MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Indicaciones:

Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen. Si realiza más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden en que aparecen resueltos en el cuadernillo del examen. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1º) Considere el sistema $\begin{cases} tx + y - 2z = 0 \\ x + y - tz = -1 \\ x + y + z = t \end{cases}$ en función del parámetro t.

a) Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única. Resuélvalo para $t = 0$ si es posible.

b) Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Problema 2:

2º) Una imprenta debe diseñar un cartel con 90 cm^2 de área para texto y además, con margen superior de 3 cm, inferior de 2 cm y márgenes laterales de 4 cm cada uno.

a) Realice un dibujo planteando el problema.

b) Calcule las dimensiones (anchura y altura) que debe tener el cartel de manera que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Problema 3:

3º) Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. Considere el triángulo de vértice $A(-1, 2, 3), B(3, -4, 1)$ y $C(1, -4, 5)$.

a) Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC.

b) Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Problema 4:

4º) En un almacén, el peso de los contenedores sigue una distribución normal con media 100 kg y desviación típica 10 kg. Cada contenedor se carga individualmente en un montacargas, que tiene una capacidad de 120 kg. Si el peso del contenedor supera dicha capacidad, salta una alarma. Se coloca en el montacargas un contenedor escogido al azar:

a) Calcule la probabilidad de que salte la alarma.

b) Calcule cuál debería ser la capacidad del montacargas para que la alarma salte solo en un 1 % de las veces que cargamos un contenedor al azar.

Problema 5:

5º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$a)$ Compruebe que las matrices A y B son regulares.

$b)$ Calcule las matrices inversas de A y B.

$c)$ Despeje X en la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$, en donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

$d)$ Calcule X.

Problema 6:

6º) Considere la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

$a)$ Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

$b)$ Calcule la primera derivada de $f(x)$.

$c)$ Determine los extremos relativos de $f(x)$.

$d)$ Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Problema 7:

7º) Los puntos $A(2, 0, 0)$ y $B(-1, 12, 4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$.

$a)$ Calcule las coordenadas del tercer vértice C, sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y C.

$b)$ Determine el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$c)$ Calcule el área del triángulo ABC.

Problema 8:

8º) En una urna hay 4 bolas, una de ellas es blanca y las otras tres negras. Sacamos una bola al azar y sin devolverla a la urna sacamos una segunda bola también al azar.

$a)$ Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color.

$b)$ Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

$c)$ Calcule la probabilidad de sacar una bola negra en la segunda extracción, si sabemos que la primera bola fue negra.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Considere el sistema $\begin{cases} tx+y-2z=0 \\ x+y-tz=-1 \\ x+y+z=t \end{cases}$ en función del parámetro t.

$a)$ Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única. Resuélvalo para $t=0$ si es posible.

$b)$ Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

$c)$ Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} t & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} t & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -t & -1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro t es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} t & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -t \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=t-2-t+2+t^2-1=t^2-1=0 \Rightarrow t_1=-1, t_2=1.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} t\neq -1 \\ t\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}}$$

Para $t=0$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} y-2z=0 \\ x+y=-1 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{0^2-1}=\frac{2+1}{-1}=\frac{3}{-1}=-3. \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-2}{-1}=2.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-1}{-1}=1.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x=-3,\ \ y=2,\ \ z=1.}}$$

$$b)\ Para\ t=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=F_3\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ t=-1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}}$$

Para $t=-1$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} -x+y-2z=0 \\ x+y+z=-1 \\ x+y+z=-1 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} -x+y-2z=0 \\ x+y+z=-1 \end{array}\right\}$. Haciendo $z=\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} -x+y=2\lambda \\ x+y=-1-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=-1+\lambda;\;\; y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda.$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y=-2\lambda \\ x+y=-1-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=-1-3\lambda;\;\; x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\lambda.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución}: \boldsymbol{x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\lambda,\;\; y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda,\;\; z=\lambda, \forall\lambda \in R.}}$$

$$c)\; Para\; t=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\; M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+2+1+2=4 \neq 0 \Rightarrow Rang\; M'=3.$$

$$\underline{Para\; t=1 \Rightarrow Rang\; M=2;\; Rang\; M'=3 \Rightarrow Sistema\; incompatible.}$$

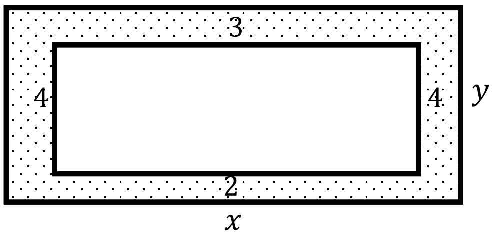
Problema 2:

2º) Una imprenta debe diseñar un cartel con 90 cm^2 de área para texto y además, con margen superior de 3 cm, inferior de 2 cm y márgenes laterales de 4 cm cada uno.

a) Realice un dibujo planteando el problema.

b) Calcule las dimensiones (anchura y altura) que debe tener el cartel de manera que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Solución:



a) La superficie del cartel es $S = x \cdot y$, que tiene que ser mínima para lo cual su derivada tiene que ser cero.

Para poder derivar hemos de expresar una variable en función de la otra, para lo cual tendremos en cuenta que la superficie a imprimir, que es la central, tiene que ser de 90 cm^2.

De la observación de la figura se deduce que:

$(x-8)(y-5) = 90;\;\; xy - 5x - 8y + 40 = 90;\;\; xy - 5x - 8y = 50;$

$xy - 8y = 50 + 5x;\;\; y(x-8) = 50 + 5x \Rightarrow y = \frac{50+5x}{x-8}.$

Sustituyendo el valor de y en la expresión de la superficie:

$S(x,y) = x \cdot y \Rightarrow$

$$\boldsymbol{S(x) = x \cdot \frac{50+5x}{x-8} = \frac{5x^2+50x}{x-8}.}$$

b) $S'(x) = \frac{(10x+50)\cdot(x-8)-(5x^2+50x)\cdot 1}{(x-8)^2} = \frac{10x^2-80x+50x-400-5x^2-50x}{(x-8)^2} = \frac{5x^2-80x-400}{(x-8)^2}.$

$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5x^2-80x-400}{(x-8)^2} = 0;\; 5x^2 - 80x - 400 = 0;\; x^2 - 16x - 80 = 0;$

$x = \frac{16\pm\sqrt{256+320}}{2} = \frac{16\pm\sqrt{576}}{2} = \frac{16\pm 24}{2} = 8 \pm 12 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 20 \end{cases}.$

La raíz negativa carece de sentido, por lo cual: $x = 20$.

$y = \frac{50+5x}{x-8} = \frac{50+5\cdot 20}{20-8} = \frac{50+100}{12} = \frac{150}{12} = 12{,}5.$

La tarjeta de mínimo papel tiene 20 cm de base y 12,5 cm de altura.

Problema 3:

3º) Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. Considere el triángulo de vértice $A(-1,2,3), B(3,-4,1)\ y\ C(1,-4,5)$.

$a)$ Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC.

$b)$ Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Solución:

$a)$ Los puntos medios de los lados del triángulo son los siguientes:

$$M_{AB} \Rightarrow \left\{x = \frac{-1+3}{2} = 1;\ y = \frac{2-4}{2} = -1;\ z = \frac{3+1}{2} = 2\right\} \Rightarrow M_{AB}(1,-1,2).$$

$$M_{AC} \Rightarrow \left\{x = \frac{-1+1}{2} = 0;\ y = \frac{2-4}{2} = -1;\ z = \frac{3+5}{2} = 4\right\} \Rightarrow M_{AC}(0,-1,4).$$

$$M_{BC} \Rightarrow \left\{x = \frac{3+1}{2} = 2;\ y = \frac{-4-4}{2} = -4;\ z = \frac{1+5}{2} = 3\right\} \Rightarrow M_{BC}(2,-4,3).$$

Las rectas medianas son las siguientes:

$$\overrightarrow{M_{AB}C} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM_{AB}} = [(1,-4,5) - (1,-1,2)] = (0,-3,3).$$

$$\boldsymbol{r_{M_{AB}C} \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-5}{1}}.$$

$$\overrightarrow{M_{AC}B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM_{AC}} = [(3,-4,1) - (0,-1,4)] = (3,-3,-3).$$

$$\boldsymbol{r_{M_{AC}B} \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-1}{-1}}.$$

$$\overrightarrow{M_{BC}A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM_{BC}} = [(-1,2,3) - (2,-4,3)] = (-3,6,0).$$

$$\boldsymbol{r_{M_{BC}A} \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{0}}.$$

$b)$ El punto de corte de las medianas de un triángulo, G, se llama baricentro o centro de gravedad.

El punto de corte de $r_{M_{AB}C}$ y $r_{M_{AC}B}$ es el siguiente:

$$r_{M_{AB}C} \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-5}{1} \Rightarrow \begin{cases} -x+1=0 \\ y+4=-z+5 \end{cases} \Rightarrow r_{M_{AB}C} \equiv \begin{cases} x=1 \\ y+z=1 \end{cases}.$$

$$r_{M_{AC}B} \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} -x+3=y+4 \\ -x+3=z-1 \end{cases} \Rightarrow r_{M_{AC}B} \equiv \begin{cases} x+y=-1 \\ x+z=4 \end{cases}.$$

Las rectas $r_{M_{AB}C}$ y $r_{M_{AC}B}$ determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x=1 \\ y+z=1 \\ x+y=-1 \\ x+z=4 \end{array}\right\}$, cuya solución es la siguiente: $G(1,-2,3)$.

Se comprueba que el punto de corte de las medianas $r_{M_{AB}C}$ y $r_{M_{BC}A}$ es el mismo.

$$r_{M_{BC}A} \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{0} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2=-y+2 \\ -z+3=0 \end{cases} \Rightarrow r_{M_{BC}A} \equiv \begin{cases} 2x+y=0 \\ z=3 \end{cases}.$$

Las rectas $r_{M_{AB}C}$ y $r_{M_{BC}A}$ determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x=1 \\ y+z=1 \\ 2x+y=0 \\ z=3 \end{array}\right\}$, cuya solución es, como se esperaba, la misma: $G(1,-2,3)$.

$\underline{\boldsymbol{El\ centro\ de\ gravedad\ del\ triangulo\ ABC\ es\ G(1,-2,3).}}$

Problema 4:

4º) En un almacén, el peso de los contenedores sigue una distribución normal con media 100 kg y desviación típica 10 kg. Cada contenedor se carga individualmente en un montacargas, que tiene una capacidad de 120 kg. Si el peso del contenedor supera dicha capacidad, salta una alarma. Se coloca en el montacargas un contenedor escogido al azar:

a) Calcule la probabilidad de que salte la alarma.

b) Calcule cuál debería ser la capacidad del montacargas para que la alarma salte solo en un 1 % de las veces que cargamos un contenedor al azar.

Solución:

$Datos\colon\ \mu = 100;\ \ \sigma = 10.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(100, 10).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-100}{10}$.

a)

$$P = P(X > 120) = P\left(Z > \frac{120-100}{10}\right) = P\left(Z > \frac{20}{10}\right) = P(Z > 2) =$$

$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228.$

$\underline{\boldsymbol{La\ probabilidad\ de\ que\ salte\ la\ alarma\ es\ del\ 2,28\ \%}}.$

b) $P(X \geq \beta) = 0{,}01 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{\beta-100}{10}\right) = 0{,}01;\ \ 1 - P\left(Z \leq \frac{\beta-100}{10}\right) = 0{,}01;$

$P\left(Z \leq \frac{\beta-100}{10}\right) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 \Rightarrow$ Mirando en la tabla $N(0{,}1)$ de forma inversa, al valor 0,99 le corresponde 2,33.

$\frac{\beta-100}{10} = 2{,}33;\ \ \beta - 100 = 23{,}3;\ \ \beta = 123{,}3.$

$\underline{\boldsymbol{Salta\ la\ alarma\ 1\ \%\ de\ las\ veces\ con\ capacidad\ del\ montacarga\ de\ 123,3\ kg}}.$

Problema 5:

5º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$a)$ Compruebe que las matrices A y B son regulares.

$b)$ Calcule las matrices inversas de A y B.

$c)$ Despeje X en la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$, en donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

$d)$ Calcule X.

Solución:

$a)$

Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \neq 0.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0.$$

$$\underline{Queda\ comprobada\ que\ las\ matrices\ A\ y\ B\ son\ regulares}.$$

$b)$

$$|A| = -1;\ \ A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}.$$

$$|B| = 1;\ \ B^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \frac{Adj.de\ B^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow \underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$AXB = A^t - 3B; \;\; A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (A^t - 3B) \cdot B^{-1};$$

$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot (A^t - 3B) \cdot B^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (A^t - 3B) \cdot B^{-1}}.$

$d)$

$$A^t - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A^t - 3B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$

Sustituyendo el valor obtenido en la expresión de X:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}}.$

****

Problema 6:

6º) Considere la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

$a)$ Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. $b)$ Calcule la primera derivada de $f(x)$.

$c)$ Determine los extremos relativos de $f(x)$.

$d)$ Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

$a)$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 \cdot e^{-x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} \Rightarrow \underline{\lim_{x \to +\infty} (x^2 \cdot e^{-x}) = 0}.$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 \cdot e^{-x}) = (-\infty)^2 \cdot e^{-(-\infty)} = \infty \cdot e^{\infty} = \underline{+\infty}.$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} f(x) = \underline{+\infty}.}$$

$b)$ $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-1) \cdot e^{-x} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x).}}$$

$c)$ Para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 1 \cdot e^{-x} \cdot (2 - x) + x \cdot (-1) \cdot e^{-x} \cdot (2 - x) + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) =$$

$= 2 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} =$

$= 2 \cdot e^{-x} - 4x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \Rightarrow f''(x) = e^{-x} \cdot (x^2 - 4x + 2).$

$f''(0) = e^{-0} \cdot (0^2 - 4 \cdot 0 + 2) = 1 \cdot 2 = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 0.$

$f(0) = 0 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{Mínimo: O(0, 0).}}$$

$f''(2) = e^{-2} \cdot (2^2 - 4 \cdot 2 + 2) = -\frac{2}{e^2} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 2.$

$f(2) = 2^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{Máximo}: \boldsymbol{A}\left(\mathbf{2}, \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}}}\right) \cong (\mathbf{2}; \mathbf{0}, \mathbf{54}).}$$

$d)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = x \cdot e^{-x} \cdot (2 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$

Teniendo en cuenta que $y = f(x)$ es continua en su dominio, que es R, las raíces de su primera derivada dividen al dominio en los intervalo $(-\infty, 0), (0, 2)$ y $(2, +\infty)$, en los cuales la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 2)$ es:

$f'(1) = 1 \cdot e^{-1} \cdot (2 - 1) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow Creciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) < \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in (-\infty, \mathbf{0}) \cup (\mathbf{2}, +\infty).}$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) > \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} \in (\mathbf{0}, \mathbf{2}).}$$

Problema 7:

7º) Los puntos $A(2,0,0)$ y $B(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$.

$a)$ Calcule las coordenadas del tercer vértice C, sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y C.

$b)$ Determine el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$c)$ Calcule el área del triángulo ABC.

Solución:

$a)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 4\lambda; \ \ x = \frac{33}{4} - 3\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{33}{4} - 3\lambda \\ y = 0 \\ z = 4\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $P\left(\frac{33}{4} - 3\lambda, 0, 4\lambda\right)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-3, 0, 4)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \left[\left(\frac{33}{4} - 3\lambda, 0, 4\lambda\right) - (2,0,0)\right] = \left(\frac{25}{4} - 3\lambda, 0, 4\lambda\right)$.

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow \left(\frac{25}{4} - 3\lambda, 0, 4\lambda\right) \cdot (-3, 0, 4) = 0; \ -\frac{75}{4} + 9\lambda + 16\lambda = 0;$

$$25\lambda = \frac{75}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{33}{4} - 3 \cdot \frac{3}{4} = 6 \\ y = 0 \\ z = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\underline{\boldsymbol{C(6,0,3)}}$**.**

$b)$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-1,12,4) - (2,0,0)] = (-3,12,4)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(6,0,3) - (2,0,0)] = (4,0,3)$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-3,12,4)\cdot(4,0,3)}{\sqrt{(-3)^2+12^2+4^2} \cdot \sqrt{4^2+3^2}} =$$

$$= \frac{-12+12}{\sqrt{9+144+16} \cdot \sqrt{16+9}} = \frac{0}{\sqrt{169} \cdot \sqrt{25}} = 0 \Rightarrow$$

$\underline{\boldsymbol{\alpha = 90°}}$**.**

$c)$ Los puntos $A(2,0,0), B(-1,12,4), C(6,0,3)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = (-3,12,4)$ y $\overrightarrow{AC} = (4,0,3)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -3 & 12 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |36i + 16j - 48k + 9j| =$$

$$= \frac{1}{2}|36i + 25j - 48k| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36^2 + 25^2 + (-48)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1.296 + 625 + 2.304} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4.225} = \frac{65}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 32,5\ u^2}}.$$

Problema 8:

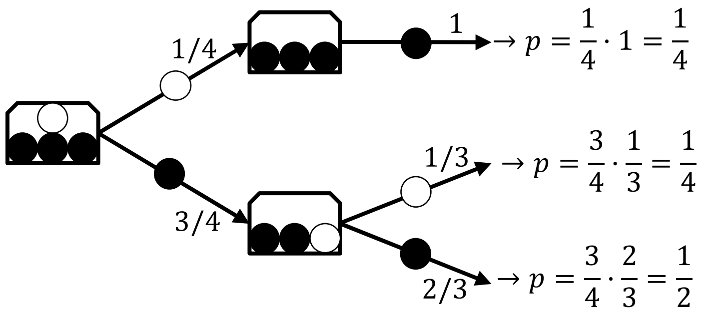
8º) En una urna hay 4 bolas, una de ellas es blanca y las otras tres negras. Sacamos una bola al azar y sin devolverla a la urna sacamos una segunda bola también al azar.

a) Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color.

b) Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.

c) Calcule la probabilidad de sacar una bola negra en la segunda extracción, si sabemos que la primera bola fue negra.

Solución:



a) $P = P(B) \cdot P(N) + P(N) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}50$.

b) Necesariamente la segunda bola tiene que ser negra:

$P = P(B) \cdot P(N) + P(N) \cdot P(N) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

c) $P = P(N/N) = \frac{P(N \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} = 0{,}67$.

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Indicaciones:
Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen. Si realiza más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden en que aparecen resueltos en el cuadernillo del examen. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Considere el sistema $\begin{cases} tx + y + z = 4 \\ x - ty + z = 1 \\ x + y + z = t + 2 \end{cases}$ en función del parámetro t.

$a)$ Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única.

$b)$ Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

$c)$ Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Problema 2:

2º) Considere la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

$a)$ Calcule la derivada primera de $f(x)$.

$b)$ Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

$c)$ Calcule las asíntotas verticales de $f(x)$.

$d)$ Calcule las asíntotas horizontales de $f(x)$.

Problema 3:

3º) Los puntos $A(0, -1, 1)$ y $B(1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano de ecuación $\pi \equiv 2x - y + z = 1$.

$a)$ Calcule la ecuación de la recta r.

$b)$ Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Problema 4:

4º) El tiempo de vuelo de un avión Santander – Madrid sigue una distribución normal de media 60 minutos y desviación típica 5 minutos.

$a)$ Para conectar con el siguiente vuelo con destino a Sevilla, se necesita que el avión tarde menos de $t = 70$ minutos. Calcule la probabilidad de perder el avión a Sevilla.

$b)$ Calcule el valor de t para que la probabilidad de perder el avión sea del 0,1 %.

Problema 5:

5º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule A^2 y compruebe que es regular.

$b)$ Calcule la matriz inversa de A^2.

$c)$ Despeje X en la ecuación matricial $A^2X + B = C$.

$d)$ Calcule la matriz X de orden 2×2, que verifica $A^2X + B = C$.

Problema 6:

6º) Considere la función $f(x) = \frac{3}{x}$.

$a)$ Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

$b)$ Halle una primitiva de $f(x)$.

$c)$ Calcule el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$, $x = e$.

Problema 7:

7º) Considere la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y - z = -1$.

$a)$ Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

$b)$ Si r corta a π calcule el punto de corte y el ángulo que forman. Si la recta no corta al plano, calcule la distancia entre ellos.

Problema 8:

8º) El 90 % de las personas de una población están vacunadas contra la enfermedad E. El 5 % de las personas no vacunadas tienen la enfermedad E, y el 1 % de las personas vacunadas también han contraído la enfermedad. Se selecciona una persona al azar de dicha población:

$a)$ Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma.

$b)$ Calcule la probabilidad de que esté vacunada sabiendo que está enferma.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) Considere el sistema $\begin{cases} tx+y+z=4 \\ x-ty+z=1 \\ x+y+z=t+2 \end{cases}$ en función del parámetro t.

$a)$ Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única.

$b)$ Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

$c)$ Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t+2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-t^2+1+1+t-t-1=0;\ -t^2+1=0;\ \ t^2=1\Rightarrow$$

$\Rightarrow t_1=-1, t_2=1.$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ \begin{cases} t\neq -1 \\ t\neq 1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{o}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}}$$

$$\boldsymbol{(Solución\ única)}$$

$b)$ $Para\ t=-1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \{C_2=C_3\}\Rightarrow\ Rang\ M'\Rightarrow$

$$\Rightarrow \{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1+4+1-4+1-1=0\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ t=-1\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{o}\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}}$$

El sistema resulta $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se hace $y=\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} -x+z=4-\lambda \\ x+z=1-\lambda \end{array}\right\}\Rightarrow 2z=5-2\lambda;\ \ z=\tfrac{5}{2}-\lambda. \qquad x=1-\lambda-\tfrac{5}{2}+\Rightarrow x=-\tfrac{3}{2}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x=-\frac{3}{2}, y=\lambda, z=\frac{5}{2}-\lambda, \forall\lambda\in R.}}$$

$c)\qquad Para\ t=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_3\} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow$

$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix} = -3+4+1+4-1-3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$\underline{\boldsymbol{Para\ t=1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$

Problema 2:

2º) Considere la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

a) Calcule la derivada primera de $f(x)$.

b) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

c) Calcule las asíntotas verticales de $f(x)$.

d) Calcule las asíntotas horizontales de $f(x)$.

Solución:

a) $f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{f'(x) = \frac{e^x \cdot (x-1)}{x^2}}}.$$

b) La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en el punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$f'(2) = \frac{e^2 \cdot (2-1)}{2^2} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{m = \frac{e^2}{4}}}.$$

c) Las asíntotas verticales de una función racional son los valores finitos de x que anulan el denominador sin anular el numerador:

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ y = 0\ (eje\ de\ ordenadas)\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función.}}$$

d) Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{e^\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} =$$

$$= e^\infty = \infty \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales\ cuando\ x \to +\infty}}.$$

$$k = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = -\frac{1}{\infty \cdot e^\infty} = -\frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{La\ recta\ y = 0\ (eje\ de\ abscisas)\ es\ asíntota\ horizontal\ para\ x \to -\infty}}.$$

Problema 3:

3º) Los puntos $A(0,-1,1)$ y $B(1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano de ecuación $\pi \equiv 2x - y + z = 1$.

$a)$ Calcule la ecuación de la recta r.

$b)$ Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Solución:

$a)$ Un vector normal del plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$ es $\vec{n} = (2,-1,1)$.

Un vector director de la recta r pedida es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector normal del plano, por lo cual: $\overrightarrow{v_r} = (2,-1,1)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}}$.

$b)$ Un punto genérico de r es $C(1+2\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda)$.

Los puntos $A(0,-1,1), B(1,1,1)$ y $C(1+2\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda)$ determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1,1,1) - (0,-1,1)] = (1,2,0)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(1+2\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda) - (0,-1,1)] = (1+2\lambda, 2-\lambda, \lambda)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1+2\lambda & 2-\lambda & \lambda \end{matrix} \right\| = 3\sqrt{30};$$

$$\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1+2\lambda & 2-\lambda & \lambda \end{matrix} \right\| = 6\sqrt{30};\ \ |2\lambda i + (2-\lambda)k - 2(1+2\lambda)k - \lambda j| = 6\sqrt{30};$$

$|2\lambda i + (2 - \lambda - 2 - 4\lambda)k - \lambda j| = 6\sqrt{30};\ \ |2\lambda i - \lambda j - 5\lambda k| = 6\sqrt{30};$

$\sqrt{(2\lambda)^2 + (-\lambda)^2 + (-5\lambda)^2} = 6\sqrt{30};\ \ 4\lambda^2 + \lambda^2 + 25\lambda^2 = 36 \cdot 30;\ \ 30\lambda^2 = 36 \cdot 30;$

$30\lambda^2 = 36;\ \ \lambda^2 = 36 \Rightarrow \lambda_1 = -6, \lambda_2 = 6.$

$$\lambda_1 = -6 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot (-6) = -11 \\ y = 1 + 6 = 7 \\ z = 1 - 6 = -5 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{C_1(-11,7,-5)}.$$

$$\lambda_2 = 6 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 6 = 13 \\ y = 1 - 6 = -5 \\ z = 1 + 6 = 7 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{C_2(13,-5,7)}.$$

Problema 4:

4º) El tiempo de vuelo de un avión Santander – Madrid sigue una distribución normal de media 60 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) Para conectar con el siguiente vuelo con destino a Sevilla, se necesita que el avión tarde menos de $t = 70$ minutos. Calcule la probabilidad de perder el avión a Sevilla.

b) Calcule el valor de t para que la probabilidad de perder el avión sea del 0,1 %.

Solución:

a) $Datos: \ \mu = 60; \ \ \sigma = 5.$

$X \rightarrow N(\mu; \ \sigma) = N(60, 5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-60}{5}$.

$P = P(X > 70) = P\left(Z > \frac{70-60}{5}\right) = P\left(Z > \frac{10}{5}\right) = P(Z > 2) =$

$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = \underline{0{,}0228 = 2{,}28\ \%}.$

b) Se pide $P = P(X > t) = 0{,}1\ \% = 0{,}001.$

$P = P(X > t) = P\left(Z > \frac{t-60}{5}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{t-60}{5}\right) = 0{,}001 \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{t-60}{5}\right) = 1 - 0{,}001 = 0{,}9990.$

Mirando en la tabla $N(0, 1)$, al valor 0,9990 le corresponde el valor 3:

$\frac{t-60}{5} = 3; \ \ t - 60 = 15 \Rightarrow t = 75.$

$\underline{\boldsymbol{Para\ t = 75\ minutos\ la\ probabilidad\ de\ perder\ el\ vuelo\ es\ del\ 0{,}1\ \%}}.$

Problema 5:

5º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule A^2 y compruebe que es regular.

$b)$ Calcule la matriz inversa de A^2.

$c)$ Despeje X en la ecuación matricial $A^2X + B = C$.

$d)$ Calcule la matriz X de orden 2×2, que verifica $A^2X + B = C$.

Solución:

$a)$ $\quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.}}$$

$b)$ $|A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4;\ \ (A^2)^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ (A^2)^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

$$(A^2)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A^2)^t}{|A^2|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}{4} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{(A^2)^{-1} = \tfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.}}$$

$c)$ $A^2 \cdot X + B = C;\ \ A^2 \cdot X = C - B;\ \ (A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot (C - B);$

$$I \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot (C - B) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = (A^2)^{-1} \cdot (C - B).}}$$

$d)$ $\quad X = (A^2)^{-1} \cdot (C - B) = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] =$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.}}$$

Problema 1:

6º) Considere la función $f(x) = \frac{3}{x}$.

$a)$ Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

$b)$ Halle una primitiva de $f(x)$.

$c)$ Calcule el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$, $x = e$.

Solución:

$a)$ El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$$\underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow R - \{0\}}}.$$

Las asíntotas verticales de una función racional son los valores finitos de x que anulan el denominador sin anular el numerador:

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ y = 0\ (eje\ de\ ordenadas)\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función.}}$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{\infty} = 0$$

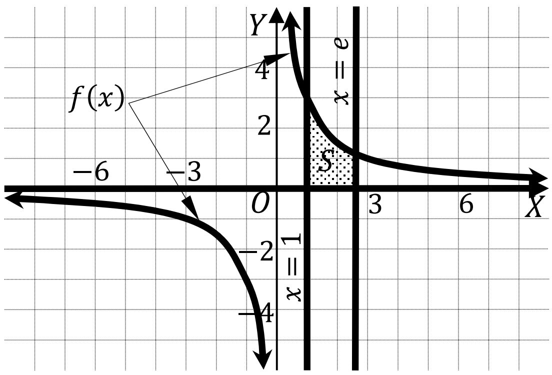
$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal.}}$$

Las asíntotas verticales de una función racional son los valores finitos de x que anulan el denominador sin anular el numerador:

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ x = 0\ (eje\ Y)\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función.}}$$

$b)$ $F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \frac{3}{x} \cdot dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{F(x) = 3 \cdot L|x| + C}}.$$



$c)$ Para facilitar la comprensión del ejercicio se ha hecho la representación gráfica, aproximada de la situación, de la cual se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^e f(x) \cdot dx = \int_1^e \frac{3}{x} \cdot dx = 3 \cdot [L|x|]_1^e = 3 \cdot (Le - L1) = 3 \cdot (1 - 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{S = 3\ u^2}}.$$

Problema 1:

7º) Considere la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y - z = -1$.

$a)$ Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

$b)$ Si r corta a π calcule el punto de corte y el ángulo que forman. Si la recta no corta al plano, calcule la distancia entre ellos.

Solución:

$a)$ Un punto y un vector director de la recta son $P(-1, -3, 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-1, 2, 1)$.

Un vector normal del plano es $\vec{n} = (1, -2, -1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ son paralelos (linealmente dependientes) por ser proporcionales sus componentes, lo cual supone que:

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ perpendiculares}}.$$

Otra forma de resolver este apartado es la siguiente:

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + 2 = -y - 3 \\ x + 1 = -z \end{matrix}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x + y = -5 \\ x + z = -1 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{matrix} 2x + y = -5 \\ x + z = -1 \\ x - 2y - z = -1 \end{matrix}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes}.$$

(Perpendiculares, como se dedujo anteriormente).

$b)$ El punto Q de intersección de la recta r y el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x - 2y - z = -1 \\ r \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-1 - \lambda) - 2(-3 + 2\lambda) - \lambda = -1;$$

$$-1-\lambda+6-4\lambda-\lambda=-1;\;\; 6\lambda=6;\;\; \lambda=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1-1=-2 \\ y=-3+2=-1 \\ z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{Q(-2,-1,1)}}.$$

Como se ha determinado anteriormente:

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ \acute{a}ngulo\ de\ 90°}}.$$

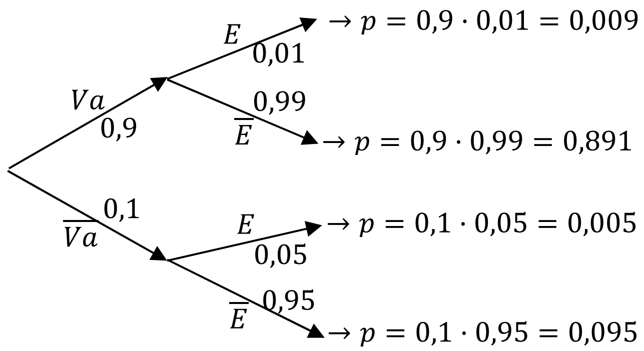
Problema 8:

8º) El 90 % de las personas de una población están vacunadas contra la enfermedad E. El 5 % de las personas no vacunadas tienen la enfermedad E, y el 1 % de las personas vacunadas también han contraído la enfermedad. Se selecciona una persona al azar de dicha población:

a) Calcule la probabilidad de que la persona esté enferma.

b) Calcule la probabilidad de que esté vacunada sabiendo que está enferma.

Solución:



a)

$$P = P(E) = P(Va \cap E) + P(\overline{Va} \cap E) =$$

$$= P(Va) \cdot P(E/Va) + P(\overline{Va}) \cdot P(E/\overline{Va}) = 0,9 \cdot 0,01 + 0,1 \cdot 0,05 =$$

$$= 0,009 + 0,005 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(E) = 0,014.}}$$

b) $P = P(Va/E) = \frac{P(Va \cap E)}{P(E)} = \frac{P(Va) \cdot P(E/Va)}{P(E)} = \frac{0,9 \cdot 0,01}{0,014} = \frac{0,009}{0,014} = \underline{0,6429}.$