MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

GALICIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 8 preguntas, de las que puede responder un máximo de 5, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, sólo se corregirán las 5 primeras respondidas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1º) Despeje X de la ecuación matricial $AB(X-I)=C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X siendo las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix}2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

2º) Discuta el sistema: $\begin{cases} x+(m-3)y+mz=1\\ (m-3)y+(m^2-m)z=1\\ x+m^2z=0\end{cases}$ según los valores de m.

3º) $a)$ Calcule los límites $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x}{sen\ x}$ y $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot Lx)$, donde Lx es el logaritmo neperiano de x.

$b)$ Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que $f(0)=0, f(3)=0, f''(x)>0$ en el intervalo $(0,1), f''(x)<0$ en el intervalo $(2,3)$ y f es constante en el intervalo $(1,2)$.

4º) Obtenga la función f, sabiendo que $f''(x)=2x-e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y=3x-1$.

5º) $a)$ Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1,-1,0)$ y es perpendicular a la recta $r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-1\\ z=0\end{cases}, \lambda\in R$.

$b)$ Calcule los dos puntos de la recta $s\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{cases}, \lambda\in R$, cuya distancia al plano de ecuación $\pi\equiv x-1=0$ es igual a 2.

6º) $a)$ Halle los valores de $k\ y\ de\ m$ que hacen que los puntos $A(k,3,m), B(2,0,2)$ y $C(k,2,0)$ estén alineados.

$b)$ Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$, estudie su posición relativa. Si se cortan, calcule el punto de corte.

7º) $a)$ Si $P(A \cup B) = \frac{1}{3}\ y\ P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles. ¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

$b)$ En una cierta ciudad, el 21 % de las personas leen ciencia ficción, el 63 % leen novela negra, y el 17 % leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

1.- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.

2.- La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

8º) $a)$ Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

$b)$ Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0{,}8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Despeje X de la ecuación matricial $AB(X-I)=C$, donde I es la matriz identidad (asuma que el producto AB tiene inversa). Luego, calcule X siendo las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&2&4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Solución:

$$A\cdot B\cdot(X-I)=C;\;\; A\cdot B\cdot X-AB\cdot I=C;\;\; A\cdot B\cdot X=C+A\cdot B;$$

$$(A\cdot B)^{-1}\cdot(A\cdot B)\cdot X=(A\cdot B)^{-1}\cdot C+(A\cdot B)^{-1}\cdot(A\cdot B);$$

$$I\cdot X=(A\cdot B)^{-1}\cdot C+I\Rightarrow \underline{X=(A\cdot B)^{-1}\cdot C+I}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&6\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa de $A\cdot B$ por el método de Gauss-Jordan:

$$(A\cdot B|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&4&6&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\1&0&2&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\4&4&6&1&0&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_3\to F_3-4F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\0&4&-2&1&0&-4\end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\to F_3-4F_2\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&-2&1&-4&-4\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to F_1+F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&0&1&0\\0&0&-2&1&-4&-4\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{F_3\to -\tfrac{1}{2}F_3\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&2&2\end{array}\right)\Rightarrow(A\cdot B)^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&-8&-6\\0&2&0\\-1&4&4\end{pmatrix}.$$

$$X=(A\cdot B)^{-1}\cdot C+I=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&-8&-6\\0&2&0\\-1&4&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4&-2&0\\0&0&2\\-2&2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}}}.$$

2º) Discuta el sistema: $\begin{cases} x+(m-3)y+mz=1 \\ (m-3)y+(m^2-m)z=1 \\ x+m^2z=0 \end{cases}$ según los valores de m.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 1 & 0 & m^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{vmatrix}=$$

$$=m^2(m-3)+m(m-1)(m-3)-m(m-3)=0;$$

$$=(m-3)\cdot[m^2+m(m-1)-m]=(m-3)\cdot(m^2+m^2-m-m)=0;$$

$$(m-3)(2m^2-2m)=0;\ \ 2m(m-3)(m-1)=0 \Rightarrow m_1=0, m_2=1, m_3=3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 1 \\ m\neq 3 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}}$$

$$Para\ m=0 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_2, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-3+3=0 \Rightarrow Rang.\ A'=2.$$

$$Para\ m=1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-2+2=0 \Rightarrow Rang. A'=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para \begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}}$$

$$Para\ m=3 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix}=3-6-9=-12\neq 0 \Rightarrow Rang.\ A'=3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ m=3 \Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$$

3º) $a)$ Calcule los límites $\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos x}{sen\, x}$ y $\lim_{x\to 0^+} (x \cdot Lx)$, donde Lx es el logaritmo neperiano de x.

$b)$ Dibuje la gráfica de una función f continua y no negativa en el intervalo $[0,3]$ tal que $f(0) = 0, f(3) = 0, f''(x) > 0$ en el intervalo $(0,1), f''(x) < 0$ en el intervalo $(2,3)$ y f es constante en el intervalo $(1,2)$.

Solución:

$a)$ $\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos x}{sen\, x} = \frac{0\cdot\cos 0}{sen\, 0} = \frac{0\cdot 1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot\cos x - x\cdot sen\, x}{\cos x} =$

$$= \frac{\cos 0 - 0\cdot sen\, 0}{\cos 0} = \frac{1 - 0\cdot 0}{1} \Rightarrow$$

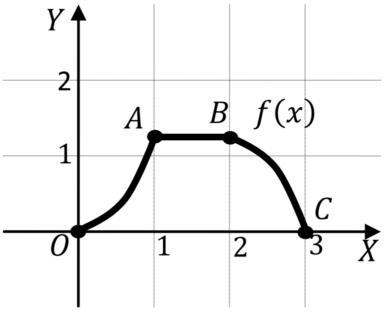
$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos x}{sen\, x} = 1.}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (x \cdot Lx) = 0\cdot(-\infty) \Rightarrow Ind. \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{Lx}{\frac{1}{x}} = \frac{L0^+}{\frac{1}{0}} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+} x \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} (x \cdot Lx) = 0.}}$$

$b)$ Para la realización de la gráfica de $f(x)$ se ha tenido en cuenta que una función es convexa $(\cup)$ cuando su segunda derivada es mayor que cero, intervalo $(0,1)$, y que una función es cóncava $(\cap)$ cuando su segunda derivada es menor que cero, intervalo $(2,3)$, así como, que la función es constante en el intervalo $(1,2)$.



4º) Obtenga la función f, sabiendo que $f''(x) = 2x - e^{-x}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 3x - 1$.

Solución:

$$f'(x) = \int f''(x) \cdot dx = \int (2x - e^{-x}) \cdot dx = 2 \cdot \int x \cdot dx - \int e^{-x} \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \frac{x^2}{2} - A = x^2 - A. \qquad (*)$$

$$A = \int e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} -x = t \\ dx = -dt \end{Bmatrix} \Rightarrow -\int e^t \cdot dt = -e^t + K_1 = -e^{-x} + K_1.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de A:

$$f'(x) = x^2 - (-e^{-x} + K_1) \Rightarrow f'(x) = x^2 + e^{-x} + K_1.$$

La pendiente de la recta $y = 3x - 1$ es $m = 3$.

Sabiendo que la pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$m = f'(0) = 3 \Rightarrow 0^2 + e^{-0} + K_1 = 3;\ \ 0 + 1 + K_1 = 3 \Rightarrow K_1 = 2.$$

La función derivada resulta: $f'(x) = x^2 + e^{-x} + 2$.

El punto de tangencia es: $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow T(0, -1)$, teniendo en cuenta que el punto de tangencia pertenece a la función $f(x)$ y a la tangente $y = 3x - 1$.

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (x^2 + e^{-x} + 2) \cdot dx = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + 2x + K_2.$$

Teniendo en cuenta que $f(0) = -1$:

$$f(0) = \frac{0^3}{3} - e^{-0} + 2 \cdot 0 + K_2 = -1;\ \ 0 - 1 + 0 + K_2 = -1 \Rightarrow K_2 = 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{3} - e^{-x} + 2x.}}$$

5º) $a)$ Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1,-1,0)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in R$.

$b)$ Calcule los dos puntos de la recta $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, $\lambda \in R$, cuya distancia al plano de ecuación $\pi \equiv x - 1 = 0$ es igual a 2.

Solución:

$a)$ Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1,0,0)$.

El haz de planos, β, perpendiculares a r tienen por vector normal a cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector director de la recta; su expresión general es de la forma: $\beta \equiv x + D = 0$.

De los infinitos planos de haz β, el plano π que contiene al punto $P(1,-1,0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv x + D = 0 \\ P(1,-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + D = 0;\;\; D = -1 \;\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv x - 1 = 0}}.$$

$b)$ Un punto genérico de la recta $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ es $Q(\lambda,\lambda,\lambda)$.

La distancia del punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $Q(\lambda,\lambda,\lambda)$ y al plano $\pi \equiv x - 1 = 0$:

$$d(Q,\pi) = \frac{|1\cdot\lambda-1|}{\sqrt{1^2}} = 2;\;\; |\lambda - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 1 = 2 \rightarrow \lambda_1 = 3 \\ -\lambda + 1 = 2 \rightarrow \lambda_2 = -1 \end{cases}.$$

Los puntos pedidos son $\underline{\boldsymbol{Q_1(3,3,3)\ y\ Q_2(-1,-1,-1)}}$.

6º) a) Halle los valores de k y de m que hacen que los puntos $A(k,3,m), B(2,0,2)$ y $C(k,2,0)$ estén alineados.

b) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$, estudie su posición relativa. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Solución:

a) Los puntos $A(k,3,m), B(2,0,2)$ y $C(k,2,0)$ estarán alineados cuando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean linealmente dependientes, o sea, que tengan proporcionales sus componentes.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2,0,2) - (k,3,m)] = (2-k,-3,2-m).$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(k,2,0) - (k,3,m)] = (0,-1,-m).$$

$$\frac{2-k}{0} = \frac{-3}{-1} = \frac{2-m}{-m} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{k = 2}}.$$

$$-3m = 2 - m;\ -2m = 2 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{m = -1}}.$$

b) Un punto y un vector director de la recta r son $A(1,-1,2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2,3,2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(-2,-3,-1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (3,2,3)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-2,-3,-1) - (1,-1,2)] = (-3,-2,-3)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} < 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ en\ un\ punto}}.$$

Para hallar el punto de corte expresamos las rectas por ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda; \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}\ s \equiv \begin{cases} x = -2 + 3\delta \\ y = -3 + 2\delta. \\ z = -1 + 3\delta \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} 1 + 2\lambda = -2 + 3\delta \\ -1 + 3\lambda = -3 + 2\delta \\ 2 + 2\lambda = -1 + 3\delta \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\lambda - 3\delta = -3 \\ 3\lambda - 2\delta = -2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -4\lambda + 6\delta = 6 \\ 9\lambda - 6\delta = -6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5\lambda = 0;\ \ \lambda = 0.$$

El punto de corte de las rectas r y s es $\underline{A(1,-1,2)}$.

7º) $a)$ Si $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A)$ sabiendo que A y B son sucesos incompatibles. ¿Cuánto valdría $P(A)$ si supusiéramos que A y B son, en lugar de incompatibles, independientes?

$b)$ En una cierta ciudad, el 21 % de las personas leen ciencia ficción, el 63 % leen novela negra, y el 17 % leen tanto ciencia ficción como novela negra. Si se elige al azar una persona de esa ciudad, calcule:

1.- La probabilidad de que lea novela negra sabiendo que lee ciencia ficción.

2.- La probabilidad de que no lea ni ciencia ficción ni novela negra.

Solución:

$a)$ Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P(A \cap B) = 0$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$P(A) = P(A \cup B) - P(B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$.

Si los sucesos A y B son incompatibles: $\underline{\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{12}}}$**.**

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \frac{1}{3} = P(A) + \frac{1}{4} - P(A) \cdot \frac{1}{4}$;

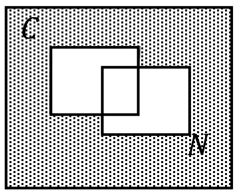
$4 = 12 \cdot P(A) + 3 - 3 \cdot P(A);\ \ 9 \cdot P(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{9}$.

Si los sucesos A y B son independientes: $\underline{\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{9}}}$**.**

$b)$ $Datos: P(C) = 0{,}21;\ \ P(N) = 0{,}63;\ \ P(C \cap N) = 0{,}17$.

1.-

$$P = P(N/C) = \frac{P(N \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}17}{0{,}21} = \underline{0{,}8095}.$$



$P(\overline{C} \cap \overline{N}) = 1 - P(C \cup N)$

2.-

$$P = P\left(\overline{C} \cap \overline{N}\right) = 1 - P(C \cup N) =$$

$= 1 - [\,P(C) + P(N) - P(C \cap N)] = 1 - (0{,}21 + 0{,}63 - 0{,}17) =$

$= 1 - (0{,}84 - 0{,}17) = 1 - 0{,}67 = \underline{0{,}33}$.

8º) $a)$ Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

$b)$ Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0{,}8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

Solución:

$a)$ $\quad Datos: \ \mu = 1; \ \ \sigma = 3.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(1, 3).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-1}{3}$.

$$P = P(-2 \leq X \leq 7) = P\left(\frac{-2-1}{3} \leq Z \leq \frac{7-1}{3}\right) = P\left(\frac{-3}{3} \leq Z \leq \frac{6}{3}\right) =$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 1)] =$$

$$= P(Z \leq 2) - 1 + P(Z \leq 1) = 0{,}9772 - 1 + 0{,}8413 = 1{,}8185 - 1 = \underline{0{,}8185}.$$

$b)$ $X \to N(\mu, 4).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{4}$.

$$P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = P\left(\frac{\mu-\alpha-\mu}{4} \leq Z \leq \frac{\mu+\alpha-\mu}{4}\right) = P\left(\frac{-\alpha}{4} \leq Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-\alpha}{4} \leq Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 0{,}8064.$$

$$P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\alpha}{4}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right)\right] =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - 1 + P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 2 \cdot P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) - 1 = 0{,}8064;$$

$2 \cdot P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 1{,}8064;\ \ P\left(Z \leq \frac{\alpha}{4}\right) = 0{,}9032$. Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, al valor 0,9032 le corresponde exactamente 1,3, por lo cual:

$$\frac{\alpha}{4} = 1{,}3 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\alpha = 5, 2.}}$$

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 8 preguntas, de las que puede responder un máximo de 5, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, sólo se corregirán las 5 primeras respondidas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) $a)$ Obtenga la matriz antisimétrica de A de 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcula su inversa en caso de que exista. Nota: a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de la matriz A.

$b)$ Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{21} \end{pmatrix}$, halle los valores b_{12} y b_{21} sabiendo que B no tiene inversa y que $det(A^{-1}B + A) = -1$.

2º) Discuta el sistema: $\begin{cases} (m+1)x + my + z = 0 \\ y + (m-2)z = -2 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = -3 \end{cases}$ según los valores de m.

3º) $a)$ Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibuje la gráfica de f, la recta tangente y el triángulo.

$b)$ Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si \ \ x \leq 1 \\ ax^2 + bx & si \ \ x > 1 \end{cases}$ sea derivable.

4º) Calcule las siguientes integrales:

$a)$ $I = \int 2x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot dx.$ $b)$ $I = \int sen\, x \cdot sen\,(\cos x) \cdot dx.$

$c)$ $I = \int x^2 \cdot sen\, x \cdot dx.$ $d)$ $I = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \cdot dx.$

5º) $a)$ Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta de ecuación $r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ y pasa por el punto $P(0,1,0)$.

$b)$ Calcule el punto simétrico de $P(11,-14,13)$ con respecto al plano π de ecuación general $\pi \equiv 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

6º) Estudie la posición relativa de la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi \equiv ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros k y a. Luego, si es posible, diga cuando r es perpendicular a π.

7º) a) En una famosa biblioteca, el 70 % de los libros son novelas, el 40 % son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60 % de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80 % de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de estos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos uno.

8º) a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - a < X < 25 + a) = 0{,}2128$.

8º) a) Calcule el valor de $P(-2 \leq X \leq 7)$ si X sigue una distribución normal de media 1 y desviación típica 3.

b) Calcule el valor de α que hace que $P(\mu - \alpha \leq X \leq \mu + \alpha) = 0{,}8064$ si X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 4.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) a) Obtenga la matriz antisimétrica de A de 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcula su inversa en caso de que exista. Nota: a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de la matriz A.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{21} \end{pmatrix}$, halle los valores b_{12} y b_{21} sabiendo que B no tiene inversa y que $det(A^{-1}B + A) = -1$.

Solución:

a)

Una matriz antisimétrica es toda matriz cuadrada cuya traspuesta es igual a su negativa, es decir: M es antisimétrica si $M^t = -M$.

$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $-A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Resulta que la matriz pedida es, precisamente, la matriz $\underline{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$.

La inversa de A, que existe: $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

$Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\quad A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

b) Una matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{21} \end{vmatrix} = -b_{12} = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{b_{12} = 0}}.$$

$$|A^{-1}B + A| = -1 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right| = -1;$$

$$\left| \begin{pmatrix} -1 & -b_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right| = -1; \ \begin{vmatrix} -1 & 1 - b_{21} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \ 1 - b_{21} = -1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{b_{21} = 2}}.$$

2º) Discuta el sistema: $\begin{cases}(m+1)x+my+z=0\\ y+(m-2)z=-2\\ (m+1)x+my+(m-1)z=-3\end{cases}$ según los valores de m.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}m+1 & m & 1\\ 0 & 1 & m-2\\ m+1 & m & m-1\end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix}m+1 & m & 1 & 0\\ 0 & 1 & m-2 & -2\\ m+1 & m & m-1 & -3\end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix}m+1 & m & 1\\ 0 & 1 & m-2\\ m+1 & m & m-1\end{vmatrix}=$$

$$=(m+1)(m-1)+m(m-2)(m+1)-(m+1)-m(m-2)(m+1)=0;$$

$$=(m+1)(m-1)-(m+1)=0;\ \ (m+1)[(m-1)-1]=0;$$

$$(m+1)(m-2)=0 \Rightarrow m_1=-1, m_2=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ \begin{Bmatrix}m\neq -1\\ m\neq 2\end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}}$$

$$Para\ m=-1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -2\\ 0 & -1 & -2 & -3\end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2+C_3=C_4\} \Rightarrow Rang.\ A'=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ m=-1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}}$$

$$Para\ m=2 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 3 & 2 & 1 & -3\end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix} = -4+4+3=3\neq 0 \Rightarrow Rang. A'=3.$$

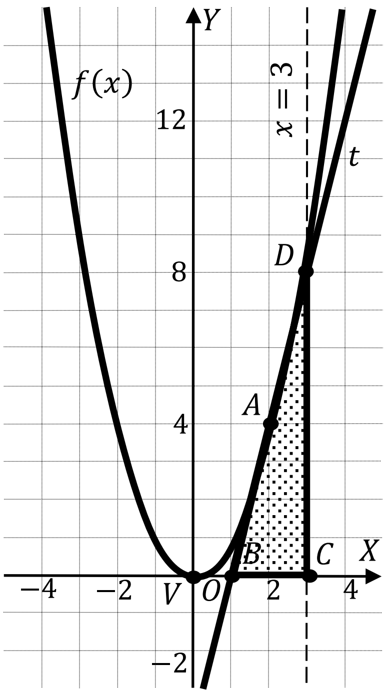
$$\underline{\boldsymbol{Para\ m=2 \Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$$

3º) a) Obtenga las coordenadas de los vértices del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es tangente a la gráfica de $f(x)=x^2$ en el punto de abscisa $x=2$ y que, además, tiene un cateto de longitud 2 situado sobre el eje X. Dibuje la gráfica de f, la recta tangente y el triángulo.

b) Halle los valores de a y b que hacen que la función $f(x)=\begin{cases} 1 & si\ \ x\leq 1 \\ ax^2+bx & si\ \ x>1 \end{cases}$ sea derivable.

Solución:

a)



La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$f'(x)=2x \Rightarrow m=f'(2)=2\cdot 2 \Rightarrow m=4.$

El punto de tangencia es el siguiente:

$f(2)=2^2=4 \Rightarrow A(2,4).$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $A(2,4)$ con $m=4$:

$y-4=4\cdot(x-2)=4x-8.$

La recta tangente es $t\equiv 4x-y-4=0$.

El punto de corte de la tangente con el eje X se obtiene para $y=0$:

$4x-0-4=0;\ \ 4x-4=0;\ \ x-1=0 \Rightarrow B(1,0).$

Teniendo en cuenta que la base del triángulo rectángulo es 2, es extremo del cateto base es $C(3,0)$**.**

El otro vértice del triángulo, D, se obtiene como intersección de la tangente y la recta $x=3$:

$$\left.\begin{array}{r} 4x-y-4=0 \\ x=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 12-y-4=0;\ \ y=8 \Rightarrow D(3,8).$$

b) Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(ax^2+bx)=a+b=f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Rightarrow a+b=1. \quad (1)$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de $a \; y \; b$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 \;\; si \; x < 1 \\ 2ax + b \;\; si \;\; x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \;\Rightarrow f'(1) = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; x < 1 \\ 2a + b \;\; si \;\; x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \; f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 2a + b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -a - b = -1 \\ 2a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a = -1; \;\; b = 2.}}$$

4º) Calcule las siguientes integrales:

$a)\ I = \int 2x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot dx.$ $b)\ I = \int sen\, x \cdot sen\,(\cos x) \cdot dx.$

$c)\ I = \int x^2 \cdot sen\, x \cdot dx.$ $d)\ I = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \cdot dx.$

Solución:

$$a)\ I = \int 2x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x^2+1=t \\ 2x \cdot dx = dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int \sqrt{t} \cdot dt = \int t^{\frac{1}{2}} \cdot dt =$$

$$= \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \cdot t \cdot \sqrt{t} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{I = \int 2x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot (x^2+1) \cdot \sqrt{x^2+1} + C.}}$$

$$b)\ I = \int sen\, x \cdot sen\,(\cos x) \cdot dx. \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \cos x = t \\ sen\, x \cdot dx = -dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow -\int sen\, t \cdot dt = \cos t + C$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{I = \int sen\, x \cdot sen\,(\cos x) \cdot dx = \cos(\cos x) + C.}}$$

$$c)\ I = \int x^2 \cdot sen\, x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x^2 \rightarrow du = 2x \cdot dx \\ sen\, x \cdot dx = dv \rightarrow v = -\cos x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot (-\cos x) - \int -cos\, x \cdot 2x \cdot\ dx = -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \cdot dx =$$

$$= -x^2 \cdot \cos x + 2B = I_1.\ \ (*)$$

$$I_1 = \int x \cdot cos\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \rightarrow du = dx \\ cos\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = sen\ x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot sen\ x - \int sen\ x \cdot dx \Rightarrow I_1 = x \cdot \mathrm{sen}\, x + \cos x.$$

Sustituyendo en (*) el valor de I_1:

$$I = -x^2 \cos x + 2\,(x \cdot senx + \cos x) = -x^2 \cos x + 2\,x \cdot sen\ x + 2 \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{I = \int x^2 \cdot sen\ x \cdot dx = (2 - x^2) \cdot \cos x + 2x \cdot sen\ x + C.}}$$

$$d)\ I = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \cdot dx \Rightarrow \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x+(-2A-B)}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow \left. \begin{matrix} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -A = 1;\ \ A = -1;\ \ B = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \right) \cdot dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) \cdot dx =$$

$$= -L|x-1| + L|x-2| + C \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \cdot dx = L \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C.}}$$

5º) a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a la recta de ecuación $r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{1}$ y pasa por el punto $P(0, 1, 0)$.

b) Calcule el punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto al plano π de ecuación general $\pi \equiv 3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

Solución:

a) Un punto y un vector director de r son $A(-1, -2, -3)$ y $\overrightarrow{v_r} = (3, 2, 1)$.

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = [(0, 1, 0) - (-1, -2, -3)] = (1, 3, 3)$.

La ecuación general del plano π es el siguiente:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{AP}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv 3x - 8y + 7z + 8 = 0}}.$$

b) Un vector normal del plano $\pi \equiv 3x - 8y + 7z + 8 = 0$ es $\vec{n} = (3, -8, 7)$.

La recta t, perpendicular a π y que contiene al punto $P(11, -14, 13)$ tiene la siguiente expresión por unas ecuaciones paramétricas: $t \equiv \begin{cases} x = 11 + 3\delta \\ y = -14 - 8\delta \\ z = 13 + 7\delta \end{cases}$.

El punto M, intersección de la recta t con el plano π es el siguiente:

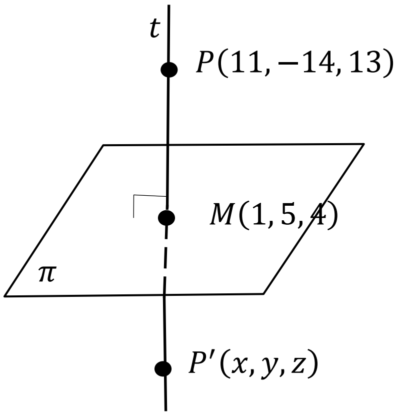
$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 3x - 8y + 7z = -8 \\ t \equiv \begin{cases} x = 11 + 3\delta \\ y = -14 - 8\delta \\ z = 13 + 7\delta \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3(11 + 3\delta) - 8(-14 - 8\delta) + 7(13 + 7\delta) = -8;$

$33 + 9\delta + 112 + 64\delta + 91 + 49\delta = -8;$

$122\delta + 236 = -8;\ \ 122\delta = -244 \Rightarrow \delta = -2 \Rightarrow$

$\left.\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow M(5, 2, -1).$



$$\left.\begin{array}{l} \frac{x+11}{2} = 5 \Rightarrow x = 10 - 11 = -1 \\ \frac{y-14}{2} = 2 \Rightarrow y = 4 + 14 = 18 \\ \frac{z+13}{2} = -1 \Rightarrow z = -2 - 13 = -15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P'(-1, 18, -15\ )}}.$$

6º) Estudie la posición relativa de la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi \equiv ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros $k\ y\ a$. Luego, si es posible, diga cuando r es perpendicular a π.

Solución:

Vector director de r: $\overrightarrow{v_r} = (1, k, 3)$. Vector normal de π: $\vec{n} = (a, 4, 3a)$.

Si los vectores $\overrightarrow{v_r}\ y\ \vec{n}$ son perpendiculares la recta y el plano son paralelos o coincidentes, según que el plano contenga a la recta, o no.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (1, k, 3) \cdot (a, 4, 3a) = a + 4k + 9a = 10a + 4k = 0;\ \ 5a + 2k = 0.$

$$\underline{Si\ 5a + 2k \neq 0\ el\ plano\ \pi\ y\ la\ recta\ r\ son\ secantes}.$$

$$\underline{Si\ 5a + 2k = 0\ el\ plano\ \pi\ y\ la\ recta\ r\ son\ paralelos\ o\ el\ plano\ \pi\ contiene\ a\ r}.$$

Para diferenciar el caso se tiene en cuenta que el plano π contiene a la recta r cuando contiene a uno de sus puntos.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 + k\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}.$

Un punto de r es, por ejemplo: $\lambda = 0 \Rightarrow P(-1, 1, 0)$.

El plano π contiene al punto P cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv ax + 4y + 3az = -2 \\ P(-1, 1, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow -a + 4 + 0 = -2 \Rightarrow a = 6.$$

Resumen:

$$\underline{\boldsymbol{Si\ 5a + 2k \neq 0\ el\ plano\ \pi\ y\ la\ recta\ r\ son\ secantes.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Si\ 5a + 2k = 0 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 6 \to La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos \\ a = 6 \to La\ recta\ r\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi \end{cases}.}}$$

La recta r es perpendicular al plano π cuando los vectores $\overrightarrow{v_r}\ y\ \vec{n}$ son linealmente dependientes, es decir: sus componentes son proporcionales:

$\frac{1}{a} = \frac{k}{4} = \frac{3}{3a} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{k}{4} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ \perp para\ a \cdot k = 4.}}$$

7º) a) En una famosa biblioteca, el 70 % de los libros son novelas, el 40 % son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60 % de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80 % de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de estos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos uno.

Solución:

a) La forma más adecuada para hacer este ejercicio es mediante una tabla de contingencia, considerando "clásicos" a los libros editados antes del siglo XIX y "no clásicos" a los editados después del siglo XIX, pudiendo ser, en ambos casos, novela o no novela. Si el 40 % son libros clásicos y el 60 % de los clásicos son novelas, se deduce que el $(0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24)$ 24 % son novelas clásicas.

La tabla de contingencia que se deduce es la siguiente:

	$Clásico$	$No\ clásico$	$Total$
$Novela$	24	46	70
$No\ novela$	16	14	30
$Total$	40	60	100

Aplicando ahora la regla de Laplace a las dos preguntas que se hacen:

$$P_1 = \frac{(no\ sea\ novela\ pero\ si\ clásico)}{Total\ de\ libros} = \frac{16}{100} = \underline{0{,}16}.$$

$$P_2 = \frac{(novela\ clásica)}{Total\ de\ novelas} = \frac{24}{70} = \underline{0{,}3429}.$$

b) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 3;\ \ p = 0{,}2;\ \ q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8. \qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$$

La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no se resuelva ninguno de los tres delitos:

$$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{3}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^3 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}512 = \underline{0{,}488}.$$

8º) a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.

b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X < 24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25 - a < X < 25 + a) = 0{,}2128$.

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 60;\ \ p = \frac{1}{4} = 0{,}25;\ \ q = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$

Por ser $\left\{\begin{matrix} n \cdot p = 60 \cdot 0{,}25 = 15 > 5 \\ n \cdot q = 60 \cdot 0{,}75 = 45 > 5 \end{matrix}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$\mu = n \cdot p = 60 \cdot 0{,}25 = 15.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{60 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = \sqrt{11{,}25} \cong 3{,}354.$

$X = B(60;\ 0{,}25) \approx N(15;\ 3{,}354).$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-15}{3{,}354}$. Aplicando la corrección de Yates:

$P = P(X \geq 16) = P\left(Z \geq \frac{15{,}5-15}{3{,}354}\right) = P\left(Z \geq \frac{0{,}5}{3{,}354}\right) \cong P(Z \geq 0{,}15) =$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}15) = 1 - 0{,}5596 = \underline{0{,}4404}.$

b) $Datos$: $\mu = 25;\ \ \sigma = 2.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(25, 2).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-25}{2}$.

$P = P(X < 24) = P\left(Z < \frac{24-25}{2}\right) = P\left(Z < \frac{-1}{2}\right) = P(Z < -0{,}5) =$

$= P(Z \geq 0{,}5) = 1 - P(Z \leq 0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = \underline{0{,}3085}.$

$P(25 - a < X < 25 + a) = P\left(\frac{25-\alpha-25}{2} \leq Z \leq \frac{25+\alpha-25}{2}\right) = P\left(\frac{-\alpha}{2} \leq Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(\frac{-\alpha}{2} \leq Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = 0{,}2128.$

$P\left(\frac{-\alpha}{2} \leq Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z \leq -\frac{\alpha}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right)\right] =$

$= P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - 1 + P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cdot P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 0{,}2128;$

$2 \cdot P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = 1{,}2128;\ \ P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = 0{,}6064$. Mirando en la tabla $N(0{,}1)$ de forma inversa, al valor 0,6064 le corresponde exactamente 0,27, por lo cual:

$\frac{\alpha}{2} = 0{,}27 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{\alpha = 0{,}54.}}$$