MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los 8 ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1º) $a)$ Encuentra todas las matrices X que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, es decir, que verifican que $A \cdot X = X \cdot A$.

$b)$ ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

Problema 2:

2º) $a)$ Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

$b)$ Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

Problema 3:

3º) $a)$ Sea la curva $f(x) = a - x^2$.

$a_1)$ ¿Qué valores puede tomar $a \in R$ para que la curva $f(x) = a - x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?

$a_2)$ Encuentra razonadamente $a \in R$ para que el área de dicho recinto valga 36.

$b)$ Resuelve la siguiente integral: $I = \int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx$. El cambio $t = 1 + 3x^2$ te puede ayudar.

Problema 4:

4º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases}$, donde λ y μ son los parámetros y $a \in R$.

$a)$ Estudia su posición relativa en función de los valores que toma a.

$b)$ Encuentra razonadamente un plano que contenga a s y sea paralela a r.

CC BY NC SA

Problema 5:

5º) $a)$ Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x = y + 1$ y $\pi_2 \equiv y + 2z = 5$.

$b)$ Enuncia el teorema del Valor Medio del Cálculo Integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace alusión dicho teorema para la función $f(x) = \frac{3}{x^2}$ en el intervalo $[1, 3]$. Interpreta geométricamente lo hallado.

Problema 6:

6º) $a)$ Estudia el rango de la matriz $M' = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}$ en función del parámetro $m \in R$.

$b)$ Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1, \pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$. Estudia su posición relativa según los valores de m. Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Problema 7:

7º) $a)$ Sean los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Calcula el plano π que pasa por el punto $A(0, 0, 1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$b)$ El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juega Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %.

$b_1)$ ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C. F. gane un partido cualquiera?

$b_2)$ Si el EVAU C. F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?

Problema 8:

8º) $a)$ Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan al azar en mesas de 4 comensales.

$a_1)$ ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?

$a_2)$ Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?

$b)$ El peso de los paquetes de 1 kg de arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.

$b_1)$ ¿Cuántos pesarán más de un kilo?

$b_2)$ ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) a) Encuentra todas las matrices X que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, es decir, que verifican que $A \cdot X = X \cdot A$.

b) ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

Solución:

a) Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz que se busca.

$$A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & -b \\ 2c+d & -d \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a = 2a + b \\ 2b = -b \\ a - c = 2c + d \\ b - d = -d \end{array}\right\} \Rightarrow b = 0; \;\; a = 3c + d.$$

La matriz pedida es de la forma:

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 3c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}}}.$$

Por ejemplo, para $\left\{\begin{matrix} c = 1 \\ d = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$, que se comprueba a continuación:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Una matriz simétrica es aquella que es igual a su traspuesta.

Siendo $X = \begin{pmatrix} 3c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ es $X^t = \begin{pmatrix} 3c+d & c \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

$X = X^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 3c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c+d & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow c = 0.$

La nueva matriz pedida, X_1, es de la forma $X_1 = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

$|X_1| = 4 \Rightarrow \begin{vmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = 4; \;\; d^2 = 4 \Rightarrow d_1 = -2, d_2 = 2.$

Las matrices que satisfacen lo pedido son $\underline{\boldsymbol{X_1' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \; y \; X_1'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}}$**.**

Problema 2:

2º) a) Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

b) Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

Solución:

a) Sean x, y, z los precios (en céntimos) de un lápiz, un cuaderno y una agenda, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$\left.\begin{array}{r} 3x+y+z=500 \\ 2y+z=500 \end{array}\right\}$. Sistema de dos ecuaciones (no proporcionales) con tres incógnitas, por lo cual es compatible indeterminado.

Para resolverlo se parametriza una variable, por ejemplo, $3x=\lambda$, con lo cual el sistema resulta:

$$\left.\begin{array}{l} y+z=500-\lambda \\ 2y+z=500 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -y-z=-500+\lambda \\ 2y+z=500 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\lambda;\ \ z=500-2\lambda.$$

$Solución:\ 3x=\lambda;\ \ y=\lambda;\ \ z=500-2\lambda.$

Como los precios no pueden ser cero y han de ser múltiplos de 50, la solución que satisface las condiciones del problema son para $\lambda=150$, con lo cual, los precios son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Un\ lápiz\ vale\ 0,5\ euros;\ un\ cuaderno, 1,5\ euros\ y\ una\ agenda, 2\ euros.}}$$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=1^{\infty}\Rightarrow Indet.\,nº\ e\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2+1}{x}}=\lim_{x\to 1}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{x^2+x}{x^2}}=$

$$=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{x^2+x}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x^2}}=e^{1}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=e.}}$$

Problema 3:

3º) a) Sea la curva $f(x) = a - x^2$.

a_1) ¿Qué valores puede tomar $a \in R$ para que la curva $f(x) = a - x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?

a_2) Encuentra razonadamente $a \in R$ para que el área de dicho recinto valga 36.

b) Resuelve la siguiente integral: $I = \int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx$. El cambio $t = 1 + 3x^2$ te puede ayudar.

Solución:

a)

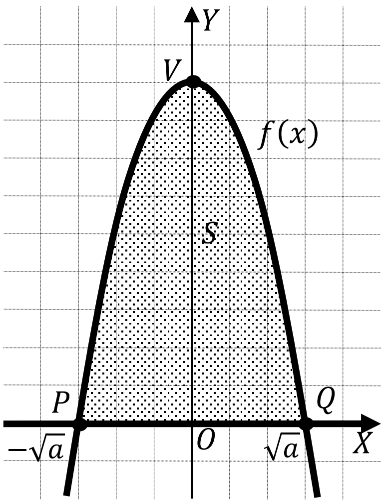
a_1) La curva $f(x) = a - x^2$ es una parábola convexa (∩), por ser negativo el coeficiente de x^2; simétrica con respecto al eje de ordenadas por ser $f(-x) = f(x)$ y cuyo vértice (máximo) es el punto $V(0, a)$.

$$\underline{\boldsymbol{f(x)\ forma\ un\ recinto\ cerrado\ con\ OX\ \forall a \in R, a > 0.}}$$

a_2) Los puntos de corte de la curva con el eje OX son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow a - x^2 = 0;\ \ x^2 = a \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{a} \to P\left(-\sqrt{a}, 0\right) \\ x_2 = \sqrt{a} \to Q\left(\sqrt{a}, 0\right) \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta la simetría de la función, la superficie pedida es la siguiente:



$$S = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) \cdot dx = 2 \cdot \left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} = 36;$$

$$\left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} = 18;\ \left[a \cdot \sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3}\right] - 0 = 18;$$

$$a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = 18;\ 3a\sqrt{a} - a\sqrt{a} = 54;\ 2a\sqrt{a} = 54;$$

$$a\sqrt{a} = 27;\ \sqrt{a^3} = 27 = 3^3;\ a^3 = 3^6 \Rightarrow a = 3^2 \Rightarrow \underline{a = 9}.$$

La representación gráfica adjunta expresa, muy aproximadamente, la situación.

$$b)\ I = \int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 1 + 3x^2 = t \\ 2x \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{t} + C \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}} \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{1 + 3x^2} + C}}$$

cc BY NC SA

Problema 4:

4º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = a \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = -5\mu \end{cases}$, donde λ y μ son los parámetros y $a \in R$.

a) Estudia su posición relativa en función de los valores que toma a.

b) Encuentra razonadamente un plano que contenga a s y sea paralela a r.

Solución:

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0,0,a)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2,-1,0)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(-1,0,0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (0,1,-5)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-1,0,0) - (0,0,a)] = (-1,0,-a)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -a \end{vmatrix} = -2a - 5 = 0;\ \ 2a = -5 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}.$$

$$\boldsymbol{Para\ a = -\frac{5}{2} \Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 2 < 3 \Rightarrow\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ son\ coplanarios.}$$

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ en\ un\ punto}}.$$

$$\boldsymbol{Para\ a \neq -\frac{5}{2} \Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3 \Rightarrow\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.}$$

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}}$$

b) El plano pedido, π, por ser paralelo a la recta r y contener a la recta s, tiene como vectores directores a $\overrightarrow{v_r} = (2,-1,0)$ y a $\overrightarrow{v_s} = (0,1,-5)$ y contiene a $B(-1,0,0) \in s$.

$$\pi(B;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0;\ \ 5(x+1) + 2z + 10y = 0;$$

$$5x + 5 + 10y + 2z = 0\ \ \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv 5x + 10y + 2z + 5 = 0.}}$$

BY NC SA

Problema 5:

5º) $a)$ Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x = y + 1$ y $\pi_2 \equiv y + 2z = 5$.

$b)$ Enuncia el teorema del Valor Medio del Cálculo Integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace alusión dicho teorema para la función $f(x) = \frac{3}{x^2}$ en el intervalo $[1, 3]$. Interpreta geométricamente lo hallado.

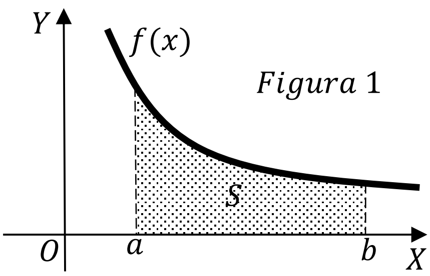
Solución:

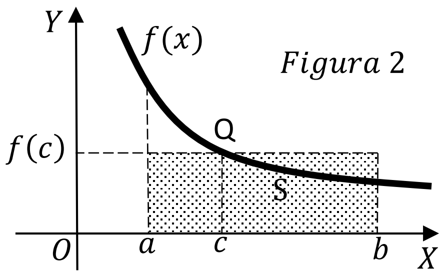
$a)$ $$r \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv x = y + 1 \\ \pi_2 \equiv y + 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ y + 2z = 5 \end{cases}.$$

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ y + 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda;\ \ y = 5 - 2\lambda;\ \ x = 1 + 5 - 2\lambda \Rightarrow x = 6 - 2\lambda.$$

$$\underline{\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 6 - 2\lambda \\ y = 5 - 2\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

$b)$ El teorema del Valor Medio del cálculo integral se puede enunciar así: "Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, existe un valor $c \in [a, b]$ que cumple que $\int_a^b f(x) \cdot dx = f(c) \cdot (b - a)$". La interpretación gráfica se expresa a continuación.





$$S = \int_1^3 f(x) \cdot dx = \int_1^3 \frac{3}{x^2} \cdot dx = 3 \cdot \int_1^3 x^{-2} \cdot dx = 3 \cdot \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^3 = 3 \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 =$$

$$= 3 \cdot \left[\frac{1}{x}\right]_3^1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) = 3 - 1 \Rightarrow S = 2\ u^2.$$

$$S = f(c) \cdot (3 - 1) = 2 \Rightarrow f(c) \cdot 2 = 2;\ \ f(c) = 1 = \frac{3}{c^2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{c = \sqrt{3} \in [1, 3].}}$$

Textos Marea Verde

Problema 6:

6º) $a)$ Estudia el rango de la matriz $M' = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}$ en función del parámetro $m \in R$.

$b)$ Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1, \pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$. Estudia su posición relativa según los valores de m. Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

$a)$ Considerando la matriz M formada por las tres primeras columnas de M':

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & m \end{vmatrix} = m \cdot \begin{vmatrix} 2 & m \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = m \cdot (2 - 2m) = m \cdot (1 - m) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = 0, m_1 = 1 \Rightarrow Para \begin{Bmatrix} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ m = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ m = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Rang\ M' = 3\ si\ m \neq 1; Rang\ M' = 2\ si\ m = 1.}}$$

$b)$ Los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1, \pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$ determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x + my = 1 \\ 2x + y = m \\ 4x + y + mz = 2 \end{array}\right\}$, cuyas matrices de coeficientes y ampliada son $M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & m \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}$.

Nótese que la matriz M' es la misma del apartado anterior.

Según sean los rangos de estas matrices, la posición relativa de los planos son las siguientes:

1º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.$

2º. -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos.$

3º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.$

4º. -- $Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ son\ paralelos.$

5º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow Los\ planos\ son\ coincidentes.$

$$\underline{\boldsymbol{Si \begin{Bmatrix} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.}}$$

BY NC SA

$$\underline{\boldsymbol{Si\ m = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2, Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Si\ m = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.}}$$

Nota: Para $m = 1$ debe tenerse en cuenta que dos planos son coincidentes.

BY NC SA

Problema 7:

7º) a) Sean los vectores $\vec{u}=(1,1,1)$ y $\vec{v}=(1,0,1)$. Calcula el plano π que pasa por el punto $A(0,0,1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juega Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %.

b_1) ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C. F. gane un partido cualquiera?

b_2) Si el EVAU C. F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?

Solución:

a) $$\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=i+j-k-j=i-k \Rightarrow \vec{n}=(1,0,-1).$$

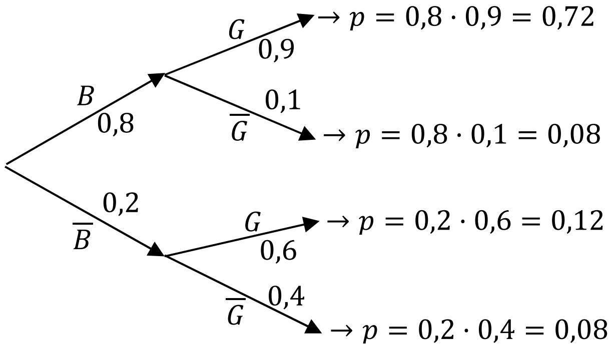
La expresión general del plano pedido es $\pi \equiv x-z+D=0$.

Como el plano π contiene al punto $A(0,0,1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x-z+D=0 \\ A(0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 0-1+D=0;\;\; D=1 \;\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv x-z+1=0}}.$$

b) El diagrama del árbol que se deduce es el siguiente:



b_1) $$P=P(G)=P(B\cap G)+P(\overline{B}\cap G)=P(B)\cdot P(G/B)+P(\overline{B})\cdot P(G/\overline{B})=$$
$$=0{,}8\cdot 0{,}9+0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}72+0{,}12=\underline{0{,}84}.$$

b_2) $$P=P(B/G)=\frac{P(B\cap G)}{P(G)}=\frac{P(B)\cdot P(G/B)}{P(G)}=\frac{0{,}8\cdot 0{,}9}{0{,}84}=\frac{0{,}72}{0{,}84}=\underline{0{,}8571}.$$

BY NC SA

Problema 8:

8º) a) Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan al azar en mesas de 4 comensales.

a_1) ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?

a_2) Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?

b) El peso de los paquetes de 1 kg de arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.

b_1) ¿Cuántos pesarán más de un kilo?

b_2) ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

Solución:

a)

a_1) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 4;\ \ p = \frac{1}{5};\ \ q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$

Por el suceso contrario, la probabilidad de que haya algún niño con intolerancia alimentaria en la mesa es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no haya ningún niño en la mesa con intolerancia alimentaria.

La fórmula de la probabilidad binomial de n elementos de los cuales se produzcan r viene dada por la fórmula: $P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot \frac{256}{625} = 1 - 0{,}4096 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P = 0,5904}}.$$

a_2)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 8;\ \ p = 0{,}5904;\ \ q = 1 - p = 0{,}4096.$

Como en el apartado anterior, por el suceso contrario, la probabilidad de que haya que poner pan sin gluten en alguna mesa es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no haya que poner pan sin gluten en ninguna mesa.

$$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{8}{0} \cdot (0{,}5904)^0 \cdot (0{,}4096)^8 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}0008 =$$

$$= 1 - 0{,}0008 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P = 0,9992}}.$$

b) $Datos$: $\mu = 985;\ \ \sigma = 25.$

Textos Marea Verde

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(985, 25)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-985}{25}$.

$b_1)$ $P = P(X > 1.000) = P\left(Z > \frac{1.000-985}{25}\right) = P\left(Z > \frac{15}{25}\right) = P(Z > 0{,}6) =$

$= 1 - P(Z < 0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743.$

$\underline{\boldsymbol{Pesan\ mas\ de\ un\ kilo\ el\ 27,43\ \%\ de\ los\ paquetes.}}$

$b_2)$ Se nos pide el valor de β, siendo: $P(X > \beta) = 0{,}7$.

$P\left(Z > \frac{\beta-985}{25}\right) = 0{,}7 \Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{\beta-985}{25}\right) = 0{,}7 \Rightarrow$Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, al valor 0,7 le corresponde un valor: $\begin{Bmatrix} 0{,}52 - -0{,}6985 \\ 0{,}53 - -0{,}7019 \end{Bmatrix} \cong 0{,}525$:

$-\frac{\beta-985}{25} = 0{,}525;\ \ \beta - 985 = -13{,}125 \Rightarrow \beta = 985 - 13{,}125 = 971{,}875.$

$\underline{\boldsymbol{971,875\ gramos\ pesa\ el\ más\ ligero\ del\ 70\ \%\ de\ los\ más\ pesados.}}$

Textos Marea Verde

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los 8 ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) $a)$ Discute el sistema $\begin{cases} x+2y+3z=a+1 \\ ax+z=0 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ en función del parámetro $a \in R$.

$b)$ Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a=1$, si es posible.

Problema 2:

2º) $a)$ Encuentra razonadamente el valor de $a, b \in R$ para que la función $f(x)=\frac{ax+1}{2x+b}$ tenga una discontinuidad de santo infinito en $x=1$ y tienda a 2 cuando $x \to +\infty$.

$b)$ Resuelve la integral: $I=\int x \cdot \cos(2x) \cdot dx$.

Problema 3:

3º) $a)$ Estudia la continuidad en R de la función $f(x)=\frac{2 \cdot e^{x^2-4}-8x+14}{x^2-2x}$.

$b)$ Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=2$, donde $x, y, z, a, b, c \in R$. Calcula razonadamente (indicando las propiedades de los determinantes que utilizas) el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$.

Problema 4:

4º) Sea el punto $A(1,0,1)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z=8$.

$a)$ Calcula la recta perpendicular a π y que pasa por A. ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?

$b)$ Obtén el punto de la recta anterior distinto de A que dista de π igual que A, es decir, el punto simétrico de A con respecto a π.

Problema 5:

5º) $a)$ Sea el plano $\pi \equiv x-3y+z=0$ y los puntos $A(0,0,-1)$ y $B(1,1,1)$. Obtén el plano perpendicular a π y que contiene a A y B.

$b)$ Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x)=x^2-4x+5$ y $g(x)=3-x$.

BY NC SA

Problema 6:

6º) $a)$ Sea el tetraedro cuyos vértices son $A(a,0,1), B(1,3,0), C(0,1,0)\ y\ D(1,1,1)$, con $a \in R$. Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.

$b)$ Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función $f(x) = \frac{2\cdot e^x - 8x - 3}{x^2+1}$ corta al eje de abscisas al menos una vez.

Problema 7:

7º) $a)$ Despeja la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + B = X$, siendo $X, A\ y\ B$ matrices cuadradas cualesquiera. Calcula X para $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\ y\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$b)$ Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

Problema 8:

8º) $a)$ En un determinado I.E.S. la probabilidad de que un alumno apruebe si va a clase es del 80 % mientras que si no va a clase es del 50 %. El 90 % de los alumnos va a clase.

$a_1)$ ¿Cuál es la probabilidad de que en un alumno apruebe?

$a_2)$ Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que no haya asistido a clase.

$b)$ Una empresa embotelladora de agua produce botellas de 150 ml. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media 150 ml y desviación típica 5 ml.

$b_1)$ ¿Qué proporción de las botellas contiene más de 152 ml?

$b_2)$ ¿Qué proporción de botellas tiene entre 149 y 152 ml?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) $a)$ Discute el sistema $\begin{cases} x+2y+3z=a+1 \\ ax+z=0 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ en función del parámetro $a \in R$.

$b)$ Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a=1$, si es posible.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a+1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3a+2-1-4a=0;\ \ 1-a=0 \Rightarrow a=1.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a \neq 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g. \Rightarrow S.C.D.}}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2=C_4\} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g. \Rightarrow S.C.I.}}$$

$b)$ Para $a=1$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=2 \\ x+z=0 \\ x+y+2z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se desprecia una ecuación (primera) y se parametriza una de las incógnitas ($z=\lambda$).

El sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+\lambda=0 \\ x+y+2\lambda=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-\lambda;\ \ y=1-\lambda.$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x=-\lambda,\ \ y=1-\lambda,\ \ z=\lambda, \forall \lambda \in R.}}$$

BY NC SA

Problema 2:

2º) a) Encuentra razonadamente el valor de $a, b \in R$ para que la función $f(x) = \frac{ax+1}{2x+b}$ tenga una discontinuidad de santo infinito en $x = 1$ y tienda a 2 cuando $x \to +\infty$.

b) Resuelve la integral: $I = \int x \cdot \cos(2x) \cdot dx$.

Solución:

a) Para que la función $f(x) = \frac{ax+1}{2x+b}$ tenga una discontinuidad de santo infinito en $x = 1$ tiene que anularse el denominador para este valor:

$$2 \cdot 1 + b = 0;\ \ 2 + b = 0 \Rightarrow \underline{b = -2}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+1}{2x+b} = \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow \underline{a = 4}.$$

$$b)\ I = \int x \cdot cos\ (2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \to du = dx \\ cos\ (2x) \cdot dx = dv \to v = \frac{1}{2} \cdot sen\ (2x) \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{2} \cdot sen\ (2x) - \int \frac{1}{2} \cdot sen\ (2x) \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot sen\ (2x) - \frac{1}{2} \cdot \int sen\ (2x) \cdot dx =$$

$$= \frac{x}{2} \cdot sen\ (2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot cos\ (2x) + C.$$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int x \cdot cos\ (2x) \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot [2x \cdot sen\ (2x) + cos\ (2x)] + C}}.$$

Problema 2:

3º) a) Estudia la continuidad en R de la función $f(x)=\frac{2\cdot e^{x^2-4}-8x+14}{x^2-2x}$.

b) Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=2$, donde $x,y,z,a,b,c\in R$. Calcula razonadamente (indicando las propiedades de los determinantes que utilizas) el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$.

Solución:

a) La función $f(x)=\frac{2\cdot e^{x^2-4}-8x+14}{x^2-2x}$ es continua en R, excepto para los valores reales de x que anulan el denominador.

$x^2-2x=0;\ \ x(x-2)=0\Rightarrow x_1=0, x_2=2.$

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot e^{x^2-4}-8x+14}{x^2-2x}=\frac{2\cdot e^{-4}-0+14}{0}=\pm\infty.$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ x=0\ la\ funci\acute{o}n\ tiene\ una\ discontinuidad\ inevitable\ de\ salto\ infinito.}}$$

$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2\cdot e^{2^2-4}-8\cdot 2+14}{0}=\frac{2\cdot e^{0}-2}{0}=\frac{2\cdot 1-2}{0}=\frac{2-2}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$

$\Rightarrow \{L\acute{}Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{4x\cdot e^{x^2-4}-8}{2x-2}=\frac{4\cdot 2\cdot e^{2^2-4}-8}{2\cdot 2-2}=\frac{8-8}{2}=\frac{0}{2}=0.$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ x=2\ la\ funci\acute{o}n\ tiene\ una\ discontinuidad\ evitable\ de\ salto\ finito.}}$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=A+B.$

$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-2\cdot 2=-4.$

$B=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=-2\cdot 0=0.$

De lo anterior se deduce que: $\underline{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a-2 & b-4 & c-6 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}=-4.}$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

Textos Marea Verde

Problema 4:

4º) Sea el punto $A(1,0,1)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z=8$.

a) Calcula la recta perpendicular a π y que pasa por A. ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?

b) Obtén el punto de la recta anterior distinto de A que dista de π igual que A, es decir, el punto simétrico de A con respecto a π.

Solución:

a) Un vector normal del plano $\pi \equiv x+y+z=8$ es $\vec{n}=(1,1,1)$.

La recta r pedida tiene como vector director a $\vec{n}=(1,1,1)$ y contiene al punto $A(1,0,1)$. Su expresión, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

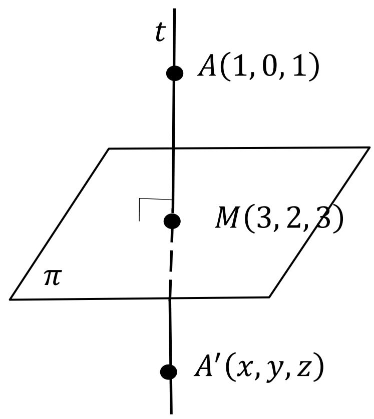
$$\underline{\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}}}.$$

b) El punto M, intersección de la recta r con el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x+y+z=8 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=8;\ \ 3\lambda=6;\ \ \lambda=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow \left.\begin{cases} x=1+2=3 \\ y=2 \\ z=1+2=3 \end{cases}\right\} \Rightarrow M(3,2,3).$$

$$\left.\begin{array}{r} \frac{x+1}{2}=3 \Rightarrow x=6-1=5 \\ \frac{y+0}{2}=2 \Rightarrow y=4 \\ \frac{z+1}{2}=3 \Rightarrow z=6-1=5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$$\underline{\boldsymbol{A'(5,4,5)}}.$$

Problema 5:

5º) $a)$ Sea el plano $\pi \equiv x - 3y + z = 0$ y los puntos $A(0,0,-1)\ y\ B(1,1,1)$. Obtén el plano perpendicular a π y que contiene a A y B.

$b)$ Calcula el área de la región delimitada por las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 5$ y $g(x) = 3 - x$.

Solución:

$a)$ Los puntos $A(0,0,-1)\ y\ B(1,1,1)$ determinan el vector:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1,1,1) - (0,0,-1)] = (1,1,2)$.
Un vector normal del plano $\pi \equiv x - 3y + z = 0$ es $\vec{n} = (1,-3,1)$.
El plano β pedido, perpendicular a π y que contiene a los puntos A y B, es el siguiente, expresado por su ecuación genera:

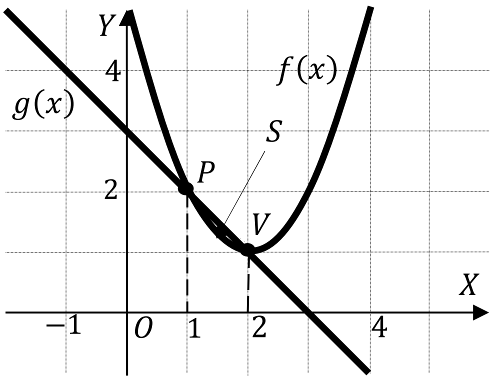
$$\beta(\overrightarrow{AB},\ \vec{n};\ A) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$x + 2y - 3(z+1) - (z+1) + 6x - y = 0;\ 5x + y - 4(z+1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{\beta \equiv 5x + y - 4z - 4 = 0.}}$$

$b)$ La función $f(x) = x^2 - 4x + 5$ es una parábola convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2. Su vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0;\ \ x - 2 = 0;\ \ x = 2 \Rightarrow V(2,1).$$



Los puntos de corte de la parábola y la recta se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 4x + 5 = 3 - x;\ x^2 - 3x + 2 = 0;$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow P(1,2) \\ x_2 = 2 \rightarrow V(2,1) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.

Por ser todas las ordenadas de la recta mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola en el intervalo $(1,2)$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_1^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-1}^2 [(3-x) - (x^2 - 4x + 5)] \cdot dx =$$

$$= \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - 2 \cdot 2\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - 2 \cdot 1\right) = -\frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 =$$

$$= 4 - \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{24 - 14 - 9}{6} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{1}{6}\ u^2 \cong 0,17\ u^2}}\ .$$

CC BY NC SA

Problema 6:

6º) a) Sea el tetraedro cuyos vértices son $A(a,0,1), B(1,3,0), C(0,1,0)\ y\ D(1,1,1)$, con $a \in R$. Halla los valores de a para que el volumen de dicho tetraedro sea 1.

b) Enuncia el teorema de Bolzano. Utiliza este teorema para razonar que la función $f(x) = \frac{2\cdot e^x - 8x - 3}{x^2+1}$ corta al eje de abscisas al menos una vez.

Solución:

a) Los puntos $A(a,0,1), B(1,3,0), C(0,1,0)\ y\ D(1,1,1)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1,3,0) - (a,0,1)] = (1-a,3,-1)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,0) - (a,0,1)] = (-a,1,-1)$.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(1,1,1) - (a,0,1)] = (1-a,1,0)$.

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\cdot \left\| \begin{vmatrix} 1-a & 3 & -1 \\ -a & 1 & -1 \\ 1-a & 1 & 0 \end{vmatrix} \right\| = 1; \quad \left\| \begin{vmatrix} 1-a & 3 & -1 \\ -a & 1 & -1 \\ 1-a & 1 & 0 \end{vmatrix} \right\| = 6;$$

$$|a - 3\cdot(1-a) + (1-a) + (1-a)| = 6; \ \ |a-(1-a)| = 6; \ \ |2a-1| = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 6 \to 2a = 7 \to \underline{a_1 = \frac{7}{2}} \\ -2a + 1 = 6 \to 2a = -5 \to \underline{a_2 = -\frac{5}{2}} \end{cases}.$$

b) El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$".

Considerando, por ejemplo, los valores $x = -2$ y $x = 0$:

$$f(-2) = \frac{2\cdot e^{-2} - 8\cdot(-2) - 3}{(-2)^2+1} = \frac{\frac{2}{e^2}+16-3}{4+1} = \frac{\frac{2}{e^2}+13}{5} > 0.$$

$$f(0) = \frac{2\cdot e^0 - 8\cdot 0 - 3}{0^2+1} = \frac{2\cdot 1 - 0 - 3}{1} = \frac{-1}{1} < 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ corta\ al\ eje\ X, al\ menos\ una\ vez, en\ el\ intervalo\ (-2,0).}}$$

BY NC SA

Problema 7:

7º) $a)$ Despeja la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X + B = X$, siendo X, A y B matrices cuadradas cualesquiera. Calcula X para $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$b)$ Un piloto de Fórmula 1 tiene una probabilidad del 60 % de ganar una carrera cualquiera. Si participa en las próximas 4 carreras, ¿cuál es la probabilidad de que gane al menos dos?

Solución:

$a)$ $\quad A \cdot X + B = X;\ \ B = X - A \cdot X;\ \ B = I \cdot X - A \cdot X;\ \ B = (I - A) \cdot X;$

$(I - A)^{-1} \cdot B = (I - A)^{-1} \cdot (I - A) \cdot X;\ \ (I - A)^{-1} \cdot B = I \cdot X \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X = (I - A)^{-1} \cdot B}.$

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad |I - A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$(I - A)^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad Adj.de(I - A)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{Adj.de(I-A)^t}{|I-A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}{2} \Rightarrow (I - A)^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = (I - A)^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}}.$$

$b)$ Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 4;\ \ p = 0{,}6;\ \ q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4. \qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$$

La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no gane ninguna de las carreras o que gane una.

$$P = 1 - [P(0) + P(1)] = 1 - \left[\binom{4}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^4 + \binom{4}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^3\right] =$$

$$= 1 - (1 \cdot 1 \cdot 0{,}0256 + 4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}064) = 1 - (0{,}0256 + 0{,}1536) = 1 - 0{,}1792 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P = 0{,}8208}}.$$

BY NC SA

Problema 8:

8º) a) En un determinado I.E.S. la probabilidad de que un alumno apruebe si va a clase es del 80 % mientras que si no va a clase es del 50 %. El 90 % de los alumnos va a clase.

a_1) ¿Cuál es la probabilidad de que en un alumno apruebe?

a_2) Si un alumno ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que no haya asistido a clase.

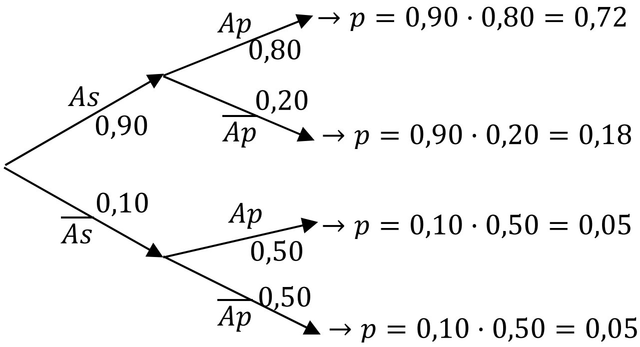
b) Una empresa embotelladora de agua produce botellas de 150 ml. La cantidad que realmente contienen sigue una distribución normal con media 150 ml y desviación típica 5 ml.

b_1) ¿Qué proporción de las botellas contiene más de 152 ml?

b_2) ¿Qué proporción de botellas tiene entre 149 y 152 ml?

Solución:

a)



a_1) $\quad P = P(Ap) = P(As \cap Ap) + P(\overline{As} \cap Ap) =$

$= P(As) \cdot P(Ap/As) + P(\overline{As}) \cdot P(Ap/\overline{As}) = 0{,}90 \cdot 0{,}80 + 0{,}10 \cdot 0{,}50 =$

$= 0{,}72 + 0{,}05 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{P(Ap) = 0,77.}}$$

a_2) $\quad P = P(\overline{As}/\overline{Ap}) = \frac{(\overline{As} \cap \overline{Ap})}{P(\overline{As})} = \frac{P(\overline{As}) \cdot P(\overline{Ap}/\overline{As})}{1 - P(As)} = \frac{0{,}10 \cdot 0{,}50}{1 - 0{,}77} = \frac{0{,}05}{0{,}23} = \underline{0{,}2174}.$

b) $Datos$: $\mu = 150;\ \ \sigma = 5.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(150, 5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X - 150}{5}$.

$b_1) P = P(X \geq 152) = P\left(Z \geq \frac{152 - 150}{5}\right) = P\left(Z \geq \frac{2}{5}\right) = P(Z \geq 0{,}4) =$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = \underline{0{,}3446}.$

b_2) $P = P(149 \leq X \leq 152) = P\left(\frac{152 - 150}{5} \leq Z \leq \frac{149 - 150}{5}\right) =$

$= P\left(\frac{2}{5} \leq Z \leq \frac{-1}{5}\right) = P(0{,}4 \leq Z \leq -0{,}2) = P(Z \leq 0{,}4) - P(Z \leq -0{,}2) =$

$= P(Z \leq 0{,}4) - [1 - P(Z \leq 0{,}2)] = P(Z \leq 0{,}4) - 1 + P(Z \leq 0{,}1) =$

$= 0{,}6554 - 1 + 0{,}5793 = 1{,}2347 - 1 = \underline{0{,}2347}.$

BY NC SA