MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

CANARIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenidos, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque. En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Bloque 1.- Análisis.

Problema 1A:

1A) Dada la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + bx & si \ \ x < 1 \\ a + Lx & si \ \ x \geq 1 \end{cases}$.

$a)$ Estudia los valores de los parámetros $a \ y \ b$ para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en R. Escribe la función resultante $f(x)$.

$b)$ Tomamos los valores $a = -2 \ y \ b = 1$, calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = e$.

Problema 1B:

1B) Realiza el cálculo de las integrales: $a) \ I = \int \frac{x+4}{x^2+4} \cdot dx. \ b) \ I = \int_1^e \frac{(Lx)^3}{x} \cdot dx.$

Bloque 2.- Álgebra.

Problema 2A:

2A) Averigua qué dos matrices de dimensiones 3×3, $X \ e \ Y$, verifican las siguientes condiciones:

1— La suma de ambas matrices $X \ e \ Y$ da como resultado la matriz I_3 (siendo I_3 la matriz identidad 3×3).

2— Siendo $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 14 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}$, la matriz traspuesta de A es el resultado de realizar la resta del doble de la matriz X y cinco veces la matriz Y.

Problema 2B:

2B) Dado el sistema $\left. \begin{array}{r} kx - y - z = 1 \\ x + ky + 2kz = k \\ x + y + z = -1 \end{array} \right\}$, con $k \in R$.

$a)$ Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que pueda tmar el parámetro k.

$b)$ Resuelve el sistema para $k = 1$.

Bloque 3.- Geometría.

Problema 3A:

3A) En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4y - 3z = -1 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x + 4y + 12 = 0 \\ 6y + z + 13 = 0 \end{cases}.$$

$a)$ Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

$b)$ Calcula la ecuación del plano π paralelo a la recta s que contiene a la recta r. Halla el punto de corte de dicho plano π con la recta $t \equiv \frac{x+4}{-1} = \frac{y-8}{3} = z - 2$.

Problema 3B:

3B) En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones siguientes:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + 4s \\ y = 1 + s \\ z = 3 - 3t - 5s \end{cases}; \; r_1 \equiv \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{0}; \;\; r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases}.$$

$a)$ Calcula la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π y que contiene el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2.

$b)$ ¿Es cierto que el ángulo entre las rectas r_1 y r_2 es menor de 45°? Justifícalo.

Problema 4A:

Bloque 4.- Probabilidad.

4A) Tenemos una caja con bolas de madera y de plástico de distintos colores, pero con el mismo tamaño y aspecto. Contamos con la siguiente información: el 38 % son bolas azules y, de este color, la mitad son de madera; el 29 % son bolas rojas y, de este color, las tres cuartas partes son de madera y el 33 % son bolas verdes y, de este color, dos tercios son de madera. Extraemos una bola de la caja. Responde a las siguientes preguntas:

$a)$ Construye el árbol de probabilidades.

$b)$ Calcula la probabilidad de que, al sacar una bola al azar de la caja, esta sea de madera.

$c)$ Si la bola extraída de la caja es de plástico, ¿qué probabilidad hay de que sea de color rojo?

Problema 4B:

4B) El número de ventas diarias de periódicos en un quiosco se distribuye como una distribución normal de media 30 periódicos y desviación típica $\sqrt{2}$. Determina:

$a)$ La probabilidd de que en un día se vendan entre 28 y 31 periódicos.

$b)$ Justifica si es cierto que la probabilidad de vender más de 32 periódicos es menor que 0,1.

$c)$ El dueño del quiosco considera que su puesto está situado en una buena zona, ya que sabe que hay más de un 80 % de posibilidades de vender más de 29 periódicos diarios. ¿Está en lo cierto? Justifícalo.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1: Análisis.

Problema 1A:

1A) Dada la función $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+bx & si\ \ x<1\\ a+Lx & si\ \ x\geq 1\end{cases}$.

a) Estudia los valores de los parámetros $a\ y\ b$ para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en R. Escribe la función resultante $f(x)$.

b) Tomamos los valores $a=-2\ y\ b=1$, calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=e$.

Solución:

a) Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}[(x-1)^2+bx]=b\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(a+Lx)=a=f(1)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Rightarrow a=b.\quad (1)$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de $a\ y\ b$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases}2x-2+b & si\ \ x<1\\ \frac{1}{x} & si\ \ x\geq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(1^-)=b & si\ \ x<1\\ f'(1^+)=1 & si\ \ x\geq 1\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ f'(1^-)=f'(1^+)\Rightarrow b=1.$ Teniendo en cuenta (1): $a=1$.

<u>La función $f(x)$ es continua y derivable en R para $a=b=1$.</u>

b) Para $a=-2\ y\ b=1$ la función es $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+x & si\ \ x<1\\ -2+Lx & si\ \ x\geq 1\end{cases}$.

Para $x=e$ la función es $f(x)=Lx-2$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{1}{x}.\qquad Para\ x=e\Rightarrow m=f'(e)\Rightarrow m=\frac{1}{e}.$$

El punto de tangencia es: $f(e)=Le-2=1-2=-1\Rightarrow P(e,-1)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(e, -1)$:

$y + 1 = \frac{1}{e} \cdot (x - e);\ \ ey + e = x - e.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv x - ey - 2e = 0.}}$$

Problema 1B:

1B) Realiza el cálculo de las integrales: $a)\ I = \int \frac{x+4}{x^2+4} \cdot dx.\ b)\ I = \int_1^e \frac{(Lx)^3}{x} \cdot dx.$

Solución:

$a)\ I = \int \frac{x+4}{x^2+4} \cdot dx = \int \frac{x}{x^2+4} \cdot dx + \int \frac{4}{x^2+4} \cdot dx = M + N.$ (*)

$$M = \int \frac{x}{x^2+4} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x^2 + 4 = t \\ 2x \cdot dx = dt \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot Lt \Rightarrow$$

$\Rightarrow M = \frac{1}{2} \cdot L(x^2 + 4).$

$$N = \int \frac{4}{x^2+4} \cdot dx = \int \frac{4}{4\left(\frac{x^2}{4}+1\right)} \cdot dx = \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \frac{x}{2} = t \\ dx = 2 \cdot dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2 \cdot \int \frac{1}{t^2+1} \cdot dt = 2 \cdot arc\ tg\ t + C \Rightarrow N = 2 \cdot arc\ tg\ \frac{x}{2} + C.$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de M y N:

$$\boldsymbol{I = \int \frac{x+4}{x^2+4} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot L(x^2 + 4) + 2 \cdot arc\ tg\ \frac{x}{2} + C.}$$

$b)\quad I = \int_1^e \frac{(Lx)^3}{x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} Lx = t \\ \frac{1}{x} \cdot dx = dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = e \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int_0^1 t^3 \cdot dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 =$

$= \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} \Rightarrow \underline{I = \int_1^e \frac{(Lx)^3}{x} \cdot dx = \frac{1}{4}}.$

Bloque 2.- Álgebra.

Problema 2A:

2A) Averigua qué dos matrices de dimensiones 3×3, X e Y, verifican las siguientes condiciones:

1— La suma de ambas matrices X e Y da como resultado la matriz I_3 (siendo I_3 la matriz identidad 3×3).

2— Siendo $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 14 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}$, la matriz traspuesta de A es el resultado de realizar la resta del doble de la matriz X y cinco veces la matriz Y.

Solución:

$$\left.\begin{matrix} X + Y = I \\ 2X - 5Y = A^t \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 5X + 5Y = 5I \\ 2X - 5Y = A^t \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7X = A^t + 5I \Rightarrow \underline{X = \tfrac{1}{7} \cdot (A^t + 5I)}. \qquad (*)$$

$$A^t + 5I = \begin{pmatrix} 9 & 14 & 0 \\ 0 & -12 & -7 \\ -7 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 14 & 0 \\ 0 & -7 & -7 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo el valor obtenido en la expresión (*):

$$X = \tfrac{1}{7} \cdot (A^t + 5I) = \tfrac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 14 & 0 \\ 0 & -7 & -7 \\ -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

$$X + Y = I \Rightarrow Y = I - X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}; \underline{\boldsymbol{Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

Problema 2B: 2B) Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} kx - y - z = 1 \\ x + ky + 2kz = k \\ x + y + z = -1 \end{array}\right\}$***, con*** $k \in R$.

$a)$ Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que pueda tmar el parámetro k.

$b)$ Resuelve el sistema para $k = 1$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 2k & k \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & -1 & -1 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 1 - 2k + k - 2k^2 + 1 = -k^2 - k = 0;$$

$k^2 + k = 0;\ \ k(k+1) = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -1.$

$$\boldsymbol{Para \begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq -1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ k = 0 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 2.$$

$$Para\ k = -1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = -F_3\} \Rightarrow Rang\ A' = 2.$$

$$\boldsymbol{Para \begin{cases} k = 0 \\ k = -1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$ Para $k = 1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x - y - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-1+2-1-2+1}{1-1-2+1-2+1} = \frac{0}{-2} = 0.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+1+2+1+2-1}{-2} = \frac{6}{-2} = -3.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1+1-1-1-1-1}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

$$\boldsymbol{\underline{Solución: x = 0, y = -3, z = 2.}}$$

Bloque 3.- Geometría.

Problema 3A:

3A) En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4y - 3z = -1 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x + 4y + 12 = 0 \\ 6y + z + 13 = 0 \end{cases}.$$

$a)$ Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

$b)$ Calcula la ecuación del plano π paralelo a la recta s que contiene a la recta r. Halla el punto de corte de dicho plano π con la recta $t \equiv \frac{x+4}{-1} = \frac{y-8}{3} = z - 2$.

Solución:

$a)$ Las expresiones de las rectas r y s por ecuaciones paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4y - 3z = -1 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow 3x = -1 + 2y = -1 + 2\lambda \Rightarrow x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda;$$

$$3z = 1 + 4y = 1 + 4\lambda \Rightarrow z = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\lambda \end{cases}.$$

$$s \equiv \begin{cases} x + 4y + 12 = 0 \\ 6y + z + 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \mu \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = -12 - 4\mu \\ z = -13 - 6\mu \end{Bmatrix} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -12 - 4\mu \\ y = \mu \\ z = -13 - 6\mu \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $A\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2, 3, 4)$.

Un punto y un vector director de s son $B(-12, 0, -13)$ y $\overrightarrow{v_s} = (4, -1, 6)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$, linealmente dependiente del que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$:

$$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left[(-12, 0, -13) - \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)\right] = \left(-\frac{35}{3}, 0, \frac{-38}{3}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{w} = (35, 0, 38)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 6 \\ 35 & 0 & 38 \end{vmatrix} = -76 + 630 + 140 - 456 =$$

$= 770 - 532 \neq 0 \Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}$ *no son coplanarios.*

Las rectas r y s se cruzan.

$b)$ El plano π, por ser paralelo a la recta s y contener a la recta r, tiene como vectores directores a $\overrightarrow{v_r} = (2, 3, 4)$ y a $\overrightarrow{v_s} = (4, -1, 6)$.

Un punto de r es, por ejemplo: $r \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P(-1, -1, -1).$

$$\pi(P;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0;$$

$18(x+1) + 16(y+1) - 2(z+1) - 12(z+1) + 4(x+1) - 12(y+1) = 0;$

$22(x+1) + 4(y+1) - 14(z+1) = 0;\ \ 11(x+1) + 2(y+1) - 7(z+1) = 0;$

$11x + 11 + 2y + 2 - 7z - 7 = 0\ \Rightarrow\ \underline{\pi \equiv 11x + 2y - 7z + 6 = 0}.$

La expresión de la recta t por unas ecuaciones paramétricas es: $t \equiv \begin{cases} x = -4 - \lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}.$

El punto Q de intersección de la recta t con el plano π es:

$$\left. \begin{array}{r} t \equiv \begin{cases} x = -4 - \lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 11x + 2y - 7z = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow 11(-4 - \lambda) + 2 \cdot (8 + 3\lambda) - 7 \cdot (2 + \lambda) = -6;$$

$-44 - 11\lambda + 16 + 6\lambda - 14 - 7\lambda = -6;\ 12\lambda = -36;\ \ \lambda = -3 \Rightarrow \underline{Q(-1, -1, -1)}.$

$$\underline{\boldsymbol{Q(-1, -1, -1)}}$$

Problema 3B:

3B) En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones siguientes:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + 4s \\ y = 1 + s \\ z = 3 - 3t - 5s \end{cases}; \; r_1 \equiv \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{0}; \; r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases}.$$

$a)$ Calcula la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π y que contiene el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2.

$b)$ ¿Es cierto que el ángulo entre las rectas r_1 y r_2 es menor de 45°? Justifícalo.

Solución:

$a)$ La expresión de r_1 por dos planos secantes es: $r_1 \equiv \begin{cases} 6x - 5y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$.

El punto de intersección de r_1 y r_2 es la solución del sistema que forman:

Las rectas r_1 y r_2 determinan el sistema $\left.\begin{aligned} 6x - 5y &= 1 \\ z &= 1 \\ 4x + 3y &= 7 \\ y + 4z &= 5 \end{aligned}\right\}$.

De las ecuaciones segunda y cuarta: $y + 4 = 5 \Rightarrow y = 1$.

$6x - 5 = 1;\; 6x = 6 \Rightarrow x = 1$. El punto de corte es $P(1, 1, 1)$.

Dos vectores directores de π son $\vec{u} = (1, 0, -3)$ y $\vec{v} = (4, 1, -5)$.

Un vector normal del plano es cualquiera que sea linealmente dependientes del producto vectorial de sus vectores directores:

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -12j + k + 3i + 5j \Rightarrow \vec{n} = (3, -7, 1).$$

La recta s pedida tiene como vector director a $\vec{n} = (3, -7, 1)$ y contiene al punto $P(1, 1, 1)$. Su expresión, por ejemplo, dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\boldsymbol{s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-7} = \frac{z-1}{1}}.$$

$b)$ El ángulo dos rectas es el menor de los ángulos que forman sus vectores directores.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_1} = (5, 6, 0)$.

Un vector director de $r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases}$ es cualquiera que sea linealmente dependientes del producto vectorial de los vectores normales de los planos que lo determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (4, 3, 0)$ y $\overrightarrow{n_2} = (0, 1, 4)$.

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12i + 4k - 16j = 12i - 16j + 4k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (3, -4, 1).$$

Sabiendo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \left|\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right| = \left|\frac{(5,6,0)\cdot(0,1,4)}{\sqrt{5^2+6^2}\cdot\sqrt{1^2+4^2}}\right| = \left|\frac{6}{\sqrt{25+36}\cdot\sqrt{1+16}}\right| = \frac{6}{\sqrt{61}\cdot\sqrt{17}} = \frac{6}{\sqrt{1.037}} =$$

$$= \frac{6}{32{,}202} = 0{,}1863 \Rightarrow \alpha = 79° \; 15' \; 43''.$$

$\underline{\boldsymbol{No\ es\ cierto\ que\ el\ \text{á}ngulo\ que\ forman\ r_1\ y\ r_2\ sea\ menor\ de\ 45°.}}$

Problema 4A:

Bloque 4.- Probabilidad.

4A) Tenemos una caja con bolas de madera y de plástico de distintos colores, pero con el mismo tamaño y aspecto. Contamos con la siguiente información: el 38 % son bolas azules y, de este color, la mitad son de madera; el 29 % son bolas rojas y, de este color, las tres cuartas partes son de madera y el 33 % son bolas verdes y, de este color, dos tercios son de madera. Extraemos una bola de la caja. Responde a las siguientes preguntas:

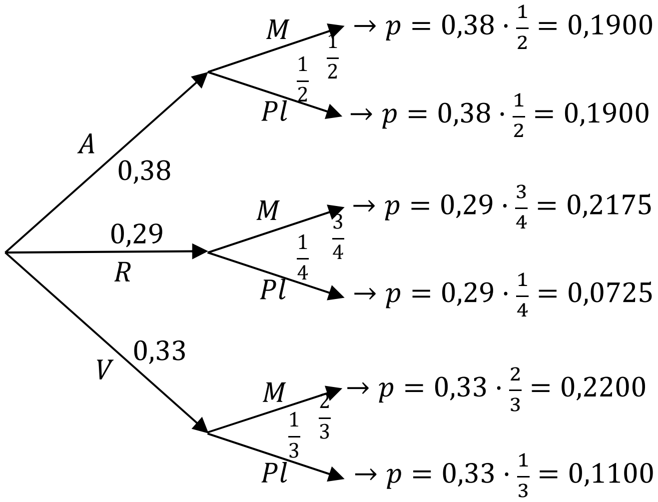
a) Construye el árbol de probabilidades.

b) Calcula la probabilidad de que, al sacar una bola al azar de la caja, esta sea de madera.

c) Si la bola extraída de la caja es de plástico, ¿qué probabilidad hay de que sea de color rojo?

Solución:

a)



b) $P = P(M) = P(A \cap M) + P(R \cap M) + P(V \cap M) =$

$= P(A) \cdot P(M/A) + P(R) \cdot P(M/R) + P(V) \cdot P(M/V) =$

$= 0{,}38 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}29 \cdot \frac{3}{4} + 0{,}33 \cdot \frac{2}{3} = 0{,}1900 + 0{,}2175 + 0{,}2200 = \underline{0{,}6275}.$

c) $P = P(R/Pl) = \frac{P(R \cap Pl)}{P(Pl)} = \frac{P(R) \cdot P(Pl/R)}{1 - P(M)} = \frac{0{,}29 \cdot \frac{1}{4}}{1 - 0{,}6275} = \frac{0{,}0725}{0{,}3725} = \underline{0{,}1946}.$

Problema 4B:

4B) El número de ventas diarias de periódicos en un quiosco se distribuye como una distribución normal de media 30 periódicos y desviación típica $\sqrt{2}$. Determina:

$a)$ La probabilidd de que en un día se vendan entre 28 y 31 periódicos.

$b)$ Justifica si es cierto que la probabilidad de vender más de 32 periódicos es menor que 0,1.

$c)$ El dueño del quiosco considera que su puesto está situado en una buena zona, ya que sabe que hay más de un 80 % de posibilidades de vender más de 29 periódicos diarios. ¿Está en lo cierto? Justifícalo.

Solución:

$Datos\colon\ \mu = 30;\ \ \sigma = \sqrt{2}.$

$X \to N(\mu;\, \sigma) = N\left(30, \sqrt{2}\right).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-30}{\sqrt{2}}.$

$a)\ P = P(28 \le X \le 31) = P\left(\frac{28-30}{\sqrt{2}} \le Z \le \frac{31-30}{\sqrt{2}}\right) = P\left(\frac{-2}{\sqrt{2}} \le Z \le \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

$= P(-1{,}41 \le Z \le 0{,}71) = P(Z \le 0{,}71) - P(Z \le -1{,}41) =$

$= P(Z \le 0{,}71) - [1 - P(Z \le 1{,}41)] = P(Z \le 0{,}71) - 1 + P(Z \le 1{,}41) =$

$= 0{,}7611 - 1 + 0{,}9207 = 1{,}6818 - 1 = \underline{0{,}6818}.$

$$\boldsymbol{P(28 \le X \le 31) = \underline{0,6818}.}$$

$b)\ \ P = P(X > 32) = P\left(Z > \frac{32-30}{\sqrt{2}}\right) = P\left(Z > \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = P(Z > 1{,}41) =$

$= 1 - P(Z \le 1{,}41) = 1 - 0{,}9207 = 0{,}0793 < 0{,}1.$

$$\underline{\boldsymbol{Cierto\colon la\ probabilidad\ es\ menor\ de\ 0,1.}}$$

$c)\ \ P = P(X > 29) = P\left(Z > \frac{29-30}{\sqrt{2}}\right) = P\left(Z > \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = P(Z > -0{,}71) =$

$P(Z \le 0{,}71) = 0{,}7611 < 0{,}8.$

$$\underline{\boldsymbol{No\ est\acute{a}\ en\ lo\ cierto\colon la\ probabilidad\ es\ menor\ del\ 80\ \%.}}$$

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenidos, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque. En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1A:

Bloque 1.- Análisis.

1A) Resuelve los siguientes apartados:

$a)$ Considera la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcular los coeficientes a, b, c y d, sabiendo que f tiene un extremo relativo en el punto $P(0, 1)$ y su gráfica tiene un punto de inflexión $Q(1, -1)$. Dar la expresión de $f(x)$.

Problema 1B:

1B) Considera las funciones $y = 3x - x^2$ e $y = x - 3$.

$a)$ Representa el recinto que encierran las dos funciones anteriores.

$b)$ Calcula el área del recinto limitado por las funciones anteriores.

Problema 2A:

Bloque 2.- Álgebra.

2A) Resuelve los siguientes apartados:

$a)$ Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para $k \in R$ sea C la matriz dada por $C = A^t + k \cdot B \cdot A$. Averigua para qué valores de k, la matriz C tiene rango 2.

$b)$ Encuentra la matriz X, de dimensión 3×3, que verifica que $M^t \cdot X = I - M$, donde $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Problema 2B:

2B) Considera el sistema $\left.\begin{matrix} 2x + 6y + kz = 0 \\ kx + 4y + 2z = 2 \\ kx + 6y + 2z = k - 2 \end{matrix}\right\}$.

$a)$ Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que puede tomar el parámetro k.

$b)$ Resuelve el sistema cuando el parámetro k toma el valor $k = 0$.

Problema 3A:

Bloque 3.- Geometría.

3A) Resuelve los siguientes problemas del espacio tridimensional:

$a)$ Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases}$, estudia la posición relativa de las rectas r y s.

$b)$ Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x-y+z-5=0$.

Problema 3B:

3B) En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de la recta y el plan siguientes: $r \equiv \begin{cases} -3x+2y=5 \\ -4y+3z+7=0 \end{cases}$ y $\pi \equiv 5x-6y+7z+58=0$.

$a)$ Sabiendo que la recta r y el plano π se cortan en un punto A, dar la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π que pasa por dicho punto A.

$b)$ Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π.

Problema 4A:

Bloque 4.- Probabilidad.

4A) El 10 % de la población de Canarias tiene alergia a la flor del olivo. Con esta información, responde a las siguientes preguntas:

$a)$ En una muestra de 100 individuos, ¿qué probabilidad hay de que más de 12 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo?

$b)$ Se toma una muestra de 400 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 32 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo?

$c)$ En una muestra de 500 individuos, ¿cuál es el número esperado de individuos que no tendrán alergia a la flor del olivo?

Problema 4B:

4B) Una prueba, utilizada para determinar la presencia del plomo en una aleación de acero, es errónea en 8 de cada 100 análisis realizados.

$a)$ Se realizan 10 análisis con esta prueba, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de estos análisis sean erróneos?

$b)$ Comprueba si es cierta la siguiente afirmación: “En 10 análisis realizados con esta prueba, hay menos de un 5 % de posibilidades de encontrar más de dos análisis erróneos?

$c)$ Se realizan 100 análisis con esta prueba, ¿cuál es el número esperado de análisis correctos?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1A:

Bloque 1.- Análisis.

1A) Resuelve los siguientes apartados:

a) Considera la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcular los coeficientes a, b, c y d, sabiendo que f tiene un extremo relativo en el punto $P(0,1)$ y su gráfica tiene un punto de inflexión $Q(1,-1)$. Dar la expresión de $f(x)$.

b) Resuelve el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

Solución:

a) Por contener al punto $P(0,1)$: $f(0) = 1 \Rightarrow \underline{d = 1}$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. $\quad f''(x) = 6ax + 2b$.

Por tener un extremo relativo en $P(0,1)$: $f'(0) = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

La función resulta: $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$.

Por contener al punto $Q(1,-1)$: $f(1) = -1$:

$f(1) = -1 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 1 = -1;\ \ a + b = -2.$ (1)

Por tener un punto de inflexión en $Q(1,-1) \Rightarrow f''(1) = 0$;

$f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0;\ \ 3a + b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + b = -2 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -a - b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a = 2;\ \underline{a = 1}.\ \ 1 + b = -2 \Rightarrow \underline{b = -3}.$$

$$\underline{\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2 + 1.}}$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} = \frac{e^0+e^{-0}-2}{1-\cos 0} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{sen\,x} = \frac{e^0-e^{-0}}{sen\,0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = \frac{e^0+e^{-0}}{\cos 0} = = \frac{1+1}{1} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} = 2.}}$$

Problema 1B:

1B) Considera las funciones $y = 3x - x^2$ e $y = x - 3$.

$a)$ Representa el recinto que encierran las dos funciones anteriores.

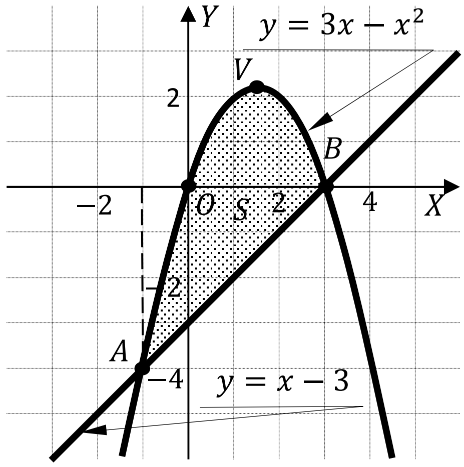
$b)$ Calcula el área del recinto limitado por las funciones anteriores.

Solución:

$a)$ Los puntos de corte de la parábola y la recta son los que tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$3x - x^2 = x - 3;\ \ x^2 - 2x - 3 = 0;\ \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \Rightarrow A(-1, -4) \\ x_2 = 3 \Rightarrow B(3, 0) \end{cases}.$$



La función $y = 3x - x^2$ es una parábola cóncava $(\cap)$ cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{18-9}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow V\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right).$$

La representación gráfica de la situación se refleja, de forma aproximada, en la figura adjunta.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{3} [(3x - x^2) - (x - 3)] \cdot dx = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{3} = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \cdot 3\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3 \cdot (-1)\right] = -9 + 9 + 9 - \frac{1}{3} - 1 + 3 = 11 - \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{32}{3}\, u^2 \cong 10,67\ u^2.}}$$

Problema 2A:

Bloque 2.- Álgebra.

2A) Resuelve los siguientes apartados:

$a)$ Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para $k \in R$ sea C la matriz dada por $C = A^t + k \cdot B \cdot A$. Averigua para qué valores de k, la matriz C tiene rango 2.

$b)$ Encuentra la matriz X, de dimensión 3×3, que verifica que $M^t \cdot X = I - M$, donde $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

$a)$ $$C = A^t + k \cdot B \cdot A = A^t + k \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^t + k \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1-k & 0 \\ 1 & 1+k \end{pmatrix}.$$

La matriz C tendrá rango 2 cuando su determinante sea distinto de cero:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1-k & 0 \\ 1 & 1+k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-k)(1+k) = 1 - k^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ C\ tiene\ rango\ 2\ \forall k \in R - \{-1, 1\}.}}$$

$b)$ $M^t \cdot X = I - M;\ \ (M^t)^{-1} \cdot M^t \cdot X = (M^t)^{-1} \cdot (I - M);$

$I \cdot X = (M^t)^{-1} \cdot (I - M) \Rightarrow \underline{X = (M^t)^{-1} \cdot (I - M)}.$

$M^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se obtiene la inversa de M^t por Gauss-Jordan.

$$(M^t|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ F_3 \rightarrow -F_3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \rightarrow F_1 + F_2 - F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X = (M^t)^{-1} \cdot (I - M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.}}$$

Problema 2B:

2B) Considera el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+6y+kz=0 \\ kx+4y+2z=2 \\ kx+6y+2z=k-2 \end{array}\right\}.$

$a)$ Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que puede tomar el parámetro k.

$b)$ Resuelve el sistema cuando el parámetro k toma el valor $k=0$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & k \\ k & 4 & 2 \\ k & 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 2 & 6 & k & 0 \\ k & 4 & 2 & 2 \\ k & 6 & 2 & k-2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 6 & k \\ k & 4 & 2 \\ k & 6 & 2 \end{vmatrix}=16+6k^2+12k-4k^2-24-12k=2k^2-8=$$

$=2(k^2-4)=0;\ \ k^2-4=0 \Rightarrow k_1=-2, k_2=2.$

$$\boldsymbol{Para \left\{\begin{array}{c} k\neq -2 \\ k\neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ k=-2 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=-C_3\} \Rightarrow\ Rang\ A' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -32-24-24-48 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A'=3.$$

$$\boldsymbol{Para\ k=-2 \Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ k=2 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow\ Rang\ A'=2$$

$$\boldsymbol{Para\ k=2 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$ Para $k=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+6y=0 \\ 4y+2z=2 \\ 6y+2z=-2 \end{array}\right\}$, equivalente al sistema: $\left.\begin{array}{r} x+3y=0 \\ 2y+z=1 \\ 3y+z=-1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-3-3}{2-3}=\frac{-6}{-1}=6. \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{1+1}{-1}=-2. \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-2-3}{-1}=\frac{-5}{-1}=5.$$

$$\boldsymbol{Solución: x=6, \quad y=-2, \quad z=5}$$

Problema 3A:

Bloque 3.- Geometría.

3A) Resuelve los siguientes problemas del espacio tridimensional:

a) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z-2=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1-3\lambda \end{cases}$, estudia la posición relativa de las rectas r y s.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x-y+z-5=0$.

Solución:

a) La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x-y+3z=2 \end{cases} \Rightarrow y=\mu \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=-1-\mu \\ 2x+3z=2+\mu \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x-2z=2+2\mu \\ 2x+3z=2+\mu \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=4+3\mu;\ \ x=-1-\mu-4-3\mu=-5-4\mu \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-5-4\mu \\ y=\mu \\ z=4+3\mu \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(-5,0,4)$ y $\overrightarrow{v_r}=(-4,1,3)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(-1,1,-1)$ y $\overrightarrow{v_s}=(2,1,-3)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(-1,1,-1)-(-5,0,4)]=(4,1,-5)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el valor del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 20+6-12-12-12+10=$$

$$=36-36=0 \Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{w}\}=2 \Rightarrow\ \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{w}\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan.}}$$

b) Un vector normal del plano $\pi \equiv 2x-y+z-5=0$ es $\overrightarrow{n}=(2,-1,1)$.

La expresión general del plano β pedido es la siguiente:

$$\beta(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x+5 & y & z-4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x+5)+6y+4(z-4)-2(z-4)+3(x+4)+4y=0;$$

$4(x+5)+10y+2(z-4)=0;\ \ 2(x+5)+5y+(z-4)=0;$

$$2x+10+5y+z-4=0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\beta \equiv 2x+5y+z+6=0}}.$$

Problema 3B:

3B) En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de la recta y el plan siguientes: $r \equiv \begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ -4y + 3z + 7 = 0 \end{cases}$ y $\pi \equiv 5x - 6y + 7z + 58 = 0$.

$a)$ Sabiendo que la recta r y el plano π se cortan en un punto A, dar la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π que pasa por dicho punto A.

$b)$ Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π.

Solución:

$a)$ Se determinan un punto y un vector director de la recta r, para lo cual, se expresa por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ -4y + 3z = -7 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow 3x = -5 + 2\lambda;\ \ x = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\lambda;\ \ 3z = -7 + 4\lambda;$$

$$z = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P(-1, -1, -1);\ \ \overrightarrow{v_r} = (2, 3, 4).$$

El punto A de intersección de la recta r y el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 5x - 6y + 7z = -58 \\ r \equiv \begin{cases} x = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 5 \cdot \left(-\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\lambda\right) - 6\lambda + 7 \cdot \left(-\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\lambda\right) = -58;$$

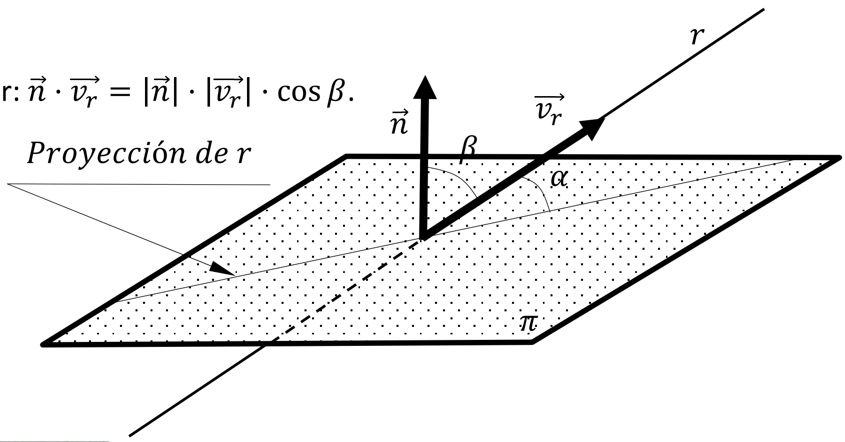
$$-\frac{25}{3} + \frac{10}{3}\lambda - 6\lambda - \frac{49}{3} + \frac{28}{3}\lambda = -58;\ \ -\frac{74}{3} + \frac{38-18}{3}\lambda = -58;\ -74 + 20\lambda = -174;$$

$$20\lambda = -100;\ \ \lambda = -5 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{5}{3} - \frac{10}{3} = -5 \\ y = -5 \\ z = -\frac{7}{3} - \frac{20}{3} = -9 \end{array}\right\} \Rightarrow A(-5, -5, -9).$$

Un vector normal del plano $\pi \equiv 5x - 6y + 7z = -58$ es $\vec{n} = (5, -6, 7)$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es: $\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x = -5 + 5\mu \\ y = -5 - 6\mu \\ z = -9 + 7\mu \end{cases}}$**.**

$b)$ Por definición de producto escalar: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \cos\beta$.



$\cos\beta = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{v_r}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v_r}|}$. Por ser α y β complementarios: $sen\ \alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{v_r}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v_r}|}$.

$$sen\ \alpha = \frac{|(5,-6,7)\cdot(2,3,4)|}{\sqrt{5^2+(-6)^2+7^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{|10-18+28|}{\sqrt{25+36+49}\cdot\sqrt{4+9+16}} = \frac{20}{\sqrt{110}\cdot\sqrt{29}} = \frac{20}{\sqrt{3.190}} =$$

$= 0{,}3541 \Rightarrow \alpha = arc\ sen\ 0{,}3541 \Rightarrow \underline{\alpha = 20°\ \ 44'\ 19''}$.

$$\boldsymbol{\alpha = arc\ sen\ 0,3541\ \underline{= 20°\ \ 44'\ 19''}}$$

Problema 4A:

Bloque 4.- Probabilidad.

4A) El 10 % de la población de Canarias tiene alergia a la flor del olivo. Con esta información, responde a las siguientes preguntas:

a) En una muestra de 100 individuos, ¿qué probabilidad hay de que más de 12 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo?

b) Se toma una muestra de 400 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 32 seleccionados tengan alergia a la flor del olivo?

c) En una muestra de 500 individuos, ¿cuál es el número esperado de individuos que no tendrán alergia a la flor del olivo?

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 100; \; p = 0{,}1; \; q = 0{,}9.$

Por ser $\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10 > 5 \\ n \cdot q = 100 \cdot 0{,}9 = 90 > 5 \end{array}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{9} = 3.$

$X = B(100; \; 0{,}1) \approx N(10, 3).$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-10}{3}$. Aplicando la corrección de Yates:

$P = P(X > 12) = P\left(Z > \frac{12{,}5-10}{3}\right) = P\left(Z > \frac{2{,}5}{3}\right) = P(Z > 0{,}83) =$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}83) = 1 - 0{,}7967 = \underline{0{,}2033}.$

$$\boldsymbol{P(X > 12) = \underline{0,2033}}$$

b) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 400; \; p = 0{,}1; \; q = 0{,}9.$

Por ser $\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 400 \cdot 0{,}1 = 40 > 5 \\ n \cdot q = 400 \cdot 0{,}9 = 360 > 5 \end{array}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$\mu = n \cdot p = 400 \cdot 0{,}1 = 40.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{400 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{36} = 6.$

$X = B(400; \; 0{,}1) \approx N(40, 6).$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-40}{6}$. Aplicando la corrección de Yates:

$P = P(X < 32) = P\left(Z < \frac{31{,}5-40}{6}\right) = P\left(Z < \frac{-8{,}5}{6}\right) = P(Z < -1{,}42) =$

$= P(Z > 1{,}42) = 1 - P(Z \leq 1{,}42) = 1 - 0{,}9222 = \underline{0{,}0778}.$

$$\boldsymbol{P(X < 32) = \underline{0,0778}}$$

$c)$ $n = N \cdot q = 500 \cdot 0{,}9 = 450.$

$$\underline{\boldsymbol{Se\ espera\ que\ 450\ individuos\ no\ sean\ alérgicos\ a\ la\ flor\ del\ olivo}}.$$

Problema 4B:

4B) Una prueba, utilizada para determinar la presencia del plomo en una aleación de acero, es errónea en 8 de cada 100 análisis realizados.

a) Se realizan 10 análisis con esta prueba, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de estos análisis sean erróneos?

b) Comprueba si es cierta la siguiente afirmación: "En 10 análisis realizados con esta prueba, hay menos de un 5 % de posibilidades de encontrar más de dos análisis erróneos?

c) Se realizan 100 análisis con esta prueba, ¿cuál es el número esperado de análisis correctos?

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 10;\ \ p = 0{,}08;\ \ q = 1 - 0{,}08 = 0{,}92. \qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$$

$$P = P(3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}08^3 \cdot 0{,}92^7 = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} \cdot 0{,}000512 \cdot 0{,}557847 =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0{,}000286 = 120 \cdot 0{,}000286 = \underline{0{,}0343}.$$

$$\boldsymbol{P(3) = \underline{0{,}0343}.}$$

b) La probabilidad pedida es igual a la unidad menos la probabilidad de que no haya ninguno, haya uno o haya dos análisis erróneos:

$$P = 1 - [P(0) + P(1) + P(2)] =$$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0{,}08^0 \cdot 0{,}92^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}08^1 \cdot 0{,}92^9 + \binom{10}{2} \cdot 0{,}08^2 \cdot 0{,}92^8\right] =$$

$$= 1 - \left(1 \cdot 1 \cdot 0{,}4344 + 10 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}4722 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2} \cdot 0{,}0064 \cdot 0{,}5132\right) =$$

$$= 1 - (0{,}4344 + 0{,}3778 + 45 \cdot 0{,}0033) = 1 - (0{,}8122 + 0{,}1478) =$$

$= 1 - 0{,}9600 = 0{,}0400 < 0{,}05$, por lo cual, en efecto:

$$\underline{\boldsymbol{La\ probabilidad\ de\ que\ de\ 10\ haya\ más\ de\ 2\ erróneos\ es\ menor\ del\ 5\ \%.}}$$

c) $n = N \cdot q = 100 \cdot 0{,}92 = 92.$

$$\underline{\boldsymbol{Se\ espera\ que\ 92\ sean\ correctos}}.$$