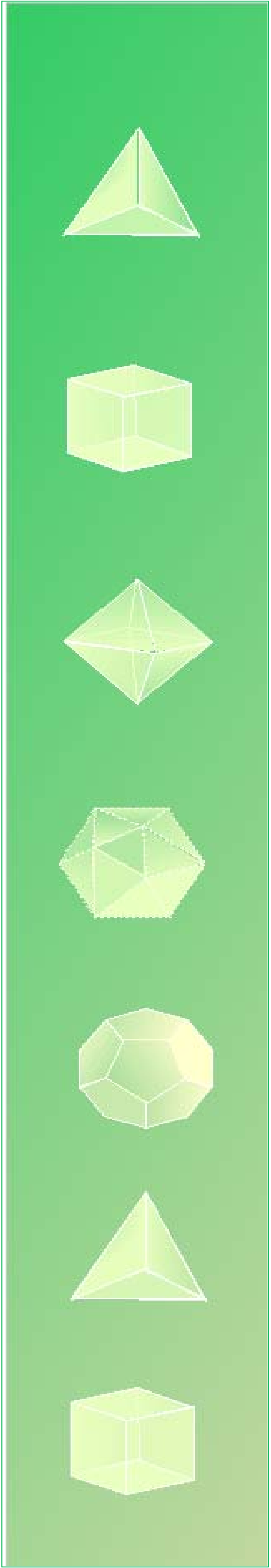


MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL

CURSO: **2021–2022**

MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 preguntas. Es estudiante ha de elegir 5 preguntas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregirá la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas y las soluciones.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Comprobar, cuando sea posible, las matrices $C \cdot B^t$; $B^t \cdot C$; $B \cdot C$, cuando B^t es la matriz traspuesta de B.

$b)$ Hallar $a \in R$ para que el sistema $x \cdot A + y \cdot B = C$ de las tres ecuaciones y dos incógnitas x e y, sea compatible determinado y resolverlo pare ese valor de a.

2º) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz X cuadrada de orden 3 que cumple $M \cdot X - N = 2X$.

3º) Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} y - 2x = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$:

$a)$ Hallar el punto de intersección del plano π y la recta r.

$b)$ Calcular la distancia del origen a la recta r.

4º) Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$:

$a)$ Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a la recta r.

$b)$ Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a la recta r.

5º) Calcular el valor de $a \in R$ para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot e^x - sen\, x}{x^2} & si \;\; x \neq 0 \\ a & si \;\; x = 0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$.

6º) Dada la función $f(x) = |x + 1| + |x - 2|$:

$a)$ Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función.

$b)$ Calcular el intervalo donde la función permanece constante.

7º) Determinar la función $f(x)$ tal que su gráfica pase por el origen de coordenadas y su derivada sea $f'(x) = (2x + 1) \cdot e^{-x}$.

8º) Calcular el área encerrada por la función $f(x) = sen\, 2x$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = \pi$.

9º) En un centro educativo han preguntado a sus alumnos acerca de alergias alimentarias, resultando que un 10 % es celíaco y un 15 % es alérgico a la lactosa. Además, el 20 % tiene alguna de las dos alergias. Si se elige un alumno al azar, calcular las siguientes probabilidades:

$a)$ Tenga solo una de las dos alergias.

$b)$ Sea celíaco si sabemos que no es alérgico a la lactosa.

10º) Un examen con opción múltiple está compuesto por 10 preguntas, con cuatro respuestas posibles cada una, de las cuales sólo una es correcta. Suponga que uno de los estudiantes responde a todas las preguntas del examen al azar. Calcular la probabilidad de que conteste bien:

$a)$ Cinco preguntas. $b)$ Alguna pregunta.

$c)$ Calcular la media y la desviación típica de la distribución.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Comprobar, cuando sea posible, las matrices $C \cdot B^t;\ B^t \cdot C; B \cdot C$, cuando B^t es la matriz traspuesta de B.

$b)$ Hallar $a \in R$ para que el sistema $x \cdot A + y \cdot B = C$ de las tres ecuaciones y dos incógnitas $x\ e\ y$, sea compatible determinado y resolverlo pare ese valor de a.

Solución:

$a)$

$$C \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (3 \quad -1 \quad -4) = \underline{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 6 & -2 & -8 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}}.$$

$$B^t \cdot C = (3 \quad -1 \quad -4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{(-3)}.$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{No\ es\ posible}.$$

Para que dos matrices se puedan multiplicar es necesario que el número de columnas del multiplicando sea igual al número de filas del multiplicador y, en este caso, el multiplicando tiene una columna y el multiplicador tiene tres filas.

$b)$ $$x \cdot A + y \cdot B = C \Rightarrow x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \\ ax - 4y = 1 \end{array}\right\}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ a & -4 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ a & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema sea compatible determinado es necesario que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean iguales e iguales al número de incógnitas.

En el caso que nos ocupa, ambos rangos tienen que ser dos, por ser dos el número de incógnitas.

$$Rang\ M' = 2 \Rightarrow |M'| = 0:$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ a & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ -2 - 4 + 6a + a + 16 - 3 = 0;\ \ 7a + 7 = 0 \Rightarrow \underline{a = -1}.$$

El sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=1 \\ x-y=2 \\ -x-4y=1 \end{array}\right\}$. Para su resolución son suficiente dos de sus ecuaciones, por ejemplo, segunda y tercera:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ -x-4y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow -5y=3;\ \ y=-\frac{3}{5}. \qquad x+\frac{3}{5}=2;\ \ 5x+3=10 \Rightarrow x=\frac{7}{5}.$$

Solución: $\boldsymbol{x=\frac{7}{5}, y=-\frac{3}{5}}$**.**

2º) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $y\ N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz X cuadrada de orden 3 que cumple $M \cdot X - N = 2X$.

Solución:

$$M \cdot X - N = 2X; \;\; M \cdot X - 2X = N; \;\; (M - 2I) \cdot X = N;$$

$$(M - 2I)^{-1} \cdot (M - 2I) \cdot X = (M - 2I)^{-1} \cdot N; \;\; I \cdot X = (M - 2I)^{-1} \cdot N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = (M - 2I)^{-1} \cdot N. \quad (*)$$

$$M - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa de $(M - 2I)$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(M - 2I|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (M - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Sustituyendo en (*):

$$X = (M - 2I)^{-1} \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}}}.$$

3º) Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} y - 2x = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$:

$a)$ Hallar el punto de intersección del plano π y la recta r.

$b)$ Calcular la distancia del origen a la recta r.

Solución:

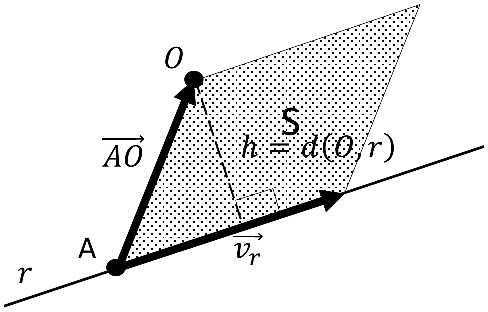
$a)$ El punto de intersección del plano π y la recta r es la solución del sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que determinan: $\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = 0 \\ -2x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{array}\right\}$. Resolviendo por sustitución:

$$z = x \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y - x = 0 \\ -2x + y = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2y = 0 \\ -2x + y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0;\ \ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right).}$$

$b)$ La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace el esquema de la situación adjunto.



$$\left.\begin{array}{r} S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AO}\right| \\ S = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AO}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = d(O, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AO}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}.$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} y - 2x = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z = \lambda \Rightarrow y = 1 + 2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $A(0, 1, 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 2, 1)$.

$\overrightarrow{AO} = [O - A] = [(0, 0, 0) - (0, 1, 0)] = (0, -1, 0)$.

Aplicando la fórmula al punto O y a la recta r:

$$d(O, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AO}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|-k + i|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{|i - k|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{d(O, r) = \frac{\sqrt{3}}{3}\ u.}$$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El haz de planos perpendiculares a r es el siguiente: $\alpha \equiv x + 2y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano β que contiene al punto $O(0, 0, 0)$ es el que satisface su ecuación:

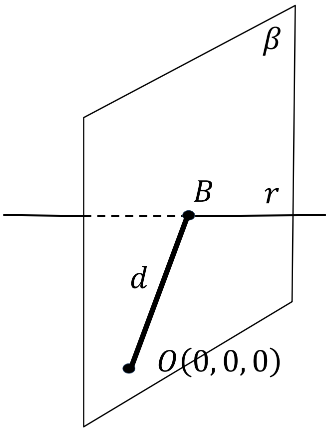
$$\left.\begin{array}{r}\alpha \equiv 2y+3z+D=0\\ O(0,0,0)\end{array}\right\} \Rightarrow D=0 \Rightarrow \beta \equiv x+2y+z=0.$$

El punto B, intersección de la recta r con el plano β es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r}\beta \equiv x+2y+z=0\\ r \equiv \begin{cases} y-2x=1\\ x-z=0\end{cases}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}x+2y+z=0\\ -2x+y=1\\ x-z=0\end{array}\right\} \Rightarrow x=z \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x+2y+x=0\\ -2x+y=1\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}2x+2y=0\\ -2x+y=1\end{array}\right\} \Rightarrow 3y=1 \Rightarrow y=\tfrac{1}{3};\ -2x+\tfrac{1}{3}=1;\ -6x+1=3;\ -6x=2;$$

$$3x=-1;\ \ x=-\tfrac{1}{3} \Rightarrow B\left(-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3},-\tfrac{1}{3}\right).$$



La distancia pedida del punto O a la recta r es equivalente a la distancia entre los puntos O y B, o sea el módulo de $\left|\overrightarrow{OB}\right|$:

$$d(O,r)=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{\left(-\tfrac{1}{3}\right)^2+\left(\tfrac{1}{3}\right)^2+\left(-\tfrac{1}{3}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{3}{9}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{d(O,r)=\frac{\sqrt{3}}{3}\ u.}}$$

4º) Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$:

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a la recta r.

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a la recta r.

Solución:

a) Un punto y un vector director de r son $P(1, -1, 2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2, 3, 1)$.

$\overrightarrow{OP} = [(1, -1, 2) - (0, 0, 0)] = (1, -1, 2)$.

El plano π que contiene al origen y a r es el siguiente:

$$\pi(\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{OP};\ P) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$6(x-1) + (y+1) - 2(z-2) - 3(z-2) + (x-1) - 4(y+1) = 0;$

$7(x-1) - 3(y+1) - 5(z-2) = 0;\ \ 7x - 7 - 3y - 3 - 5z + 10 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{\pi \equiv 7x - 3y - 5z = 0.}}$$

b) El haz de planos perpendiculares a r es el siguiente: $\alpha \equiv 2x + 3y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano β que contiene al punto $O(0, 0, 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv 2x + 3y + z + D = 0 \\ O(0, 0, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\beta \equiv 2x + 3y + z = 0.}}$$

5º) Calcular el valor de $a \in R$ para que la función $f(x)=\begin{cases} \frac{x \cdot e^x - sen\, x}{x^2} & si\ \ x \neq 0 \\ a & si\ \ x=0 \end{cases}$ sea continua en $x=0$.

Solución:

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot e^x - sen\, x}{x^2} = \frac{0 \cdot e^0 - sen\, 0}{0^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1 \cdot e^x + x \cdot e^x - \cos x}{2x} = \frac{e^0 + 0 \cdot e^0 - \cos 0}{2 \cdot 0} = \frac{1+0-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x + 1 \cdot e^x + x \cdot e^x + sen\, x}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^x + x \cdot e^x + sen\, x}{2} = \frac{2e^0 + 0 \cdot e^0 + sen\, 0}{2} = \frac{2+0+0}{2} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow a = 1.$$

$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ es\ continua\ para\ x = 0\ para\ el\ valor\ a = 1.}}$

6º) Dada la función $f(x) = |x+1| + |x-2|$:

$a)$ Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función.

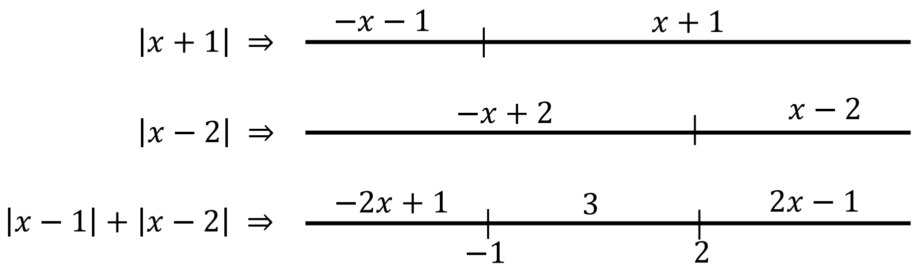
$b)$ Calcular el intervalo donde la función permanece constante.

Solución:

La función $f(x) = |x+1| + |x-2|$ puede redefinirse de la forma siguiente:

$$|x+1| \Rightarrow x+1=0;\ \ x=-1 \Rightarrow |x+1| = \begin{cases} -x-1 & si\ \ x \le -1 \\ x+1 & si\ \ x > -1 \end{cases}.$$

$$|x-2| \Rightarrow x-2=0;\ \ x=2 \Rightarrow |x-2| = \begin{cases} -x+2 & si\ \ x \le 2 \\ x-2 & si\ \ x > 2 \end{cases}.$$



$$f(x) = |x+1| + |x-2| = \begin{cases} -2x+1 & si\ \ x < -1 \\ \ \ 3 & si\ \ -1 \le x \le 2. \\ 2x-1 & si\ \ x > 2 \end{cases}$$

La función $f(x)$ es continua en R, excepto quizás para $x=-1$ y $x=2$ cuya continuidad es dudosa; se estudian ambos casos a continuación.

$$x=-1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (-2x+1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} 3 = 3 = f(-1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow$ La función $f(x)$ es continua en $x=-1$.

$$x=2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 3 = 3 = f(2) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x-1) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow$ La función $f(x)$ es continua en $x=2$

La función $f(x)$ es continua en R.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para los valores $x=-1$ y $x=2$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas laterales existen y son iguales en dicho punto.

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & si\ \ \ x < -1 \\ 0 & si\ \ -1 \le x \le 2. \\ \ 2 & si\ \ \ x > 2 \end{cases}$$

Para $x=-1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(-1^-) = -2 \\ f'(-1^+) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(-1^-) \ne f'(-1^+) \Rightarrow$ La función $f(x)$ no es derivable para $x=-1$.

Para $x = 2 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f'(2^-) = 0 \\ f'(2^+) = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow$ La función $f(x)$ no es derivable para $x = 2$.

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ es\ derivable\ en\ R - \{-1, 2\}}}.$$

$b)$ De la explicación del apartado anterior se deduce que:

$$\underline{\boldsymbol{La\ funcion\ f(x)\ permanece\ constante\ en\ [-1, 2]}}.$$

7º) Determinar la función $f(x)$ tal que su gráfica pase por el origen de coordenadas y su derivada sea $f'(x) = (2x+1) \cdot e^{-x}$.

Solución:

Sea la función $f(x)$. Se cumple que $f(x) = \int (2x+1) \cdot e^{-x} \cdot dx$.

Procediendo por el método "por partes":

$$f(x) = \int (2x+1) \cdot e^{-x} \cdot dx \ \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2x+1 = u \ \rightarrow du = 2 \cdot dx \\ e^{-x} \cdot dx = dv \ \rightarrow v = -e^{-x} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (2x+1) \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot (2 \cdot dx) = -\ (2x+1) \cdot e^{-x} + 2 \cdot \int e^{-x} \cdot dx =$$

$$= -(2x+1) \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{-x} + C = -e^{-x} \cdot (2x+1+2) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = -e^{-x} \cdot (2x+3) + C.$$

Por pasar por el origen de coordenadas:

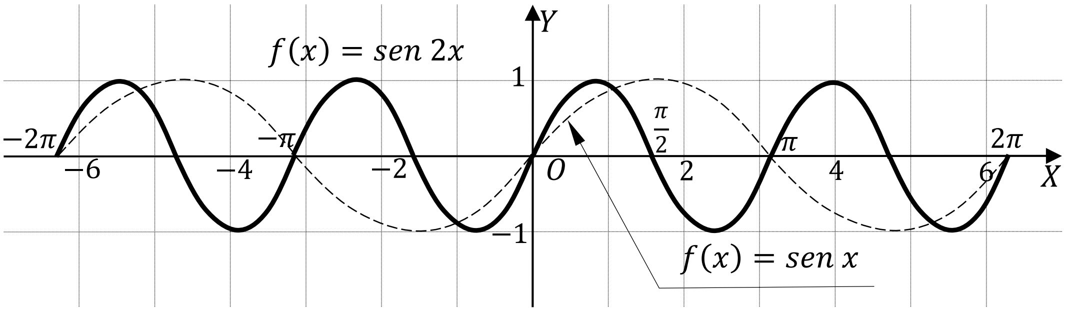
$$f(0) = 0 \Rightarrow -e^{-0} \cdot (2 \cdot 0 + 3) + C = 0; \ -3 + C = 0 \Rightarrow C = 3.$$

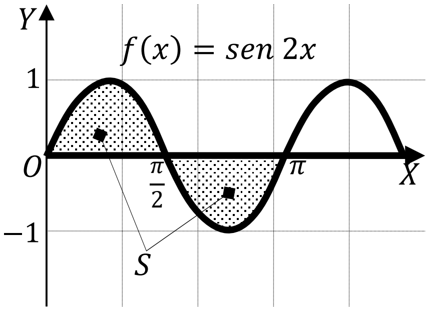
$$\underline{\boldsymbol{f(x) = -e^{-x} \cdot (2x+3) + 3.}}$$

8º) Calcular el área encerrada por la función $f(x) = sen\ 2x$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución:

Conviene recordar cómo es la función $f(x) = sen\ 2x$ y su relación con la función $f(x) = sen\ x$.





De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ 2x \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen\ 2x \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ 2x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ 2x \cdot 2 \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2x = t \\ 2 \cdot dx = dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \pi \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow S = \int_0^{\pi} sen\ t \cdot dt =$$

$$[-\cos t]_0^{\pi} = [\cos t]_{\pi}^{0} =$$

$$= \cos 0 - \cos \pi = 1 - (-1) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 2\ u^2}}.$$

9º) En un centro educativo han preguntado a sus alumnos acerca de alergias alimentarias, resultando que un 10 % es celíaco y un 15 % es alérgico a la lactosa. Además, el 20 % tiene alguna de las dos alergias. Si se elige un alumno al azar, calcular las siguientes probabilidades:

a) Tenga solo una de las dos alergias.

b) Sea celíaco si sabemos que no es alérgico a la lactosa.

Solución:

$$Datos\colon\ P(C)=0{,}10;\ \ P(L)=0{,}15;\ \ P(C\cup L)=0{,}20.$$

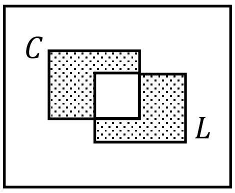
a) $\quad P(C\cup L)=P(C)+P(L)-P(C\cap L)\Rightarrow$

$\Rightarrow P(C\cap L)=P(C)+P(L)-P(C\cup L)=$

$=0{,}15+0{,}10-0{,}20=0{,}25-0{,}20=0{,}05.$

$$P(C\ o\ L)=P(C\cup L)-P(C\cap L)=0{,}20-0{,}05\Rightarrow$$

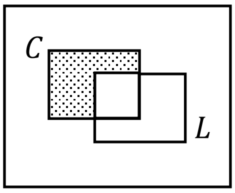
$$\underline{\boldsymbol{P(C\ o\ L)=0,15.}}$$



$P(A\ o\ C)=1-P(A\cap B)$

b) $P(C/\overline{L})=\frac{P(C\cap\overline{L})}{P(\overline{L})}=\frac{P(C)-P(C\cap L)}{1-P(L)}=\frac{0{,}10-0{,}05}{1-0{,}15}=$

$=\frac{0{,}05}{0{,}85}=\underline{0{,}0588}.$



$P(C\cap\overline{L})=P(C)-P(C\cap L)$

10º) Un examen con opción múltiple está compuesto por 10 preguntas, con cuatro respuestas posibles cada una, de las cuales sólo una es correcta. Suponga que uno de los estudiantes responde a todas las preguntas del examen al azar. Calcular la probabilidad de que conteste bien:

$a)$ Cinco preguntas. $b)$ Alguna pregunta.

$c)$ Calcular la media y la desviación típica de la distribución.

Solución:

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 10;\;\; p = \frac{1}{4} = 0{,}25;\;\; q = 1 - 0{,}0{,}25 = 0{,}75.$ $\qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

$a)\; r = 5 \Rightarrow P(5) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}25^5 \cdot 0{,}75^5 = \frac{10!}{(10-5)\cdot 5!} \cdot 0{,}0010 \cdot 0{,}2373 =$

$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} \cdot 0{,}00023 = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 0{,}00023 = \underline{0{,}0584}.$

$b)$ Utilizando la probabilidad del suceso contrario: la probabilidad de que conteste bien alguna pregunta es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que conteste mal las diez.

$$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{10} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}0563 = \underline{0{,}9437}.$$

$c)$ Cuando se quiere aproximar una distribución binomial a otra normal tiene que cumplirse que $\begin{cases} n \cdot p > 5 \\ n \cdot q > 5 \end{cases}.$

Distribución normal: $X = (\mu, \sigma)$.

Distribución binomial: $X'\left(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}\right)$.

$n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5 < 5;\;\; n \cdot q = 10 \cdot \frac{3}{4} = 7{,}5 > 5$

$\mu = n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\mu = 2{,}5.}$ $\qquad \sigma = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \Rightarrow \underline{\sigma = \frac{\sqrt{30}}{4} \cong 1{,}37.}$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 preguntas. Es estudiante ha de elegir 5 preguntas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregirá la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas y las soluciones.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Estudiar el rango de la matriz $A - \lambda I$ según los valores de $\lambda \in R$, donde I es la matriz identidad de orden 2 × 2.

$b)$ Para $\lambda = 2$ solucionar el sistema $AX = \lambda X$, donde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2º) Discutir el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4x + y - 2az = a \\ ax - y + z = 0 \\ y - az = -1 \end{cases}$, según los valores reales del parámetro λ.

3º) Dados los puntos $A(0,0,2)$ y $B(1,1,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. Calcular un punto $P \in r$ para que el triángulo ABP tenga un ángulo recto en el punto A.

4º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2y \\ z = 1 - x \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$:

$a)$ Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

$b)$ Calcular la distancia entre las dos rectas.

5º) Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$:

$a)$ Estudiar asíntotas, monotonía y puntos extremos de $f(x)$.

$b)$ Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$.

6º) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x - L(x^2 + 1)$.

7º) Calcular la integral $I = \int \frac{1}{x^3 - x} \cdot dx$.

8º) Hallar el parámetro positivo $a \in R$ tal que el área de la región plana encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = ax$ sea 4/3.

9º) El 50 % de los alumnos de la UEX practica "running" y el 30 % monta en bicicleta. Además, se sabe que el 70 % de los alumnos de la UEX practica uno de los dos deportes. Si seleccionamos un alumno al azar, se pide:

$a)$ La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes.

$b)$ Si practica el deporte de montar en bicicleta, ¿cuál es la probabilidad de que practique running?

$c)$ ¿Son independientes los sucesos "Practicar running" y "Practicar montar en bicicleta"?

10º) El diámetro de las cerezas picotas del Jerte se distribuye normalmente con media 2,5 cm y desviación típica 0,2 cm.

$a)$ Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10 % de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas?

$b)$ Si tomamos una cereza picota del Jerte al azar, ¿qué probabilidad tiene la cereza de tener un diámetro entre 2,2 cm y 2,8 cm?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Estudiar el rango de la matriz $A - \lambda I$ según los valores de $\lambda \in R$, donde I es la matriz identidad de orden 2×2.

b) Para $\lambda = 2$ solucionar el sistema $AX = \lambda X$, donde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Solución

a) $$A - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$|A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 2 = 0 \Rightarrow -\lambda + \lambda^2 - 2 = 0;$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0;\ \ \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para}\ \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda \neq -1} \\ \boldsymbol{\lambda \neq 2} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ (A - \lambda I) = 2.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Para}\ \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\lambda = -1} \\ \boldsymbol{\lambda = 2} \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ (A - \lambda I) = 1.}}$$

b) Para $\lambda = 2 \Rightarrow A \cdot X = 2X \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 2y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r} 2y = 2x \\ x + y = 2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x - y = 0.$ Sistema compatible indeterminado.

Haciendo $y = \mu \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x = y = \mu, \forall \mu \in R.}}$$

2º) Discutir el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4x + y - 2az = a \\ ax - y + z = 0 \\ y - az = -1 \end{cases}$, según los valores reales del parámetro λ.

Solución

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2a \\ a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2a & a \\ a & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a & -1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2a \\ a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{vmatrix} = 4a + 2a^2 - 4 + a^2 = 0;\ \ 3a^2 + 4a - 4 = 0;$$

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} = \frac{-2 \pm 4}{3} \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = \frac{2}{3}.$$

$$\boldsymbol{Para \begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 2/3 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 4 - 2 = 6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = \frac{2}{3} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + \frac{4}{9} + \frac{2}{3} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{Para \begin{cases} a = -2 \\ a = 2/3 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

3º) Dados los puntos $A(0,0,2)$ y $B(1,1,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$. Calcular un punto $P \in r$ para que el triángulo ABP tenga un ángulo recto en el punto A.

Solución

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de r es $P(1,\lambda,\lambda)$.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(1,1,0)-(0,0,2)]=(1,1,-2)$.

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=[(1,\lambda,\lambda)-(0,0,2)]=(1,\lambda,\lambda-2)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=0 \Rightarrow (1,1,-2)\cdot(1,\lambda,\lambda-2)=0;\ \ 1+\lambda-2\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=5$.

El punto pedido es $P(1,5,5)$.

4º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2y \\ z = 1 - x \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$:

a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

b) Calcular la distancia entre las dos rectas.

Solución

a) La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2y \\ z = 1 - x \end{cases} \Rightarrow y = \lambda;\;\; x = 2 - 2\lambda;\;\; z = -1 + 2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(2, 0, -1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2, -1, -2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(1, 3, -1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2, 1, -2)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1, 3, -1) - (2, 0, -1)] = (-1, 3, 0)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el valor del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

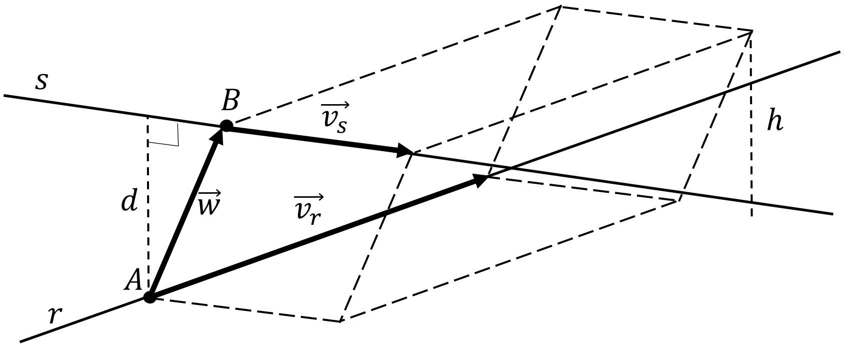
$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -12 - 2 - 2 + 12 = -4 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} = 3 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

Las rectas r y s se cruzan.

b) Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, y el vector $\overrightarrow{w} = (-1, 2, 0)$ hallado en el apartado anterior.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}\right) = \left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|}.$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{matrix}\right\|}{\left|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{matrix}\right|} = \frac{|-4|}{|2i-4j+2k+2k+2i+4j|} = \frac{4}{|4i+4k|} = \frac{1}{|i+k|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{d(r,s) = \frac{\sqrt{2}}{2} u.}}$$

5º) Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$:

a) Estudiar asíntotas, monotonía y puntos extremos de $f(x)$.

b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$.

Solución

a) Por tratarse de una función racional, su dominio es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador:

$1 - x^2 = 0;\ \ x_1 = -1, x_2 = 1 \Rightarrow D(f) \Rightarrow R - \{-1, 1\}$.

Teniendo en cuenta que $f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = \frac{-x^3}{1-x^2} = -\frac{x^3}{1-x^2} = -f(x)$, la función es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores que toma la función cuando la variable tiende a más infinito y menos infinito.

$y = k = \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty \ \Rightarrow\ \underline{No\ tiene\ síntotas\ horizontales}.$

Verticales: Son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

Son asíntotas verticales las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x-x^3} = -1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + 1 \cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x-x^3}{1-x^2} = 0.$$

Asíntota oblicua: $y = -x$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot(1-x^2) - x^3\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2-3x^4+2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

Para estudiar el signo de la derivada (crecimiento y decrecimiento) se tiene en cuenta que $\frac{x^2}{(1-x^2)^2} > 0, \forall x \in D(f)$, el signo de $f'(x)$ es el que tenga $3 - x^2$:

$3 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}.$

Las raíces halladas dividen al dominio de la función en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, \sqrt{3})\ y\ (\sqrt{3}, +\infty)$, en los cuales la función es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 2 \in (\sqrt{3}, +\infty)$:

$x = 2 \Rightarrow f'(2) = \frac{2^2\cdot(3-2^2)}{(1-2^2)^2} = \frac{-4}{9} < 0 \Rightarrow Decrec.$

Teniendo en cuenta lo anterior y el dominio de la función, se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right).}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right).}}$$

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que anulan su primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2} = 0;\;\; x^2(3-x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x) = \frac{(6x-4x^3)\cdot(1-x^2)^2 - x^2(3-x^2)\cdot[2\cdot(1-x^2)\cdot(-2x)]}{(1-x^2)^4} = \frac{(6x-4x^3)\cdot(1-x^2)+4x\cdot x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^3} =$$

$$= \frac{6x-6x^3-4x^3+4x^5+12x^3-4x^5}{(1-x^2)^3} = \frac{6x+2x^3}{(1-x^2)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

$$f''\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{-2\sqrt{3}\cdot(3+3)}{(1-3)^3} = \frac{-22\sqrt{3}}{-8} > 0 \;\Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -\sqrt{3}.$$

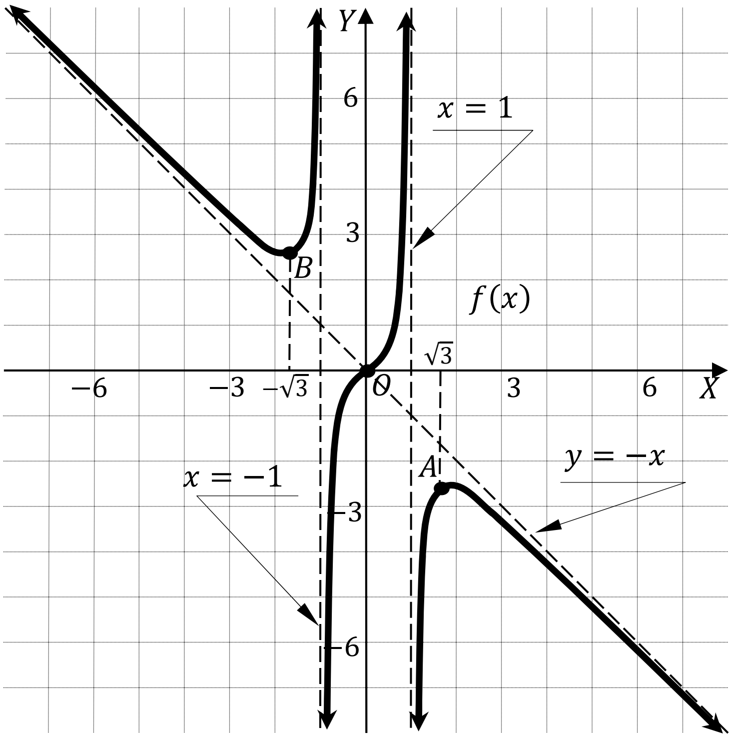
Por simetría con respecto al origen: $Máximo\ relativo\ para\ x = \sqrt{3}$.

$$f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{-2} \cong -2{,}6 \Rightarrow Máx. \Rightarrow A\left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \approx A(1{,}7; -2{,}6).$$

Por simetría: $Mín. \Rightarrow B\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \approx B(-1{,}7; 2{,}6)$.

$$f''(0) = \frac{2\cdot 0\cdot(3+0^2)}{(1-0^2)^3} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow Ni\ máximo\ ni\ mínimo\ (punto\ inflexión).$$

$b)$



La representación gráfica, aproximada, de la función es la que se indica en la figura adjunta.

6º) Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x - L(x^2+1)$.

Solución

La condición necesaria para que una función tenga un punto de inflexión es que se anule su segunda derivada.

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

$$f''(x) = \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x^2+1)-(x-1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2\cdot(x-1)\cdot\left[(x^2+1)-x(x-1)\right]}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x^2+1-x^2+x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2}.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0;\;\; 2(x^2-1) = 0;\;\; x^2-1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

$$f(-1) = -1 - L[(-1)^2+1] = -1 - L2 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P.I.: A(-1, -1-L2)}}.$$

$$f(1) = 1 - L(1^2+1) = 1 - L2 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P.I.: B(1, 1-L2)}}.$$

7º) Calcular la integral $I=\int \frac{1}{x^3-x}\cdot dx$.

Solución

$$I=\int \frac{1}{x^3-x}\cdot dx=\int \frac{1}{x(x^2-1)}\cdot dx=\int \frac{1}{x(x+1)(x-1)}\cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{A(x+1)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{Ax^2-A+Bx^2-Bx+Cx^2+Cx}{x(x+1)(x-1)}=\frac{(A+B+C)x^2+(-B+C)x+(-A)}{x(x+1)(x-1)} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B+C=0 \\ -B+C=0 \\ -A=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=-1;$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} B+C=1 \\ -B+C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2C=1;\;\; C=\frac{1}{2};\;\; B=\frac{1}{2}.$$

$$I=\int \frac{1}{x^3-x}dx=\int \left(\frac{-1}{x}+\frac{1/2}{x+1}+\frac{1/2}{x-1}\right)dx=-L|x|+\frac{1}{2}L|x+1|+\frac{1}{2}L|x-1|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot [L|x+1|+L|x-1|]-L|x|+C=\frac{1}{2}\cdot L|x^2-1|-L|x|+C.$$

$$\underline{\boldsymbol{I=\int \frac{1}{x^3-x}dx=L\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|}+C.}}$$

8º) Hallar el parámetro positivo $a \in R$ tal que el área de la región plana encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = ax$ sea 4/3.

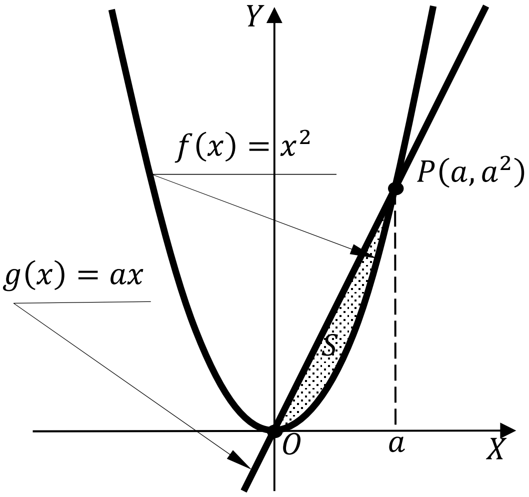
Solución

Los puntos de corte de ambas funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = ax; \;\; x^2 - ax = 0;$$

$$x(x-a) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = a.$$

Los puntos de corte son el origen de coordenadas y el punto $P(x, x^2)$, que también puede expresarse como $P(a, a^2)$.



De la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_0^a [g(x) - f(x)] \cdot dx = \frac{4}{3}; \;\; \int_0^a (ax - x^2) \cdot dx = \frac{4}{3}; \;\; = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{4}{3};$$

$$\left(\frac{a \cdot a^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right) - 0 = \frac{4}{3}; \;\; \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}; \;\; 3a^3 - 2a^3 = 8; \;\; a^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a = 2\ u}}.$$

9º) El 50 % de los alumnos de la UEX practica "running" y el 30 % monta en bicicleta. Además, se sabe que el 70 % de los alumnos de la UEX practica uno de los dos deportes. Si seleccionamos un alumno al azar, se pide:

a) La probabilidad de que no practique ninguno de los dos deportes.

b) Si practica el deporte de montar en bicicleta, ¿cuál es la probabilidad de que practique running?

c) ¿Son independientes los sucesos "Practicar running" y "Practicar montar en bicicleta"?

Solución

Llamamos: $R \rightarrow Runnnig\ y\ B \rightarrow Bicicleta.$

$Datos: P(R) = 0{,}5;\ \ P(B) = 0{,}3;\ \ P(R \cup B) = 0{,}7.$

a)

$$P = P\left(\overline{R \cup B}\right) = 1 - P(R \cup B) = 1 - 0{,}7 = \underline{0{,}3 = 30\ \%}.$$

b)

$$P = P(R/B) = \frac{P(R \cap B)}{P(B)} = \frac{P(R) + P(B) - P(R \cup B)}{P(B)} = \frac{0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}7}{0{,}3} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \underline{\frac{1}{3} = 0{,}3333}.$$

c) Dos sucesos R y B son independientes si $P(R \cap B) = P(R) \cdot P(B)$.

$P(R \cap B) = P(R) \cdot P(B) \Rightarrow 0{,}5 \cdot 0{,}3 \neq 0{,}1 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{A\ y\ B\ no\ son\ independientes}}.$$

10º) El diámetro de las cerezas picotas del Jerte se distribuye normalmente con media 2,5 cm y desviación típica 0,2 cm.

$a)$ Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10 % de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas?

$b)$ Si tomamos una cereza picota del Jerte al azar, ¿qué probabilidad tiene la cereza de tener un diámetro entre 2,2 cm y 2,8 cm?

Solución

$a)\ Datos\colon\ \mu = 2{,}5;\ \ \sigma = 0{,}2.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(2{,}5; 0{,}2).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-2{,}5}{0{,}2}$.

Nos piden elegir el 10 % de las más grandes, o sea, eliminar el 90 % de las cerezas más pequeñas.

$P = P(X < 0{,}9) = P\left(Z < \frac{X-2{,}5}{0{,}2}\right) = 0{,}9.$ Mirando en la tabla $N(0,1)$ al valor 0,9 le corresponde, aproximadamente, 1,28:

$\frac{X-2{,}5}{0{,}2} = 1,28;\ \ X - 2{,}5 = 0{,}2 \cdot 1{,}28;\ \ X = 2{,}5 + 0{,}256 = 2{,}756.$

Las cerezas elegidas deben tener un diámetro igual o mayor que 2, 756 cm ***.***

$b)\ P = P(2{,}2 < X < 2{,}8) = P\left(\frac{2{,}2-2{,}5}{0{,}2} < Z < \frac{2{,}8-2{,}5}{0{,}2}\right) = P\left(\frac{-0{,}3}{0{,}2} < Z < \frac{0{,}3}{0{,}2}\right) =$

$= P(-1{,}5 < Z < 1{,}5) = P(Z < 1{,}5) - P(Z < -1{,}5) =$

$= P(Z < 1{,}5) - [1 - P(Z < 1{,}5)] = P(Z < 1{,}5) - 1 + P(Z < 1{,}5) =$

$= 2 \cdot P(Z < 1{,}5) - 1 = 2 \cdot 0{,}9332 - 1 = 1{,}8664 - 1 = \underline{0{,}8664}.$