MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

BALEARES

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

ENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho, propuestas. Solo se tendrán en cuesta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1º) Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}$ $e\ I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y λ un parámetro real cualquiera.

$a)$ Calcule la matriz $A-\lambda I$.

$b)$ Calcule la matriz $(A-\lambda I)^2$.

$c)$ Halle, si existen, los valores del parámetro λ para los cuales se satisface la relación $(A-\lambda I)^2=B$.

Problema 2:

2º) Considere el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r}3x-2y=4\\ay=-3\\ax+3z=0\end{array}\right\}$, dependientes del parámetro a:

$a)$ Discuta el sistema según el parámetro a.

$b)$ Para el valor del parámetro a para el cual el sistema tiene solución, resuélvelo.

Problema 3:

3º) Considere la función $f(x)=e^{3x-2}$.

$a)$ Determine las coordenadas del punto en el cual la tangente a la gráfica de la función $y=f(x)$ tiene pendiente igual a $\frac{3}{e}$. Halle la ecuación de esta recta tangente.

$b)$ Calcule $\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{1-f(x)}{6x-4}$.

$c)$ Esboce la gráfica de la función $y=f(x)$.

$d)$ Calcule la superficie acotada por la gráfica de la función $y=f(x)$ y las rectas de ecuaciones $x=0$ y $y=1$.

Problema 4:

4º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+a}{2x-4} & si\ \ x \leq 0 \\ 10x^2 + x + b & si\ \ x > 0 \end{cases}$:

a) Halle la condición que han de cumplir los parámetros $a\ y\ b$ para que la función $y = f(x)$ sea continua.

b) Calcule $f'(x)$.

c) Halle la condición y calcule los parámetros $a\ y\ b$ para que la función $y = f(x)$ sea derivable.

Problema 5:

5º) Del paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos) $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1), B(2, 1, 0)\ y\ C(4, 3, -2)$.

a) Calcule el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

b) Encuentre las coordenadas del punto medio, M, del segmento AC.

c) Encuentre las coordenadas del vértice D.
d) Calcule el área del paralelogramo $ABCD$.

Problema 6:

6º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - z = 1 \end{cases}\ y\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases}, \lambda \in R$.

a) Encuentre una ecuación vectorial para la recta r.
b) Encuentre la posición relativa de las rectas $r\ y\ s$.

c) Encuentre la ecuación general del plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P(2, 0, -1)$.

d) Encuentre la ecuación general del plano paralelo a r que contiene a la recta s.

Problema 7:

7º) Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0{,}7$, $P(\overline{B}) = 0{,}4$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}58$, donde $\overline{A}\ y\ \overline{B}$ indican los sucesos contrarios (o complementarios) de A y de B, respectivamente. Calcule las siguientes probabilidades:

$a)$ $P(\overline{A}), P(B)\ y\ P(A \cap B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?

$b)$ $P(A \cup B)$. $c)$ $P(B \cap \overline{A})$. $d)$ $P(A/B)$ y $P(\overline{A}/B)$.

Problema 8:

8º) El tiempo de duración de las actualizaciones de cierto programa antivirus sigue una distribución estadística normal de media 8,8 meses con una desviación típica de 3 meses.

a) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones supera los 10 meses?

b) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones se ha mantenido entre 7 y 10 meses?

c) ¿Para qué valor del parámetro c se tiene que el intervalo $(8{,}8 - c; 8{,}8 + c)$ es el intervalo de tiempo de duración del 98 % de las actualizaciones?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y λ un parámetro real cualquiera.

$a)$ Calcule la matriz $A - \lambda I$.

$b)$ Calcule la matriz $(A - \lambda I)^2$.

$c)$ Halle, si existen, los valores del parámetro λ para los cuales se satisface la relación $(A - \lambda I)^2 = B$.

Solución:

$$a)\ A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}}.$$

$$b) \qquad (A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 2 & 1 - 2\lambda & -2\lambda \\ 1 - 2\lambda & \lambda^2 - 2\lambda + 2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix}}.$$

$$c)\ (A - \lambda I)^2 = B \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda^2 + 2 & 1 - 2\lambda & -2\lambda \\ 1 - 2\lambda & \lambda^2 - 2\lambda + 2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

El único valor que satisface la igualdad de las matrices es $\underline{\lambda = 2}$

Problema 2:

2º) Considere el sistema de ecuaciones $\left.\begin{matrix} 3x-2y=4 \\ ay=-3 \\ ax+3z=0 \end{matrix}\right\}$, dependientes del parámetro a:

a) Discuta el sistema según el parámetro a.

b) Para el valor del parámetro a para el cual el sistema tiene solución, resuélvelo.

Solución:

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & a & 0 & -3 \\ a & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 3 \end{vmatrix}=9a=0 \Rightarrow a=0.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a\neq 0 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{3C_1=-2C_2\} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}=27\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a=0 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$$

b) Se resuelve el sistema para $a\neq 0$.

$$\left.\begin{matrix} 3x-2y=4 \\ ay=-3 \\ ax+3z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=-\frac{3}{a}. \quad 3x+\frac{6}{a}=4;\ 3ax+6=4a \Rightarrow x=\frac{4a-6}{3a}.$$

$$a\cdot\frac{4a-6}{3a}+3z=0;\ \frac{4a-6}{3}+3z=0;\ 4a-6+9z=0 \Rightarrow z=\frac{4a-6}{9}.$$

$$\underline{Solución: x=\frac{4a-6}{3a};\ \ y=-\frac{3}{a};\ \ z=\frac{4a-6}{9}, \forall a \in R-\{0\}.}$$

Problema 3:

3º) Considere la función $f(x) = e^{3x-2}$.

$a)$ Determine las coordenadas del punto en el cual la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ tiene pendiente igual a $\frac{3}{e}$. Halle la ecuación de esta recta tangente.

$b)$ Calcule $\lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{1-f(x)}{6x-4}$.

$c)$ Esboce la gráfica de la función $y = f(x)$.

$d)$ Calcule la superficie acotada por la gráfica de la función $y = f(x)$ y las rectas de ecuaciones $x = 0$ y $y = 1$.

Solución:

$a)$ La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(x) = 3 \cdot e^{3x-2}$.

$m = f'(x) = 3 \cdot e^{3x-2} = \frac{3}{e}$; $e \cdot e^{3x-2} = 1$; $e^{3x-1} = 1 \Rightarrow 3x - 1 = 0$; $3x = 1$; $x = \frac{1}{3}$.

El punto de tangencia es el siguiente: $f\left(\frac{1}{3}\right) = e^{3 \cdot \frac{1}{3} - 2} = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{e}\right)$:

$y - \frac{1}{e} = \frac{3}{e} \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)$; $ey - 1 = 3x - 1$.

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 3x - ey = 0.}}$$

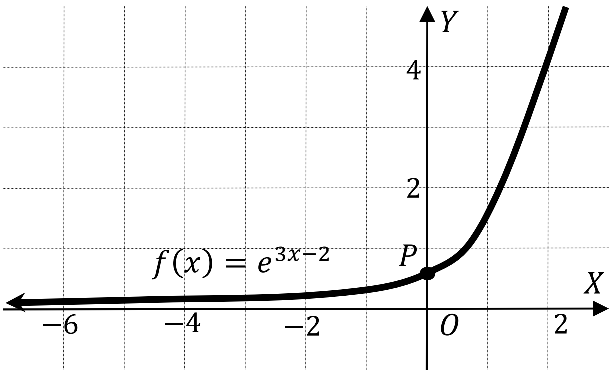
$b)$ $\lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{1-f(x)}{6x-4} = \lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{1-e^{3x-2}}{6x-4} = \frac{1-e^{3 \cdot \frac{2}{3} - 2}}{6 \cdot \frac{2}{3} - 4} = \frac{1-e^0}{4-4} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{-3 \cdot e^{3x-2}}{6} = \frac{-3 \cdot e^{3 \cdot \frac{2}{3} - 2}}{6} = \frac{-3 \cdot e^0}{6} = \frac{-3}{6} \Rightarrow$$

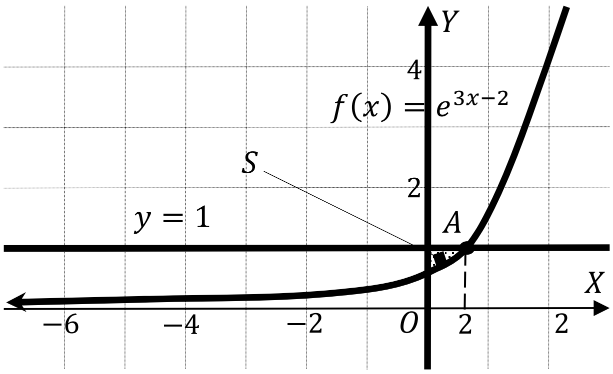
$$\underline{\lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{1-f(x)}{6x-4} = -\frac{1}{2}.}$$

$c)$ Para hacer una gráfica, aproximada, de la función $y = e^{3x-2}$ se tiene en cuenta que, por ser una función exponencial de base mayor que 1, es monótona creciente en su dominio, que es R; que tiene al eje de abscisas como asíntota horizontal en su parte negativa, por ser $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{3x-2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$. El punto de corte de la función con el eje de ordenadas es: $f(0) = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \Rightarrow P\left(0, \frac{1}{e^2}\right)$.

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la que aparece en la figura adjunta.



$d)$ La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura siguiente.



El punto de corte de la función y la recta $y = 1$ tiene como abscisa la raíz de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$y = f(x) \Rightarrow e^{3x-2} = 1 \Rightarrow 3x - 2 = 0;\;\; 3x = 2;\;\; x = \frac{2}{3} \Rightarrow A\left(\frac{2}{3}, 1\right).$$

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{2}{3}} (1 - e^{3x-2}) \cdot dx = [x]_0^{\frac{2}{3}} - \int_0^{\frac{2}{3}} e^{3x-2} \cdot dx = \frac{2}{3} - \int_0^{\frac{2}{3}} e^{3x-2} \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{2}{3} - I. \quad (*)$$

$$I = \int_0^{\frac{2}{3}} e^{3x-2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 3x - 2 = t \\ dx = \frac{1}{3} \cdot dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = \frac{2}{3} \to t = 0 \\ x = 0 \to t = -2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \int_{-2}^{0} e^t \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot [e^t]_{-2}^{0} = \frac{1}{3} \cdot (e^0 - e^{-2}) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \Rightarrow I = \frac{e^2 - 1}{3e^2}.$$

Sustituyendo este valor en (*):

$$S = \frac{2}{3} - I = \frac{2}{3} - \frac{e^2 - 1}{3e^2} = \frac{2e^2 - e^2 + 1}{3e^2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = \frac{e^2 + 1}{3e^2}\, u^2 \cong 0,378\, u^2.}$$

Problema 4:

4º) Dada la función $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+a}{2x-4} & si\ \ x\leq 0\\ 10x^2+x+b & si\ \ x>0\end{cases}$:

a) Halle la condición que han de cumplir los parámetros a y b para que la función $y=f(x)$ sea continua.

b) Calcule $f'(x)$.

c) Halle la condición y calcule los parámetros a y b para que la función $y=f(x)$ sea derivable.

Solución:

a) Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=0\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+a}{2x-4}=-\frac{a}{4}\\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(10x^2+x+b\ )=b=f(0)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Rightarrow -\frac{a}{4}=b\Rightarrow a=-4b.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ para\ a=-4b.}}$$

b) $$\underline{f'(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4x-a}{2(x-2)^2} & si\ x<0 \quad (*)\\ 20x+1 & si\ \ x\geq 0\end{cases}}.$$

(*) $g(x)=\frac{x^2+a}{2x-4}\Rightarrow g'(x)=\frac{2x\cdot(2x-4)-(x^2+a)\cdot 2}{2^2\cdot(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2-a}{2\cdot(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-a}{2\cdot(x-2)^2}.$

c) La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=0$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de a y b.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4x-a}{2(x-2)^2} & si\ x<0 \quad (*)\\ 20x+1 & si\ \ x\geq 0\end{cases}\Rightarrow x=0\ \Rightarrow f'(0)=\begin{cases}-\frac{a}{8} & si\ \ x<0\\ 1 & si\ \ x\geq 0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow -\frac{a}{8}=1\Rightarrow a=-8.$$

Teniendo en cuenta que $a=-4b\Rightarrow b=-\frac{a}{4}=-\frac{-8}{4}\Rightarrow b=2$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ y\ derivable\ en\ R\ para\ a=-8\ y\ b=2.}$$

Problema 5:

5º) Del paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos) $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1,0,-1), B(2,1,0)\ y\ C(4,3,-2)$.

$a)$ Calcule el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$b)$ Encuentre las coordenadas del punto medio, M, del segmento AC.

$c)$ Encuentre las coordenadas del vértice D.

$d)$ Calcule el área del paralelogramo $ABCD$.

Solución:

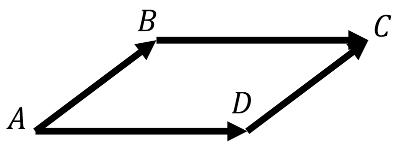
$a)$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2,1,0) - (1,0,-1)] = (1,1,1).$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(4,3,-2) - (1,0,-1)] = (3,3,-1).$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(1,1,1)\cdot(3,3,-1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{3+3-1}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{9+9+1}} = \frac{5}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{57}} \Rightarrow \underline{\cos\beta = \frac{5\sqrt{57}}{57}}.$$

$b)$ $$x_m = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2};\ y_m = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2};\ z_m = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)}.$$



$c)$ $\overrightarrow{DC} \Rightarrow (1,1,1) = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} =$

$= [(4,3,-2) - (x,y,z)] = (4-x, 3-y, -2-z).$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (1,1,1) = (4-x, 3-y, -2-z) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-x = 1 \to x = 3 \\ 3-y = 1 \to y = 2 \\ -2-z = 1 \to z = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{D(3,2,-3)}}.$$

$d)$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(3,2,-3) - (1,0,-1)] = (2,2,-2)$

El área de un paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{matrix} \right\| = |-2i + 2j + 2k - 2k - 2i + 2j| =$$

$$= |-4i + 4j| = 4 \cdot |-i + j| = 4 \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = 4 \cdot \sqrt{2}.$$

$$\underline{\mathbf{S = 4\sqrt{2}\ u^2}}.$$

Problema 6:

6º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases}, \lambda \in R$.

$a)$ Encuentre una ecuación vectorial para la recta r.

$b)$ Encuentre la posición relativa de las rectas r y s.

$c)$ Encuentre la ecuación general del plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto $P(2, 0, -1)$.

$d)$ Encuentre la ecuación general del plano paralelo a r que contiene a la recta s.

Solución:

$a)$ $r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \delta;\ \ y = 3 - \delta;\ \ z = -1 + 2\delta \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \delta \\ y = 3 - \delta \\ z = -1 + 2\delta \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{r \equiv (x, y, z) = (0, 3, -1) + \delta \cdot (1, -1, 2)}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0, 3, -1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(1, 0, -4)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1, -1, -1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1, 0, -4) - (0, 3, -1)] = (1, -3, -3)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 6 + 1 + 2 - 3 - 3 = -6 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3\ \Rightarrow\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan}.$$

$c)$ Siendo $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 2)$ un vector director de la recta, la ecuación general del plano π es de la forma $\pi \equiv x - y + 2z + D = 0$.

Si el plano contiene al punto $P(2, 0, -1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - y + 2z + D = 0 \\ P(2, 0, -1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 - 0 + 2 \cdot (-1) + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\pi \equiv x - y + 2z = 0}.$$

$d)$ El plano γ pedido tiene a $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 2)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1, -1, -1)$ como vectores directores y contiene al punto $B(1, 0, -4) \in s$. Su expresión general es la siguiente:

$$\gamma(B;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$(x-1) + 2y - (z+4) + (z+4) + 2(x-1) + y = 0;\ \ 3(x-1) + 3y = 0;$

$$x - 1 + y = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\gamma \equiv x + y - 1 = 0}.$$

Problema 7:

7º) Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0{,}7$, $P(\overline{B}) = 0{,}4$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}58$, donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ indican los sucesos contrarios (o complementarios) de A y de B, respectivamente. Calcule las siguientes probabilidades:

$a)$ $P(\overline{A}), P(B)$ y $P(A \cap B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?

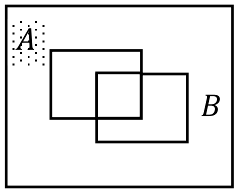
$b)$ $P(A \cup B)$. $c)$ $P(B \cap \overline{A})$. $d)$ $P(A/B)$ y $P(\overline{A}/B)$.

Solución:

$a)$ $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}7 = \underline{0{,}3}$. $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}4 = \underline{0{,}6}$.

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}58 = 1 - P(A \cap B);$

$P(A \cap B) = 1 - 0{,}58 = \underline{0{,}42}$.



$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$

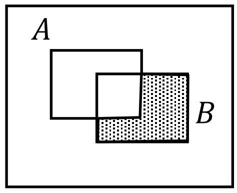
Dos sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow 0{,}42 = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \Rightarrow$

$\underline{A \text{ y } B \text{ son independientes}}.$

$b)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}42 = \underline{0{,}88}.$

$c)$ $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}42 = \underline{0{,}18}.$



$B \cap \overline{A} = B - (A \cap B)$

$d)$ $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}42}{0{,}60} = \underline{0{,}7}.$

$P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}18}{0{,}60} = \underline{0{,}3}.$

Problema 8:

8º) El tiempo de duración de las actualizaciones de cierto programa antivirus sigue una distribución estadística normal de media 8,8 meses con una desviación típica de 3 meses.

a) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones supera los 10 meses?

b) ¿Qué porcentaje de las actualizaciones se ha mantenido entre 7 y 10 meses?

c) ¿Para qué valor del parámetro c se tiene que el intervalo $(8{,}8 - c; 8{,}8 + c)$ es el intervalo de tiempo de duración del 98 % de las actualizaciones?

Solución:

$Datos: \ \mu = 8{,}8; \ \ \sigma = 3.$

$X \rightarrow N(\mu; \ \sigma) = N(8{,}8; \ 3).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-8{,}8}{3}$.

$a) \ P = P(X \geq 10) = P\left(Z \geq \frac{10-8{,}8}{3}\right) = P\left(Z \geq \frac{1{,}2}{3}\right) = P(Z \geq 0{,}4) =$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = \underline{0{,}3446 = 34{,}46\ \%}.$

$$P(X \geq 10) = \underline{0{,}3446 = 34{,}46\ \%}.$$

$b) \ P = P(7 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{7-8{,}8}{3} \leq Z \leq \frac{10-8{,}8}{3}\right) = P\left(\frac{-1{,}8}{3} \leq Z \leq \frac{1{,}2}{3}\right) =$

$= P(-0{,}6 \leq Z \leq 0{,}4) = P(Z \leq 0{,}4) - P(Z \leq -0{,}6) =$

$= P(Z \leq 0{,}4) - [1 - P(Z \leq 0{,}6)] = P(Z \leq 0{,}4) - 1 + P(Z \leq 0{,}6) =$

$= 0{,}6554 - 1 + 0{,}7257 = 1{,}3811 - 1 = \underline{0{,}3811 = 38{,}11\ \%}.$

$$P(7 \leq X \leq 10) = \underline{0{,}3811 = 38{,}11\ \%}$$

$c) \quad P(8{,}8 - c \leq X \leq 8{,}8 + c) = P\left(\frac{8{,}8-c-8{,}8}{3} \leq Z \leq \frac{8{,}8+c-8{,}8}{3}\right) = P\left(\frac{-c}{3} \leq Z \leq \frac{c}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(\frac{-c}{3} \leq Z \leq \frac{c}{4}\right) = 0{,}9800.$

$$P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - P\left(Z \leq -\frac{c}{3}\right) = P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right)\right] =$$

$= P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - 1 + P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) = 2 \cdot P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - 1 = 0{,}9800;$

$2 \cdot P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) = 1{,}9800; \ \ P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) = 0{,}9900$. Mirando en la tabla $N(0{,}1)$ de forma inversa, al valor 0,9900 le corresponde, aproximadamente 2,33, por lo cual:

$$\frac{c}{3} = 2{,}33 \Rightarrow \underline{c = 6{,}99}.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho, propuestas. Solo se tendrán en cuesta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 5:

Problema 6:

Problema 7:

Problema 8:

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) Considere las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix}, B = (\lambda \quad 3\lambda \quad 6)$.

$a)$ Calcule el determinante de la matriz A.

$b)$ En función del parámetro λ, halle el rango de la matriz A.

$c)$ Para el valor $\lambda = 1$, halle la inversa de la matriz A.

$d)$ Para el valor $\lambda = 1$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A = B$.

Solución:

$a)$ $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = -2 - \lambda^2 - 2 + 4 + \lambda + \lambda \Rightarrow$$

$$\underline{|A| = -\lambda^2 + 2\lambda.}$$

$b)$ $|A| = 0 \Rightarrow -\lambda^2 + 2\lambda = 0;\ -\lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2.$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ \begin{Bmatrix} \lambda \neq 0 \\ \lambda \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 3\ y\ para\ \begin{Bmatrix} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 2.}}$$

$c)$ Para el valor $\lambda = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_3 \to F_3 + F_2 \\ F_1 \to F_1 - F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}}$$

$d)$ $X \cdot A = B;\ \ X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1};\ \ X \cdot I = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}.$

Para $\lambda = 1 \Rightarrow B = (1 \quad 3 \quad 6)$.

$$X = B \cdot A^{-1} = (1 \quad 3 \quad 6) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{X = (-22 \quad 9 \quad 7).}$$

Problema 2:

2º) Durante un año, cierta empresa vende 21.000 vehículos de tres modelos A, B y C, al precio de 10.000, 15.000 y 20.000 euros, respectivamente. El total de las ventas es de 332 millones de euros. Se ha observado que también se han vendido 21.000 vehículos contando tan solo los del modelo B y λ veces los del modelo A.

a) Plantee un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de vehículos vendidos de cada modelo.

b) Calcule el número de vehículos vendidos de cada modelo, suponiendo $\lambda = 3$.

c) Determine si existe algún valor del parámetro λ para el cual la anterior situación no se pueda resolver.

Solución:

a) Sean x, y, z el número de vehículos de los tipos A, B y C que vende la empresa, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=21.000 \\ 10.000x+15.000y+20.000z=332.000.000 \\ \lambda x+y=21.000 \end{array}\right\}$$

$$\boldsymbol{\left.\begin{array}{r} x+y+z=21.000 \\ 2x+3y+4z=66.400 \\ \lambda x+y=21.000 \end{array}\right\}.}$$

b) Para $\lambda = 3$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=21.000 \\ 2x+3y+4z=66.400 \\ 3x+y=21.000 \end{array}\right\} \Rightarrow y=21.000-3x.$

$$\left.\begin{array}{r} x+(21.000-3x)+z=21.000 \\ 2x+3(21.000-3x)+4z=66.400 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2x+z=0 \\ -7x+4z+63.000=66.400 \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} -2x+z=0 \\ -7x+4z=3.400 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 8x-4z=0 \\ -7x+4z=3.400 \end{array}\right\} \Rightarrow x=3.400.$$

$y=21.000-3\cdot 3.400=21.000-10.200 \Rightarrow y=10.800.$

$3.400+10.800+z=21.000;\ \ z=21.000-14.200 \Rightarrow z=6.800.$

El número de vehículos vendidos por la empresa ha sido:

$$\underline{\boldsymbol{3.400\ del\ tipo\ A;\ 10.800\ del\ tipo\ B\ y\ 6.800\ del\ tipo\ C}}.$$

c) Se trata de que el sistema sea incompatible que, según el teorema de Rouché-Fröbenius, los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen que ser diferentes.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 21.000 \\ 2 & 3 & 4 & 66.400 \\ \lambda & 1 & 0 & 21.000 \end{pmatrix}.$

El rango de la matriz de coeficientes tiene que ser dos, para lo cual, es necesario que se anule su determinante:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ 2 + 4\lambda - 3\lambda - 4 = 0;\ \ \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2.$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 21.000 \\ 2 & 3 & 4 & 66.400 \\ 2 & 1 & 0 & 21.000 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 21.000 \\ 2 & 3 & 66.400 \\ 2 & 1 & 21.000 \end{vmatrix} = 200 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 105 \\ 2 & 3 & 332 \\ 2 & 1 & 105 \end{vmatrix} =$$

$$= 200 \cdot (315 + 210 + 664 - 630 - 332 - 210) = 200 \cdot (1.189 - 1.172) =$$

$$= 200 \cdot 17 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ \lambda = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2; Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$$

Problema 3:

3º) Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = 4 - 4x$.

$a)$ Represéntelas gráficamente en un mismo sistema de coordenadas.

$b)$ Calcule los puntos de corte de ambas gráficas.

$c)$ Calcule el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

Solución:

$a, b)$

La función $f(x) = x^2 - 4x$ es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:

$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2.$

$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 \Rightarrow V(2, -4).$

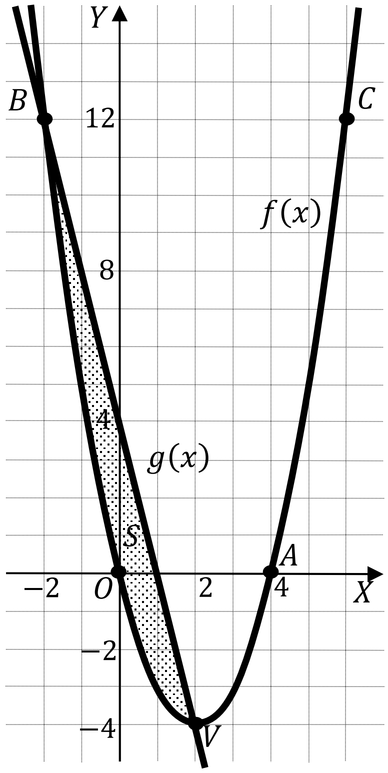
Otros puntos de la parábola son los siguientes:

$O(0,0), A(4,0), B(-2,12)\ y\ C(6,12).$

Los puntos de corte de las dos funciones tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x = 4 - 4x;\ x^2 = 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1 = -2 \rightarrow \underline{B(-2,12)}} \\ \boldsymbol{x_2 = 2 \rightarrow \underline{V(2,-4)}} \end{cases}.$$



La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

$c)$ De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-2}^{2} [(4 - 4x) - (x^2 - 4x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} = \left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2\right) - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2)\right] =$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 16 - \frac{16}{3} = 16 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 16 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{32}{3}\ u^2 \cong 10,67\ u^2.}}$$

Problema 4:

4º) Sea la función $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.

a) Halle el dominio y los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes.

b) Calcule la derivada de la función y obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Compruebe que $f(-1) = f(1)$ y que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. ¿Contradice este hecho el teorema de Rolle?

d) Esboce la gráfica de la función $y = f(x)$.

Solución:

a) La función está definida para cualquier valor real de x:

$$\underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow R.}}$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt[3]{x^2} = 0;\ \sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow A(-1, 0) \\ x_2 = 1 \rightarrow B(1, 0) \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 - \sqrt[3]{0^2} = 1 \Rightarrow C(0, 1).$$

b) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} = 1 - x^{\frac{2}{3}}$.

$$f'(x) = 0 - \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \underline{f'(x) = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}}.$$

Teniendo en cuenta que $\sqrt[3]{x^2} > 0, \forall x \in R$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-\infty, 0).}}$$

$$\boldsymbol{f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (0, +\infty).}}$$

c)
$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 1 - \sqrt[3]{(-1)^2} = 1 - \sqrt[3]{1} = 1 - 1 = 0 \\ f(1) = 1 - \sqrt[3]{1^2} = 1 - \sqrt[3]{1} = 1 - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{f(-1) = f(1)}.$$

Nótese que, en general: $f(-x) = 1 - \sqrt[3]{(-x)^2} = 1 - \sqrt[3]{x^2} = f(x)$, por lo cual, la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

A continuación se prueba que la función no es derivable para $x = 0$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0}\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuaciónb.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

Se hacer las derivadas laterales para $x = 0$:

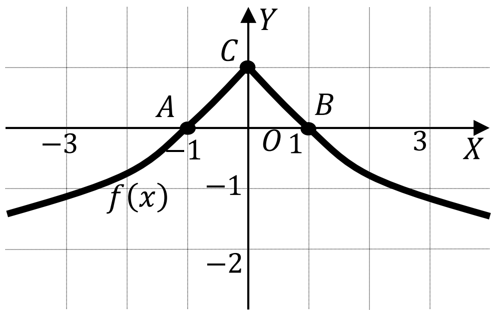
$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}\right) = -\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{0^-}} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}\right) = -\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{0^+}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La función $f(x)$ no es derivable para $x = 0 \in [-1, 1]$.

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Teniendo en cuenta la definición del teorema de Rolle, **no existe contradicción**, puesto que no se cumple que la función sea derivable en el intervalo.

$d)$ Para la representación gráfica de la función se han tenido en cuenta los puntos de corte con los ejes, así como los periodos de crecimiento y decrecimiento y, también, que la función no tiene ningún tipo de asíntotas. La representación aproximada es la de la figura.



Problema 5:

5º) Sea a un parámetro real. Considere el plano $\pi \equiv 3x - 2y - z = 4$, y el punto $P(1, 1, 0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x - az = 1 \end{cases}$. En cada caso, si existe, obtenga el valor del parámetro a para el cual:

a) El punto P pertenece a la recta r.

b) La recta r y el plano π se corten en un único punto.

c) La recta r está contenida en el plano π.

d) La recta r es perpendicular al plano π.

Solución:

a) La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + a\lambda \\ y = 1 + a\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Un punto pertenece a una recta cuando satisface su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + a\lambda = 1 \rightarrow \lambda = 0 \\ y = 1 + a\lambda = 1 \rightarrow \lambda = 0 \\ z = \lambda = \rightarrow \lambda = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P \in R \; para \; cualquier \; valor \; real \; de \; a.}}$$

b) Un vector director de $r \equiv \begin{cases} x = 1 + a\lambda \\ y = 1 + a\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ es $\overrightarrow{v_r} = (a, a, 1)$ y un vector normal del plano $\pi \equiv 3x - 2y - z = 4$ es $\vec{n} = (3, -2, -1)$.

Para que la recta r y el plano π se corten en un punto es condición necesaria que los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ no sean perendiculares, o sea, que su producto escalar sea distinto de cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} \neq 0 \Rightarrow (a, a, 1) \cdot (3, -2, -1) \neq 0; \;\; 3a - 2a - 1 \neq 0; \;\; a - 1 \neq 0; \;\; a \neq 1.$$

$$\underline{\boldsymbol{La \; recta \; r \; y \; el \; plano \; \pi \; se \; cortan \; en \; un \; punto \; \forall a \in R - \{1\}.}}$$

c) Para que la recta r esté contenida en el plano π es condición necesaria que los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ sean perpendiculares:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow a = 1.$$

La condición anterior es necesaria, pero no suficiente, puesto que la perpendicularidad de los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ lo único que garantiza es que la recta y el plano son paralelos; para que sean coincidentes, cualquier punto de la recta tiene que pertenecer al plano.

Para $a = 1$ y, por ejemplo, $\lambda = 0$, un punto de r es $P(1, 1, 0)$.

Un punto pertenece a un plano cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 3x - 2y - z = 4 \\ P(1, 1, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 0 \neq 4 \Rightarrow No \; se \; satisface.$$

$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ r\ no\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi\ \forall a \in R.}}$

$d)$ La recta r es perpendicular al plano π cuando los vectores $\overrightarrow{v_r}\ y\ \vec{n}$ son linealmente dependientes, es decir, sus componentes son proporcionales:

$$\frac{a}{3} = \frac{a}{-2} = \frac{1}{-1} \Rightarrow a \notin R \Rightarrow \underline{La\ recta\ r\ no\ es\ perpendicular\ a\ \pi\ \forall a \in R.}$$

Problema 6:

6º) Dados los puntos $A(1,1,1), B(0,0,-2), C(2,-1,0), D(-1,2,-1)\ y\ E(0,0,0)$.

$a)$ Compruebe que los puntos A, B y C determinan un único plano, π.

$b)$ Averigüe si el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo en A.

$c)$ Halle el ángulo que forma la recta que pasa por los punto A y D con el plano π.

$d)$ Calcule el volumen del tetraedro definido por los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

Solución:

$a)$ Los puntos $A(1,1,1), B(0,0,-2), C(2,-1,0)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,0,-2) - (1,1,1)] = (-1,-1,-3)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(2,-1,0) - (1,1,1)] = (1,-2,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes, lo cual implica que los puntos determinan un único plano, π, $\underline{como\ se\ quería\ comprobar}$.

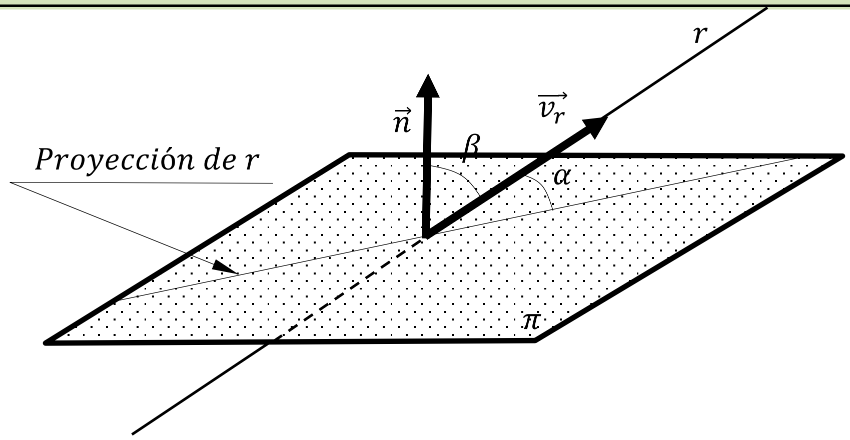
$b)$ El triángulo de vértices A, B y C será rectángulo en A cuando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son perpendiculares.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1,-1,-3) \cdot (1,-2,-1) = -1 + 2 + 3 = 4 \neq 0$.

$\underline{\boldsymbol{El\ triángulo\ de\ vértices\ A, B\ y\ C\ no\ es\ rectángulo\ en\ A.}}$

$c)$



La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC};\ B) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z+2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$x + 2(z+2) - 3y + (z+2) - 6x - y = 0;\ \ -5x - 4y + 3(z+2) = 0;$

$-5x - 4y + 3z + 6 = 0; \Rightarrow \underline{\pi \equiv 5x + 4y - 3z - 6 = 0}$.

El vector director de la recta r que pasa por $A(1,1,1)\ y\ D(-1,2,-1)$ tiene como vector director: $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}=[(1,1,1)-(-1,2,-1)]=(2,-1,2)$.

Un vector normal del plano $\pi\equiv 5x+4y-3z-6=0$ es $\vec{n}=(5,4,-3)$.

Por definición de producto escalar: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}=|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{v_r}|\cdot\cos\beta$.

$\cos\beta=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{v_r}|}$. Por ser α y β complementarios: $sen\ \alpha=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{v_r}|}$.

$$sen\ \alpha=\frac{|(5,4,-3)\cdot(2,-1,2)|}{\sqrt{5^2+4^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{|10-4-6|}{\sqrt{25+16+9}\cdot\sqrt{4+1+4}}=\frac{0}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{0}}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha=arc\ sen\ 0$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{\alpha=0^\circ\Rightarrow r\ y\ \pi\ son\ paralelos\ o\ coincidentes.}}$$

Aunque no lo pide el ejercicio, se va a diferenciar el caso.

El plano π contiene a la recta r si cualquier punto de r está contenido en el plano.

$$A(1,1,1)\in r\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\pi\equiv 5x+4y-3z=6\\ A(1,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow 5\cdot 1+4\cdot 1-3\cdot 1=6\Rightarrow Si.$$

La recta que pasa por $A(1,1,1)$ y $D(-1,2,-1)$ está contenida en el plano π.

$d)$ El volumen de un tetraedro es igual a un sexto del valor del producto mixto de los tres vectores que lo determinan, en valor absoluto.

$$V_{Tetraedro}=\frac{1}{6}\cdot\left\|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\begin{matrix}-1 & -1 & -3\\ 1 & -2 & -1\\ -2 & 1 & -2\end{matrix}\right\|=$$

$$=|-4-3-2+12-1-2|=0$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{V_{Tetraedro}=0.}}$$

Los puntos A, B, C, D son coplanarios y no forman un tetraedro.

Problema 7:

7º) Una prueba diagnóstica de una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta e 50 de cada 10.000 personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule las siguientes probabilidades.

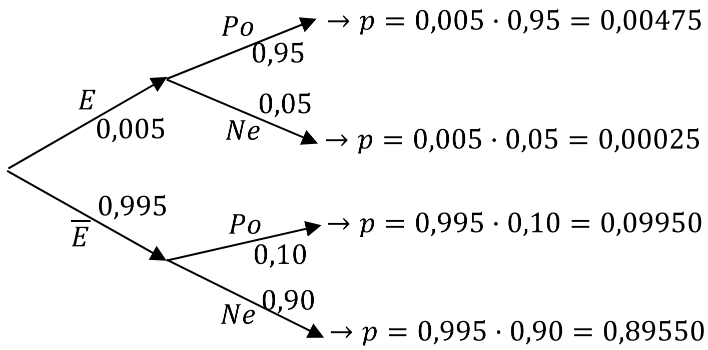
$a)$ Que un individuo no padezca la enfermedad.

$b)$ Que la prueba dé resultado positivo.

$c)$ Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba es negativo.

$d)$ Que el resultado de la prueba sea erróneo.

Solución:



$a)$ $\quad P = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{50}{1.000} = 1 - 0{,}005 = \underline{0{,}995}.$

$b)$ $\quad P = P(Po) = P(E \cap Po) + P(\overline{E} \cap Po) =$

$= P(E) \cdot P(Po/E) + P(\overline{E}) \cdot P(Po/\overline{E}) = 0{,}005 \cdot 0{,}95 + 0{,}995 \cdot 0{,}10 =$

$= 0{,}00475 + 0{,}09950 \Rightarrow \underline{P(Po) = 0{,}10425}.$

$c)$ $\quad P = P(\overline{E}/Ne) = \frac{P(\overline{E} \cap Ne)}{P(Ne)} = \frac{P(\overline{E}) \cdot P(Ne/\overline{E})}{1 - P(Po)} = \frac{0{,}995 \cdot 0{,}90}{1 - 0{,}10425} = \frac{0{,}89550}{0{,}89575} = \underline{0{,}99972}.$

$d)$ $\quad P = P(Err) = P(E \cap Ne) + P(\overline{E} \cap Po) =$

$= P(E) \cdot P(Ne/E) + P(\overline{E}) \cdot P(Po/\overline{E}) = 0{,}005 \cdot 0{,}05 + 0{,}995 \cdot 0{,}10 =$

$= 0{,}00025 + 0{,}09950 = \underline{0{,}09975}.$

Problema 8:

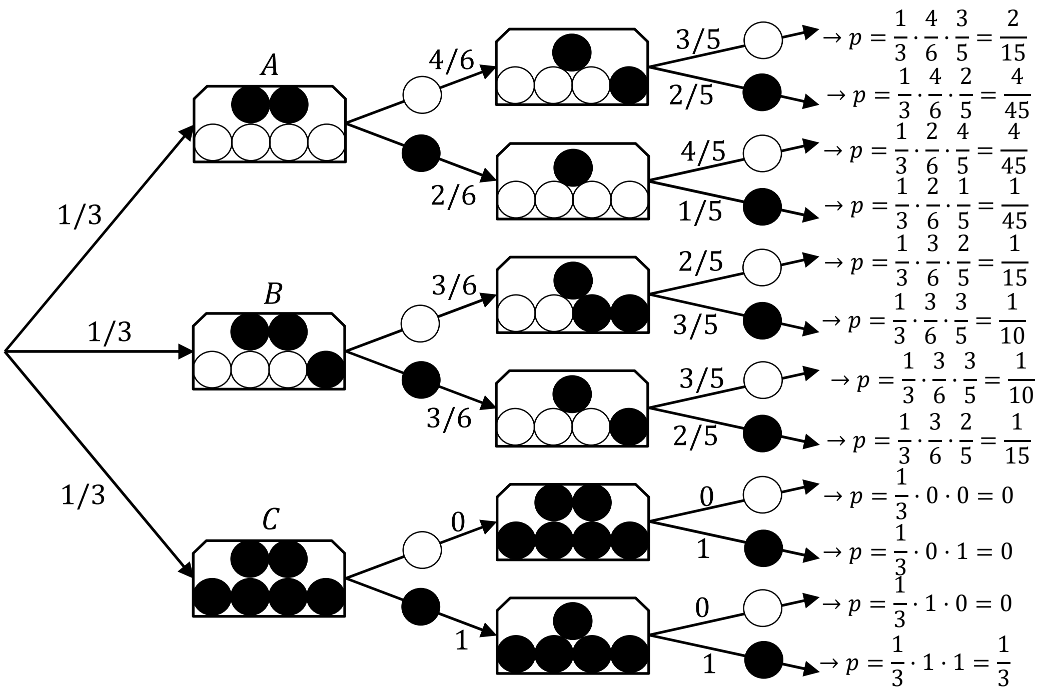
8º) Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas blancas y 2 bolas negras. La urna B contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. La urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen dos bolas de manera consecutivo y sin reemplazamiento.

a) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea blanca.

b) Calcule la probabilidad de que la primera bola extraída sea blanca y la segunda sea negra.

c) Sabiendo que la primera bola extraída es blanca, calcule la probabilidad de que la segunda bola sea negra.

Solución:



$a)\qquad P = P(bl) = P(A\cap bl) + P(B\cap bl) + P(C\cap bl) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{3}\cdot 0 =$

$= \frac{4}{18} + \frac{3}{18} + 0 \Rightarrow \underline{P(bl) = \frac{7}{18} \cong 0{,}3889}.$

$b)\qquad P = P(bl-ne) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot 0\cdot 1 = \frac{8}{90} + \frac{9}{90} + 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{P = P(bl-ne) = \frac{17}{90} \cong 0{,}1889}.$

$c)\qquad P = P(ne/bl) = \frac{P(ne\cap bl)}{P(bl)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 0}{\frac{7}{18}} = \frac{\frac{8}{90}+\frac{9}{90}+0}{\frac{7}{18}} = \frac{\frac{17}{90}}{\frac{7}{18}} = \frac{17\cdot 18}{7\cdot 90} = \frac{17\cdot 1}{7\cdot 5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{P = P(ne/bl) = \frac{17}{35} \cong 0{,}4857}.$