MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

Universidad de Oviedo	Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU) CURSO 2021-2022 **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.
TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.
El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

BLOQUE 1.A Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

(b) **(1 punto)** Para $a = 1$ ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

(c) **(0.5 puntos)** Calcula, en caso de que exista, los valores de a tal que $\det(P) = \det(P^{-1})$.

BLOQUE 1.B Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & & & = & -1 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ ax & - & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.

(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar un valor de a para el cual la solución del sistema verifique que $x = 0$.

(c) **(0.75 puntos)** Si $a = 0$, resuelve el sistema si es posible.

BLOQUE 2.A Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$$

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de f y las asíntotas, en caso de que tenga.

(b) **(1 punto)** Estudia la existencia de máximos y mínimos, así como los intervalos de concavidad y convexidad.

(c) **(0.5 puntos)** A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

BLOQUE 2.B Se considera la función $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

(a) **(1.75 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto (−1, 0). (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 1 - x^2$)

(b) **(0.75 puntos)** Calcula $\int_0^1 f(x)dx$

BLOQUE 3.A Sea r la recta que pasa por los puntos A = (1, 0, 1) y B = (2, 1, 2) y s la recta $s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$.

(a) **(0.75 puntos)** Indica la posición relativa de r y s.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula un plano paralelo a r y que contiene a s.

(c) **(1 punto)** Calcula la distancia entre las rectas r y s.

BLOQUE 3.B Dados dos planos $\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto A = (2, 1, 6)

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π'.

(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A′ simétrico de A respecto del plano π.

BLOQUE 4.A Se tienen tres sobres, A, B y C. En el sobre A hay dos cartas de copas y tres de bastos. En el sobre B tres cartas de copas y dos de bastos y en el sobre C cuatro de copas y una de bastos. Se tira un dado y se saca una carta del sobre A si el resultado es impar, del sobre B si el resultado es 4 o 6 y del sobre C si el resultado es un 2.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de bastos.

(b) **(1.25 puntos)** Se extrae una carta y resulta ser copas ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído del sobre B?

BLOQUE 4.B El peso en kilos de la población de un cierto pais sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10. Se selecciona un individuo al azar.

(a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que su peso se sitúe entre 65 y 75 kilos.

(b) **(1.25 puntos)** Se realiza una campaña de comida sana y esto repercute en el peso de la población, manteniendo la desviación típica pero ahora la probabilidad de que un individuo pese menos de 75 es 0.6 ¿Cuál es la nueva media?

(Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6) = 0.7257$, $F(1.8) = 0.9641$.)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1A. Solución:

BLOQUE 1.A Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

(b) **(1 punto)** Para a = 1 ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

(c) **(0.5 puntos)** Calcula, en caso de que exista, los valores de a tal que $\det(P) = \det(P^{-1})$.

(a)

$$\det P = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix} = 2 - a$$

Por lo tanto, para a = 2 el determinante es 0. Por lo tanto el rango es menor de 3. Como el $\det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$, el rango es 2. Para el resto de valores el rango es 3.

(b) Para a = 1 $\det(P) = 1 \neq 0$ por lo que sí tiene inversa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)F_3]{(-1)F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - 2F_3]{F_1 + 2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) $\det(P) = 2 - a$, $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{2-a}$ por lo tanto buscamos los valores de A que hacen que: $2 - a = \dfrac{1}{2-a}$ que son a = 1 y a = 3.

Bloque 1B. Solución:

BLOQUE 1.B Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & & & = & -1 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ ax & - & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.

(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar un valor de a para el cual la solución del sistema verifique que $x = 0$.

(c) **(0.75 puntos)** Si $a = 0$, resuelve el sistema si es posible.

(a) La matriz de coeficientes tiene determinante:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ a & -2 & 1 \end{pmatrix} = 4a - 4$$

Por lo que el sistema es compatible determinado para $a \neq 1$, ya que el rango de A y el de la ampliada es igual e igual al número de incógnitas.

Si $a = 1$ aplicaremos el método de Gauss. La matriz ampliada es

$$Ab = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+aF_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3\leftrightarrow F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y el sistema es compatible indeterminado.

(b) Si $x = 0$ entonces el sistema se podría plantear como

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2y & & & = & -1 \\ 2y & + & 2z & = & 1 \\ -2y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

que es independiente del valor de a. En este caso, y para todo a, de la primera ecuación $y = -\frac{1}{2}$ y por la última ecuación $z = 2 - 1 = 1$, como también verifica la segunda ecuación, esta será una solución como la pedida.

(c) Si $a = 0$ la matriz ampliada es

$$Ab = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

y la solución es $z = 1$, $y = -\frac{1}{2}$, $x = 0$.

Bloque 2A. Solución:

BLOQUE 2.A Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$$

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de f y las asíntotas, en caso de que tenga.

(b) **(1 punto)** Estudia la existencia de máximos y mínimos, así como los intervalos de concavidad y convexidad.

(c) **(0.5 puntos)** A partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

(a) f es un cociente de polinomios, por lo tanto el dominio es toda la recta real salvo los valores de x para los que se anule el denominador, es decir, $x = 1$.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \infty$$

Por lo tanto no tiene asíntotas horizontales

Asintotas verticales:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty$$

Tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

Asíntotas oblicuas (puede haber ya que no hay asíntotas horizontales)

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+3}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1$$

$$n = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3+x}{x-1} = 1$$

Tiene una asíntota oblicua: $y = x + 1$.

(b) Para calcular máximos y mínimos calcularemos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

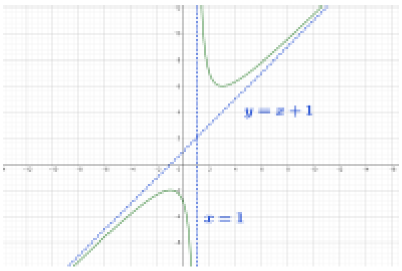
que se anula en $x = 3$ y $x = -1$.

Para estudiar la concavidad y la convexidad calculemos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$$

que es positiva si $x > 1$, y negativa si $x < 1$, por lo tanto f es convexa ($\cap$) si $x \in (-\infty, 1)$ y es cóncava ($\cup$) si $x \in (1, +\infty)$.

(c)



Bloque 2B. Solución:

BLOQUE 2.B Se considera la función $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

(a) **(1.75 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto (–1, 0). (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 1 - x^2$)

(b) **(0.75 puntos)** Calcula $\int_0^1 f(x)dx$

(a) Si utilizamos el cambio de variable $1 - x^2 = t$ entonces $-2xdx = dt$ y se puede reescribir la integral como sigue:

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + C$$

Como buscamos F tal que $F(-1) = 0$ entonces $F(-1) = -\frac{1}{3}(1-(-1)^2)^{3/2} + C = C$, por lo que $C = 0$

$$F(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$$

(b)

$$\int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}(1-1)^{3/2} + \frac{1}{3}(1-0^2)^{3/2} = \frac{1}{3}$$

Bloque 3A. Solución:

BLOQUE 3.A Sea r la recta que pasa por los puntos A = (1, 0, 1) y B = (2, 1, 2) y s la recta $s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$.

(a) **(0.75 puntos)** Indica la posición relativa de r y s.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula un plano paralelo a r y que contiene a s.

(c) **(1 punto)** Calcula la distancia entre las rectas r y s.

(a) Calculamos la ecuación continua de la recta $\vec{u} = B - A = (1, 1, 1)$:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$$

discutimos el sistema formado por las cuatro ecuaciones que definen las dos rectas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{x-2}{1} & = & \frac{y-2}{-1} \\ \frac{y-2}{-1} & = & \frac{z}{1} \\ \frac{x-1}{1} & = & \frac{y}{1} \\ \frac{y}{1} & = & \frac{z-1}{1} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 4 \\ y+z & = & 2 \\ x-y & = & 1 \\ y-z & = & -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz asociada al sistema es 3 y el de la ampliada es 4, por tanto el sistema es incompatible. Son rectas que se cruzan.

(b) Este plano está definido por un punto de s, P = (2, 2, 0), un vector director de r, $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y un vector director de s $\vec{v} = (1, -1, 1)$, luego la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - 2z - 4 = 0 \Rightarrow x - z = 2$$

(c) Esta distancia es la misma que la distancia entre un punto cualquiera de la recta r y el plano anterior. Tomamos un vector unitario perpendicular a al plano:

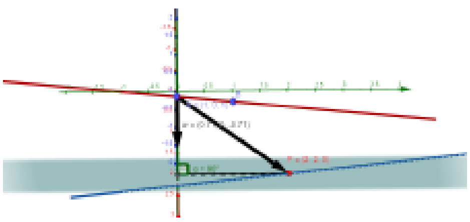
$$\vec{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Tomamos el vector definido por un punto de la recta r y un punto del plano:

$$\vec{w}_2 = (2, 2, 0) - (1, 0, 1) = (1, 2, -1)$$

La distancia es el producto escalar de ambos:

$$d = |\vec{w} \cdot \vec{w}_2| = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot (1, 2, -1)\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$



Bloque 3B. Solución:

BLOQUE 3.B Dados dos planos $\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A = (2, 1, 6)$

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π'.

(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A′ simétrico de A respecto del plano π.

(a) Para calcular la intersección resolvemos el sistema definido por las ecuaciones de los planos.

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x+y &= 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right)$$

Para obtener la solución debemos tomar como parámetro la variable y, y se obtiene:

$$\begin{cases} x &= 3-t \\ y &= t \\ z &= 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z) = (3-t, t, 0) = (3, 0, 0) + t \cdot (-1, 1, 0)$$

Por tanto tenemos que un punto es el $B = (3, 0, 0)$ y un vector director $\vec{u} = (-1, 1, 0)$.

(b) Calculamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto A, el vector director debe ser $\vec{v} = (1, 1, 1)$ luego la ecuación de la recta es: $A + t \cdot \vec{v} = (2, 1, 6) + t \cdot (1, 1, 1)$, o sea, $(x, y, z) = (2 + t, 1 + t, 6 + t)$. Como el punto debe pertenecer al plano π, debe verificar que:

$$3 = x + y + z = (2 + t) + (1 + t) + (6 + t) = 9 + 3t \Rightarrow 3t = -6 \Rightarrow t = -2$$

Por tanto, el punto P es:

$$P = A + (-2) \cdot \vec{v} = (2, 1, 6) + (-2) \cdot (1, 1, 1) = (0, -1, 4).$$

(c) El punto simétrico A′, se puede calcular como

$$A' = P - PA = (0, -1, 4) - ((2, 1, 6) - (0, -1, 4)) = (0, -1, 4) - (2, 2, 2) = (-2, -3, 2)$$

Bloque 4A. Solución:

BLOQUE 4.A Se tienen tres sobres, A, B y C. En el sobre A hay dos cartas de copas y tres de bastos. En el sobre B tres cartas de copas y dos de bastos y en el sobre C cuatro de copas y una de bastos. Se tira un dado y se saca una carta del sobre A si el resultado es impar, del sobre B si el resultado es 4 o 6 y del sobre C si el resultado es un 2.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de bastos.

(b) **(1.25 puntos)** Se extrae una carta y resulta ser copas ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído del sobre B?

Los datos del enunciado son los siguientes:

$$P(A)=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{1}{3},\quad P(C)=\frac{1}{6}$$

Además

$$P(Copas/A)=\frac{2}{5},\qquad P(Copas/B)=\frac{3}{5},\quad P(Copas/C)=\frac{4}{5}$$

(a)

$$P(Bas)=P(Bas\cap A)+P(Bas\cap B)+P(Bas\cap C)=P(Bas/A)P(A)+P(Bas/B)P(B)+P(Bas/C)P(C)=$$

$$=\frac{3}{5}\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\frac{1}{6}=0.4667$$

(b)

$$P(B/Cop)=\frac{P(B\cap Cop)}{P(Cop)}=\frac{P(Cop/B)P(B)}{P(Cop)}=\frac{\frac{3}{5}\frac{1}{3}}{1-0.4667}=0.3750$$

Bloque 4B. Solución:

BLOQUE 4.B El peso en kilos de la población de un cierto pais sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10. Se selecciona un individuo al azar.

(a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que su peso se sitúe entre 65 y 75 kilos.

(b) **(1.25 puntos)** Se realiza una campaña de comida sana y esto repercute en el peso de la población, manteniendo la desviación típica pero ahora la probabilidad de que un individuo pese menos de 75 es 0.6 ¿Cuál es la nueva media?

(Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \le x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6) = 0.7257$, $F(1.8) = 0.9641$.)

(a) Se pide la probabilidad siguiente

$$P(65 \le X \le 75) = P(X \le 75) - P(X \le 65)$$

Tipificando las probabilidades a la N(0, 1) se tiene

$$P(X \le 75) = P\left(Z \le \frac{75-70}{10} = 0.5\right) = F(0.5) = 0.6915$$

$$P(X \le 65) = P\left(Z \le \frac{65-70}{10} = -0.5\right) = 1 - F(0.5) = 0.3085$$

Por lo tanto: $P(65 \le X \le 75) = P(X \le 75) - P(X \le 65) = 0.6915 - 0.3085 = 0.3830$

(b) $P(X \le 75) = 0.6$, que corresponde a $F(0.15)$

$$Z = \frac{75-\mu}{10} = 0.15 \Rightarrow \mu = 74.85$$

Universidad de Oviedo	Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU) **CURSO 2021-2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.
TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.
El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Dado $a \in R$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $y\ C = (1 \quad -1 \quad 1)$.

$a)$ Calcula los valores de x para los cuales la matriz A no posee inversa.

$b)$ Calcula el rango de A según los valores de x.

$c)$ Para $x = 1$, calcula en caso de que sea posible $A \cdot B\ y\ A \cdot C$ o indica por qué no se puede realizar.

Problema 2:

2º) Dado $m \in R$, se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = -1 \\ 3x + 3y + 2z = m \end{array}\right\}$.

$a)$ Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo en los casos en que sea posible.

$b)$ Estudia si es posible encontrar una solución en la que $z = 3$.

Problema 3:

3º) Se considera la función: $f(x) = \frac{2x^2}{1-x}$.

$a)$ Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

$b)$ Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$c)$ Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Problema 4:

4º) Dada la función $f(x) = -sen\ (2x) + 1$.

$a)$ Calcula una primitiva de $f(x)$, que pase por el origen de coordenadas.

$b)$ Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Problema 5:

5º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 \\ z = -\alpha \end{cases}$, s perpendicular a r y al vector $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

$a)$ Calcula un vector director de la recta r.

$b)$ Calcula un vector $\vec{u}$ director de s tal que $\vec{u} \times \vec{v_r}$ es proporcional a $\vec{v}$.

$c)$ Calcula la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s', siendo s' la recta $s' \equiv x - 1 = \frac{y-1}{-2} = z$.

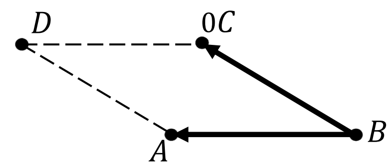
Problema 6:

6º) Dados los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(1, 6, 1)$, $C(-2, -1, 5)$ y $E(-1, 1, 1)$.

$a)$ Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

$b)$ Calcula las coordenadas del punto D para que el polígono ABCD sea un paralelogramo y el área de ABCD.

$c)$ Halla la ecuación de la recta r perpendicular al plano π y que pasa por E.



Problema 7:

7º) En una oficina del ayuntamiento se asigna un número a cada persona que entra. Se observa que el 70 % de las personas que entran son mujeres. El 40 % de los hombres y el 30 % de las mujeres que entran son menores de 30 años.

$a)$ Calcule la probabilidad de que un número sea asignado a una persona menor de 30 años.

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que un número sea asignado a un hombre que no tiene menos de 30 años?

$c)$ Si una persona a la que se le ha asignado un número no tiene menos de 30 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

Problema 8:

8º) Se está estudiando la altura de la población adulta de una cierta ciudad y se observa que el modelo se rige por una distribución normal con media 1,75 m y desviación típica 0,65 m.

$a)$ Calcula la probabilidad de que, tomando un adulto al azar mida más de 1,85 m.

$b)$ Si se toma una muestra de 10.000 personas, ¿cuántas personas medirán más de 1,85 metros?

$c)$ Se observa que, de las 10.000 personas de la muestra, 6.500 meden menos de 1,90 metros, suponiendo que se mantiene la media, ¿cuál sería la desviación típica?

Algunos valores de la función distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$:

$F(0) = 0{,}5$; $F(0{,}15) = 0{,}6$; $F(0{,}1538) = 0{,}5596$; $F(0{,}65) = 0{,}7422$ y $F(0{,}385) = 0{,}65$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) Dado $a \in R$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $y\ C = (1 \quad -1 \quad 1)$.

$a)$ Calcula los valores de x para los cuales la matriz A no posee inversa.

$b)$ Calcula el rango de A según los valores de x.

$c)$ Para $x = 1$, calcula en caso de que sea posible $A \cdot B\ y\ A \cdot C$ o indica por qué no se puede realizar.

Solución:

Apartado (a)

Calculamos el determinante, restando a la tercera fila la primera:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & x-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (x + 0 + 0) - (1) = x - 1$$

La matriz posee inversa si y solo si el determinante es no nulo. Por tanto posee inversa salvo si x - 1 = 0 es decir:

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ en\ invertible}\ \forall x \in \boldsymbol{R} - \{\boldsymbol{1}\}}.$$

Apartado (b)

La matriz es invertible cuando x es distinto de 1. Por tanto para esos valores el rango es máximo, 3.

El caso x = 1 es mejor hacerlo aparte. Sustituyendo:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1-1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La submatriz $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene determinante no nulo (-1) por lo que el rango es al menos 2. Y no puede ser 3, pues ya hemos visto que para x = 1, el determinante de orden 3 es 0.

En consecuencia:

La matriz tiene rango 2 si $x = 1$. En caso contrario tiene rango 3.

Apartado (c)

El producto AB puede hacerse pues A es 3x3 y B es 3x1 con lo que el resultado es 3x1.

Multiplicando:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El producto **AC no puede hacerse** ya que a es 3x3 y C es 1x3. El número de columnas de A (3) debería coincidir con el de filas de C (1) pero no es así.

Problema 2:

2º) Dado $m \in R$, se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=-1 \\ 3x+3y+2z=m \end{array}\right\}$.

$a)$ Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo en los casos en que sea posible.

$b)$ Estudia si es posible encontrar una solución en la que $z = 3$.

Solución:

Apartado (a)

La matriz de coeficientes es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculamos su determinante por la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (8+3+3) - (6+6+2) = 14 - 14 = 0$$

Por tanto el sistema nunca puede ser compatible determinado.

El caso a = 1 lo hacemos aparte a continuación. En primer lugar, sustituimos en el sistema original. La matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & m \end{array}\right)$$

Cambiamos el orden de las filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & m \end{array}\right)$$

Restando a la segunda fila la primera por 2 y a la tercera la primera por 3 tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & m+3 \end{array}\right)$$

Finalmente, restamos a la fila tercera la segunda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{array}\right)$$

con lo que confirmamos que el sistema nunca tiene solución única. Existe solución si y solamente si m = 0.

En este caso, deben existir infinitas soluciones. Lo volvemos a poner en forma de sistema:

$$\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ \quad -3y-z=3 \end{cases}$$

Pasamos z al otro lado para obtener

$$\begin{cases} x+2y=-1-z \\ \quad -3y=3+z \end{cases}$$

La solución debe aparecer en función de un parámetro. Sea pues $z = \lambda$

Despejando en la segunda ecuación se tiene $y = -1 - \frac{\lambda}{3}$

Llevándola a la segunda:

$$x + 2\left(-1 - \frac{\lambda}{3}\right) + \lambda = -1$$

$$x - 2 + \frac{\lambda}{3} = -1$$

De donde $x = 1 - \frac{\lambda}{3}$

La solución es $\left(1 - \frac{\lambda}{3}, -1 - \frac{\lambda}{3}, \lambda\right)$

En resumen:

El sistema es incompatible si m es distinto de 0 y compatible indeterminado en otro caso. Nunca tiene solución única.

La solución general del sistema es $\left(1 - \frac{\lambda}{3}, -1 - \frac{\lambda}{3}, \lambda\right)$ donde λ es cualquier valor real.

Apartado (b)

Para que exista solución, debe ser m = 0. En tal caso basta tomar λ = 3 y sustituir en la solución general:$\left(1 - \frac{3}{3}, -1 - \frac{3}{3}, 3\right)$.

Por tanto

Sí, es posible. Ocurre cuando λ = 0 y dicha solución da x = 0, y = -2, z = 3

Problema 3:

3º) Se considera la función: $f(x) = \frac{2x^2}{1-x}$.

$a)$ Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

$b)$ Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$c)$ Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Solución:

Apartado (a)

Para calcular el dominio de la función, comprobamos qué es lo que puede fallar. No hay raíces ni logaritmos, lo único problemático es el denominador.

Igualando a 0, 1 – x = 0 da x = 1.

El dominio son todos los reales excepto el 1.

Para calcular las asíntotas, empezamos por las verticales. En el 1, el denominador se anula, es el único sitio donde puede haberla.

$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{2}{0}$ indeterminado. Necesitamos calcular los límites laterales.

El numerador es 2 cuando x = 1, por lo que en las proximidades de 1, es positivo (de hecho es siempre positivo). El denominador es 1 – x que es negativo a la derecha de 1 y positivo a la izquierda. Por tanto el límite lateral derecho en x = 1 es menos infinito y el izquierdo mas infinito.

Otra manera de verlo es dar valores muy próximos. Se tiene f(1.1) = -24.2, luego el limite lateral derecho es menos infinito.

A su vez f(0.1) = -16.2 de donde el límite lateral izquierdo es menos infinito. Tiene una asíntota vertical en x = 1 .

Calculemos las oblicuas. $m = \lim_{x\to\infty} f\frac{(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x-x^2} = -2$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{1-x} - (-2)x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1-x} = -2$$

Tiene una asíntota oblicua en infinito, que es y = -2x - 2.

Si hay asíntota oblicua no hay horizontal.

Los límites en menos infinito son exactamente iguales, con el resultado de que hay la misma asíntota en menos infinito. Esto, de hecho, ocurre siempre para funciones racionales (es decir, cocientes de polinomios).

En resumen:

Hay una asíntota vertical en x = 1 y una oblicua en mas y menos infinito, que es la recta $y = -2x - 2$. No hay asíntotas horizontales

Apartado (b)

La derivada de la función es

$$f'(x)=\frac{4x(1-x)-2x^2(-1)}{(1-x)^2}=\frac{4x-2x^2}{(1-x)^2}$$

$f'(0) = 0$ es $4x-x^2 = 0$ cuyas soluciones son 0 y 2.

Hay que considerar también los ceros del denominador, que es solo $x = 1$.

Por tanto, debemos tener en cuenta los valores de $f'(0)$ en $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$.

Damos valores intermedios.

$f'(-2) = -16/9 < 0$, $f'(0.5) = 0.25 > 0$, $f'(1.5) = 0.25 > 0$, $f'(3) = -1,5 > 0$

La función es decreciente en $(-\infty, 0)$, crece en $(0, 1)$, crece en $(1, 2)$ y vuelve a decrecer en $(2,+\infty)$.

Con lo anterior, sabemos ya máximos relativos (puntos donde la función pasa de crecer a decrecer) y mínimos relativos (puntos donde la función pasa de decrecer a crecer). Nótese que hay que excluir los puntos de discontinuidad, al menos hasta hacer el dibujo.

Calculando las imágenes tenemos $f(0) = 0$ y $f(2) = -8$

$$\underline{\boldsymbol{Mínimo}: \boldsymbol{O(0,0)}.}$$

$$\underline{\boldsymbol{Máximo}: \boldsymbol{A(2,-8)}.}$$

Para saber si son o no extremos absolutos hay que hacer el dibujo. Obsérvese que no hay contradicción alguna en que la imagen del mínimo relativo sea mayor que la del máximo relativo. Lo que está ocurriendo quedará claro en el dibujo.

Pasemos a la concavidad y convexidad. Derivamos otra vez.

$$f''(x)=\frac{(4-4x)(1-x)^2-(4x-2x^2)2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}=$$

$$\frac{(4-4x)(1-x)+(8x-4x^2)}{(1-x)^3}=\frac{4-4x-4x+4x^2+8x-4x^2}{(1-x)^3}=\frac{4}{(1-x)^3}$$

El numerador no se anula nunca, el denominador cambia de signo en 1.

Si $x < 1$, $f''(x) > 0$ con lo que la función es convexa (ramas hacia arriba, forma de U)

Si $x > 1$, $f'(x) < 0$ con lo que la función es cóncava (ramas hacia abajo, forma de ∩)

En resumen:

$$\underline{\boldsymbol{Concavidad}\ (\cap): \boldsymbol{f''(x)<0 \Rightarrow x>1\ \Rightarrow \in (1,+\infty)}.}$$

$$\underline{\boldsymbol{Convexidad}\ (\cup): \boldsymbol{f''(x)>0 \Rightarrow x<1\ \Rightarrow x\ \in (-\infty,1)}.}$$

No hay punto de inflexión en $x = 1$ puesto que allí la función no está definida

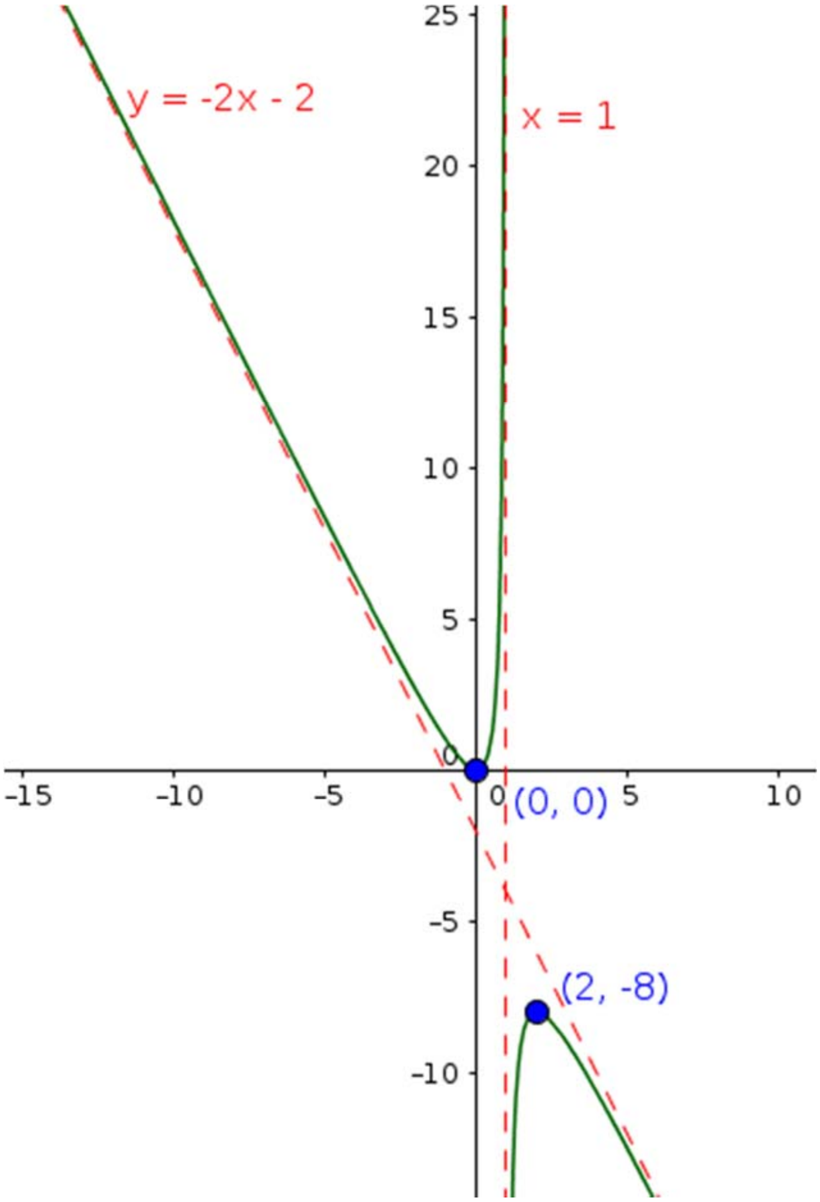
Apartado (c)

El estudio completo ya está hecho. Sólo falta darle los valores. Hay que darle los ceros de la primera y segunda derivada (si hubiere), así como los límites laterales en sus puntos de discontuinidad. En 1 la función no está bien definida.

x	$-\infty$	0	1^-	1^+	2	$+\infty$
f(x)	$+\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	-8	$-\infty$

Notas

- $-\infty$ y $+\infty$ en x deben entenderse como límites.
- 1^- y 1^+ son respectivamente los límites laterales derecho e izquierdo en 1.



Problema 4:

4º) Dada la función $f(x) = -sen\ (2x) + 1$.

$a)$ Calcula una primitiva de $f(x)$, que pase por el origen de coordenadas.

$b)$ Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución:

Apartado (a)

Calculamos la integral indefinida. Podría hacerse directamente, pero es más claro con un pequeño cambio de variable. Lo primero, separamos en dos y hacemos una de ellas.

$$\int -sen\ (2x) + 1dx = -\int sen\ (2x)dx + \int 1\ dx = x - \int sen\ (2x)dx$$

$$t = 2x \text{de donde } dt = 2dx \text{es decir } \frac{dt}{2} = dx.$$

Así pues:

$$\int -sen\ (2x) + 1dx = x - \int sen\ (t)\frac{dt}{2} = x + \frac{cos(t)}{2} + K$$

$-\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt = -\frac{1}{2}\int t^{1/2}\, dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{1/2+1}}{1/2+1} + K = \frac{t^{3/2}}{3} + K$

siendo K la constante de integración.

Deshaciendo el cambio, $\int -sen\ (2x) + 1dx = \frac{cos(2x)}{2} + x + K$

Es fácil comprobar, derivando, que efectivamente es la primitiva general.

Si tiene que pasar por (0, 0) es un valor concreto de K. Sustituimos en 0.

$0 = \frac{cos0}{2} + 0 + K = \frac{1}{2} + K$ luego K = -1/2.

La única primitiva que pasa por el origen es $\boldsymbol{F(x) = \frac{cos(2x)}{2} + x - \frac{1}{2}}$

Apartado (b)

Ya tenemos hecha la primitiva. Lo que tenemos que hacer es ver el signo. Ahora bien, como el seno está entre -1 y 1, *sen*(2*x*) + 1 es SIEMPRE positivo o 0, pues el valor más grande que puede tomar *sen* (2*x*) es 1.

Eso simplifica enormemente el problema, pues basta integrar. Ya la indefinida la tenemos ya hecha.

$$\int_0^{\pi}(-sen(2x) + 1)dx = \left[cos\frac{(2x)}{2} + x - \frac{1}{2}\right]_0^{\pi} = \left(\frac{1}{2} + \pi - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2}\right) = \pi$$

El área de la región es π u²

Problema 5:

5º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 \\ z = -\alpha \end{cases}$, s perpendicular a r y al vector $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

$a)$ Calcula un vector director de la recta r.

$b)$ Calcula un vector $\vec{u}$ director de s tal que $\vec{u} \times \overrightarrow{v_r}$ es proporcional a $\vec{v}$.

$c)$ Calcula la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s', siendo s' la recta $s' \equiv x - 1 = \frac{y-1}{-2} = z$.

Solución:

Apartado (a)

Para calcular un vector director, basta calcular dos puntos. Y para ello, basta dar dos valores a α, por ejemplo 0 y 1 (valdrían dos cualesquiera).

El valor 0 da (1, 1, 0) en tanto el 1 da (2, 1, -1). Restando obtenemos (1, 0, -1).

Un vector director es $(\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1})$. Vale también cualquier múltiplo suyo.

Podríamos haberlo calculado de modo más sencillo, simplemente notando que la forma vectorial es (x, y, z) = (1, 1, 0) + α(1, 0, -1) e identificar el vector.

Apartado (b)

Nos piden un vector $\overline{u}$perpendicular a la recta r tal que $\overline{u}x\overline{v_r}$ sea proporcional a $\overline{v}$. Dicho vector, al ser perpendicular a la recta y a $\overline{v}$ automáticamente será director de s.

Llamemos pues $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Si es perpendicular a la recta r se tiene

0 = $(u_1, u_2, u_3) \cdot (1,0,-1) = u_1 - u_3$

de donde $u_3 = u_1$. Sustituyendo en el producto vectorial tenemos

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-u_{2,} 2u_{1,} - u_2)$$

Ese vector debe ser proporcional a (1, 1, -1) de modo que basta tomar $u_2 = -1$ y $u_1 = 1/2$ con lo que el vector original es $(1/2, -1, 1/2)$. De hecho vale cualquier múltiplo. Por ejemplo, multiplicando por 2.

Un vector con esas características es $\overrightarrow{v_s} = (\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{1})$. Vale también cualquier múltiplo suyo.

Apartado (c)

Un plano viene dado por un punto y dos vectores. Un punto de la recta r es (1, 1, 0) y su vector es (1, 0, -1). Solo necesitamos un vector de s'. Sale directamente de su forma continua.

Esta es $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$ de modo que un vector director es. $(\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{1})$

El plano que contiene a r y s' es $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

El problema ya está resuelto, pues no nos piden una forma específica. Es habitual desarrollar el determinante por la primera fila.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 = -2(x-1) - 2(y-1) - 2z$$

que operando es $x + y + z = 2$ o bien: $x - z = 2$

El plano que contiene a r y s' es $x + y + z - 2 = 0$

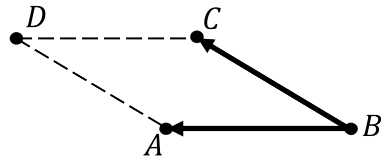
Problema 6:

6º) Dados los puntos $A(1,0,1)$, $B(1,6,1)$, $C(-2,-1,5)$ y $E(-1,1,1)$.

$a)$ Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

$b)$ Calcula las coordenadas del punto D para que el polígono ABCD sea un paralelogramo y el área de ABCD.

$c)$ Halla la ecuación de la recta r perpendicular al plano π y que pasa por E.



Solución:

Apartado (a)

La manera más sencilla es calcular los dos vectores y escribir la forma del plano como determinante

AB = (0, 6, 0); AC = (-3, -1, 4)

El plano que contiene a los tres puntos es $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

El problema ya está resuelto, pues no nos piden una forma específica. Es habitual desarrollar el determinante por la primera fila.

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 24(x-1) + 18(z-1)$$

Dividiendo entre 6 tenemos 4 (x-1) + 3 (z-1) = 0 de donde

El plano que contiene a A, B y C es $4x + 3z = 7$

Apartado (b)

Sea $D = (d_1, d_2, d_3)$ Sabemos que AD = BC. Por tanto

(d_1 -1, d_2- 0, d_3 - 1) = (-2 -1, -1 -6, 5 – 1)

o, lo que es lo mismo:

d_1 -1 = -3 que da d_1 = - 2

d_2 -1 = -7 que da d_2 = - 7

d_3 -1 = 4 que da d_3 = 5

El punto D es (-2, -7, 5)

Para calcular el área basta hacer el módulo del producto vectorial BC x BA

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -7 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = (24, 0, 18)$$

$$\sqrt{24^2 + 18^2} = \sqrt{6^2 \cdot 4^2 + 6^2 \cdot 3^2} = 6\sqrt{4^2 + 3^2} = 6 \cdot 5 = 30$$

El área es 30 u^2

Apartado (c)

El plano π es 4x + 3z = 7 por lo que su vector normal es (4, 0, 3). Tenemos pues un punto y un vector, no necesitamos más.

La recta es (x, y, z) = (-1, 1, 1) + α(4, 0, 3)

O en forma continua: $\underline{\boldsymbol{r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{3}}}$.

Problema 7:

7º) En una oficina del ayuntamiento se asigna un número a cada persona que entra. Se observa que el 70 % de las personas que entran son mujeres. El 40 % de los hombres y el 30 % de las mujeres que entran son menores de 30 años.

a) Calcule la probabilidad de que un número sea asignado a una persona menor de 30 años.

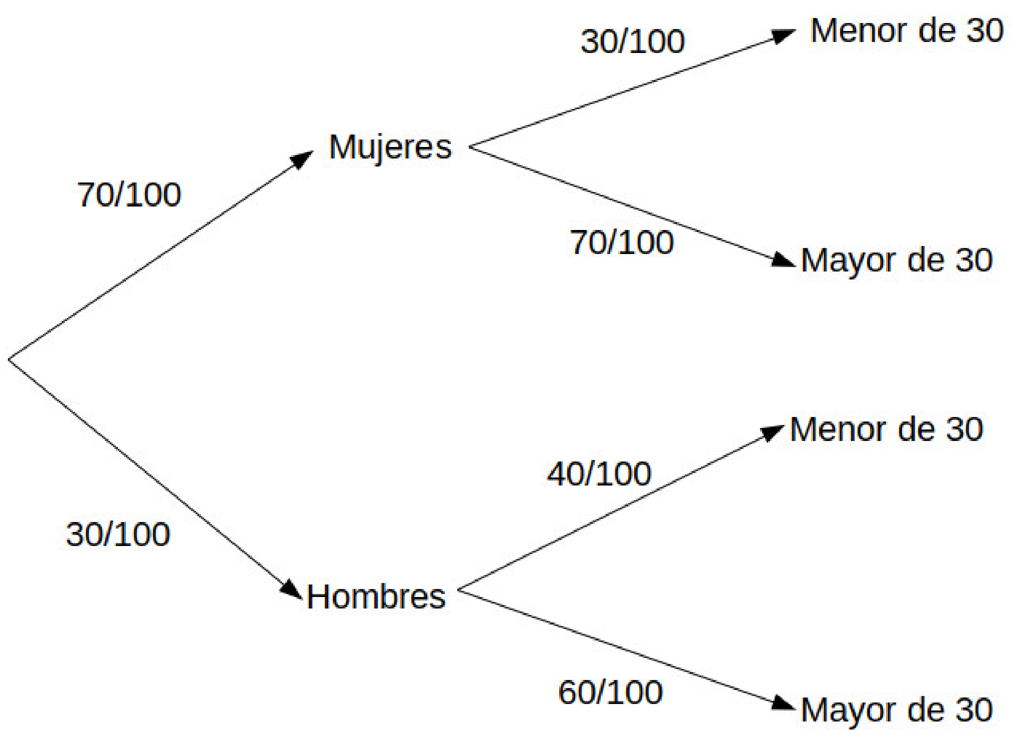
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un número sea asignado a un hombre que no tiene menos de 30 años?

c) Si una persona a la que se le ha asignado un número no tiene menos de 30 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

Solución:

Apartado (a)

El problema puede resumirse en el siguiente diagrama de árbol:



Sean los sucesos *H* = "Ser hombre", $\overline{H}$= "Ser mujer" (su complementario), *J* = "Ser menor de 30 años" y $\bar{J}$ = "Ser mayor de 30 años" (su complementario).

La probabilidad de ser menor de 30 años se puede calcular con la Fórmula de la Probabilidad Total.

$$P(J) = P(J/H)P(H) + P(J/\overline{H})P(\overline{H}) = \frac{40}{100}\cdot\frac{30}{100} + \frac{30}{100}\cdot\frac{70}{100} = \frac{12}{100} + \frac{21}{100} = \frac{33}{100}$$

La probabilidad de asignar un número a una persona menor de 30 años es $33/100 =$

33 %

Apartado (b)

Es simplemente seguir la rama de abajo.

$$P(H\cap\bar{J}) = P(\bar{J}/H)P(H) = \frac{60}{100}\cdot\frac{30}{100} = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$$

La probabilidad de hombre que no tenga menos de 30 años es 9/50 = 18 %

Apartado (c)

Nos piden $P(H/\bar{J}) = \frac{P(H\cap\bar{J})}{P(\bar{J})}$

No tenemos $P(\bar{J})$, la probabilidad de no menor de 30 años. Pero sí tenemos la complementaria, del apartado (a). Así pues $P(\bar{J}) = 1 - P(J) = 1 - \frac{33}{100} = \frac{67}{100}$

$$P(H/\bar{J}) = \frac{P(H\cap\bar{J})}{P(\bar{J})} = \frac{P(\bar{J}/H)P(H)}{P(\bar{J})} = \frac{\frac{60}{100}\cdot\frac{30}{100}}{\frac{67}{100}} = \frac{18}{67} \approx 0.2688 = 26.87\%$$

Si se ha asignado el número a una persona no mayor de 30 años, la probabilidad de que sea un hombre es 18/67, aproximadamente el 26.87 %

Problema 8:

8º) Se está estudiando la altura de la población adulta de una cierta ciudad y se observa que el modelo se rige por una distribución normal con media 1,75 m y desviación típica 0,65 m.

a) Calcula la probabilidad de que, tomando un adulto al azar mida más de 1,85 m.

b) Si se toma una muestra de 10.000 personas, ¿cuántas personas medirán más de 1,85 metros?

c) Se observa que, de las 10.000 personas de la muestra, 6.500 meden menos de 1,90 metros, suponiendo que se mantiene la media, ¿cuál sería la desviación típica?

Algunos valores de la función distribución $N(0,1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$:

$F(0) = 0{,}5;\ F(0{,}15) = 0{,}6;\ F(0{,}1538) = 0{,}5596;\ F(0{,}65) = 0{,}7422$ y $F(0{,}385) = 0{,}65$.

Solución:

Apartado (a)

Sea X la variable aleatoria que mide la altura. Nos dicen que es *N*(1.75, 0.65)

Si tipificamos la altura, la variable aleatoria $Z = \frac{X-1.75}{0.65}$ es normal (0,1).

De modo que:

$$P(1.85 < X) = P\left(\frac{1.85-1.75}{0.65} < \frac{X-1.75}{0.65}\right) = P(0.1538 < Z) = P(0.1538 < Z < \infty)$$
$$= F(\quad) - F(0.1538) = 1 - 0.5596 = 0.4404$$

La probabilidad de medir más de 1.85 es 0.4404, el 44.04 %

Apartado (b)

La cuestión está mal planteada. Obviamente es un valor aleatorio, por lo que no se puede saber a priori. De hecho es una distribución binomial.

Lo que sí se puede saber es cuántas se espera que midan más de 1.85, es decir el 44.04% de ellas. El 44.04% de 10 000 son 4404 personas. Otra manera de verlo es considerar que el número de personas que midan más de 1.85 es una distribución binomial, *B*(10000,0.4404) y su media es *np* es decir $10000 \cdot 0.4404 = 4404$

Se espera que 4 404 personas midan más de 1.85 en una muestra de 10 000 personas.

Apartado (c)

La nueva variable aleatoria es *N*(1.75, σ) siendo σ la desviación típica. Se tiene ahora que $Y = \frac{X-1.75}{\sigma}$ es normal (0, 1).

$$P(X < 1.90) = \frac{6500}{10000} = 0.65$$

Despejando *X* tenemos:

$$0.65 = P(1.75 + \sigma Y < 1.90) = P\left(Y < \frac{0.15}{\sigma}\right) = F\left(\frac{0.15}{\sigma}\right)$$

Buscamos el 0.65 y tenemos *F*(0.385) = 0.65.

Igualando conseguimos la ecuación:

$$\frac{0.15}{\sigma} = 0.385 \text{ de donde } \sigma = \frac{0.15}{0.385} = 0.3896$$

La desviación típica es $\boldsymbol{\sigma = 0,3896}$