 = 5;\ \ m^2 - 25m + 165 = 0;\ \ m = \frac{25 \pm \sqrt{625-660}}{2} \Rightarrow m \notin R.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ consumo\ es\ de\ 10.000\ m^3\ a\ los\ 4\ meses\ y\ a\ los\ 5\ meses.}}$$

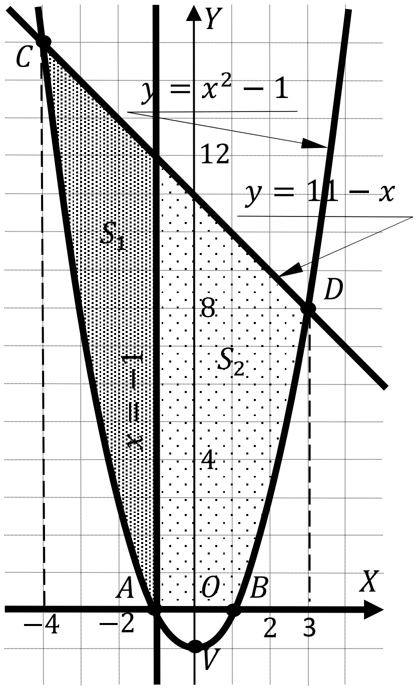
Problema B3:

B3) En una pared se quiere pintar un mural abstracto. En ese mural hay que pintar la figura encerrada dentro de la parábola $y = x^2 - 1$, y limitada por encima por la recta $y = 11 - x$ y por debajo por el eje OX. Las distancias en los ejes están definidas en metros.

a) ¿Cuántos metros cuadrados mide la figura?

b) El trozo de figura a la izquierda de la recta $x = -1$ se pinta de azul, y el otro trozo a la derecha de gris. Si cada metro cuadrado de pintura azul cuesta 2 euros, y pintar el mural ha costado en total 95 euros, ¿cuánto cuesta cada m^2 de pintura gris?

Solución:



a) La parábola $y = x^2 - 1$ es convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es $V(0, -1)$ y corta al eje de abscisas en los puntos $A(-1, 0)$ y $B(1, 0)$.

Los puntos de corte de la parábola y la recta tienen por abscisas las raíces de la ecuación que se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$x^2 - 1 = 11 - x;\; x^2 + x - 12 = 0;\;\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} =$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \to C(-4, 15) \\ x_2 = 3 \to D(3, 8) \end{cases}.$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.

La superficie sombreada es la siguiente:

$S = \int_{-4}^{3} [(11 - x) - (x^2 - 1)] \cdot dx + \int_{-1}^{1} (x^2 - 1) \cdot dx =$

$= \int_{-4}^{3} (-x^2 - x + 12) dx + \int_{-1}^{1} (x^2 - 1) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x\right]_{-4}^{3} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} =$

$= \left(-\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12 \cdot 3\right) - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - \frac{(-4)^2}{2} + 12 \cdot (-4)\right] + \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) - \left[\frac{(-1)^3}{3} + 1\right] =$

$= -9 - \frac{9}{2} + 36 - \frac{64}{3} + 8 + 48 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1 = 81 - \frac{9}{2} - \frac{62}{3} = \frac{486-27-124}{6} = \frac{335}{6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{La\ figura\ mide\ \frac{335}{6}\ m^2 \cong 55{,}83\ m^2}}.$$

b) $S_1 = \int_{-4}^{-1} [(11 - x) - (x^2 - 1)] \cdot dx = \int_{-4}^{-1} (-x^2 - x + 12) \cdot dx =$

$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x\right]_{-4}^{-1} = \left[-\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 12\right] - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - \frac{(-4)^2}{2} + 12 \cdot (-4)\right] =$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 12 - \frac{64}{3} + 8 + 48 = 44 - \frac{63}{3} - \frac{1}{2} = 44 - 21 - \frac{1}{2} = 23 - \frac{1}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{45}{2}\ m^2.$

$S_2 = \int_{-1}^{3} [(11 - x) - (x^2 - 1)] \cdot dx + \int_{-1}^{1} (x^2 - 1) \cdot dx =$

$$= \int_{-1}^{3}(-x^2 - x + 12)dx + \int_{-1}^{1}(x^2 - 1) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x\right]_{-1}^{3} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12 \cdot 3\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + 12 \cdot (-1)\right] + \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) - \left[\frac{(-1)^3}{3} + 1\right] =$$

$$= -9 - \frac{9}{2} + 36 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 12 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1 = 37 - 4 + \frac{1}{3} = 33 + \frac{1}{3} = \frac{100}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{100}{3}\ m^2.$$

Sea z el precio por metro cuadrado de la pintura gris:

$$S_1 \cdot 2 + S_2 \cdot z = 95;\ \frac{45}{2} \cdot 2 + \frac{100}{3} \cdot z = 95;\ 45 + \frac{100}{3} \cdot z = 95;\ \frac{100}{3} \cdot z = 50;$$

$$100z = 150 \Rightarrow z = 1{,}5.$$

El precio de la pintura gris es de 1,5 euros el metro cuadrado.

Problema A4:

A4) Una empresa dedicada a actividades y deportes acuáticos ha vendido en un día, un total de 45 sesiones entre paddle surf, kayak y moto acuática. Los precios por sesión y persona de cada una de estas actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1.700 euros ese día. Si por cada persona que elige kayak hay tres que eligen paddle sur:

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) ¿Cuántas personas van a cada actividad?

Solución:

a) Sean x, y, z el número de sesiones de paddle surf, kayak y moto acuática que vendió la empresa ese día, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=45 \\ 40x+20y+60z=1.700 \\ x=3y \end{array}\right\}$$

$$\boldsymbol{\left.\begin{array}{r} x+y+z=45 \\ 2x+y+3z=85 \\ x-3y=0 \end{array}\right\}.}$$

b) Resolviendo por sustitución:

$$x=3y \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3y+y+z=45 \\ 2\cdot(3y)+y+3z=85 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4y+z=45 \\ 7y+3z=85 \end{array}\right\} \Rightarrow z=45-4y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7y+3\cdot(45-4y)=85;\ \ 7y+135-12y=85;\ \ 50=5y \Rightarrow y=10.$$

$$z=45-4y=45-40 \Rightarrow z=5. \quad x=3y \Rightarrow x=30.$$

$$\underline{\boldsymbol{Ese\ día\ van\ 30\ personas\ a\ paddle\ surf, 10\ a\ kayak\ y\ 5\ a\ moto\ acuática.}}$$

Problema B4:

B4) Una fábrica de helados produce helados con dos sabores (turrón y pistacho) que se envasan en tarrinas de dos tamaños, pequeño y grande. Las tarrinas pequeñas llevan 200 gramos de helado de turrón y 150 gramos de pistacho; las tarrinas grandes llevan 500 gramos de turrón y 300 de pistacho. La fábrica obtiene un beneficio de 2 euros por la venta de cada tarrina pequeña y de 4,50 euros por la venta de cada tarrina grande. La fábrica produce cada semana 400 kg de helado de turrón y 255 kg de helado de pistacho que envasa en estas tarrinas. Para satisfacer la demanda de las heladerías de la zona, debe producir semanalmente al menos 200 tarrinas pequeñas y 50 grandes. Suponiendo que pueda vender toda la producción:

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible.

a) ¿Cuántas tarrinas de cada clase debe producir la fábrica cada semana si quiere maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución:

a) Sean x e y las tarrinas de turrón y pistacho que se producen semanalmente en la fábrica de helados, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} 200x + 500y \leq 400.000 \\ 150x + 300y \leq 255.000 \\ x \geq 200;\ y \geq 50 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{2x + 5y \leq 4.000} \\ \boldsymbol{x + 2y \leq 1.700} \\ \boldsymbol{x \geq 200;\ y \geq 50} \end{array}\right\}.$$

b)

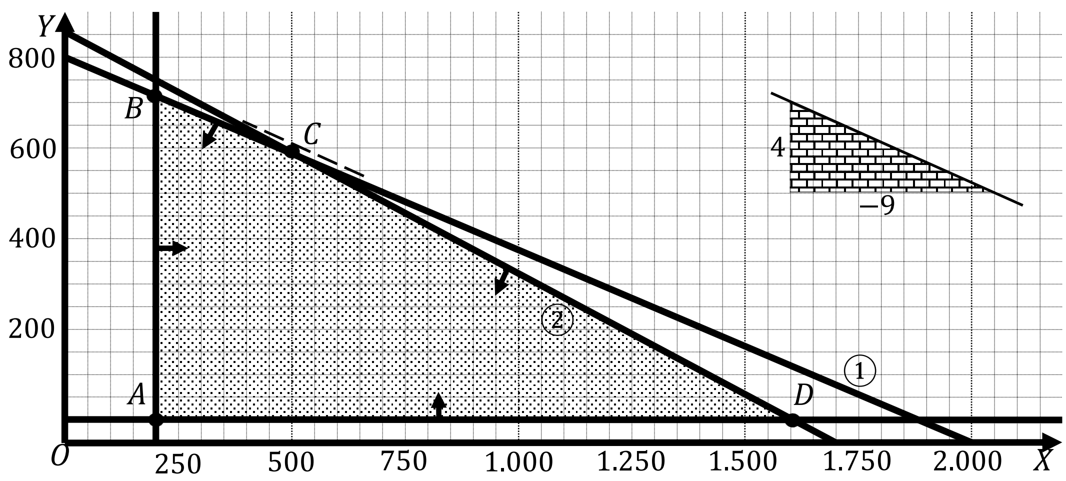
① $\Rightarrow 2x + 5y \leq 4.000 \Rightarrow y \leq \frac{4.000-2x}{5} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	2.000
y	800	0

② $\Rightarrow x + 2y \leq 1.700 \Rightarrow y \leq \frac{1.700-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	1.700
y	850	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.



Autor: ANTONIO MENGUIANO

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 200 \\ y = 50 \end{array}\right\} \Rightarrow A(200, 50).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 200 \\ 2x + 5y = 4.000 \end{array}\right\} \Rightarrow 400 + 5y = 4.000;\ \ 5y = 3.600;\ \ y = 720 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(200, 720).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 5y = 4.000 \\ x + 2y = 1.700 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x + 5y = 4.000 \\ -2x - 4y = -3.400 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 600;$

$x + 1.200 = 1.700;\ \ x = 500 \Rightarrow C(500, 600).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 50 \\ x + 2y = 1.700 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 100 = 1.700;\ \ x = 1.600 \Rightarrow D(1.600, 50).$

$c)$ La función de objetivos: $f(x, y) = 2x + 4{,}5y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(200, 50) = 2 \cdot 200 + 4{,}5 \cdot 50 = 400 + 225 = 625.$

$B \Rightarrow f(200, 50) = 2 \cdot 200 + 4{,}5 \cdot 720 = 400 + 3.240 = 3.640.$

$C \Rightarrow f(500, 600) = 2 \cdot 500 + 4{,}5 \cdot 600 = 1.000 + 2.700 = 3.700.$

$D \Rightarrow f(1.600, 50) = 2 \cdot 1.600 + 4{,}5 \cdot 50 = 3.200 + 225 = 3.425.$

El valor máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 2x + 4{,}5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{4{,}5}x = -\frac{4}{9}x \Rightarrow m = -\frac{4}{9}.$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ es\ máximo\ produciendo\ 500\ tarrinas\ pequeñas\ y\ 600\ grandes}}$

$\boldsymbol{.}$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 3.700\ euros}}\boldsymbol{.}$

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Resolver un máximo de cuatro preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1; UNA entre A2 y B2; UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A1:

A1) Se dispone de tres urnas idénticas con bolas de colores dentro. La primera tiene 6 bolas blancas y 4 negras. La segunda tiene 5 blancas y dos negras y la tercera tiene 4 blancas y 7 negras.

a) Se extrae una bola de una urna elegida al azar. Haz un diagrama con las probabilidades de los posibles resultados.

b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra de una urna elegida al azar.

c) Se ha hecho una extracción de una bola al azar y ha resultado ser blanca. Calcula la probabilidad de que haya sido extraída de la primera urna.

Problema B1:

B1) Se ha observado que el número de horas que dedican a caminar cada semana las personas adultas que viven en Canarias sigue una distribución normal de media 5,25 horas, con una desviación típica de 1,25 horas. En esta población:

a) Se elige una persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana dedique a caminar más de 6 horas?

b) Calcula la probabilidad de que el número medio de horas semanales dedicadas a caminar por una muestra de 64 personas sea inferior a 5 horas.

c) En una muestra de 1.000 personas, ¿cuál es el número esperado de personas que caminan al menos 5,5 horas a la semana?

Problema A2:

A2) En un estudio realizado por el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de una Universidad se lee el siguiente informe: “Se ha tomado una muestra del número de fotocopias (en miles), realizadas en 16 departamentos de la Universidad en una semana, y el intervalo de confianza al 95 % para el número medio de fotocopias ha sido $[17{,}9; 24{,}1]$”. Según la información:

a) ¿Cuál fue el número medio muestral de fotocopias?

b) ¿Cuál fue la desviación típica?

c) Determinar un intervalo de confianza al 90 % para el número medio de fotocopias (en miles).

Problema B2:

B2) Se ha realizado una encuesta entre los medios de los distintos centros sanitarios de las islas para evaluar la proporción de médicos que han sufrido episodios de ansiedad durante el último año. En la encuesta participaron 350 médicos elegidos al azar entre los distintos centros, de los cuáles 84 manifestaron haber tenido al menos uno de estos episodios en el último año.

a) ¿Cuál es la proporción de médicos de la muestra que han sufrido episodios de ansiedad el último año? Calcular un intervalo de confianza al 94 % para dicha proporción en la población de médicos de las islas. b) Utilizando la proporción obtenida en el apartado anterior como estimador de la proporción de médicos con episodios de ansiedad, ¿de qué tamaño debe ser la muestra de médicos si se desea construir el intervalo anterior con un error máximo de 0,02? c) ¿Cuál ha sido el nivel de confianza empleado si, con los mismos datos, el intervalo de confianza obtenido es $[0{,}1905;\ 0{,}2895]$?

Problema A3:

A3) De acuerdo con los datos disponibles, el número mensual de casos activos de COVID-19, por cada 100.000 personas mayores de 70 años en Canarias entre marzo y diciembre de 2.020, puede aproximarse mediante la función:

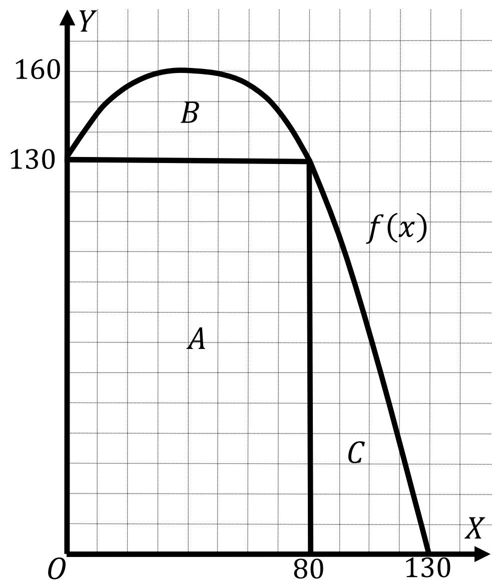
$$C(t)=\begin{cases}-15t^2+150t-315 & si\ \ 3\le t\le 6{,}5\\ \frac{53}{8}t-\frac{269}{16} & si\ \ 6{,}5<t\le 8{,}5\\ -18t^2+360t-1.720 & si\ \ 8{,}5<t\le 12\end{cases}$$

, donde t es el tiempo (en meses) transcurrido desde el 1 de enero de 2.020.

$a)$ Representar gráficamente esta función. ¿Es continua? $b)$ Describir la variación de la curva de casos activos (cuando crece y cuando decrece). ¿Cuándo se produjeron los picos del número de casos activos de COVID en estas personas? ¿Cuántos casos activos había en esos momentos? $c)$ ¿En qué momento se alcanzaron por primera vez los 62 casos cativos por cada 100.000 personas de este grupo de edad?

Problema B3:

B3) Un agricultor dispone de un terreno cuya forma coincide con el área limitada entre los ejes de coordenadas y la parábola $f(x)=-0{,}02x^2+1{,}6x+130$. El agricultor ha dividido el terreno en tres parcelas A, B y C tal como se muestra en la figura adjunta. Las líneas que dividen las parcelas corresponden, respectivamente, a las rectas $x=80$ e $y=130$ (las distancias se miden en metros).



$a)$ Calcular la superficie de cada parcela.

$b)$ El agricultor dedicará una de las parcelas a plantar trigo, otra a plantar millo y la tercera a plantar cebada. El coste total anual de producción de toda la finca (mano de obra, maquinaria, semillas, agua, transporte, etc.) asciende a 22.143 euros. Si el trigo le produce un ingreso anual de 4 euros/m^2, el millo 3,5 euros/m^2, y la cebada 2 euros/m^2. ¿Qué deberá plantar el agricultor en cada parcela si quiere maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio total anual?

Problema A4:

A4) Por cierre de campaña, un vivero de frutales necesita vender 350 aguacateros y 400 mangos. Anuncia dos ofertas: la oferta A consiste en un lote con una planta de aguacate y dos de mango por 40 euros, la oferta B consiste en un lote con dos plantas de aguacate y una de mango por 45 euros. Es necesario vender al menos 80 lotes de la oferta A y al menos 90 de la oferta B.

$a)$ Formular el correspondiente problema de programación lineal. $b)$ Representar la región factible. $c)$ Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo?

Problema B4:

B4) Un comercio ha vendido 600 ejemplares de tres ediciones de un libro por un total de 19.152 euros. Los ejemplares de la tercera edición se vendieron por 36 euros cada uno. Los ejemplares de las dos ediciones anteriores se vendieron con un descuento del 30 % los de la primera edición, y del 40 % los de la segunda (ambos respecto al precio de la tercera edición). Se sabe que el número total de ejemplares vendidos en las dos ediciones anteriores fue la mitad de los de la última edición. ¿Cuántos libros vendió de cada edición?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema A1:

A1) Se dispone de tres urnas idénticas con bolas de colores dentro. La primera tiene 6 bolas blancas y 4 negras. La segunda tiene 5 blancas y dos negras y la tercera tiene 4 blancas y 7 negras.

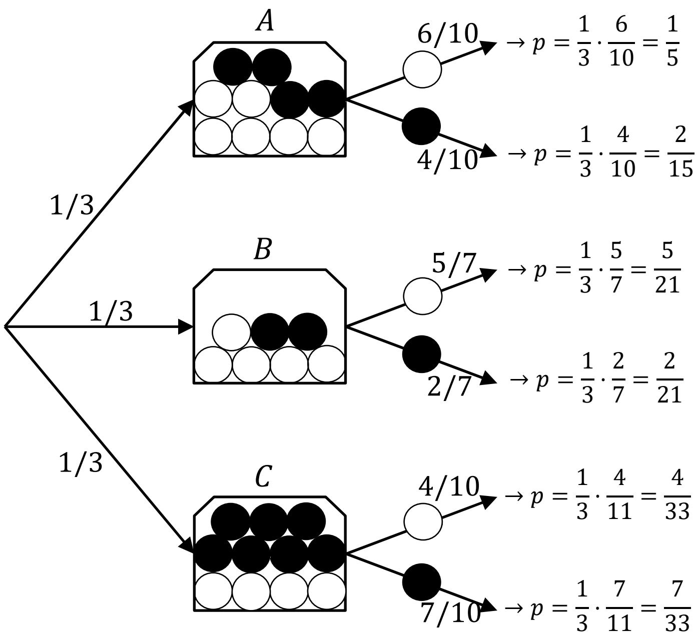
a) Se extrae una bola de una urna elegida al azar. Haz un diagrama con las probabilidades de los posibles resultados.

b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra de una urna elegida al azar.

c) Se ha hecho una extracción de una bola al azar y ha resultado ser blanca. Calcula la probabilidad de que haya sido extraída de la primera urna.

Solución:

a)



b) $P = P(Ne) = P(A \cap Ne) + P(B \cap Ne) + P(C \cap Ne) =$

$= P(A) \cdot P(Ne/A) + P(B) \cdot P(Ne/B) + P(C) \cdot P(Ne/C) =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{11} = \frac{2}{15} + \frac{2}{21} + \frac{7}{33} = \frac{2\cdot 77 + 2\cdot 55 + 7\cdot 35}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11} = \frac{154+110+245}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11} = \frac{509}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 11} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P(Ne) = \frac{509}{1.155} \cong 0,4407.}}$$

c) $P = P(A/Bl) = \frac{P(A\cap Bl)}{P(Bl)} = \frac{P(A)\cdot P(Bl/A)}{1-P(Ne)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}}{1-0,4407} = \frac{\frac{1}{5}}{0,5593} = \frac{1}{2,7965} = \underline{0,3576}.$

Problema B1:

B1) Se ha observado que el número de horas que dedican a caminar cada semana las personas adultas que viven en Canarias sigue una distribución normal de media 5,25 horas, con una desviación típica de 1,25 horas. En esta población:

$a)$ Se elige una persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana dedique a caminar más de 6 horas?

$b)$ Calcula la probabilidad de que el número medio de horas semanales dedicadas a caminar por una muestra de 64 personas sea inferior a 5 horas.

$c)$ En una muestra de 1.000 personas, ¿cuál es el número esperado de personas que caminan al menos 5,5 horas a la semana?

Solución:

$a)\ Datos:\ \mu = 5{,}25;\ \ \sigma = 1{,}25.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(5{,}25; 1{,}25).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-5{,}25}{1{,}25}$.

$$P = P(X > 6) = P\left(Z > \frac{6-5{,}25}{1{,}25}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}75}{1{,}25}\right) = P(Z > 0{,}6) =$$

$$= 1 - P(Z \le 0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = \underline{0{,}2743}.$$

$b)\ Datos:\ \mu = 5{,}25;\ \ \sigma = 1{,}25;\ \ n = 64.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N\left(5{,}25, \frac{1{,}25}{\sqrt{64}} \cong 0{,}156\right).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-5{,}25}{0{,}156}$.

$$P = P(X < 5) = P\left(Z < \frac{5-5{,}25}{0{,}156}\right) = P\left(Z < \frac{-0{,}25}{0{,}156}\right) = P(Z < -1{,}6) =$$

$$= P(Z > 1{,}6) = 1 - P(Z \le 1{,}6) = 1 - 0{,}9452 = \underline{0{,}0548}.$$

$c)$ Considerando la media de la muestra la media de la población:

$Datos:\ \mu = 5{,}25;\ \ \sigma = 1{,}25.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(5{,}25; 1{,}25).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-5{,}25}{1{,}25}$.

$$P = P(X \ge 5{,}5) = P\left(Z \ge \frac{5{,}5-5{,}25}{1{,}25}\right) = P\left(Z \ge \frac{0{,}25}{1{,}25}\right) = P(Z \ge 0{,}2) =$$

$$= 1 - P(Z \le 0{,}2) = 1 - 0{,}5793 \Rightarrow P = 0{,}4207.$$

$$n = N \cdot P = 1.000 \cdot 0{,}4207 = 420{,}7.$$

$\underline{\boldsymbol{Caminan\ al\ menos\ 5{,}5\ horas\ a\ la\ semana\ 421\ personas\ de\ las\ mil.}}$

Problema A2:

A2) En un estudio realizado por el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de una Universidad se lee el siguiente informe: "Se ha tomado una muestra del número de fotocopias (en miles), realizadas en 16 departamentos de la Universidad en una semana, y el intervalo de confianza al 95 % para el número medio de fotocopias ha sido $[17{,}9; 24{,}1]$". Según la información:

$a)$ ¿Cuál fue el número medio muestral de fotocopias?

$b)$ ¿Cuál fue la desviación típica?

$c)$ Determinar un intervalo de confianza al 90 % para el número medio de fotocopias (en miles).

Solución:

$a)$ $\quad \overline{x} = \frac{24{,}1+17{,}9}{2} = \frac{42}{2} = 21$

$$\underline{\boldsymbol{La\ media\ semanal\ es\ de\ 21.000\ fotocopias}}.$$

$b)$ Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$

$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$

$E = \frac{24{,}1-17{,}9}{2} = \frac{6{,}2}{2} = 3{,}1.$

Datos: $n = 16;\ \ \overline{x} = 21;\ \ E = 3{,}1;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

Sabiendo que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{z_{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{3{,}1\cdot\sqrt{16}}{1{,}96} = \frac{12{,}4}{1{,}96} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma \cong 6{,}33\ horas}}.$$

$c)$ Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha = 0{,}90 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}90 = 0{,}10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$

$(1-0{,}05 = 0{,}9500 \ \rightarrow z = 1{,}645).$

Datos: $n = 16;\ \ \overline{x} = 21;\ \ \sigma = 6{,}33;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(21 - 1{,}645 \cdot \frac{6{,}33}{\sqrt{16}};\ 21 + 1{,}645 \cdot \frac{6{,}33}{\sqrt{16}}\right);$

$(21 - 1{,}645 \cdot 1{,}5816;\ 21 + 1{,}645 \cdot 1{,}5816);\ \ (21 - 2{,}6017;\ 21 + 2{,}6017).$

Teniendo en cuenta que las fotocopias se expresan en miles:

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{90\,\%} = (18.398;\ 23.602)}}.$$

Problema B2:

B2) Se ha realizado una encuesta entre los medios de los distintos centros sanitarios de las islas para evaluar la proporción de médicos que han sufrido episodios de ansiedad durante el último año. En la encuesta participaron 350 médicos elegidos al azar entre los distintos centros, de los cuáles 84 manifestaron haber tenido al menos uno de estos episodios en el último año.

$a)$ ¿Cuál es la proporción de médicos de la muestra que han sufrido episodios de ansiedad el último año? Calcular un intervalo de confianza al 94 % para dicha proporción en la población de médicos de las islas.

$b)$ Utilizando la proporción obtenida en el apartado anterior como estimador de la proporción de médicos con episodios de ansiedad, ¿de qué tamaño debe ser la muestra de médicos si se desea construir el intervalo anterior con un error máximo de 0,02?

$c)$ ¿Cuál ha sido el nivel de confianza empleado si, con los mismos datos, el intervalo de confianza obtenido es $[0{,}1905;\ 0{,}2895]$?

Solución:

$a)$ Para un nivel de confianza del 94 % es:

$$1-\alpha = 0{,}94 \ \rightarrow\ \alpha = 1-0{,}94 = 0{,}06 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}03} = 1{,}88.$$

$$(1-0{,}03 = 0{,}9700\ \rightarrow z = 1{,}88).$$

Datos: $n = 350;\ \ p = \frac{84}{350} = 0{,}24;\ \ q = 1-0{,}24 = 0{,}76;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}88.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0{,}24 - 1{,}88 \cdot \sqrt{\frac{0{,}24\cdot 0{,}76}{350}};\ 0{,}24 + 1{,}88 \cdot \sqrt{\frac{0{,}24\cdot 0{,}76}{350}}\right);$$

$(0{,}24 - 1{,}88 \cdot 0{,}0228;\ 0{,}24 + 1{,}88 \cdot 0{,}0228);\ \ (0{,}24 - 0{,}0429;\ \ 0{,}24 + 0{,}0429).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{94\,\%} = (0,1971;\ 0,2829).}}$$

$b)$ Datos: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}88;\ \ E = 0{,}02;\ \ p = 0{,}24;\ \ q = 0{,}76.$

$$E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p\cdot q}{n} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p\cdot q}{E^2} = 1{,}88^2 \cdot \frac{0{,}24\cdot 0{,}76}{0{,}02^2} = 3{,}5344 \cdot \frac{0{,}1824}{0{,}0004} =$$

$= 3{,}5344 \cdot 456 = 1.611{,}69.$

<u>El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 1.612 médicos.</u>

$c)$ $E = \frac{0{,}2895-0{,}1905}{2} = \frac{0{,}099}{2} = 0{,}0495.$

Datos: $n = 350;\ \ E = 0{,}0495;\ \ p = 0{,}24;\ \ q = 0{,}76.$

$$E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \frac{E^2 \cdot n}{p \cdot q} = \frac{0{,}0495^2 \cdot 350}{0{,}24 \cdot 0{,}76} = \frac{0{,}8576}{0{,}1824} = 4{,}7017 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{4{,}7017} \cong 2{,}17.$$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ a 2,17 le corresponde el valor 0,9850;

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9850; \;\; 2 - \alpha = 1{,}9700; \;\; \alpha = 2 - 1{,}9700 = 0{,}0300.$

$1 - \alpha = 1 - 0{,}0300 = 0{,}97.$

$\underline{\boldsymbol{El\ nivel\ de\ confianza\ empleado\ ha\ sido\ del\ 97\ \%.}}$

Problema A3:

A3) De acuerdo con los datos disponibles, el número mensual de casos activos de COVID-19, por cada 100.000 personas mayores de 70 años en Canarias entre marzo y diciembre de 2.020, puede aproximarse mediante la función:

$C(t) = \begin{cases} -15t^2 + 150t - 315 \;\; si \;\; 3 \le t \le 6{,}5 \\ \frac{53}{8}t - \frac{269}{16} \;\; si \;\; 6{,}5 < t \le 8{,}5 \\ -18t^2 + 360t - 1.720 \;\; si \;\; 8{,}5 < t \le 12 \end{cases}$, donde t es el tiempo (en meses) transcurrido desde el 1 de enero de 2.020.

a) Representar gráficamente esta función. ¿Es continua?

b) Describir la variación de la curva de casos activos (cuando crece y cuando decrece). ¿Cuándo se produjeron los picos del número de casos activos de COVID en estas personas? ¿Cuántos casos activos había en esos momentos?

c) ¿En qué momento se alcanzaron por primera vez los 62 casos cativos por cada 100.000 personas de este grupo de edad?

Solución

a) En el intervalo $[3; 6{,}5]$ la función es la parábola $C(t) = -15t^2 + 150t - 315$, que es cóncava (∩) por ser negativo el coeficiente de t^2, cuyo vértice (máximo) y puntos extremos del intervalo son los siguientes:

$$C'(t) = -30t + 150 = 0 \Rightarrow 30t = 150; \;\; t = 5.$$

$$C(5) = -15 \cdot 5^2 + 150 \cdot 5 - 315 = -375 + 750 - 315 = 750 - 690 =$$

$$= 60 \Rightarrow V_1(5, 60).$$

$$C(3) = -15 \cdot 3^2 + 150 \cdot 3 - 315 = -135 + 450 - 315 = 450 - 450 =$$

$$= 0 \Rightarrow A(3, 0).$$

$$C(6{,}5) = -15 \cdot (6{,}5)^2 + 150 \cdot 6{,}5 - 315 = -633{,}75 + 975 - 315 =$$

$$= 975 - 948{,}75 = 26{,}25 \Rightarrow B(6{,}5; 26{,}25).$$

En el intervalo $(6{,}5; \; 8{,}5]$ la función es la recta $C(t) = \frac{53}{8}t - \frac{269}{16}$, cuyos puntos extremos del intervalo son los siguientes:

$$C(6{,}5) = \frac{53 \cdot 6{,}5}{8} - \frac{269}{16} = \frac{689 - 269}{16} = \frac{420}{16} = 26{,}25 \Rightarrow B(6{,}5; 26{,}25).$$

$$C(8{,}5) = \frac{53 \cdot 8{,}5}{8} - \frac{269}{16} = \frac{901 - 269}{16} = \frac{632}{16} = 39{,}5 \Rightarrow C(8{,}5; 39{,}5).$$

En el intervalo $(8{,}5; \; 12]$ la función es la parábola $C(t) = -18t^2 + 360t - 1.720$, que es cóncava (∩) por ser negativo el coeficiente de t^2, cuyo vértice (máximo) y puntos extremos del intervalo son los siguientes:

$$C'(t) = -36t + 360 = 0 \Rightarrow 36t = 360; \;\; t = 10.$$

$$C(10) = -18 \cdot 10^2 + 360 \cdot 10 - 1.720 = -1.800 + 3.600 - 1.720 =$$

$$= 3.600 - 3.520 = 80 \Rightarrow V_2(10, 80).$$

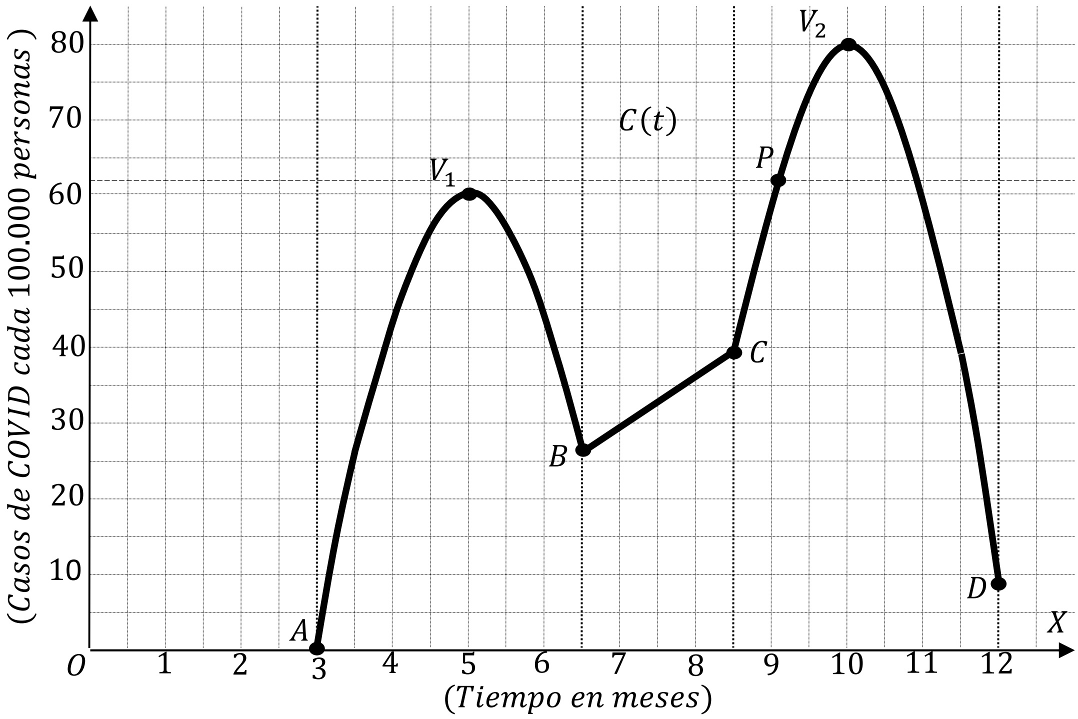
$$C(8{,}5) = -18 \cdot 8{,}5^2 + 360 \cdot 8{,}5 - 1.720 = -1.300{,}5 + 3.060 - 1.720 =$$

$= 3.060 - 3.020{,}5 = 39{,}5 \Rightarrow C(8{,}5; 39{,}5)$.

$C(12) = -18 \cdot 12^2 + 360 \cdot 12 - 1.720 = -2.592 + 4.320 - 1.720 =$

$= 4.320 - 4.312 = 8 \Rightarrow D(12, 8)$.

La representación gráfica de la función, de forma aproximada, se expresa en la figura adjunta.



Como puede observarse, la función es continua en su dominio.

$b)$ Teniendo en cuenta lo anterior y de la observación de la figura se deduce que la función es creciente en los intervalos $(3, 5) \cup (6{,}5; 10)$ y es decreciente en los intervalos $(5; 6{,}5) \cup (10, 12)$.

Los picos de máximos se producen para $t = 5 \Rightarrow 60$ casos y $t = 10 \Rightarrow 80$ casos, y los picos de mínimos para $t = 3 \Rightarrow 0$ casos, $t = 6{,}5 \Rightarrow 26$ casos y $t = 12 \Rightarrow 8$ casos.

$c)$ De la observación de la figura se deduce que los 62 casos se producen en el intervalo $(8{,}5; 12)$, donde la función es $C(t) = -18t^2 + 360t - 1.720$.

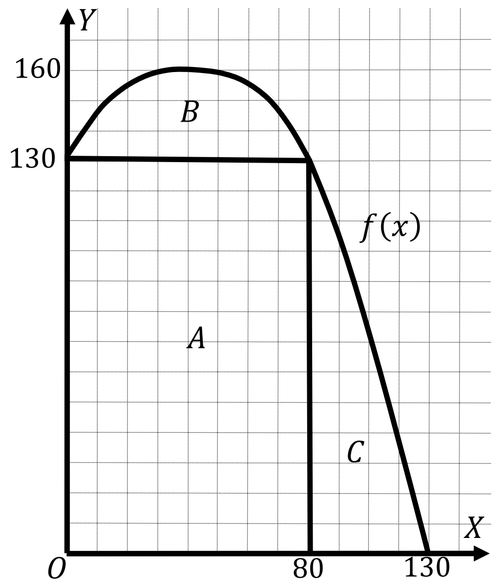
$C(t) = 62$: $-18t^2 + 360t - 1.720 = 62$; $18t^2 - 360t + 1.782 = 0$;

$t^2 - 20t + 99 = 0$; $t = \frac{20 \pm \sqrt{400-296}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{20 \pm 2}{2} = 10 \pm 1 \Rightarrow t = 9$.

Se alcanzan por primera vez 62 casos a los 9 meses.

Problema B3:

B3) Un agricultor dispone de un terreno cuya forma coincide con el área limitada entre los ejes de coordenadas y la parábola $f(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}6x + 130$. El agricultor ha dividido el terreno en tres parcelas A, B y C tal como se muestra en la figura adjunta. Las líneas que dividen las parcelas corresponden, respectivamente, a las rectas $x = 80$ e $y = 130$ (las distancias se miden en metros).



$a)$ Calcular la superficie de cada parcela.

$b)$ El agricultor dedicará una de las parcelas a plantar trigo, otra a plantar millo y la tercera a plantar cebada. El coste total anual de producción de toda la finca (mano de obra, maquinaria, semillas, agua, transporte, etc.) asciende a 22.143 euros. Si el trigo le produce un ingreso anual de 4 euros/m^2, el millo 3,5 euros/m^2, y la cebada 2 euros/m^2. ¿Qué deberá plantar el agricultor en cada parcela si quiere maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio total anual?

Solución:

$a)$ $A = 80 \cdot 130 = \underline{10.400\ m^2}.$

$$B = \int_0^{80} [f(x) - 130] \cdot dx = \int_0^{80} (-0{,}02x^2 + 1{,}6x + 130 - 130) \cdot dx =$$

$$= \int_0^{80} (-0{,}02x^2 + 1{,}6x) \cdot dx = \left[-0{,}02 \cdot \frac{x^3}{3} + 1{,}6 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^{80} = \left[-\frac{0{,}02x^3}{3} + 0{,}08x^2\right]_0^{80} =$$

$$= \left(-\frac{0{,}02 \cdot 80^3}{3} + 0{,}8 \cdot 80^2\right) - 0 = -3.413{,}33 + 5.120 \Rightarrow \underline{B = 1.706{,}67\ m^2}.$$

$$C = \int_{80}^{130} f(x) \cdot dx = \int_{80}^{130} (-0{,}02x^2 + 1{,}6x + 130) \cdot dx =$$

$$= \left[-0{,}02 \cdot \frac{x^3}{3} + 1{,}6 \cdot \frac{x^2}{2} + 130x\right]_{80}^{130} =$$

$$= \left(-\frac{0{,}02 \cdot 130^3}{3} + 0{,}8 \cdot 130^2 + 130 \cdot 130\right) - \left(-\frac{0{,}02 \cdot 80^3}{3} + 0{,}8 \cdot 80^2 + 130 \cdot 80\right) =$$

$$= -14.646{,}67 + 13.520 + 16.900 + 3.413{,}33 - 5.120 - 10.400 =$$

$$= 33.833{,}33 - 30.166{,}67 \Rightarrow$$

$$\underline{C = 3.666{,}67\ m^2}.$$

$b)$ $Gastos: G = 22.143\ euros.$

Para maximizar el beneficio, teniendo en cuenta que loa gastos son fijos, deberá plantar los cereales de mayor precio en las mayores superficies, por lo cual, deberá plantar:

$$\underline{En\ la\ parcela\ A, trigo; en\ la\ B, cebada\ y\ en\ la\ C, millo}.$$

$Ingresos: I = 4 \cdot A + 2 \cdot B + 3{,}5 \cdot C =$

$= 4 \cdot 10.400 + 2 \cdot 1.706{,}67 + 3{,}5 \cdot 3.666{,}67 = 41.600 + 3.413{,}33 + 12.833{,}33 \Rightarrow$

$\Rightarrow I = 57.846{,}66\ euros.$

$Beneficio = Ingresos - Costes = 57.846{,}67 - 22.143 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{Beneficio = 35.703{,}67\ euros}.$$

Problema A4:

A4) Por cierre de campaña, un vivero de frutales necesita vender 350 aguacateros y 400 mangos. Anuncia dos ofertas: la oferta A consiste en un lote con una planta de aguacate y dos de mango por 40 euros, la oferta B consiste en un lote con dos plantas de aguacate y una de mango por 45 euros. Es necesario vender al menos 80 lotes de la oferta A y al menos 90 de la oferta B.

$a)$ Formular el correspondiente problema de programación lineal.

$b)$ Representar la región factible.

$c)$ Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo?

Solución:

$a)$ Sean x e y el número de lotes de los tipos A y B que se venden en el vivero de frutales, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} x+2y\le 350 \\ 2x+y\le 400 \\ x\ge 80;\, y\ge 90 \end{array}\right\}.$

$b)$

① $\Rightarrow x+2y\le 350 \Rightarrow y\le \frac{350-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

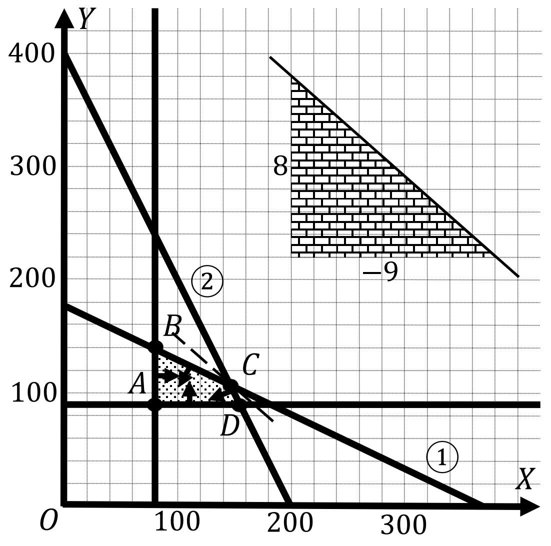
x	0	350
y	175	0

② $\Rightarrow 2x+y\le 400 \Rightarrow y\le 400-2x \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	200	0
y	0	400

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=80 \\ y=90 \end{array}\right\} \Rightarrow A(80,90).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=80 \\ x+2y=350 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=270;$

$y=135 \Rightarrow B(80,135).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=400 \\ x+2y=350 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x+2y=800 \\ -x-2y=-350 \end{array}\right\};$

$\Rightarrow 3x=450;\;\; x=150;\;\; 150+2y=350;\;\; 2y=200;\;\; y=100 \Rightarrow C(150,100).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=90 \\ 2x+y=400 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+90=270;\;\; 2x=180;\;\; x=90 \Rightarrow D(90,90).$

$c)$ La función de objetivos es : $f(x,y)=40x+45y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(80,90)=40\cdot 800+45\cdot 90=3.200+4.050=7.250.$

$B \Rightarrow f(80,135) = 40 \cdot 80 + 45 \cdot 135 = 3.200 + 6.075 = 9.275.$

$C \Rightarrow f(150,100) = 40 \cdot 150 + 45 \cdot 100 = 6.000 + 4.500 = 10.500.$

$D \Rightarrow f(90,90) = 40 \cdot 90 + 45 \cdot 90 = 3.600 + 4.050 = 7.650.$

El valor máximo se produce en el punto $C(150,100)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 40x + 45y = 0 \Rightarrow y = -\frac{40}{45}x = -\frac{8}{9}x \Rightarrow m = -\frac{8}{9}.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ vendiendo\ 150\ lotes\ A\ y\ 100\ lotes\ B}$**.**

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 10.500\ euros}$**.**

Problema B4:

B4) Un comercio ha vendido 600 ejemplares de tres ediciones de un libro por un total de 19.152 euros. Los ejemplares de la tercera edición se vendieron por 36 euros cada uno. Los ejemplares de las dos ediciones anteriores se vendieron con un descuento del 30 % los de la primera edición, y del 40 % los de la segunda (ambos respecto al precio de la tercera edición). Se sabe que el número total de ejemplares vendidos en las dos ediciones anteriores fue la mitad de los de la última edición. ¿Cuántos libros vendió de cada edición?

Solución:

Sean x, y, z el número de ejemplares que se venden de las ediciones primera, segunda y tercera, respectivamente.

Los ejemplares de la primera edición se vendieron al 70 % de 36 euros, cuyo precio es: $0{,}7 \cdot 36 = 25{,}2$ euros.

Los ejemplares de la segunda edición se vendieron al 60 % de 36 euros, cuyo precio es: $0{,}6 \cdot 36 = 21{,}6$ euros.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce de lo anterior y del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=600 \\ 25{,}2x+21{,}6y+36z=19.152 \\ x+y=\frac{z}{2} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=600 \\ 126x+108y+180z=95.760 \\ 2x+2y-z=0 \end{array}\right\}.$$

Restando a la tercera ecuación el doble de la primera, resulta:

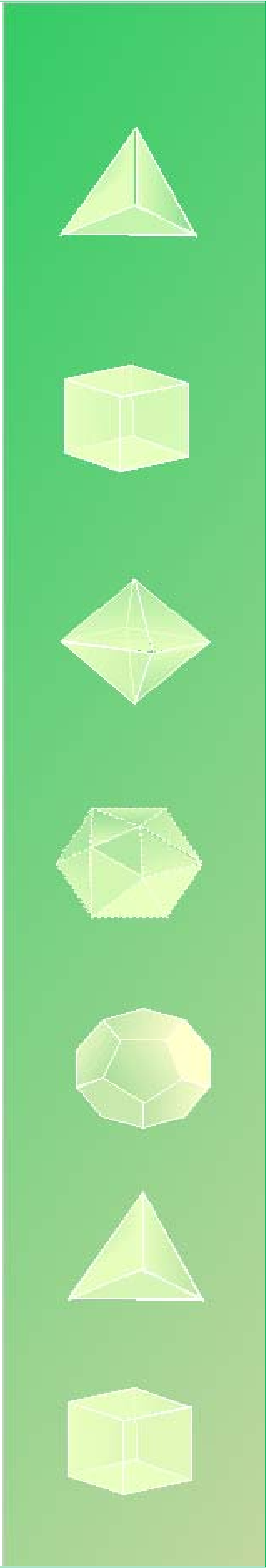
$-3z=-1.200;\;\; z=400.$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+400=600 \\ 126x+108y+180\cdot 400=95.760 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y=200 \\ 126x+108y=95.760-72.000 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=200 \\ 126x+108y=23.760 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y=200 \\ 63x+54y=11.880 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 63x+63y=12.600 \\ -63x-54y=-11.880 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9y=720;\;\; y=80;\;\; x+80=200;\;\; x=120.$

$\underline{\textit{En la primera edición vendió } 120 \textit{ libros, en la } 2^{\text{a}}, 80 \textit{ y en la } 3^{\text{a}}, 200}.$



Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Indicaciones:
El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera). En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen. Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado. Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos. Los teléfonos móviles deberán estar apagados durante el examen.
TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

1º) Para poder llevar a cabo la última obra que le han encargado, una empresa de construcción necesita adquirir 400 kg de cemento, 150 kg de ladrillos y 120 kg de azulejos. Antes de hacer la compra del material consulta precios en dos suministradores, A y B. El administrador A le ofrece un precio de venta total de 9.800 euros. El suministrador B, que está en liquidación, le ofrece importantes descuentos. En concreto, baja el precio del cemento a la mitad del que le ofrece el suministrador A, el del ladrillo a una tercera parte y el del azulejo a una cuarta parte, lo que supone un ahorro de 6.400 euros con respecto al precio total de venta ofrecido por el suministrador A. Se sabe, además, para el suministrador A, que el precio del kg de azulejo es el doble de la suma de los precios del cemento y los ladrillos.

a) Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (en kg) del cemento, el ladrillo y el azulejo en el suministrador A.

b) Resuélvalo.

Problema 2:

2º) Con el objetivo de maximizar beneficios, un obrador cántabro amplía su producción diaria máxima hasta las 400 tartas de queso y 900 quesadas, con las que elabora dos tipos de pack, A y B. El pack A contiene 4 tartas de queso y 12 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio de 44 euros. El pack B contiene 2 tartas de queso y 3 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 16 euros.

a) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

c) ¿Cuántos packs de cada tipo debe producir el obrador en un día para que el beneficio obtenido sea máximo?

d) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Problema 3:

3º) Dada la función $f(x)=\frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8}$:
a) ¿En qué puntos es discontinua? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?
b) ¿Se puede redefinir f para evitar alguna de estas discontinuidades?
c) ¿Cuáles son las asíntotas de f?
d) Esboce la gráfica de f, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY.

Problema 4:

4º) Un autónomo del sector del transporte ha determinado que los costes mensuales de su empresa responden a una función $C(v)$, donde v representa el número de vehículos movilizados. Se sabe que la empresa dispone de un total de 36 vehículos y que los costes ascienden a 5.000 euros si no se moviliza ningún vehículo. Se sabe, además, que $C'(v) = v^2 - 32v + 112$ es la derivada de $C(v)$.

$a)$ ¿Cuántos vehículos han de movilizarse para minimizar costes? ¿A cuánto ascenderían dichos costes?

$b)$ ¿Para qué número de vehículos movilizados serían máximos los costes? ¿A cuánto ascenderían dichos costes?

Problema 5:

5º) Un agricultor valenciano ha determinado que el peso de sus naranjas sigue una distribución normal con desviación típica de 15 gramos. De una muestra de 100 naranjas escogidas al azar se calcula un peso medio por naranja de 210 gramos.

$a)$ Obtenga un intervalo de confianza del 93 % para el peso medio de una naranja.

$b)$ ¿Cuál es el número mínimo de naranjas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el peso medio por naranja, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 2 gramos?

Problema 6:

6º) En una cierta ciudad el 35 % del censo vota al partido A, el 45 % al partido B y el 20 % se abstiene. Se sabe, además, que el 20 % de los votantes del partido A, el 30 % de los del partido B y el 15 % de los que se abstienen son mayores de 60 años. Si se escoge al azar un ciudadano censado:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido B y tenga como máximo 60 años?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido A y sea mayor de 60 años?

$c)$ ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?

$d)$ Si es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Para poder llevar a cabo la última obra que le han encargado, una empresa de construcción necesita adquirir 400 kg de cemento, 150 kg de ladrillos y 120 kg de azulejos. Antes de hacer la compra del material consulta precios en dos suministradores, A y B. El administrador A le ofrece un precio de venta total de 9.800 euros. El suministrador B, que está en liquidación, le ofrece importantes descuentos. En concreto, baja el precio del cemento a la mitad del que le ofrece el suministrador A, el del ladrillo a una tercera parte y el del azulejo a una cuarta parte, lo que supone un ahorro de 6.400 euros con respecto al precio total de venta ofrecido por el suministrador A. Se sabe, además, para el suministrador A, que el precio del kg de azulejo es el doble de la suma de los precios del cemento y los ladrillos.

a) Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (en kg) del cemento, el ladrillo y el azulejo en el suministrador A.

b) Resuélvalo.

----

a) Sean x, y, z los precios de un kilogramo de cemento, ladrillo y azulejo del suministrador A, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{c} 400x + 150y + 120z = 9.800 \\ \frac{1}{2} \cdot 400x + \frac{1}{3} \cdot 150y + \frac{1}{4} 120z = 9.800 - 6.400 \\ z = 2 \cdot (x + y) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 40x + 15y + 12z = 980 \\ 200x + 50y + 30z = 3.400 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} 40x + 15y + 12z = 980 \\ 20x + 5y + 3z = 340 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{array}\right\}.$$

b) Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 980 & 15 & 12 \\ 340 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 40 & 15 & 12 \\ 20 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4.900+8.160-5.880+5.100}{-200+480+90-120-240+300} = \frac{13.260-10.780}{870-560} = \frac{2.480}{310} = 8.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 980 & 12 \\ 20 & 340 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{310} = \frac{-13.600+5.880-8.160+19600}{310} = \frac{25.480-21.760}{310} = \frac{3.720}{310} = 12.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 15 & 980 \\ 20 & 5 & 340 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{310} = \frac{39.200+10.200-9.800-27200}{310} = \frac{49.400-37.000}{310} = \frac{22.400}{310} = 40.$$

$$\underline{El\ precio\ de\ un\ kg\ de\ cemento, ladrillo\ y\ azulejo\ es\ de\ 8, 12\ y\ 40\ euros.}$$

Problema 2:

2º) Con el objetivo de maximizar beneficios, un obrador cántabro amplía su producción diaria máxima hasta las 400 tartas de queso y 900 quesadas, con las que elabora dos tipos de pack, A y B. El pack A contiene 4 tartas de queso y 12 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio de 44 euros. El pack B contiene 2 tartas de queso y 3 quesadas, y le confiere al obrador un beneficio neto de 16 euros.

a) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

c) ¿Cuántos packs de cada tipo debe producir el obrador en un día para que el beneficio obtenido sea máximo?

d) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución:

a) Sean x e y el número de packs de los tipos A y B que produce el obrador, respectivamente.

Las restricciones que plantea el ejercicio son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+2y \le 400 \\ 12x+3y \le 900 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

$$\underline{\left.\begin{array}{r} 2x+y \le 200 \\ 4x+y \le 300 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}.}$$

b)

① $\Rightarrow 2x+y \le 200 \Rightarrow y \ge 200-2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	100	0
y	0	200

② $\Rightarrow 4x+y \le 300 \Rightarrow y \le 300-4x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	50	60
y	100	60

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

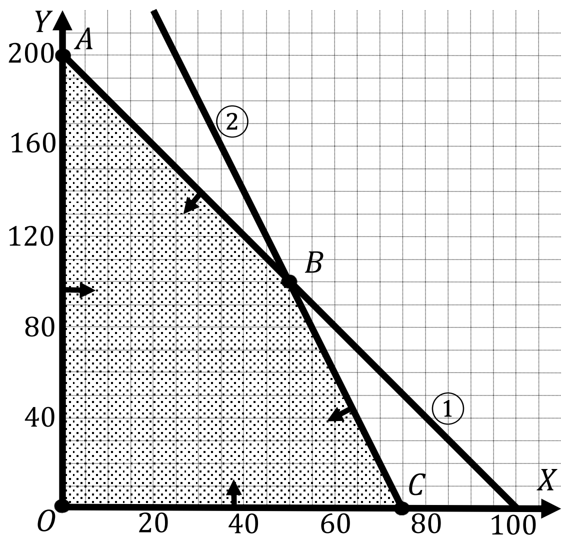
$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 2x+y=200 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(0,200)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=200 \\ 4x+y=300 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x-y=-200 \\ 4x+y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x=100;\ \ x=50;\ \ 100+y=200;$

$y=100 \Rightarrow \underline{B(50,100)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 4x+y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow x=75 \Rightarrow \underline{C(75,0)}.$



c) La función de objetivos es $f(x,y)=44x+16y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 200) = 44 \cdot 0 + 16 \cdot 200 = 0 + 3.200 = 3.200.$

$B \Rightarrow f(50, 100) = 44 \cdot 50 + 16 \cdot 100 = 2.200 + 1.600 = 3.800.$

$C \Rightarrow f(75, 0) = 44 \cdot 75 + 16 \cdot 0 = 3.300 + 0 = 3.300.$

El valor máximo se produce en el punto $B(50, 100)$.

$$\underline{Obtiene\ máximo\ beneficio\ produciendo\ 50\ packs\ A\ y\ 100\ packs\ B}.$$

$d)$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ asciende\ a\ 3.800\ euros}.$$

Problema 3:

3º) Dada la función $f(x) = \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8}$:

$a)$ ¿En qué puntos es discontinua? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?

$b)$ ¿Se puede redefinir f para evitar alguna de estas discontinuidades?

$c)$ ¿Cuáles son las asíntotas de f?

$d)$ Esboce la gráfica de f, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY.

Solución:

$a)$ Una función racional es discontinua en los valores reales de la variable que anulan el denominador.

$$x^2 + 2x - 8 = 0;\;\; x = \frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{-2\pm 6}{2} = -1 \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{cases}.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R - \{-4, 2\}}.$$

Se estudia el tipo de discontinuidad para $x = -4\ y\ x = 2$:

$$x = -4 \Rightarrow \lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = \lim_{x\to -4} \frac{2\cdot(x^2+x-12)}{(x-2)(x+4)} =$$

$$= \lim_{x\to -4} \frac{2\cdot(x+4)(x-3)}{(x-2)(x+4)} = \lim_{x\to -4} \frac{2(x-3)}{x-2} = \frac{2(-4-3)}{-4-2} = \frac{-14}{-6} = \frac{7}{3}.$$

$$\underline{f(x)\ tiene\ una\ discontinuidad\ evitable\ en\ x = -4}.$$

$$x = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = \frac{2\cdot 2^2+2\cdot 2-24}{0} = \frac{8+4-24}{0} = \frac{-12}{0} = -\infty.$$

$$\underline{f(x)\ tiene\ una\ discontinuidad\ inevitable\ de\ salto\ infinito\ para\ x = 2}.$$

Para evitar la discontinuidad en $x = -4$ la función puede redefinirse de la forma siguiente:

$$\underline{f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} & si\;\; x \neq -4\ y\ x \neq 2 \\ \frac{7}{3} & si\;\; x = -4 \end{cases}}.$$

$c)$ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = 2.$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ una\ asíntota\ horizontal\ para\ y = 2}.$$

Del apartado anterior se deduce que:

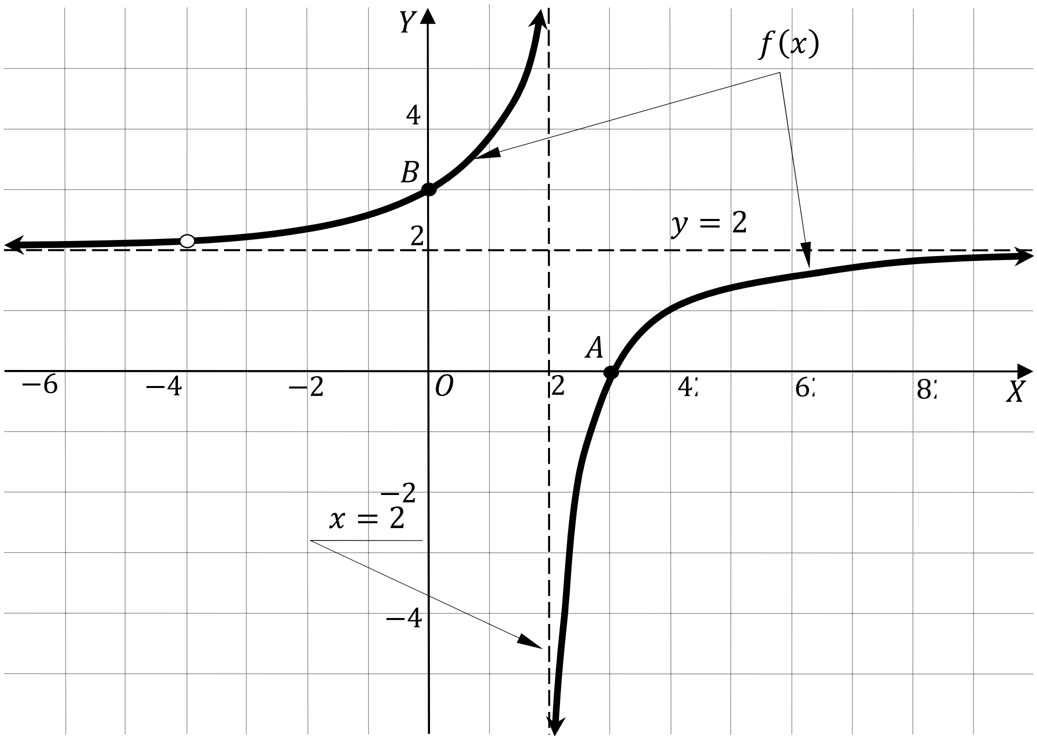
$$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ una\ asíntota\ vertical\ para\ x = 2}$$

$d)$ Los puntos de corte de la función con los ejes coordenados son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2+2x-24}{x^2+2x-8} = 0;\ \ 2x^2+2x-24=0;\ x^2+x-12=0;$$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{-1\pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \rightarrow \notin D(f) \\ x_2 = 3 \rightarrow A(3,0) \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2\cdot 0^2+2\cdot 0-24}{0^2+2\cdot 0-8} = \frac{-24}{-8} = 30 \Rightarrow B(0,3).$$



La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.

Problema 4:

4º) Un autónomo del sector del transporte ha determinado que los costes mensuales de su empresa responden a una función $C(v)$, donde v representa el número de vehículos movilizados. Se sabe que la empresa dispone de un total de 36 vehículos y que los costes ascienden a 5.000 euros si no se moviliza ningún vehículo. Se sabe, además, que $C'(v) = v^2 - 32v + 112$ es la derivada de $C(v)$.

a) ¿Cuántos vehículos han de movilizarse para minimizar costes? ¿A cuánto ascenderían dichos costes?

b) ¿Para qué número de vehículos movilizados serían máximos los costes? ¿A cuánto ascenderían dichos costes?

Solución:

a) $C(t) = \int C'(v) \cdot dv = \int (v^2 - 32v + 112) \cdot dv = \frac{v^3}{3} - \frac{32v^2}{2} + 112v + K \Rightarrow$

$\Rightarrow C(t) = \frac{v^3}{3} - 16v^2 + 112v + K.$

$C(0) = 5.000 \Rightarrow K = 5.000.$

La función de costes es $C(t) = \frac{v^3}{3} - 16v^2 + 112v + 5.000.$

Para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$C'(v) = 0 \Rightarrow v^2 - 32v + 112 = 0;\ \ v = \frac{32 \pm \sqrt{1.024 - 448}}{2} = \frac{32 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{32 \pm 24}{2} =$

$= 16 \pm 12 \Rightarrow v_1 = 4, v_2 = 28.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo.

$$C''(v) = 2v - 32 \Rightarrow \begin{cases} C''(4) = 2 \cdot 4 - 32 < 0 \Rightarrow Máx.\ relativo\ para\ v = 4 \\ C''(28) = 2 \cdot 28 - 32 > 0 \Rightarrow Mín.\ relativo\ para\ v = 28 \end{cases}.$$

$\underline{Para\ minimizar\ los\ costes\ hay\ que\ movilizar\ 28\ vehiculos}.$

$C(28) = \frac{28^3}{3} - 16 \cdot 28^2 + 112 \cdot 28 + 5.000 =$

$= \frac{21.952}{3} - 12.544 + 3.136 + 5.000 = \frac{21.952}{3} - 4.408 = \frac{21.952 - 13.224}{3} = \frac{8.728}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow C(28) = 2.909{,}33.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 2.909{,}33\ euros\ mensuales}.$

b)

$\underline{Los\ costes\ son\ máximos\ movilizando\ 4\ vehiculos}.$

$C(4) = \frac{4^3}{3} - 16 \cdot 4^2 + 112 \cdot 4 + 5.000 = \frac{64}{3} - 256 + 448 + 5.000 =$

$= \frac{64}{3} + 5.192 = \frac{64 + 15.576}{3} = \frac{15.640}{3} = 5.213{,}33.$

$\underline{El\ coste\ máximo\ es\ de\ 5.213{,}33\ euros\ mensuales}.$

Problema 5:

5º) Un agricultor valenciano ha determinado que el peso de sus naranjas sigue una distribución normal con desviación típica de 15 gramos. De una muestra de 100 naranjas escogidas al azar se calcula un peso medio por naranja de 210 gramos.

a) Obtenga un intervalo de confianza del 93 % para el peso medio de una naranja.

b) ¿Cuál es el número mínimo de naranjas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el peso medio por naranja, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 2 gramos?

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 93 % es:

$1-\alpha=0{,}93 \ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}93=0{,}07 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}035}=1{,}81.$

$(1-0{,}035=0{,}9650 \ \rightarrow z=1{,}81).$

Datos: $n=100;\ \ \overline{x}=210;\ \ \sigma=15;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}81.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(210-1{,}81\cdot\frac{15}{\sqrt{100}};\ 210+1{,}81\cdot\frac{15}{\sqrt{100}}\right);\ \ (210-1{,}81\cdot 1{,}5;\ 210+1{,}81\cdot 1{,}5);$

$(210-2{,}715;\ 210+2{,}715)$

$$\underline{I.C._{93\,\%}=(207{,}285;\ 212{,}715)}.$$

b) Para un nivel de confianza del 97 % es:

$1-\alpha=0{,}97 \ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}97=0{,}03 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}015}=2{,}17.$

$(1-0{,}015=0{,}9850 \ \rightarrow z=2{,}17).$

Datos: $\sigma=15;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}17;\ \ E=2.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow\ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2{,}17\cdot\frac{15}{2}\right)^2=$

$=(2{,}17\cdot 7{,}5)^2=16{,}275^2=264{,}88.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 265\ naranjas}$$

Problema 6:

6º) En una cierta ciudad el 35 % del censo vota al partido A, el 45 % al partido B y el 20 % se abstiene. Se sabe, además, que el 20 % de los votantes del partido A, el 30 % de los del partido B y el 15 % de los que se abstienen son mayores de 60 años. Si se escoge al azar un ciudadano censado:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido B y tenga como máximo 60 años?

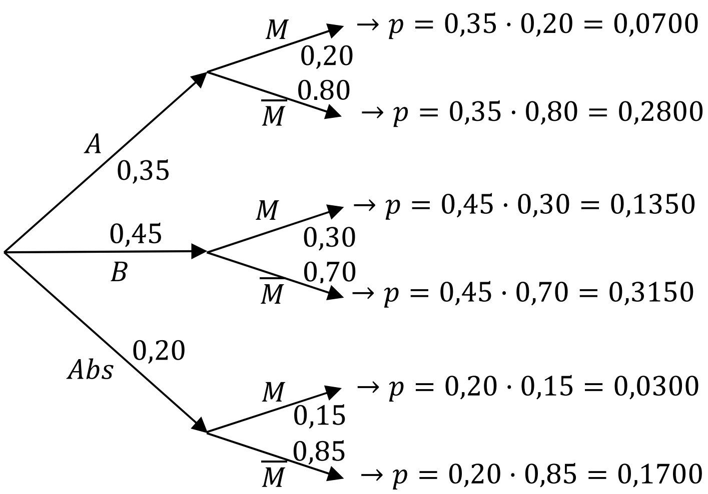
$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido A y sea mayor de 60 años?

$c)$ ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?

$d)$ Si es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

Solución:

Llamando M a los mayores de 60 años:



$a)$ $\quad P = P\left(B \cap \overline{M}\right) = P(B) \cdot P\left(\overline{M}/B\right) = 0{,}45 \cdot 0{,}70 = \underline{0{,}3150}.$

$b)$ $\quad P = P(A \cap M) = P(A) \cdot P(M/A) = 0{,}35 \cdot 0{,}20 = \underline{0{,}0700}.$

$c)$ $\quad P = P(M) = P(A \cap M) + P(B \cap M) + P(Abs \cap M) =$

$= P(A) \cdot P(M/A) + P(B) \cdot P(M/B) + P(Abs) \cdot P(M/Abs) =$

$= 0{,}35 \cdot 0{,}20 + 0{,}45 \cdot 0{,}30 + 0{,}20 \cdot 0{,}15 = 0{,}0700 + 0{,}1350 + 0{,}0300 = \underline{0{,}2350}.$

$d)$ $\quad P = P(Abs/M) = \frac{P(Abs \cap M)}{P(M)} = \frac{P(Abs) \cdot P(M/Abs)}{P(M)} = \frac{0{,}20 \cdot 0{,}15}{0{,}2350} = \frac{0{,}0300}{0{,}2350} = \underline{0{,}1277}.$

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Indicaciones:
El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera). En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen. Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado. Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos. Los teléfonos móviles deberán estar apagados durante el examen.
TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) En un día de playa y bajo un sol radiante Fabiola se acerca al chiringuito y compra 3 helados, 2 granizados y 2 horchatas, pagando en total 20 euros. El comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más. Tras reclamar, el vendedor le devuelve 5 euros. Además, para compensar el error, le ofrece llevarse en promoción un helado y un granizado por 2 euros, lo que supone un descuento del 50 % respecto a sus precios originales.

a) Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (sin descuento) de un helado, un granizado y una horchata.

b) Resuélvalo.

Problema 2:

2º) Un ganadero pasiego necesita ampliar su explotación de bovino, para lo cual decide comprar vacas de las razas parda y frisona. Como máximo, tiene planteado adquirir un total de 160 vacas para su cría. Cuando llegue el momento de venderlas, por cada ejemplar de parda espera obtener un beneficio de 350 euros, y por cada frisona uno de 500 euros. Tiene claro que no comprará más de 50 pardas ni menos de 70 frisonas. Además, quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas.

a) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

c) ¿Cuántas vacas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?

d) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Problema 3:

3º) Dadas las funciones $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ y $g(x) = 2x^2 - 2x - 4$.
a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.
b) ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?
c) Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los puntos de corte entre ambas funciones.
d) Calcule el área de la región que queda encerrada entre ambas funciones.

Problema 4:

4º) Se sabe que la evolución del precio del oro en el mercado (P, expresado en euros/kg) a lo largo de un mes de 31 días viene dado por la siguiente función: $P(d) = \frac{1}{3}d^3 - 15d^2 + 144d + 1.500$, con $1 \leq d \leq 31$, donde d indica el día del mes.

a) ¿Qué día del mes habría que vender el oro para obtener la máxima ganancia? ¿A cuánto ascendería dicha ganancia si se vendiesen 4 kg de oro?

b) ¿Qué día del mes es el peor para vender oro? ¿Cuál sería la ganancia se se vendiesen 4 kg de oro ese día?

c) Si se viese obligado a vender 1 kg de oro entre los días 20 y 31 del mes y quisiera obtener la máxima ganancia, ¿en qué día lo haría? ¿Cuánto ganaría con la venta?

Problema 5:

5º) La enóloga de una bodega ha determinado que el porcentaje de alcohol presente en sus botellas de vino sigue una distribución normal con desviación típica 0, 53 %. Una muestra de 120 botellas, escogidas al azar, arroja un valor promedio para el porcentaje de alcohol por botella de 12,05 %.

a) Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de alcohol por botella.

b) ¿Cuál es el número mínimo de botellas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de alcohol por botella, con un nivel de confianza del 97,5 %, fuese de 0,1 %?

Problema 6:

6º) El 65 % de los clientes de un cierto supermercado compra leche de origen animal, el 25 % compra leche de origen vegetal y el 10 % restante no compra leche de ningún tipo. Además, el 20 % de los que compran leche de origen animal, el 70 % de los que compran leche de origen vegetal y el 10 % de los que no compran leche de ningún tipo compran también galletas de soja. Si se escoge al azar un cliente del supermercado:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen animal y galletas de soja?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal y no compre galletas de soja?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que compre galletas de soja?

d) Si no compra galletas de soja, ¿cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) En un día de playa y bajo un sol radiante Fabiola se acerca al chiringuito y compra 3 helados, 2 granizados y 2 horchatas, pagando en total 20 euros. El comprobar el ticket se da cuenta de que le han cobrado un helado y una horchata de más. Tras reclamar, el vendedor le devuelve 5 euros. Además, para compensar el error, le ofrece llevarse en promoción un helado y un granizado por 2 euros, lo que supone un descuento del 50 % respecto a sus precios originales.

a) Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (sin descuento) de un helado, un granizado y una horchata.

b) Resuélvalo.

Solución:

a) Sean x, y, z el número de helados, granizados y horchatas que compra Fabiola en el chiringuito, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+2y+3z=20 \\ x+z=5 \\ 0{,}5x+0{,}5y=2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 4x+2y+3z=20 \\ x+z=5 \\ x+y=4 \end{array}\right\}.$$

b) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 20 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=3+2-4=1\neq 0 \Rightarrow Rang\ M=3.$$

$$\underline{Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 20 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1}=\begin{vmatrix} 20 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}=15+8-20=23-20=3.$$

$$y=\begin{vmatrix} 4 & 20 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}=12+20-15-16=32-31=1$$

$$z=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 20 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=20+10-20-8=2$$

$$\underline{Un\ helado\ vale\ 3\ euros;\ un\ granizado,\ un\ euro\ y\ una\ horchata,\ 2\ euros.}$$

Problema 2:

2º) Un ganadero pasiego necesita ampliar su explotación de bovino, para lo cual decide comprar vacas de las razas parda y frisona. Como máximo, tiene planteado adquirir un total de 160 vacas para su cría. Cuando llegue el momento de venderlas, por cada ejemplar de parda espera obtener un beneficio de 350 euros, y por cada frisona uno de 500 euros. Tiene claro que no comprará más de 50 pardas ni menos de 70 frisonas. Además, quiere que el número de vacas pardas sea, al menos, una tercera parte del de frisonas.

a) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

b) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

c) ¿Cuántas vacas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio?

d) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución:

a) Sean x e y las vacas pardas y frisonas que adquiere el ganadero pasiego para su explotación, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} x+y \le 160 \\ x \ge \frac{1}{3}y \\ x \le 50;\ y \ge 70 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y \le 160 \\ 3x-y \ge 0 \\ x \le 50;\ y \ge 70 \end{array}\right\}.$

b)

① $\Rightarrow x+y \le 160 \Rightarrow y \le 160-x \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	160
y	160	0

② $\Rightarrow 3x-y \ge 0 \Rightarrow y \le 3x \Rightarrow P(20,0) \to Si.$

x	0	40
y	0	120

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

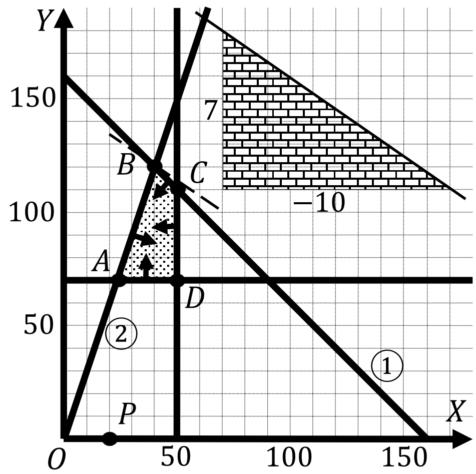
$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=70 \\ 3x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{70}{3} \Rightarrow \underline{A\left(\frac{70}{3},70\right)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=160 \\ 3x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x=160;\ \ x=40;$

$y=120 \Rightarrow \underline{B(40,120)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=50 \\ x+y=160 \end{array}\right\} \Rightarrow y=110 \Rightarrow \underline{C(50,110)}.$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=50 \\ y=70 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{D(50,70)}.$



c) La función de objetivos: $f(x,y)=350x+500y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

Autor: ANTONIO MENGUIANO

$A \Rightarrow f\left(\frac{70}{3}, 70\right) = 350 \cdot \frac{70}{3} + 500 \cdot 70 = \frac{24.500}{3} + 35.000 = 43.166{,}67.$

$B \Rightarrow f(40, 120) = 350 \cdot 40 + 500 \cdot 120 = 14.000 + 60.000 = 74.000.$

$C \Rightarrow f(50, 110) = 350 \cdot 50 + 500 \cdot 110 = 17.500 + 55.000 = 72.500.$

$D \Rightarrow f(50, 70) = 350 \cdot 50 + 500 \cdot 70 = 17.500 + 35.000 = 52.500.$

El valor máximo se produce en el punto $B(40, 120)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 350x + 500y = 0 \Rightarrow y = -\frac{350}{500}x = -\frac{7}{10}x \Rightarrow m = -\frac{7}{10}.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ adquiriendo\ 40\ vacas\ pardas\ y\ 110\ frisonas}.$

$d)$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 74.000\ euros}.$

Problema 3:

3º) Dadas las funciones $f(x)=-x^2-2x+8$ y $g(x)=2x^2-2x-4$.

$a)$ Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.

$b)$ ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?

$c)$ Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los puntos de corte entre ambas funciones.

$d)$ Calcule el área de la región que queda encerrada entre ambas funciones.

Solución:

$a, b)$ La función $f(x)=-x^2-2x+8$ es una parábola cóncava (∩), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice en el siguiente:

$$f'(x)=-2x-2=0 \Rightarrow -2(x+1)=0;\ \ x+1=0 \Rightarrow x=-1.$$

$$f(-1)=-(-1)^2-2\cdot(-1)+8=-1+2+8=9 \Rightarrow V_1(-1,9).$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ creciente\ en\ (-\infty,-1)\ y\ decreciente\ en\ (-1,+\infty).}$$

La función $g(x)=2x^2-2x-4$ es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:

$$g'(x)=4x-2=0 \Rightarrow 2(2x-1)=0;\ \ 2x-1=0 \Rightarrow x=\tfrac{1}{2}.$$

$$g\left(\tfrac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\tfrac{1}{2}-4=\tfrac{1}{2}-5=-\tfrac{9}{2} \Rightarrow V_2\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{9}{2}\right).$$

$$\underline{La\ función\ g(x)\ es\ decreciente\ en\ \left(-\infty,\tfrac{1}{2}\right)\ y\ creciente\ en\ \left(\tfrac{1}{2},+\infty\right)}$$

$c)$ Los puntos de corte con los ejes coordenados de las funciones son los siguientes:

Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son los siguientes:

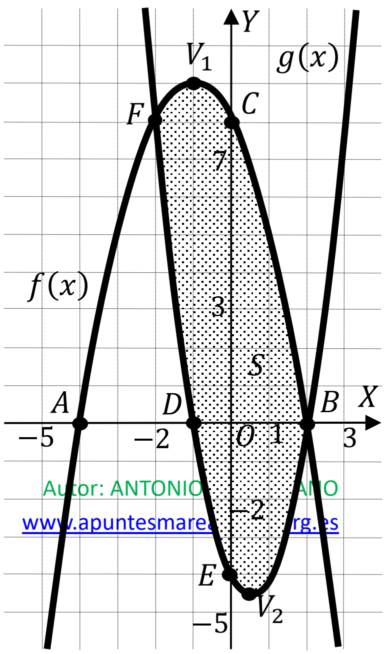
$$Eje\ X \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow -x^2-2x+8=0;\ \ x^2+2x-8=0;\ \ x=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}=-1\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-4 \Rightarrow A(-4,0) \\ x_2=2 \Rightarrow B(2,0) \end{cases}. \qquad Eje\ Y \Rightarrow C(0,8).$$

$$Eje\ X \Rightarrow g(x)=0 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0;\ \ x^2-x-2=0;\ \ x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \Rightarrow D(-1,0) \\ x_2=2 \Rightarrow B(2,0) \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow E(0,-4).$$



Las abscisas de los puntos de intersección de las funciones son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$-x^2-2x+8=2x^2-2x-4;\ \ 3x^2-12=0;$$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow F(-2, 8) \\ x_2 = 2 \rightarrow B(2, 0) \end{cases}.$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

$d)$ De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-2}^{2} [(-x^2 - 2x + 8) - (2x^2 - 2x - 4)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (-x^2 - 2x + 8 - 2x^2 + 2x + 4) \cdot dx = \int_{-2}^{2} (-3x^2 + 12) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{3x^3}{3} + 12x\right]_{-2}^{2} = [-x^3 + 12x]_{-2}^{2} = (-2^3 + 12 \cdot 2) - [-(-2)^3 + 12 \cdot (-2)] =$$

$$= -8 + 24 - 8 + 24 \Rightarrow$$

$$\underline{S = 32\, u^2}.$$

Problema 4:

4º) Se sabe que la evolución del precio del oro en el mercado (P, expresado en euros/kg) a lo largo de un mes de 31 días viene dado por la siguiente función: $P(d)=\frac{1}{3}d^3-15d^2+144d+1.500$, con $1\leq d\leq 31$, donde d indica el día del mes.

a) ¿Qué día del mes habría que vender el oro para obtener la máxima ganancia? ¿A cuánto ascendería dicha ganancia si se vendiesen 4 kg de oro?

b) ¿Qué día del mes es el peor para vender oro? ¿Cuál sería la ganancia se se vendiesen 4 kg de oro ese día?

c) Si se viese obligado a vender 1 kg de oro entre los días 20 y 31 del mes y quisiera obtener la máxima ganancia, ¿en qué día lo haría? ¿Cuánto ganaría con la venta?

Solución:

a) Para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$P'(d)=d^2-30d+144.$$

$$P'(d)=0\Rightarrow d^2-30d+144=0;\;\; d=\frac{30\pm\sqrt{900-576}}{2}=\frac{30\pm\sqrt{324}}{2}=\frac{30\pm 18}{2}=$$

$$=15\pm 9\Rightarrow d_1=6, d_2=24.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo.

$$P''(d)=2d-30\Rightarrow\begin{cases}P''(6)=2\cdot 6-30<0\Rightarrow Máx.\ para\ d=6\\P''(24)=2\cdot 24-30>0\Rightarrow Mín.\ para\ d=24\end{cases}.$$

$$P(6)=\frac{1}{3}\cdot 6^3-15\cdot 6^2+144\cdot 6+1.500=6\cdot(12-90+144+250)=$$

$$=6\cdot(406-90)=6\cdot 316=1.896.$$

$\underline{La\ máxima\ ganancia\ se\ obtiene\ vendiendo\ el\ oro\ el\ día\ 6}.$

$$4\cdot P(6)=4\cdot 1.896=7.584.$$

$\underline{La\ máxima\ ganancia\ vendiento\ los\ 4\ kg\ de\ oro\ es\ de\ 7.584\ euros}.$

b) $P(24)=\frac{1}{3}\cdot 24^3-15\cdot 24^2+144\cdot 24+1.500=$

$$=4.608-8.640+3.456+1.500=9.464-8.640=824.$$

$\underline{La\ mínima\ ganancia\ se\ obtiene\ vendiendo\ el\ oro\ el\ día\ 24}.$

$$4\cdot 824=3.296.$$

$\underline{La\ mínima\ ganancia\ vendiento\ los\ 4\ kg\ de\ oro\ es\ de\ 3.296\ euros}.$

c) Teniendo en cuenta que el máximo se produce el día 6 y el mínimo el día 24, entre los días 20 y

31, el máximo, necesariamente tiene que estar en uno de los dos extremos del intervalo $[20, 31]$.

$$P(20) = \frac{1}{3} \cdot 20^3 - 15 \cdot 20^2 + 144 \cdot 20 + 1.500 =$$

$$= \frac{20}{3} \cdot (400 - 900 + 432 + 225) = \frac{20}{3} \cdot (1.057 - 900) = \frac{20}{3} \cdot 157 \cong 1.046{,}67.$$

$$P(31) = \frac{1}{3} \cdot 31^3 - 15 \cdot 31^2 + 144 \cdot 31 + 1.500 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (29.791 - 43.245 + 13.392 + 4.500) = \frac{1}{3} \cdot (47.683 - 43.245) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 4.438 \cong 1.479{,}33.$$

$$\underline{La\ máxima\ ganancia\ se\ obtiene\ vendiendo\ el\ oro\ el\ día\ 31}.$$

$$\underline{La\ máxima\ ganancia\ 1\ kg\ de\ oro\ es\ de\ 1.479{,}33\ euros}$$

Problema 5:

5º) La enóloga de una bodega ha determinado que el porcentaje de alcohol presente en sus botellas de vino sigue una distribución normal con desviación típica 0, 53 %. Una muestra de 120 botellas, escogidas al azar, arroja un valor promedio para el porcentaje de alcohol por botella de 12,05 %.

a) Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de alcohol por botella.

b) ¿Cuál es el número mínimo de botellas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de alcohol por botella, con un nivel de confianza del 97,5 %, fuese de 0,1 %?

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$

$(1-0{,}025=0{,}9750 \;\rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=120;\;\; \overline{x}=12{,}05;\;\; \sigma=0{,}53;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\; \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(12{,}05-1{,}96\cdot\frac{0{,}53}{\sqrt{120}};\; 12{,}05+1{,}96\cdot\frac{0{,}53}{\sqrt{120}}\right);$

$(12{,}05-1{,}96\cdot 0{,}0484;\; 12{,}05+1{,}96\cdot 0{,}0484);$

$(12{,}05-0{,}0948;\; 12{,}05+0{,}0948).$

$$\underline{I.C._{95\,\%}=(11{,}9552;\; 12{,}1448)}.$$

b) Para un nivel de confianza del 97,5 % es:

$1-\alpha=0{,}975 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}975=0{,}025 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}0125}=2{,}24.$

$(1-0{,}0125=0{,}9875 \;\rightarrow z=2{,}24).$

Datos: $\sigma=0{,}53;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}24;\;\; E=0{,}1.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \;\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2{,}24\cdot\frac{0{,}53}{0{,}1}\right)^2=$

$=(2{,}24\cdot 5{,}3)^2=11{,}872^2=140{,}94.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 141\ botellass}$$

Problema 6:

6º) El 65 % de los clientes de un cierto supermercado compra leche de origen animal, el 25 % compra leche de origen vegetal y el 10 % restante no compra leche de ningún tipo. Además, el 20 % de los que compran leche de origen animal, el 70 % de los que compran leche de origen vegetal y el 10 % de los que no compran leche de ningún tipo compran también galletas de soja. Si se escoge al azar un cliente del supermercado:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen animal y galletas de soja?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal y no compre galletas de soja?

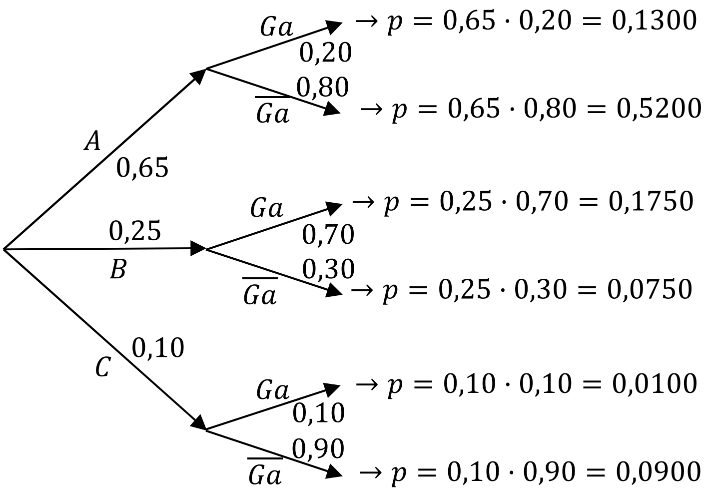
c) ¿Cuál es la probabilidad de que compre galletas de soja?

d) Si no compra galletas de soja, ¿cuál es la probabilidad de que compre leche de origen vegetal?

Solución:

Para facilitar la construcción del diagrama del árbol llamaremos:

$A \rightarrow Origen\ animal;\ \ B \rightarrow Origen\ vegetal;\ \ C \rightarrow No\ compra\ leche.$



a) $\quad P = P(A \cap Ga) = 0{,}65 \cdot 0{,}20 = \underline{0{,}13}.$

b) $\quad P = P\left(B \cap \overline{Ga}\right) = 0{,}25 \cdot 0{,}30 = \underline{0{,}075}.$

c) $\quad P = P(Ga) = P(A \cap Ga) + P(B \cap Ga) + P(C \cap Ga) =$

$= P(A) \cdot P(Ga/A) + P(B) \cdot P(Ga/B) + P(C) \cdot P(Ga/C) =$

$= 0{,}65 \cdot 0{,}20 + 0{,}25 \cdot 0{,}70 + 0{,}10 \cdot 0{,}10 = 0{,}130 + 0{,}175 + 0{,}010 = \underline{0{,}315}.$

d) $\quad P = P\left(B/\overline{Ga}\right) = \frac{P\left(B \cap \overline{Ga}\right)}{P\left(\overline{Ga}\right)} = \frac{P(B) \cdot P\left(\overline{Ga}/B\right)}{1 - P(Ga)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}30}{1 - 0{,}315} = \frac{0{,}075}{0{,}685} = \underline{0{,}1095}.$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

TIEMPO: 90 minutos.

Sección 1. Bloque 1

1º) Un fabricante comercializa 2 modelos de zapatillas para montaña, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 28 euros por par y otro para hombre con un beneficio por cada par de 30 euros. El próximo mes tiene que fabricar entre 100 y 600 pares de zapatillas de hombre y un mínimo de 400 pares de mujer. Además, solamente puede fabricar un máximo de 1.200 pares de zapatillas.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

b) Determina cuántos pares de zapatillas de cada modelo debe fabricar para que el beneficio sea máximo.

2º) La caja de bombones que compro cuesta 51 euros y contiene 12 bombones de chocolate negro, 6 de chocolate con leche y 6 de chocolate blanco. Cada bombón de chocolate negro cuesta un euro más que los de chocolate con leche y estos últimos cuestan 50 céntimos menos que los de chocolate blanco.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada tipo de bombón.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Bloque 2

1º) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x-4 & si\ \ x \leq c \\ -(x-3)^2+2 & si\ x > c \end{cases}$.

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$?

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 1$.

2º) La función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ tiene un mínimo en el punto $P(-1, 0)$ y corta al eje OY en el punto de ordenada $y = 1$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros $a, b\ y\ c$.

Sección 2. Bloque 1

3º) El 70 % de los turistas que visitan una determinada ciudad se alojan en el centro, y el resto lo hace en las afueras. El 60 % de los que se alojan en el centro y el 40 % de los que se alujan en las afueras lo hacen en hoteles de 3 o más estrellas, mientras que el resto lo hace en establecimientos de menor calidad.

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya alojado en un hotel de 3 o más estrellas?

b) Si se sabe que una persona se ha alojado en un establecimiento de menor calidad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona se haya alujado en el centro?

4º) El número de pacientes que se atienden en un centro de salud a la semana sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ pacientes. Se ha tomado una muestra aleatoria de 25 semanas y se ha registrado el número de pacientes atendidos, proporcionando una media de 322 pacientes.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de pacientes atendidos con un nivel de confianza del 95 %.

b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de la muestra.

$c)$ ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de pacientes atendidos a la semana es de 330 con un nivel de confianza del 99 %? Justificar la respuesta.

Bloque 2

3º) En un programa de televisión hay tres secciones: magia, humor y noticias. La sección de humor dura cinco minutos más que la de magia. El tiempo ocupado por la magia y el humor es en total la cuarta parte del dedicado a noticias y la duración total del programa es de 1 hora y 55 minutos.

$a)$ Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto tiempo se dedica a cada una de las tres secciones del programa.

$b)$ Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

4º) $a)$ Dadas dos matrices cuadradas A y B, razona si se obtendría el mismo resultado en la resolución de las ecuaciones $A \cdot X = B$ y $B = X \cdot A$. ¿De qué propiedad estamos hablando?

$b)$ Si la dimensión de la matriz M es $3 \times m$, la dimensión de la matriz N es 2×5 y P es una matriz cuadrada de orden p. ¿Qué valores han de tomar m y p para que se pueda realizar el producto $M \cdot N \cdot P$? ¿Qué dimensión tendría la matriz resultante?

$c)$ Para las matrices $C = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $y\ E = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación $X \cdot C - D^2 = \frac{1}{3} \cdot E^t$.

Sección 3. Bloque 1

5º) El 40 % de las personas que acuden a una consulta médica lo hacen para diagnosticar una enfermedad, el 30 % para solicitar recetas y un 10 % para ambas cosas, diagnosticas enfermedad y solicitar recetas.

$a)$ Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acuda a solicitar recetas o a diagnosticar una enfermedad o ambas?

$b)$ Si se sabe que una persona ha acudido a diagnosticar una enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona también solicite recetas?

6º) El número de libros que lee un estudiante de Bachillerato al año sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 6$ libros. Se ha tomado una muestra de 10 estudiantes de Bachillerato y el número de libros que han leído ha sido el siguiente: $4,\ 8,\ 2,\ 9,\ 3,\ 7,\ 5,\ 6,\ 7\ y\ 4$ libros.

$a)$ Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de libros leídos con un nivel de confianza del 97 %.

$b)$ Explica razonadamente qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza.

$c)$ ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 64 estudiantes y un nivel de confianza del 95,96 %?

Bloque 2

5º) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+t+1)^2 & si\ x < -1 \\ 1 & si\ x = -1 \\ -x^2 + (t+2)x + 5 & si\ x > -1 \end{cases}$:

$a)$ ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua para $x = -1$? $b)$ Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, \infty)$. $c)$ Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, \infty)$.

6º) El número de socios de una protectora de animales durante los cinco primeros años de su existencia viene dado por la función $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, siendo x el número de años y $1 \leq x \leq 5$.

$a)$ ¿En qué intervalos aumenta el número de socios? ¿Y en cuáles disminuye? $b)$ ¿Cuándo hay mayor número de socios y cuántos son? $c)$ ¿En qué año son menos socios y cuántos hay?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Sección 1. Bloque 1

1º) Un fabricante comercializa 2 modelos de zapatillas para montaña, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 28 euros por par y otro para hombre con un beneficio por cada par de 30 euros. El próximo mes tiene que fabricar entre 100 y 600 pares de zapatillas de hombre y un mínimo de 400 pares de mujer. Además, solamente puede fabricar un máximo de 1.200 pares de zapatillas.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

b) Determina cuántos pares de zapatillas de cada modelo debe fabricar para que el beneficio sea máximo.

Solución:

a) Sean x e y el número de zapatillas de hombre y mujer que se fabrican mensualmente, respectivamente.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 28x + 30y$.

Las restricciones que se plantean en el ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} x + y \leq 1.200 \\ 100 \leq x \leq 600 \\ y \geq 400 \end{array}\right\}$.

$\textcircled{1} \Rightarrow x + y \leq 1.200 \Rightarrow y \leq 1.200 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	1.200
y	1.200	0

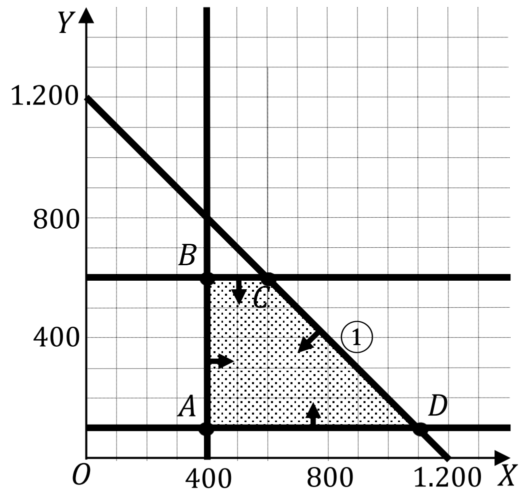
La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 400 \\ y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow A(400, 100).$ $B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 400 \\ y = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow B(400, 600).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 600 \\ x + y = 1.200 \end{array}\right\} \Rightarrow C(600, 600).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 100 \\ x + y = 1.200 \end{array}\right\} \Rightarrow D(1.100, 100).$



b) Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(400, 100) = 28 \cdot 400 + 30 \cdot 100 = $
$= 11.200 + 3.000 = 14.200.$

$B \Rightarrow f(400, 600) = 28 \cdot 400 + 30 \cdot 600 = 11.200 + 18.000 = 29.200.$

$C \Rightarrow f(600, 600) = 28 \cdot 600 + 30 \cdot 600 = 16.800 + 18.000 = 34.800.$

$D \Rightarrow f(1.100, 100) = 28 \cdot 1.100 + 30 \cdot 100 = 30.800 + 3.000 = 33.800.$

$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ fabricando\ 600\ zapatilla\ de\ cada\ clase}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 34.800\ euros}.$

2º) La caja de bombones que compro cuesta 51 euros y contiene 12 bombones de chocolate negro, 6 de chocolate con leche y 6 de chocolate blanco. Cada bombón de chocolate negro cuesta un euro más que los de chocolate con leche y estos últimos cuestan 50 céntimos menos que los de chocolate blanco.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada tipo de bombón.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sean x, y, z el precio de los bombones de chocolate negro, con leche y blanco, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 12x+6y+6z=51 \\ x=y+1 \\ y=z-0{,}5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 12x+6y+6z=51 \\ x-y=1 \\ 2y=2z-1 \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{r} 12x+6y+6z=51 \\ x-y=1 \\ -2y+2z=1 \end{array}\right\}}.$$

Resolviendo por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} 12x+6y+6z=51 \\ x-y=1 \\ -2y+2z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y=x-1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 12x+6(x-1)+6z=51 \\ -2(x-1)+2z=1 \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} 12x+6x-6+6z=51 \\ -2x+2+2z=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 18x+6z=57 \\ -2x+2z=-1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 18x+6z=57 \\ -18x+18z=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow 24z=48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=2. \qquad -2x+4=-1;\ \ 2x=5;\ \ x=2{,}5. \qquad y=2{,}5-1 \Rightarrow y=1{,}5.$$

Los bombones valen lo siguiente:

$$\underline{Chocolate\ negro\ 2{,}5\ euros;\ con\ leche\ 1{,}5\ euros\ y\ blanco\ 2\ euros.}$$

Bloque 2

1º) Se considera la función $f(x)=\begin{cases}2x-4 \;\; si \;\; x\leq c \\ -(x-3)^2+2 \;\; si \; x>c\end{cases}$.

$a)$ ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x=c$?

$b)$ Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c=1$.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=c$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de c para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=c\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=\lim\limits_{x\to c}(2x-4)=2c-4=f(c)\\ \lim\limits_{x\to c^+}f(x)=\lim\limits_{x\to c}[-(x-3)^2+2]=-(c-3)^2+2\end{cases}\Rightarrow$$

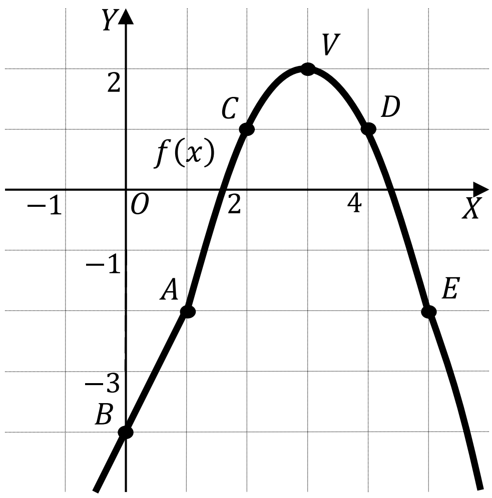
$$\Rightarrow \lim_{x\to c^-}f(x)=\lim_{x\to c^+}f(x)=f(c)\Rightarrow 2c-4=-(c-3)^2+2;$$

$$2c-4=-(c^2-6c+9)+2;\;\; 2c-6=-c^2+6c-9;\;\; c^2-4c+3=0;$$

$$c=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=2\pm 1\Rightarrow c_1=1, c_2=3.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ continua\ en\ R\ para\ c=1\ y\ c=3}.$$

$b)$ Para $c=1$ la función resulta $f(x)=\begin{cases}2x-4 \;\; si \;\; x\leq 1 \\ -(x-3)^2+2 \;\; si \; x>1\end{cases}$ que, teniendo en cuenta que $-(x-3)^2+2=-x^2+6x-9+2=-x^2+6x-7$, puede expresarse de la forma: $f(x)=\begin{cases}2x-4 \;\; si \;\; x\leq 1 \\ -x^2+6x-7 \;\; si \; x>1\end{cases}$, cuya representación gráfica se hace a continuación.



En el intervalo $(-\infty,1]$ la función es la recta $f(x)=2x-4$, que contiene los puntos $A(1,-2)$ y $B(0,-4)$.

En el intervalo $(1,\infty)$ la función es la parábola $f(x)=-x^2+6x-7$, que es cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice (máximo) es el punto siguiente:

$f'(x)=-2x+6=0;\;\; x-3=0\Rightarrow x=3.$

$f(3)=-3^2+6\cdot 3-7=-9+18-7=2\Rightarrow V(3,2).$

Otros puntos de la parábola son $A(1,-2)\ y\ E(5,-2);\;\; C(2,1)\ y\ D(4,1).$

De todo lo anterior se deduce la representación gráfica, aproximada, de la figura, que es la que aparece en la gráfica adjunta.

2º) La función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ tiene un mínimo en el punto $P(-1, 0)$ y corta al eje OY en el punto de ordenada $y = 1$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

Solución:

Por cortar al eje OY en el punto de ordenada $y = 1 \Rightarrow f(0) = 1$:

$f(0) = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^2 + c = 1 \Rightarrow \underline{c = 1}$.

Por contener al punto $P(-1, 0) \Rightarrow f(-1) = 0$:

$f(-1) = a \cdot (-1)^4 + b \cdot (-1)^2 + 1 = a + b = -1$. (1)

Por tener un mínimo en $P(-1, 0) \Rightarrow f'(-1) = 0$:

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$.

$f'(-1) = 4a \cdot (-1)^3 + 2b \cdot (-1) = 0;\ -4a - 2b = 0;\ \ 2a + b = 0$. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + b = -1 \\ 2a + b = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -a - b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

$1 + b = -1 \Rightarrow \underline{b = -2}$.

Sección 2. Bloque 1

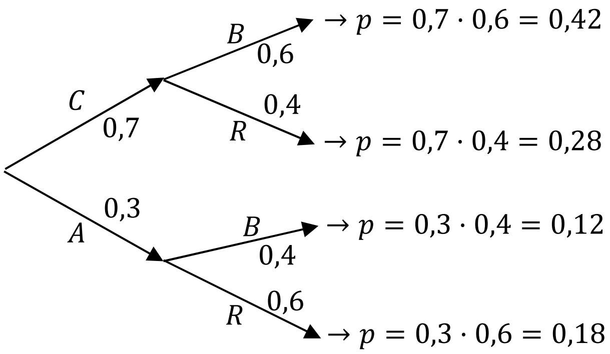
3º) El 70 % de los turistas que visitan una determinada ciudad se alojan en el centro, y el resto lo hace en las afueras. El 60 % de los que se alojan en el centro y el 40 % de los que se alujan en las afueras lo hacen en hoteles de 3 o más estrellas, mientras que el resto lo hace en establecimientos de menor calidad.

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya alojado en un hotel de 3 o más estrellas?

b) Si se sabe que una persona se ha alojado en un establecimiento de menor calidad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona se haya alujado en el centro?

Solución:

Llamemos buenos (B) a los hoteles de 3 o más estrellas y regulares (R) a los establecimientos de menor calidad.



a) $P = P(B) = P(C \cap B) + P(A \cap B) = P(C) \cdot P(B/C) + P(A) \cdot P(B/A) =$

$= 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}42 + 0{,}12 = \underline{0{,}54}.$

b) $P = P(C/R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{P(C) \cdot P(R/C)}{1 - P(B)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}4}{1 - 0{,}54} = \frac{0{,}28}{0{,}46} = \underline{0{,}6087}.$

4º) El número de pacientes que se atienden en un centro de salud a la semana sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ pacientes. Se ha tomado una muestra aleatoria de 25 semanas y se ha registrado el número de pacientes atendidos, proporcionando una media de 322 pacientes.

$a)$ Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de pacientes atendidos con un nivel de confianza del 95 %.

$b)$ Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de la muestra.

$c)$ ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de pacientes atendidos a la semana es de 330 con un nivel de confianza del 99 %? Justificar la respuesta.

Solución:

$a)$ Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1-\alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$$

$$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$$

Datos: $n = 25;\ \ \overline{x} = 322;\ \ \sigma = 50;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(322 - 1{,}96 \cdot \frac{50}{\sqrt{25}};\ 322 + 1{,}96 \cdot \frac{80}{\sqrt{25}}\right);\ \ (322 - 1{,}96 \cdot 10;\ 322 + 1{,}96 \cdot 10);$$

$(322 - 19{,}6;\ 322 + 19{,}6).$

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (302{,}4;\ 341{,}6)}.$$

$b)$ $\underline{Si\ aumenta\ el\ número\ de\ la\ muestra\ disminuye\ el\ intervalo\ de\ confianza}.$

$c)$ Antes de hacer el estudio ya se puede afirmar que la respuesta es afirmativa.

Si con un nivel de confianza del 95 % se incluye el valor 330, también estará contenido este valor cuando aumente el nivel de confianza, puesto que al aumentar el nivel de confianza aumenta el valor del intervalo.

No obstante lo anterior, se hace el estudio para confirmarlo.

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$$1-\alpha = 0{,}99 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = 2{,}575.$$

$$(1 - 0{,}005 = 0{,}9950 \ \rightarrow z = 2{,}575).$$

$$(322 - 2{,}575 \cdot 10;\ 322 + 2{,}575 \cdot 10);\ \ (322 - 2{,}575 \cdot 10;\ 322 + 2{,}575 \cdot 10);$$

$(322 - 25{,}75;\ 322 + 25{,}75) \Rightarrow I.C._{99\,\%} = (296{,}25;\ 347{,}75).$

Al estar contenido el número de 330 pacientes en el intervalo de confianza:

$$\underline{Se\ puede\ aceptar\ la\ afirmación}.$$

Bloque 2

3º) En un programa de televisión hay tres secciones: magia, humor y noticias. La sección de humor dura cinco minutos más que la de magia. El tiempo ocupado por la magia y el humor es en total la cuarta parte del dedicado a noticias y la duración total del programa es de 1 hora y 55 minutos.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto tiempo se dedica a cada una de las tres secciones del programa.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sean x, y, z la duración en minutos de las secciones de magia, humor y noticias del programa de televisión, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} y = x + 5 \\ x + y = \frac{1}{4}z \\ x + y + z = 115 \end{array}\right\}$$

$$\underline{\left.\begin{array}{r} x - y = -5 \\ 4x + 4y - z = 0 \\ x + y + z = 115 \end{array}\right\}.}$$

b) Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 115 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-20+115-5}{4+1+1+4} = \frac{115-25}{10} = \frac{90}{10} = 9.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & 115 & 1 \end{vmatrix}}{10} = \frac{5+115+20}{10} = \frac{140}{10} = 14.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 115 \end{vmatrix}}{10} = \frac{460-20+20+460}{10} = \frac{920}{10} = 92.$$

$$\underline{La\ magia\ dura\ 9\ minutos,\ el\ humor\ 14\ minutos\ y\ las\ noticias,\ 92\ minutos.}$$

4º) $a)$ Dadas dos matrices cuadradas A y B, razona si se obtendría el mismo resultado en la resolución de las ecuaciones $A \cdot X = B$ y $B = X \cdot A$. ¿De qué propiedad estamos hablando?

$b)$ Si la dimensión de la matriz M es $3 \times m$, la dimensión de la matriz N es 2×5 y P es una matriz cuadrada de orden p. ¿Qué valores han de tomar m y p para que se pueda realizar el producto $M \cdot N \cdot P$? ¿Qué dimensión tendría la matriz resultante?

$c)$ Para las matrices $C = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación $X \cdot C - D^2 = \frac{1}{3} \cdot E^t$.

Solución

$a)$ Lo normal es que no se obtenga la misma solución debido a que, en general:

$$\underline{El\ producto\ de\ matrices\ no\ tiene\ la\ propiedad\ conmutativa}.$$

$b)$ Para que pueda efectuarse el producto de dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual que el número de filas de la segunda matriz y, la matriz producto, tiene las mismas filas de la primera y las mismas columnas de la segunda: $M_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}$.

Teniendo en cuenta la propiedad asociativa del producto de matrices:

$M_{(3,m)} \cdot N_{(2,5)} = X_{(3,5)} \Rightarrow \underline{m = 2}$.

$M_{(3,m)} \cdot N_{(2,5)} \cdot P_{(p,p)} = X_{(3,5)} \cdot P_{(p,p)} = Y_{(3,p)} \Rightarrow \underline{p = 5}$.

$$\underline{La\ matriz\ resultante\ tiene\ por\ dimensión\ 3 \times 5}.$$

$c)$ $X \cdot C - D^2 = \frac{1}{3} \cdot E^t$; $X \cdot C = \frac{1}{3} \cdot E^t + D^2$; $X \cdot C \cdot C^{-1} = \left(\frac{1}{3} E^t + D^2\right) \cdot C^{-1}$;

$X \cdot I = \left(\frac{1}{3} E^t + D^2\right) \cdot C^{-1} \Rightarrow \underline{X = \left(\frac{1}{3} E^t + D^2\right) \cdot C^{-1}}$. (*)

$$\frac{1}{3} E^t + D^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} E^t + D^2 = \begin{pmatrix} 28 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$|C| = \begin{vmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1; \ C^t = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}; \ Adj.de\ C^t = \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} = \frac{Adj.de\ C^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión (*):

$$X = \left(\frac{1}{3} E^t + D^2\right) \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 28 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} -81 & -296 \\ 19 & 68 \end{pmatrix}}.$$

Sección 3. Bloque 1

5º) El 40 % de las personas que acuden a una consulta médica lo hacen para diagnosticar una enfermedad, el 30 % para solicitar recetas y un 10 % para ambas cosas, diagnosticas enfermedad y solicitar recetas.

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acuda a solicitar recetas o a diagnosticar una enfermedad o ambas?

b) Si se sabe que una persona ha acudido a diagnosticar una enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona también solicite recetas?

Solución:

$$Datos: \; P(D) = 0{,}4; \; P(R) = 0{,}3; \; P(D \cap R) = 0{,}1.$$

a) $\quad P = P(D \cup R) = P(D) + P(R) - P(D \cap R) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1 = \underline{0{,}6}.$

b) $\quad P = P(R/D) = \frac{P(D \cap R)}{P(D)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \underline{0{,}25}.$

6º) El número de libros que lee un estudiante de Bachillerato al año sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 6$ libros. Se ha tomado una muestra de 10 estudiantes de Bachillerato y el número de libros que han leído ha sido el siguiente: $4,\ 8,\ 2,\ 9,\ 3,\ 7,\ 5,\ 6,\ 7\ y\ 4$ libros.

$a)$ Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de libros leídos con un nivel de confianza del 97 %.

$b)$ Explica razonadamente qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza.

$c)$ ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 64 estudiantes y un nivel de confianza del 95,96 %?

Solución:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{2+3+2\cdot 4+5+6+2\cdot 7+8+9}{10} = \frac{55}{10} = 5{,}5.$$

$a)$ Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}97\ \rightarrow\ \alpha = 1 - 0{,}97 = 0{,}03\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}015} = 2{,}17.$$

$$(1 - 0{,}015 = 0{,}9850\ \rightarrow z = 2{,}17).$$

Datos: $n = 10;\ \ \overline{x} = 5{,}5;\ \ \sigma = \sqrt{6};\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(5{,}5 - 2{,}17 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}};\ 5{,}5 + 2{,}17 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\right);$$

$$(5{,}5 - 2{,}17 \cdot 0{,}7746;\ 5{,}5 + 2{,}17 \cdot 0{,}7746);\ \ (5{,}5 - 1{,}6809;\ 5{,}5 + 1{,}6809).$$

$$\underline{I.C._{97\,\%} = (3{,}8191;\ 7{,}1809)}.$$

$b)$ Para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza es necesario aumentar la expresión $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y, teniendo en cuenta que la desviación típica es impuesta:

$$\underline{Se\ tiene\ que\ aumentar\ el\ número\ de\ elementos\ de\ la\ muestra}.$$

$c)$ Para un nivel de confianza del 95,96 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}9596\ \rightarrow\ \alpha = 1 - 0{,}9596 = 0{,}0404\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}0202} = 2{,}05.$$

$$(1 - 0{,}0202 = 0{,}9798\ \rightarrow z = 2{,}05).$$

$Datos\colon\ \sigma = \sqrt{6};\ n = 64;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}05.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}05 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{64}} = 2{,}05 \cdot 0{,}3062 \Rightarrow$

$$\underline{E = 0{,}6277}.$$

Bloque 2

5º) Se considera la función $f(x)=\begin{cases}(x+t+1)^2 & si\ \ x<-1\\ 1 & si\ \ x=-1\\ -x^2+(t+2)x+5 & si\ \ x>-1\end{cases}$:

$a)$ ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua para $x=-1$?

$b)$ Para $t=0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1,\infty)$.

$c)$ Para $t=0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1,\infty)$.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=-1$, independientemente del valor real de t, excepto para $x=-1$, para lo cual se va a determinar el valor real de t para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=-1 \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x+t+1)^2=t^2\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}[-x^2+(t+2)x+5]=2-t\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1) \Rightarrow \left.\begin{cases}t^2=1\\ 2-t=1\end{cases}\right\} \Rightarrow t=1.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x=-1\ para\ t=1}.$$

$b)$ Para $t=0$ la función es $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & si\ \ x<-1\\ 1 & si\ \ x=-1\\ -x^2+2x+5 & si\ \ x>-1\end{cases}$.

En el intervalo $(-1,\infty)$ la función es $f(x)=-x^2+2x+5$, que es una parábola cóncava $(\cap)$ por ser negativo el coeficiente de x^2, y cuyo extremo relativo (máximo) es el siguiente:

$f'(x)=-2x+2=0;\ -x+1=0 \Rightarrow x=1.$

$f(1)=-1^2+2\cdot 1+5=-1+2+5=6 \Rightarrow$

$$\underline{Máximo: V(1,6)}.$$

$c)$ Teniendo en cuenta el apartado anterior, se trata de determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=-x^2+2x+5$, que sabemos que tiene su máximo en el punto $V(1,6)$, por lo que, considerando el intervalo $(-1,\infty)$:

$$\underline{Crecimiento: (-1,1)}. \qquad \underline{Decrecimiento: (1,+\infty)}.$$

6º) El número de socios de una protectora de animales durante los cinco primeros años de su existencia viene dado por la función $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, siendo x el número de años y $1 \leq x \leq 5$.

$a)$ ¿En qué intervalos aumenta el número de socios? ¿Y en cuáles disminuye?

$b)$ ¿Cuándo hay mayor número de socios y cuántos son?

$c)$ ¿En qué año son menos socios y cuántos hay?

Solución:

$a)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$P'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$

$P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0;\ \ x^2 - 4x + 3 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$

$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$

Por ser $P(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función en los intervalos $(1, 3)\ y\ (3, 5)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 2 \in (1, 3)$ es:

$P'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = 12 - 24 + 9 = -3 < 0 \Rightarrow Decreciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$P'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (1, 3)}.$$

$$P'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (3, 5)}.$$

$b)$ Los valores de la función en sus extremos son los siguientes:

$P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 4 = 1 - 6 + 9 + 4 = 8.$

$P(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 9 \cdot 5 + 4 = 125 - 150 + 45 + 4 = 24.$

Teniendo en cuenta que la función, por ser polinómica, es continua en su dominio, del apartado anterior se deduce que la función tiene un máximo relativo para el valor $x = 3$:

$P(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 4 = 27 - 54 + 27 + 4 = 4.$

$$\underline{El\ mayor\ número\ de\ socios\ se\ produce\ para\ x = 5\ y\ son\ 24}.$$

$c)$

$$\underline{El\ menor\ número\ de\ socios\ se\ produce\ para\ x = 3\ y\ son\ 4}.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Sección 1. Bloque 1

1º) El siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y)=8x+3y$, sujeta a las siguientes restricciones: $\begin{cases}-2x+4\geq y\\ x+2y\geq 2\\ x\geq 0;\ \ y\leq 3\end{cases}$.

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices.

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores.

2º) El número total de premios Goya recibidos a lo largo de su carrera por tres mujeres (Isabel, Carmen y Enma) es de 15. Si aumentamos en un premio la cantidad que ha recibido Isabel obtenemos el triple de los precios ganados por Enma y los que recibe Enma equivalen a las tres cuartas partes de los que recibe Carmen.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos premios Goya han recibido cada una.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Bloque 2

1º) Se considera la función $f(x)=\begin{cases}2x+2t\ \ si\ \ x\leq -1\\ t+1\ \ si\ -1\leq x\leq 1\\ -x^3+4x^2+3x-1\ \ si\ x>1\end{cases}$.

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=-1$?

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1,\infty)$.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1,\infty)$.

2º) La función $f(x)=ax^3+bx+c$ presenta un mínimo en el punto $P(2,1)$ y la pendiente de la recta tangente en $x=0$ es -12. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros $a, b\ y\ c$.

Sección 2. Bloque 1

3º) En un concurso se les proponen a los participantes tres pruebas (A, B y C) de las que han de elegir una. El 40 % de los participantes eligen la prueba A, superándola el 50 % de estos. El 25 % eligen la prueba B y en este caso la prueba no es superada por el 45 % de los participantes. La prueba C la superan el 60 % de los participantes que la eligen.

a) Elegido un participante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya superado la prueba?

b) Si se sabe que el participante no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la prueba A?

4º) El tiempo empleado para resolver un problema de Estadística sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma=6{,}4$ minutos. Se ha tomado una muestra a 9 personas y los tiempos empleados en resolver el problema han sido los siguientes: $12,\ 11,\ 10,\ 9,\ 8,\ 12,\ 11,\ 7\ y\ 10$ minutos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo empleado en resolver el problema con un nivel de confianza del 97 %.

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

$b)$ Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 3 minutos.

Bloque 2

3º) Un concesionario de automóviles tiene en oferta tres modelos de coche: uno deportivo, otro familiar y el tercero es un monovolumen. El mes pasado se vendieron 10 deportivos, 6 familiares y 3 monovolúmenes y se obtuvieron 851.000 euros. El coche deportivo vale 2.000 euros más que el familiar. Por 5 deportivos vendidos se obtienen 13.000 euros más que si se venden 6 monovolúmenes.

$a)$ Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio de cada uno de los tres modelos.

$b)$ Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

4º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

$a)$ Resuelve la ecuación matricial $X + X \cdot \frac{1}{2}A = A \cdot B$.

$b)$ Calcula $-\frac{1}{2}A - 2 \cdot B^t + C$.

Sección 3. ***Bloque 1***

5º) En un ejercicio de oposición, el opositor ha de presentar un tema de los cuatro que se seleccionan al azar de un programa de 40 temas. Si los cuatro temas seleccionados han de ser distintos y el opositor tiene bien preparados 22 temas:

$a)$ ¿Qué probabilidad tiene el opositor de aprobar el examen?

$b)$ ¿Qué probabilidad tiene el opositor de saberse exactamente uno de los cuatro temas?

6º) Una marca de neumáticos ha tomado una muestra aleatoria de 100 ruedas y ha medido la presión de inflado, proporcionando una media de 2,3 bares. Si se sabe que la presión de inflado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 0{,}81$ bares^2.

$a)$ Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la presión de inflado con un nivel de confianza del 95 %.

$b)$ Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza disminuimos el tamaño de la muestra.

$c)$ La marca de neumáticos afirma que la media de presión de inflado es de 2 bares. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 90 %? Justificar la respuesta.

Bloque 2

5º) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 + t & si\ \ x < -1 \\ 3 & si\ \ -1 \le x \le 2 \\ x^2 - 6x + 9 + t & si\ \ x > 2 \end{cases}$:

$a)$ ¿Existe un valor de t para que la función $f(x)$ es continua para $x = -1$ y $x = 2$?

$b)$ Representa la función $f(x)$ para $t = 0$.

6º) El tiempo de publicidad (en minutos) en una emisión de radio a lo largo de la semana viene dado por la función $S(x) = x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + 36$, con x expresado en días y $1 \le x \le 7$.

$a)$ ¿Cuántos minutos de publicidad emite el tercer día?

$b)$ ¿Durante qué día se emite más publicidad y cuánto tiempo?

$c)$ ¿Qué día emitieron menos publicidad? ¿Cuántos minutos?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Sección 1. Bloque 1

1º) El siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = 8x + 3y$, sujeta a las siguientes restricciones: $\begin{cases} -2x + 4 \geq y \\ x + 2y \geq 2 \\ x \geq 0; \;\; y \leq 3 \end{cases}$.

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices.

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores.

Solución:

a)

$① \Rightarrow -2x + 4 \geq y \Rightarrow y \leq -2x + 4 \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	2
y	4	0

$② \Rightarrow x + 2y \geq 2 \Rightarrow y \geq \frac{2-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	2	10
y	0	1

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

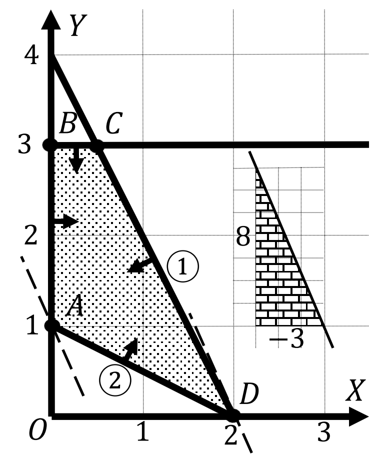
Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ x + 2y = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \underline{A(0,1)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{B(0,3)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x = 1; \;\; x = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{C\left(\frac{1}{2}, 3\right)}.$

$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 0 \\ 2x + y = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{D(2,0)}.$



b) La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 8x + 3y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,1) = 8 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 0 + 3 = 3.$
$B \Rightarrow f(0,3) = 8 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 0 + 9 = 9.$
$C \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}, 3\right) = 8 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 3 = 4 + 9 = 13.$
$D \Rightarrow f(2,0) = 8 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 16 + 0 = 16.$

$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ D(2,0)\ y\ su\ valor\ es\ 16}.$

$\underline{El\ mínimo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ A(0,1)\ y\ su\ valor\ es\ 3}.$

También se hubieran obtenido los puntos $D(2,0)$ y $A(0,1)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 8x + 3y = 0 \Rightarrow y = -\frac{8}{3}x \Rightarrow m = -\frac{8}{3}.$

2º) El número total de premios Goya recibidos a lo largo de su carrera por tres mujeres (Isabel, Carmen y Enma) es de 15. Si aumentamos en un premio la cantidad que ha recibido Isabel obtenemos el triple de los precios ganados por Enma y los que recibe Enma equivalen a las tres cuartas partes de los que recibe Carmen.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos premios Goya han recibido cada una.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sean x, y, z el número de premios Oscar que han recibido a lo largo de su carrera Isabel, Carmen y Enma, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=15 \\ x+1=3z \\ z=\frac{3}{4}y \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=15 \\ x-3z=-1 \\ 3y-4z=0 \end{array}\right\}.$$

b) Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 15 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{-3+135-4}{3+9+4}=\frac{135-7}{16}=\frac{128}{16}=8.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 15 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{16}=\frac{4+60}{16}=\frac{64}{16}=4.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{16}=\frac{45+3}{16}=\frac{48}{16}=3.$$

$$\underline{Isabel\ tiene\ 8\ Goyas, Carmen\ tiene\ 4\ y\ Enma, 3}.$$

Bloque 2

1º) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2x+2t \;\; si \;\; x\leq -1 \\ t+1 \;\; si \;\; -1\leq x\leq 1 \\ -x^3+4x^2+3x-1 \;\; si \; x>1 \end{cases}$.

$a)$ ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=-1$?

$b)$ Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1,\infty)$.

$c)$ Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1,\infty)$.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=-1$ y para $x=1$ cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación únicamente, como se pide, la continuidad para $x=-1$, para lo cual, se va a determinar el valor real de t para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=-1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(2x+2t)=2t-2=f(-1) \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(t+1)=t+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)\Rightarrow 2t-2=t+1\Rightarrow t=3.$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x=-1\ para\ t=3}.$$

$c)$ En el intervalo $(1,\infty)$ la función es $f(x)=-x^3+4x^2+3x-1$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x)=-3x^2+8x+3.$

$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-8x-3=0;\;\; x=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{6}=\frac{8\pm\sqrt{100}}{6}=\frac{8\pm 10}{6}=\frac{4\pm 5}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=-\frac{1}{3}\notin(1,\infty), x_2=3.$

Por ser $P(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función, que es $D(f)\Rightarrow(1,\infty)$, en los intervalos $(1,3)\ y\ (3,\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x=2\in(1,3)$ es:

$f'(2)=-3\cdot 2^2+8\cdot 2+3=-12+16+3=7>0\Rightarrow Creciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x)<0\Rightarrow \underline{Decrecimiento: x\in(3,\infty)}.$$

$$f'(x)>0\Rightarrow \underline{Crecimiento: x\in(1,3)}.$$

$b)$ Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = -6x + 8.$

$f''(3) = -6 \cdot 3 + 8 = -10 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 3.$

$f(3) = -3^3 + 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 1 = -27 + 36 + 9 - 1 = 17.$

$\underline{Máximo\ relativo: P(3, 17)}$**.**

2º) La función $f(x) = ax^3 + bx + c$ presenta un mínimo en el punto $P(2, 1)$ y la pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es -12. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

Solución:

Por contener al punto $P(2, 1) \Rightarrow f(2) = 1$.

$f(2) = 1 \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + c = 1;\ \ 8a + 2b + c = 1.$ (1)

$f'(x) = 3ax^2 + b.$

Por presentar un mínimo en el punto $P(2, 1) \Rightarrow f'(2) = 0$.

$f'(2) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + b = 0;\ \ 12a + b = 0.$ (2)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

Por tener la función la recta tangente en $x = 0$ con una pendiente $m = -12$ se cumple que $f'(0) = -12$.

$f'(0) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 0 + b = -12 \Rightarrow$

$$\underline{b = -12}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de b:

$12a + b = 0 \Rightarrow 12a - 12 = 0;\ \ a - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\underline{a = 1}.$$

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos de a y b:

$8a + 2b + c = 1 \Rightarrow 8 + 2 \cdot (-12) + c = 1;\ \ -24 + c = -7 \Rightarrow$

$$\underline{c = 17}.$$

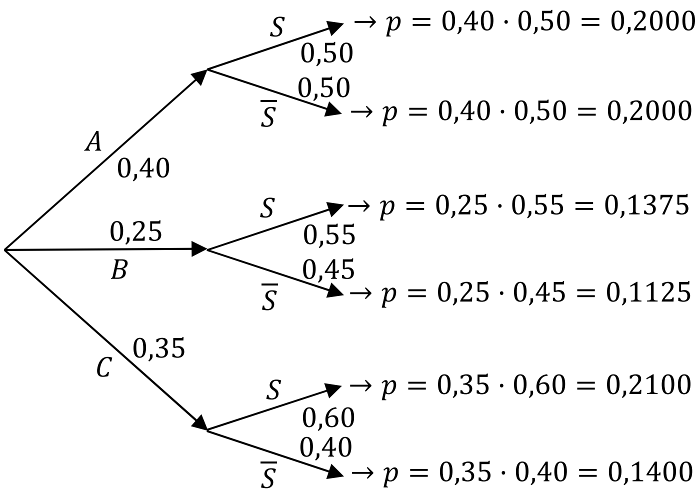
Sección 2. Bloque 1

3º) En un concurso se les proponen a los participantes tres pruebas (A, B y C) de las que han de elegir una. El 40 % de los participantes eligen la prueba A, superándola el 50 % de estos. El 25 % eligen la prueba B y en este caso la prueba no es superada por el 45 % de los participantes. La prueba C la superan el 60 % de los participantes que la eligen.

a) Elegido un participante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya superado la prueba?

b) Si se sabe que el participante no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la prueba A?

Solución



a) $P = P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) =$

$= P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B) + P(C) \cdot P(S/C) =$

$= 0{,}40 \cdot 0{,}50 + 0{,}25 \cdot 0{,}55 + 0{,}35 \cdot 0{,}60 = 0{,}2000 + 0{,}1375 + 0{,}2100 = \underline{0{,}5475}.$

b) $P = P\left(A/\overline{S}\right) = \frac{P(A \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{S}/A)}{1 - P(S)} = \frac{0{,}40 \cdot 0.50}{1 - 0{,}5475} = \frac{0{,}2000}{0{,}4525} = \underline{0{,}4420}.$

4º) El tiempo empleado para resolver un problema de Estadística sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 6{,}4$ minutos. Se ha tomado una muestra a 9 personas y los tiempos empleados en resolver el problema han sido los siguientes: $12,\ 11,\ 10,\ 9,\ 7,\ 12,\ 11,\ 8\ y\ 10$ minutos.

$a)$ Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo empleado en resolver el problema con un nivel de confianza del 97 %.

$b)$ Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 3 minutos.

Solución:

$a)$ Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1-\alpha = 0{,}97 \ \rightarrow\ \alpha = 1 - 0{,}97 = 0{,}03 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}015} = 2{,}17.$$

$$(1 - 0{,}015 = 0{,}9850 \ \rightarrow z = 2{,}17).$$

$$\overline{x} = \frac{2\cdot 12+2\cdot 11+2\cdot 10+9+7+8}{9} = \frac{24+22+20+24}{9} = \frac{90}{9} = 10.$$

Datos: $n = 9;\ \ \overline{x} = 10;\ \ \sigma = 6{,}4;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$$\left(10 - 2{,}17 \cdot \frac{6{,}4}{\sqrt{9}};\ 10 + 2{,}17 \cdot \frac{6{,}4}{\sqrt{9}}\right);\ \ (10 - 2{,}17 \cdot 2{,}1333;\ 10 + 2{,}17 \cdot 2{,}1333);$$

$(10 - 4{,}6293;\ 10 + 4{,}6293).$

$$\underline{I.C._{97\,\%} = (5{,}3707;\ 14{,}6293)}.$$

$b)$ Datos: $\sigma = 6{,}4;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17;\ \ E = 3.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\ \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2{,}17 \cdot \frac{6{,}4}{3}\right)^2 =$

$= (2{,}17 \cdot 2{,}1333)^2 = 4{,}6293^2 = 21{,}43.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 22\ personas}$$

Bloque 2

3º) Un concesionario de automóviles tiene en oferta tres modelos de coche: uno deportivo, otro familiar y el tercero es un monovolumen. El mes pasado se vendieron 10 deportivos, 6 familiares y 3 monovolúmenes y se obtuvieron 851.000 euros. El coche deportivo vale 2.000 euros más que el familiar. Por 5 deportivos vendidos se obtienen 13.000 euros más que si se venden 6 monovolúmenes.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio de cada uno de los tres modelos.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sean x, y, z el número de coches de los modelos deportivo, familiar y monovolumen que el concesionario tiene en oferta, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado, expresado en miles de euros, es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 10x + 6y + 3z = 851 \\ x - 2 = y \\ 5x - 13 = 6z \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 10x + 6y + 3z = 851 \\ x - y = 2 \\ 5x - 6z = 13 \end{array}\right\}.$$

b) Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 851 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 13 & 0 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix}} = \frac{5.106+39+72}{60+15+36} = \frac{5.217}{111} = 47.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 851 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 13 & -6 \end{vmatrix}}{111} = \frac{-120+39-30+5.106}{111} = \frac{5.145-150}{111} = \frac{4.995}{111} = 45.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 6 & 851 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 13 \end{vmatrix}}{111} = \frac{-130+60+4.255-78}{111} = \frac{4.315-208}{111} = \frac{4.107}{111} = 37.$$

Los precios de los tres modelos de coches son los siguientes:

$$\underline{Deportivo: 47.000\ euros, familiar: 45.000\ euros; monovolumen: 37.000\ euros}$$

4º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

$a)$ Resuelve la ecuación matricial $X + X \cdot \frac{1}{2}A = A \cdot B$.

$b)$ Calcula $-\frac{1}{2}A - 2 \cdot B^t + C$.

Solución:

$a)$ $X + X \cdot \frac{1}{2}A = A \cdot B;\ \ X \cdot I + X \cdot \frac{1}{2}A = A \cdot B;\ \ X \cdot \left(I + \frac{1}{2}A\right) = A \cdot B;$

$X \cdot \left(I + \frac{1}{2}A\right) \cdot \left(I + \frac{1}{2}A\right)^{-1} = A \cdot B \cdot \left(I + \frac{1}{2}A\right)^{-1};\ \ X \cdot I = A \cdot B \cdot \left(I + \frac{1}{2}A\right)^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{X = A \cdot B \cdot \left(I + \tfrac{1}{2}A\right)^{-1}}.$$

$I + \frac{1}{2}A = I + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$\left|I + \frac{1}{2}A\right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1.$ $\qquad \left(I + \frac{1}{2}A\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$Adj.de\left(I + \frac{1}{2}A\right)^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\left(I + \frac{1}{2}A\right)^{-1} = \frac{Adj.de\left(I+\frac{1}{2}A\right)^t}{\left|I+\frac{1}{2}A\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow \left(I + \frac{1}{2}A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$X = A \cdot B \cdot \left(I + \frac{1}{2}A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -30 & -26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 18 \\ -86 & 56 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{X = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -14 & 9 \\ -43 & 28 \end{pmatrix}}.$$

$b)$ $-\frac{1}{2}A - 2 \cdot B^t + C = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{-\tfrac{1}{2}A - 2 \cdot B^t + C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Sección 3. Bloque 1

5º) En un ejercicio de oposición, el opositor ha de presentar un tema de los cuatro que se seleccionan al azar de un programa de 40 temas. Si los cuatro temas seleccionados han de ser distintos y el opositor tiene bien preparados 22 temas:

a) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de aprobar el examen?

b) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de saberse exactamente uno de los cuatro temas?

Solución:

a) Si tiene preparados 22 de los 40 temas tiene sin preparar 18 de los temas.

La probabilidad de aprobar es que le salga la menos un tema que tenga preparado, que es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no sepa ninguno de los temas:

$$P = 1 - \frac{18}{40} \cdot \frac{17}{39} \cdot \frac{16}{38} \cdot \frac{15}{37} = 1 - \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 37} = 1 - \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 17}{13 \cdot 19 \cdot 37} = 1 - \frac{306}{9.139} =$$

$$= \frac{9.139 - 306}{9.139} = \frac{8.833}{9.139} \Rightarrow$$

$$\underline{P = 0{,}9665}.$$

b) La probabilidad pedida es equivalente a saber el primer tema y no saber los demás; saber el segundo tema y no saber los demás; saber el tercer tema y no saber los demás y saber el cuarto tema y no saber los demás. Estos sucesos son equivalentes, por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 4 \cdot \left(\frac{22}{40} \cdot \frac{18}{39} \cdot \frac{17}{38} \cdot \frac{16}{37}\right) = 4 \cdot \frac{2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 2^4}{5 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 37} = 4 \cdot \frac{2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17}{5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37} = \frac{8.976}{45.695} = \underline{0{,}1964}.$$

6º) Una marca de neumáticos ha tomado una muestra aleatoria de 100 ruedas y ha medido la presión de inflado, proporcionando una media de 2,3 bares. Si se sabe que la presión de inflado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 0{,}81$ bares².

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la presión de inflado con un nivel de confianza del 95 %.

b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza disminuimos el tamaño de la muestra.

c) La marca de neumáticos afirma que la media de presión de inflado es de 2 bares. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 90 %? Justificar la respuesta.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$$

$$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$$

Datos: $n = 100; \ \ \overline{x} = 2{,}3; \ \ \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma \ y \ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(2{,}3 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}9}{\sqrt{100}}; \ 2{,}3 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}9}{\sqrt{100}}\right); \ \ (2{,}3 - 1{,}96 \cdot 0{,}09; \ 2{,}3 + 1{,}96 \cdot 0{,}09)$$

$(2{,}3 - 0{,}1764; \ 2{,}3 + 0{,}1764).$

$$\underline{I.C._{90\,\%} = (2{,}1236; \ 2{,}4764).}$$

b) La amplitud del intervalo es inversamente proporcional al número de elementos de la muestra, por lo cual:

$$\underline{Si\ disminuye\ la\ muestra\ aumenta\ el\ valor\ del\ intervalo\ de\ confianza.}$$

c) Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}90 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$$

$$(1 - 0{,}05 = 0{,}9500 \ \rightarrow z = 1{,}645).$$

Datos: $n = 100; \ \ \overline{x} = 2{,}3; \ \ \sigma = 0{,}9; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645.$

$$(2{,}3 - 1{,}645 \cdot 0{,}09; \ 2{,}3 + 1{,}645 \cdot 0{,}09);$$

$(2{,}3 - 0{,}1485; \ 2{,}3 + 0{,}1485) \Rightarrow I.C._{90\,\%} = (2{,}1520; \ 2{,}4485).$

$$\underline{2 \notin I.C._{90\,\%} \Rightarrow No\ se\ puede\ aceptar\ la\ afirmación\ del\ fabricane.}$$

Bloque 2

5º) Se considera la función $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2+t & si\ \ x<-1\\ 3 & si\ \ -1\leq x\leq 2\\ x^2-6x+9+t & si\ \ x>2\end{cases}$:

$a)$ ¿Existe un valor de t para que la función $f(x)$ es continua para $x=-1$ y $x=2$?

$b)$ Representa la función $f(x)$ para $t=0$.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=-1\ y\ x=2$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar, si existen, los valores reales de t para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=-1 \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}[(x+2)^2+t]=1+t\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1} 3=3=f(-1)\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1) \Rightarrow 1+t=3 \Rightarrow t=2.$$

$$Para\ x=2 \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} 3=3=f(2)\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-6x+9+t)=1+t\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \Rightarrow 3=1+t \Rightarrow t=2.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R\ para\ t=2}$**.**

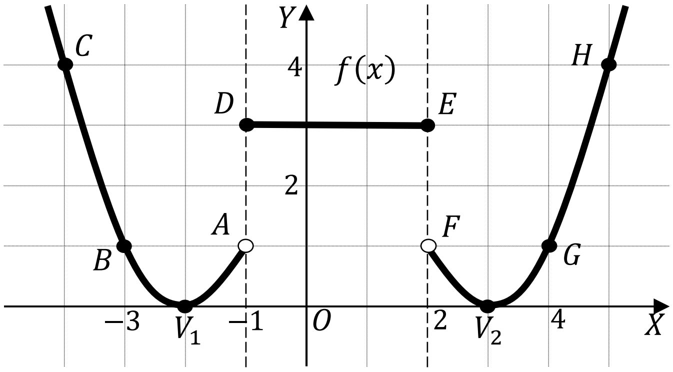
$b)$ Para $t=0$ la función es $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si\ \ x<-1\\ 3\ \ si & -1\leq x\leq 2\\ x^2-6x+9 & si\ \ x>2\end{cases}$; teniendo en cuenta que $x^2-6x+9=(x-3)^2$, puede expresarse: $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si\ \ x<-1\\ 3 & si\ \ -1\leq x\leq 2\\ (x-3)^2 & si\ \ x>2\end{cases}$.

En el intervalo $(-\infty,-1)$ la función es la parábola $f(x)=(x+2)^2$, que es convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2 y cuyo vértice es el punto $V_1(-2,0)$. Otros puntos de la parábola son $A(-1,1)$, aunque no pertenece a la función, $B(-3,1)$ y $C(-4,4)$.

En el intervalo $[-1,2]$ la función es la recta constante $f(x)=3$, cuyos puntos extremos son $D(-1,3)$ y $E(2,4)$.

En el intervalo $(2,+\infty)$ la función es la parábola $f(x)=(x-3)^2$, que es convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2 y cuyo vértice es el punto $V_3(3,0)$. Otros puntos de la parábola son $F(2,1)$, aunque no pertenece a la función, $G(4,1)$ y $H(5,4)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la figura adjunta.



6º) El tiempo de publicidad (en minutos) en una emisión de radio a lo largo de la semana viene dado por la función $S(x) = x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + 36$, con x expresado en días y $1 \leq x \leq 7$.

a) ¿Cuántos minutos de publicidad emite el tercer día?

b) ¿Durante qué día se emite más publicidad y cuánto tiempo?

c) ¿Qué día emitieron menos publicidad? ¿Cuántos minutos?

Solución:

a) $S(3) = 3^3 - \frac{21}{2} \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 + 36 = \frac{3}{2} \cdot (18 - 63 + 60 + 24) = \frac{3}{2} \cdot 39 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{S(3) = \frac{117}{2} minutos = 58{,}5\ minutos}.$$

b, c) Los valores de la función en los extremos de su dominio son los siguientes:

$S(1) = 1^3 - \frac{21}{2} \cdot 1^2 + 30 \cdot 1 + 36 = 1 - \frac{21}{2} + 30 + 36 = 67 - \frac{21}{2} = 56{,}5.$

$S(7) = 7^3 - \frac{21}{2} \cdot 7^2 + 30 \cdot 7 + 36 = 343 - \frac{1.029}{2} + 210 + 36 =$

$= 589 - 514{,}5 \Rightarrow S(7) = 74{,}5.$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$S'(t) = 3x^2 - 21x + 30.$

$S'(t) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 21x + 30;\ \ x^2 - 7x + 10 = 0;\ \ x = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$S''(x) = 6x - 21.$

$S''(2) = 6 \cdot 2 - 21 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 2.$

$S(2) = 2^3 - \frac{21}{2} \cdot 2^2 + 30 \cdot 2 + 36 = 8 - 42 + 60 + 36 = 104 - 42 = 62.$

Nótese que este máximo no es el absoluto, por ser menor que $S(7)$.

$$\underline{El\ séptimo\ día\ es\ cuando\ más\ publicidad\ se\ hace}.$$

$$\underline{El\ dia\ que\ más\ publicidad\ se\ hizo\ fueron\ 74{,}5\ minutos}.$$

$S''(5) = 6 \cdot 5 - 21 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 5.$

$$\underline{El\ quinto\ día\ es\ cuando\ menos\ publicidad\ se\ hace}.$$

$C(5) = 5^3 - \frac{21}{2} \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 + 36 = 125 - \frac{525}{2} + 150 + 36 =$
$= 311 - 262{,}5 = 48{,}5.$

$$\underline{El\ dia\ que\ menos\ publicidad\ se\ hizo\ fueron\ 48{,}5\ minutos}.$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

CASTILLA Y LEÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Cada estudiante deberá escoger tres problemas y una cuestión y desarrollarlos completos. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados. Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

TIEMPO: 90 minutos.

Problemas.

1º) Una parcela produce tres cereales diferentes: maíz, trigo y centeno. En la parcela trabajan tres agricultores durante exactamente 8 horas diarias cada uno, y se utiliza el sistema de riego durante exactamente 60 minutos diarios. Para cuidar el maíz se emplean 2 horas de mano de obra y se necesitan 6 minutos de riego; para cuidar el trigo se emplean 4 horas de mano de obra y 4 minutos de riego; y para el centeno se emplea 1 hora de mano de obra y 4 minutos de riego. Si se deben producir exactamente 12 kilogramos en total de cereal por día por limitaciones en la producción, calcular los kilogramos de cada tipo de cereal que se producen cada día en la parcela.

2º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, C = (4 \quad -1)\ y\ D = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Sea A^t la matriz traspuesta de A, indicar razonadamente cuáles de los productos de matrices $A \cdot B; B \cdot A^t; C \cdot D\ y\ D \cdot A$ se pueden realizar. Determinar las dimensiones de las matrices resultantes en aquellos casos en los que sea posible realizar dichos productos.

$b)$ Hallar la matriz X que es solución de la ecuación $X \cdot B = D$.

3º) Un estudio realizado por el Centro Nacional de Ciberseguridad español ha revelado que el número de dispositivos móviles hackeados en España viene determinado, en millones de aparatos, por la función $f(t) = \frac{t^2+15}{(t+1)^2}$, donde t indica el tiempo medido en años, siendo $t = 0$ el tiempo que corresponde al año 2.005.

$a)$ ¿Cuál es el número inicial de dispositivos hackeados?

$b)$ Calcular el número mínimo de dispositivos hackeados. ¿En qué año se alcanza ese mínimo?

$c)$ Calcular el número de dispositivos que habrá hackeados en España a largo plazo.

4º) Sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, si $0 \le x \le 60$ pasa por el punto $P(0, 20)$ y que alcanza un máximo de 36 en el punto de abscisa $x = 40$, se pide:

$a)$ Determinar $a, b\ y\ c$. Justificar la respuesta.

$b)$ Calcular el área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 60$.

5º) Un estudio realizado sobre los estudiantes de las universidades de Castilla y León determina que el 40 % de los estudiantes procede de la misma provincia en la que está situada la universidad, el 20 % procede de otras provincias de Castilla y León y el resto procede de otras comunidades autonómicas. Además, cursan el grado elegido en primera opción el 50 % de los estudiantes que proceden de la misma provincia que la universidad, el 25 % de los procedentes de otras provincias de Castilla y León y el 65 % de los procedentes de otras comunidades autonómicas. Se elige al azar un estudiante de las universidades de Castilla y León:

a) Calcular la probabilidad de que esté cursando el grado elegido en primera opción.

b) Si se ha elegido un estudiante que no está cursando el grado elegido en primera opción, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de otra comunidad autónoma diferente de Castilla y León?

6º) El peso de los huevos de una granja sigue una distribución normal de media 67 gramos y desviación típica 15 gramos. En función del peso, los huevos se clasifican en 4 tamaños.

a) Teniendo en cuenta que se consideran de tamaño XL los huevos que pesan más de 73 gramos, ¿cuál es la probabilidad de encontrar huevos de tamaño XL?

b) Se elige al azar una muestra de 6 huevos, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra se encuentre entre 53 y 63 gramos (tamaño M).

Cuestiones.

1ª) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar a y b para que la matriz A conmute con B.

2ª) Justificar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: la función $f(x) = -x^3$ tiene un máximo relativo en el punto $x = 0$.

3ª) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral con $P(B) = \frac{3}{5}$; $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{3}{4}$. Calcular $P(A \cap B)$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problemas.

1º) Una parcela produce tres cereales diferentes: maíz, trigo y centeno. En la parcela trabajan tres agricultores durante exactamente 8 horas diarias cada uno, y se utiliza el sistema de riego durante exactamente 60 minutos diarios. Para cuidar el maíz se emplean 2 horas de mano de obra y se necesitan 6 minutos de riego; para cuidar el trigo se emplean 4 horas de mano de obra y 4 minutos de riego; y para el centeno se emplea 1 hora de mano de obra y 4 minutos de riego. Si se deben producir exactamente 12 kilogramos en total de cereal por día por limitaciones en la producción, calcular los kilogramos de cada tipo de cereal que se producen cada día en la parcela.

SOLUCIÓN

Sean x, y, z el número de kilogramos de maíz, trigo y centeno que se producen diariamente en la parcela, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ 6x+4y+4z=60 \\ 2x+4y+z=24 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ 3x+2y+2z=30 \\ 2x+4y+z=24 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 3 & 2 & 2 & 30 \\ 2 & 4 & 1 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to -\tfrac{1}{3}F_3\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 4;\ \ y + 4 = 6;\ \ y = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2 + 4 = 12;\ \ x + 6 = 12;\ \ x = 6.$$

Se producen diariamente 6 kg de maíz, 2 de trigo y 4 de centeno.

2º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, C = (4 \quad -1) \; y \; D = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Sea A^t la matriz traspuesta de A, indicar razonadamente cuáles de los productos de matrices $A \cdot B; B \cdot A^t; C \cdot D \; y \; D \cdot A$ se pueden realizar. Determinar las dimensiones de las matrices resultantes en aquellos casos en los que sea posible realizar dichos productos.

$b)$ Hallar la matriz X que es solución de la ecuación $X \cdot B = D$.

SOLUCIÓN

$a) \; A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 6 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}}.$

$B \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -7 & 6 & 11 \end{pmatrix}}.$

$C \cdot D = (4 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{C \cdot D = (-10 \quad 22)}.$

$D \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{No \; es \; posible}.$

Para que puede hacerse un producto de matrices es necesario que el número de columnas del multiplicando sea igual al número de filas del multiplicador.

$b) \; X \cdot B = D; \;\; X \cdot B \cdot B^{-1} = D \cdot B^{-1}; \;\; X \cdot I = D \cdot B^{-1} \Rightarrow \underline{X = D \cdot B^{-1}}. \quad (*)$

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7; \;\; B^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \;\; Adj. de \; B^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

$B^{-1} = \frac{Adj. de \; B^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{7} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Sustituyendo en (*):

$X = D \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 14 & -14 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}}.$$

3º) Un estudio realizado por el Centro Nacional de Ciberseguridad español ha revelado que el número de dispositivos móviles hackeados en España viene determinado, en millones de aparatos, por la función $f(t)=\frac{t^2+15}{(t+1)^2}$, donde t indica el tiempo medido en años, siendo $t=0$ el tiempo que corresponde al año 2.005.

a) ¿Cuál es el número inicial de dispositivos hackeados?

b) Calcular el número mínimo de dispositivos hackeados. ¿En qué año se alcanza ese mínimo?

c) Calcular el número de dispositivos que habrá hackeados en España a largo plazo.

SOLUCIÓN

a) $f(0)=\frac{0^2+15}{(0+1)^2}=\frac{15}{1}=15.$

$\underline{En\ el\ año\ 2.005\ había\ en\ España\ 15\ millones\ de\ dispositivos\ hackeados.}$

b) $f'(t)=\frac{2t\cdot(t+1)^2-(t^2+15)\cdot[2\cdot(t+1)\cdot 1]}{(t+1)^4}=\frac{2t\cdot(t+1)-2\cdot(t^2+15)}{(t+1)^3}=\frac{2t^2+2t-2t^2-30}{(t+1)^3}=$

$=\frac{2t-30}{(t+1)^3}\Rightarrow f'(t)=\frac{2\cdot(t-15)}{(t+1)^3}.$

$f'(t)=0\Rightarrow\frac{2\cdot(t-15)}{(t+1)^3}=0;\ \ 2\cdot(t-15)=0;\ \ t-15=0\Rightarrow t=15.$

$f''(t)=\frac{2\cdot(t+1)^3-2\cdot(t-15)\cdot[3\cdot(t+1)^2\cdot 1]}{(t+1)^6}=\frac{2\cdot(t+1)-6\cdot(t-15)}{(t+1)^4}=\frac{2t+2-6t+90}{(t+1)^4}\Rightarrow$

$\Rightarrow f''(t)=\frac{-4t+92}{(t+1)^4}.$

$f''(15)=\frac{-4\cdot 15+92}{(15+1)^4}=\frac{-60+92}{16^4}=\frac{32}{16^4}>0\Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ t=15.$

$2.005+15=2.020.$

$f(15)=\frac{15^2+15}{(15+1)^2}=\frac{225+15}{16^2}=\frac{240}{256}=0{,}9375.$ $\qquad 0{,}9375\cdot 10^6=937.500.$

$\underline{El\ número\ mínimo\ de\ dispositivos\ hackeados\ en\ España\ fue\ de\ 937.500.}$

$\underline{El\ número\ mínimo\ de\ dispositivos\ hackeados\ se\ produjo\ el\ año\ 2.020.}$

c) $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+15}{(t+1)^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+15}{t^2+2t+1}=1.$

$\underline{A\ largo\ plazo\ se\ espera\ en\ España\ un\ millón\ de\ dispositivos\ hackeados.}$

4º) Sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, si $0 \leq x \leq 60$ pasa por el punto $P(0, 20)$ y que alcanza un máximo de 36 en el punto de abscisa $x = 40$, se pide:

$a)$ Determinar a, b y c. Justificar la respuesta.

$b)$ Calcular el área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 60$.

SOLUCIÓN

$a)$ $f(0) = 20 \Rightarrow f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 20 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{c = 20}}.$$

Para $x = 40$ es $f(40) = 36$:

$f(40) = a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + 20 = 36;\ \ 1.600a + 40b + 20 = 36;$

$1.600a + 40b = 16;\ \ 200a + 5b = 2.$ (1)

$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(40) = 0 \Rightarrow 2a \cdot 40 + b = 0;\ \ 80a + b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 200a + 5b = 2 \\ 80a + b = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -200a - 5b = -2 \\ 400a + 5b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 200a = -2 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a = -0,01}}.$$

$80 \cdot (-0{,}01) + b = 0;\ -0{,}8 + b = 0 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{b = 0,8}}.$$

$b)$ La función resulta: $f(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}8 \cdot x + 20$, que es una parábola cóncava $(\cap)$ por ser negativo el coeficiente de x^2 y sus puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:

$f(x) = 0 \Rightarrow -0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}8 \cdot x + 20 = 0;\ -x^2 + 80x + 2.000 = 0;$

$x^2 - 80x - 2.000 = 0;\ \ x = \frac{80 \pm \sqrt{6.400 + 8.000}}{2} = \frac{80 \pm \sqrt{14.400}}{2} = \frac{80 \pm 10 \cdot \sqrt{144}}{2} =$

$= \frac{80 \pm 10 \cdot 12}{2} = 40 \pm 60 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -20 \rightarrow \notin D(f) \\ x_2 = 100 \end{cases}.$

De lo anterior se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$S = \int_0^{60} f(x) \cdot dx = \int_0^{60} (-0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}8 \cdot x + 20) \cdot dx =$

$= \left[-0{,}01 \cdot \frac{x^3}{3} + 0{,}8 \cdot \frac{x^2}{2} + 20x\right]_0^{60} = \left(-0{,}01 \cdot \frac{60^3}{3} + 0{,}8 \cdot \frac{60^2}{2} + 20x\right) - 0 =$

$= -0{,}01 \cdot 72.000 + 0{,}8 \cdot 1.800 + 20 \cdot 60 = -720 + 1.440 + 1.200 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{S = 1.920\ u^2}}.$$

5º) Un estudio realizado sobre los estudiantes de las universidades de Castilla y León determina que el 40 % de los estudiantes procede de la misma provincia en la que está situada la universidad, el 20 % procede de otras provincias de Castilla y León y el resto procede de otras comunidades autonómicas. Además, cursan el grado elegido en primera opción el 50 % de los estudiantes que proceden de la misma provincia que la universidad, el 25 % de los procedentes de otras provincias de Castilla y León y el 65 % de los procedentes de otras comunidades autonómicas. Se elige al azar un estudiante de las universidades de Castilla y León:

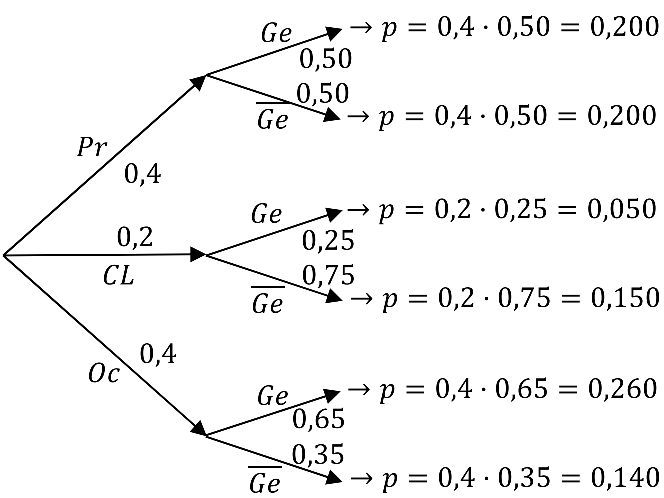
a) Calcular la probabilidad de que esté cursando el grado elegido en primera opción.

b) Si se ha elegido un estudiante que no está cursando el grado elegido en primera opción, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de otra comunidad autónoma diferente de Castilla y León?

SOLUCIÓN

Para facilitar la construcción del diagrama del árbol llamaremos:

$Pr \to Misma\ provincia;\ \ CL \to Castila\ y\ León;\ \ Oc \to Otras\ comunidades.$



a) $\quad P = P(Ge) = P(Pr \cap Ge) + P(CL \cap Ge) + P(Oc \cap Ge) =$

$= P(Pr) \cdot P(Ge/Pr) + P(CL) \cdot P(Ge/CL) + P(Oc) \cdot P(Ge/Oc) =$

$= 0{,}4 \cdot 0{,}50 + 0{,}2 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}65 = 0{,}200 + 0{,}050 + 0{,}260 = \underline{0{,}510}.$

b) $\quad P = P\left(Oc/\overline{Ge}\right) = \frac{P(Oc \cap \overline{Ge})}{P(\overline{Ge})} = \frac{P(Oc) \cdot P(\overline{Ge}/Oc)}{1 - P(Ge)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}35}{1 - 0{,}510} = \frac{0{,}140}{0{,}490} = \underline{0{,}2857}.$

6º) El peso de los huevos de una granja sigue una distribución normal de media 67 gramos y desviación típica 15 gramos. En función del peso, los huevos se clasifican en 4 tamaños.

a) Teniendo en cuenta que se consideran de tamaño XL los huevos que pesan más de 73 gramos, ¿cuál es la probabilidad de encontrar huevos de tamaño XL?

b) Se elige al azar una muestra de 6 huevos, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra se encuentre entre 53 y 63 gramos (tamaño M).

SOLUCIÓN

$a)\ Datos\colon\ \mu = 67;\ \ \sigma = 15.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(67, 15).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-67}{15}.$

$P = P(X > 73) = P\left(Z > \frac{73-67}{15}\right) = P\left(Z > \frac{6}{15}\right) = P(Z > 0{,}4) =$

$= 1 - P(Z < 0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = \underline{0{,}3446}.$

$b)\ Datos\colon\ \mu = 67;\ \ \sigma = 15;\ \ n = 6.$

$X \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(67;\ \frac{15}{\sqrt{6}}\right) = N(67;\ 6{,}12).$ $Z = \frac{X-67}{6{,}12}.$

$P = P(53 \leq X \leq 63) = P\left(\frac{53-67}{6{,}12} \leq Z \leq \frac{63-67}{6{,}12}\right) =$

$= P\left(\frac{-14}{6{,}12} \leq Z \leq \frac{-4}{6{,}12}\right) = P(-2{,}29 \leq Z \leq -0{,}65) = P(0{,}65 \leq Z \leq 2{,}29) =$

$= P(Z \leq 2{,}29) - P(Z \leq 0{,}65) = 0{,}9890 - 0{,}7422 = \underline{0{,}2468}.$

Cuestiones.

1ª) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar a y b para que la matriz A conmute con B.

SOLUCIÓN

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a = 2, b = 1.}}$$

2ª) Justificar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: la función $f(x) = -x^3$ tiene un máximo relativo en el punto $x = 0$.

SOLUCIÓN

Para que una función tenga un máximo relativo es necesario que se anule su primera derivada y sea menor que cero el valor de la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(x) = -3x^2;\ \ f''(x) = -6x.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 = 0;\ \ x = 0.$

$f''(0) = -6 \cdot 0 = 0 \Rightarrow No\ hay\ máximo\ para\ x = 0.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ afirmación\ es\ falsa.}}$$

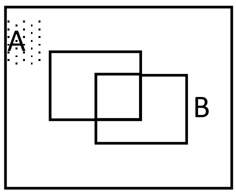
Para $x = 0$ la función $f(x) = -x^3$ **tiene un punto de inflexión** por anularse su segunda derivada para $x = 0$ y ser $f'''(x) = -6 \neq 0$.

3ª) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral con $P(B) = \frac{3}{5}$; $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{3}{4}$. Calcular $P(A \cap B)$.

SOLUCIÓN

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(A \cap B) = \frac{1}{4}.}}$$



$\overline{A} \cup \overline{B}$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Cada estudiante deberá escoger tres problemas y una cuestión y desarrollarlos completos. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados. Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problemas.

1º) Una empresa de diseño ha comprado dos impresoras 3D para imprimir figuras y fichas para juegos de mesa. La primera impresora puede trabajar hasta 300 horas y necesita 6 horas para imprimir cada figura y 5 horas para cada ficha. La segunda impresora puede trabajar hasta 200 horas y necesita 2 horas para hacer cada figura y 5 horas para cada ficha. El beneficio neto que obtiene la empresa por imprimir cada figura es de un euro mientras que el beneficio neto que obtiene por imprimir cada ficha es de 1,5 euros. Si el número máximo de figuras ha de ser 25, calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas figuras y fichas ha de imprimir para obtener el máximo beneficio neto. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

2º) Se considera el sistema $\begin{cases} 3x+2y+az=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$, dependiente del parámetro real a.

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a=0$.

3º) El consumo (medido en litros/hora) de combustible, en una explotación industrial durante un turno de 8 horas, se puede expresar por la siguiente función:

$f(t)=\begin{cases} -t^2+6t+3 & si \;\; 0\le t\le 2 \\ -t+a & si \;\; 2<t\le 8 \end{cases}$, donde t representa el tiempo desde el inicio del turno, medido en horas.

a) Establecer el valor de a para que el consumo sea continuo a lo largo de todo el turno. A partir de la segunda hora, ¿cuándo cambia el consumo por cada hora que pasa?

b) ¿En qué momento se alcanza el máximo consumo? ¿Cuánto se está consumiendo en ese momento? ¿En qué periodo de tiempo el consumo supera los 8 litros/hora?

4º) El número de usuarios de una estación de metro a lo largo de un domingo evoluciona según la función $N(x)=-2x^3+75x^2-600x+2.000$ con $0\le x\le 24$, donde x indica la hora del día.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de usuarios de la estación a lo largo del domingo.

b) ¿A qué hora el número de usuarios es máximo y a qué hora es mínimo? Calcular el número de usuarios correspondiente a dichas horas.

5º) Una compañía ofrece seguros de cancelación de viajes a destinos exóticos: el 30 % de sus agentes se contratan para viajar al país A, el 50 % para viajar al país B y el resto para viajar al país C. Según estudios previos, se cancela el viaje en el 1 % de los seguros contratados para el país A, el 1,5 % de los contratados para B y el 3,5 % de los contratados para C. Elegido un seguro al azar:

a) Calcular la probabilidad de que sea un viaje que se cancela.

b) Si es un seguro de un viaje cancelado, calcular la probabilidad de que haya sido contratado para viajar al país C.

6º) La distancia recorrida para ir a clase por los estudiantes de cierta universidad se distribuye según un modelo normal de media μ kilómetros y varianza 2,25. Se toma una muestra de 100 estudiantes, obteniéndose una distancia media de 4 kilómetros para esa muestra. Tomando esta información, se pide:

a) Hallar el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 96 %.

b) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que, al nivel de confianza del 95 %, el error máximo de estimación de la distancia media μ sea de 0,1 kilómetros?

Cuestiones.

1ª) Dadas tres matrices A, B y C se sabe que $A \cdot B \cdot C$ es una matriz de dimensiones 2×3 y que $B \cdot C$ es de dimensiones 4×3, determinar las dimensiones que debe tener la matriz A.

2ª) Dada la función $f(x) = \frac{ax^2+1}{5x}$. Dar un valor de a para que en $x = 1$ haya un extremo relativo de $f(x)$.

3ª) La ficha técnica de una encuesta electoral realizada para las pasadas elecciones autonómicas indica que se ha encuestado a 1.000 individuos con derecho a voto residentes en Castilla y León. La muestra se ha tomado mediante muestreo aleatoria simple. El error de estimación de la proporción de individuos de la población que vota al partido K es de $\pm 3{,}2$ % fijada una confianza del 95,5 %.

Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problemas.

1º) Una empresa de diseño ha comprado dos impresoras 3D para imprimir figuras y fichas para juegos de mesa. La primera impresora puede trabajar hasta 300 horas y necesita 6 horas para imprimir cada figura y 5 horas para cada ficha. La segunda impresora puede trabajar hasta 200 horas y necesita 2 horas para hacer cada figura y 5 horas para cada ficha. El beneficio neto que obtiene la empresa por imprimir cada figura es de un euro mientras que el beneficio neto que obtiene por imprimir cada ficha es de 1,5 euros. Si el número máximo de figuras ha de ser 25, calcula, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas figuras y fichas ha de imprimir para obtener el máximo beneficio neto. ¿Cuál es ese beneficio neto máximo?

SOLUCIÓN

Sean x e y el número de figuras y fichas que se imprimen en la empresa de diseño, respectivamente.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = x + 1{,}5y$.

Las restricciones que se plantean en el ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} 6x+5y \leq 300 \\ 2x+5y \leq 200 \\ x \leq 25;\ \ y \geq 0 \end{array}\right\}$.

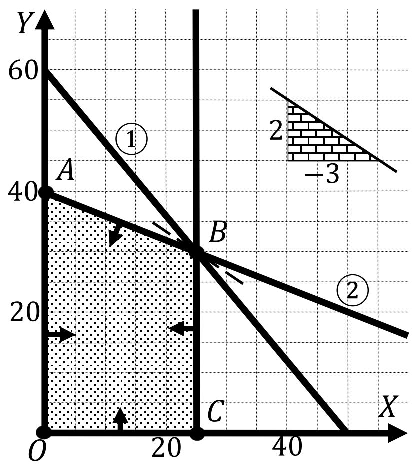
$① \Rightarrow 6x+5y \leq 300 \Rightarrow y \leq \frac{300-6x}{5} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	50
y	60	0

$② \Rightarrow 2x+5y \leq 200 \Rightarrow y \leq \frac{200-2x}{5} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	50
y	40	20

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+5y=200 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 40 \Rightarrow A(0,40).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=25 \\ 6x+5y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow 150+5y=300;$

$5y = 300-150;\ \ 5y=150;\ \ y=30 \Rightarrow B(25,30).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=25 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(25,0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,40) = 1\cdot 0 + 1{,}5\cdot 40 = 0+60 = 60.$

$B \Rightarrow f(25,30) = 1\cdot 25 + 1{,}5\cdot 30 = 25+45 = 70.$

$C \Rightarrow f(25,0) = 1\cdot 25 + 1{,}5\cdot 0 = 25+0 = 25.$

El valor máximo se produce en el punto $B(25, 30)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = x + 1{,}5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{1{,}5}x = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$.

$\underline{\boldsymbol{El\ máximo\ beneficio\ se\ obtiene\ imprimiento\ 25\ figuras\ y\ 30\ fichas.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 70\ euros.}}$

2º) Se considera el sistema $\begin{cases} 3x+2y+az=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$, dependiente del parámetro real a.

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a=0$.

SOLUCIÓN

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-9+5a+6-3a-9+10=0;\ \ 2a-2=0 \Rightarrow a=1.$$

$a^2-1=0 \Rightarrow a_1=-1, a_2=1.$

$$\boldsymbol{Para\ a \neq 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=9+5+4-3-6-10=-1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

b) Para $a=1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-3+6-3+4}{-2}=\frac{4}{-2}=-2.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{-6+3-9+5}{-2}=\frac{-7}{-2}=\frac{7}{2}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{9+5+4-3-6-10}{-2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}.$$

$$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x=-2,\ \ y=\frac{7}{2},\ \ z=\frac{1}{2}.}$$

3º) El consumo (medido en litros/hora) de combustible, en una explotación industrial durante un turno de 8 horas, se puede expresar por la siguiente función:

$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 6t + 3 & si \;\; 0 \le t \le 2 \\ -t + a & si \;\; 2 < t \le 8 \end{cases}$, donde t representa el tiempo desde el inicio del turno, medido en horas.

a) Establecer el valor de a para que el consumo sea continuo a lo largo de todo el turno. A partir de la segunda hora, ¿cuándo cambia el consumo por cada hora que pasa?

b) ¿En qué momento se alcanza el máximo consumo? ¿Cuánto se está consumiendo en ese momento? ¿En qué periodo de tiempo el consumo supera los 8 litros/hora?

SOLUCIÓN

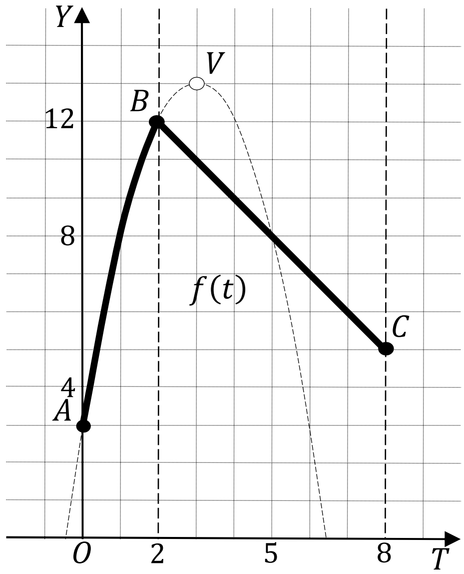
a) La función $f(t)$ es continua en R, excepto para $t = 2$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de t para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ t = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{t \to 2} (-t^2 + 6t + 3) = 11 = f(2) \\ \lim\limits_{t \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{t \to 2} (-t + a) = -2 + a \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{t \to 2^-} f(t) = \lim\limits_{t \to 2^+} f(t) = f(2) \Rightarrow 11 =$

$= -2 + a \Rightarrow \underline{a = 13}$.



La función $f(t)$ en el intervalo $[0, 2]$ es $f(t) = -t^2 + 6t + 3$ es una parábola cóncava (∩), por ser negativo el coeficiente de t^2, por lo cual, presenta su valor mínimo relativo en el siguiente valor de t:

$f'(t) = -2t + 6 = 0;\ -t + 3 = 0 \Rightarrow$

$t = 3 \notin [0, 2]. f(3) = 13 \Rightarrow V(3, 13)$.

El punto de corte con el eje de ordenadas es $A(0, 3)$.

Se hace un esquema, aproximado, de la función para una mejor comprensión.

La función es creciente en $(0, 2)$ y después, pasa a ser decreciente por ser una función lineal de pendiente negativa, por consiguiente:

$\underline{\boldsymbol{El\ consumo\ cambia\ de\ decreciente\ a\ creciente\ a\ partir\ de\ las\ 2\ horas.}}$

b) De todo lo anterior y, en especial, de la observación de la figura se deduce que:

$\underline{\boldsymbol{El\ consumo\ máximo\ se\ produce\ a\ las\ 2\ horas.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ momento\ de\ máximo\ consumo\ es\ de\ 12\ litros/hora.}}$

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 6t + 3 & si \ \ 0 \leq t \leq 2 \\ -t + 13 & si \ \ 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

$f(t) > 8 \Rightarrow -t^2 + 6t + 3 > 8; \ \ -t^2 + 6t - 5 > 0; \ \ t^2 - 6t + 5 = 0;$

$t = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = 3 \pm 2 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 5 \notin [0, 2].$

$f(t) > 8 \Rightarrow -t + 13 > 8; \ -t > -5; \ \ t < 5.$

El consumo supera los 12 litros por hora en el intervalo $(1, 5)$.

4º) El número de usuarios de una estación de metro a lo largo de un domingo evoluciona según la función $N(x) = -2x^3 + 75x^2 - 600x + 2.000$ con $0 \leq x \leq 24$, donde x indica la hora del día.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de usuarios de la estación a lo largo del domingo.

b) ¿A qué hora el número de usuarios es máximo y a qué hora es mínimo? Calcular el número de usuarios correspondiente a dichas horas.

SOLUCIÓN

a) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$N'(x) = -6x^2 + 150x - 600.$$

$$N'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 150x - 600;\ \ x^2 - 25x + 100 = 0;\ \ x = \frac{25 \pm \sqrt{625-400}}{2} =$$

$$= \frac{25 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{25 \pm 15}{2} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 20.$$

Por ser $P(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función en los intervalos $(0, 5), (5, 20)\ y\ (20, 24)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 5)$ es:

$$N'(1) = -6 + 150 - 600 < 0 \Rightarrow Decreciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$N'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (0, 5) \cup (20, 24)}.$$

$$N'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (5, 20)}.$$

b) Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$N''(x) = -12x + 150.$$

$$N''(5) = -12 \cdot 5 + 150 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 5.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ consumo\ mínimo\ se\ produce\ a\ las\ 5\ horas}}.$$

$$N(5) = -2 \cdot 5^3 + 75 \cdot 5^2 - 600 \cdot 5 + 2.000 =$$

$$= -250 + 1.875 - 3.000 + 2.000 = 3.875 - 3.250 = 625.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ número\ mínimo\ de\ usuarios\ fue\ de\ 625}}.$$

$$N''(20) = -12 \cdot 20 + 150 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 20.$$

$$N(20) = -2 \cdot 20^3 + 75 \cdot 20^2 - 600 \cdot 20 + 2.000 =$$

$$= -16.000 + 30.000 - 12.000 + 2.000 = 32.000 - 28.000 = 4.000.$$

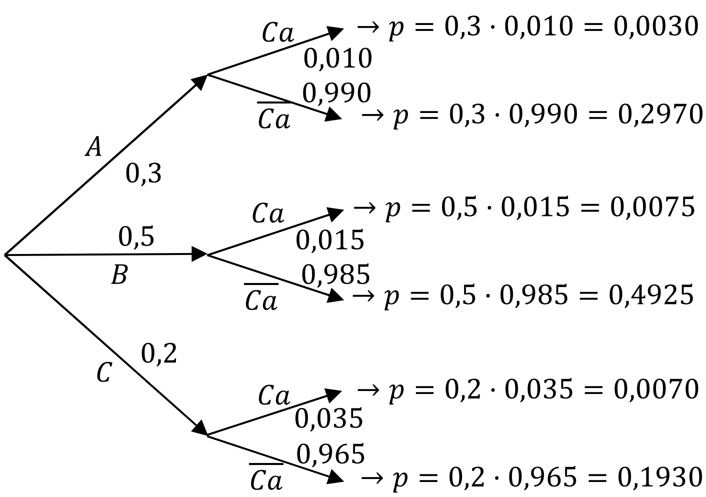
$$\underline{\boldsymbol{El\ máximo\ número\ de\ usuarios\ fue\ de\ 4.000}}.$$

5º) Una compañía ofrece seguros de cancelación de viajes a destinos exóticos: el 30 % de sus agentes se contratan para viajar al país A, el 50 % para viajar al país B y el resto para viajar al país C. Según estudios previos, se cancela el viaje en el 1 % de los seguros contratados para el país A, el 1,5 % de los contratados para B y el 3,5 % de los contratados para C. Elegido un seguro al azar:

a) Calcular la probabilidad de que sea un viaje que se cancela.

b) Si es un seguro de un viaje cancelado, calcular la probabilidad de que haya sido contratado para viajar al país C.

SOLUCIÓN



$a)\ P = P(Ca) = P(A \cap Ca) + P(B \cap Ca) + P(C \cap Ca) =$

$= P(A) \cdot P(Ca/A) + P(B) \cdot P(Ca/B) + P(C) \cdot P(Ca/C) =$

$= 0{,}3 \cdot 0{,}010 + 0{,}5 \cdot 0{,}015 + 0{,}2 \cdot 0{,}035 = 0{,}0030 + 0{,}0075 + 0{,}0070 = \underline{0{,}0175}.$

$b) \qquad P = P(C/Ca) = \frac{P(C \cap Ca)}{P(Ca)} = \frac{P(C) \cdot P(Ca/C)}{P(Ca)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}035}{0{,}0175} = \frac{0{,}0070}{0{,}0175} = \underline{0{,}4}.$

6º) La distancia recorrida para ir a clase por los estudiantes de cierta universidad se distribuye según un modelo normal de media μ kilómetros y varianza 2,25. Se toma una muestra de 100 estudiantes, obteniéndose una distancia media de 4 kilómetros para esa muestra. Tomando esta información, se pide:

a) Hallar el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 96 %.

b) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que, al nivel de confianza del 95 %, el error máximo de estimación de la distancia media μ sea de 0,1 kilómetros?

SOLUCIÓN

a) Para un nivel de confianza del 96 % es:

$1-\alpha=0{,}96 \rightarrow \alpha=1-0{,}96=0{,}04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}02}=2{,}055.$

$(1-0{,}020=0{,}9800 \rightarrow z=2{,}055).$

Datos: $n=100;\ \overline{x}=4;\ \sigma=\sqrt{2{,}25}=1{,}5;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(4-2{,}055\cdot\frac{1{,}5}{\sqrt{100}};\ 4+2{,}055\cdot\frac{1{,}5}{\sqrt{100}}\right);\quad (4-2{,}055\cdot 0{,}15;\ 4+2{,}055\cdot 0{,}15);$

$(4-0{,}3083;\ 4+0{,}3083).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{96\,\%}=(3{,}6918;\ 4{,}3083).}}$$

b) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$

$(1-0{,}025=0{,}9750 \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $\sigma=1{,}5;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96;\ E=0{,}1.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}96\cdot\frac{1{,}5}{0{,}1}\right)^2=$

$=(1{,}96\cdot 15)^2=29{,}4^2=864{,}36.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 865\ estudiantes.}}$$

Cuestiones.

1ª) Dadas tres matrices A, B y C se sabe que $A \cdot B \cdot C$ es una matriz de dimensiones 2×3 y que $B \cdot C$ es de dimensiones 4×3, determinar las dimensiones que debe tener la matriz A.

SOLUCIÓN

Para que pueda efectuarse el producto de dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual que el número de filas de la segunda matriz y, la matriz producto, tiene las mismas filas de la primera y las mismas columnas de la segunda: $M_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}$.

Teniendo en cuanta lo anterior y la propiedad asociativa del producto de matrices:

$$(A \cdot B \cdot C)_{(2,3)} = A_{(x,y)} \cdot (B \cdot C)_{(4,3)} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ tiene\ dimensión\ 2 \times 4}}.$$

2ª) Dada la función $f(x) = \frac{ax^2+1}{5x}$. Dar un valor de a para que en $x = 1$ haya un extremo relativo de $f(x)$.

SOLUCIÓN

Para que una función tenga un extremo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{2ax \cdot 5x - (ax^2+1) \cdot 5}{25x^2} = \frac{2ax^2 - ax^2 - 1}{5x^2} = \frac{ax^2 - 1}{5x^2}.$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow \frac{a \cdot 1^2 - 1}{5 \cdot 1^2} = 0;\ \ a \cdot 1^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a = 1}}.$$

3ª) La ficha técnica de una encuesta electoral realizada para las pasadas elecciones autonómicas indica que se ha encuestado a 1.000 individuos con derecho a voto residentes en Castilla y León. La muestra se ha tomado mediante muestreo aleatoria simple. El error de estimación de la proporción de individuos de la población que vota al partido K es de $\pm$3,2 % fijada una confianza del 95,5 %.

Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

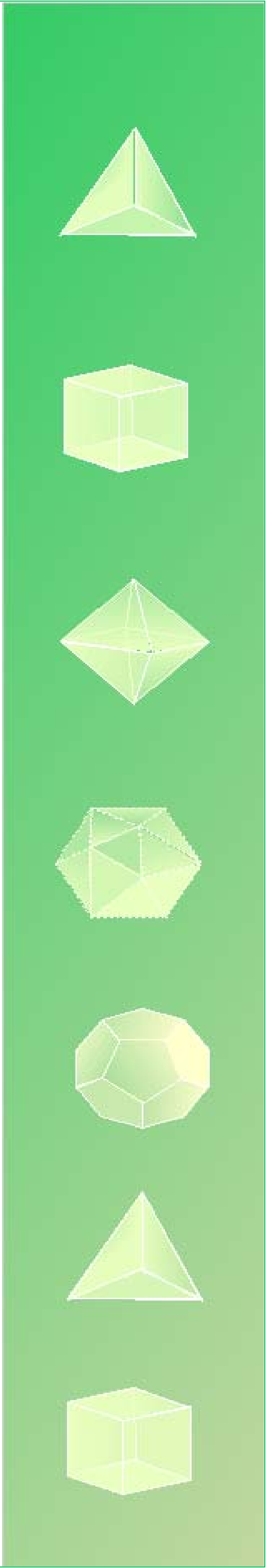
SOLUCIÓN

Población: Personas residentes en Castilla y León con derecho a voto.

Tipo de la muestra: Muestreo aleatorio simple.

Tamaño de la muestra: 1.000 personas.

Parámetro estimado: Proporción de la población que votan al partido K.



Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

CATALUÑA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

TIEMPO: 90 minutos.

1º) En el Instituto de Martí han elaborado tres tipos diferentes de ramos de rosas para vender el día de San Jorge. La opción clásica consiste en una rosa y una espiga. La opción ramo pequeño está formada por tres rosas y dos espigas. Y, finalmente, la opción de ramo grande consiste en media docena de rosas y tres espigas. Todos los ramos (sean de la opción que sean) llevan un bonito envoltorio. Sabemos que han utilizado 200 rosas, 135 espigas y 85 envoltorios.

a) ¿Cuántos ramos se han elaborado de cada tipo?

b) Si el precio de venta de un ramo de la opción clásica es de 3 euros, de un ramo pequeño es de 5 euros y el de un ramo grande es de 10 euros, ¿cuánto dinero se ingresará si se venden todos?

2º) Experimentalmente se ha comprobado que la producción de un tipo de fruta determinado que se cultiva en invernaderos depende de la temperatura, según la función $f(x) = -x^2 + 46x - 360$, donde x representa la temperatura del invernadero en grados Celsius y $f(x)$ es la producción anual en cientos de kilogramos por hectárea. El precio de venta de la fruta se mantiene estable en 1,2 euros por cada kilogramo.

a) Determine el intervalo de temperaturas entre las que hay que mantener el invernadero para que haya producción de fruta. Calcule los ingresos anuales por hectárea si se mantiene el invernadero a 20° C de temperatura.

b) ¿A qué temperatura se obtiene la producción máxima de fruta? ¿Qué ingresos por hectárea se obtienen en este caso?

3º) Una empresa se propone hacer dos tipos de cestas de Navidad, A y B, para los trabajadores y trabajadoras. Cada cesta tipo A contendrá un jamón, una botella de cava y cinco barras de turrón. Por otro lado, cada cesta de tipo B contendrá dos jamones, tres botellas de cava y dos barras de turrón. El jefe de almacén afirma que disponen de 40 jamones, 120 barras de turrón y muchas botellas de cava, y que, por tanto, cava seguro que no faltará. Se quieren hacer tantas cestas como sea posible.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. ¿Cuántas cestas de cada tipo tendrá que hacer la empresa?

b) Una vez hecho el cálculo, la jefa de la empresa se lo repiensa y dice que es mejor hacer la misma cantidad de cestas de cada tipo. Con esta nueva condición, ¿cuántas cestas de cada tipo se tendrán que hacer?

4º) Un grupo de biólogos está estudiando un cultivo de bacterias. La población de estas bacterias (en cientos) es dada por la función $P(t) = a + \frac{12t}{t^2+b}$, en la que a y b son constantes positivas reales y $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en minutos. Sabemos que al instante inicial del estudio la población de bacterias era de 6 cientos y que el valor máximo de población se ha alcanzado a los 2 minutos de iniciar el estudio.

$a)$ Encuentre los valores de a y b.

$b)$ Calcule la población máxima de bacterias y estudie el comportamiento a largo plazo, es decir, hacia qué valor se estabiliza el número de bacterias.

5º) Considere las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

$a)$ Encuentra para qué valores de a es invertible la matriz obtenida del resultado del producto $P \cdot A$.

$b)$ Si $a = 2$, encuentra la matriz X que satisface la ecuación matricial $P \cdot A + X = I$, en la que I denota la matriz identidad de orden 2.

6º) En los modelos matemáticos que se utilizan para descubrir la evolución de una enfermedad, se llama Ro el número medio de nuevas infecciones que cada persona infectada provoca en la población. Cuando ese número es inferior a 1, cada individuo infectado transmite la enfermedad, por término medio, a menos de una persona y la enfermedad tiende a desaparecer. En cambio, si Ro es mayor que 1, la enfermedad se extiende y se produce una epidemia. Cuando se descubre una vacuna efectiva contra la enfermedad, se puede controlar la epidemia vacunando sólo una proporción p de la población. Es lo que se conoce como inmunidad de grupo. Efectivamente, una vez vacunada una proporción $p \in (0,1)$ de la población, la nueva Ro, que se llama efectiva y se denota con Re, es el producto de la Ro original por la proporción de individuos que no están vacunados, $1 - p$. Y se logra controlar la epidemia se la Re es inferior a uno.

$a)$ En el caso del sarampión, se estima que $Ro = 15$. Si analizamos una población con un porcentaje de individuos vacunados del 95 %, según el modelo descrito, ¿existe riesgo de que se produzca una epidemia de sarampión en esta población?

$b)$ En el caso concreto de la llamada gripe española de 1.918, se estima que $Ro = 4$. Calcula qué porcentaje de población habría sido necesario vacunar, como mínimo, para detener la epidemia de esta enfermedad.

$c)$ Exprese, en general, el umbral de población mínimo a vacunarse en función del valor de Ro de una enfermedad. Haga un esbozo de esta función para los valores de Ro entre 1 y 20.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) En el Instituto de Martí han elaborado tres tipos diferentes de ramos de rosas para vender el día de San Jorge. La opción clásica consiste en una rosa y una espiga. La opción ramo pequeño está formada por tres rosas y dos espigas. Y, finalmente, la opción de ramo grande consiste en media docena de rosas y tres espigas. Todos los ramos (sean de la opción que sean) llevan un bonito envoltorio. Sabemos que han utilizado 200 rosas, 135 espigas y 85 envoltorios.

a) ¿Cuántos ramos se han elaborado de cada tipo?

b) Si el precio de venta de un ramo de la opción clásica es de 3 euros, de un ramo pequeño es de 5 euros y el de un ramo grande es de 10 euros, ¿cuánto dinero se ingresará si se venden todos?

SOLUCIÓN

a) Sean x, y, z los ramos de rosas de los tipos clásico, pequeño y grande que se elaboran en el Instituto, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce es: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=85 \\ x+3y+6z=200 \\ x+2y+3z=135 \end{array}\right\}$.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 85 & 1 & 1 \\ 200 & 3 & 6 \\ 135 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{765+400+810-405-1.020-600}{9+2+6-3-12-3}=\frac{1.975-2.025}{-1}=\frac{-50}{-1}=50.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 85 & 1 \\ 1 & 200 & 6 \\ 1 & 135 & 3 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{600+135+510-200-810-255}{-1}=\frac{1.245-1.265}{-1}=\frac{-20}{-1}=20.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 85 \\ 1 & 3 & 200 \\ 1 & 2 & 135 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{405+170+200-255-400-135}{-1}=\frac{775-790}{-1}=\frac{-15}{-1}=15.$$

$$\underline{Se\ han\ elaborado\ 50\ ramos\ clásicos,20\ pequeños\ y\ 15\ grandes.}$$

b) $Ingresos=50\cdot 3+20\cdot 5+15\cdot 10=150+100+150=400.$

$$\underline{Si\ se\ venden\ todos\ los\ ramos\ se\ obtiene\ un\ ingreso\ de\ 400\ euros.}$$

2º) Experimentalmente se ha comprobado que la producción de un tipo de fruta determinado que se cultiva en invernaderos depende de la temperatura, según la función $f(x) = -x^2 + 46x - 360$, donde x representa la temperatura del invernadero en grados Celsius y $f(x)$ es la producción anual en cientos de kilogramos por hectárea. El precio de venta de la fruta se mantiene estable en 1,2 euros por cada kilogramo.

a) Determine el intervalo de temperaturas entre las que hay que mantener el invernadero para que haya producción de fruta. Calcule los ingresos anuales por hectárea si se mantiene el invernadero a 20° C de temperatura.

b) ¿A qué temperatura se obtiene la producción máxima de fruta? ¿Qué ingresos por hectárea se obtienen en este caso?

SOLUCIÓN

a) La función $f(x) = -x^2 + 46x - 360$ es una parábola cóncava (∩) por ser negativo el coeficiente de x^2, por lo cual, presenta un máximo para el valor que anula su primera derivada:

$$f'(x) = -2x + 46 = 0;\ -x + 23 = 0 \Rightarrow x = 23.$$

$$f(23) = -23^2 + 46 \cdot 23 - 360 = -529 + 1.058 - 360 = 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(23, 169).$$

Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 46x - 360 = 0;\ \ x^2 - 46x + 360 = 0;$$

$$x = \frac{46 \pm \sqrt{2.116 - 1.440}}{2} = \frac{46 \pm \sqrt{676}}{2} = \frac{46 \pm 26}{2} = 23 \pm 13 \Rightarrow x_1 = 10, x_2 = 36.$$

$$\underline{El\ invernadero\ es\ productivo\ entre\ 10°\ C\ y\ 36°\ C.}$$

$$f(20) = -20^2 + 46 \cdot 20 - 360 = -400 + 920 - 360 = 160.$$

$$I(20) = 160 \cdot 100 \cdot 1{,}2 = 160 \cdot 120 = 19.200.$$

$$\underline{Los\ ingresos\ por\ hectárea\ del\ invernadero\ a\ 20°\ C\ son\ de\ 19.200\ euros.}$$

b) Del apartado anterior se deduce que:

$$\underline{La\ producción\ del\ invernadero\ es\ máxima\ a\ una\ temperatura\ de\ 23°\ C.}$$

$$I(23) = 169 \cdot 100 \cdot 1{,}2 = 169 \cdot 120 = 20.280.$$

$$\underline{Los\ ingresos\ máximos\ por\ hectárea\ del\ invernadero\ son\ de\ 20.280\ euros.}$$

3º) Una empresa se propone hacer dos tipos de cestas de Navidad, A y B, para los trabajadores y trabajadoras. Cada cesta tipo A contendrá un jamón, una botella de cava y cinco barras de turrón. Por otro lado, cada cesta de tipo B contendrá dos jamones, tres botellas de cava y dos barras de turrón. El jefe de almacén afirma que disponen de 40 jamones, 120 barras de turrón y muchas botellas de cava, y que, por tanto, cava seguro que no faltará. Se quieren hacer tantas cestas como sea posible.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. ¿Cuántas cestas de cada tipo tendrá que hacer la empresa?

b) Una vez hecho el cálculo, la jefa de la empresa se lo repiensa y dice que es mejor hacer la misma cantidad de cestas de cada tipo. Con esta nueva condición, ¿cuántas cestas de cada tipo se tendrán que hacer?

SOLUCIÓN

a) Como las botellas de cava son suficientes, no se considera este dato para la resolución del apartado.

Sean x e y el número de cestas de los tipos A y B que se elaboran en la empresa, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+2y\leq 40 \\ 5x+2y\leq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow x+2y\leq 40 \Rightarrow y\leq \frac{40-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	40
y	20	0

$② \Rightarrow 5x+2y\leq 120 \Rightarrow y\leq \frac{120-5x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	24
y	60	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

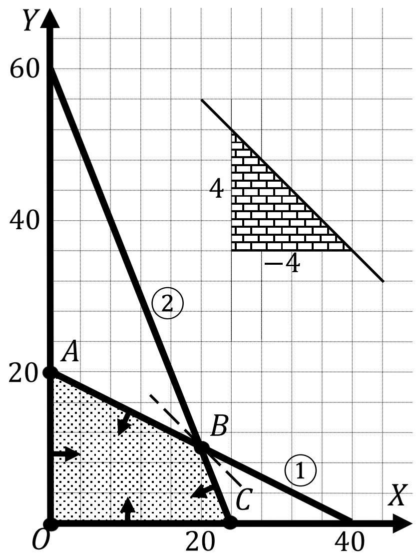
Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=40 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,20).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=40 \\ 5x+2y=120 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-2y=-40 \\ 5x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x=80;\ x=20;\ 2y=20;\ \ y=10 \Rightarrow B(20,10).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 5x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x=120;\ \ x=24 \Rightarrow C(24,0).$



La función de objetivos es $f(x,y)=x+y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,20)=0+20=20.$

$B \Rightarrow f(20,10)=20+10=30.$

$C \Rightarrow f(24,0) = 24 + 0 = 24.$

El valor máximo se produce en el punto $B(20,10)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -x = -\frac{4}{4}x \Rightarrow m = -\frac{4}{4}$.

$\underline{\mathit{La\ soluci\acute{o}n\ id\acute{o}nea\ es\ que\ la\ empresa\ elabore\ } 20 \mathit{\ cestas\ } A \mathit{\ y\ } 10\ B}$**.**

$b)$ Si las cestas son las mismas, $(y = x)$, el problema es el mismo sustituyendo la "y" por "x".

Las restricciones quedan de la forma: $\left.\begin{array}{r} x + 2x \leq 40 \\ 5x + 2x \leq 120 \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x \leq 40 \\ 7x \leq 120 \\ x \geq 0 \end{array}\right\}.$

Siendo $x \leq \frac{40}{3} = 13{,}33\ y\ x \leq \frac{120}{7} = 17{,}14$ y $x \geq 0$, la solución es $x \leq 13{,}33$ y como el número de cestas tiene que ser natural:

$\underline{\mathit{Con\ estas\ condiciones\ la\ empresa\ debe\ elaborar\ } 13 \mathit{\ cestas\ de\ cada\ tipo}}$**.**

4º) Un grupo de biólogos está estudiando un cultivo de bacterias. La población de estas bacterias (en cientos) es dada por la función $P(t) = a + \frac{12t}{t^2+b}$, en la que a y b son constantes positivas reales y $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en minutos. Sabemos que al instante inicial del estudio la población de bacterias era de 6 cientos y que el valor máximo de población se ha alcanzado a los 2 minutos de iniciar el estudio.

a) Encuentre los valores de a y b.

b) Calcule la población máxima de bacterias y estudie el comportamiento a largo plazo, es decir, hacia qué valor se estabiliza el número de bacterias.

SOLUCIÓN

a) $P(0) = 6 \Rightarrow a + \frac{12 \cdot 0}{0^2+b} = 6 \Rightarrow \underline{a = 6}$. $\quad P(t) = 6 + \frac{12t}{t^2+b}$.

$$P'(t) = 0 + \frac{12 \cdot (t^2+b) - 12t \cdot 2t}{(t^2+b)^2} = \frac{12t^2 + 12b - 24t^2}{(t^2+b)^2} = \frac{12b - 12t^2}{(t^2+b)^2}.$$

$$P'(2) = 0 \Rightarrow \frac{12b - 12 \cdot 2^2}{(2^2+b)^2} = 0;\ \ 12b - 48 = 0;\ \ b - 4 = 0 \Rightarrow \underline{b = 4}.$$

Se justifica que se trata de un máximo para $b = 4$ y $t = 2$.

$$P'(t) = \frac{12 \cdot 4 - 12t^2}{(t^2+4)^2} = 12 \cdot \frac{4 - t^2}{(t^2+4)^2}.$$

$$P''(t) = 12 \cdot \frac{-2t \cdot (t^2+4)^2 - (4-t^2) \cdot [2 \cdot (t^2+4) \cdot 2t]}{(t^2+4)^4} = -24 \cdot \frac{t \cdot (t^2+4) + 2t \cdot (4-t^2)}{(t^2+4)^3} =$$

$$= -24 \cdot \frac{t^3 + 4t + 8t - 2t^3}{(t^2+4)^3} \Rightarrow P''(t) = -24 \cdot \frac{12t - t^3}{(t^2+4)^3}.$$

$$P''(2) = -24 \cdot \frac{12 \cdot 2 - 2^3}{(2^2+4)^3} = -24 \cdot \frac{24-8}{8^3} = -3 \cdot \frac{16}{64} < 0 \Rightarrow Máximo, c.q.j.$$

b) La función resulta: $P(t) = 6 + \frac{12t}{t^2+4}$.

$$P(2) = 6 + \frac{12 \cdot 2}{2^2+4} = 6 + \frac{24}{8} = 6 + 3 = 9. \qquad \lim_{t \to \infty} P(t) = \lim_{t \to \infty} \left(6 + \frac{12t}{t^2+4}\right) = 6$$

<u>*El número máximo de bacterias es de* 900</u>.

<u>*Con el paso del tiempo el número de bacterias se estabiliza en* 600</u>.

5º) Considere las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

$a)$ Encuentra para qué valores de a es invertible la matriz obtenida del resultado del producto $P \cdot A$.

$b)$ Si $a = 2$, encuentra la matriz X que satisface la ecuación matricial $P \cdot A + X = I$, en la que I denota la matriz identidad de orden 2.

SOLUCIÓN

$a)$ $P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -a+3 & -2a-1 \end{pmatrix}$.

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$|P \cdot A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -a+3 & -2a-1 \end{vmatrix} = 2a + 1 + 3a - 9 = 0;\;\; 5a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{5}$.

$$\underline{La\ matriz\ P \cdot A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \left\{\frac{8}{5}\right\}}.$$

$b)$ Para $a = 2$ es $P \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.

$$P \cdot A + X = I;\;\; X = I - P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}}.$$

6º) En los modelos matemáticos que se utilizan para descubrir la evolución de una enfermedad, se llama Ro el número medio de nuevas infecciones que cada persona infectada provoca en la población. Cuando ese número es inferior a 1, cada individuo infectado transmite la enfermedad, por término medio, a menos de una persona y la enfermedad tiende a desaparecer. En cambio, si Ro es mayor que 1, la enfermedad se extiende y se produce una epidemia. Cuando se descubre una vacuna efectiva contra la enfermedad, se puede controlar la epidemia vacunando sólo una proporción p de la población. Es lo que se conoce como inmunidad de grupo. Efectivamente, una vez vacunada una proporción $p \in (0,1)$ de la población, la nueva Ro, que se llama efectiva y se denota con Re, es el producto de la Ro original por la proporción de individuos que no están vacunados, $1-p$. Y se logra controlar la epidemia se la Re es inferior a uno.

$a)$ En el caso del sarampión, se estima que $Ro = 15$. Si analizamos una población con un porcentaje de individuos vacunados del 95 %, según el modelo descrito, ¿existe riesgo de que se produzca una epidemia de sarampión en esta población?

$b)$ En el caso concreto de la llamada gripe española de 1.918, se estima que $Ro = 4$. Calcula qué porcentaje de población habría sido necesario vacunar, como mínimo, para detener la epidemia de esta enfermedad.

$c)$ Exprese, en general, el umbral de población mínimo a vacunarse en función del valor de Ro de una enfermedad. Haga un esbozo de esta función para los valores de Ro entre 1 y 20.

SOLUCIÓN

$a)$ $Datos: Ro = 15;\ \ p = 95\ \% = 0{,}95.$ Existe riesgo cuando $Re > 1$.

$Re = Ro \cdot (1-p) = 15 \cdot (1-0{,}95) = 15 \cdot 0{,}05 = 0{,}75 < 1.$

$$\underline{No\ existe\ riesgo\ de\ epidemia\ de\ sarampión\ en\ esa\ población}.$$

$b)$ $Re = Ro \cdot (1-p) < 1;\ \ 4 \cdot (1-p) < 1;\ \ 4 - 4p = 1;\ \ 4p = 3;\ \ p = \frac{3}{4} = 0{,}75.$

$$\underline{Habría\ sido\ necesario\ vacunar\ al\ menos\ al\ 75\ \%\ de\ la\ población}.$$

$c)$ En general tiene que cumplirse que:

$$Ro \cdot (1-p) < 1;\ \ 1 - p < \frac{1}{Ro};\ -p < \frac{1}{Ro} - 1 \Rightarrow$$

$$\underline{p(Ro) > 1 - \frac{1}{Ro}}.$$

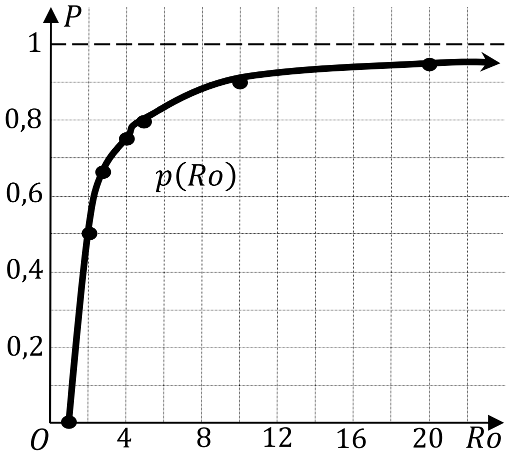
Para representar la función $p(Ro)$ entre los valores 1 y 20 tenemos en cuenta que tiene una asíntota vertical para $Ro = 1$ y una asíntota horizontal para $Ro = 0$.

$p(Ro) > 1 - \frac{1}{Ro} = \frac{Ro-1}{Ro} \Rightarrow \lim_{Ro \to \infty} p(Ro) = \lim_{Ro \to \infty} \frac{Ro-1}{Ro} = 1.$

Una tabla de valores es la siguiente:

Ro	1	2	3	4	5	10	20
p	0	0,5	0,67	0,75	0,8	0,9	0,95

La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.



	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2022
Comunidad autónoma de
EXTREMADURA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 problemas. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

TIEMPO: 90 minutos.

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X + C = B^t - 2X$, donde B^t es la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

2º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x no existe la matriz inversa de A.

$b)$ Calcular la inversa de A para $x = 2$.

3º) Resolver, justificando la respuesta, el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x + 2y + z = -3 \\ x - y + 2z = -3 \\ 4x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$.

4º) En un taller de decoración se venden espejos y cuadros con un beneficio de 120 euros por cada espejo y 180 euros por cada cuadro. Dispone para la venta de 45 artículos en total entre ambos productos que previamente ha fabricado, necesitando 1 hora para la fabricación de cada espejo y 4 horas para elaborar cada cuadro, con una disponibilidad de, como mucho, 60 horas. Calcula el número de espejos y cuadros que debe vender para hacer máximos los beneficios, así como el valor de dichos beneficios máximos.

5º) Los beneficios de una empresa (en miles de euros) (Bt) durante los primeros 10 años dependen del tiempo transcurrido t (en años) desde su creación según la función:

$B(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 2A & si\ \ 1 \le t < 6 \\ Bt & si\ \ 6 \le t \le 10 \end{cases}$. Calcular, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función $B(t)$ es continua y que en el año 8 obtuvo unos beneficios de 16 mil euros.

6º) El precio de cierto perfume, $P(x)$, (en euros) depende del porcentaje que contiene de la esencia de cierta flor, x, (en tanto por ciento), de acuerdo con la siguiente función:

$P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 90$, con $0 \leq x \leq 4$. Se pide determinar, razonando las respuestas, para qué porcentajes alcanza este perfume sus precios máximo y mínimo y a cuánto asciendes estos precios.

7º) $a)$ Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = -x^2 + x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

$b)$ Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{3-2x^2}{-x^2+x}$.

8º) En un quiosco de prensa, el 50 % de los clientes compra prensa deportiva, el 15 % prensa nacional y el resto prensa regional. El 20 % de los clientes de prensa deportiva, el 40 % de los de prensa nacional y el 60 % de los de prensa regional son mujeres. Se pide, razonando la respuesta:

$a)$ Calcular la probabilidad de que un cliente de dicho quiosco sea mujer.

$b)$ Calcular la probabilidad de que un cliente, que sabemos que es hombre, compre prensa regional.

9º) El contenido de verdura de los botes de una marca de purés para bebés es una variable que se supone con distribución normal con desviación típica 23 gramos. Se seleccionan al azar 121 botes, registrándose el contenido en verdura de dichos botes, resultando una media de 146 gramos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la cantidad media de verduras que contienen dichos botes de puré. Razona la respuesta.

10º) Una cadena de supermercados tiene en plantilla 3.000 cajeros, 4.000 reponedores y 1.000 transportistas. Se desea obtener una muestra de 200 trabajadores para una encuesta sobre la satisfacción con el puesto de trabajo. Se pide, razonando las respuestas:

$a)$ Atendiendo a razones de proporcionalidad, ¿cuántos cajeros, reponedores y transportistas debería seleccionar la empresa para la encuesta?

$b)$ Si 30 de los cajeros encuestados estaban satisfechos con su trabajo, dar una estimación de la proporción de cajeros satisfechos con su puesto de trabajo.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X + C = B^t - 2X$, donde B^t es la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

Solución:

$$A \cdot X + C = B^t - 2X;\ \ A \cdot X + 2X = B^t - C;\ \ (A + 2I) \cdot X = B^t - C;$$

$$(A + 2I)^{-1} \cdot (A + 2I) \cdot X = (A + 2I)^{-1}(B^t - C);\ I \cdot X = (A + 2I)^{-1} \cdot (B^t - C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = (A + 2I)^{-1} \cdot (B^t - C)}.$$

$$B^t - C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$(A + 2I)^t = A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};\ \ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1.$$

$$Adj.de\ (A + 2I)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + 2I)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A+2I)^t}{|A+2I|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A + 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A + 2I)^{-1} \cdot (B^t - C) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -11 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}}$$

2º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x no existe la matriz inversa de A.

b) Calcular la inversa de A para $x = 2$.

Solución:

a) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4x + 3 + x^2 = 0;\ x^2 - 4x + 3 = 0;\ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ no\ es\ invertible\ para\ x = 1\ y\ x = 3}.$$

b) Para $x = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. $\quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$|A| = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -7 & 6 & -4 \end{pmatrix}}.$$

3º) Resolver, justificando la respuesta, el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x + 2y + z = -3 \\ x + y - 2z = -3 \\ 4x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 3 - 16 - 4 + 18 - 4 = 3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{-6-9+12+3-18+12}{3} = \frac{27-33}{3} = \frac{-6}{3} = -2.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-18-3+24+12-18+6}{3} = \frac{42-39}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-9-9-24+12+27+6}{3} = \frac{45-42}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

$$\underline{Solución: x = -2,\ y = 1,\ z = 1}.$$

4º) En un taller de decoración se venden espejos y cuadros con un beneficio de 120 euros por cada espejo y 180 euros por cada cuadro. Dispone para la venta de 45 artículos en total entre ambos productos que previamente ha fabricado, necesitando 1 hora para la fabricación de cada espejo y 4 horas para elaborar cada cuadro, con una disponibilidad de, como mucho, 60 horas. Calcula el número de espejos y cuadros que debe vender para hacer máximos los beneficios, así como el valor de dichos beneficios máximos.

Solución:

Sean x e y el número de espejos y cuadros que vende el taller, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+y\leq 45 \\ x+4y\leq 60 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow x+y\leq 45 \Rightarrow y\leq 45-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	20	45
y	25	0

② $\Rightarrow x+4y\leq 60 \Rightarrow y\leq \dfrac{60-x}{4} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	60
y	15	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

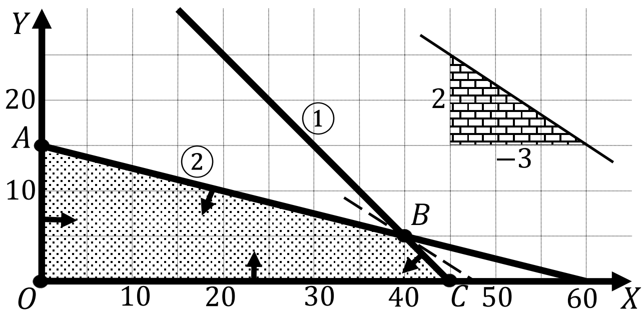
Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+4y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,15).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=45 \\ x+4y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y=-45 \\ x+4y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=15;\ \ y=5;\ \ x+20=60;\ \ x=40 \Rightarrow B(40,5).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+y=45 \end{array}\right\} \Rightarrow x=45 \Rightarrow C(45,0).$



La función de objetivos es $f(x,y)=120x+180y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,15)=120\cdot 0+180\cdot 15=0+2.700=2.700.$

$B \Rightarrow f(40,5)=120\cdot 40+180\cdot 5=4.800+900=5.700.$

$C \Rightarrow f(45,0)=120\cdot 45+180\cdot 0=5.400+0=5.400.$

El valor máximo se produce en el punto $B(40,5)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y)=120x+180y=0 \Rightarrow y=-\frac{120}{180}x=-\frac{2}{3}x \Rightarrow m=-\frac{2}{3}.$

$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ vendiendo\ 40\ espejos\ y\ 5\ cuadros.}$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 5.700\ euros.}$

5º) Los beneficios de una empresa (en miles de euros) (Bt) durante los primeros 10 años dependen del tiempo transcurrido t (en años) desde su creación según la función:

$B(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 2A & si\ \ 1 \leq t < 6 \\ Bt & si\ \ 6 \leq t \leq 10 \end{cases}$. Calcular, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función $B(t)$ es continua y que en el año 8 obtuvo unos beneficios de 16 mil euros.

Solución:

La función $B(t)$ es continua en su dominio, excepto para el valor de $t = 6$, cuya continuidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de $A\ y\ B$.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ t = 6 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \to 6^-} B(t) = \lim_{t \to 6} (t^2 - 8t + 2A) = 2A - 12 \\ \lim_{t \to 6^+} B(t) = \lim_{t \to 6} (6B) = 6B = B(6) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 6^-} B(t) = \lim_{t \to 6^+} B(t) = B(6) \Rightarrow 2A - 12 = 6B;\ \ A - 3B = 6. \quad (1)$$

$B(8) = 16 \Rightarrow B \cdot 8 = 16 \Rightarrow$

$$\underline{B = 2}.$$

Sustituyendo el valor de B en (1):

$A - 3B = 6;\ \ A - 3 \cdot 2 = 6;\ \ A - 6 = 6 \Rightarrow$

$$\underline{A = 12}.$$

6º) El precio de cierto perfume, $P(x)$, (en euros) depende del porcentaje que contiene de la esencia de cierta flor, x, (en tanto por ciento), de acuerdo con la siguiente función:

$P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 90$, con $0 \leq x \leq 4$. Se pide determinar, razonando las respuestas, para qué porcentajes alcanza este perfume sus precios máximo y mínimo y a cuánto asciendes estos precios.

Solución:

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$P'(x) = 12x^2 - 12x - 24.$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 12x - 24 = 0;\ \ x^2 - x - 2 = 0;\ \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \notin D(P), x_2 = 2 \Rightarrow x = 2.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$P''(x) = 24x - 12.$$

$$P''(2) = 24 \cdot 2 - 12 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$\underline{El\ perfume\ alcanza\ su\ mínimo\ valor\ para\ el\ 2\ \%\ de\ esencia}.$$

$$P(2) = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 90 = 32 - 24 - 48 + 90 = 50.$$

$$\underline{El\ precio\ mínimo\ del\ perfume\ es\ de\ 50\ euros}.$$

$$P(0) = 90.$$

$$P(4) = 4 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 90 = 256 - 96 - 96 + 90 = 154.$$

$$\underline{El\ perfume\ alcanza\ su\ máximo\ valor\ para\ el\ 4\ \%\ de\ esencia}.$$

$$\underline{El\ precio\ máximo\ del\ perfume\ es\ de\ 154\ euros}.$$

7º) $a)$ Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = -x^2 + x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

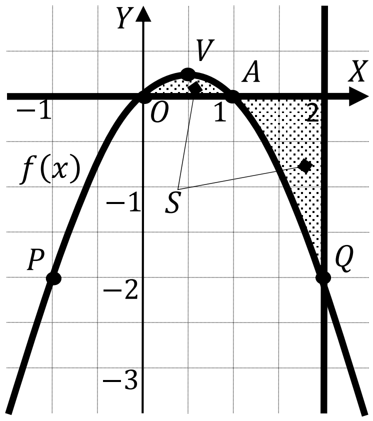
$b)$ Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{3-2x^2}{-x^2+x}$.

Solución:

$a)$ La función $f(x) = -x^2 + x$ es una parábola cóncava $(\cap)$ por ser negativo el coeficiente de x^2 y su vértice es siguiente:

$$f'(x) = -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{-1+2}{4} = \tfrac{1}{4} \Rightarrow V\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right).$$



Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + x = 0 = -x(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow O(0,0) \\ x_2 = 1 \Rightarrow A(1,0) \end{cases}.$$

Otros puntos de la parábola son $P(-1,-2)\ y\ Q(2,-2)$.

La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta de donde se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 f(x)\cdot dx + \int_2^1 f(x)\cdot dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\cdot dx + \int_2^1 (-x^2 + x)\cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_2^1 = \left[\left(-\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2}\right) - 0\right] + \left[\left(-\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2}\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2}\right) = 2\cdot\frac{-2+3}{6} + \frac{8}{3} - 2 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 \Rightarrow$$

$$\underline{S = 1\ u^2}.$$

$b)$ Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3-2x^2}{-x^2+x} = 2 \Rightarrow \underline{La\ recta\ y = 2\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$-x^2 + x = 0;\ -x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_1 = 1.$$

$$\underline{Las\ rectas\ x = 0\ (eje\ Y)\ e\ y = 1\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

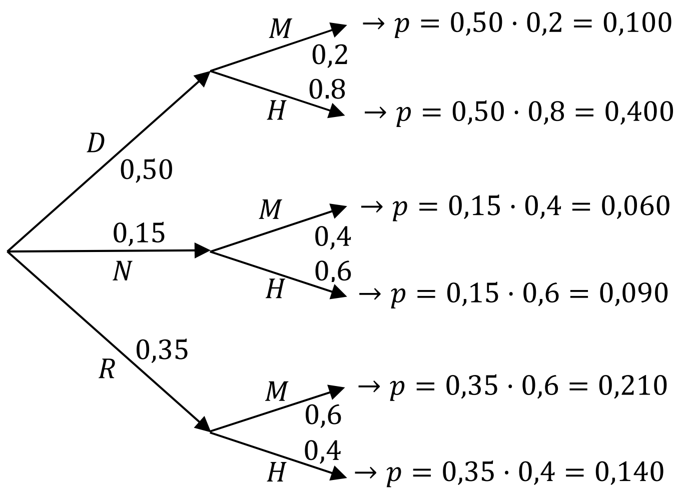
No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

8º) En un quiosco de prensa, el 50 % de los clientes compra prensa deportiva, el 15 % prensa nacional y el resto prensa regional. El 20 % de los clientes de prensa deportiva, el 40 % de los de prensa nacional y el 60 % de los de prensa regional son mujeres. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que un cliente de dicho quiosco sea mujer.

b) Calcular la probabilidad de que un cliente, que sabemos que es hombre, compre prensa regional.

Solución:



a) $P = P(M) = P(D \cap M) + P(N \cap M) + P(R \cap M) =$

$= P(D) \cdot P(M/D) + P(N) \cdot P(M/N) + P(R) \cdot P(M/R) =$

$= 0{,}50 \cdot 0{,}2 + 0{,}15 \cdot 0{,}4 + 0{,}35 \cdot 0{,}6 = 0{,}100 + 0{,}060 + 0{,}210 = \underline{0{,}370}.$

b) $P = P(R/H) = \frac{P(R\cap H)}{P(H)} = \frac{P(R)\cdot P(H/R)}{1-P(M)} = \frac{0{,}35\cdot 0{,}4}{1-0{,}370} = \frac{0{,}140}{0{,}630} = \underline{0{,}2222}.$

9º) El contenido de verdura de los botes de una marca de purés para bebés es una variable que se supone con distribución normal con desviación típica 23 gramos. Se seleccionan al azar 121 botes, registrándose el contenido en verdura de dichos botes, resultando una media de 146 gramos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la cantidad media de verduras que contienen dichos botes de puré. Razona la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$

$(1-0{,}025=0{,}9750 \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=121;\ \overline{x}=146;\ \sigma=23;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(146-1{,}96\cdot\frac{23}{\sqrt{121}};\ 146+1{,}96\cdot\frac{23}{\sqrt{121}}\right);$

$(146-1{,}96\cdot 2{,}0909;\ 146+1{,}96\cdot 2{,}0909);\ (146-4{,}0982;\ 146+4{,}0982).$

$$\underline{I.C._{95\ \%}=(141{,}9018;\ 150{,}0982)}.$$

10º) Una cadena de supermercados tiene en plantilla 3.000 cajeros, 4.000 reponedores y 1.000 transportistas. Se desea obtener una muestra de 200 trabajadores para una encuesta sobre la satisfacción con el puesto de trabajo. Se pide, razonando las respuestas:

a) Atendiendo a razones de proporcionalidad, ¿cuántos cajeros, reponedores y transportistas debería seleccionar la empresa para la encuesta?

b) Si 30 de los cajeros encuestados estaban satisfechos con su trabajo, dar una estimación de la proporción de cajeros satisfechos con su puesto de trabajo.

Solución:

a) Sean a, b, c el número de cajeros, reponedores y transportistas que componen la muestra de 200 trabajadores de la cadena de supermercados.

$$\frac{a}{3.000} = \frac{b}{4.000} = \frac{c}{1.000} = \frac{a+b+c}{3.000+4.000+1.000} = \frac{200}{8.000} = \frac{1}{40}.$$

$$a = \frac{1}{40} \cdot 3.000 = 75; \ \ b = \frac{1}{40} \cdot 4.000 = 100; \ \ c = \frac{1}{40} \cdot 1.000 = 25.$$

$$\underline{Se\ deben\ seleccionar\ a\ 75\ cajeros, 100\ reponedores\ y\ 25\ transportistas}.$$

b) $p = \frac{30}{75} = 0{,}4.$

$$\underline{El\ 40\ \%\ de\ los\ cajeros\ están\ satisfechos\ con\ su\ trabajo}.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 problemas. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz X que cumpla la ecuación matricial $A \cdot X - B^t = C + 3X$, siendo B^t la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ x & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

$b)$ Calcular la inversa de A para $x = 0$.

3º) Resolver, justificando la respuesta, el sistema: $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 3 \\ x + y - z = -2 \\ 2x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$.

4º) En una pastelería se elaboran pasteles de los tipos A y B. Cada pastel de tipo A necesita 6 gramos de azúcar y 3 gramos de levadura, con un beneficio de 4,5 euros. Cada pastel de tipo B se elabora con 4 gramos de azúcar y 4 de levadura, con un beneficio de 5,5 euros. Sabiendo que solo dispone de 240 gramos de azúcar y 180 gramos de levadura, calcular, justificando la respuesta, el número de pasteles de cada tipo que debe fabricar para obtener unos beneficios máximos, así como el valor di dichos beneficios máximos.

5º) El consumo eléctrico de una tienda $C(t)$ (en kilovatios) durante las 8 horas que permanece abierta depende del tiempo t (en horas) desde que abrió según la siguiente función: $C(t) = 10 + 6Bt + 6At^2 + t^3$ $(1 \leq t \leq 8)$. Determinar, razonando las respuestas, las constantes A y B sabiendo que su consumo máximo se alcanza a las 6 horas y asciende a 10 kilovatios.

6º) La cantidad de pescado capturado en cierto lago en pequeñas embarcaciones, $P(x)$ (en kg) es una función de la longitud de la embarcación, x, que oscila entre 1 y 12 metros. La función que relaciona ambas magnitudes es la siguiente:

$P(x) = 3x^3 - 45x^2 + 144x + 230 \ \ (1 \leq x \leq 12)$. Se pide, razonando las respuestas:

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la cantidad de pescado capturado en función de la longitud de la embarcación utilizada.

b) Representar gráficamente la función $P(x)$.

7º) a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = 4 - x^2$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$.

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{3x^2+2}{4-x^2}$.

8º) Un club de fútbol tiene 200 abonados de gran antigüedad, 500 abonados con varios años de antigüedad y 300 nuevos abonados. Se pregunta a los abonados si están de acuerdo con una subida de los precios de los abonos a cambio de que el club ofrezca servicios adicionales. Se muestran favorables a la subida 80 abonados de gran antigüedad, 280 con varios años de antigüedad y 120 nuevos abonados. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que un abonado sea nuevo y favorable a la subida.

b) Calcular la probabilidad de que un abonado, que se sabe que es favorable a la subida, tengan gran antigüedad en el club.

9º) La producción de tomates en parcelas de una zona de regadío se ajusta a distribución normal con desviación típica 1 tonelada. Con objeto de estimar la producción media de la zona, se registran los datos de 36 parcelas que arrojan una producción media de 8,7 toneladas. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90 %, para la producción media de tomates de las parcelas de la zona. Razonar la respuesta.

10º) Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de hogares españoles con conexión de fibra óptica. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor $p = 0{,}5$. Se pide determinar el número mínimo de hogares que hay que visitar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel de confianza del 99 % y coya longitud sea inferior a 0,14. Razonar la respuesta.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz X que cumpla la ecuación matricial $A \cdot X - B^t = C + 3X$, siendo B^t la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

Solución:

$$A \cdot X - B^t = C + 3X;\ \ A \cdot X - 3X = C + B^t;\ \ (A - 3I) \cdot X = (C + B^t);$$

$$(A - 3I)^{-1} \cdot (A - 3I) \cdot X = (A - 3I)^{-1} \cdot (C + B^t);$$

$$I \cdot X = (A - 3I)^{-1} \cdot (C + B^t) \Rightarrow \underline{X = (A - 3I)^{-1} \cdot (C + B^t)}.$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A - 3I| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1;\ \ (A - 3I)^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ (A - 3I)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(A - 3I)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A-3I)^t}{|A-3I|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C + B^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A - 3I)^{-1} \cdot (C + B^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}}.$$

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ x & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

$b)$ Calcular la inversa de A para $x = 0$.

Solución:

$a)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ x & -2 & 1 \end{vmatrix} = x + 2 - x - x^2 - 2 + 1 = -x^2 + 1 = 0; \;\; x^2 = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{-1, 1\}}.$$

$b)$ Para $x = 0$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 + F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_3 + 2F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

3º) Resolver, justificando la respuesta, el sistema: $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 3 \\ x + y - z = -2 \\ 2x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 12 + 4 - 8 - 9 + 4 = -15 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ de\ incógnitas.$

$$\underline{Según\ el\ teorema\ de\ Rouché - Fröbenios \Rightarrow S.C.D.}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{6+24-2+4-9-8}{-15} = \frac{34-19}{-15} = \frac{15}{-15} = -1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-12-4-6+16-3-6}{-15} = \frac{-15}{-15} = 1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-3-9+8-6-18-2}{-15} = \frac{-30}{-15} = 2.$$

$$\underline{Solución: x = -1, y = 1, z = 2.}$$

4º) En una pastelería se elaboran pasteles de los tipos A y B. Cada pastel de tipo A necesita 6 gramos de azúcar y 3 gramos de levadura, con un beneficio de 4,5 euros. Cada pastel de tipo B se elabora con 4 gramos de azúcar y 4 de levadura, con un beneficio de 5,5 euros. Sabiendo que solo dispone de 240 gramos de azúcar y 180 gramos de levadura, calcular, justificando la respuesta, el número de pasteles de cada tipo que debe fabricar para obtener unos beneficios máximos, así como el valor di dichos beneficios máximos.

Solución:

Sean x e y el número de pasteles que se elaboran en la pastelería de los tipos A y B, respectivamente.

Las restricciones son : $\left.\begin{array}{r} 6x+4y\leq 240 \\ 3x+4y\leq 180 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x+2y\leq 120 \\ 3x+4y\leq 180 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 3x+2y\leq 120 \Rightarrow y\leq \frac{120-3x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	40
y	60	0

② $\Rightarrow 3x+4y\leq 180 \Rightarrow y\leq \frac{180-3x}{4} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	60
y	45	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 3x+4y=180 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,45).$

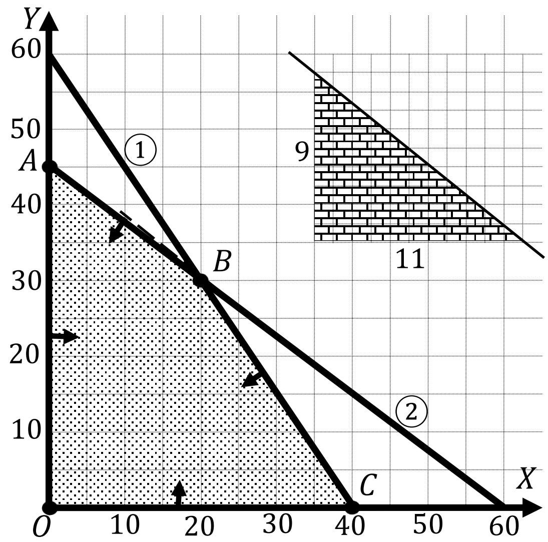
$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y=120 \\ 3x+4y=180 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r} 6x+4y=240 \\ -3x-4y=-180 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=60;\ \ x=20\Rightarrow$

$\Rightarrow 60+2y=120;\ \ 2y=60;\ \ y=30\Rightarrow$

$\Rightarrow B(20,30).$

$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 3x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=120;\ \ x=40\Rightarrow C(40,0).$



La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=4{,}5x+5{,}5y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A\Rightarrow f(0,45)=4{,}5\cdot 0+5{,}5\cdot 45=0+247{,}5=247{,}5.$

$B\Rightarrow f(20,30)=4{,}5\cdot 20+5{,}5\cdot 30=90+165=255.$

$C\Rightarrow f(40,0)=4{,}5\cdot 40+5{,}5\cdot 0=180+0=180.$

El máximo se produce en el punto $B(20,30)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 4{,}5x + 5{,}5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{4{,}5}{5{,}5}x = -\frac{45}{55}x \Rightarrow m = -\frac{9}{11}.$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ elaborando\ 20\ pasteles\ tipo\ A\ y\ 30\ tipo\ B}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 255\ euros}.$$

5º) El consumo eléctrico de una tienda $C(t)$ (en kilovatios) durante las 8 horas que permanece abierta depende del tiempo t (en horas) desde que abrió según la siguiente función: $C(t)=10+6Bt+6At^2+t^3$ $(1\leq t\leq 8)$. Determinar, razonando las respuestas, las constantes A y B sabiendo que su consumo máximo se alcanza a las 6 horas y asciende a 10 kilovatios.

Solución:

Por alcanzar a las 6 horas un consumo de 10 kilovatios: $C(6)=10$.

$C(6)=10\Rightarrow 10+6B\cdot 6+6A\cdot 6^2+6^3=10;\ \ 6B\cdot 6+6A\cdot 6^2+6^3=0;$

$6A+B=-6.$ (1)

Por alcanzar el máximo para $t=6$: $C^{'}(6)=0$.

$C^{'}(t)=6B+12At+3t^2.$

$C^{'}(6)=0\Rightarrow 6B+72A+3\cdot 36=0;\ \ 12A+B=-18.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r}6A+B=-6\\12A+B=-18\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}-6A-B=6\\12A+B=-18\end{array}\right\}\Rightarrow 6A=-12;$$

$$\underline{A=-2}.$$

$$-6+B=-6\Rightarrow$$

$$\underline{B=6}.$$

6º) La cantidad de pescado capturado en cierto lago en pequeñas embarcaciones, $P(x)$ (en kg) es una función de la longitud de la embarcación, x, que oscila entre 1 y 12 metros. La función que relaciona ambas magnitudes es la siguiente:

$P(x) = 3x^3 - 45x^2 + 144x + 230 \ (1 \le x \le 12)$. Se pide, razonando las respuestas:

$a)$ Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la cantidad de pescado capturado en función de la longitud de la embarcación utilizada.

$b)$ Representar gráficamente la función $P(x)$.

Solución:

$a)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$P'(x) = 9x^2 - 90x + 144.$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 9x^2 - 90x + 144 = 0; \ \ x^2 - 10x + 16 = 0; \ \ x = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} =$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = 5 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 8.$$

Por ser $P(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función en los intervalos $(1, 2)$, $(2, 8)$ y $(8, 10)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 3 \in (2, 8)$ es:

$$P'(3) = 9 \cdot 3^2 - 90 \cdot 3 + 144 = 81 - 270 + 144 = -45 < 0 \Rightarrow Decreciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$P'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (2, 8)}.$$

$$P'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (1, 2) \cup (8, 12)}.$$

$b)$ Para la representación gráfica de la función determinamos sus máximos y mínimos relativos.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$P'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 8.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$P''(x) = 18x - 90.$$

$$P''(2) = 18 \cdot 2 - 90 = -54 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$P(2) = 3 \cdot 2^3 - 45 \cdot 2^2 + 144 \cdot 2 + 230 = 24 - 180 + 288 + 320 =$$

$$= 632 - 180 = 452 \Rightarrow Máx. \Rightarrow A(2, 452).$$

$$P''(8) = 18 \cdot 8 - 90 = 54 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 8.$$

$$P(8) = 3 \cdot 8^3 - 45 \cdot 8^2 + 144 \cdot 8 + 230 = 1.536 - 2.880 + 1.152 + 230 =$$

$= 2.918 - 2.880 = 38 \Rightarrow Mín. \Rightarrow B(8, 38).$

Los valores extremos de la función son los siguientes:

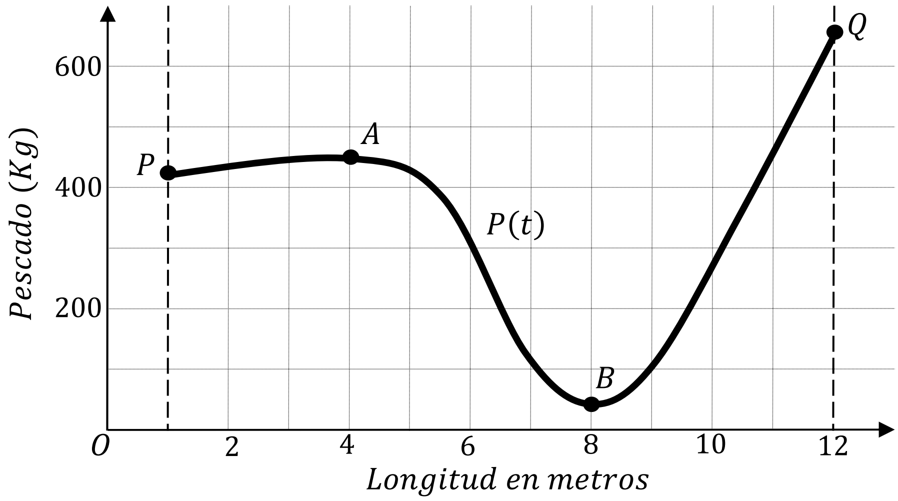
$P(1) = 3 \cdot 1^3 - 45 \cdot 1^2 + 144 \cdot 1 + 230 = 3 - 45 + 144 + 320 =$

$= 467 - 45 = 422 \Rightarrow P(1, 422).$

$P(12) = 3 \cdot 12^3 - 45 \cdot 12^2 + 144 \cdot 12 + 230 =$

$= 5.184 - 6.480 + 1.728 + 230 = 7.142 - 6.480 = 662 \Rightarrow Q(12, 662).$

Teniendo en cuenta el estudio realizado, la representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:

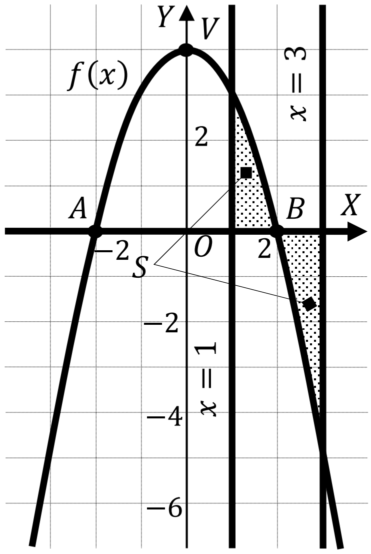


7º) $a)$ Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = 4 - x^2$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$.

$b)$ Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{3x^2+2}{4-x^2}$.

Solución:

$a)$



La función $f(x) = 4 - x^2$ es una parábola cóncava $(\cap)$ por ser negativo el coeficiente de x^2 y su vértice es el punto $V(0,4)$; es simétrica con respecto al eje de ordenadas por ser $f(-x) = f(x)$ y sus puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \Rightarrow A(-2,0) \\ x_2 = 2 \Rightarrow B(2,0) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta de donde, teniendo en cuanta la simetría de la función, se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^2 f(x) \cdot dx + \int_3^2 f(x) \cdot dx = \int_1^2 (4 - x^2) \cdot dx + \int_3^2 (4 - x^2) \cdot dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_3^2 =$$

$$= \left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4 \cdot 1 - \frac{1^3}{3}\right)\right] + \left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4 \cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right)\right] =$$

$$= 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} + 8 - \frac{8}{3} - 12 + 9 = 9 - \frac{15}{3} = 9 - 5 \Rightarrow$$

$$\underline{S = 4\ u^2}.$$

$b)$ Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2+2}{4-x^2} = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{La\ recta\ y = -3\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$

$$\underline{Las\ rectas\ x = -2\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

Asíntotas oblicuas:

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales}.$$

8º) Un club de fútbol tiene 200 abonados de gran antigüedad, 500 abonados con varios años de antigüedad y 300 nuevos abonados. Se pregunta a los abonados si están de acuerdo con una subida de los precios de los abonos a cambio de que el club ofrezca servicios adicionales. Se muestran favorables a la subida 80 abonados de gran antigüedad, 280 con varios años de antigüedad y 120 nuevos abonados. Se pide, razonando la respuesta:

$a)$ Calcular la probabilidad de que un abonado sea nuevo y favorable a la subida.

$b)$ Calcular la probabilidad de que un abonado, que se sabe que es favorable a la subida, tengan gran antigüedad en el club.

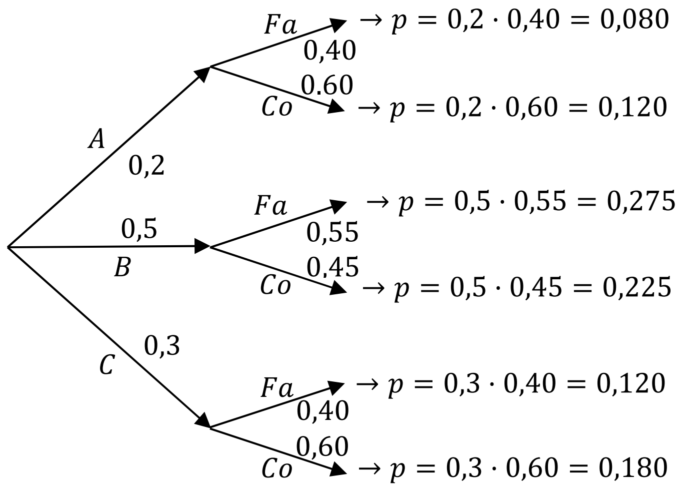
Solución:

Sean A, B y C los abonados de gran antigüedad, con varios años de antigüedad y nuevos abonados, respectivamente.

$$P(A)=\frac{200}{200+500+300}=\frac{200}{1.000}=0{,}2;\;\; P(B)=\frac{500}{1.000}=0{,}5;\;\; P(C)=\frac{300}{1.000}=0{,}3.$$

Las probabilidades de que estén a favor A, B y C son las siguientes:

$$Fa(A)=\frac{80}{200}=0{,}40;\;\; Fa(B)=\frac{280}{500}=0{,}55;\;\; Fa(C)=\frac{120}{300}=0{,}40.$$



$a)$ $$P=P(C\cap Fa)=P(C)\cdot P(Fa/C)=0{,}3\cdot 0{,}40=\underline{0{,}120}.$$

$b)$ $$P=P(A/Fa)=\frac{P(A\cap Fa)}{P(Fa)}=\frac{P(A)\cdot P(Fa/A)}{P(A)\cdot P(Fa/A)+P(B)\cdot P(Fa/B)+P(C)\cdot P(Fa/C)}=$$

$$=\frac{0{,}2\cdot 0{,}40}{0{,}2\cdot 0{,}40+0{,}5\cdot 0{,}55+0{,}3\cdot 0{,}40}=\frac{0{,}080}{0{,}080+0{,}275+0{,}120}=\frac{0{,}08}{0{,}475}=\underline{0{,}168}.$$

9º) La producción de tomates en parcelas de una zona de regadío se ajusta a distribución normal con desviación típica 1 tonelada. Con objeto de estimar la producción media de la zona, se registran los datos de 36 parcelas que arrojan una producción media de 8,7 toneladas. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90 %, para la producción media de tomates de las parcelas de la zona. Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha=0{,}90 \rightarrow \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$

$(1-0{,}05=0{,}9500 \rightarrow z=1{,}645).$

Datos: $n=36;\ \overline{x}=8{,}7;\ \sigma=1;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(8{,}7-1{,}645\cdot\frac{1}{\sqrt{36}};\ 8{,}7+1{,}645\cdot\frac{1}{\sqrt{36}}\right);$

$(8{,}7-1{,}645\cdot 0{,}1667;\ 8{,}7+1{,}645\cdot 0{,}1667);\ \ (8{,}7-0{,}2742;\ 8{,}7+0{,}2742).$

$$\underline{I.C._{90\,\%}=(8{,}4258;\ 8{,}9742).}$$

10º) Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de hogares españoles con conexión de fibra óptica. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor $p = 0{,}5$. Se pide determinar el número mínimo de hogares que hay que visitar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel de confianza del 99 % y coya longitud sea inferior a 0,14. Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1 - \alpha = 0{,}99 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}01 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = 2{,}575.$

$(1 - 0{,}005 = 0{,}9950 \ \rightarrow z = 2{,}575).$

Datos: $p = q = 058;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575;\ \ E = \frac{0{,}14}{2} = 0{,}07.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$, de donde se deduce la expresión del error máximo cometido: $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$.

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ \ \frac{E}{z_{\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ \ \frac{E^2}{\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2} = \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow n = \frac{p \cdot q \cdot \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{E^2} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}575^2}{0{,}07^2} =$$

$$= \frac{0{,}25 \cdot 6{,}6306}{0{,}07^2} = \frac{1{,}6577}{0{,}0049} = 338{,}30.$$

$\underline{Hay\ que\ visitar\ un\ mínimo\ de\ 339\ hogares.}$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

GALICIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 6 preguntas, de las que puede realizar un máximo de 3, combinadas como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, solo se corregirán los 3 primeros realizados.

TIEMPO: 90 minutos.

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule las matrices $A^2 - B$ y $A - I$, donde I representa la matriz identidad de orden 3.

$b)$ Calcula, si es posible, la inversa de la matriz $A - I$.

$c)$ Despeje X en la ecuación matricial $X \cdot A + B = A^2 + X$ y calcule su valor.

2º) Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla en dos calidades distintas: calidad A, carcasa de plástico y calidad A^+, carcasa de aluminio. El coste unitario de producción es de 70 euros para los teléfonos de calidad A y de 90 euros para los de calidad A^+. Los precios de venta son de 100 euros para los de clase A y de 150 euros para los de clase A^+. Si para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30.000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcasas de aluminio.

$a)$ Planee el problema que determina el número de teléfonos móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

$b)$ Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

$c)$ Determine una solución óptima y halle el valor óptimo de la función objetivo.

3º) En un zona protegida de un parque natural el número de aves $N(t)$, en cientos, en función del tiempo t (años transcurridos desde que se contabilizan las aves) viene dado por la función $N(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & si\ \ 0 \le t \le 10 \\ 95 - \frac{250}{t} & si\ \ t > 10 \end{cases}$.

$a)$ Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $N(t)$. ¿Entre que años crece la función? ¿Entre que años decrece?

$b)$ ¿Cuándo se alcanza el número mínimo de aves en el parque? ¿Cuántas aves hay en ese momento?

$c)$ Calcule el intervalo de tiempo en el que la población de aves se mantiene entre 5.000 y 7.500 aves. ¿A qué valor tiende la población de aves con el paso del tiempo?

4º) Dada la función $f(x) = x^3 - ax^2 + 8x$.

a) Calcule el valor del parámetro a teniendo en cuenta que la función $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = 2$.

b) Para $a = 6$, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.

5º) Un estudio revela que 2 de cada 5 habitantes de una determinada población son menores de 30 años, el 70 % de los habitantes realizan ejercicio físico con regularidad y el 30 % de los habitantes son menores de 30 años y realizan ejercicio físico con regularidad.

a) ¿Qué porcentaje de la población ni es menor de 30 años ni realiza ejercicio físico con regularidad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un habitante que no realiza ejercicio físico con regularidad sea menor de 30 años?

c) ¿Son independientes los sucesos ser menor de 30 años y realizar ejercicio físico con regularidad?

6º) Tomamos una muestra aleatoria de 36 facturas de consumo mensual de luz (en euros) y el intervalo de confianza obtenido al 95 % para el consumo mensual medio es $[60{,}1; 69{,}9]$. Según esta información:

a) ¿Cuál fue el consumo medio muestral de luz?

b) ¿Cuál es el error máximo cometido?

c) Determine un intervalo de confianza al 90 % para el consumo medio de luz.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule las matrices $A^2 - B$ y $A - I$, donde I representa la matriz identidad de orden 3.

$b)$ Calcula, si es posible, la inversa de la matriz $A - I$.

$c)$ Despeje X en la ecuación matricial $X \cdot A + B = A^2 + X$ y calcule su valor.

Solución

$$a)\ A^2 - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{A^2 - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}}.$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

$b)$ Se obtiene la inversa de $(A - I)$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(A - I|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 2F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$c)$ $X \cdot A + B = A^2 + X$; $X \cdot A - X = A^2 - B$; $X \cdot A - X \cdot I = A^2 - B$;
$X \cdot (A - I) = A^2 - B$; $X \cdot (A - I) \cdot (A - I)^{-1} = (A^2 - B) \cdot (A - I)^{-1}$;
$X \cdot I = (A^2 - B) \cdot (A - I)^{-1} \Rightarrow \underline{X = (A^2 - B) \cdot (A - I)^{-1}}$.

Sustituyendo en la expresión anterior los valores obtenidos en a):

$$X = (A^2 - B) \cdot (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

2º) Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla en dos calidades distintas: calidad A, carcasa de plástico y calidad A^+, carcasa de aluminio. El coste unitario de producción es de 70 euros para los teléfonos de calidad A y de 90 euros para los de calidad A^+. Los precios de venta son de 100 euros para los de clase A y de 150 euros para los de clase A^+. Si para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30.000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcasas de aluminio.

a) Planee el problema que determina el número de teléfonos móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Determine una solución óptima y halle el valor óptimo de la función objetivo.

Solución

a) Sean x e y el número móviles de calidades A y A^+ que vende la empresa, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 70x+90y\le 30.000 \\ x+y\le 350 \\ x\ge 0;\, 0\le y\le 310 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 7x+9y\le 3.000 \\ x+y\le 350 \\ x\ge 0;\, 0\le y\le 310 \end{array}\right\}$.

b)

$① \Rightarrow 7x+9y\le 3.000 \Rightarrow y\le \frac{3.000-7x}{9} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	120	210
y	240	170

$② \Rightarrow x+y\le 350 \Rightarrow y\le 350-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	350
y	350	0

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=310 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(0,310)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=310 \\ 7x+9y=3.000 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x+2.790=3.000;\;\; 7x=210 \Rightarrow$

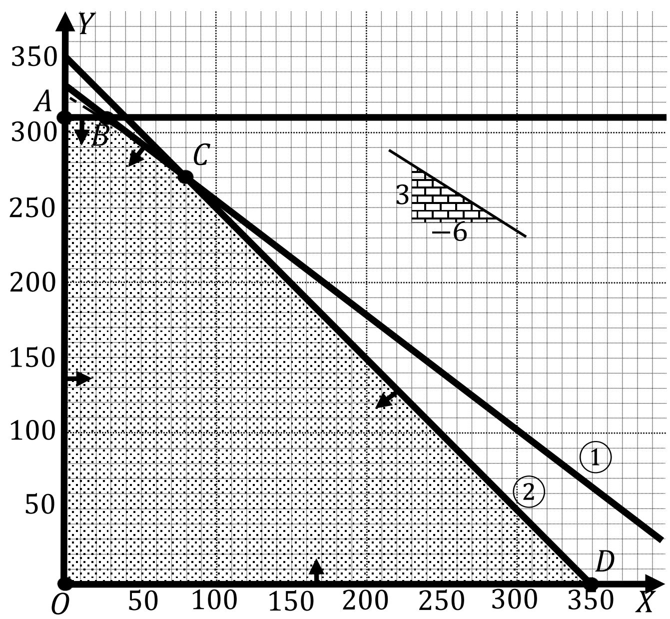
$\Rightarrow x=30 \Rightarrow \underline{B(30,210)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x+9y=3.000 \\ x+y=350 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 7x+9y=3.000 \\ -7x-7y=-2.450 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$2y=550;\;\; y=275;$

$x=75 \Rightarrow \underline{B(75,275)}.$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+y=350 \end{array}\right\} \Rightarrow x=350 \Rightarrow \underline{D(350,0)}.$



$c)$ Teniendo en cuenta que los beneficios son la diferencia entre los precios de venta y de compra de las carcasas, la función de objetivos es $f(x, y) = 30x + 60y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 310) = 30 \cdot 0 + 60 \cdot 310 = 0 + 1.860 = 1.860.$

$B \Rightarrow f(30, 310) = 30 \cdot 30 + 60 \cdot 310 = 900 + 18.600 = 19.500.$

$C \Rightarrow f(75, 275) = 30 \cdot 75 + 60 \cdot 275 = 2.250 + 16.500 = 18.750.$

$D \Rightarrow f(350, 0) = 30 \cdot 350 + 60 \cdot 0 = 10.500 + 0 = 10.500.$

El máximo se produce en el punto $B(30, 310)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 30x + 60y = 0 \Rightarrow y = -\frac{30}{60}x \Rightarrow m = -\frac{3}{6}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ obtiene\ vendiendo\ 30\ móviles\ tipo\ A\ y\ 310\ tipo\ A^{+}}$**.**

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 19.500\ euros}$**.**

3º) En un zona protegida de un parque natural el número de aves $N(t)$, en cientos, en función del tiempo t (años transcurridos desde que se contabilizan las aves) viene dado por la función $N(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & si \;\; 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} & si \;\; t > 10 \end{cases}$.

a) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $N(t)$. ¿Entre que años crece la función? ¿Entre que años decrece?

b) ¿Cuándo se alcanza el número mínimo de aves en el parque? ¿Cuántas aves hay en ese momento?

c) Calcule el intervalo de tiempo en el que la población de aves se mantiene entre 5.000 y 7.500 aves. ¿A qué valor tiende la población de aves con el paso del tiempo?

Solución

a) Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $N(t)$ es continua en R, excepto para $t = 10$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ t = 10 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to 10^-} N(t) = \lim\limits_{t \to 10} (t^2 - 8t + 50) = 70 = N(10) \\ \lim\limits_{t \to 10^+} N(t) = \lim\limits_{t \to 10} \left(95 - \frac{250}{t}\right) = 70 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 10^-} N(t) = \lim_{t \to 10^+} N(t) = N(t) \Rightarrow La\ función\ es\ continua\ en\ [0, 10).$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$N'(t) = \begin{cases} 2t - 8 & si \;\; 0 \leq t \leq 10 \\ \frac{250}{t^2} & si \;\; t > 10 \end{cases} \Rightarrow N'(t) = 0 \Rightarrow 2t - 8 = 0 \Rightarrow t = 4.$$

En $[0, 10)$ la función $N(t)$ es una parábola convexa $(\cup)$, por ser positivo el coeficiente de t^2, por lo cual la función tiene un mínimo relativo para $t = 4$.

Teniendo en cuenta lo anterior y que $\frac{250}{t^2} > 0, \forall t \in R$, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: N'(t) > 0 \Rightarrow t\epsilon(4, +\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento: N'(t) < 0 \Rightarrow t\epsilon(0, 4).}$$

$$\underline{N(t)\ decrece\ los\ cuatro\ primeros\ años\ y\ crece\ el\ resto\ del\ tiempo.}$$

b) $N(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 50 = 16 - 32 + 50 = 34.$

$$\underline{El\ mínimo\ número\ de\ aves\ del\ parque\ se\ produce\ el\ cuarto\ año.}$$

$$\underline{El\ menor\ número\ de\ aves\ en\ el\ parque\ es\ de\ 3.400.}$$

$c)\qquad N(t)=50 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} t^2-8t+50=50 \rightarrow t\in[0,10) \\ 95-\frac{250}{t}=50 \rightarrow t\in(10,+\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} t^2-8t+50=50;\ \ t^2-8t=0;\ \ t(t-8)=0 \Rightarrow t_1=0, t_2=8 \\ 95-\frac{250}{t}=50;\ \ \frac{250}{t}=45;\ \ t=\frac{250}{45}=\frac{50}{9}=5{,}5 \notin (10,+\infty) \end{matrix}\right\}.$$

$$N(t)=75 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} t^2-8t+50=75 \rightarrow t\in[0,10) \\ 95-\frac{250}{t}=75 \rightarrow t\in(10,+\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} t^2-8t-25=0;\ \ t=\frac{8\pm\sqrt{64+100}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{164}}{2} \Rightarrow t\notin[0,10) \\ 95-\frac{250}{t}=75;\ \ \frac{250}{t}=20;\ \ t=\frac{250}{20} \Rightarrow t=12{,}5 \end{matrix}\right\}.$$

$\underline{El\ parque\ tiene\ entre\ 5.000\ y\ 7.500\ aves\ entre\ los\ años\ 8\ y\ 12{,}5}$**.**

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(95-\frac{250}{t}\right)=95.$$

$\underline{Con\ el\ tiempo\ se\ estabilizan\ las\ aves\ en\ el\ parque\ en\ 9.500}$**.**

4º) Dada la función $f(x) = x^3 - ax^2 + 8x$.

a) Calcule el valor del parámetro a teniendo en cuenta que la función $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = 2$.

b) Para $a = 6$, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.

Solución

a) Una función polinómica tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada y es distinta de cero la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + 8. \qquad f''(x) = 6x - 2a. \qquad f'''(x) = 6 \neq 0.$$

$$f''(2) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 2 - 2a = 0;\; 6 - a = 0 \Rightarrow a = 6.$$

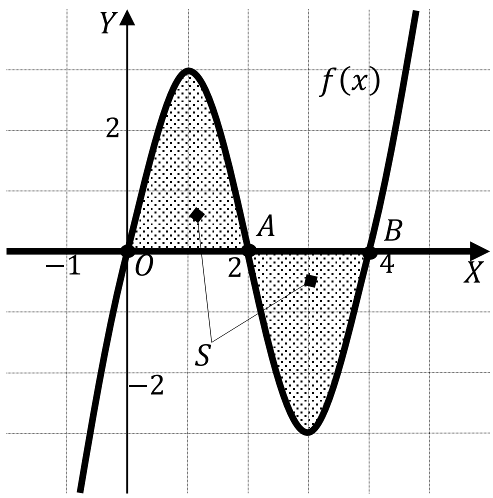
$$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ un\ punto\ de\ inflexión\ en\ x = 2\ para\ a = 6}.$$

b) Para $a = 6$ la función resulta $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, cuyos puntos de corte con el eje X son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0;\; x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0;\; x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 3 \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \rightarrow A(2,0) \\ x_3 = 4 \rightarrow B(4,0) \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta que $f(1) = 3 > 0$, la representación gráfica, aproximada, de la función, donde se sombrea la superficie a calcular, es la que se indica en la figura adjunta.



$$S = \int_0^2 f(x) \cdot dx + \int_4^2 f(x) \cdot dx =$$

$$= [F(x)]_0^2 + [F(x)]_4^2 =$$

$$= F(2) - F(0) + F(2) - F(4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2 \cdot F(2) - F(0) - F(4). \quad (*)$$

$$F(x) = \int (x^3 - 6x^2 + 8x) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + C = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 + C.$$

Sustituyendo el valor obtenido de $F(x)$ en la expresión (*):

$$S = 2 \cdot \left(\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2\right) - 0 - \left(\frac{4^4}{4} - 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2\right) =$$

$$= 2 \cdot (4 - 16 + 16) - 64 + 128 - 64 = 8 \Rightarrow$$

$$\underline{S = 8\, u^2}.$$

5º) Un estudio revela que 2 de cada 5 habitantes de una determinada población son menores de 30 años, el 70 % de los habitantes realizan ejercicio físico con regularidad y el 30 % de los habitantes son menores de 30 años y realizan ejercicio físico con regularidad.

a) ¿Qué porcentaje de la población ni es menor de 30 años ni realiza ejercicio físico con regularidad?

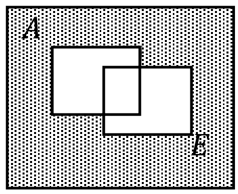
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un habitante que no realiza ejercicio físico con regularidad sea menor de 30 años?

c) ¿Son independientes los sucesos ser menor de 30 años y realizar ejercicio físico con regularidad?

Solución

Sea $A\ y\ E$ los sucesos "tener menos de 30 años" y "hacer deporte regularmente", respectivamente.

$Datos: P(A) = \frac{2}{5} = 0{,}4;\ \ P(E) = 0{,}7;\ \ P(A \cap E) = 0{,}3.$



$P(\overline{A} \cap \overline{E}) = 1 - P(A \cup E)$

a) $P = P(\overline{A} \cap \overline{E}) = 1 - P(A \cup E) =$

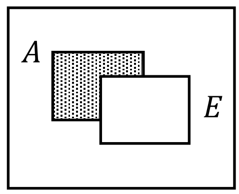
$= 1 - [P(A) + P(E) - P(A \cap B)] = 1 - (0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}3) =$

$= 1 - 0{,}8 \Rightarrow$

$$\underline{P = P(\overline{A} \cap \overline{E}) = 0{,}2}.$$

b) $P = (A/\overline{E}) = \frac{P(A \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(A) - P(A \cap E)}{1 - P(E)} = \frac{0{,}4 - 0{,}3}{1 - 0{,}7} =$

$= \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3} \Rightarrow$



$P(A \cap \overline{E}) = P(A) - P(A \cap E)$

$$\underline{P = P(A/\overline{E}) = \frac{1}{3} = 0{,}3333}.$$

c) Dos sucesos A y E son independientes cuando $P(A \cap E) = P(A) \cdot P(E)$:

$P(A) \cdot P(E) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28 \neq P(A \cap E).$

$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ A\ y\ B\ no\ son\ independientes}.$

6º) Tomamos una muestra aleatoria de 36 facturas de consumo mensual de luz (en euros) y el intervalo de confianza obtenido al 95 % para el consumo mensual medio es $[60{,}1; 69{,}9]$. Según esta información:

a) ¿Cuál fue el consumo medio muestral de luz?

b) ¿Cuál es el error máximo cometido?

c) Determine un intervalo de confianza al 90 % para el consumo medio de luz.

Solución

a) $\overline{x} = \frac{69{,}9+60{,}1}{2} = \frac{130}{2} = 65.$

$$\underline{El\ consumo\ de\ luz\ medio\ muestral\ fue\ de\ 65\ euros}.$$

b) $E = \frac{69{,}9-60{,}1}{2} = \frac{9{,}8}{2} = 4.9.$

$$\underline{El\ error\ máximo\ cometido\ es\ de\ 4{,}9\ euros}.$$

c) Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha = 0{,}90 \ \rightarrow\ \alpha = 1-0{,}90 = 0{,}1 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$

$(1-0{,}05 = 0{,}9500 \ \rightarrow z = 1{,}645).$

Datos: $n = 36;\ \ \overline{x} = 65;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

Nos falta la desviación típica. Se puede obtener teniendo en cuenta que para un nivel de confianza del 95 % el error máximo es $E = 4{,}9$.

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0{,}95 \ \rightarrow\ \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$

$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$

$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{z_{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{4{,}9\cdot\sqrt{36}}{1{,}96} = \frac{29{,}4}{1{,}96} \Rightarrow \sigma = 15.$

Ahora ya se puede obtener el intervalo de confianza pedido.

$\left(65 - 1{,}645 \cdot \frac{15}{\sqrt{36}};\ 65 + 1{,}645 \cdot \frac{15}{\sqrt{36}}\right);\ \ (65 - 1{,}645 \cdot 2{,}5;\ 65 + 1{,}645 \cdot 2{,}5);$

$(65 - 4{,}1125;\ 65 + 4{,}1125).$

$$\underline{I.C._{90\ \%} = (60{,}8875;\ 69{,}1125)}.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 6 preguntas, de las que puede realizar un máximo de 3, combinadas como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, solo se corregirán los 3 primeros realizados.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Para dos matrices A y B se verifica que: $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ y $2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule las matrices A y B.

$b)$ Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcule su valor.

2º) En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1.500 euros y el de cada motor de coche de 2.000 euros.

$a)$ Planee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.

$b)$ Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

$c)$ Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

3º) Los costes de una empresa, en cientos de miles de euros, vienen dados por la función $C(t) = t^3 - \frac{21}{2}t^2 + 30t - 12$, siendo t el tiempo en años y $1 \le t \le 6$.

$a)$ Calcule los costes máximos alcanzados. ¿En qué momento se producen?

$b)$ Estudie el crecimiento y decrecimiento de los costes. Determine el coste mínimo y en qué momento se alcanza.

$c)$ ¿Cuáles son los costes al inicio y al final del periodo en estudio?

4º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & si \ \ x \le 1 \\ 2x - a & si \ \ x > 1 \end{cases}$.

$a)$ Calcule el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en todo R.

$b)$ Para $a = 2$, calcule los extremos relativos de la función $f(x)$ y represéntala.

$c)$ Calcule el área de la región delimitada por la función $f(x)$, para $a = 2$, y las rectas $y = 0, x = 0$ y $x = 2$.

5º) Un estudio revela que el 70 % de las personas de una población sigue la serie de televisión A, el 60 % sigue la serie B y el 30 % sólo sigue la serie A.

$a)$ ¿Qué porcentaje de la población sigue las dos series?

$b)$ Si elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que siga alguna de las dos series?

$c)$ Si elegimos al azar una persona que sigue la serie A, ¿cuál es la probabilidad de que siga también la serie B?

6º) Se sabe que la edad de los trabajadores en las fábricas de una zona sigue una distribución normal de desviación típica 10 años. Con una muestra de trabajadores de la zona el intervalo de confianza al 90 % para la media de edad obtenido es $(39{,}25; 44{,}75)$:

$a)$ ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra utilizada?

$b)$ ¿Cuánto vale la media muestral?

$c)$ ¿Cuál sería el error cometido a un nivel de confianza del 95 %?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Para dos matrices A y B se verifica que: $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ y $2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule las matrices A y B.

$b)$ Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcule su valor.

Solución

$$a) \quad \left.\begin{array}{l} A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{array}{l} A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -2A + 2B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \\ 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 3B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$b)$ $A \cdot X - B = X;\ \ A \cdot X - X = B;\ \ A \cdot X - X \cdot I = B;\ \ (A - I) \cdot X = B;$

$(A - I)^{-1} \cdot (A - I) \cdot X = (A - I)^{-1} \cdot B;\ \ I \cdot X = (A - I)^{-1} \cdot B \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X = (A - I)^{-1} \cdot B}.$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La inversa de la matriz $(A - I)$ es la siguiente:

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3;\ \ (A - I)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ (A - I)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A-I)^t}{|A-I|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{3} \Rightarrow\ (A - I)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A - I)^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}.$$

2º) En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1.500 euros y el de cada motor de coche de 2.000 euros.

a) Planee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

Solución

a) Sean x e y el número de motores para motos y para coches que se ensamblan en la empresa, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} 60x+45y \leq 60 \cdot 120 \rightarrow Manual \\ 20x+40y \leq 60 \cdot 90 \rightarrow Máquina \\ x \geq 0;\; y \geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x+3y \leq 480 \\ x+2y \leq 270 \\ x \geq 0;\; y \geq 0 \end{array}\right\}.$

b)

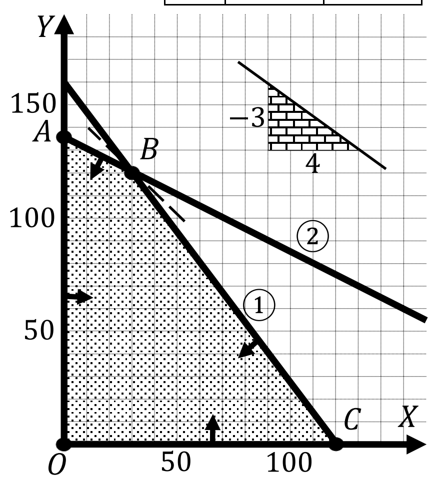
$(1) \Rightarrow 4x+3y \leq 480 \Rightarrow y \leq \frac{480-4x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	120
y	160	0

$(2) \Rightarrow x+2y \leq 270 \Rightarrow y \leq \frac{270-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	270
y	135	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=270 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=270;\;\; y=135 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{A(0,135)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y=480 \\ x+2y=270 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -4x-3y=-480 \\ 4x+8y=1.080 \end{array}\right\} \Rightarrow 5y=600;\;\; y=120;$

$x+240=270;\;\; x=30 \Rightarrow \underline{B(30,120)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 4x+3y=480 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x=480;\;\; x=120 \Rightarrow \underline{C(120,0)}.$

c) La función objetivo es $f(x,y)=1.500x+2.000y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,135) = 1.500 \cdot 0 + 2.000 \cdot 135 = 0 + 270.000 = 270.000.$

$B \Rightarrow f(30,120) = 1.500 \cdot 30 + 2.000 \cdot 120 = 45.000 + 240.000 = 285.000.$

$C \Rightarrow f(120,0) = 1.500 \cdot 120 + 2.000 \cdot 0 = 180.000 + 0 = 180.000.$

El valor máximo se produce en el punto $B(30,120)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 1.500x + 2.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1.500}{2.000}x = -\frac{3}{4}x \Rightarrow m = -\frac{3}{4}.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ ensamblando\ 30\ motores\ de\ motos\ y\ 120\ de\ coche}$**.**

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 285.000\ euros}$**.**

3º) Los costes de una empresa, en cientos de miles de euros, vienen dados por la función $C(t) = t^3 - \frac{21}{2}t^2 + 30t - 12$, siendo t el tiempo en años y $1 \leq t \leq 6$.

a) Calcule los costes máximos alcanzados. ¿En qué momento se producen?

b) Estudie el crecimiento y decrecimiento de los costes. Determine el coste mínimo y en qué momento se alcanza.

c) ¿Cuáles son los costes al inicio y al final del periodo en estudio?

Solución

a) Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$C'(t) = 3t^2 - 21t + 30.$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 21t + 30;\ \ t^2 - 7t + 10 = 0;\ \ t = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = 5.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$C''(x) = 6t - 21.$$

$$C''(2) = 6 \cdot 2 - 21 < 0 \Rightarrow \textit{Máximo relativo para } t = 2.$$

$$\underline{\textit{El coste es máximo se produce a los } 2 \textit{ años}}.$$

$$C(2) = 2^3 - \frac{21}{2} \cdot 2^2 + 30 \cdot 2 - 12 = 8 - 43 + 60 - 12 = 68 - 55 = 13.$$

$$\underline{\textit{El coste máximo es de } 130.000 \textit{ euros}}.$$

b) $C''(5) = 6 \cdot 5 - 21 > 0 \Rightarrow \textit{Mínimo relativo para } t = 5.$

$$\underline{\textit{El coste mínimo se produce a los } 5 \textit{ años}}.$$

$$C(5) = 5^3 - \frac{21}{2} \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 - 12 = 125 - \frac{525}{2} + 150 - 12 =$$

$$= 275 - 262{,}5 - 12 = 275 - 274{,}5 = 0{,}5.$$

$$\underline{\textit{El coste máximo es de } 50.000 \textit{ euros}}.$$

Teniendo en cuanta que la función costes es polinómica, por lo cual, es continua en su dominio, y considerando los puntos máximo y mínimo, se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\textit{Crecimiento}: C'(t) > 0 \Rightarrow t\epsilon(1, 2) \cup (5, 6)}.$$

$$\underline{\textit{Decrecimiento}: C'(t) < 0 \Rightarrow t\epsilon(2, 5)}.$$

c) $C(1) = 1^3 - \frac{21}{2} \cdot 1^2 + 30 \cdot 1 - 12 = 1 - \frac{21}{2} + 30 - 12 = 31 - 10{,}5 - 12 =$

$= 31 - 23{,}5 = 8{,}5.$

$$C(6) = 6^3 - \frac{21}{2} \cdot 6^2 + 30 \cdot 6 - 12 = 216 - 378 + 180 - 12 =$$

$$= 396 - 390 = 6.$$

$$\underline{Coste\ inicial: 850.000\ euros;\ \ coste\ final: 600.000\ euros}.$$

4º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & si \ \ x \leq 1 \\ 2x - a & si \ \ x > 1 \end{cases}$.

$a)$ Calcule el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en todo R.

$b)$ Para $a = 2$, calcule los extremos relativos de la función $f(x)$ y represéntala.

$c)$ Calcule el área de la región delimitada por la función $f(x)$, para $a = 2$, y las rectas $y = 0, x = 0$ y $x = 2$.

Solución

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + 1) = 0 = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x - a) = 2 - a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 0 = 2 - a \Rightarrow$$

$$\underline{a = 2}.$$

$b)$ Para $a = 2$ la función es: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & si \ \ x \leq 1 \\ 2x - 2 & si \ \ x > 1 \end{cases}$.

En el intervalo $(-\infty, 1]$ la función es la parábola $g(x) = -x^2 + 1$, que es cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de x^2, y cuyo vértice es el siguiente:

$g'(x) = -2x = 0 \Rightarrow x =.$

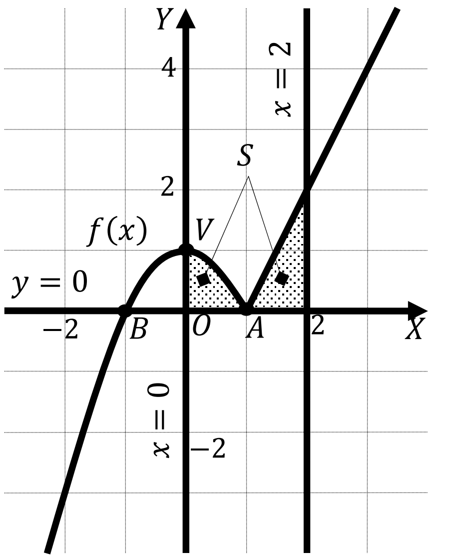
$g(0) = 1 \Rightarrow V(0, 1)$, que es un máximo relativo de la función.

Los puntos de corte con el eje X son los siguientes:

$g(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1$, que dan lugar a los puntos $A(1, 0)\ y\ B(-1, 0)$.

Nótese que el punto $A(1, 0)$ constituye un mínimo relativo de la función.

En el intervalo $[1, +\infty$ la función es la recta $h(x) = 2x - 2$ de pendiente $m = 2$ y que contiene al punto $A(1, 0)$.



La representación gráfica de la situación, de forma aproximada, se expresa en la figura anterior, donde se ha sombreado la superficie a calcular.

$$S = \int_0^1 (-x^2 + 1) \cdot dx + \int_1^2 (2x - 2) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 + \left[\frac{2x^2}{2} - 2x \right]_1^2 =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 + [x^2 - 2x]_1^2 = \left(-\frac{1^3}{3} + 1 \right) - 0 + (2^2 - 2 \cdot 2) - (1^2 - 2 \cdot 1) =$$

$$= -\frac{1}{3} + 1 + 4 - 4 - 1 + 2 = 2 - \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{S = \frac{5}{3}\ u^2 = 1{,}67\ u^2}.$$

5º) Un estudio revela que el 70 % de las personas de una población sigue la serie de televisión A, el 60 % sigue la serie B y el 30 % sólo sigue la serie A.

a) ¿Qué porcentaje de la población sigue las dos series?

b) Si elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que siga alguna de las dos series?

c) Si elegimos al azar una persona que sigue la serie A, ¿cuál es la probabilidad de que siga también la serie B?

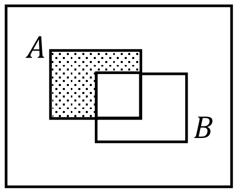
Solución

$$Datos:\ P(A) = 0{,}70;\ \ P(B) = 0{,}60;\ \ P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}30.$$

a) $\quad P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}30 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) - 0{,}30 = 0{,}70 - 0{,}30 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{P(A \cap B) = 0{,}40}.$$



$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B)$

b) $P = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{P(A \cup B) = 0{,}90}.$$

c) $\quad P = P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}40}{0{,}70} \Rightarrow$

$$\underline{P(B/A) = 0{,}5714}.$$

6º) Se sabe que la edad de los trabajadores en las fábricas de una zona sigue una distribución normal de desviación típica 10 años. Con una muestra de trabajadores de la zona el intervalo de confianza al 90 % para la media de edad obtenido es $(39{,}25; 44{,}75)$:

$a)$ ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra utilizada?

$b)$ ¿Cuánto vale la media muestral?

$c)$ ¿Cuál sería el error cometido a un nivel de confianza del 95 %?

Solución

$a, b)$ $\overline{x} = \frac{44{,}75+39{,}25}{2} = \frac{84}{2} \Rightarrow \underline{\overline{x} = 42}$. $E = \frac{44{,}75-39{,}25}{2} = \frac{5{,}5}{2} = 2{,}75$.

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$

$(1 - 0{,}05 = 0{,}9500 \rightarrow z = 1{,}645).$

Datos: $\overline{x} = 42;\ \sigma = 10;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645;\ E = 2{,}75.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E} = \frac{1{,}645 \cdot 10}{2{,}75} = \frac{16{,}45}{2{,}75} = 5{,}9818 \Rightarrow.$

$\Rightarrow n = 5{,}9818^2 = 35{,}78.$

$$\underline{El\ tamaño\ de\ la\ muestra\ ha\ sido\ 36}.$$

$c)$ Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$

$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $\overline{x} = 42;\ \sigma = 10;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96;\ n = 36.$

$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{36}} = \frac{19{,}6}{6} \Rightarrow$

$$\underline{E \cong 2{,}27\ años}.$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con tres ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a dos de un bloque y a uno de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuesta a qué cuatro ejercicios se responden en el examen. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

1º) ¿Para qué valores de a tiene soluciones el sistema $\begin{cases} x+y+2z=12 \\ 2x-y-z=12 \\ 2x+2y+az=12 \end{cases}$? Resuelve el sistema en el caso $a=0$.

Si para un valor a el sistema es incompatible, y sustituimos los términos independientes $(12, 12, 12)$ por $(12, 12, 24)$, ¿cómo clasificaríamos el sistema resultante?

2º) Justifica que la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es regular, y calcula su inversa.

3º) Un orfebre emplea 2 horas para fabricar un anillo, y tarda 3 horas en hacer un brazalete. El material de cada anillo le cuesta 40 euros, y el del brazalete 320 euros. A cambio, por cada anillo gana 10 euros y por cada brazalete gana 90 euros. Si no quiere dedicar más de 50 horas a su trabajo semanal y no puede gastar en material más de 2.560 euros, ¿cuántos anillos y brazaletes en una semana le reportarán el máximo beneficio? ¿Cambiaría la respuesta si ya tuviera apalabrados ocho anillos? ¿Cuánto tiempo trabaja en total en ambos casos en la fabricación de anillos y brazaletes?

Bloque 2. Análisis.

4º) Representa conjuntamente, en el intervalo de abscisas $[-2, 3]$, las gráficas de las funciones $f(x)=x^2+2x$ y $g(x)=5-2x$. ¿Qué punto $x=a$ hace que sea continua la función $h(x)=\begin{cases} f(x)\ si\ -2 \leq x < a \\ g(x)\ si\ a \leq x \leq 3 \end{cases}$? Resalta la gráfica de h en el dibujo anterior. ¿Cuáles son el máximo y el mínimo de los valores de h en $[-2, 3]$?

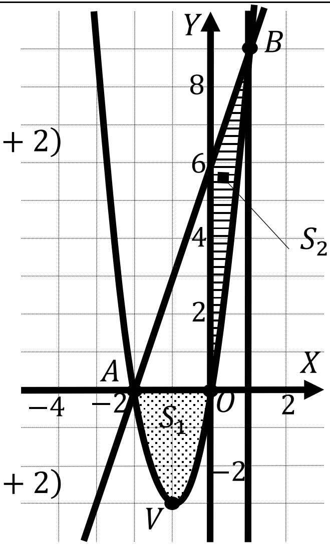
5º) La distancia que ha recorrido un coche hasta el instante t, desde que arrancó en $t=0$, viene dada por la función $e(t)=\begin{cases} 120t+90 & si \quad 1 \leq t < 3 \\ C-240t+150t^2-20t^3 & si \quad 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$ entre $t=1\ y\ t=4$. En $t=4$ se para, de forma que $e(t)=e(4)$ para cada t en $(4, 5]$.

a) Calcula el valor de C, considerando que $e(t)$ define una función continua.

b) La velocidad en cada instante $v(t)$ es la derivada del espacio recorrido, es decir: $v(t)=e'(t)$. Expresa cuánto vale dicha derivada en cada punto, e investiga si es una función continua en $[1, 5]$. ¿Cómo expresarías, en términos de la velocidad, que la gráfica de $e(t)$ es recta en el intervalo $[1, 3]$ y en el intervalo $[4, 5]$?

c) Calcula la distancia recorrida entre $t=3\ y\ t=4$, es decir $e(4)-e(3)$. ¿Por qué es igual a $\int_3^4 v(t)\cdot dt$?

6º) Calcula el área de las dos regiones señaladas en el dibujo adjunto.



Bloque 3. Estadística y probabilidad.

7º) En una clase hay tres llaveros: A, B y C, el primero con cinco llaves, el segundo con siete y el tercero con ocho. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero, y de él se toma a su vez una llave al azar. Entendemos que, cuando se escoge una cosa al azar entre varias, todas ellas tienen la misma probabilidad de ser la escogida. Se pide:

a) La probabilidad de que la llave elegida abra el trastero.

b) Si resulta que la abre, la probabilidad de que sea del llavero A.

8º) Una variable X es normal de media 25 y desviación típica 5, y otra Y es también normal, pero con media 28 y desviación típica 1.

a) Calcula las probabilidades $P(X > 30)$ y $P(Y > 30)$. ¿Cuál es mayor?

b) Tomamos una muestra de $n = 4$ valores independientes de X y anotamos su promedio $\overline{X}$. Calcula $P(\overline{X} > 30)$. ¿Cuál sería el resultado si $n = 9$?

c) ¿Cómo explicarías la comparación del resultado de b) con el de a), sin recurrir a la fórmula?

9º) Como ya sabe la cifra de asistentes, el ayuntamiento de Zaragoza ha asegurado que la duración de la ofrenda de flores del día del Pilar tendrá, en horas, una distribución de probabilidad normal con media 8 y desviación típica $\sqrt{2}/5$.

a) ¿Puedes afirmar, con al menos el 95 % de probabilidad de acierto, que la duración de la ofrenda será inferior a ocho horas y media? ¿Podemos hacerlo con probabilidad mayor del 99 %?

b) Una variable normal estándar Z cumple que $P(Z \leq 2{,}3263) = 0{,}99$. ¿Qué desviación típica (en lugar de la dada, y manteniendo la media de ocho horas) debería tener la duración de la ofrenda para que la probabilidad de ser menor que ocho horas y media fuera del 99 %?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

1º) ¿Para qué valores de a tiene soluciones el sistema $\begin{cases} x+y+2z=12 \\ 2x-y-z=12 \\ 2x+2y+az=12 \end{cases}$? Resuelve el sistema en el caso $a=0$.

Si para un valor a el sistema es incompatible, y sustituimos los términos independientes $(12,12,12)$ por $(12,12,24)$, ¿cómo clasificaríamos el sistema resultante?

Solución

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema tiene solución cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & a & 12 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix}=-a+8-2+4+2-2a=12-3a=0;$$

$4-a=0 \Rightarrow a=4.$

$$\underline{Para\ a \neq 4 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = S.C.D.}$$

Resolvemos para el caso de $a=0$.

Para $a=0$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=12 \\ 2x-y-z=12 \\ 2x+2y=12 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 & 2 \\ 12 & -1 & -1 \\ 12 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{12}=\frac{12\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{12}=4-1+2+2=7.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 & 2 \\ 2 & 12 & -1 \\ 2 & 12 & 0 \end{vmatrix}}{12}=\frac{12\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{12}=4-2-4+1=-1.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & 12 \end{vmatrix}}{12}=\frac{12\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{12}=-1+4+2+2-2-2=3.$$

$$\underline{Solución: x=7,\ y=-1,\ z=3.}$$

Si para un valor a el sistema es incompatible y, sabiendo que el rango de A es, por lo menos 2, por ser uno de sus menores $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3 \neq 0$, tiene que ser, necesariamente $a=3$, para que $|M|=0$ y $Rang\ M=2$.

Para que el sistema sea incompatible, según el teorema de Rouché-Fröbenius, tiene que ser $Rang\ M' = 3$, como se comprueba a continuación mediante el método de Gauss.

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & 4 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & -3 & -5 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & -3 & -5 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 + 3F_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 3,$$ como queríamos comprobar.

El nuevo sistema resulta ser: $\begin{cases} x + y + 2z = 12 \\ 2x - y - z = 12 \\ 2x + 2y + 4z = 24 \end{cases}$, equivalente al sistema:

$\begin{cases} x + y + 2z = 12 \\ 2x - y - z = 12 \\ x + y + 2z = 12 \end{cases}$, que es, a su vez, equivalente al sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 12 \\ 2x - y - z = 12 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 12 \end{pmatrix}$.

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. = S.C.I.}$$

2º) Justifica que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es regular, y calcula su inversa.

Solución

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -4 \neq 0.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ tiene\ inversa, como\ se\ tenía\ que\ justificar.}$$

$$A^t = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{-4} \Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1} = -\tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

3º) Un orfebre emplea 2 horas para fabricar un anillo, y tarda 3 horas en hacer un brazalete. El material de cada anillo le cuesta 40 euros, y el del brazalete 320 euros. A cambio, por cada anillo gana 10 euros y por cada brazalete gana 90 euros. Si no quiere dedicar más de 50 horas a su trabajo semanal y no puede gastar en material más de 2.560 euros, ¿cuántos anillos y brazaletes en una semana le reportarán el máximo beneficio? ¿Cambiaría la respuesta si ya tuviera apalabrados ocho anillos? ¿Cuánto tiempo trabaja en total en ambos casos en la fabricación de anillos y brazaletes?

Solución

Sean x e y el número de anillos y brazaletes que fabrica semanalmente el orfebre, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} 2x+3y\le 50 \\ 40x+320y\le 2.560 \\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+3y\le 50 \\ x+8y\le 64 \\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 2x+3y\le 50 \Rightarrow y\le \frac{50-2x}{3} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	25	10
y	0	10

② $\Rightarrow x+8y\le 64 \Rightarrow y\le \frac{64-x}{8} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	24
y	8	5

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la sección factible, además del origen, son los siguientes:

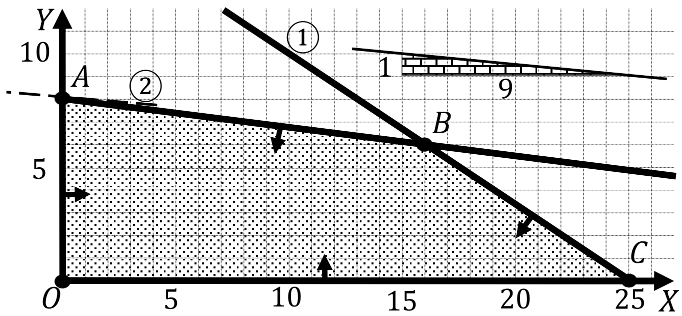
$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+8y=64\end{array}\right\} \Rightarrow A(0,8).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=50 \\ x+8y=64\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-3y=-50 \\ 2x+16y=128\end{array}\right\} \Rightarrow 13y=78;$

$y=\frac{78}{13} \Rightarrow y=6;\ \ x+48=64;\ \ x=16 \Rightarrow B(16,6)$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 2x+3y=50\end{array}\right\} \Rightarrow 2x=50;\ \ x=25 \Rightarrow C(25,0).$



La función de objetivos: $f(x,y)=10x+90y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,8)=10\cdot 0+90\cdot 8=0+7200=720.$

$B \Rightarrow f(16,6)=10\cdot 16+90\cdot 6=160+540=700.$

$C \Rightarrow f(25,0)=10\cdot 25+90\cdot 0=250+0=250.$

El valor máximo se produce en el punto $A(0,8)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y)=10x+90y=0 \Rightarrow y=-\frac{10}{90}x=-\frac{1}{9}x \Rightarrow m=-\frac{1}{9}.$

$\underline{\textit{Maximiza el beneficio fabricando } 0 \textit{ anillos y } 8 \textit{ brazaletes a la semana.}}$

$\underline{\textit{El beneficio máximo es de } 720 \textit{ euros a la semana.}}$

El número total de horas trabajadas es: $n_1=3\cdot 8=\underline{24}$.

Si se conoce de antemano que tiene que fabricar, al menos 8 anillos, el problema es el siguiente:

Las restricciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} 2x+3y\le 50 \\ 40x+320y\le 2.560 \\ x\ge 8;\ y\ge 0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+3y\le 50 \\ x+8y\le 64 \\ x\ge 8;\ y\ge 0\end{array}\right\}.$

x	25	10
y	0	10

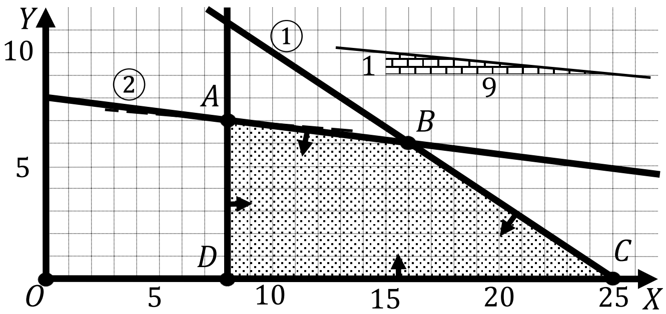
① $\Rightarrow 2x+3y\le 50 \Rightarrow y\le \frac{50-2x}{3} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	24
y	8	5

② $\Rightarrow x+8y\le 64 \Rightarrow y\le \frac{64-x}{8} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

La nueva región factible es la que aparece sombreada en la figura siguiente.

Los vértices de la nueva sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=8 \\ x+8y=64\end{array}\right\} \Rightarrow$

$8+8y=64;\ \ y=7 \Rightarrow A(8,7).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=50 \\ x+8y=64\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-3y=-50 \\ 2x+16y=128\end{array}\right\} \Rightarrow 13y=78; y=\frac{78}{13} \Rightarrow y=6;\ \ x+48=64;\ \ x=16 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(16,6).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 2x+3y=50\end{array}\right\} \Rightarrow 2x=50;\ \ x=25 \Rightarrow C(25,0).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=8 \\ y=0\end{array}\right\} \Rightarrow D(8,0).$

La función de objetivos sigue siendo la misma: $f(x,y)=10x+90y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(8,7)=10\cdot 8+90\cdot 7=80+630=710.$

$B \Rightarrow f(16,6)=10\cdot 16+90\cdot 6=160+540=700.$

$C \Rightarrow f(25,0)=10\cdot 25+90\cdot 0=250+0=250.$

$D \Rightarrow f(8,0)=10\cdot 8+90\cdot 0=80+0=80.$

El valor máximo se produce en el punto $A(8,7)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 10x + 90y = 0 \Rightarrow y = -\frac{10}{90}x = -\frac{1}{9}x \Rightarrow m = -\frac{1}{9}.$$

$$\underline{Maximiza\ el\ beneficio\ fabricando\ 8\ anillos\ y\ 7\ brazaletes\ a\ la\ semana}\mathbf{.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 710\ euros\ a\ la\ semana}\mathbf{.}$$

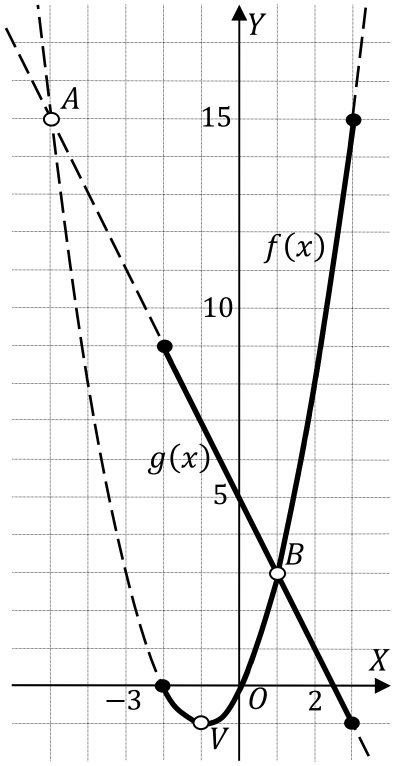
El número total de horas trabajadas es: $n_2 = 8 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 16 + 21 = \underline{37}$.

Bloque 2. Análisis.

4º) Representa conjuntamente, en el intervalo de abscisas $[-2, 3]$, las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + 2x$ y $g(x) = 5 - 2x$. ¿Qué punto $x = a$ hace que sea continua la función $h(x) = \begin{cases} f(x)\ si\ -2 \leq x < a \\ g(x)\ si\ a \leq x \leq 3 \end{cases}$? Resalta la gráfica de h en el dibujo anterior. ¿Cuáles son el máximo y el mínimo de los valores de h en $[-2, 3]$?

Solución

Los puntos de corte de ambas funciones tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.



$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 2x = 5 - 2x;$

$x^2 + 4x - 5 = 0;\ \ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} =$

$= -2 \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \rightarrow A(-5, 15) \\ x_2 = 1 \rightarrow B(1, 3) \end{cases}.$

El vértice de la parábola es el siguiente:

$f'(x) = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \rightarrow V(-1, -1).$

Una función es continua en un punto cuando sus límites laterales son iguales e igual al valor de la función en ese punto.

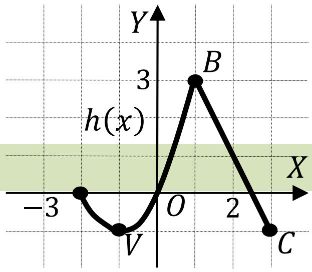
$\lim_{x \to a^-} h(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x^2 + 2x) = a^2 + 2a.$

$\lim_{x \to a^+} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} (5 - 2x) = 5 - 2a = h(a).$

$\lim_{x \to a^-} h(x) = \lim_{x \to a^+} h(x) = h(a) \Rightarrow a^2 + 2a = 5 - 2a;\ \ a^2 + 4a - 5 = 0;$

$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = -2 \pm 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -5 \notin D(h) \\ a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$



$\underline{a = x = 1}$.

La última figura expresa la función $h(x)$ en el intervalo $[-2, 3]$, donde se observa como máximo absoluto el punto $B(1, 3)$ y mínimos absolutos los puntos $V(-1, -1)$ y $C(3, -1)$.

5º) La distancia que ha recorrido un coche hasta el instante t, desde que arrancó en $t = 0$, viene dada por la función $e(t) = \begin{cases} 120t + 90 & si \quad 1 \leq t < 3 \\ C - 240t + 150t^2 - 20t^3 & si \quad 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$ entre $t = 1$ y $t = 4$. En $t = 4$ se para, de forma que $e(t) = e(4)$ para cada t en $(4, 5]$.

$a)$ Calcula el valor de C, considerando que $e(t)$ define una función continua.

$b)$ La velocidad en cada instante $v(t)$ es la derivada del espacio recorrido, es decir: $v(t) = e'(t)$. Expresa cuánto vale dicha derivada en cada punto, e investiga si es una función continua en $[1, 5]$. ¿Cómo expresarías, en términos de la velocidad, que la gráfica de $e(t)$ es recta en el intervalo $[1, 3]$ y en el intervalo $[4, 5]$?

$c)$ Calcula la distancia recorrida entre $t = 3$ y $t = 4$, es decir $e(4) - e(3)$. ¿Por qué es igual a $\int_3^4 v(t) \cdot dt$?

Solución

$a)$ Una función es continua en un punto cuando sus límites laterales son iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$$\lim_{t \to 3^-} e(t) = \lim_{t \to 3} (120t + 90) = 120 \cdot 3 + 90 = 360 + 90 = 450.$$

$$\lim_{t \to 3^+} e(t) = \lim_{t \to 3} (C - 240t + 150t^2 - 20t^3) =$$

$$= C - 240 \cdot 3 + 150 \cdot 3^2 - 20 \cdot 3^3 = C - 720 + 1.350 - 540 = C + 90 = e(3).$$

$$\lim_{t \to 3^-} e(t) = \lim_{t \to 3^+} e(t) = e(3) \Rightarrow 450 = C + 90; \quad C = 360.$$

La función resulta: $e(t) = \begin{cases} 120t + 90 & si \quad 1 \leq t < 3 \\ 360 - 240t + 150t^2 - 20t^3 & si \quad 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$.

$$\underline{La\ función\ e(t)\ es\ continua\ en\ su\ dominio\ para\ C = 360.}$$

$b)$ $\quad e(4) = 360 - 240 \cdot 4 + 150 \cdot 4^2 - 20 \cdot 4^3 =$

$$= 360 - 960 + 2.400 - 1.280 = 2760 - 2.240 \Rightarrow e(4) = 520.$$

Considerando que $e(t) = e(4)$ para cada t en $(4, 5]$, la función puede expresarse de la forma siguiente: $e(t) = \begin{cases} 120t + 90 & si \quad 1 \leq t < 3 \\ 360 - 240t + 150t^2 - 20t^3 & si \quad 3 \leq t \leq 4 \\ 520 & si \quad 4 < t \leq 5 \end{cases}$.

$$v(t) = e'(t) = \begin{cases} 120 & si \quad 1 \leq t < 3 \\ -240 + 300t - 60t^2 & si \quad 3 \leq t \leq 4 \\ 0 & si \quad 4 < t \leq 5 \end{cases}.$$

Para estudiar la continuidad de $v(t)$ es necesario que sea continua en los puntos $t = 3$ y $t = 4$.

Para $t = 3$:

$$\lim_{t \to 3^-} v(t) = \lim_{t \to 3} 120 = 120.$$

$$\lim_{t \to 3^+} v(t) = \lim_{t \to 3} (-240 + 300t - 60t^2) = -240 + 300 \cdot 3 - 60 \cdot 9 =$$

$$= -240 + 900 - 540 = 900 - 780 = 120 = v(3).$$

$\lim_{t\to 3^-} v(t) = \lim_{t\to 3^+} v(t) = v(3) \Rightarrow v(t)\ es\ continua\ para\ t = 3.$

Para $t = 4$:

$\lim_{t\to 4^-} v(t) = \lim_{t\to 4}(-240 + 300t - 60t^2) = -240 + 300 \cdot 4 - 60 \cdot 16 =$

$= -240 + 1.200 - 960 = 1.200 - 1.200 = 0 = v(4).$

$\lim_{t\to 4^+} v(t) = \lim_{t\to 4} 0 = 0.$

$\lim_{t\to 4^-} v(t) = \lim_{t\to 4^+} v(t) = v(4) \Rightarrow v(t)\ es\ continua\ para\ t = 4.$

$\underline{La\ función\ v(t)\ es\ continua\ en\ su\ dominio}$**.**

De la expresión $v(t) = e'(t) = \begin{cases} 120 & si \quad 1 \leq t < 3 \\ -240 + 300t - 60t^2 & si \quad 3 \leq t \leq 4 \\ 0 & si \quad 4 < t \leq 5 \end{cases}$ se deduce que la gráfica de $e(t)$ es recta en el intervalo $[1, 3]$ y en el intervalo $[4, 5]$

$c)$ Teniendo en cuenta que si $v(t) = e'(t)$, puede hacerse lo siguiente:

$\int v(t) \cdot dt = \int e'(t) \cdot dt = e(t).$

Teniendo en cuenta lo anterior:

$\int_3^4 v(t) \cdot dt = e(4) - e(3) \Rightarrow \int_3^4 (-240 + 300t - 60t^2) \cdot dt =$

$= \left[-240t + \frac{300t^2}{2} - \frac{60t^3}{3}\right]_3^4 = [-240t + 150t^2 - 20t^3]_3^4 =$

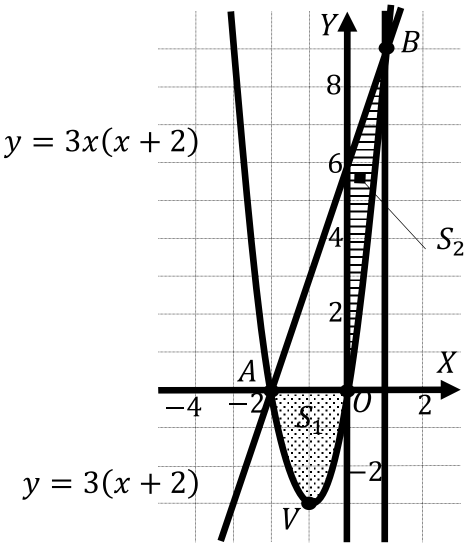
$= (-240 \cdot 4 + 150 \cdot 16 - 20 \cdot 64) - (-240 \cdot 3 + 150 \cdot 9 - 20 \cdot 27) =$

$= (-960 + 2.400 - 1.280) - (-720 + 1.350 - 540) =$

$= (2.400 - 2.240) - (1.350 - 1.260) = 160 - 90 \Rightarrow$

$\underline{e_{(3,4)} = 70}$**.**

6º) Calcula el área de las dos regiones señaladas en el dibujo adjunto.



Solución

$$S_1 = \int_0^{-2} [3x(x+2)] \cdot dx = \int_0^{-2} (3x^2 + 6x) \cdot dx = \left[\frac{3 \cdot x^3}{3} + \frac{6 \cdot x^2}{2}\right]_0^{-2} =$$

$$= [x^3 + 3x^2]_0^{-2} = [(-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2] - 0 = -8 + 12 \Rightarrow$$

$$\underline{S_1 = 4\ u^2.}$$

$$S_2 = \int_0^1 [3(x+2) - 3x(x+2)] \cdot dx = \int_0^1 (3x + 6 - 3x^2 - 6x) \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 (-3x^2 - 3x + 6) \cdot dx = \left[-\frac{3 \cdot x^3}{3} - \frac{3 \cdot x^2}{2} + 6x\right]_0^1 = \left[-x^3 - \frac{3 \cdot x^2}{2} + 6x\right]_0^1 =$$

$$= \left(-1^3 - \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 6 \cdot 1\right) - 0 = -1 - \frac{3}{2} + 6 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{S_2 = 3{,}5\ u^2.}$$

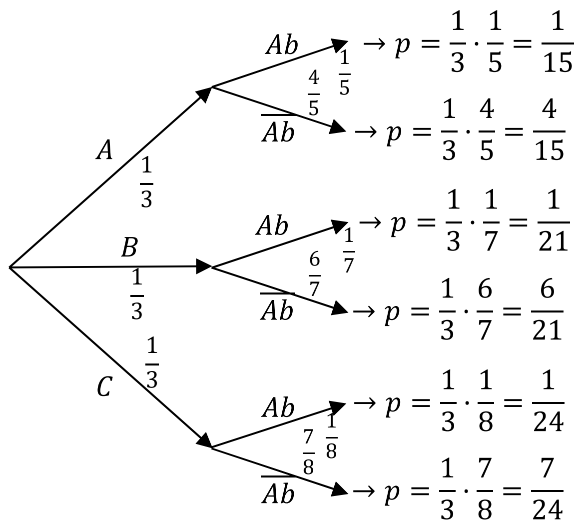
Bloque 3. Estadística y probabilidad.

7º) En una clase hay tres llaveros: A, B y C, el primero con cinco llaves, el segundo con siete y el tercero con ocho. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero, y de él se toma a su vez una llave al azar. Entendemos que, cuando se escoge una cosa al azar entre varias, todas ellas tienen la misma probabilidad de ser la escogida. Se pide:

a) La probabilidad de que la llave elegida abra el trastero.

b) Si resulta que la abre, la probabilidad de que sea del llavero A.

a)



$$P = P(Ab) = P(A \cap Ab) + P(B \cap Ab) + P(C \cap Ab) =$$

$$= P(A) \cdot P(Ab/A) + P(B) \cdot P(Ab/B) + P(C) \cdot P(Ab/C) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{24} = \frac{56+40+35}{840} = \underline{\frac{131}{840} = 0{,}1560}.$$

$$b)\ P = P(Ab/A) = \frac{P(Ab \cap A)}{P(A)} = \frac{P(Ab) \cdot P(A/Ab)}{P(Ab)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{131}{840}} = \frac{840}{15 \cdot 131} = \underline{\frac{56}{131} = 0{,}4275}.$$

8º) Una variable X es normal de media 25 y desviación típica 5, y otra Y es también normal, pero con media 28 y desviación típica 1.

a) Calcula las probabilidades $P(X > 30)$ y $P(Y > 30)$. ¿Cuál es mayor?

b) Tomamos una muestra de $n = 4$ valores independientes de X y anotamos su promedio $\overline{X}$. Calcula $P(\overline{X} > 30)$. ¿Cuál sería el resultado si $n = 9$?

c) ¿Cómo explicarías la comparación del resultado de b) con el de a), sin recurrir a la fórmula?

Solución

$a)\ Datos\!: \ \mu = 25;\ \ \sigma = 5.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(25,5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-25}{5}$.

$$P = P(X > 30) = P\left(Z > \frac{30-25}{5}\right) = P\left(Z > \frac{5}{5}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) =$$

$$= 1 - 0{,}8413 = \underline{0{,}1587}.$$

$Datos\!: \ \mu = 28;\ \ \sigma = 1.$

$Y \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(28,1).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-28}{1}$.

$$P = P(Y > 30) = P\left(Z > \frac{30-28}{1}\right) = P\left(Z > \frac{2}{1}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) =$$

$$= 1 - 0{,}9772 = \underline{0{,}0228}.$$

$$\underline{Como\ se\ observa\!: P(X > 30) > P(Y > 30)}.$$

$b)\ Datos\!: \ \mu = 25;\ \ \sigma = 5;\ \ n = 4.$

$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(25;\ \frac{5}{\sqrt{4}}\right) = N(25;\ 2{,}5).$ $Z = \frac{X-25}{2{,}5}$.

$$P = P\left(\overline{X} > 30\right) = P\left(Z > \frac{30-25}{2{,}5}\right) = P\left(Z > \frac{5}{2{,}5}\right) = P(Z > 2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = \underline{0{,}0228}.$$

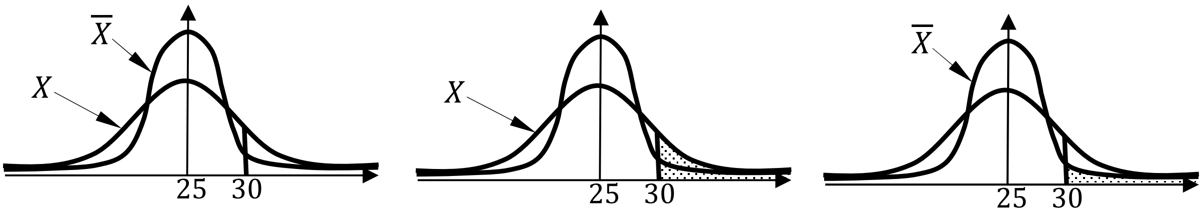
$Datos\!: \ \mu = 25;\ \ \sigma = 5;\ \ n = 9.$

$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(25;\ \frac{5}{\sqrt{9}}\right) = N\left(25;\ \frac{5}{3}\right).$ $Z = \frac{X-25}{\frac{5}{3}}$.

$$P = P\left(\overline{X} > 30\right) = P\left(Z > \frac{30-25}{\frac{5}{3}}\right) = P\left(Z > \frac{5}{\frac{5}{3}}\right) = P(Z > 3) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0{,}9987 = \underline{0{,}0013}.$$

c) La explicación puede ser la siguiente: La desviación típica de la variable es mayor que la correspondiente desviación típica de la media muestral, por ser $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, con $n > 1$, por lo que la curva de la desviación normal de la variable es más plana que la curva de la desviación normal de la media muestral y, en consecuencia, la superficie de probabilidad de $P(X > 30)$ es mayor que la superficie de probabilidad $P(\overline{X} > 30)$, como se observa en la figura adjunta.



$P(X > 30)$ $P(\overline{X} > 30)$

9º) Como ya sabe la cifra de asistentes, el ayuntamiento de Zaragoza ha asegurado que la duración de la ofrenda de flores del día del Pilar tendrá, en horas, una distribución de probabilidad normal con media 8 y desviación típica $\sqrt{2}/5$.

$a)$ ¿Puedes afirmar, con al menos el 95 % de probabilidad de acierto, que la duración de la ofrenda será inferior a ocho horas y media? ¿Podemos hacerlo con probabilidad mayor del 99 %?

$b)$ Una variable normal estándar Z cumple que $P(Z \leq 2{,}3263) = 0{,}99$. ¿Qué desviación típica (en lugar de la dada, y manteniendo la media de ocho horas) debería tener la duración de la ofrenda para que la probabilidad de ser menor que ocho horas y media fuera del 99 %?

Solución

$a)$ Datos: $\mu = 8;\ \ \sigma = \sqrt{2}/5$.

$T \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N\left(8, \sqrt{2}/5\right)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-8}{\sqrt{2}/5}$.

$P = P(T \leq 8{,}5) = P\left(Z \leq \frac{8{,}5-8}{\sqrt{2}/5}\right) = P\left(Z \leq \frac{0{,}5\cdot5}{\sqrt{2}}\right) = P(Z \leq 1{,}768) \cong$

$\cong 0{,}9612$.

Como quiera que: $0{,}95 < 0{,}9612 < 0{,}99$, puede afirmarse que la duración de la ofrenda será menor de 8 horas y media con una probabilidad superior al 95 %, pero no se puede afirmar con una probabilidad superior al 99 %.

$b)$ $Z \leq 2{,}3263 \Rightarrow Z = \frac{X-8}{\sigma} \Rightarrow \frac{8{,}5-8}{\sigma} \geq 2{,}3263;\ \ \sigma \leq \frac{0{,}5}{2{,}3263} \Rightarrow$

$$\underline{\sigma \leq 0{,}215}.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con tres ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a dos de un bloque y a uno de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuesta a qué cuatro ejercicios se responden en el examen. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

1º) Usamos una balanza de brazos muy sensible para pesar tres tipos de piezas (A, B y C) comparando su peso con el de una barrita que sabemos que pesa 13 gramos. Todas las piezas de un mismo tipo pesan igual. Descubrimos que:

1---- La barrita pesa lo mismo que una pieza C y dos piezas B juntas.

2---- Tres piezas A pesan lo mismo que dos piezas B.

3---- Una pieza C pesa lo mismo que dos piezas A y una pieza B.

¿Cuánto pesan las piezas de cada tipo?

Si la relación 3---- hubiera sido de una pieza B pesa como dos piezas A y una pieza C, al resolver el problema nos daríamos cuenta de que alguna relación debería ser falsa. ¿Por qué?

2º) Una matriz cuadrada A se dice idempotente si $A^2 = A$.

$a)$ Estudia si hay matrices idempotentes 2×2 que sean de la forma $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ o de la forma $\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$. En cada caso debes indicar, si la respuesta es afirmativa, el valor de a y b.

$b)$ Si una matriz A es idempotente, calcula su potencia $A^{2.022}$.

3º) Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen las siguientes condiciones: $0 \le y$; $0 \le x$; $x + y \le 6$; $2x + y \le 10$; $x + 2y \le 10$. Averigua el valor máximo que alcanza en dicha región la función $f(x, y) = 4x + 3y$. Si dicho valor máximo se alcanza en un punto $P_0(x_0, y_0)$, ¿sabrías expresar una función cuyo máximo lo alcance en $Q_0(y_0, x_0)$?

Bloque 2. Análisis.

4º) Consideramos la función $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$ (en los valores reales de x donde la expresión tiene sentido).

$a)$ ¿Cuál es el dominio de la función?

$b)$ Calcula la derivada $f'(x)$. ¿En qué puntos x es $f'(x) = -1$? ¿En cuáles es $f'(x) = 1$? ¿Tiene f extremos relativos?

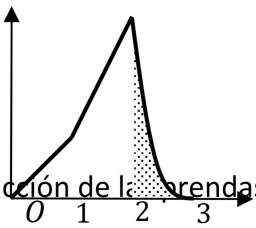
$c)$ Dibuja la gráfica de f, señalando los cortes con los ejes y las asíntotas horizontales y verticales.

5º) Encuentra los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1$ cumpla loas dos propiedades siguientes:

(1) Su derivada vale los mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.
(2) Tiene un extremo relativo en $x = -1$.

¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y = f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1? ¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene f en -1.

6º) El diseño del nuevo logo de Climbing Sports se ajusta en altura a la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x & si\ \ 0 \le x < 1 \\ 2x + a & si\ \ 1 \le x < 2 \\ b(x-3)^2 & si\ \ 2 \le x \le 3 \end{cases}$.



a) Calcula los valores de a y b.

b) El material de la parte sombreada elevará el coste de producción de las prendas de la marca. ¿Cuánto vale el área de dicha parte sombreada?

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

7º) Un amigo meteorólogo nos ha facilitado algunas probabilidades de lluvia en la mañana del próximo sábado, concretamente para los siguientes sucesos:

$A =$ "$Hay\ lluvia\ entre\ las\ 8\ y\ las\ 9$".

$B =$ "$Hay\ lluvia\ entre\ las\ 8\ y\ las\ 10$".

$C =$ "$Hay\ lluvia\ entre\ las\ 10\ y\ las\ 14$".

Nos ha dicho que $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}5$; $P(C) = 0{,}7$. A nosotros nos interesa sobre todo la probabilidad de $D =$ "$Hay\ lluvia\ entre\ las\ 9\ y\ las\ 10$". No nos la ha dado, pero nos ha dicho que $P(A \cap D) = 0{,}35$.

a) ¿Cómo interpretarías $P(B) - P(A)$? Calcula entonces el valor de $P(D)$. ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva de 9 a 10?

b) Nos dice además que B y C son independientes, porque estará despejado entre las 10 y las 12. Calcula entonces la probabilidad de que llueva durante la mañana (entre las 8 y las 14).

8º) Al 40 % de la población española no le gusta el vino. En España, de cada 1.000 personas 7 son riojanas, pero entre quienes gustan del vino la proporción de personas riojanas es 1/120. Escogemos una persona española al azar y resulta que es riojana. ¿Cuál es la propiedad de que le guste el vino?

9º) En los poblados maruba utilizan el punde como medida de distancia, y toman lo largo de una valla para fijar su valor. Este es distinto en cada poblado. Queremos estimar el valor medio de los distintos pundes en metros, considerando que la distribución es normal con desviación típica de 4 metros y que las medidas en todos los poblados son independientes entre sí. A partir de una muestra de 25 pundes calculamos un intervalo de confianza para situar dicho valor medio, y resulta el intervalo $(74{,}864; 77{,}496)$.

a) ¿Cuál es el valor promedio de nuestra muestra?
b) ¿Con qué nivel de confianza hemos obtenido el intervalo?
c) ¿Cuántos pundes necesitaríamos medir para reducir el error muestral a la mitad, con el mismo nivel de confianza?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

1º) Usamos una balanza de brazos muy sensible para pesar tres tipos de piezas (A, B y C) comparando su peso con el de una barrita que sabemos que pesa 13 gramos. Todas las piezas de un mismo tipo pesan igual. Descubrimos que:

1---- La barrita pesa lo mismo que una pieza C y dos piezas B juntas.

2---- Tres piezas A pesan lo mismo que dos piezas B.

3---- Una pieza C pesa lo mismo que dos piezas A y una pieza B.

¿Cuánto pesan las piezas de cada tipo?

Si la relación 3---- hubiera sido de una pieza B pesa como dos piezas A y una pieza C, al resolver el problema nos daríamos cuenta de que alguna relación debería ser falsa. ¿Por qué?

Solución

Sean x, y, z el peso de las piezas de los tipos A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado, expresado en miles de euros, es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} z+2y=13 \\ 3x=2y \\ z=2x+y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2y+z=13 \\ 3x-2y=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right\}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 13 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=3+4+6=13\neq 0 \Rightarrow Rang\ A=3.$$

$$\underline{Rang\ A=Rang\ A'=3=n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 13 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{13\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{3+4+6}=\frac{13\cdot 2}{13}=2.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 13 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{13}=\frac{-13\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{13}=\frac{-13\cdot(-3)}{13}=3.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 13 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{13}=\frac{13\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{13}=3+4=7.$$

$$\underline{Las\ piezas\ A\ pesan\ 2\ gramos, las\ B, 3\ gramos\ y\ las\ C, 7\ gramos.}$$

Si una pieza B pesa como dos piezas A y una pieza C, el sistema es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 2y+z=13 \\ 3x-2y=0 \\ y=2x+z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2y+z=13 \\ 3x-2y=0 \\ 2x-y+z=0 \end{array}\right\}$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son, ahora, las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 13 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-3+4-6=-5\neq 0 \Rightarrow Rang\ M=3.$$

$$\underline{Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 13 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{13\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{13\cdot 2}{-5}=-\frac{26}{5}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 13 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{-13\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{13\cdot 3}{5}=\frac{39}{5}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 13 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{13\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{13\cdot(-3+4)}{-5}=-\frac{13}{5}.$$

$$\underline{Las\ soluciones\ carecen\ de\ sentido: no\ puede\ ser\ el\ peso\ negativo.}$$

2º) Una matriz cuadrada A se dice idempotente si $A^2 = A$.

a) Estudia si hay matrices idempotentes 2×2 que sean de la forma $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ o de la forma $\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$. En cada caso debes indicar, si la respuesta es afirmativa, el valor de a y b.

b) Si una matriz A es idempotente, calcula su potencia $A^{2.022}$.

Solución

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+a & 2+b \\ 2a+ab & a+b^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+a & 2+b \\ 2a+ab & a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4+a=2 \\ a(2+b)=a \\ 2+b=1 \\ a+b^2=b \end{array}\right\} \Rightarrow a=-2; b=-1.$$

$$\underline{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \; es\ idempotente\ para\ a=-2\ y\ b=-1.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+ab & 2b+b \\ 2a+a & ab+1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+ab & 2b+b \\ 2a+a & ab+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4+ab=2 \\ 3a=a \\ 3b=b \\ ab+1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a,b \notin R.$$

$$\underline{A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \; no\ es\ idempotente\ para\ a,b \in R.}$$

b) Las potencias sucesivas de A son las siguientes:

$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A.$ $A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A.$

$A^5 = A^4 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A.$ En general: $A^n = A, \forall n \in N.$

$$\underline{Si\ A\ es\ idempotente: A^{2.022} = A.}$$

3º) Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen las siguientes condiciones: $0 \leq y$; $0 \leq x$; $x + y \leq 6$; $2x + y \leq 10$; $x + 2y \leq 10$. Averigua el valor máximo que alcanza en dicha región la función $f(x, y) = 4x + 3y$. Si dicho valor máximo se alcanza en un punto $P_0(x_0, y_0)$, ¿sabrías expresar una función cuyo máximo lo alcance en $Q_0(y_0, x_0)$?

Solución

$(1) \Rightarrow x + y \leq 6 \Rightarrow y \leq 6 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	6
y	6	0

$(2) \Rightarrow 2x + y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10 - 2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	5	2
y	0	6

$(3) \Rightarrow x + 2y \leq 10 \Rightarrow y \leq \frac{10-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	4
y	5	3

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

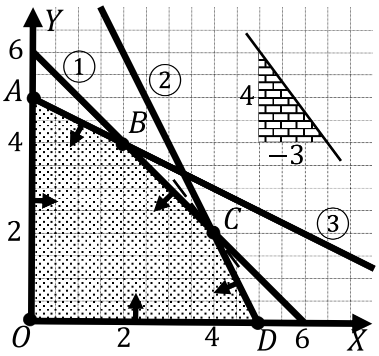
$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + 2y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(0, 5).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 6 \\ x + 2y = 10 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x - y = -6 \\ x + 2y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 4;$

$x = 2 \Rightarrow B(2, 4).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 6 \\ 2x + y = 10 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x - y = -6 \\ 2x + y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4;\ \ y = 2 \Rightarrow C(4, 2).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x + y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 10;\ \ x = 5 \Rightarrow D(5, 0).$



La función de objetivos es $f(x, y) = 4x + 3y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 5) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 0 + 15 = 15.$
$B \Rightarrow f(2, 4) = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 8 + 12 = 20.$
$C \Rightarrow f(4, 2) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 16 + 6 = 22.$
$D \Rightarrow f(5, 0) = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = 20 + 0 = 20.$
El valor máximo se produce en el punto $C(4, 2)$.

También se hubiera obtenido el punto $C(4, 2)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 4x + 3y \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x \Rightarrow m = -\frac{4}{3}.$

El valor máximo se alcanza en $C(4, 2)$ y su valor es 22.

Si quisiéramos que el máximo se alcanzase en el punto $C'(2, 4)$, debemos observar que se han cambiado las coordenadas, es decir: se cambia la "x" por la "y" y la "y" por la "x", por lo cual, la nueva función sería $g(x, y) = 3x + 4y$.

Bloque 2. Análisis.

4º) Consideramos la función $f(x)=\frac{3x-2}{x-1}$ (en los valores reales de x donde la expresión tiene sentido).

a) ¿Cuál es el dominio de la función?

b) Calcula la derivada $f'(x)$. ¿En qué puntos x es $f'(x)=-1$? ¿En cuáles es $f'(x)=1$? ¿Tiene f extremos relativos?

c) Dibuja la gráfica de f, señalando los cortes con los ejes y las asíntotas horizontales y verticales.

Solución

a) Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x-1=0;\;\; x=1 \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R-\{1\}}.$$

b) $f'(x)=\frac{3\cdot(x-1)-(3x-2)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{3x-3-3x+2}{(x-1)^2} \Rightarrow \underline{f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}}.$

$$f'(x)=-1 \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2}=-1 \Rightarrow (x-1)^2=1 \Rightarrow x=0.$$

$$\underline{f'(x)=-1\; para\; x=0}.$$

$$f'(x)=1 \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2}=1;\;\; (x-1)^2=-1;\;\; x^2-2x+1=-1;$$

$x^2-2x+2=0;\;\; x=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} \Rightarrow x \notin R.$

$$\underline{No\; existe\; ningún\; valor\; real\; de\; x\; para\; el\; cual\; f'(x)=1}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow$$

$$\underline{f(x)\; no\; tiene\; extremos\; relativos}.$$

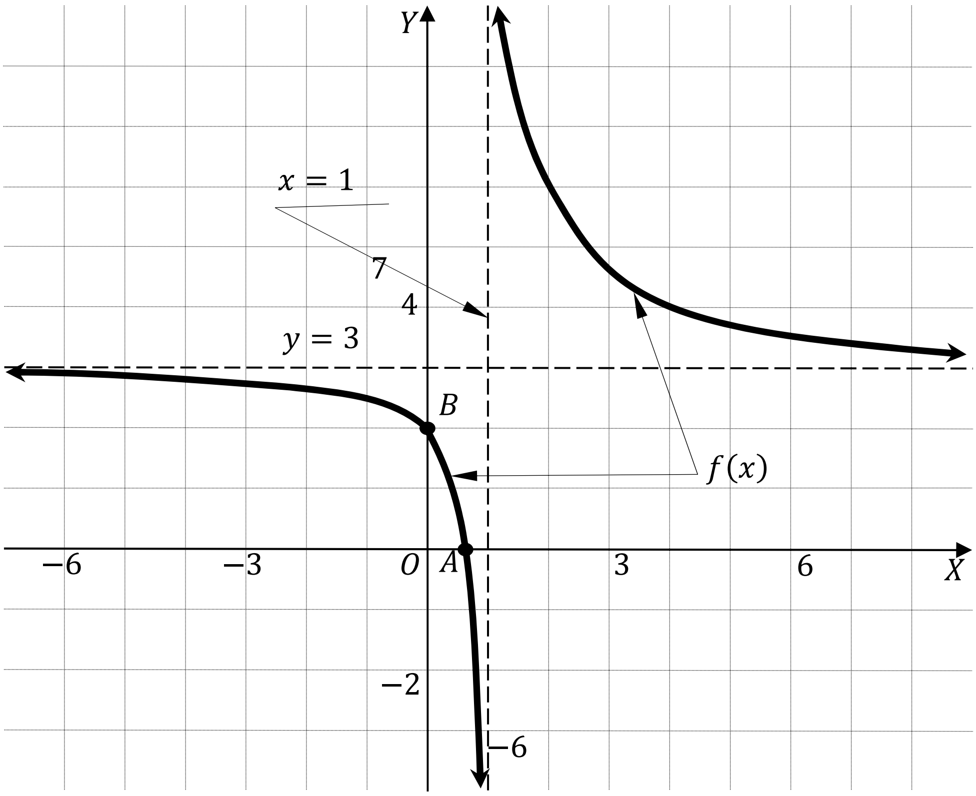
c) Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\; X \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \frac{3x-2}{x-1}=0;\;\; 3x-2=0;\;\; x=\frac{2}{3} \Rightarrow A\left(\frac{2}{3},0\right).$$

$$Eje\; Y \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{3\cdot 0-2}{0-1}=\frac{-2}{-1}=2 \Rightarrow B(0,2).$$

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{x-1}=3 \Rightarrow La\; recta\; y=3\; es\; asíntota\; horizontal.$$

Con los datos obtenidos puede hacerse, aproximadamente, la representación gráfica de la función que es la siguiente:


Y
x = 1
7
4
y = 3
B
f(x)
−6
−3
O
A
3
6
X
−2
−6

5º) Encuentra los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1$ cumpla loas dos propiedades siguientes:

(1) Su derivada vale los mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.
(2) Tiene un extremo relativo en $x = -1$.

¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y = f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1? ¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene f en -1.

Solución

$f'(x) = 3x^2 - 2ax - b.$

$f'(0) = f'(1) \Rightarrow 3 \cdot 0^2 - 2a \cdot 0 - b = 3 \cdot 1^2 - 2a \cdot 1 - b;$

$-b = 3 - 2a - b;\;\; 2a = 3 \Rightarrow \underline{a = \frac{3}{2}}.$

La derivada resulta: $f'(x) = 3x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x - b \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3x - b.$

Por tener un extremo relativo en $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0$:

$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - b = 0;\;\; 3 + 3 - b = 0 \Rightarrow \underline{b = 6}.$

La derivada resulta, finalmente: $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6.$

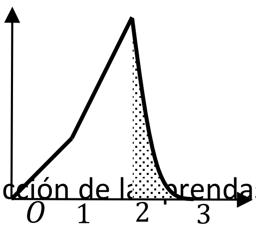
$f'(0) = f'(1) = -6.$

$\underline{Las\ tangentes\ a\ la\ gráfica\ de\ f(x)\ para\ x = 0\ y\ x = 1\ tienen\ pendiente - 6}\mathbf{.}$

$f''(x) = 6x - 3 \Rightarrow f''(-1) = 6 \cdot (-1) - 3 < 0 \Rightarrow Máximo.$

$\underline{Para\ x = -1\ la\ función\ f(x)\ tiene\ un\ máximo\ relativo}\mathbf{.}$

6º) El diseño del nuevo logo de Climbing Sports se ajusta en altura a la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} x & si\ \ 0 \leq x < 1 \\ 2x + a & si\ \ 1 \leq x < 2 \\ b(x-3)^2 & si\ \ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$.



$a)$ Calcula los valores de $a\ y\ b$.

$b)$ El material de la parte sombreada elevará el coste de producción de las prendas de la marca. ¿Cuánto vale el área de dicha parte sombreada?

Solución

$a)$ La función $f(x)$ tiene que ser continua.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$ y para $x = 2$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} x = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} (2x + a) = 2 + a = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

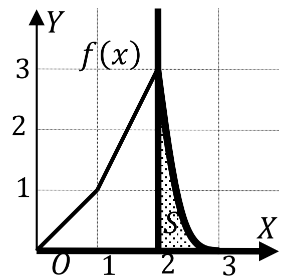
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 = 2 + a \Rightarrow \underline{a = -1}.$$

La función resulta: $f(x) = \begin{cases} x & si\ \ 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & si\ \ 1 \leq x < 2 \\ b(x-3)^2 & si\ \ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$.

$$Para\ x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} x = (2x - 1) = 3 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} [b(x-3)^2] = b = f(2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow$$

$$\underline{b = 3}.$$



$b)$ La función es $f(x) = \begin{cases} x & si\ \ 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & si\ \ 1 \leq x < 2 \\ 3(x-3)^2 & si\ \ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$.

$$S = \int_2^3 3(x-3)^2 \cdot dx = 3 \cdot \int_2^3 (x-3)^2 \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x - 3 = t \\ dx = dt \end{Bmatrix}\begin{matrix} x = 3 \to t = 0 \\ x = 2 \to t = -1 \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow S = 3 \cdot \int_{-1}^{0} t^2 \cdot dt = 3 \cdot \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{0} = [t^3]_{-1}^{0} =$$

$$= 0 - [(-1)^3] = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{S = 1\ u^2}.$$

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

7º) Un amigo meteorólogo nos ha facilitado algunas probabilidades de lluvia en la mañana del próximo sábado, concretamente para los siguientes sucesos:

$A =$ "$Hay\ lluvia\ entre\ las\ 8\ y\ las\ 9$".

$B =$ "$Hay\ lluvia\ entre\ las\ 8\ y\ las\ 10$".

$C =$ "$Hay\ lluvia\ entre\ las\ 10\ y\ las\ 14$".

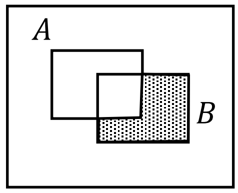
Nos ha dicho que $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}5$; $P(C) = 0{,}7$. A nosotros nos interesa sobre todo la probabilidad de $D =$ "$Hay\ lluvia\ entre\ las\ 9\ y\ las\ 10$". No nos la ha dado, pero nos ha dicho que $P(A \cap D) = 0{,}35$.

$a)$ ¿Cómo interpretarías $P(B) - P(A)$? Calcula entonces el valor de $P(D)$. ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva de 9 a 10?

$b)$ Nos dice además que B y C son independientes, porque estará despejado entre las 10 y las 12. Calcula entonces la probabilidad de que llueva durante la mañana (entre las 8 y las 14).

Solución

$a)$ De forma gráfica $P(B) - P(A)$ es la zona sombreada de la figura adjunta, que equivale a la probabilidad de B condicionada



$B \cap \overline{A} = B - (A \cap B)$

a que no se produzca A: $P(B) - P(A) = P\left(B/\overline{A}\right)$.

$Datos$: $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}5$; $P(C) = 0{,}7$.

Sabemos que $P(B) = P(A \cup D) = 0{,}5$ y también que $P(A \cap D) = 0{,}35$, lo cual permite calcular $P(D)$:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D) \Rightarrow 0{,}5 = 0{,}4 + P(D) - 0{,}35;$$

$$P(D) = 0{,}5 - 0{,}4 + 0{,}35 \Rightarrow \underline{P(D) = 0{,}45}. \quad P\left(\overline{D}\right) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ no\ llueva\ de\ 9\ a\ 10\ es\ 0{,}55 = 55\ \%}$**.**

$b)$ Dos sucesos B y C son independientes cuando $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(B \cap C) = 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35.$$

La probabilidad de que llueva entra las 8 y las 14 horas es $P(B \cup C)$.

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0{,}5 + 0{,}7 - 0{,}35 = 0{,}85.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ llueva\ entre\ las\ 8\ y\ las\ 14\ horas\ es\ 0{,}85 = 85\ \%}$**.**

8º) Al 40 % de la población española no le gusta el vino. En España, de cada 1.000 personas 7 son riojanas, pero entre quienes gustan del vino la proporción de personas riojanas es 1/120. Escogemos una persona española al azar y resulta que es riojana. ¿Cuál es la propiedad de que le guste el vino?

Solución

$$Datos: \begin{cases} Probabilidad\ de\ gustar\ del\ vino: P(V) = 0{,}6 \\ Probabilidad\ de\ ser\ riojano: P(R) = \frac{7}{1.000} \\ P(R/V) = \frac{1}{120} \end{cases}.$$

Nos piden: $P(V/R)$. Aplicando el teorema de Bayes:

$$P(V/R) = \frac{p(V \cap R)}{P(R)} = \frac{p(V) \cdot P(R/V)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{120} \cdot 0{,}6}{\frac{7}{1.000}} = \frac{0{,}6 \cdot 1.000}{120 \cdot 7} = \frac{60}{84} = \underline{0{,}7143}.$$

9º) En los poblados maruba utilizan el punde como medida de distancia, y toman lo largo de una valla para fijar su valor. Este es distinto en cada poblado. Queremos estimar el valor medio de los distintos pundes en metros, considerando que la distribución es normal con desviación típica de 4 metros y que las medidas en todos los poblados son independientes entre sí. A partir de una muestra de 25 pundes calculamos un intervalo de confianza para situar dicho valor medio, y resulta el intervalo $(74{,}864; 77{,}496)$.

a) ¿Cuál es el valor promedio de nuestra muestra?

b) ¿Con qué nivel de confianza hemos obtenido el intervalo?

c) ¿Cuántos pundes necesitaríamos medir para reducir el error muestral a la mitad, con el mismo nivel de confianza?

Solución

a) $\overline{x} = \frac{77{,}496+74{,}864}{2} = \frac{152{,}350}{2} \Rightarrow$

$$\underline{\overline{x} = 76{,}175}.$$

b) $E = \frac{77{,}496-74{,}864}{2} = \frac{2{,}632}{2} = 1{,}316.$

$Datos\text{:}\ \sigma = 4;\ \ n = 25;\ \ E = 1{,}316.$

Sabiendo que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: $z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{1{,}316\cdot\sqrt{25}}{4} = 0{,}329 \cdot 5 = 1{,}645.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$: $\begin{Bmatrix} 1{,}64 - -0{,}9495 \\ 1{,}65 - -0{,}9505 \end{Bmatrix} \Rightarrow 1{,}645 = 0{,}9500.$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}95;\ \ 2 - \alpha = 1{,}90;\ \ \alpha = 2 - 1{,}90 = 0{,}10 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}90.$

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ fue\ del\ 90\ \%}.$$

c) $E' = \frac{E}{2} = \frac{1{,}316}{2} = 0{,}658.$

$Datos\text{:}\ \sigma = 4;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645;\ \ E' = 0{,}658.$

$E' = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{E'}\right)^2 = \left(\frac{1{,}645\cdot 4}{0{,}658}\right)^2 = 10^2 = 100.$

$$\underline{Se\ necesitan\ 100\ pundes}.$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

TIEMPO: 90 minutos.

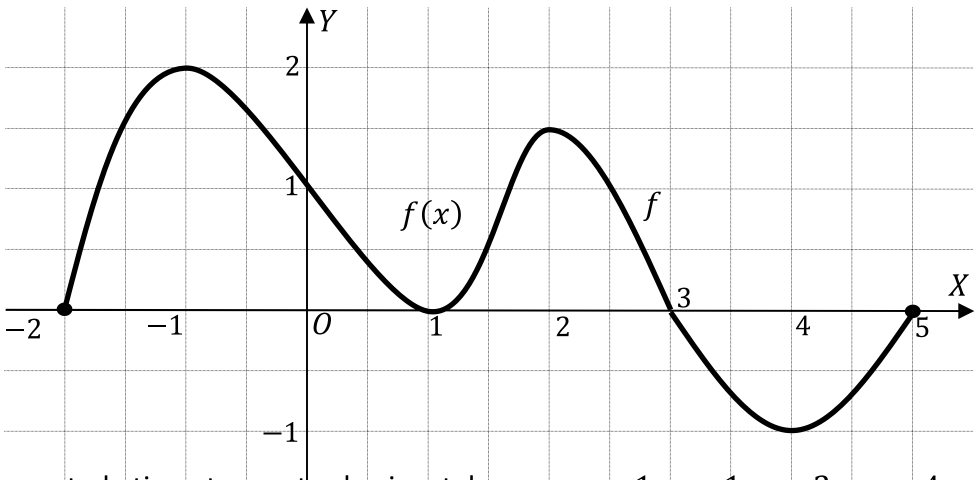
1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$:

$a)$ Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invetible.

$b)$ Calcule A^{-1} para $a = 1$.

2º) El dueño de una empresa que organiza fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche, y por cada litro de leche debe echar como máximo 1,6 litros de chocolate. Además, solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de un euro y por cada litro de chocolate un beneficio de 2 euros. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

3º) La figura dada representa la gráfica de cierta función f.



La gráfica representada tiene tangentes horizontales en $x = -1, x = 1, x = 2$ y $x = 4$.

$a)$ Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x) > 0$.

$b)$ Determine razonadamente cuál es el signo de $\int_{-2}^{5} f(x) \cdot dx$.

4º) Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatoria tales que $P(A) = 0{,}6$, $P(A/B) = 0{,}4$ y $P(A/B^c) = 0{,}8$, siendo B^c el suceso complementario de B.

$a)$ Calcule $P(B)$.

$b)$ ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

5º) Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.

$a)$ Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99 % para el peso medio de un saco de cemento.

$b)$ Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kg, con un nivel de confianza del 90 %.

6º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+ay+z=a \\ ax-y-az=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro $a \in R$.

$a)$ Discuta la compatibilidd del sistema para los diferentes valores de a.

$b)$ Resuelva el sistema para $a=2$.

7º) Considere la función real de variable real $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$:

$a)$ Determine sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

$b)$ Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

8º) Un escultor quiere dividir un alambre muy fino en dos trozos que se utilizarán para delimitar, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo cuya base debe medir el doble que su altura. Posteriormente, se fabricarán ambas figuras planas con un material que cuesta 16 céntimos de euro/cm^2 para el cuadrado y 10 céntimos de euro/cm^2 para el rectángulo. Si el alambre inicial mide 450 cm, determine la función de coste total de ambas figuras. Obtenga la longitud de cada trozo de alambre para que el coste total de estas piezas sea mínimo.

Sugerencia: Exprese el coste total en función de la altura del rectángulo y utilice 3 decimales para realizar cálculos.

9º) Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.

$a)$ Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.

$b)$ Si la cara observada no es de diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

10º) Considere la población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

$a)$ Determine el valor de σ sabiendo que $I=(58{,}2;73{,}8)$ es un intervalo de confianza del 95 % para μ.

$b)$ Si $\sigma=20$, calcule $P\left(-10<\overline{X}-\mu<10\right)$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$:

$a)$ Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invetible.

$b)$ Calcule A^{-1} para $a = 1$.

Solución

$a)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -2 + a^2 - 2a = 0;\;\; a^2 - 2a - 2 = 0;\;\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow a_1 = 1 - \sqrt{3}, a_2 = 1 + \sqrt{3}.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}}.$$

$b)$ Para $a = 1$ la matriz resulta $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que es invertible por ser su determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 - 2 = -3. \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.\,de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}}{-3} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}.$$

2º) El dueño de una empresa que organiza fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche, y por cada litro de leche debe echar como máximo 1,6 litros de chocolate. Además, solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de un euro y por cada litro de chocolate un beneficio de 2 euros. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

Solución

Sean x e y el número de litros de leche y chocolate que se utilizan, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} x \leq 2y \\ y \leq 1{,}6x \\ x+y \leq 45 \\ 30 \geq x \geq 0;\, 20 \geq y \geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y \geq 0{,}5x \\ y \leq 1{,}6x \\ x+y \leq 45 \\ 30 \geq x \geq 0;\, 20 \geq y \geq 0 \end{array}\right\}.$

$(1) \Rightarrow y \geq 0{,}5x \Rightarrow P(10,0) \rightarrow No.$

x	0	40
y	0	20

$(2) \Rightarrow y \leq 1{,}6x \Rightarrow P(10,0) \rightarrow Si.$

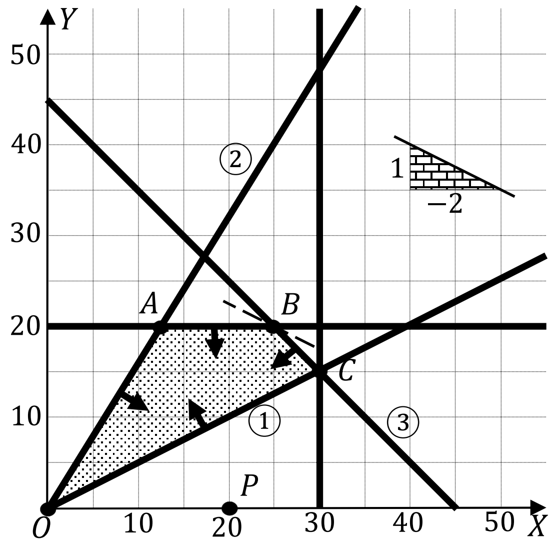
x	0	25
y	0	40

$(3) \Rightarrow x+y \leq 45 \Rightarrow y \leq 45-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	45
y	45	0

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 1{,}6x \\ y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{20}{1{,}6} = 12{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(12'5, 20).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y = 45 \\ y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow B(25, 20).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y = 45 \\ x = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow C(30, 15).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = x + 2y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(12'5, 20) = 1 \cdot 12{,}5 + 2 \cdot 20 = 12{,}5 + 20 = 32{,}5.$

$B \Rightarrow f(25, 20) = 1 \cdot 25 + 2 \cdot 20 = 25 + 40 = 65.$

$C \Rightarrow f(30, 15) = 1 \cdot 30 + 2 \cdot 15 = 30 + 30 = 60.$

El máximo se produce en el punto $B(25, 20)$.

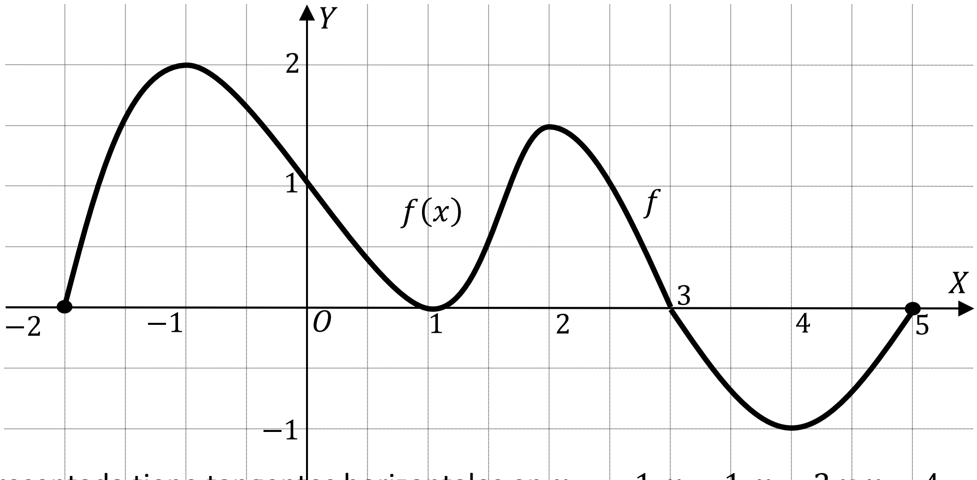
También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

$$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ mezclando\ 25\ litros\ de\ leche\ y\ 20\ de\ chocolate}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 65\ euros}.$$

3º) La figura dada representa la gráfica de cierta función f.



La gráfica representada tiene tangentes horizontales en $x=-1, x=1, x=2$ y $x=4$.

a) Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x)>0$.

b) Determine razonadamente cuál es el signo de $\int_{-2}^{5} f(x)\cdot dx$.

Solución

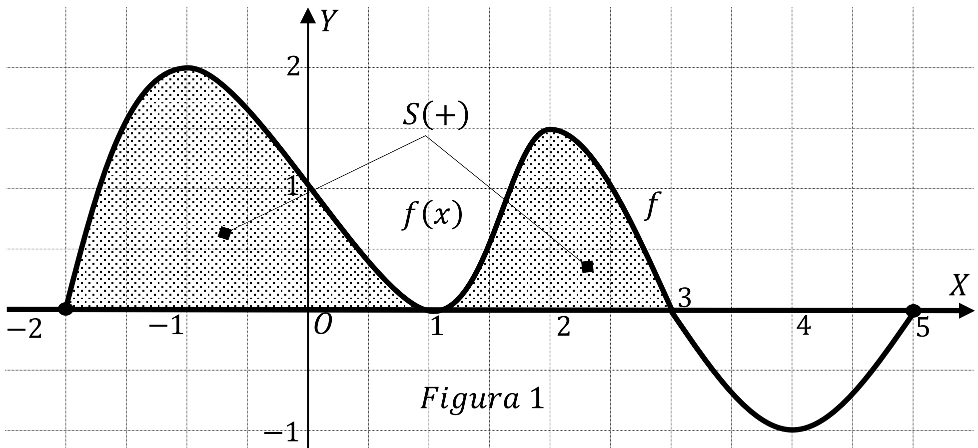
a) Un función $f(x)$ es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

De la observación de la figura se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x)>0 \Rightarrow x\epsilon(-2,-1)\cup(1,2)\cup(4,5).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x)<0 \Rightarrow x\epsilon(-1,1)\cup(2,4).}$$

b)



$Figura\ 1$

Nótese que una integral definida no es, necesariamente, el área de la zona limitada por la función y el eje de abscisas en el intervalo que determinan los límites de integración ya que, cuando todas las ordenadas de la función son positivas el valor de la integral definida es positiva y cuando las ordenadas de la función son negativas, el valor de la integral definida es negativa.

La figura 1 expresa superficie que resulta positiva al resolver la integral definida entre sus extremos, es decir: $S(+) = \int_{-2}^{3} f(x) \cdot dx$.

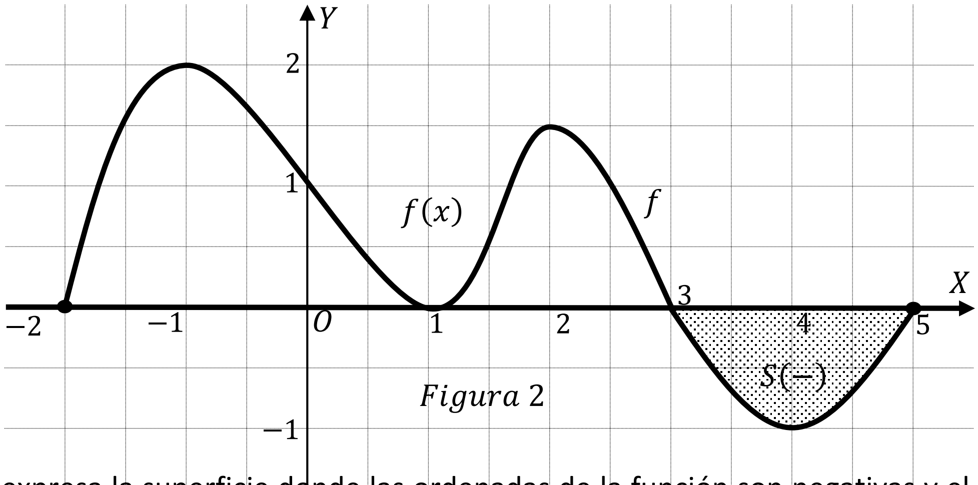


Figura 2

La figura 2 expresa la superficie donde las ordenadas de la función son negativas y el valor de la integral sería: $S(-) = \int_{3}^{5} f(x) \cdot dx$.

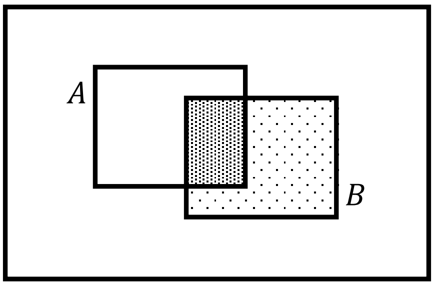
De la observación de las figuras se deduce que la superficie positiva es bastante mayor que la negativa y, en consecuencia:

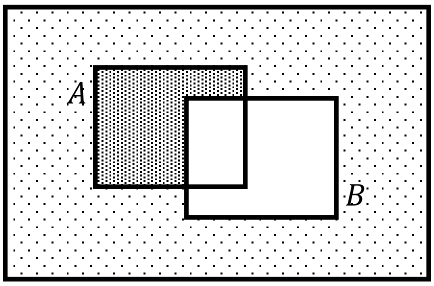
$$\underline{\int_{-2}^{5} f(x) \cdot dx > 0.}$$

4º) Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatoria tales que $P(A) = 0{,}6$, $P(A/B) = 0{,}4$ y $P(A/B^c) = 0{,}8$, siendo B^c el suceso complementario de B.

a) Calcule $P(B)$. b) ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

Solución





$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}4.$ (1) $P(A/B^c) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B^c)} = 0{,}8.$ (2)

a) De la expresión (1): $P(A \cap B) = 0{,}4 \cdot P(B)$.

Sustituyendo en (2) el valor obtenido $P(A \cap B) = 0{,}4 \cdot P(B)$ y teniendo en cuanta que $P(B^c) = 1 - P(B)$:

$\frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(B^c)} = 0{,}8;\ \ \frac{0{,}6 - 0{,}4 \cdot P(B)}{1 - P(B)} = 0{,}8;\ \ 0{,}6 - 0{,}4 \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot [1 - P(B)].$

Multiplicando los dos términos por 5: $3 - 2 \cdot P(B) = 4 \cdot [1 - P(B)]$;.

$3 - 2 \cdot P(B) = 4 - 4 \cdot P(B);\ \ 2 \cdot P(B) = 1;\ \ P(B) = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{P(B) = 0{,}5}.$

b) A y B son independientes cuando se cumple: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Del apartado anterior: $P(A \cap B) = 0{,}4 \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}2$.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow 0{,}2 \neq 0{,}6 \cdot 0{,}5$.

$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ A\ y\ B\ no\ son\ independientes}.$

5º) Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99 % para el peso medio de un saco de cemento.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kg, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución

a) Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0{,}99 \rightarrow \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}575.$

$(1-0{,}005=0{,}9950 \rightarrow z=2{,}575).$

Datos: $n=20;\ \ \overline{x}=50;\ \ \sigma=2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(50-2{,}575\cdot\frac{2}{\sqrt{20}};\ 50+2{,}575\cdot\frac{2}{\sqrt{20}}\right);$

$(50-2{,}575\cdot 0{,}4472;\ 50+2{,}575\cdot 0{,}4472);\ \ (50-1{,}1516;\ 50+1{,}1516) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{I.C._{99\,\%}=(48{,}8484;\ 51{,}1516)}.$$

b) Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha=0{,}90 \rightarrow \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$

$(1-0{,}05=0{,}9500 \rightarrow z=1{,}645).$

Datos: $\sigma=2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645;\ \ E=1.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}645\cdot\frac{2}{1}\right)^2=$

$=(1{,}645\cdot 2)^2=3{,}29^2=10{,}82.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 11\ sacos}.$$

6º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+ay+z=a \\ ax-y-az=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro $a \in R$.

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a=2$.

Solución

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ a & -1 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1+a-a^2+1+a-a^2=0;\ \ 2a^2-2a=0;$$

$a^2-a=0;\ \ a(a-1)=0 \Rightarrow a_1=0, a_2=1.$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{l} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_3\} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=0 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b) Para $a=2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=2 \\ 2x-y-2z=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-2-4+1+4}{-1+2-4+1+2-4}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{2-4+2-4}{-4}=\frac{-4}{-4}=1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-1+4+2-4}{-4} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{1}{4},\ y = 1,\ z = -\frac{1}{4}}.$$

7º) Considere la función real de variable real $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$:

a) Determine sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

b) Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

Solución

a) Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+12}{x-1} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-x+1}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2-x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-x+1}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1-x^2+x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y = x}.$$

b) $$f'(x) = \frac{(2x-1)\cdot(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \Rightarrow \underline{f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}}.$$

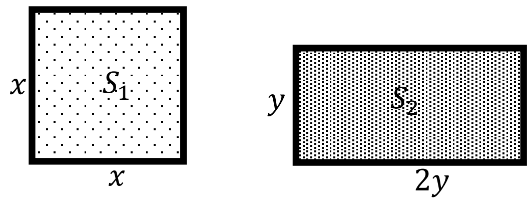
$$f'(2) = \frac{2\cdot(2-2)}{(2-1)^2} = \frac{2\cdot 0}{1} \Rightarrow$$

$$\underline{f'(2) = 0}.$$

8º) Un escultor quiere dividir un alambre muy fino en dos trozos que se utilizarán para delimitar, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo cuya base debe medir el doble que su altura. Posteriormente, se fabricarán ambas figuras planas con un material que cuesta 16 céntimos de euro/cm^2 para el cuadrado y 10 céntimos de euro/cm^2 para el rectángulo. Si el alambre inicial mide 450 cm, determine la función de coste total de ambas figuras. Obtenga la longitud de cada trozo de alambre para que el coste total de estas piezas sea mínimo.

Sugerencia: Exprese el coste total en función de la altura del rectángulo y utilice 3 decimales para realizar cálculos.

Solución



$4x + 2y + 4y = 450; \;\; 4x + 6y = 450;$

$2x + 3y = 225 \Rightarrow \mathrm{y} = \frac{225-2\mathrm{x}}{3}.$

$S = S_1 + S_2 = x^2 + y \cdot 2y = x^2 + 2y^2 = x^2 + 2 \cdot \left(\frac{225-2x}{3}\right)^2 =$

$= x^2 + \frac{2}{9}(225 - 2x)^2.$

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$S'(x) = 2x + \frac{4}{9} \cdot (225 - 2x) \cdot (-2) = 0; \;\; x - \frac{4}{9}(225 - 2x) = 0;$

$9x - 4(225 - 2x) = 0; \;\; 9x - 900 + 8x = 0; \;\; 17x = 900; \;\; x = \frac{900}{17} \Rightarrow x = 52{,}94.$

$y = \frac{225-2\mathrm{x}}{3} = \frac{225-2 \cdot 52{,}94}{3} = \frac{225-105{,}88}{3} = \frac{119{,}12}{3} \Rightarrow y = 39{,}71.$

$\underline{La\ superficie\ es\ mínima\ cuando\ los\ trozos\ son\ de\ 52{,}94\ cm\ y\ 39{,}71\ cm.}$

9º) Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.

$a)$ Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.

$b)$ Si la cara observada no es de diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

Solución

Se considera la carta eliminada como $C1$ y la carta observada como $C2$.

$a)$ La probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de que la carta eliminada sea de diamantes o no sea de diamantes:

$$P = P(D1) \cdot P(D2) + P(\overline{D1}) \cdot P(D2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{51} + \frac{3}{4} \cdot \frac{13}{51} = \frac{12+39}{4 \cdot 51} = \frac{51}{4 \cdot 51} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P = \frac{1}{4} = 0,25}.$$

$b)$ Si la cara observada no es de diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

$$P = P\left(\overline{D1}/\overline{D2}\right) = \frac{P(\overline{D1} \cap \overline{D2})}{P(\overline{D2})} = \frac{\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51}}{\frac{39}{52}} = \frac{38}{51} \Rightarrow \underline{P = 0,7451}.$$

10º) Considere la población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

$a)$ Determine el valor de σ sabiendo que $I = (58{,}2; 73{,}8)$ es un intervalo de confianza del 95 % para μ.

$b)$ Si $\sigma = 20$, calcule $P\left(-10 < \overline{X} - \mu < 10\right)$.

Solución

$a)$ Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$

$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Datos: $n = 10;\quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

$$\left(\overline{x} - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}};\ \overline{x} + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right) = (58{,}2; 73{,}8) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \overline{x} - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 58{,}2 \\ \overline{x} + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 73{,}8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2 \cdot \overline{x} = 132 \Rightarrow \overline{x} = 66. \quad 66 - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 58{,}2;\ \ 7{,}8 = 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma = \frac{7{,}8 \cdot \sqrt{10}}{1{,}96} = \frac{24{,}6658}{1{,}96} \Rightarrow \underline{\sigma = 12{,}58}.$

$b)$ Datos: $n = 10;\ \ \sigma = 20.$

$X \rightarrow N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{20}{\sqrt{10}}\right) = N(\mu, 6{,}32).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X - \mu}{6{,}32}$.

$P\left(-10 < \overline{X} - \mu < 10\right) = P\left(-10 + \mu < \overline{X} - \mu + \mu < 10 + \mu\right) =$

$= P\left(-10 + \mu < \overline{X} < 10 + \mu\right) = P\left(\frac{-10 + \mu - \mu}{6{,}32} < Z < \frac{10 + \mu - \mu}{6{,}32}\right) =$

$= P\left(\frac{-10}{6{,}32} < Z < \frac{10}{6{,}32}\right) = P(-1{,}58 < Z < 1{,}58) = P(Z < 1{,}58) - P(Z < -1{,}58) =$

$= P(Z < 1{,}58) - [1 - P(Z < 1{,}58)] = P(Z < 1{,}58) - 1 + P(Z < 1{,}58) =$

$= 2 \cdot 0{,}9429 - 1 = 1{,}8858 - 1 = \underline{0{,}8858}.$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Sea $a \in R$. Considera las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ e \ Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}:$$

$a)$ Determina los valores del parámetro real a para que A tenga inversa.

$b)$ Calcule, para $a = 1$, la solución del sistema $(A - B) \cdot X = Y$.

2º) Sea S la región del plano definida por: $7y - 8x \leq 3.400$; $3x - 8y \leq 2.000$;

$11x + 14y \geq 9.500$; $x \leq 1.200$; $y \leq 1.000$.

$a)$ Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

$b)$ Obtenga el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

3º) Considere las funciones reales de variable real $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + ax + 3$.

$a)$ Se define $h(x)$ de la siguiente manera: $h(x) = \begin{cases} f(x) & si \ x \leq 1 \\ g(x) & si \ x > 1 \end{cases}$. ¿Qué valor debe darle a la constante $a \in R$ para que la función h sea continua en R?

$b)$ Para $a = 1$, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de $f \ y \ g$.

4º) Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatoria es la unión de los sucesos A y B. Esto es, $E = A \cup B$. Además, suponga que $P(A \cap B) = 0{,}2$ y $P(B) = 0{,}7$.

$a)$ Calcule $P(A^c)$

$b)$ Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

Nota: A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B

5º) Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del 95 % para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo 0,2 y 0,3 los extremos de dicho intervalo.

$a)$ Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.

$b)$ Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?

6º) Considere el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+ay+z=2 \\ x-az=0 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$ dependiente del parámetro real a:

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a=0$.

7º) a) Determine los valores de los parámetros $a,b \in R$ para que la función $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ verifique que $f(2)=4$ y $f'(2)=0$.

b) Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x)=x+\frac{1}{x}$.

8º) Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, $I(x)$, en miles de euros, vienen expresados por la función $I(x)=x\cdot\frac{170-0{,}85x}{5}$, en la que x representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x)=10+2x+x^2$.

a) Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda x y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.

b) Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $\frac{C(x)}{x}$, no supere los diez mil euros.

Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

9º) Tres amigas (Ana, Berta y Carla) elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30 % de las invitaciones, Berta el 40 % y Carla las restantes. El 2 % de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3 % y 1 %, respectivamente.

a) Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.

b) Si una invitación no llegó a su destino, ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?

10º) Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son 157,125 y 182,875.

a) Calcule el valor de la media muestral.

b) Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál será el nivel de confianza para este intervalo?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Sea $a \in R$. Considera las matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}-a & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\ e\ Y=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}:$$

$a)$ Determina los valores del parámetro real a para que A tenga inversa.

$b)$ Calcule, para $a=1$, la solución del sistema $(A-B)\cdot X=Y$.

Solución

$a)$ Una matriz es invertible cuando es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}-a & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}=a+a+a+a=0;\ \ 4a=0;\ \ a=0.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R-\{0\}}.$$

$b)$ $(A-B)\cdot X=Y;\ \ (A-B)^{-1}\cdot(A-B)\cdot X=(A-B)^{-1}\cdot Y;$

$I\cdot X=(A-B)^{-1}\cdot Y \Rightarrow \underline{X=(A-B)^{-1}\cdot Y}.$

Para $a=1 \Rightarrow A-B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$

Se obtiene la inversa de $(A-B)$ por el método de Gauss-Jordan:

$$(A-B|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}F_1 \leftrightarrow F_2\\ F_3 \rightarrow -F_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2 \rightarrow F_2+2F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_2 \rightarrow -\tfrac{1}{4}F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}F_1 \rightarrow F_1+2F_2\\ F_2 \rightarrow F_2+\frac{1}{2}F_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\Rightarrow(A-B)^{-1}=-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

$$X=(A-B)^{-1}\cdot Y \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 8\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{4}\\ -2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{Solución: x=-\frac{1}{2}, y=-\frac{5}{4}, z=-2}.$$

2º) Sea S la región del plano definida por: $7y - 8x \leq 3.400$; $3x - 8y \leq 2.000$; $11x + 14y \geq 9.500$; $x \leq 1.200$; $y \leq 1.000$.

$a)$ Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

$b)$ Obtenga el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

$(1) \Rightarrow 7y - 8x \leq 3.400 \Rightarrow y \leq \frac{3.400+8x}{7} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	100	450
y	600	1.000

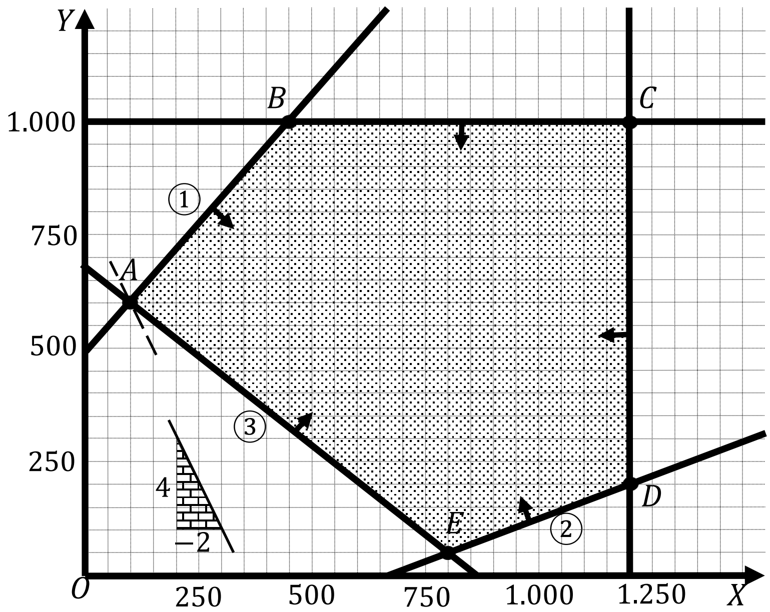
$(2) \Rightarrow 3x - 8y \leq 2.000 \Rightarrow y \geq \frac{3x-2.000}{8} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	800	1.200
y	50	200

$(3) \Rightarrow 11x + 14y \geq 9.500 \Rightarrow y \geq \frac{9.500-11x}{14} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	100	800
y	600	50

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7y - 8x = 3.400 \\ 11x + 14y = 9.500 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -14y + 16x = -6.800 \\ 11x + 14y = 9.500 \end{array}\right\} \Rightarrow 27x = 2.700 \Rightarrow$$

$x = 100$; $7y - 800 = 3.400$; $y = \frac{4.200}{7} = 600 \Rightarrow \underline{A(100, 600)}$.

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 1.000 \\ 7y - 8x = 3.400 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{7.000-3.400}{8} = \frac{3.600}{8} = 450 \Rightarrow \underline{B(450, 1.000)}.$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 1.200 \\ y = 1.000 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(1.200, 1.000)}.$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 1.200 \\ 3x - 8y = 2.000 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{3.600-2.000}{8} = \frac{1.600}{8} = 200 \Rightarrow \underline{D(1.200, 200)}.$$

b) La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=2x+y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(100,600)=2\cdot 100+600=800$.

$B \Rightarrow f(450,1.000)=2\cdot 450+1.000=1.900$.

$C \Rightarrow f(1.200,1.000)=2\cdot 1.200+1.000=3.400$.

$D \Rightarrow f(1.200,200)=2\cdot 1.200+200=2.600$.

$\underline{El\ valor\ mínimo\ de\ la\ función\ es\ 800\ y\ se\ produce\ en\ el\ punto\ A(100,600)}$**.**

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y)=2x+y=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{1}x \Rightarrow m=-\frac{4}{2}$.

3º) Considere las funciones reales de variable real $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + ax + 3$.

a) Se define $h(x)$ de la siguiente manera: $h(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \leq 1 \\ g(x) & si\ x > 1 \end{cases}$. ¿Qué valor debe darle a la constante $a \in R$ para que la función h sea continua en R?

b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de $f\ y\ g$.

Solución

a) La función resulta ser $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & si\ x \leq 1 \\ -x^2 + ax + 3 & si\ x > 1 \end{cases}$, que es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 4x + 3) = 0 = f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(-x^2 + ax + 3) = a + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 0 = a + 2 \Rightarrow a = -2.$$

$$\underline{La\ función\ h(x)\ es\ continua\ en\ R\ para\ a = -2}.$$

b) Para $a = 2$ la función es $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \\ -x^2 + 2x + 3 \end{cases}$.

Las abscisas de los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3;\ \ 2x^2 - 6x = 0;\ \ x^2 - 3x = 0;\ \ x(x - 3) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$ Los puntos de corte son: $A(0, 3)\ y\ B(3, 0)$.

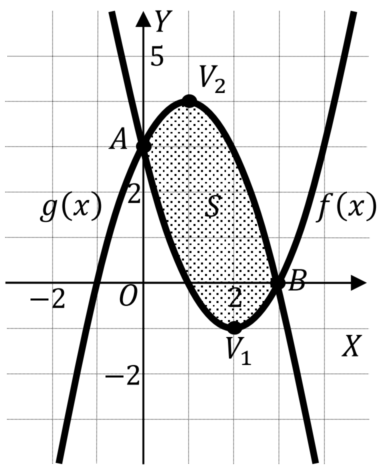
La parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$, que es convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto siguiente:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0;\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow V_1(2, -1).$$

La parábola $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, que es cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto siguiente:

$$f'(x) = -2x + 2 = 0;\ -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow V_2(1, 4).$$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



Por ser las ordenadas de la parábola $g(x)$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x)$ en el intervalo del área a calcular, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^3 [(-x^2 + 2x + 3) - (x^2 - 4x + 3)] \cdot dx =$$

$= \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3 - x^2 + 4x - 3) \cdot dx =$

$= \int_0^3 (-2x^2 + 6x)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_0^3 = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x^2\right]_0^3 = \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 3 \cdot 3^2\right) - 0 =$

$= -18 + 27 \Rightarrow$

$\underline{S = 9\, u^2}$**.**

4º) Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatoria es la unión de los sucesos A y B. Esto es, $E = A \cup B$. Además, suponga que $P(A \cap B) = 0{,}2$ y $P(B) = 0{,}7$.

$a)$ Calcule $P(A^c)$ $\quad$ $b)$ Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

Nota: A^c y B^c son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

Siendo $E = A \cup B \Rightarrow P(A \cup B) = 1$.

$a)$ $\quad Datos:\ P(A \cap B) = 0{,}2;\ \ P(B) = 0{,}7;\ \ P(A \cup B) = 1.$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

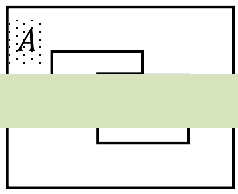
$$\Rightarrow P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0{,}7 + 0{,}2 \Rightarrow P(A) = 0{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}5 \Rightarrow$$

$$\underline{P(A^c) = 0{,}5}.$$

$b)$ $P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{P(A^c \cup B^c) = 0{,}8}.$$



$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B)$

5º) Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del 95 % para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo 0,2 y 0,3 los extremos de dicho intervalo.

a) Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.

b) Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?

Solución

a) La proporción muestral es el valor central del intervalo de confianza:

$p = \frac{0,2+0,3}{2} = 0,25.$

$\underline{El\ 25\ \%\ de\ los\ tornillos\ de\ la\ muestra\ son\ defectuosos}.$

El error máximo cometido es la mitad del valor del intervalo de confianza:

$E = \frac{0,3-0,2}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05.$

$\underline{El\ error\ máximo\ cometido\ es\ del\ 5\ \%}.$

b) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0,95\ \rightarrow\ \alpha = 1 - 0,95 = 0,05\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750\ \rightarrow z = 1,96).$

$Datos:\ n = 700;\ \ p = 0,25;\ \ q = 1 - 0,25 = 0,75;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{700}} = 1,96 \cdot 0,0164 = 0,0321.$

$\underline{El\ error\ máximo\ sería\ del\ 3,21\ \%}$

6º) Considere el sistema $\left.\begin{aligned} x+ay+z&=2 \\ x-az&=0 \\ x+y+z&=2 \end{aligned}\right\}$ dependiente del parámetro real a:

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a=0$.

Solución

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1-a^2+a-a=0;\ \ 1-a^2=0 \Rightarrow a_1=-1, a_2=1.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq -1 \\ a\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_3\} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2+2=4\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=-1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I}.$$

b) Para $a=0$ el sistema resulta: $\left.\begin{aligned} x+z&=2 \\ x&=0 \\ x+y+z&=2 \end{aligned}\right\}$, cuyas soluciones son:

$$\underline{Solución: x=0,\ \ y=0,\ \ z=2}.$$

7º) a) Determine los valores de los parámetros $a, b \in R$ para que la función $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ verifique que $f(2) = 4$ y $f'(2) = 0$.

b) Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x) = x + \frac{1}{x}$.

Solución

a) $f(2) = 4 \Rightarrow a \cdot 2 + \frac{b}{2} = 4;\ \ 4a + b = 8.$ (1)

$f'(x) = a - \frac{b}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{2^2} = 0;\ \ 4a - b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = 8 \\ 4a - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 8a = 8;\ \ \underline{a = 1}. \qquad 4 + b = 8 \Rightarrow \underline{b = 4}.$$

b) $g(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x} = \infty \Rightarrow$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x = 0 \Rightarrow$

$$\underline{La\ recta\ x = 0\ (eje\ Y)\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y = x}.$$

8º) Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, $I(x)$, en miles de euros, vienen expresados por la función $I(x) = x \cdot \frac{170-0,85x}{5}$, en la que x representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x) = 10 + 2x + x^2$.

a) Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda x y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.

b) Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $\frac{C(x)}{x}$, no supere los diez mil euros.

Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

Solución

a) $B(x) = I(x) - C(x) = x \cdot \frac{170-0,85x}{5} - (10 + 2x + x^2) =$

$= \frac{170x-0,85x^2-50-10x-5x^2}{5} = \frac{-5,85x^2+160x-50}{5} \Rightarrow \underline{B(x) = -1,17x^2 + 32x - 10}.$

La función beneficios es una parábola cóncava (∩) por tener negativo el coeficiente de x^2, por lo cual, su vértice es su valor máximo.

$B'(x) = -2,34x + 32 = 0;\ 234x = 3.200;\ 117x = 1.600 \Rightarrow x = \frac{1.600}{117} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cong 13,675.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ vendiendo\ 13.675\ litros\ de\ fertilizante}.$

$B(13,675) = -1,17 \cdot 13,675^2 + 32 \cdot 13,675 - 10 =$

$= -218,803 + 437,6 - 10 = 208,797.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 208.797\ euros}.$

b) $C(m) = \frac{C(x)}{x} = \frac{10+2x+x^2}{x} = x + 2 + \frac{10}{x}.$

$C(m) \leq 10 \Rightarrow x + 2 + \frac{10}{x} \leq 10;\ \ x^2 + 2x + 10 \leq 10x;\ \ x^2 - 8x + 10 \leq 0.$

Resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2 - 8x + 10 = 0$:

$$x = \frac{8\pm\sqrt{64-40}}{2} = \frac{8\pm\sqrt{24}}{2} = \frac{8\pm2\sqrt{6}}{2} = 4 \pm \sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - \sqrt{6} \cong 1,55 \\ x_2 = 4 + \sqrt{6} \cong 6,45 \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta que la parábola $g(x) = x^2 - 8x + 10$ en convexa (∪) por tener positivo el coeficiente se x^2, los valores que hacen que el coste medio no supere los 10.000 euros son los comprendidos entre las raíces: $x \in (1,55;\ 6,45)$.

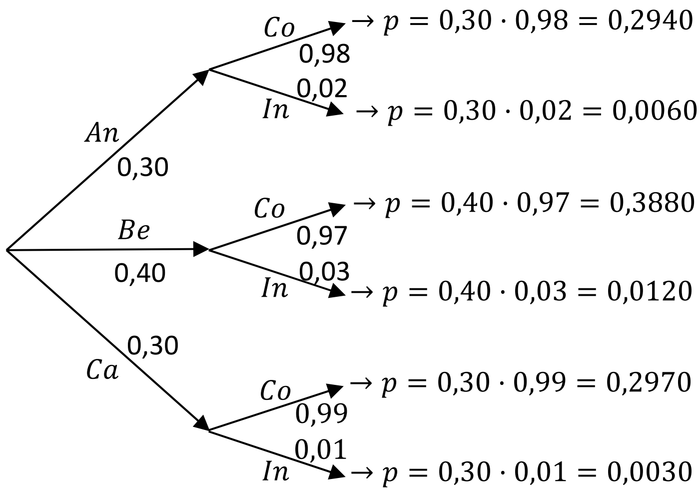
$\underline{C(m) < 10.000\ euros\ fabricando\ entre\ 1.550\ y\ 6.450\ litros\ del\ producto}.$

9º) Tres amigas (Ana, Berta y Carla) elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30 % de las invitaciones, Berta el 40 % y Carla las restantes. El 2 % de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3 % y 1 %, respectivamente.

$a)$ Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.

$b)$ Si una invitación no llegó a su destino, ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?

Solución



$a)$ $\quad P = P(In) = P(An \cap In) + P(Be \cap In) + P(Ca \cap In) =$

$= P(An) \cdot P(In/An) + P(Be) \cdot P(In/Be) + P(Ca) \cdot P(In/Ca) =$

$= 0{,}30 \cdot 0{,}02 + 0{,}40 \cdot 0{,}03 + 0{,}30 \cdot 0{,}01 = 0{,}006 + 0{,}012 + 0{,}003 = \underline{0{,}021}.$

$b)$ $P = P\left(\frac{In}{An}\right) = \frac{P(An \cap In)}{P(In)} = \frac{P(An) \cdot P\left(\frac{In}{An}\right)}{P(In)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}02}{0{,}021} = \frac{0{,}006}{0{,}021} =$

10º) Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son 157,125 y 182,875.

a) Calcule el valor de la media muestral.

b) Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál será el nivel de confianza para este intervalo?

Solución

a) $\overline{x} = \frac{182{,}875+157{,}125}{2} = \frac{340}{2} \Rightarrow$

$$\underline{\overline{x} = 170}.$$

b) $E = \frac{182{,}875-157{,}125}{2} = \frac{27{,}75}{2} = 12{,}875.$

Datos: $\sigma = 15;\ \ n = 9;\ \ E = 12{,}875.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \ \Rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{12{,}875 \cdot \sqrt{9}}{15} = \frac{12{,}875}{5} = 2{,}575.$

Mirando en la tabla $N(0,1) \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2{,}57 \rightarrow 0{,}9949 \\ 2{,}58 \rightarrow 0{,}9951 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2{,}575 \rightarrow 0{,}9950.$

$\frac{\alpha}{2} - 1 = 0{,}9950;\ \ \alpha - 2 = 1{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01.$

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ es\ del\ 99\ \%}.$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

MURCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
TIEMPO: 90 minutos.

1º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} 4x+ay-2z=1 \\ ax-2y+2z=-1 \\ ax+y=0 \end{array}\right\}$ en función de los valores del parámetro a. Resolverlo para $a=1$.

2º) La empresa Sportwear, especializada en ropa deportiva, quiere fabricar dos tipos de camisetas: técnicas y casual. Para ello utiliza tejidos sostenibles con el medio ambiente: algodón orgánico y lino. Para fabricar una camiseta técnica necesita 70 g de algodón orgánico y 20 g de lino, y para fabricar una camiseta casual necesita 60 g de algodón orgánico y 10 g de lino. Actualmente, la empresa dispone para producir 4.200 g de algodón orgánico y 800 g de lino. Además, para que sea rentable el proceso se debe fabricar al menos 10 camisetas tipo casual. Sabiendo que cada camiseta técnica da un beneficio de 5 euros y cada casual de 4 euros, calcule, justificando la respuesta:

a) El número de camisetas de cada tipo que debería fabricar para obtener el máximo beneficio

b) El valor de dicho beneficio máximo.

3º) Se estima que los beneficios, en miles de euros, obtenidos en una sala de conciertos inaugurada hace 5 años, viene dado por la función $B(t)=2t^3-15t^2+24t+26$ donde $t\in[0,5]$ es el tiempo, medido en años, que lleva funcionando la sala. Se quiere conocer:

a) ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio de la sala de conciertos? Razone la respuesta.

b) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

4º) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-kx+3 & si\ \ x\le 2 \\ 2x+k & si\ \ x>2 \end{cases}$:

a) Calcular el valor de k para que la función sea continua en $x=2$.

b) Para este valor determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-1$.

5º) Dada la función $f(x)=x^2e^x$, calcule:

a) El dominio de la función.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Máximos y mínimos relativos.

d) Calcule la derivada de la función $f(x)=x^2e^x$ en el punto de abscisa $x=1$.

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

6º) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas de ecuaciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x^2 - 4x + 4$. Calcular su área.

7º) Dada la función $f(x) = \int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} \cdot dx$:

$a)$ Calcular $\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} \cdot dx$.

$b)$ Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

8º) $a)$ En el departamento informático de unos grandes almacenes se encuentran a la venta ordenadores de distintas marcas comerciales. Hay 100 ordenadores de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un ordenador esté obsoleto es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige un ordenador al azar:

$I)$ Calcule la probabilidad de que el ordenador esté obsoleto.

$II)$ Sabiendo que el ordenador elegido es obsoleto, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A?

$b)$ El salario mensual de los hogares de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación típica igual a 160 euros. Seleccionados 40 hogares al azar, han tenido un salario medio mensual de 1.100 euros. Calcule un intervalo de confianza para el salario medio mensual de los hogares de ese municipio con un nivel de confianza del 95 %.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{aligned} 4x + ay - 2z = 1 \\ ax - 2y + 2z = -1 \\ ax + y = 0 \end{aligned}\right\}$ en función de los valores del parámetro a. Resolverlo para $a = 1$.

Solución

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & a & -2 \\ a & -2 & 2 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 4 & a & -2 & 1 \\ a & -2 & 2 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & a & -2 \\ a & -2 & 2 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2a + 2a^2 - 4a - 8 = 0;\ \ 2a^2 - 6a - 8 = 0;$$

$a^2 - 3a - 4 = 0;\ \ a = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 4.$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq -1 \\ a \neq 4 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$M' = \begin{pmatrix} 4 & a & -2 & 1 \\ a & -2 & 2 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = -2C_4, \forall a \in R\}.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a = -1 \\ a = 4 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para $a = 1$ el sistema resulta $\left.\begin{aligned} 4x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x + y = 0 \end{aligned}\right\}$ que es compatible determinado; resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2-2}{-2+2-4-8} = \frac{0}{-12} = 0. \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{2-2}{-12} = \frac{0}{-12} = 0.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{1-1+2+4}{-12} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}.$$

$$\underline{Solución: x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = -\frac{1}{2}.}$$

2º) La empresa Sportwear, especializada en ropa deportiva, quiere fabricar dos tipos de camisetas: técnicas y casual. Para ello utiliza tejidos sostenibles con el medio ambiente: algodón orgánico y lino. Para fabricar una camiseta técnica necesita 70 g de algodón orgánico y 20 g de lino, y para fabricar una camiseta casual necesita 60 g de algodón orgánico y 10 g de lino. Actualmente, la empresa dispone para producir 4.200 g de algodón orgánico y 800 g de lino. Además, para que sea rentable el proceso se debe fabricar al menos 10 camisetas tipo casual. Sabiendo que cada camiseta técnica da un beneficio de 5 euros y cada casual de 4 euros, calcule, justificando la respuesta:

a) El número de camisetas de cada tipo que debería fabricar para obtener el máximo beneficio

b) El valor de dicho beneficio máximo.

Solución

a) Sean x e y el número de camisetas de los tipos técnicas y casual que se fabrican, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 70x+60y\le 4.200 \\ 20x+10y\le 800 \\ x\ge 0;\ y\ge 10 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} 7x+6y\le 420 \\ 2x+y\le 80 \\ x\ge 0;\ y\ge 10 \end{array}\right\}.$

$(1) \Rightarrow 7x+6y\le 420 \Rightarrow y\le \frac{420-7x}{6} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	60
y	70	0

$(2) \Rightarrow 2x+y\le 80 \Rightarrow y\le 80-2x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	40
y	80	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,10).$

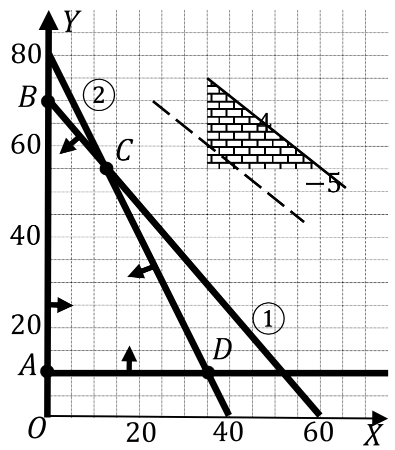
$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 7x+6y=420 \end{array}\right\} \Rightarrow 6y=420;$

$y=70 \Rightarrow B(0,70).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x+6y=420 \\ 2x+y=80 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} -7x-6y=-420 \\ 12x+6y=480 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x=60;\ \ x=12;\ \ 24+y=80;\ \ y=56 \Rightarrow C(12,56).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=10 \\ 2x+y=80 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+10=80;\ \ 2x=70;\ \ x=35 \Rightarrow D(35,10).$



La función de objetivos es $f(x,y)=5x+4y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,10)=5\cdot 0+4\cdot 10=0+40=40.$

$B \Rightarrow f(0,70)=5\cdot 0+4\cdot 70=0+280=280.$

$C \Rightarrow f(12,56)=5\cdot 12+4\cdot 56=60+224=284.$

$D \Rightarrow f(35,10) = 5 \cdot 35 + 4 \cdot 10 = 175 + 40 = 215.$

El valor máximo se produce en el punto $C(12, 56)$.

$$\underline{Máximo\ beneficio\ fabricando\ 12\ camisetas\ técnicas\ y\ 56\ casual}\mathbf{.}$$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 284\ euros}\mathbf{.}$$

3º) Se estima que los beneficios, en miles de euros, obtenidos en una sala de conciertos inaugurada hace 5 años, viene dado por la función $B(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 26$ donde $t \in [0, 5]$ es el tiempo, medido en años, que lleva funcionando la sala. Se quiere conocer:

$a)$ ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio de la sala de conciertos? Razone la respuesta.

$b)$ ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Solución

$a)$ $B(0) = 26.$

$B(5) = 2 \cdot 5^3 - 15 \cdot 5^2 + 24 \cdot 5 + 26 = 250 - 375 + 120 + 26 =$

$= 396 - 375 = 21.$

Para que el beneficio sea máximo o un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$B'(t) = 6t^2 - 30t + 24.$

$B'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 30t + 24 = 0;\; t^2 - 5t + 4 = 0;\; t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} =$

$= \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = 1;\; t_2 = 4$.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$B''(t) = 12t - 30 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow 12 \cdot 1 - 30 = -18 < 0 \Rightarrow Máximo \\ t_2 = 4 \rightarrow 12 \cdot 4 - 30 = 18 > 0 \Rightarrow Mínimo \end{cases}.$$

$$\underline{La\ sala\ alcanza\ su\ máximo\ rendimiento\ al\ año\ de\ comenzar\ su\ actividad}.$$

$b)$ $B(1) = 2 \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 + 26 = 2 - 15 + 24 + 26 = 37.$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 37.000\ euros\ anuales}.$$

4º) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-kx+3 & si\ \ x\leq 2 \\ 2x+k & si\ \ x>2 \end{cases}$:

$a)$ Calcular el valor de k para que la función sea continua en $x=2$.

$b)$ Para este valor determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-1$.

Solución

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=2$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de k para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-kx+3)=7-2k=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(2x+k)=4+k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \Rightarrow 7-2k=4+k;\ \ 3=3k \Rightarrow$$

$$\underline{k=1}.$$

$b)$ Para $k=1$ la función resulta: $f(x)=\begin{cases} x^2-x+3 & si\ \ x\leq 2 \\ 2x+1 & si\ \ x>2 \end{cases}$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\ \ x\leq 2 \\ 2 & si\ \ x>2 \end{cases} \Rightarrow m=f'(-1)=2\cdot(-1)-1 \Rightarrow m=-3.$

El punto de tangencia es el siguiente:

$f(-1)=(-1)^2-(-1)+3=1+1+3=5 \Rightarrow P(-1,5).$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $P(-1,5)$ con $m=-3$ es:

$y-5=-3\cdot(x+1)=-3x-3.$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t\equiv 3x+y-2=0}.$$

5º) Dada la función $f(x) = x^2e^x$, calcule:

$a)$ El dominio de la función. $b)$ Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$c)$ Máximos y mínimos relativos.

$d)$ Calcule la derivada de la función $f(x) = x^2e^x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución

$a)$ La función f es el producto de un monomio por una función exponencial, por lo cual:

$$\underline{D(f) \Rightarrow R.}$$

$b)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x \cdot e^x \cdot (2 + x).$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^x \cdot (2 + x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0.$

Por ser $D(f) \Rightarrow R$, las raíces de su primera derivada dividen su dominio en tres intervalo donde la función es, alternativamente, en creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, +\infty)$:

$f'(1) = 1 \cdot e^1 \cdot (2 + 1) = 3e > 0 \Rightarrow Creciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, -2) \cup (0, +\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-2, 0).}$$

$c)$ Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = 1 \cdot e^x \cdot (2 + x) + x \cdot e^x \cdot (2 + x) + x \cdot e^x \cdot 1 =$

$= e^x[(2 + x) + x(2 + x) + x] = e^x(2 + x + 2x + x^2 + x) = e^x(x^2 + 4x + 2).$

$f''(-2) = e^{-2}(4 - 8 + 2) < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2.$

$f(-2) = (-2)^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \Rightarrow$

$$\underline{Máximo: A\left(-2, \frac{4}{e^2}\right).}$$

$f''(0) = e^0(0^2 + 4 \cdot 0 + 2) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$

$f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0 \Rightarrow$

$$\underline{Mínimo: O(0, 0)}.$$

$d)\ f'(x) = x \cdot e^x \cdot (2 + x).$

$f'(1) = 1 \cdot e^1 \cdot (2 + 1) \Rightarrow$

$$\underline{f'(1) = 3e}.$$

6º) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas de ecuaciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x^2 - 4x + 4$. Calcular su área.

Solución

Las abscisas de los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$-x^2 + 2x + 4 = x^2 - 4x + 4; \;\; 2x^2 - 6x = 0; \;\; x^2 - 3x = 0; \;\; x(x-3) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$ Los puntos de corte son: $A(0,4)$ y $B(3,1)$.

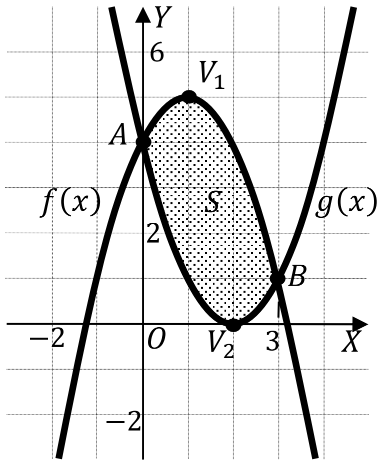
La parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$, que es cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto siguiente:

$$f'(x) = -2x + 2 = 0; \; -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow V_1(1,5).$$

La parábola $g(x) = x^2 - 4x + 4$, que es convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto siguiente:

$$g'(x) = 2x - 4 = 0; \; x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow V_2(2,0).$$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



Por ser las ordenadas de la parábola $g(x)$ iguales o menores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x)$ en el intervalo del área a calcular, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^3 [(-x^2 + 2x + 4) - (x^2 - 4x + 4)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 2x + 4 - x^2 + 4x - 4) \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-2x^2 + 6x)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_0^3 = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x^2\right]_0^3$$

$$= \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 3 \cdot 3^2\right) - 0 = -18 + 27 \Rightarrow$$

$$\underline{S = 9\, u^2}.$$

7º) Dada la función $f(x) = \int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+2} \cdot dx$:

$a)$ Calcular $\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} \cdot dx$.

$b)$ Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

Solución

$a)$ $\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} e^{x^2} + 1 = t \\ 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx = dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot dt = Lt + C =$

$$\underline{L\left(e^{x^2} + 1\right) + C}.$$

$b)$ La función $f(x) = L\left(e^{x^2} + 2\right)$ es continua en su dominio, que es R, por ser $e^{x^2} + 2 \geq 2, \forall x \in R$, por lo cual, sus ordenadas son mayores que cero en el intervalo que interesa, que es $(0, 1)$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+2} \cdot dx = \left[L\left(e^{x^2} + 2\right)\right]_0^1 =$$

$$= L(e^1 + 2) - L(e^0 + 2) = L(e + 2) - L3 \Rightarrow$$

$$\underline{S = L\frac{e+2}{3}\ u^2 \cong 0{,}45\ u^2}.$$

8º) a) En el departamento informático de unos grandes almacenes se encuentran a la venta ordenadores de distintas marcas comerciales. Hay 100 ordenadores de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un ordenador esté obsoleto es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige un ordenador al azar:

I) Calcule la probabilidad de que el ordenador esté obsoleto.

II) Sabiendo que el ordenador elegido es obsoleto, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A?

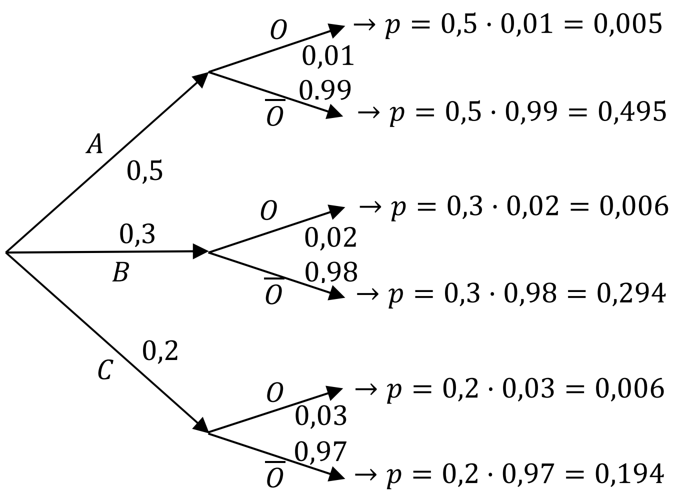
b) El salario mensual de los hogares de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación típica igual a 160 euros. Seleccionados 40 hogares al azar, han tenido un salario medio mensual de 1.100 euros. Calcule un intervalo de confianza para el salario medio mensual de los hogares de ese municipio con un nivel de confianza del 95 %.

Solución

a) El número de ordenadores es $N = 100 + 60 + 40 = 200$.

Las probabilidades de elegir un ordenador de cada una de las marcas es el siguiente:

$P(A) = \frac{100}{200} = 0{,}5;\;\; P(B) = \frac{60}{200} = 0{,}3;\;\; P(C) = \frac{40}{200} = 0{,}2.$



I) $P = P(O) = P(A \cap O) + P(B \cap O) + P(C \cap O) =$

$= P(A) \cdot P(O/A) + P(B) \cdot P(O/B) + P(C) \cdot P(O/C) =$

$= 0{,}5 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}005 + 0{,}006 + 0{,}006 = \underline{0{,}017}.$

II) $P = P(A/O) = \frac{P(A \cap O)}{P(O)} = \frac{P(A) \cdot P(O/A)}{P(O)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}01}{0{,}0117} = \frac{0{,}005}{0{,}017} = \underline{0{,}2941}.$

b) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0{,}95 \;\to\; \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \;\to\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$

$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \;\to z = 1{,}96).$

Datos: $n = 40;\;\; \overline{x} = 1.100;\;\; \sigma = 160;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(1.100 - 1{,}96 \cdot \frac{160}{\sqrt{40}};\ 1.100 + 1{,}96 \cdot \frac{160}{\sqrt{40}}\right)$;

$(1.100 - 1{,}96 \cdot 25{,}2982;\ 1.100 + 1{,}96 \cdot 25{,}2982)$;

$(1.100 - 49{,}5845;\ 1.100 + 49{,}5845)$.

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (1.050{,}4155;\ 1.149{,}5845)}.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}10 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & a\\ a & 1\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, se pide:

$a)$ Calcular el valor de a para que $B^2=A$.

$b)$ Calcular la matriz inversa A^{-1}.

$c)$ Para $a=0$, encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX+B=C$.

2º) Sea S la región del plano delimitado por el siguiente sistema de inecuaciones lineales:
$$\left.\begin{array}{r} x+y\le 10\\ x+2y\ge 8\\ 2\le y\le x+6\\ x\le 6\end{array}\right\}.$$

$a)$ Represente la región S y calcule sus vértices.

$b)$ Determine el punto de la región factible donde la función $f(x,y)=-x+2y$ alcanza su valor mínimo. Calcule dicho valor.

3º) La ecuación de demanda de un determinado producto viene dado por la expresión $p=400-2q$, y su función de coste total es $C(q)=0{,}2q^2+4q+400$, donde q es número de unidades de dicho producto y p se expresa en euros por unidad. Determine:

$a)$ La expresión de la función de beneficios de la empresa.

$b)$ El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa.

$c)$ El precio para el que el beneficio es máximo.

$d)$ El beneficio máximo.

4º) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x\cdot e^x & si\ \ x\le 0\\ ax+b & si\ \ 0<x<1\\ 1+x\cdot Lx & si\ \ x\ge 1\end{cases}$:

$a)$ Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio.

$b)$ Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

5º) Dada la función $f(x)=\frac{1-x^2}{x^2-4}$, calcule:

$a)$ El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados.

$b)$ Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.

$c)$ Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$d)$ Máximos y mínimos relativos.

6º) Dada la función $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$:

$a)$ Calcular la derivada $f'(x)$. $b)$ Calcular $I=\int f(x)\cdot dx$.

$c)$ Calcular $I=\int_0^1 f(x)\cdot dx$.

7º) Dada la función $f(x)=4x-x^2$:

$a)$ Representar gráficamente el recinto limitado por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=3$.

$b)$ Calcular el área del recinto del apartado anterior.

8º) $a)$ Sean A y B dos sucesos independientes, tales que $P(A)=0{,}3$ y $P(A\cap B)=0{,}12$.

$I)$ Calcular $P(B)$. $II)$ Calcular $P(A\cup B)$. $III)$ Calcular $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

$b)$ En una estación del AVE, el tiempo que tarda un viajero para acceder al tres desde que llega al control de equipajes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 2 minutos. Se tomó una muestra de 50 viajeros, y se observó que el tiempo medio de espera era de 16 minutos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera de la maleta en ese aeropuerto con un nivel de confianza del 90 %.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, se pide:

$a)$ Calcular el valor de a para que $B^2 = A$.

$b)$ Calcular la matriz inversa A^{-1}.

$c)$ Para $a = 0$, encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX + B = C$.

Solución

$a)$ $B^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 9+a^2 & 3a+a \\ 3a+a & a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} 9+a^2 & 4a \\ 4a & a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 9+a^2 = 10 \\ 4a = 4 \\ a^2+1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{a = 1}.$$

$b)$ $|A| = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 16 = 4$; $A^t = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}}{4} \Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}}.$$

$c)$ $A \cdot X + B = C$; $A \cdot X = C - B$; $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$;

$I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (C - B)}$.

Para $a = 0$ es $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1} \cdot (C - B) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}}.$$

2º) Sea S la región del plano delimitado por el siguiente sistema de inecuaciones lineales:
$$\left.\begin{array}{r} x+y\le 10 \\ x+2y\ge 8 \\ 2\le y\le x+6 \\ x\le 6 \end{array}\right\}.$$

$a)$ Represente la región S y calcule sus vértices.

$b)$ Determine el punto de la región factible donde la función $f(x,y)=-x+2y$ alcanza su valor mínimo. Calcule dicho valor.

Solución

$$a)\ \left.\begin{array}{r} x+y\le 10 \\ x+2y\ge 8 \\ 2\le y\le x+6 \\ x\le 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y\le 10 \\ x+2y\ge 8 \\ y\le x+6 \\ x\le 6;\ \ y\ge 2 \end{array}\right\}.$$

1 $\Rightarrow x+y\le 10 \Rightarrow y\le 10-x \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	5	3
y	5	7

2 $\Rightarrow x+2y\ge 8;\ \ y\ge \frac{8-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\to No.$

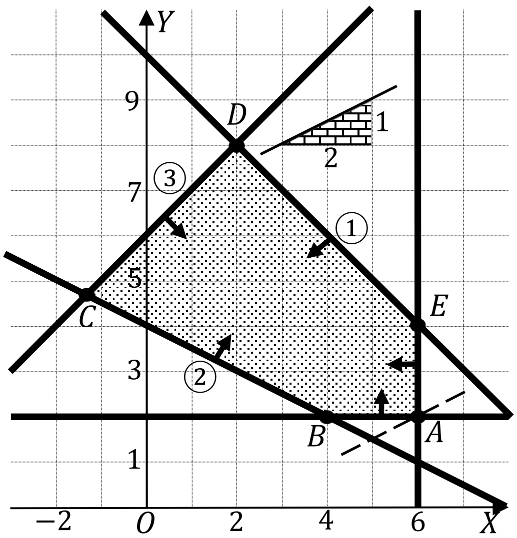
x	0	4
y	4	2

3 $\Rightarrow y\le x+6 \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	4
y	4	2

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=6 \\ y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(6,2)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=8 \\ x+2y=8 \end{array}\right\} \Rightarrow x=4 \Rightarrow \underline{B(4,2)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=8 \\ x-y=-6 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+2y=8 \\ -x+y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$3y=14;\ \ y=\frac{14}{3};\ \ x+\frac{28}{3}=8;\ \ 3x+28=24;\ \ 3x=-4;\ \ x=-\frac{4}{3} \Rightarrow \underline{C\left(-\frac{4}{3},\frac{14}{3}\right)}.$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=10 \\ x-y=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=4;\ \ x=2;\ \ y=8 \Rightarrow \underline{D(2,8)}.$

$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=6 \\ x+y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow y=4 \Rightarrow \underline{E(6,4)}.$

$b)$ La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=-x+2y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(6,2)=-6+2\cdot 2=-6+4=-2.$

$B \Rightarrow f(4,2) = -4 + 2 \cdot 2 = -4 + 4 = 0.$

$C \Rightarrow f\left(-\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right) = -\frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{14}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{28}{3} = 8.$

$D \Rightarrow f(2,8) = -2 + 2 \cdot 8 = -2 + 16 = 14.$

$E \Rightarrow f(6,4) = -6 + 2 \cdot 4 = -6 + 8 = 2.$

El máximo se produce en el punto $A(6,2)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = -x + 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x \Rightarrow m = \frac{1}{2}.$

$\underline{El\ mínimo\ se\ obtiene\ en\ el\ punto\ A(6,2)\ y\ su\ valor\ es\ -2}$**.**

3º) La ecuación de demanda de un determinado producto viene dado por la expresión $p = 400 - 2q$, y su función de coste total es $C(q) = 0{,}2q^2 + 4q + 400$, donde q es número de unidades de dicho producto y p se expresa en euros por unidad. Determine:

$a)$ La expresión de la función de beneficios de la empresa.

$b)$ El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa.

$c)$ El precio para el que el beneficio es máximo.

$d)$ El beneficio máximo.

Solución

$a)$ La función beneficios, $B(q)$, es la diferencia entre la función ingresos, $I(q)$, menos la función costes.

$$I(q) = q \cdot p = q \cdot (400 - 2q) = 400q - 2q^2.$$

$$B(q) = I(q) - C(q) = 400q - 2q^2 - (0{,}2q^2 + 4q + 400) =$$

$$= -2q^2 + 400q - 0{,}2q^2 - 4q - 400 \Rightarrow \underline{B(q) = -2{,}2q^2 + 396q}.$$

$b)$ La función beneficios es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de q^2, por lo cual, su mínimo absoluto es su vértice, que es el siguiente:

$$B'(q) = -4{,}4q + 396.$$

$$B'(q) = 0 \Rightarrow -4{,}4q + 396 = 0; \;\; q = \frac{396}{4{,}4} = 90.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ cuando\ se\ producen\ 90\ unidades\ del\ producto}.$$

$c)$ $p = 400 - 2q = 400 - 2 \cdot 90 = 400 - 180 = 220.$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ cuando\ la\ unidad\ del\ producto\ vale\ 220\ euros}.$$

$d)$ $B(110) = -2{,}2 \cdot 90^2 + 396 \cdot 90 = -17.820 + 35.640 = 17.820.$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 17.820\ euros}.$$

4º) Sea la función $f(x)=\begin{cases} x\cdot e^x & si\ \ x\le 0 \\ ax+b & si\ \ 0<x<1 \\ 1+x\cdot Lx & si\ \ x\ge 1 \end{cases}$:

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio.

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

Solución

a) La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0$ y para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot e^x)=0=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(ax+b)=b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow \underline{b=0}.$$

La función resulta: $f(x)=\begin{cases} x\cdot e^x & si\ \ x\le 0 \\ ax & si\ \ 0<x<1 \\ 1+x\cdot Lx & si\ \ x\ge 1 \end{cases}$.

$$Para\ x=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(ax)=a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(1+x\cdot Lx)=1=f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow$$

$$\underline{a=1}.$$

b) Para $x=1$ la función resulta $f(x)=1+x\cdot Lx$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x)=0+1\cdot Lx+x\cdot\frac{1}{x}=1+Lx.$$

$$Para\ x=1\Rightarrow m=f'(1)=1+L1=1+0\Rightarrow m=1.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(1)=1+L1=1+0=1\Rightarrow P(1,1)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $P(1,1)$:

$$y-1=1\cdot(x-1)=x-1.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t\equiv x-y=0}.$$

5º) Dada la función $f(x)=\frac{1-x^2}{x^2-4}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Máximos y mínimos relativos.

Solución

a) El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x_1=-2, x_2=2.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R-\{-2,2\}}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x^2-4}=0;\ \ 1-x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \rightarrow A(-1,0) \\ x_2=1 \rightarrow B(1,0) \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{1-0^2}{0^2-4}=\frac{1}{-4} \Rightarrow C\left(0,-\frac{1}{4}\right).$$

b) Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x^2-4}=-1 \Rightarrow$$

$$\underline{La\ recta\ y=-1\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Las\ rectas\ x=-2\ y\ x=2\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

c) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{-2x\cdot(x^2-4)-(1-x^2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{(x^2-4)^2}=\frac{6x}{(x^2-4)^2}.$$

Teniendo en cuanta que el denominador de la derivada es positivo para los valores del dominio de la función, el valor de la derivada es el que tenga su numerador.

Teniendo en cuenta lo anterior y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x)<0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (-\infty,-2) \cup (-2,0)}.$$

$$f'(x)>0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (0,2) \cup (2,+\infty)}.$$

$d)$ De los periodos de crecimiento y decrecimiento se deduce que la función tiene un mínimo relativo para $x = 0$; no obstante se hace el estudio por derivadas.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{6\cdot(x^2-4)^2 - 6x\cdot[2\cdot(x^2-4)\cdot 2x]}{(x^2-4)^4} = \frac{6\cdot(x^2-4)-24x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{6x^2-24-24x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{-18x^2-24}{(x^2-4)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{-6(3\cdot 0^2+4)}{(0^2-4)^3} = \frac{-24}{-64} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\underline{Mínimo: C\left(0, -\frac{1}{4}\right)}.$$

6º) Dada la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$:

$a)$ Calcular la derivada $f'(x)$.

$b)$ Calcular $I = \int f(x) \cdot dx$.

$c)$ Calcular $I = \int_0^1 f(x) \cdot dx$.

Solución

$a)$ $f'(x) = \frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow$

$$\underline{f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}.$$

$b)$ $I = \int f(x) \cdot dx = \int \frac{x}{1+x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 1+x^2 = t \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt =$

$$= \frac{1}{2} \cdot L|t| + C \Rightarrow$$

$$\underline{I = \int \frac{x}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot L(1+x^2) + C}.$$

$c)$ $I = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot [L(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot [L(1+1^2) - L(1+0^2)] =$

$$= \frac{1}{2} \cdot (L2 - L1) = \frac{1}{2} \cdot (L2 - 0) \Rightarrow$$

$$\underline{I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \cdot dx \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot L2}.$$

7º) Dada la función $f(x) = 4x - x^2$:

a) Representar gráficamente el recinto limitado por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

b) Calcular el área del recinto del apartado anterior.

Solución

a)La parábola $f(x) = 4x - x^2$ es cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto siguiente:

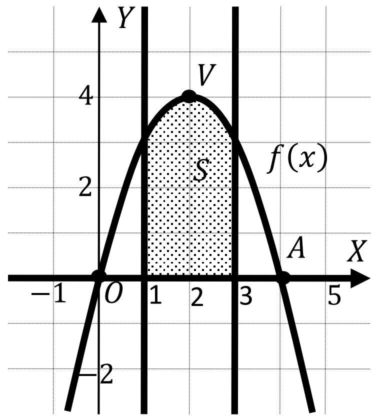
$$f'(x) = 4 - 2x = 0;\ \ 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$f(2) = 4 \cdot 2 - 2^2 = 8 - 4 = 4 \Rightarrow V(2,4).$$

Los puntos de corte de parábola con el eje de abscisas son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0;\ \ x(4 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to O(0,0) \\ x_2 = 4 \to A(4,0) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



b) $$S = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (4x - x^2) \cdot dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^3 =$$

$$= \left(2 \cdot 3^2 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(2 \cdot 1^2 - \frac{1^3}{3}\right) = 18 - 9 - 2 + \frac{1}{3} = 7 + \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{22}{3}\ u^2 \cong 7{,}33\ u^2.}$$

8º) a) Sean A y B dos sucesos independientes, tales que $P(A) = 0{,}3\ y\ P(A \cap B) = 0{,}12$.

I) Calcular $P(B)$. II) Calcular $P(A \cup B)$. III) Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

b) En una estación del AVE, el tiempo que tarda un viajero para acceder al tres desde que llega al control de equipajes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 2 minutos. Se tomó una muestra de 50 viajeros, y se observó que el tiempo medio de espera era de 16 minutos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera de la maleta en ese aeropuerto con un nivel de confianza del 90 %.

Solución

a) Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A) = 0{,}3\ y\ P(A \cap B) = 0{,}12$.

$I)\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}12}{0{,}3} \Rightarrow$

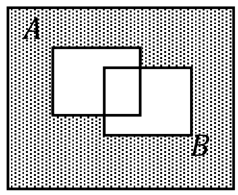
$$\underline{P(B) = 0{,}4}.$$

$II)\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}7 - 0{,}12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{P(A \cup B) = 0{,}58}.$$

$III)\ P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}58 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}42}.$$



$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$

b) Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1 - \alpha = 0{,}90\ \rightarrow\ \alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645$.

$(1 - 0{,}05 = 0{,}9500\ \rightarrow z = 1{,}645)$.

Datos: $n = 50;\ \ \overline{x} = 16;\ \ \sigma = 2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(16 - 1{,}645 \cdot \frac{2}{\sqrt{50}};\ 16 + 1{,}645 \cdot \frac{2}{\sqrt{50}}\right)$;

$(16 - 1{,}645 \cdot 0{,}2828;\ 16 + 1{,}645 \cdot 0{,}2828)$; $(16 - 0{,}4653;\ 16 + 0{,}4653)$.

$$\underline{I.C._{90\ \%} = (15{,}5347;\ 16{,}4653)}.$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2022
Comunidad autónoma de
NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Elija tres de los seis ejercicios propuestos.**TIEMPO:** 90 minutos.

1º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule $A \cdot B^t$ y explique razonadamente si la matriz resultante tiene inversa.

$b)$ Determine las matrices X e Y que verifican el sistema $\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases}$.

2º) Un joven estudiante ganó 20.000 euros en un concurso cultural y está pensando en invertir al menos el 20 % y no más del 50 % del premio. Un asesor se aconseja que reparta su inversión en dos carteras (C1 y C2). La cartera C1 tiene un perfil de riesgo audaz y una rentabilidad del 7 %, mientras que la cartera C2 tiene un perfil de riesgo moderado y una rentabilidad del 4 %. Es estudiante decide invertir no más de 8.000 euros en la cartera C1 y al menos 3.000 euros en la cartera C2. Además, el asesor le recomienda que invierta en C2 una cantidad igual o superior a lo invertido en C1. ¿Cuánto deberá invertir en cada cartera si se desea maximizar la rentabilidad?

$a)$ Plantee el problema. $b)$ Resuélvalo gráficamente.

$c)$ Analice gráficamente qué ocurriría si considerando el perfil de riesgo, el estudiante modifica su idea inicial y decide no invertir más de 2.500 euros en la cartera C1.

3º) Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

$a)$ Estudie la continuidad de $f(x)$ y, clasificando los puntos de discontinuidad.

$b)$ Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 1$.

$c)$ Calcule $\int f(x) \cdot dx$.

4º) Sea la función $f(x) = x \cdot (x-3)^2$.

$a)$ Calcule los puntos de corte con los ejes.

$b)$ Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$c)$ Dibuje el recinto limitado por la función $f(x)$ y el eje OX.

$d)$ Calcule el área de dicho recinto.

5º) Una empresa vende tres productos (A, B y C) que distribuye a sus clientes a través de dos empresas de transporte (Trans y Logis). El año pasado, la empresa realizó 1.500 ventas y encargó a Trans el 60 % del reparto y a Logis el 40 %. El 20 % de los productos distribuidos por Trans fueron del tipo A, el 50 % fueron del tipo B y el 30 % tipo C. Para la empresa Logis, estos porcentajes fueron 40 %, 35 % y 25 %, respectivamente.

a) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Calcule la probabilidad de que sea un producto tipo B y distribuido por Trans.

b) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Sabiendo que es un producto de C, calcule la probabilidad de que fuera distribuido por Logis.

c) Se seleccionan al azar (sin reemplazamiento) dos ventas realizadas el año pasado. Calcule la probabilidad de que las dos ventas fueran distribuidas por Trans.

6º) El consumo energético mensual (en Kw/h) de los hogares de una región sigue una distribución normal con varianza 400. Se elige una muestra de 64 hogares, obteniéndose una suma total del consumo de 17.280 Kw/h.

a) Calcule un intervalo de confianza al 92 % para el consumo energético medio en los hogares.

b) Determine el tamaño de la muestra necesario para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo cometido se reduzca a la mitad. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule $A \cdot B^t$ y explique razonadamente si la matriz resultante tiene inversa.

$b)$ Determine las matrices X e Y que verifican el sistema $\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases}$.

Solución

$$a)\ A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -13 & 9 \end{pmatrix}}.$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A \cdot B^t| = \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -13 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 104 = -59 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\underline{A \cdot B^t\ es\ invertible}.$$

$$b) \begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases} \Rightarrow \begin{rcases} -4X + 6Y = -2A \\ 9X - 6Y = 3B \end{rcases} \Rightarrow 5X = -2A + 3B =$$

$$= -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 3 & 15 \\ -6 & 12 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5X = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 15 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases} \Rightarrow \begin{rcases} -6X + 9Y = -3A \\ 6X - 4Y = 2B \end{rcases} \Rightarrow 5Y = -3A + 2B =$$

$$= -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ -4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

2º) Un joven estudiante ganó 20.000 euros en un concurso cultural y está pensando en invertir al menos el 20 % y no más del 50 % del premio. Un asesor se aconseja que reparta su inversión en dos carteras (C1 y C2). La cartera C1 tiene un perfil de riesgo audaz y una rentabilidad del 7 %, mientras que la cartera C2 tiene un perfil de riesgo moderado y una rentabilidad del 4 %. Es estudiante decide invertir no más de 8.000 euros en la cartera C1 y al menos 3.000 euros en la cartera C2. Además, el asesor le recomienda que invierta en C2 una cantidad igual o superior a lo invertido en C1. ¿Cuánto deberá invertir en cada cartera si se desea maximizar la rentabilidad?

a) Plantee el problema. b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando el perfil de riesgo, el estudiante modifica su idea inicial y decide no invertir más de 2.500 euros en la cartera C1.

Solución

a) Sean x e y las cantidades invertidas (en miles de euros) en las carteras C1 y C2, respectivamente.

Las restricciones que se deducen del enunciado son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} x+y \geq 20\,\%\ de\ 20 \\ x+y \leq 50\,\%\ de\ 20 \\ y \geq x \\ x \leq 8;\ y \geq 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y \geq 4 \\ x+y \leq 10 \\ x-y \leq 0 \\ x \leq 8;\ y \geq 3 \end{array}\right\}.$$

b)

$(1) \Rightarrow x+y \geq 4 \Rightarrow y \geq 4-x \Rightarrow O(0,0) \to No.$

x	0	4
y	4	0

$(2) \Rightarrow x+y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10-x \Rightarrow O(0,0) \to No.$

x	0	10
y	10	0

$(3) \Rightarrow x-y \leq 0 \Rightarrow y \geq x \Rightarrow P(2,0) \to No.$

x	0	10
y	0	10

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

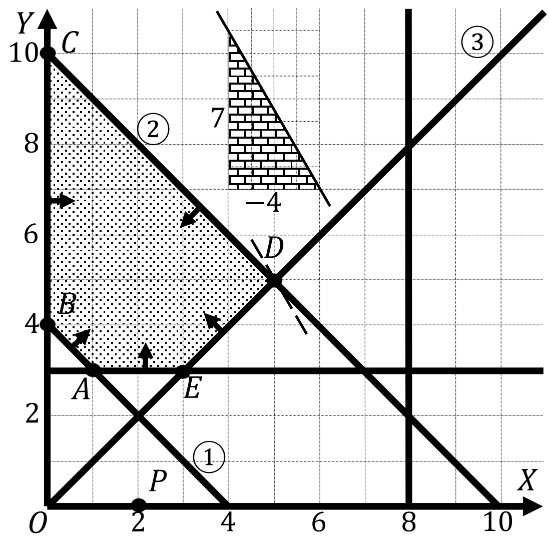
$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=3 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow A(1,3).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0,4).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow C(0,10).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ x+y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=10;\ \ x=5 \Rightarrow D(5,5).$

$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=3 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x-3=0;\ \ x=3 \Rightarrow E(3,3).$



La función de objetivos es $f(x,y)=0{,}07x+0{,}04y$.

Los valores de la función de objetivos (ya expresado en euros) en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(1,3) = 0{,}07 \cdot 1.000 + 0{,}04 \cdot 3.000 = 70 + 120 = 190.$
$B \Rightarrow f(0,4) = 0{,}07 \cdot 0 + 0{,}04 \cdot 4.000 = 0 + 160 = 160.$
$C \Rightarrow f(0,10) = 0{,}07 \cdot 0 + 0{,}04 \cdot 10.000 = 0 + 400 = 400.$
$D \Rightarrow f(5,5) = 0{,}07 \cdot 5.000 + 0{,}04 \cdot 5.000 = 350 + 200 = 550.$
$E \Rightarrow f(3,3) = 0{,}07 \cdot 3.000 + 0{,}04 \cdot 3.000 = 210 + 120 = 330.$
El valor máximo se produce en el punto $D(5,5)$.

También se hubiera obtenido el punto D por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 0{,}07x + 0{,}04y \Rightarrow y = -\frac{0{,}07}{0{,}04}x = -\frac{7}{4}x \Rightarrow m = -\frac{7}{4}.$$

$\underline{\textit{Máximo beneficio invirtiendo } 5.000 \textit{ euros en } C1 \textit{ y } 5.000 \textit{ euros en } C2}$**.**

c) Si decide no invertir más de 2.500 euros en la cartera C1, la situación sería la siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y \geq 20\ \%\ de\ 20 \\ x+y \leq 50\ \%\ de\ 20 \\ y \geq x \\ x \leq 2{,}5;\ y \geq 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y \geq 4 \\ x+y \leq 10 \\ x-y \leq 0 \\ x \leq 2{,}5;\ y \geq 3 \end{array}\right\}.$$

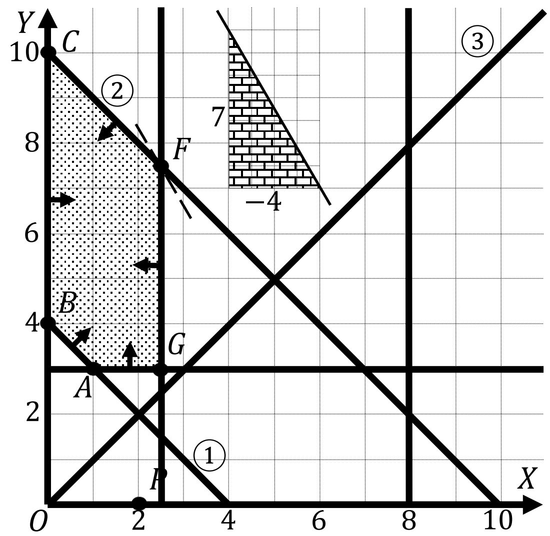
La nueva región factible es la que aparece sombreada en la figura siguiente.

Los vértices de la nueva sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow A(1,3).\quad B \Rightarrow B(0,4).\quad C \Rightarrow C(0,10).$

$$F \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2{,}5 \\ x+y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow P(2{,}5;\ 7{,}5). \qquad G \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2{,}5 \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow G(2{,}5;\ 3).$$

Los valores de la nueva función de objetivos (ya expresado en euros) en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:



$A \Rightarrow f(1,3) = 190.$

$B \Rightarrow f(0,4) = 160.$

$C \Rightarrow f(0,10) = 400.$

$F \Rightarrow P(2{,}5;\ 7{,}5) = 0{,}07 \cdot 2.500 + 0{,}04 \cdot 7.500 =$
$= 175 + 300 = 475.$

$G \Rightarrow P(2{,}5;\ 3) = 0{,}07 \cdot 2.500 + 0{,}04 \cdot 3.000 =$
$175 + 120 = 295.$

El valor máximo se produce ahora en el punto $F(2{,}5;\ 7{,}5)$.

También se hubiera obtenido el punto F por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 0{,}07x + 0{,}04y \Rightarrow y = -\frac{0{,}07}{0{,}04}x = -\frac{7}{4}x \Rightarrow m = -\frac{7}{4}.$$

$\underline{\textit{Máximo beneficio invirtiendo } 2.500 \textit{ euros en } C1 \textit{ y } 7.500 \textit{ euros en } C2}$**.**

3º) Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

$a)$ Estudie la continuidad de $f(x)$ y, clasificando los puntos de discontinuidad.

$b)$ Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 1$.

$c)$ Calcule $\int f(x) \cdot dx$.

Solución

$a)$ $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x}{x^2-4} = \frac{2}{2^2-4} = +\infty$.

El dominio de la función $f(x)$ es: $D(f) \Rightarrow R - \{-2, 2\}$.

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ su\ dominio}.$$

Para los valores $x = -2$ y $x = 2$:

$$\underline{La\ función\ f(x)\ presenta\ discontinuidad\ inevitable\ de\ salto\ infinito}.$$

$b)$ La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-4) - x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$.

$Para\ x = 1 \Rightarrow m = f'(1) = \frac{-1^2-4}{(1^2-4)^2} = \frac{-5}{9} \Rightarrow m = -\frac{5}{9}$.

El punto de tangencia es el siguiente: $f(1) = \frac{1}{1^2-4} = -\frac{1}{3} \Rightarrow P\left(1, -\frac{1}{3}\right)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P\left(1, -\frac{1}{3}\right)$:

$y + \frac{1}{3} = -\frac{5}{9} \cdot (x - 1);\ \ 9y + 3 = -5x + 5$.

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 5x + 9y - 2 = 0}.$$

$$c)\ \int f(x) \cdot dx = \int \frac{x}{x^2-4} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 - 4 = t \\ 2x \cdot dx = dt \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot L|t| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\int f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot L|x^2 - 4| + C}.$$

4º) Sea la función $f(x) = x \cdot (x-3)^2$.

a) Calcule los puntos de corte con los ejes.

b) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Dibuje el recinto limitado por la función $f(x)$ y el eje OX.

d) Calcule el área de dicho recinto.

Solución

a) Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0;\ \ x \cdot (x-3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 = 3 \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0,0).$$

Los puntos de corte son: $\underline{O(0,0)\ y\ A(3,0)}$.

b) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 1 \cdot (x-3)^2 + x \cdot 2 \cdot (x-3) \cdot 1 = (x-3) \cdot [(x-3) + 2x] =$$

$$= (x-3)(3x-3) \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot (x-3)(x-1).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, 1), (1, 3)\ y\ (3, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in (-\infty, 1)$ es:

$$f'(0) = 3 \cdot (0-3)(0-1) = 9 > 0 \Rightarrow Creciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (1, 3)}.$$

De los periodos de crecimiento y decrecimiento se deducen los máximos y mínimos relativos de la función, no obstante, se hace su estudio por derivadas.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 3 \cdot 1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (x-3) \cdot 1 = 3x - 3 + 3x - 9 = 6x - 12.$$

$$f''(1) = 6 - 12 < 0 \Rightarrow$$

$$Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = 1 \cdot (1-3)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Máximo relativo: } B(1,4).}$$

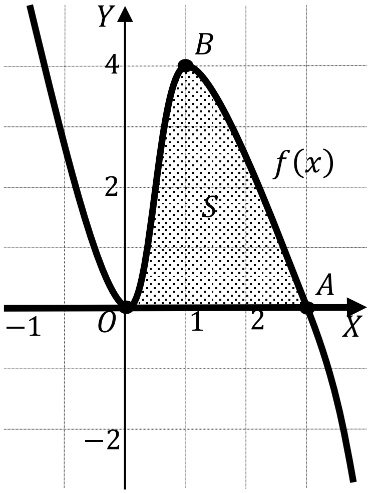
$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = 3.$

$$f(3) = 3 \cdot (3-3)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Mínimo relativo: } A(3,0).}$$

Para $x = 0 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow Ni\ máx.\ ni\ mín.$ (para punto de inflexión).

$c)$ De los apartados anteriores se deduce la representación gráfica de la situación, que es, aproximadamente, la que aparece en la figura adjunta.



$d)$ La superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^3 f(x) \cdot dx = \int_0^3 [x \cdot (x-3)^2] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 [x(x^2 - 6x + 9)] \cdot dx = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3 = \left(\frac{3^4}{4} - 2 \cdot 3^3 + \frac{9 \cdot 3^2}{2}\right) - 0 =$$

$$= \frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2} = \frac{81 - 216 + 162}{4} = \frac{243 - 216}{4} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{27}{4} u^2 = 6{,}75\ u^2.}$$

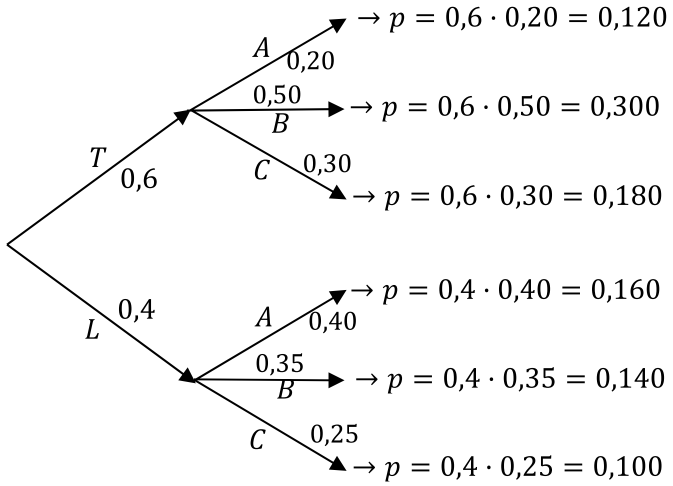
5º) Una empresa vende tres productos (A, B y C) que distribuye a sus clientes a través de dos empresas de transporte (Trans y Logis). El año pasado, la empresa realizó 1.500 ventas y encargó a Trans el 60 % del reparto y a Logis el 40 %. El 20 % de los productos distribuidos por Trans fueron del tipo A, el 50 % fueron del tipo B y el 30 % tipo C. Para la empresa Logis, estos porcentajes fueron 40 %, 35 % y 25 %, respectivamente.

a) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Calcule la probabilidad de que sea un producto tipo B y distribuido por Trans.

b) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Sabiendo que es un producto de C, calcule la probabilidad de que fuera distribuido por Logis.

c) Se seleccionan al azar (sin reemplazamiento) dos ventas realizadas el año pasado. Calcule la probabilidad de que las dos ventas fueran distribuidas por Trans.

Solución



a) $P = P(T \cap B) = P(T) \cdot P(B/T) = 0,6 \cdot 0,5 = \underline{0,30}$

b) $P = P(L/C) = \frac{P(L\cap C)}{P(C)} = \frac{P(L)\cdot P(C/L)}{P(T\cap C)+P(L\cap C)} = \frac{0,4\cdot 0,25}{0,6\cdot 0,30+0,4\cdot 0,25} = \frac{0,10}{0,18+0,10} = \frac{0,10}{0,28} = \underline{0,3571}$.

c) Trans realizó el 60 % de 1.500 de las ventas, que son: $n = 0,6 \cdot 1.500 = 900$.

$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{900}{1.500} \cdot \frac{899}{1.499} = \frac{3}{5} \cdot \frac{899}{1.499} = \frac{2.697}{7.495} = \underline{0,3598}$.

6º) El consumo energético mensual (en Kw/h) de los hogares de una región sigue una distribución normal con varianza 400. Se elige una muestra de 64 hogares, obteniéndose una suma total del consumo de 17.280 Kw/h.

a) Calcule un intervalo de confianza al 92 % para el consumo energético medio en los hogares.

b) Determine el tamaño de la muestra necesario para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo cometido se reduzca a la mitad. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

Solución

a) Para un nivel de confianza del 92 % es:

$$1-\alpha=0{,}92 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}92=0{,}08 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}04}=1{,}75.$$

$$(1-0{,}04=0{,}960 \;\rightarrow z=1{,}75).$$

Datos: $n=64;\;\; \overline{x}=\frac{17.280}{64}=270;\;\; \sigma^2=400 \Rightarrow \sigma=20;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\; \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$$\left(270-1{,}75\cdot\frac{20}{\sqrt{64}};\; 270+1{,}75\cdot\frac{20}{\sqrt{64}}\right);$$

$(270-1{,}75\cdot 2{,}5;\; 270+1{,}75\cdot 2{,}5);\;\; (270-4{,}375;\; 270+4{,}375).$

$$\underline{I.C._{92\,\%}=(265{,}625;\; 274{,}375)}.$$

b) $\quad E=\frac{274{,}375-265{,}625}{2}=\frac{8{,}75}{2}=4{,}375.$

Datos: $\sigma=20;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75;\;\; E=4{,}375.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}75\cdot\frac{20}{4{,}375}\right)^2=$

$=(1{,}75\cdot 4{,}5714)^2=8^2=64.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 64\ hogares}.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Elija tres de los seis ejercicios propuestos.**TIEMPO:** 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$, dependiente del parámetro real k:

$a)$ Determine los valores de k para loa cuales A no tiene inversa.

$b)$ Para $k = 1$, calcule la matriz inversa de A.

$c)$ Para $k = 0$, calcule $(A - 2A^t)^2$.

2º) Una empresa fabrica dos productos P1 y P2, con un coste de fabricación de 20 y 15 euros/kg, respectivamente. Para ello utiliza tres recursos (R1, R2 y R3). La siguiente tabla muestra la cantidad necesaria de cada recurso para obtener un kg de cada producto y la disponibilidad semanal de los recursos. Determine cuántos kg de cada producto deberá fabricar semanalmente esta empresa si desea minimizar el coste de producción, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 30 kg.

	$P1$	$P2$	$Disponibilidad\ semanal$
$R1$	6	3	180
P2	4	5	200
$R3$	1	1,5	70

$a)$ Plantee el problema. $b)$ Resuélvalo gráficamente.

$c)$ Analice gráficamente qué ocurriría si la fabricación del producto P2 se encarece y su coste pasa a ser 20 euros/kg.

3º) $a)$ Calcule la derivada de la función $f(x) = \frac{3}{(2x-3)^2} + L(2x^4 - 3)$.

$b)$ Calcule la integral $I = \int \left(sen\ 2x + e^{\frac{x}{5}}\right) \cdot dx$.

$c)$ Calcule la integral $I = \int_1^2 \frac{x}{2x^2+1} \cdot dx$.

4º) Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, responde a las siguientes cuestiones:

$a)$ Determine el valor de los parámetros a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tenga de pendiente $m = -2$.

$b)$ Tomando los valores $a = -2$ y $b = -4$, determine los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.

5º) Se considera que el 4 % de los deportistas federados consumen algún tipo de sustancia no permitida para mejorar su rendimiento. Se ha diseñado una nueva prueba de detección con dos posibles resultados: positivo y negativo. La prueba identifica correctamente el consumo de estas sustancias el 92 % de los casos. Sin embargo, si un deportista no consume estas sustancias, la prueba da positivo en el 10 % de los casos. Se selecciona un deportista al azar. Calcule (use 4 decimales):

a) La probabilidad de que obtenga un resultado positivo de la prueba.

b) La probabilidad de que sea consumidor y la prueba tenga resultado negativo.

c) La probabilidad de que no sea consumidor sabiendo que la prueba ha dado resultado negativo.

6º) En una encuesta realizada a 300 jóvenes navarros entre los 18 y los 30 años, 180 contestaron que utilizan habitualmente una determinada red social.

a) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que no utilizan dicha red social, con un nivel de confianza del 96 %.

b) Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan habitualmente la red social: $[0{,}544563; 0{,}655437]$.

Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & k\\ k & 1 & k\end{pmatrix}$, dependiente del parámetro real k:

a) Determine los valores de k para loa cuales A no tiene inversa.

b) Para $k=1$, calcule la matriz inversa de A.

c) Para $k=0$, calcule $(A-2A^t)^2$.

Solución

a) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & k\\ k & 1 & k\end{vmatrix}=k+2k^2+k-6k=2k^2-4k=0;\ \ 2k(k-2)=0;$$

$\Rightarrow k_1=0, k_2=2.$

$$\underline{La\ matriz\ A\ \mathbf{no}\ tiene\ inversa\ para\ k=0\ y\ para\ k=2.}$$

b) Para $k=1$ la matriz resulta $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, que es invertible por ser su determinante distinto de cero.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_2\rightarrow F_2-3F_1\\ F_3\rightarrow F_3+F_1\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -4 & -2 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\rightarrow F_2+F_3\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\rightarrow -F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_1\rightarrow F_1-F_2\\ F_3\rightarrow F_3-3F_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 4 & 3 & -5\end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\rightarrow -\tfrac{1}{2}F_3\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2}\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\rightarrow F_2-F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2}\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 1 & -1\\ -4 & -3 & 5\end{pmatrix}.}$$

$c)$ Para $k = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A-2A^t)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^2 =$$

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{(A-2A^t)^2 = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 8 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

2º) Una empresa fabrica dos productos P1 y P2, con un coste de fabricación de 20 y 15 euros/kg, respectivamente. Para ello utiliza tres recursos (R1, R2 y R3). La siguiente tabla muestra la cantidad necesaria de cada recurso para obtener un kg de cada producto y la disponibilidad semanal de los recursos. Determine cuántos kg de cada producto deberá fabricar semanalmente esta empresa si desea minimizar el coste de producción, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 30 kg.

	$P1$	$P2$	*Disponibilidad semanal*
$R1$	6	3	180
P2	4	5	200
$R3$	1	1,5	70

a) Plantee el problema. b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si la fabricación del producto P2 se encarece y su coste pasa a ser 20 euros/kg.

Solución

a) Sean x e y el número de productos P1 y P2 que fabrica la empresa, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} 6x+3y\le 180 \\ 4x+5y\le 200 \\ x+1{,}5y\le 70 \\ x+y\ge 30 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} 2x+y\le 60 \\ 4x+5y\le 200 \\ 2x+3y\le 140 \\ x+y\ge 30 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$

b)

① $\Rightarrow 2x+y\le 60 \Rightarrow y\le 60-2x \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	30
y	60	0

② $\Rightarrow 4x+5y\le 200 \Rightarrow y\le \frac{200-4x}{5} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	50
y	40	0

③ $\Rightarrow 2x+3y\le 140 \Rightarrow y\le \frac{140-2x}{3} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	70	40
y	0	30

④ $\Rightarrow x+y\ge 30 \Rightarrow y\ge 30-x \Rightarrow O(0,0)\to No.$

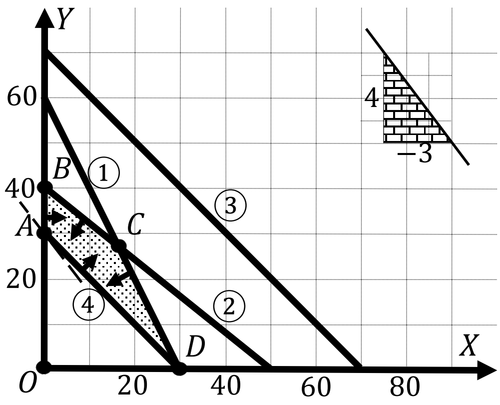
x	0	30
y	30	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+y=30 \end{array}\right\}\Rightarrow y=30;\ A(0,30).$

$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 4x+5y=200 \end{array}\right\}\Rightarrow y=20;\ B(0,50).$



$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 60 \\ 4x + 5y = 200 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -4x - 2y = -120 \\ 4x + 5y = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{3}; 2x + \frac{80}{3} = 60;\ \ 6x + 80 = 180;\ \ 6x = 100;$

$3x = 50;\ \ x = \frac{50}{3} \Rightarrow C\left(\frac{50}{3}, \frac{80}{3}\right).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x + y = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow D(30, 0).$

La función de objetivos: $f(x, y) = 20x + 15y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 30) = 20 \cdot 0 + 15 \cdot 30 = 0 + 450 = 450.$

$B \Rightarrow f(0, 50) = 20 \cdot 0 + 15 \cdot 50 = 0 + 750 = 750.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{50}{3}, \frac{80}{3}\right) = 20 \cdot \frac{50}{3} + 15 \cdot \frac{80}{3} = \frac{1.000}{3} + 400 = \frac{2.200}{3} \cong 733{,}33.$

$D \Rightarrow f(30, 0) = 20 \cdot 30 + 15 \cdot 0 = 600 + 0 = 600.$

El valor mínimo se produce en el punto $A(0, 30)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 20x + 15y = 0 \Rightarrow y = -\frac{20}{15}x = -\frac{4}{3}x \Rightarrow m = -\frac{4}{3}.$

$\underline{El\ coste\ semanal\ es\ mínimo\ fabricando\ únicamente\ 30\ kg\ del\ producto\ P2}.$

$\underline{El\ coste\ míximo\ es\ de\ 450\ euros}.$

c) La nueva función de objetivos es: $g(x, y) = 20x + 20y$.

Los valores de la nueva función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 30) = 20 \cdot 0 + 20 \cdot 30 = 0 + 600 = 600.$

$B \Rightarrow f(0, 50) = 20 \cdot 0 + 20 \cdot 50 = 0 + 1.000 = 1.000.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{50}{3}, \frac{80}{3}\right) = 20 \cdot \frac{50}{3} + 20 \cdot \frac{80}{3} = \frac{1.000}{3} + \frac{1.000}{3} = \frac{2.000}{3} \cong 666{,}67.$

$D \Rightarrow f(30, 0) = 20 \cdot 30 + 20 \cdot 0 = 600 + 0 = 600.$

El valor mínimo se produce en los puntos $A(0, 30)\ y\ D(30, 0)$, es decir:

$\underline{El\ coste\ mínimo\ se\ produciría\ en\ todos\ los\ puntos\ del\ segmento\ \overline{AD}}.$

3º) $a)$ Calcule la derivada de la función $f(x) = \frac{3}{(2x-3)^2} + L(2x^4 - 3)$.

$b)$ Calcule la integral $I = \int \left(sen\ 2x + e^{\frac{x}{5}}\right) \cdot dx$.

$c)$ Calcule la integral $I = \int_1^2 \frac{x}{2x^2+1} \cdot dx$.

Solución

$a)\ f'(x) = \frac{0-3\cdot[2\cdot(2x-3)\cdot 2]}{(2x-3)^4} + \frac{8x^3}{2x^4-3} \Rightarrow$

$$\underline{f'(x) = \frac{-12}{(2x-3)^3} + \frac{8x^3}{2x^4-3}}.$$

$b)\ I = \int \left(sen\ 2x + e^{\frac{x}{5}}\right) \cdot dx = \int sen\ 2x \cdot dx + \int e^{\frac{x}{5}} \cdot dx = A + B.$ (*)

$$A = \int sen\ 2x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int sen\ t \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \cos t =$$

$= -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x.$

$$B = \int e^{\frac{x}{5}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{x}{5} = t \\ dx = 5 \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow 5 \int e^t \cdot dt = 5 \cdot e^t = 5 \cdot e^{\frac{x}{5}}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$\underline{I = \int \left(sen\ 2x + e^{\frac{x}{5}}\right) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x + 5 \cdot e^{\frac{x}{5}} + C}.$$

$$c)\ I = \int_1^2 \frac{x}{2x^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} 2x^2 + 1 = t & x = 2 \rightarrow t = 9 \\ x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot dt & x = 1 \rightarrow t = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \int_3^9 \frac{1}{t} \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot [Lt]_3^9 = \frac{1}{4} \cdot (L9 - L3) \Rightarrow$$

$$\underline{I = \int_1^2 \frac{x}{2x^2+1} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot L3}.$$

4º) Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, responde a las siguientes cuestiones:

a) Determine el valor de los parámetros a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tenga de pendiente $m = -2$.

b) Tomando los valores $a = -2$ y $b = -4$, determine los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.

Solución

a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Por tener un extremo relativo para $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$:

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0;\ \ 2a + b = -3.$ (*)

La pendiente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto, por lo cual: $f'(0) = -2$:

$f'(0) = -2 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = -2 \Rightarrow \underline{b = -2}$.

Sustituyendo el valor obtenido de b en la expresión (*):

$2a - 2 = -3;\ \ 2a = -1 \Rightarrow$

$$\underline{a = -\frac{1}{2}}.$$

b) Para $a = -2$ y $b = -4$ la función resulta: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$.

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} = \frac{2 \pm 4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 2.$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función, que es R, en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$ y $(2, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$ es:

$f'(0) = -4 < 0 \Rightarrow Decreciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in \left(-\frac{2}{3}, 2\right)}.$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)}.$$

Teniendo en cuenta el dominio y la continuidad de la función, así como sus periodos de crecimiento y decrecimiento, se pueden deducir fácilmente sus extremos relativos, no obstante, se hace su estudio mediante derivadas.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = 6x - 4.$

$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 4 = -8 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2.$

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 1 =$

$$= \frac{-8 - 24 + 72 + 27}{27} = \frac{99 - 32}{27} = \frac{67}{27} \Rightarrow$$

$$\underline{Máximo: A\left(-\frac{3}{2}, \frac{67}{27}\right)}.$$

$f(-2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 8 - 8 - 8 + 1 = -7 \Rightarrow$

$$\underline{Mínimo: B(2, -7)}.$$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 4 = 0;\ \ 3x - 2 = 0;\ \ x = \frac{2}{3}.$

$$Para\ x < \frac{2}{3} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$$

$$\underline{Concavidad\ (\cap): x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)}.$$

$$Para\ x > \frac{2}{3} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\underline{Convexidad\ (\cup): x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)}.$$

Una función tiene un punto de inflexión cuando pasa de ser cóncava a convexa o viceversa. También puede determinarse el punto un inflexión cuando se anula la segunda derivada de la función siendo distinta de cero la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$ $\qquad f'''(x) = 4 \neq 0 \Rightarrow P.I. para\ x = \frac{2}{3}.$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{27} - \frac{8}{9} - \frac{8}{3} + 1 = \frac{8-24-72+27}{27} = \frac{35-96}{27} = -\frac{61}{27} \Rightarrow$

$$\underline{Punto\ de\ inflexión: C\left(\frac{2}{3}, -\frac{61}{27}\right)}.$$

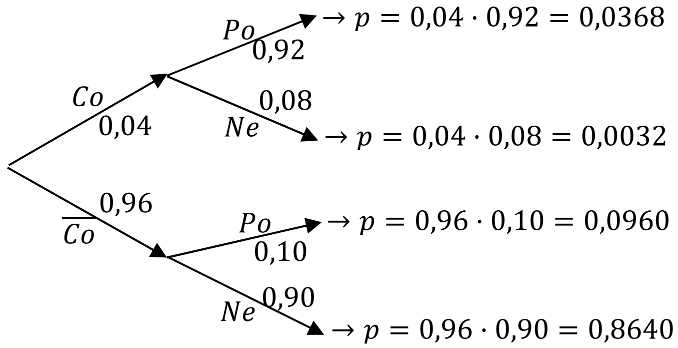
5º) Se considera que el 4 % de los deportistas federados consumen algún tipo de sustancia no permitida para mejorar su rendimiento. Se ha diseñado una nueva prueba de detección con dos posibles resultados: positivo y negativo. La prueba identifica correctamente el consumo de estas sustancias el 92 % de los casos. Sin embargo, si un deportista no consume estas sustancias, la prueba da positivo en el 10 % de los casos. Se selecciona un deportista al azar. Calcule (use 4 decimales):

a) La probabilidad de que obtenga un resultado positivo de la prueba.

b) La probabilidad de que sea consumidor y la prueba tenga resultado negativo.

c) La probabilidad de que no sea consumidor sabiendo que la prueba ha dado resultado negativo.

Solución



a) $\quad P = P(Po) = P(Co \cap Po) + P(\overline{Co} \cap Po) =$

$= P(Co) \cdot P(Po/Co) + P(\overline{Co}) \cdot P(Po/\overline{Co}) = 0{,}04 \cdot 0{,}92 + 0{,}96 \cdot 0{,}10 =$

$= 0{,}0368 + 0{,}0960 = \underline{0{,}1328}$.

b) $\quad P = P(Co \cap Ne) = P(Co) \cdot P(Ne/Co) = 0{,}04 \cdot 0{,}08 = \underline{0{,}0032}$.

c) $\quad P = P(\overline{Co}/Ne) = \frac{P(\overline{Co} \cap Ne)}{P(Ne)} = \frac{P(\overline{Co}) \cdot P(Ne/\overline{Co})}{1 - P(Po)} = \frac{0{,}96 \cdot 0{,}90}{1 - 0{,}1328} = \frac{0{,}8640}{0{,}8672} = \underline{0{,}9963}$.

6º) En una encuesta realizada a 300 jóvenes navarros entre los 18 y los 30 años, 180 contestaron que utilizan habitualmente una determinada red social.

a) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que no utilizan dicha red social, con un nivel de confianza del 96 %.

b) Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan habitualmente la red social: $[0{,}544563; 0{,}655437]$.

Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

Solución

a) Para un nivel de confianza del 96 % es:

$$1-\alpha=0{,}96 \rightarrow \alpha=1-0{,}96=0{,}04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}02}=2{,}055.$$

$$(1-0{,}02=0{,}9800 \rightarrow z=2{,}055).$$

Datos: $n=300$; $p=\frac{300-180}{300}=\frac{120}{300}=0{,}4$; $q=1-0{,}4=0{,}6$; $z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}055$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}4-2{,}055\cdot\sqrt{\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{300}};\ 0{,}4+2{,}055\cdot\sqrt{\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{300}}\right);$$

$(0{,}4-2{,}055\cdot 0{,}0283;\ 0{,}4+2{,}055\cdot 0{,}0283)$; $(0{,}4-0{,}0581;\ 0{,}4+0{,}0581\ \cdot)$.

$$\underline{I.C._{96\ \%}=(0{,}3419;\ 0{,}4581).}$$

b) $\overline{x}=\frac{0{,}655437+0{,}544563}{2}=\frac{1{,}2}{2}=0{,}6.$

$$E=\frac{0{,}655437-0{,}544563}{2}=\frac{0{,}1109}{2}=0{,}055437.$$

Datos: $n=300$; $E=0{,}055437$; $p=0{,}6$; $q=0{,}4$.

$$E^2=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{n}\Rightarrow\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2=\frac{E^2\cdot n}{p\cdot q}=\frac{0{,}055437^2\cdot 300}{0{,}6\cdot 0{,}4}=\frac{0{,}921978}{0{,}24}=3{,}8416\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{3{,}8416}\cong 1{,}96.$$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ a 1,96 le corresponde el valor 0,9750;

$$1-\frac{\alpha}{2}=0{,}9750;\ 2-\alpha=1{,}9500;\ \alpha=2-1{,}9500=0{,}0500.$$

$$1-\alpha=1-0{,}0500=0{,}95.$$

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ empleado\ ha\ sido\ del\ 95\ \%.}$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. Debes responder a cuatro de ellos, de por lo menos tres bloques diferentes. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar el número necesario. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programables, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

TIEMPO: 90 minutos.

BLOQUE: ÁLGEBRA.

1º) Una determinada empresa de selección de personal realiza un test de 90 preguntas. Por cada acierto da 6 puntos; por cada fallo quita 2,5 puntos, y por cada pregunta no contestada quita 1,5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos. ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para obtener los 210 puntos, y que el número de preguntas no contestadas más el número de aciertos sea igual al doble del número de fallos?

2º) El ayuntamiento de una determinada ciudad ha concedido la licencia para la construcción de una urbanización a lo sumo 120 viviendas, de los tipos A y B. Para ello, la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros. El coste de construcción de la vivienda tipo A es 100.000 euros, y el de la del tipo B es 300.000 euros. Además, el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20.000 euros y por una de tipo B a 40.000 euros.

$a)$ ¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener el máximo beneficio?

$b)$ ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

BLOQUE: ANÁLISIS.

3º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} & si \;\; x < 0 \\ x^2 - x - a & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$:

$a)$ Encuentra el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 0$.

$b)$ En el caso $a = 2$, analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, y los máximos y mínimos relativos.

$c)$ En el caso $a = 2$, realiza la representación gráfica de la función.

4º) $a)$ Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 5x)^3. \qquad g(x) = \frac{L(3x)}{e^{2x}}.$$

$b)$ Determina la ecuación de la recta tangente a la función $h(x) = \frac{3x+6}{2x+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

$c)$ Determina, si existen, las asíntotas verticales y horizontales de la función $h(x)$.

$d)$ Calcula $I = \int \left(e^{3x} - 3x^2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2}\right) \cdot dx$.

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

BLOQUE: PROBABILIDAD.

5º) Un libro tiene 230 páginas repartidas en 3 capítulos. El primer capítulo tiene 100 páginas, y de ellas el 15 % tiene errores. El segundo consta de 80 páginas, de las cuales 8 tienen errores; y en el tercero, de 50 páginas, sólo hay 40 que no tienen error. Si abrimos el libro por una página al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?

b) Calcula la probabilidad de que la página elegida tenga errores y sea del tercer capítulo.

c) Calcula la probabilidad de que la página elegida no tenga errores.

d) Observamos que la página elegida tiene errores, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tercer capítulo?

6º) Sea A, B, C, D, E y F sucesos de un determinado experimento aleatorio.

a) Sabemos que $P(A) = 0{,}4;\ P(B) = 0{,}3\ y\ P(A \cup B) = 0{,}5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.

b) Sabemos que $P(C) = 0{,}5;\ P(D) = 0{,}6\ y\ P(C \cup D) = 0{,}7$. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.

c) Sabemos que $P(A) = 0{,}4;\ P(E) = 0{,}6$, y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA.

7º) En un examen de Lengua Inglesa el 30 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 7,6 puntos. Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 6,8 puntos.

a) Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.

b) Si la desviación típica es 1,5 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?

c) Si la desviación típica es 1,5 puntos y el aprobado se obtiene con una puntuación igual o superior a 5 puntos ¿qué porcentaje del alumnado ha aprobado el examen?

8º) Se ha diseñado un experimento para comprobar el porcentaje de una población que ha sido vacunada frente a una determinada enfermedad. Para ello se ha elegido una muestra al azar de 1.000 personas, y se les ha preguntado si han recibido la vacuna o no. De ellas, 860 han respondido que sí y el resto que no. Con esta información:

a) Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que han recibido la vacuna.

b) Calcular el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.

c) Interpretar los resultados obtenidos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE: ÁLGEBRA.

1º) Una determinada empresa de selección de personal realiza un test de 90 preguntas. Por cada acierto da 6 puntos; por cada fallo quita 2,5 puntos, y por cada pregunta no contestada quita 1,5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos. ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para obtener los 210 puntos, y que el número de preguntas no contestadas más el número de aciertos sea igual al doble del número de fallos?

Solución

Sean x, y, z el número de preguntas acertadas, falladas y no contestadas, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=90 \\ 6x-2{,}5y-1{,}5z=210 \\ z+x=2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=90 \\ 12x-5y-3z=420 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 90 & 1 & 1 \\ 420 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{30\cdot\begin{vmatrix} 90 & 1 & 1 \\ 420 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-5-24-3+5-6-12}=\frac{30\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 14 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-45}=\frac{2\cdot(-15-28-18-14)}{-3}=$$

$$=\frac{-2\cdot 75}{-3}=2\cdot 25 \Rightarrow x=50.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 90 & 1 \\ 12 & 420 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-45}=\frac{30\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 12 & 14 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-45}=\frac{2\cdot(14-9-14-36)}{-3}=\frac{-2\cdot 45}{-3}=2\cdot 15 \Rightarrow y=30.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 90 \\ 12 & -5 & 420 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-45}=\frac{30\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 12 & -5 & 14 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-45}=\frac{2\cdot(-72+14+15+28)}{-3}=\frac{-2\cdot 15}{-3}=2\cdot 5 \Rightarrow z=10.$$

$\underline{Acierta\ 50\ preguntas, falla\ en\ 30\ y\ no\ contesta\ en\ 10}$.

2º) El ayuntamiento de una determinada ciudad ha concedido la licencia para la construcción de una urbanización a lo sumo 120 viviendas, de los tipos A y B. Para ello, la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros. El coste de construcción de la vivienda tipo A es 100.000 euros, y el de la del tipo B es 300.000 euros. Además, el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20.000 euros y por una de tipo B a 40.000 euros.

a) ¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener el máximo beneficio?

b) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Solución

a) Sean x e y el número de viviendas los tipos A y B que se construyen en la ciudad, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} x+y\le 120 \\ 100.000x+300.000y\le 15.000.000 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y\le 120 \\ x+3y\le 150 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

① $\Rightarrow x+y\le 120 \Rightarrow y\le 120-x \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	120
y	120	0

② $\Rightarrow x+3y\le 150 \Rightarrow y\le \frac{150-x}{3} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	150
y	50	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

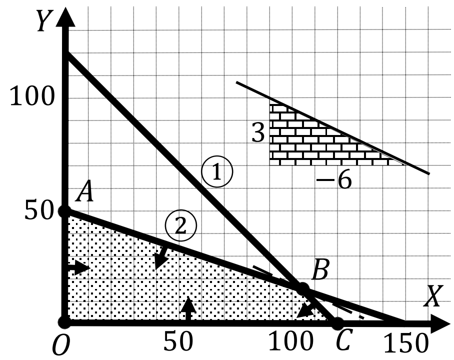
Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+3y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=120;\ \ y=40\Rightarrow A(0,50).$$

$$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ x+3y=150 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-y=-120 \\ x+3y=150 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y=30;\ \ y=15;\ x=105\Rightarrow B(105,15).$$

$$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow x=120\Rightarrow C(120,0).$$



La función de objetivos es $f(x,y)=20.000x+40.000y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A\Rightarrow f(0,50)=20.000\cdot 0+30.000\cdot 40=0+120.000=120.000.$

$B\Rightarrow f(105,15)=20.000\cdot 105+40.000\cdot 15=2.100.000+600.000=2.700.000.$

$C\Rightarrow f(120,0)=20.000\cdot 120+40.000\cdot 0=2.400.000+0=2.400.000.$

El valor máximo se produce en el punto $B(105,15)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 20.000x + 40.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{20.000}{40.000}x = -\frac{20.000}{40.000}x \Rightarrow m = -\frac{3}{6}.$

$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ fabricando\ 105\ de\ tipo\ A\ y\ 15\ de\ tipo\ B}.$

$b)\ \underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 2.700.000\ euros}.$

BLOQUE: ANÁLISIS.

3º) Sea la función $f(x)=\begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} & si\ \ x<0 \\ x^2-x-a & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$:

$a)$ Encuentra el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x=0$.

$b)$ En el caso $a=2$, analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, y los máximos y mínimos relativos.

$c)$ En el caso $a=2$, realiza la representación gráfica de la función.

Solución

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+1}{1-2x}=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x-a)=-a=f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow -a=1\Rightarrow$$

$$\underline{a=-1}.$$

$b)$ Para $a=2$ la función es $f(x)=\begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} & si\ \ x<0 \\ x^2-x-2 & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Para $x<0$ la función es $f(x)=\frac{2x+1}{1-2x}$.

$f'(x)=\frac{2\cdot(1-2x)-(2x+1)\cdot(-2)}{(1-2x)^2}=\frac{2-4x+4x+2}{(1-2x)^2}=\frac{4}{(1-2x)^2}>0, \forall x<0$, lo cual implica que la función es monótona creciente para $x<0$, teniendo en cuanta, además, que el denominador de la función $(1-2x)$ no se anula para $x<0$.

Para $x\geq 0$ la función es $f(x)=x^2-x-2$, que es una parábola convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2; su vértice (mínimo) es el siguiente:

$f'(x)=2x-1=0;\ \ 2x=1;\ \ x=\frac{1}{2}$.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2=\frac{1-2-8}{4}=-\frac{9}{4}\Rightarrow V\left(\frac{1}{2},-\frac{9}{4}\right)$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x)>0\Rightarrow x\epsilon(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)}.$$

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon \left(0, \frac{1}{2}\right).}$$

Para los máximos y mínimos relativos se tiene en cuenta lo siguiente:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{1-2x} = -1.$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - x - 2) = \infty.$

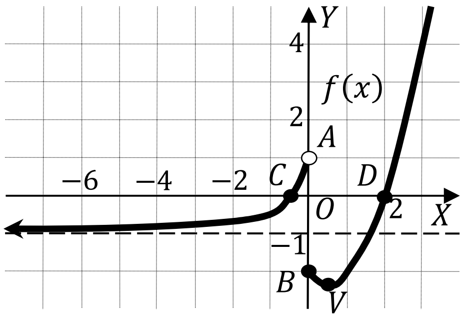
El único extremo relativo de la función es:

$$\underline{Mínimo: V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right).}$$

$c)$ Teniendo en cuenta que la función tiene una asíntota horizontal en su parte negativa para $y = -1$ y todo lo obtenido en los apartados anteriores, la representación gráfica de la función es, aproximadamente, la que se expresa en la figura adjunta.

$f(0^-) = \frac{2\cdot0+1}{1-2\cdot0} = 1 \Rightarrow A(0, 1).$

$f(0^+) = 0^2 - 0 - 2 \Rightarrow B(0, -2)$



Los puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:

$x < 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{1-2x} = 0;\ \ 2x + 1 = 0;\ \ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2}, 0\right).$

$x > 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0;\ \ x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm3}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow D(2, 0).$

4º) a) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$f(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 5x)^3.$ $\qquad g(x) = \frac{L(3x)}{e^{2x}}.$

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la función $h(x) = \frac{3x+6}{2x+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

c) Determina, si existen, las asíntotas verticales y horizontales de la función $h(x)$.

d) Calcula $I = \int \left(e^{3x} - 3x^2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2}\right) \cdot dx.$

Solución

a) $f(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 5x)^3.$

$$f'(x) = 2x \cdot (3x^3 + 5x)^3 + (x^2 - 1) \cdot [3 \cdot (3x^3 + 5x)^2 \cdot (9x^2 + 5)] =$$

$$= (3x^3 + 5x)^2 \cdot [2x \cdot (3x^3 + 5x) + 3 \cdot (x^2 - 1) \cdot (9x^2 + 5)] =$$

$$= (3x^3 + 5x)^2[3(2x^4 + 5x^2 - 9x^2 - 5)] = (3x^3 + 5x)^2 \cdot [3(2x^4 - 4x^2 - 5)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{f'(x) = 3x^2 \cdot (3x + 5)^2 \cdot (2x^4 - 4x^2 - 5)}.$$

$$g(x) = \frac{L(3x)}{e^{2x}}.\ g'(x) = \frac{\frac{3}{3x} \cdot e^{2x} - L(3x) \cdot 2 \cdot e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{\frac{1}{x} - 2 \cdot L(3x)}{e^{2x}} \Rightarrow$$

$$\underline{g'(x) = \frac{1 - 2x \cdot L(3x)}{x \cdot e^{2x}}}.$$

b) La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$h'(x) = \frac{3 \cdot (2x+1) - (3x+6) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{6x + 3 - 6x - 12}{(2x+1)^2} = \frac{-9}{(2x+1)^2}.$$

$$Para\ x = 1 \Rightarrow m = h'(1) = \frac{-9}{(2 \cdot 1 + 1)^2} = \frac{-9}{9} \Rightarrow m = -1.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $h(1) = \frac{3 \cdot 1 + 6}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow P(1, 3)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(1, 3)$:

$$y - 3 = -1 \cdot (x - 1) = -x + 1.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv x + y - 4 = 0}.$$

c) Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} h(x) = \frac{3x+6}{2x+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{La\ recta\ y = \frac{3}{2}\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$2x+1=0;\ \ x=-\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\underline{La\ recta\ x=-\frac{1}{2}\ es\ asíntota\ vertical.}$$

$d)\ I=\int\left(e^{3x}-3x^2+\frac{2}{x+2}-\frac{4}{(x+2)^2}\right)\cdot dx=$

$=\int e^{3x}\cdot dx-3\cdot\int x^2\cdot dx+2\cdot\int\frac{1}{x+2}\cdot dx-4\cdot\int\frac{1}{(x+2)^2}\cdot dx=$

$=A-3\cdot\frac{x^3}{3}+2B-4C\Rightarrow I=A-x^3+2B-4C.$ (*)

$A=\int e^{3x}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}3x=t\\dx=\frac{1}{3}\cdot dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{3}\cdot\int e^t\cdot dt=\frac{1}{3}\cdot e^t\Rightarrow A=\frac{1}{3}\cdot e^{3x}.$

$B=\int\frac{1}{x+2}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x+2=t\\dx=dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int\frac{1}{t}\cdot dt=L|t|=L|x+2|.$

$C=\int\frac{1}{(x+2)^2}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x+2=t\\dx=dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int\frac{1}{t^2}\cdot dt=\int t^{-2}\cdot dt=\frac{t^{-1}}{-1}+C=$

$=-\frac{1}{t}+C\Rightarrow C=-\frac{1}{x+2}+C.$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos por A, B y C:

$I=A-x^3+2B-4C=\frac{1}{3}\cdot e^{3x}-x^3+2\cdot L|x+2|+\frac{4}{x+2}+K\Rightarrow$

$$\Rightarrow\underline{I=\frac{1}{3}\cdot e^{3x}-x^3+L(x+2)^2+\frac{4}{x+2}+K.}$$

BLOQUE: PROBABILIDAD.

5º) Un libro tiene 230 páginas repartidas en 3 capítulos. El primer capítulo tiene 100 páginas, y de ellas el 15 % tiene errores. El segundo consta de 80 páginas, de las cuales 8 tienen errores; y en el tercero, de 50 páginas, sólo hay 40 que no tienen error. Si abrimos el libro por una página al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?

b) Calcula la probabilidad de que la página elegida tenga errores y sea del tercer capítulo.

c) Calcula la probabilidad de que la página elegida no tenga errores.

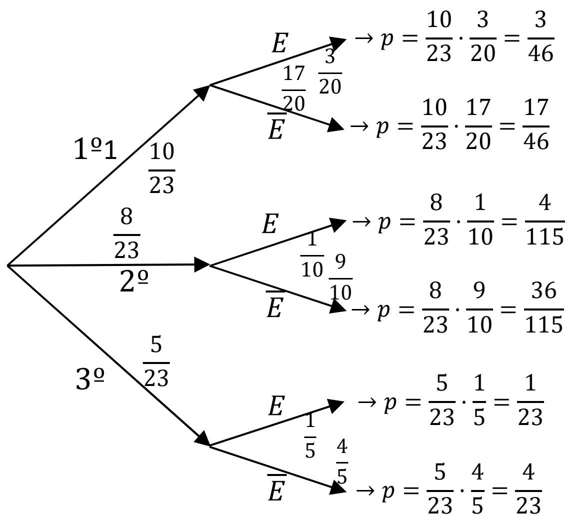
d) Observamos que la página elegida tiene errores, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tercer capítulo?

Solución

a)

$$P(2º) = \frac{80}{230} = \frac{8}{23} = 0{,}3478.$$

b)



$$P = P(3º \cap E) = P(3º) \cdot P(E|3º) = \frac{5}{23} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{23} = 0{,}0435.$$

$$c)\ P = P(\overline{E}) = P(1º \cap \overline{E}) + P(2º \cap \overline{E}) + P(3º \cap \overline{E}) =$$

$$= P(1º) \cdot P(\overline{E}|1º) + P(2º) \cdot P(\overline{E}|2º) + P(3º) \cdot P(\overline{E}|3º) =$$

$$= \frac{10}{23} \cdot \frac{17}{20} + \frac{8}{23} \cdot \frac{9}{10} + \frac{5}{23} \cdot \frac{4}{5} = \frac{85}{230} + \frac{72}{230} + \frac{40}{230} = \frac{85+72+40}{230} = \frac{197}{230} = 0{,}8565.$$

$$d)\quad P = P(3º|E) = \frac{P(3º \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{5}{23} \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{197}{230}} = \frac{\frac{1}{23}}{\frac{33}{230}} = \frac{10}{33} = 0{,}3030.$$

6º) Sea A, B, C, D, E y F sucesos de un determinado experimento aleatorio.

a) Sabemos que $P(A)=0{,}4;\ P(B)=0{,}3\ y\ P(A\cup B)=0{,}5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.

b) Sabemos que $P(C)=0{,}5;\ P(D)=0{,}6\ y\ P(C\cup D)=0{,}7$. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.

c) Sabemos que $P(A)=0{,}4;\ P(E)=0{,}6$, y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

Solución

a) $Datos:\ P(A)=0{,}4;\ P(B)=0{,}3\ y\ P(A\cup B)=0{,}5.$

$$P=P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}4+0{,}3-0{,}5=\underline{0{,}2}.$$

b) $Datos:\ P(C)=0{,}5;\ P(D)=0{,}6\ y\ P(C\cup D)=0{,}7.$

$$P=P(C/D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{P(C)+P(D)-P(C\cup D)}{P(D)}=\frac{0{,}5+0{,}6-0{,}7}{0{,}6}=\frac{0{,}4}{0{,}6}=\underline{\frac{2}{3}=0{,}6667}.$$

c) $Datos:\ P(A)=0{,}4;\ P(E)=0{,}6.$

Dos sucesos A y E son independientes cuando $P(A\cap E)=P(A)\cdot P(E)$

$$P=P(A\cup E)=P(A)+P(E)-P(A\cap E)=0{,}4+0{,}6-0{,}24=\underline{0{,}76}.$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA.

7º) En un examen de Lengua Inglesa el 30 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 7,6 puntos. Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 6,8 puntos.

a) Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.

b) Si la desviación típica es 1,5 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?

c) Si la desviación típica es 1,5 puntos y el aprobado se obtiene con una puntuación igual o superior a 5 puntos ¿qué porcentaje del alumnado ha aprobado el examen?

Solución

$a)\ Datos: P(X > 7{,}6) = 0{,}3;\ \ \mu = 6{,}8.$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

$P(X > 7{,}6) = 0{,}3 \Rightarrow P\left(Z > \frac{7{,}6-6{,}8}{\sigma}\right) = 0{,}3;\ \ P\left(Z > \frac{0{,}8}{\sigma}\right) = 0{,}3;$

$P\left(Z \leq \frac{0{,}8}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de manera inversa, al valor 0,7 le corresponde:

$$\left.\begin{matrix} 0{,}6985 --- 0{,}52 \\ 0{,}7019 --- 0{,}26 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 26 --- 0{,}01 \\ 15 ---- x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{0{,}15}{26} = 0{,}006.$$

$\frac{0{,}8}{\sigma} = 0{,}526;\ \ \sigma = \frac{0{,}8}{0{,}526} \Rightarrow$

$$\underline{\sigma = 1{,}52}.$$

b) Siendo β la puntuación que supera el 20 % de la población, se tienen los siguientes datos:

$P(X < \beta) = 1 - 0{,}20 = 0{,}80;\ \ \mu = 6{,}8;\ \ \sigma = 1{,}5.$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\beta-6{,}8}{1{,}5}$.

$P(X < \beta) = 0{,}80;\ \ P\left(Z < \frac{\beta-6{,}8}{1{,}5}\right) = 0{,}80.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de manera inversa, al valor 0,80 le corresponde:

$$\left.\begin{matrix} 0{,}7995 --- 0{,}84 \\ 0{,}8023 --- 0{,}85 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 28 --- 0{,}01 \\ 5 ---- x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{0{,}05}{28} = 0{,}002.$$

$\frac{\beta-6{,}8}{1{,}5} = 0{,}842;\ \ \beta - 6{,}8 = 0{,}842 \cdot 1{,}5 = 1{,}263;\ \ 6{,}8 + 1{,}263 \Rightarrow$

$$\underline{\beta \cong 8{,}1}.$$

$c)\ Datos:\ \ \mu = 6{,}8;\ \ \sigma = 1{,}5.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(6{,}8; 1{,}5)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-6{,}8}{1{,}5}$.

$P = P(X \geq 5) = P\left(Z \geq \frac{5-6{,}8}{1{,}5}\right) = P\left(Z \geq \frac{-1{,}8}{1{,}5}\right) = P(Z \geq -1{,}2) =$

$= P(Z < 1{,}2) = 0{,}8849.$

$\underline{Ha\ aprobado\ el\ examen\ el\ 88{,}49\ \%\ del\ alumnado}.$

8º) Se ha diseñado un experimento para comprobar el porcentaje de una población que ha sido vacunada frente a una determinada enfermedad. Para ello se ha elegido una muestra al azar de 1.000 personas, y se les ha preguntado si han recibido la vacuna o no. De ellas, 860 han respondido que sí y el resto que no. Con esta información:

a) Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que han recibido la vacuna.

b) Calcular el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.

c) Interpretar los resultados obtenidos.

Solución

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1-\alpha=0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$$

$$(1-0{,}025=0{,}9750 \;\rightarrow z=1{,}96).$$

Datos: $n=1.000;\;\; p=\frac{860}{1.000}=0{,}86;\;\; q=1-0{,}86=0{,}14;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}86-1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}86\cdot 0{,}14}{1.000}};\; 0{,}86+1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}86\cdot 0{,}14}{1.000}}\right);$$

$$(0{,}86-1{,}96\cdot 0{,}0110;\; 0{,}86+1{,}96\cdot 0{,}0110);\;\; (0{,}86-0{,}0215;\; 0{,}86+0{,}0215) \Rightarrow$$

$\Rightarrow I.C._{95\,\%}=(0{,}8385;\; 0{,}8815).$

$\underline{Se\ estima\ que\ se\ ha\ vacunado\ entre\ el\ 83{,}85\ \%\ y\ 88{,}15\ \%\ de\ la\ población}$**.**

b) $\quad E=\frac{0{,}2215-0{,}1785}{2}=\frac{0{,}043}{2}\Rightarrow$

$$\underline{E=0{,}0215=2{,}15\ \%}.$$

c) De lo anterior se deduce que, con un error del 2,15 % se han vacunado entre el 83,85 % y el 88,15 % de la población con un nivel de confianza del 95 %.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. Debes responder a cuatro de ellos, de por lo menos tres bloques diferentes. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar el número necesario. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programables, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Ramón Podadera Sánchez

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Se han de contestar tres problemas entre los seis propuestos. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen. Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Una agencia inmobiliaria tiene tres locales en alquiler, por los que ha cobrado en total 1 650 € en este mes. La agencia ha pagado al propietario del primer local el 95% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; al propietario del segundo local, el $90\ \%$ de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; y al propietario del tercer local, el 80 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 € de ganancia. Se sabe también que el alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos. ¿Cuántos euros cobra la agencia por cada uno de los tres locales que tiene en alquiler?

Problema 2:

Una empresa apícola vende dos tipos de cajas con tres variedades de miel en cada una: miel de romero, miel de azahar y miel multifloral. La caja de tipo A contiene 2 tarros de miel de romero, 2 de azahar y 1 de multifloral. La caja de tipo B contiene 1 tarro de miel de romero, 2 de azahar y 2 de multifloral. Cada día la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero, 300 de miel de azahar y 250 de miel multifloral. Con cada caja de tipo A obtiene un beneficio de 7 euros y con cada caja de tipo B obtiene un beneficio de 5 euros.

a) ¿Cuántas cajas de cada tipo debe comercializar para obtener un beneficio máximo? (8 *puntos*)

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (2 *puntos*)

Problema 3:

Se considera la función $f(x)=\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4:

Enunciado: En una empresa se ha comprobado que sus beneficios están relacionados con su inversión en publicidad según la función $B(x) = 50\,000 + 40x - (\frac{x}{10})^2$ donde x es la inversión en publicidad $(x \geq 0)$ y $B(x)$es el beneficio obtenido, ambos en euros.

a) Calcula la cantidad invertida en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (4 puntos)

b) Calcula los intervalos para la inversión en publicidad en los que los beneficios crecen o decrecen a medida que se invierte en publicidad. (3 puntos)

c) ¿Existe un valor para la inversión en publicidad a partir del cual los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad? En caso afirmativo, determínalo. (3 puntos)

Problema 5:

Entre los clientes de una compañía de seguros de automóviles, un 30 % tiene menos de 30 años, un 55 % tiene entre 30 y 60 años, y el 15 % restante tiene más de 60 años. Se sabe que, entre los clientes de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte de accidente el año pasado; entre los clientes que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte de accidente el año pasado; y entre los clientes de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte de accidente el año pasado. Seleccionamos al azar un cliente de la compañía.

a) Llamemos *A* al suceso “el cliente seleccionado tiene más de 60 años” y llamemos *B* al suceso “el cliente seleccionado no presentó parte de accidente el año pasado”. Calcula $P(A \cup B)$. (3 puntos)

b) Llamemos *C* al suceso “el cliente seleccionado tiene 30 años o más” y *D* al suceso “el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado”. Calcula $P(C \cap D)$. (3 puntos)

c) Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenga 60 años o menos. (3 puntos)

Problema 6:

En un juego se lanzan dos monedas equilibradas y un dado de seis caras equilibrado. Un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien, si obtiene exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane. (2.5 puntos)

b) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas? (2.5 puntos)

c) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera un cinco al lanzar el dado? (2.5 puntos)

d) Llamemos *A* al suceso “el jugador no gana” y llamemos *B* al suceso “el jugador obtiene un seis al lanzar el dado”. ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*? (2.5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Una agencia inmobiliaria tiene tres locales en alquiler, por los que ha cobrado en total 1 650 € en este mes. La agencia ha pagado al propietario del primer local el 95 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; al propietario del segundo local, el 90 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; y al propietario del tercer local, el 80 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 € de ganancia. Se sabe también que el alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos. ¿Cuántos euros cobra la agencia por cada uno de los tres locales que tiene en alquiler?

Solución:

Es un problema de sistemas de ecuaciones.

Como nos preguntan por lo que cobra la agencia por cada uno de los locales que alquila podemos definir las siguientes incógnitas:

x – Cantidad cobrada por el alquiler del primer local.

y – Cantidad cobrada por el alquiler del segundo local.

z – Cantidad cobrada por el alquiler del tercer local.

Como la agencia ha cobrado en total 1 650 €, la suma de las tres incógnitas (cantidades cobradas) debe ser esa cantidad:

$$x + y + z = 1650$$

A continuación, el enunciado nos dice lo que la agencia ha entregado a los dueños de los locales en forma de tanto por ciento, sin embargo, al finalizar, nos dice las ganancias, es decir, el dinero con el que se queda (no el que entrega). Por esto, hemos de tener en cuenta que, si la agencia entrega al primer dueño el 95 %, se queda con un 5 %, es decir, $0.05x$. De igual forma si la agencia entrega al segundo dueño el 90 %, se queda con un 10 %, es decir, $0.1y$. Por último, si la agencia entrega al tercer dueño el 80 %, se queda con un 20 %, es decir, $0.2z$. La suma de las tres cantidades son las ganancias totales:

$$0.05x + 0.1y + 0.2z = 132$$

También se sabe que el alquiler que se cobra por el primer local (x) es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos ($y+z$) por lo que la tercera ecuación es:

$$x = 2(y + z)$$

Si unimos las tres ecuaciones tenemos el sistema a resolver:

$$\begin{cases} x + y + z = 1650 \\ 0.05x + 0.1y + 0.2z = 132 \\ x = 2(y + z) \end{cases}$$

Podemos simplificar algo la resolución si multiplicamos la segunda ecuación por 100 y en la tercera debemos pasar las incógnitas al primer miembro:

$$\begin{cases} x + y + z = 1650 \\ 5x + 10y + 20z = 13200 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Para la resolución podemos elegir Gauss o Cramer. Yo aquí lo voy a resolver por los dos métodos. En el examen sólo hay que resolver por un método.

Por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 5 & 10 & 20 & 13200 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 0 & 5 & 15 & 4950 \\ 0 & -3 & -3 & -1650 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 0 & 5 & 15 & 4950 \\ 0 & 0 & 30 & 6600 \end{pmatrix}$$

$E_2 = E_2 - 5E_1$ $\quad\quad$ $E_3 = 5E_3 + 3E_2$

$E_3 = E_3 - E_1$

De la última ecuación tenemos que: $30z = 6600 \rightarrow z = \frac{6600}{30} = 220$

De la segunda ecuación tenemos que: $5y + 15z = 4950 \rightarrow 5y + 15 \cdot 220 = 4950 \rightarrow$

$5y = 4950 - 3300 \rightarrow 5y = 1650 \rightarrow y = \frac{1650}{5} = 330$

De la primera ecuación: $x + y + z = 1650 \rightarrow x + 330 + 220 = 1650 \rightarrow x = 1100$

Por lo que la agencia cobra por el alquiler del primer local 1 100 €, 330 € por el segundo y 220 € por el tercero.

Si lo resolvemos por Cramer tenemos que:

El sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas. Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 20 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -20 + 20 - 10 - 10 + 10 + 40 = 30$$

Cumple las condiciones para resolver por la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1650 & 1 & 1 \\ 13200 & 10 & 20 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{30} = \frac{-33000 + 0 - 26400 - 0 + 26400 + 66000}{30} = \frac{33000}{30} = 1100$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1650 & 1 \\ 5 & 13200 & 20 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{30} = \frac{-26400 + 33000 + 0 - 13200 + 16500 - 0}{30} = \frac{9900}{30} = 330$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1650 \\ 5 & 10 & 13200 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{30} = \frac{0 + 13200 - 16500 - 16500 - 0 + 26400}{30} = \frac{6600}{30} = 220$$

Lógicamente el resultado es el mismo que el anterior.

Problema 2:

Una empresa apícola vende dos tipos de cajas con tres variedades de miel en cada una: miel de romero, miel de azahar y miel multifloral. La caja de tipo A contiene 2 tarros de miel de romero, 2 de azahar y 1 de multifloral. La caja de tipo B contiene 1 tarro de miel de romero, 2 de azahar y 2 de multifloral. Cada día la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero, 300 de miel de azahar y 250 de miel multifloral. Con cada caja de tipo A obtiene un beneficio de 7 euros y con cada caja de tipo B obtiene un beneficio de 5 euros.

a) ¿Cuántas cajas de cada tipo debe comercializar para obtener un beneficio máximo?

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Solución:

Es un problema de programación lineal ya que tenemos dos tipos de cajas (A y B), un objetivo (maximizar beneficio) y unas restricciones (el número de tarros de cada tipo disponibles cada día).

Variables de decisión: Nos interesa saber cuántas cajas de cada tipo hay que comercializar para obtener el beneficio máximo por lo que las variables de decisión serán:

x – cajas de tipo A.

y – cajas de tipo B.

Función objetivo: Queremos un beneficio máximo. Como con cada caja de tipo A obtenemos 7 euros si comercializamos x ganamos $7x$. De la misma forma si con cada caja de tipo B ganamos 5 euros con las y cajas comercializadas ganamos $5y$. Sumando ambas cantidades tenemos que la función objetivo es:

$$B(x, y) = 7x + 5y$$

Restricciones: En principio nuestras variables no pueden ser negativas por lo que aplicaremos, ya que es posible:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Todas las restricciones tienen que ver con el número de tarros de cada tipo disponibles:

Tenemos disponibles 280 tarros de miel de romero. Las cajas de tipo A llevan 2 de estos tarros si comercializamos x cajas necesitaremos $2x$ tarros. Las cajas de tipo B llevan 1 de estos tarros por lo que si comercializamos y cajas necesitaremos y tarros. La suma de ambas cantidades no debe superar el total (280). Por lo que la restricción será:

$$2x + y \leq 280$$

Tenemos disponibles 300 tarros de miel de azahar. Las cajas de tipo A llevan 2 de estos tarros si comercializamos x cajas necesitaremos $2x$ tarros. Las cajas de tipo B llevan 2 de estos tarros por lo que si comercializamos y cajas necesitaremos $2y$ tarros. La suma de ambas cantidades no debe superar el total (300). Por lo que la restricción será:

$$2x + 2y \leq 300$$

Tenemos disponibles 250 tarros de miel multifloral. Las cajas de tipo *A* llevan 1 de estos tarros si comercializamos *x* cajas necesitaremos *x* tarros. Las cajas de tipo *B* llevan 2 de estos tarros por lo que si comercializamos *y* cajas necesitaremos 2*y* tarros. La suma de ambas cantidades no debe superar el total (250). Por lo que la restricción será:

$$x + 2y \leq 250$$

Región factible o solución. Vendrá dada por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

$$2x + y \leq 280$$

$$2x + 2y \leq 300$$

$$x + 2y \leq 250$$

Las dos primeras inecuaciones nos informan que la representación será en el primer cuadrante.

Para representar la tercera igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "*y*":

$$y = 280 - 2x$$

tabla de valores:

x	140	100	0
y	0	80	280

Para representar la cuarta igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "*y*":

$$2x + 2y = 300;\ y = 150 - x$$

tabla de valores:

x	0	75	150
y	150	75	0

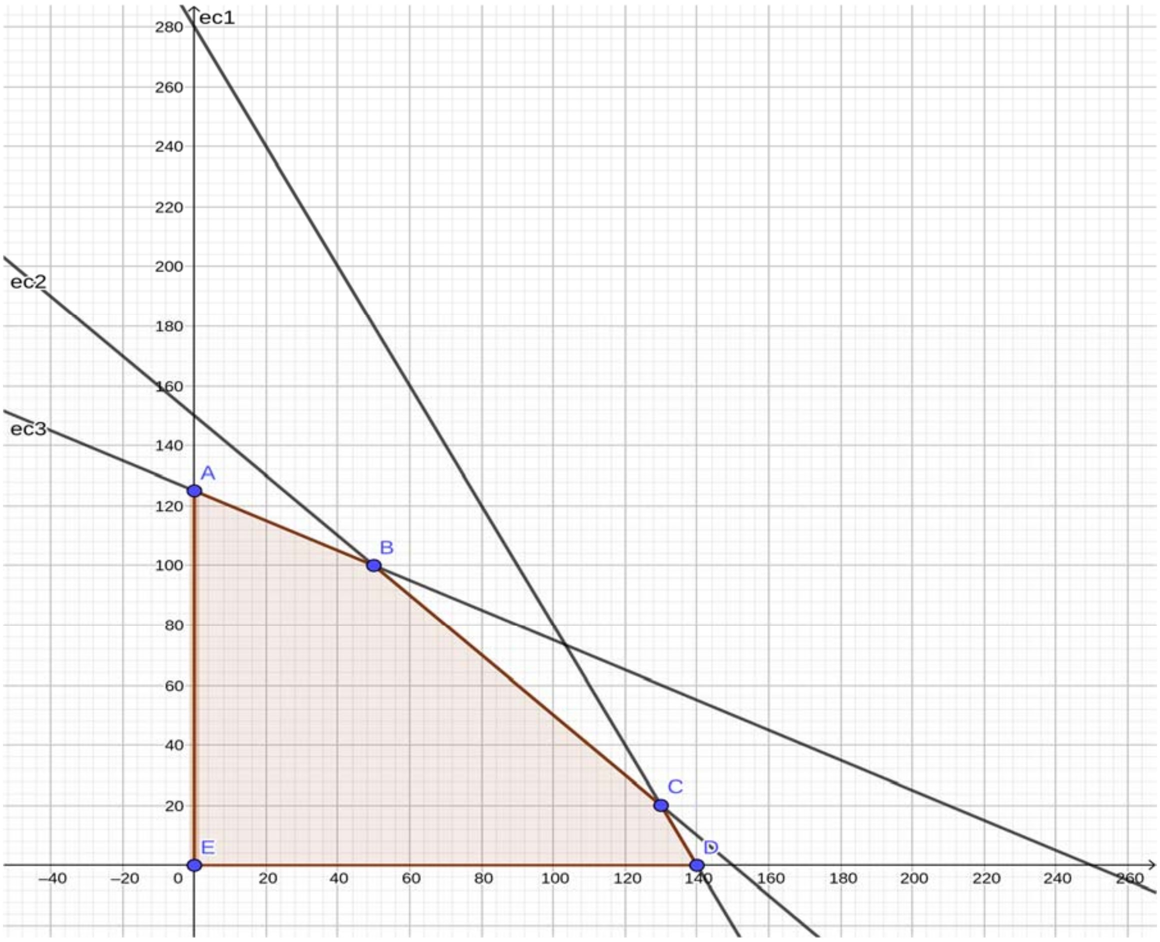
Para representar la quinta igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "*y*":

$$x + 2y = 250;\ y = 125 - x/2$$

tabla de valores:

x	0	100	250
y	125	75	0

Después de representar cada recta tenemos que sustituir un valor para hallar la región factible, en todas podemos sustituir el (0, 0) y nos sale que la región se extiende hacia ese punto. Por lo que la representación queda:



Se trata de una región cerrada que presenta cinco vértices:

- El primero es el A(0, 125) sale directamente de nuestra tabla.
- El segundo es el B(50, 100) sale de igualar las ecuaciones:

$$250- x/2 =150-x \rightarrow 250-x=300-2\,x \rightarrow x=50 \rightarrow y=150-50=100$$

- El tercero es el C(130, 20) sale de igualar las ecuaciones:

$$150- x=280-2\,x \rightarrow 2\,x- x=280-150 \rightarrow x=130 \rightarrow y=150-130=20$$

- El cuarto es el D(140, 0) sale directamente de nuestra tabla.
- El quinto es el (0 ,0) sale directamente de nuestra tabla.

Los 5 vértices a estudiar son: (0, 125); (50, 100); (130, 20); (140, 0) y (0, 0)

La función objetivo es: $B(x, y) = 7x + 5y$ sustituimos los vértices hallados:

$B(0,125) = 7\cdot 0 + 5\cdot 125 = 625$ *euros*
$B(50,100) = 7\cdot 50 + 5 \cdot 100 = 850$ *euros*
$B(130,20) = 7\cdot 130 + 5 \cdot 20 = 1\,010$ *euros*
$B(140,0) = 7\cdot 140 + 5 \cdot 0 = 980$ *euros*
$B(0,0) = 7 \cdot 0 + 5\cdot 0 = 0$ *euros*

Como buscamos el beneficio máximo tenemos que se da comercializando **130** cajas del tipo *A* y **20** cajas del tipo *B* y el beneficio es de **1 010 €.**

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores**.**

Solución:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función racional por lo que existirá en todos los puntos, salvo en aquellos en los que se anule el denominador. Igualamos a cero el denominador:

$(x+1)^2 = 0 \to x = -1$por lo que no existe en ese punto.

El **dominio** será: $Dom f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x) = 0$:

$f(x) = \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = 0$ por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$x^2 + x - 2 = 0 \to x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{array} \right.$ por lo que la función **CORTA al eje OX en** $(1,0)$ **y** $(-2,0)$**.**

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de *f(x)* cuando $x = 0$:

$f(0) = \frac{0^2+0-2}{(0+1)^2} = -2$ por lo que es el punto $(0,-2)$

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x+1} = 1$ luego **tiene asíntota horizontal en** $y = 1$. (Hemos desarrollado el denominador para verlo más claro)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x+1} = 1$ luego **tiene asíntota horizontal en** $y = 1$. (Hemos desarrollado el denominador para verlo más claro)

No lo pide pero para realizar el dibujo es útil hallar si la función va por encima o por debajo de la asíntota. Para ello hallamos valores grandes (positivos y negativos) de la función y los comparamos con el valor $y = 1$:

$f(10) = \frac{10^2+10-2}{10^2+2\cdot10+1} \simeq 0.8925 < 1$ por lo que en $+\infty$ va por debajo de la asíntota.

$f(-10) = \frac{(-10)^2-10-2}{(-10)^2+2\cdot(-10)+1} \simeq 1.09 > 1$ por lo que en $-\infty$ va por encima de la asíntota.

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos uno en: $x = -1$, calculamos los límites:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = \left(\frac{-2}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = -\infty \end{cases}$$ por lo que $x = -1$ es asíntota vertical

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada. Para calcular la derivada es conveniente desarrollar el cuadrado del denominador ya que así no hay que utilizar la regla de la cadena:

$f(x) = \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x+1}$ calculamos la derivada aplicando la regla del cociente:

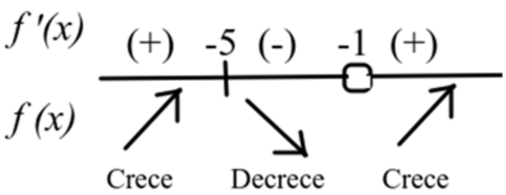
$$f'(x) = \frac{(2x+1)\cdot(x^2+2x+1)-(x^2+x-2)\cdot(2x+2)}{(x+1)^4} = \frac{x^2+6x+5}{(x+1)^4} = 0$$

Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$$x^2+6x+5=0 \to x = \frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{-6\pm\sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \frac{-6+4}{2} = -1 \\ \frac{-6-4}{2} = -5 \end{cases}$$

por lo que tiene dos posibles puntos críticos, sin embargo el valor $x = -1$ sabemos que es un punto de no existencia de la función por lo que no habrá en él máximo ni mínimo.

Con estos puntos y la discontinuidad del dominio $x = -1$ estudiamos el signo de la derivada antes y



después de los valores considerados.

Los valores calculados para establecer el signo han sido:

$f'(-6) = 0.008 > 0$

$f'(-2) = -3 < 0$

$f'(0) = 5 > 0$

Por lo que tenemos que la función decrece en]-5, -1[

Crece en]-∞, -5[U]-1, +∞[

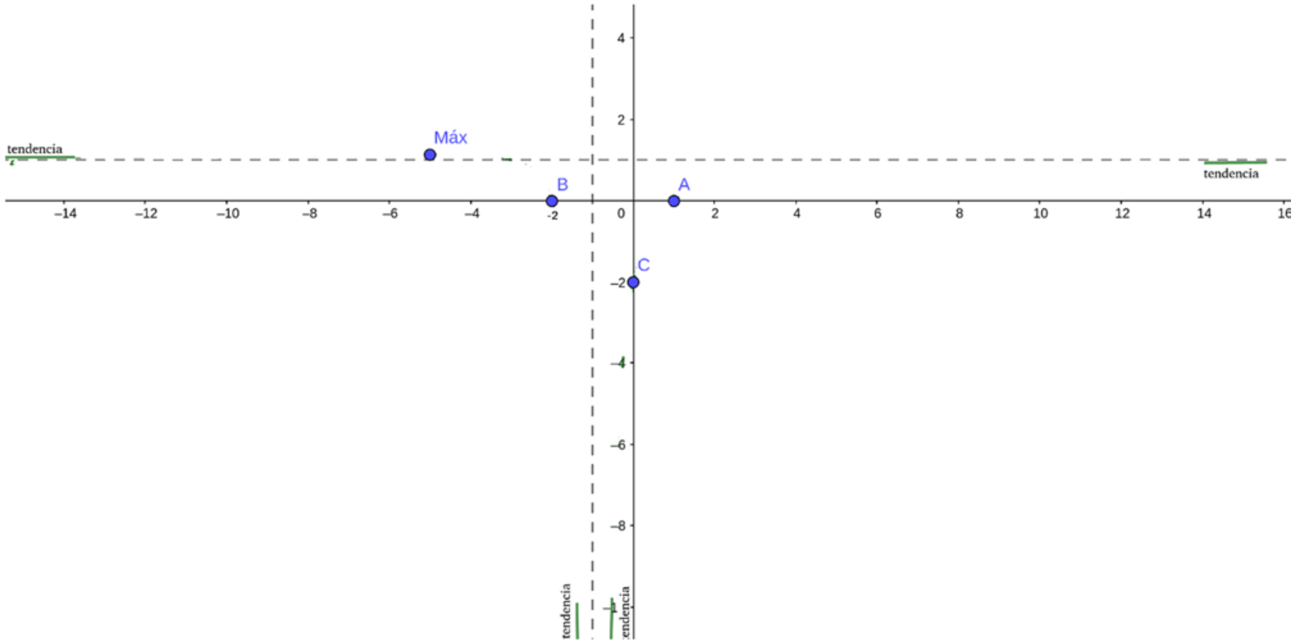
d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un **máximo relativo** en el punto de abscisa

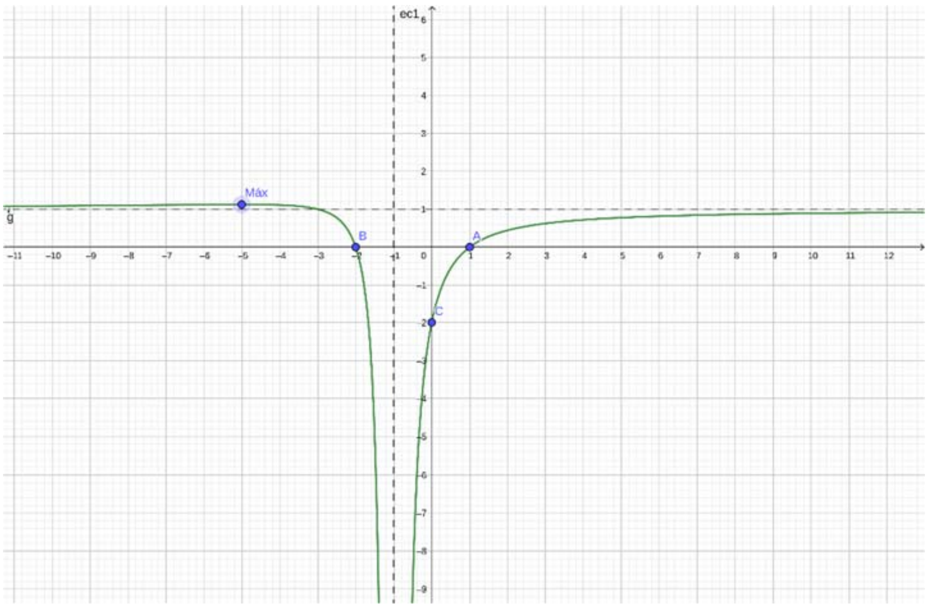
$x = -5$ que es el punto $(-5, \frac{9}{8})$(hemos sustituido en la expresión de la función)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Dibujamos los puntos de corte $(1, 0)$,$(-2, 0)$y$(0, -2)$, el máximo en$(-5, \frac{9}{8})$, la asíntota vertical en $x = -1$ (con sus tendencias a infinito) y la horizontal $y = 1$ con sus tendencias y obtenemos:



La gráfica queda así:



Problema 4:

Enunciado: En una empresa se ha comprobado que sus beneficios están relacionados con su inversión en publicidad según la función $B(x) = 50\ 000 + 40x - (\frac{x}{10})^2$ donde x es la inversión en publicidad $(x \geq 0)$ y $B(x)$ es el beneficio obtenido, ambos en euros.

a) Calcula la cantidad invertida en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

b) Calcula los intervalos para la inversión en publicidad en los que los beneficios crecen o decrecen a medida que se invierte en publicidad.

c) ¿Existe un valor para la inversión en publicidad a partir del cual los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad? En caso afirmativo, determínalo.

Solución:

a) Calcula la cantidad invertida en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Como tenemos directamente la función beneficios sólo tenemos que buscar el máximo de la misma.

Para simplificar los cálculos podemos quitar el paréntesis del enunciado y trabajar con:

$$B(x) = 50000 + 40x - (\frac{x}{10})^2 = 50000 + 40x - \frac{x^2}{100}$$

Hay dos maneras de abordar el problema: teniendo en cuenta que se trata de un polinomio de segundo grado o derivando y haciendo un ejercicio de monotonía normal. Yo lo voy a hacer por los dos métodos pero en el examen basta hacerlo por uno de ellos.

- Se trata de una función polinómica de segundo grado con el coeficiente de x^2 negativo por lo que presentará un máximo en su vértice.

Podemos calcular el máximo sabiendo que la abscisa del mismo se encuentra en $\frac{-b}{2a}$ por lo que tenemos que: $x_{max} = \frac{-40}{2\cdot(\frac{-1}{100})} = 2000$ que será el máximo local.

Obtenemos la ordenada del mismo: $y_{max} = 50000 + 40 \cdot 2000 - \frac{2000^2}{100} = 90\ 000$.

Por lo que la inversión en publicidad que origina el máximo beneficio es de **2 000 euros** y el beneficio obtenido es de **90 000 euros**.

- Podemos también hacer el problema estudiando la monotonía de la función. Para ello derivamos e igualamos a cero la derivada:

$$B'(x) = 40 - \frac{2x}{100} = 40 - \frac{x}{50} = 0 \to 40 - \frac{x}{50} = 0 \to 40 = \frac{x}{50} \to x = 2\ 000$$

Nos ha salido como punto crítico el $x = 2000$ pero hay que comprobar su naturaleza. Para ello vamos a utilizar el criterio de la segunda derivada:

$$B''(x) = \frac{-1}{50} < 0$$

Como la segunda derivada es siempre negativa también lo será en nuestro punto $x = 2000$ por lo que se trata de un máximo relativo.

Hallando la segunda coordenada del máximo $B(2000) = 90000$ llegamos a la misma solución anterior.

Sin embargo de esta manera habría que demostrar que es un máximo absoluto. Para hacerlo basta con recordar que se trata de una función continua (es un polinomio) definida en el intervalo $[0, +\infty[$. Hallamos lo que vale la función en los extremos del intervalo y en el máximo relativo:

$B(0) = 50000 + 40 \cdot 0 - \frac{0^2}{100} = 50000;$ $B(2000) = 50000 + 40 \cdot 2000 - \frac{2000^2}{100} = 90000$

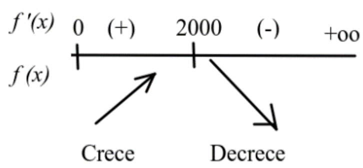
(Para ver lo que vale en el infinito hallamos un límite:

$$B(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} (50000 + 40x - (\frac{x}{10})^2) = -\infty$$

Como el mayor valor es el $x = 2\,000$ tenemos que es el **máximo absoluto**.

b) Calcula los intervalos para la inversión en publicidad en los que los beneficios crecen o decrecen a medida que se invierte en publicidad.

El intervalo de definición es $[0, +\infty[$, hemos hecho la derivada en el apartado anterior y la hemos igualado a cero comprobamos el signo de la derivada antes y después del cero (no hay problemas de continuidad):



Los signos de la derivada los hemos comprobado con los valores:

$B'(1000) = 40 - \frac{2 \cdot 1000}{100} = 20 > 0;$ $B'(2500) = 40 - \frac{2 \cdot 2500}{100} = -10 < 0$

Con lo que tenemos que crece en $]-\infty, 2000[$ y decrece en $]2000, +\infty[$

c) ¿Existe un valor para la inversión en publicidad a partir del cual los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad? En caso afirmativo, determínalo.

En primer lugar hay que saber qué beneficio tenemos si no invertimos nada en publicidad ($x = 0$):

$$B(0) = 50000 + 40 \cdot 0 - (\frac{0}{10})^2 = 50000 \text{ euros}$$

Vamos a hallar para qué valor obtenemos ese mismo beneficio: $B(x) = 50000$

$50000 + 40x - (\frac{x}{10})^2 = 50000;$ $40x - (\frac{x^2}{100}) = 0$

$x \cdot (40 - \frac{x}{100}) = 0 \rightarrow x = 0$ (primera solución); $40 - \frac{x}{100} = 0 \rightarrow x = 4000$ (segunda solución)

Luego si se invierten 4000 euros en publicidad se obtienen los mismos beneficios que si no se invierte nada.

Como la función es decreciente en $]2000, +\infty[$ tenemos que a partir del valor 4 000 la función será decreciente por lo que los beneficios obtenidos serán menores que si no se invierte nada en publicidad.

Por lo que a partir de **4 000 euros** de inversión los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad.

Problema 5:

Entre los clientes de una compañía de seguros de automóviles, un 30 % tiene menos de 30 años, un 55 % tiene entre 30 y 60 años, y el 15 % restante tiene más de 60 años. Se sabe que, entre los clientes de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte de accidente el año pasado; entre los clientes que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte de accidente el año pasado; y entre los clientes de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte de accidente el año pasado. Seleccionamos al azar un cliente de la compañía.

a) Llamemos A al suceso "el cliente seleccionado tiene más de 60 años" y llamemos B al suceso "el cliente seleccionado no presentó parte de accidente el año pasado". Calcula $P(A \cup B)$.

b) Llamemos C al suceso "el cliente seleccionado tiene 30 años o más" y D al suceso "el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado". Calcula $P(C \cap D)$.

c) Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenga 60 años o menos.

Solución:

Es un problema de probabilidad en el que hay que tener cuidado a la hora de nombrar sucesos ya que las letras nos las fijan en el enunciado. Básicamente tenemos 3 intervalos de edad de los clientes y luego nos dicen si presentó o no parte de accidente por lo que necesitamos 5 letras para nuestros sucesos. Yo he elegido estas letras para definir los sucesos:

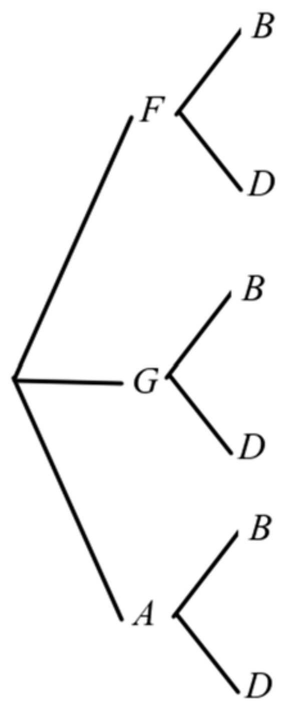
F – El cliente seleccionado tiene menos de 30 años.

G – El cliente seleccionado tiene entre 30 y 60 años.

A – El cliente seleccionado tiene más de 60 años. (Nos la da el enunciado)

B – El cliente seleccionado no presentó parte de accidente el año pasado. (Nos la da el enunciado)

D – El cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado. (Nos la da el enunciado)



Se puede resolver por diagrama de árbol o por tabla de contingencias, sin embargo, como los datos que da el enunciado son probabilidades condicionadas, es más fácil por árbol.

El árbol en el que nos vamos a basar para resolver el problema es:

Tenemos ahora que volver al enunciado para completar el árbol con las probabilidades de cada suceso:

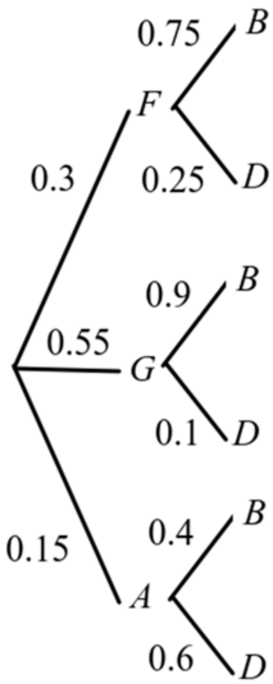
Entre los clientes de una compañía de seguros de automóviles, un 30 % tiene menos de 30 años eso quiere decir que $P(F) = 0.3$, un 55 % tiene entre 30 y 60 años lo que nos lleva a $P(G) = 0.55$, y el 15 % restante tiene más de 60 años lo que quiere decir que $P(A) = 0.15$. En esta parte nos han dado las probabilidades de las primeras ramas del árbol.

Entre los clientes de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte de accidente el año pasado, esto es una condicionada puesto que no habla de los clientes en general sino entre los que tienen menos de 30 años, por lo que tenemos que: $P(B/F) = \frac{3}{4}$; es fácil deducir que 1 de cada 4 sí presentó un parte por tanto: $P(D/F) = \frac{1}{4}$

Entre los clientes que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte de accidente el año pasado, esto es una condicionada puesto que no habla de los clientes en general sino entre los que tienen entre 30 y 60 años, por lo que tenemos que: $P(B/G) = \frac{9}{10}$; es fácil deducir que 1 de cada 10 sí presentó un parte por tanto: $P(D/G) = \frac{1}{10}$

Por último tenemos que entre los clientes de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte de accidente el año pasado, esto es una condicionada puesto que no habla de los clientes en general sino entre los que tienen más de 60 años, por lo que tenemos que: $P(B/A) = \frac{2}{5}$; es fácil deducir que 3 de cada 5 sí presentó un parte por tanto: $P(D/A) = \frac{3}{5}$

Ponemos todas estas probabilidades en el árbol (hemos utilizado decimales en lugar de fracciones para facilitar la comprensión):



Ahora podemos responder a las cuestiones planteadas:

a) Llamemos A al suceso “el cliente seleccionado tiene más de 60 años” y llamemos B al suceso “el cliente seleccionado no presentó parte de accidente el año pasado”. Calcula $P(A \cup B)$

Utilizamos la definición de la unión de sucesos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$P(A) = 0.15$ (directamente del enunciado)

Por la probabilidad total:

$P(B) = P(F \cap B) + P(G \cap B) + P(A \cap B) = P(F) \cdot P(B/F) + P(G) \cdot P(B/G) + P(A) \cdot P(B/A) =$

$= 0.3 \cdot 0.75 + 0.55 \cdot 0.9 + 0.15 \cdot 0.4 = 0.78$

En el árbol podemos calcular la intersección:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0.15 \cdot 0.4 = 0.06$

Sustituyendo valores:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.15 + 0.78 - 0.06 = 0.87 = 87\ \%.$$

$P(A \cup B) = \mathbf{0.87}$

b) Llamemos *C* al suceso "el cliente seleccionado tiene 30 años o más" y *D* al suceso "el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado". Calcula $P(C \cap D)$.

El suceso *C* que presenta el enunciado no es más que la unión de nuestros sucesos G y A. Por lo que, utilizando de nuevo la probabilidad total y teniendo en cuenta que los sucesos G y A son disjuntos (no tienen elementos en común):

$P(C \cap D) = P((G \cup A) \cap D) = P(G \cap D) + P(A \cap D) = P(G) \cdot P(D/G) + P(A) \cdot P(D/A) =$

$= 0.55 \cdot 0.1 + 0.15 \cdot 0.6 = 0.145 = 14.5\%$

$P(C \cap D) \ = \mathbf{0.145.}$

c) Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenga 60 años o menos.

Volvemos a tener que juntar dos sucesos ya que el tener 60 años o menos son nuestros sucesos $G \cup F$

Por otro lado, estamos con probabilidad a posteriori (Bayes) ya que sabemos que presentó un parte.

$$P(G \cup F/D) = \frac{P(G \cap D) + P(F \cap D)}{P(D)}$$

Del árbol tenemos: $P(G \cap D) = 0.55 \cdot 0.1 = 0.055$

$P(F \cap D) = 0.3 \cdot 0.25 = 0.075$

Para hallar la $P(D)$ podemos usar la probabilidad total o el suceso contrario:

$P(D) = 1 - P(B) = 1 - 0.78 = 0.22$

Sustituyendo valores:

$$P(G \cup F/D) = \frac{P(G \cap D) + P(F \cap D)}{P(D)} = \frac{0.055 + 0.075}{0.22} \simeq 0.5909 = 59.09\ \%$$

El cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, la probabilidad de que tenga 60 años o menos es $\mathbf{0.5909}$.

Problema 6:

En un juego se lanzan dos monedas equilibradas y un dado de seis caras equilibrado. Un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien, si obtiene exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane.

b) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

c) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera un cinco al lanzar el dado?

d) Llamemos *A* al suceso "el jugador no gana" y llamemos *B* al suceso "el jugador obtiene un seis al lanzar el dado". ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*?

Solución:

Es un problema de probabilidad en el que se plantea un juego de tirar dos monedas y un dado. En estos problemas de juegos lo mejor es JUGAR, es decir, plantear las opciones del juego y ver los sucesos a los que nos conducen. Yo he elegido estas letras para definir los sucesos:

C – Obtenemos una cara al lanzar una moneda.

X – Obtenemos una cruz al lanzar una moneda.

1, 2, 3, 4, 5, 6 – Obtenemos un 1, 2, 3, 4, 5 o 6 al lanzar el dado.

Lo más sencillo en este tipo de ejercicios suele ser plantear un árbol que nos dé todas las posibilidades del juego.

Como la moneda está equilibrada las probabilidades de sacar cara o cruz son las mismas por lo que:

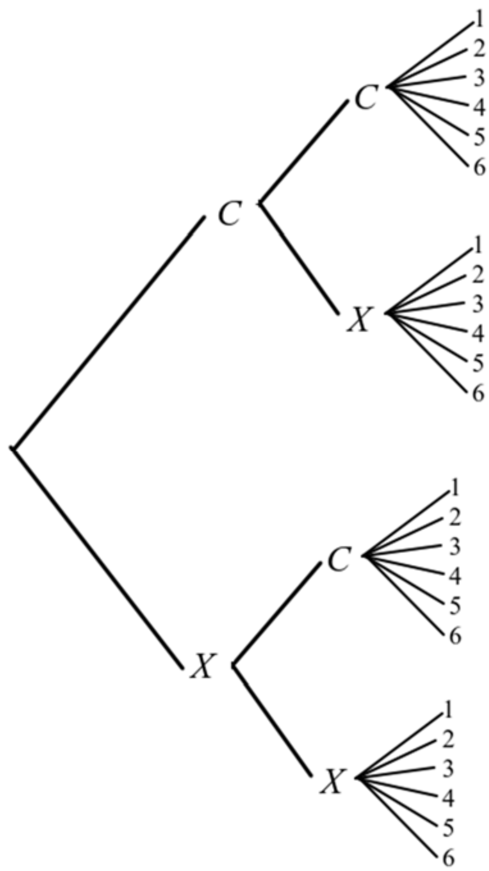
$P(C) = \frac{1}{2}$ y $P(X) = \frac{1}{2}$ (hemos aplicado Laplace)

Por otro lado, el dado también está equilibrado, por lo que tenemos que:

$$P(1) = \frac{1}{6};\ P(2) = \frac{1}{6};\ P(3) = \frac{1}{6};\ P(4) = \frac{1}{6};\ P(5) = \frac{1}{6};\ P(6) = \frac{1}{6}$$

(hemos aplicado, de nuevo, Laplace)

El árbol en el que nos vamos a basar para resolver el problema es:



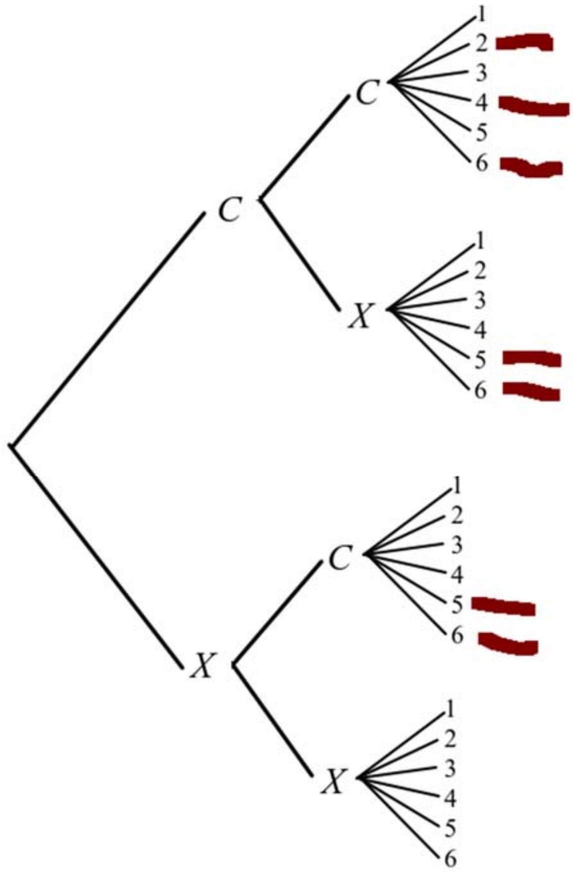
Todas las ramas de los tiros de moneda tienen probabilidad $\frac{1}{2}$ y todas las del tiro del dado tienen $\frac{1}{6}$ por lo que todos los sucesos son equiprobables.

Si contamos el número total de sucesos posibles obtenemos que son 24.

Ahora podemos responder a las cuestiones planteadas:

a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane.

En el enunciado dice que un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien, si obtiene exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado. Es cuestión tan sólo de volver a nuestro diagrama y ver en cuántas ocasiones gana. Lo he marcado en rojo:



Utilizando la Ley de Laplace tenemos que gana en 7 ocasiones de las 24 posibles por lo que la probabilidad de ganar es:

$$P(Gana) = \frac{7}{24} \simeq \mathbf{0.2917} = 29.17\ \%$$

b) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

Como sabemos que ha ganado se trata de una probabilidad a posteriori por lo que utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(CC/Gana) = \frac{P(CC \cap Gana)}{P(Gana)}$$

Volvemos a nuestro árbol y vemos que saca dos caras y gana en 3 ocasiones por lo que tenemos que: $P(CC \cap Gana) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

Sustituyendo valores tenemos que:

$$P(CC/Gana) = \frac{P(CC \cap Gana)}{P(Gana)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{24}} = \frac{3}{7} \simeq 0.4286 = 42.86\ \%$$

Si se sabe que ha ganado, la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas es $\mathbf{0.4286}$.

c) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera un cinco al lanzar el dado?

Como sabemos que ha ganado se trata de una probabilidad a posteriori por lo que utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(5/Gana) = \frac{P(5 \cap Gana)}{P(Gana)}$$

Volvemos a nuestro árbol y vemos que saca un 5 y gana en 2 ocasiones por lo que tenemos que:

$$P(5 \cap Gana) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

Sustituyendo valores tenemos que:

$$P(5/Gana) = \frac{P(5 \cap Gana)}{P(Gana)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{24}} = \frac{2}{7} \simeq 0.2857 = 28.57\ \%$$

d) Llamemos *A* al suceso "el jugador no gana" y llamemos *B* al suceso "el jugador obtiene un seis al lanzar el dado". ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*?

Para saber si dos sucesos son independientes podemos hacerlo de dos formas:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, o bien, $P(A/B) = P(A)$

Yo voy a utilizar la primera forma.

La $P(A)$es la probabilidad de NO ganar por lo que será lo contrario a ganar, que ya es una probabilidad conocida. Utilizando el suceso contrario u opuesto tenemos que:

$$P(A) = 1 - P(Ganar) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$$

La $P(B)$ es la de obtener un 6 al lanzar el dado por lo que, volviendo a nuestro diagrama, tenemos que lo saca 4 veces:

$$P(B) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

El suceso $A \cap B$ sería las veces que no gana y obtiene un 6. Si volvemos al diagrama tenemos que esto suceso sólo en un caso (cuando obtiene 2 cruces) por lo que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{24}$$

Podemos comprobar que: $\frac{1}{24} \neq \frac{17}{24} \cdot \frac{1}{6}$ por lo que:

Los sucesos *A* y *B* **NO** SON INDEPENDIENTES.

Logo de la Comunidad	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

Problema A.2:

Problema A.3:

Problema A.4:

Logo de la Comunidad	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

Problema B.2:

Problema B.3:

Problema B.4:

RESPUESTAS OPCIÓN A

Problema A.1:

Solución:

Problema A.2:

Solución:

Problema A.3:

Solución:

Problema A.4:

Solución:

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Solución:

Problema B.2:

Solución:

Problema B.3:

Solución:

Problema B.4:

Solución: