MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Pedro Ramón Podadera Sánchez y Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Demostrar que $C - AB^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)

b) Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^T X + I$ donde I es la matriz identidad. (3 puntos)

c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n. (3 puntos)

Problema 2:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$. Determinar:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro real m. (4 puntos)

b) La matriz inversa de A en el caso $m = 2$. (4 puntos)

c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8. (2 puntos)

Problema 3:

Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$

a) Indicar justificadamente la posición relativa de r y s. (5 puntos)

b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s. (5 puntos)

Problema 4:

Dados los planos $\pi_1 = 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2 \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$ y la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2. (3 puntos)

b) Calcular el punto P' que es simétrico al punto $P = (1,0,0)$ respecto del plano π_1 (4 puntos)

c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y *r*. (3 puntos)

Problema 5:

Consideramos la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$, obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. (1 punto)

b) Las asíntotas de la función. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. (3 puntos)

d) La primitiva de la función $f(x)$. (4 puntos)

Problema 6:

Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m de longitud.

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor *x* que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. (3 puntos)

b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. (7 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Demostrar que $C - AB^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)

b) Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^T X + I$ donde I es la matriz identidad. (3 puntos)

c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n. (3 puntos)

Solución:

a) Demostrar que$C - AB^T$ tiene inversa y calcularla.

Para demostrar que una matriz cuadrada tiene inversa sólo tenemos que comprobar que su determinante es diferente de cero.

Vamos a ver cuál es la matriz que nos preguntan. Para ello realizamos los cálculos oportunos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ -1\cdot 1 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1 & -1\cdot 0 + 2\cdot 1 - 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C - AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora sólo tenemos que calcular su determinante:

$$|C - AB^T| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-3) - 0\cdot 1 = 3 \neq 0$$

Como es diferente de cero la inversa existe.

Vamos a calcularla. Podemos hacerlo por dos métodos, Gauss o determinantes. Yo lo voy a resolver por ambos pero en el examen basta con utilizar uno de ellos.

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} \end{array}\right)$$

$F_1 = 3F_1 + F_2$

$F_1 = F_1/(-3)$
$F_2 = F_2/(-3)$

Por lo que tenemos que: $(C - AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

Podemos comprobar (es conveniente) el resultado aplicando que: $(C - AB^T)^{-1} \cdot (C - AB^T) = I$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + 0 \cdot (\frac{-1}{3}) & -1 \cdot 1 - 3 \cdot (\frac{-1}{3}) \\ 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (\frac{-1}{3}) & 0 \cdot 1 + (\frac{-1}{3}) \cdot -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que el cálculo es correcto.

Si lo hacemos por determinantes utilizamos la fórmula:

$$(C - AB^T)^{-1} = \frac{1}{|C - AB^T|}(Adj(C - AB^T))^T$$

Tenemos que: $|C - AB^T| = 3$

$$(C - AB^T)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

Que es el mismo resultado que el anterior por lo que no vamos a comprobarlo.

$$\boxed{(C - AB^T)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

b) Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^T X + I$ donde I es la matriz identidad.

Primero tenemos que resolver con las letras:

$CX - AB^T X = I$ (pasamos las incógnitas al miembro de la izquierda)

$(C - AB^T)X = I$ (sacamos factor común por la derecha la incógnita)

$(C - AB^T)^{-1} \cdot (C - AB^T)X = (C - AB^T)^{-1} \cdot I$ (multiplicamos por la izquierda por la inversa del coeficiente de X)

Aplicando que una matriz por su inversa es la identidad tenemos que:

$I \cdot X = (C - AB^T)^{-1} \cdot I$

Como una matriz por la identidad es la misma matriz tenemos que:

$X = (C - AB^T)^{-1}$

Pero esta es la matriz que hemos calculado en el apartado anterior, por lo que no hace falta volver a calcularla:

$$\boxed{X = (C - AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}}$$

c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n.

Este es un ejercicio de sacar la potencia enésima. Se puede resolver por inducción. El producto de matrices de la izquierda lo hicimos en el apartado a):

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que se puede escribir la matriz siguiendo la norma del enunciado:

$(A \cdot B^T)^1 = 2^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si calculamos ahora el cuadrado tenemos:

$(A \cdot B^T)^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ por lo que también se cumple.

Lo suponemos cierto para n-1, es decir:

$(A \cdot B^T)^{n-1} = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} I$

Lo calculamos para n:

$(A \cdot B^T)^n = (A \cdot B^T)^{n-1} \cdot (A \cdot B^T) = 2^{n-1} I \cdot 2I = 2^n I$

Por lo que queda demostrado.

$$(AB^T)^n = 2^n I$$

Problema 2:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$. Determinar:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro real m.

b) La matriz inversa de A en el caso $m = 2$.

c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8.

Solución:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro real m.

Esta matriz es de dimensión 3x3 por lo que su rango será a lo sumo 3. Observamos que no hay ningún menor de orden 2 que no dependa de m por lo que lo más fácil es intentar ver cuando el rango es 3. Para ello tenemos que calcular el menor de orden 3 (el determinante de toda la matriz) y ver cuándo es cero en función de m:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{vmatrix} = m^3 + 0 - 4m^2 \cdot (m-1) - 0 - 0 - 2m^2 = m^3 - 4m^3 + 4m^2 - 2m^2 = -3m^3 + 2m^2$$

Igualando a cero el determinante: $-3m^3 + 2m^2 = 0$

Sacamos factor común la m^2: $m^2 \cdot (-3m+2) = 0$ Primera solución: $m^2 = 0 \rightarrow m = 0$

Segunda solución: $-3m + 2 = 0 \rightarrow m = \frac{2}{3}$

Estudiamos los dos casos:

Si $m = 0$ la matriz queda:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que no va a haber ningún menor de orden 2 diferente de cero ya que cualquier menor incluye una columna de ceros. Por lo tanto el rango será 1.

Si $m = \frac{2}{3}$ la matriz queda: $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$

En esta matriz si podemos buscar menores de orden 2 diferentes de cero:

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{-4}{3} & \frac{4}{9} \end{vmatrix} = \frac{8}{27} - 0 = \frac{8}{27} \neq 0$$

Por lo que el rango es 2.

Por lo tanto:

El rango de la matriz A en función del parámetro real m:

- Si $m = 0$ tenemos que $RgA = 1$
- Si $m = \frac{2}{3}$ tenemos que $RgA = 2$
- Si $m \neq 0$ y $m \neq \frac{2}{3}$ el $RgA = 3$

b) La matriz inversa de A en el caso $m = 2$.

Viendo la discusión anterior sabemos que para el caso $m = 2$ el determinante de la matriz A es $|A| = -3m^3 + 2m^2 = -3(2)^3 + 2(2)^2 = -24 + 8 = -16 \neq 0$ por lo que la matriz inversa existe.

Utilizamos la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$$A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -16 \\ 4 & 2 & -8 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar el resultado aplicando: $A \cdot A^{-1} = I$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 & \frac{-1}{2}+0+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+0-\frac{1}{2} \\ 0-1+1 & 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -1+\frac{3}{2}-\frac{1}{2} \\ 0-1+1 & 0-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0+\frac{3}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que el resultado es correcto.

c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8.

Queremos calcular el $|2A|$ aplicando propiedades de los determinantes y que la matriz A es de dimensión 3x3 sabemos que:

$$|2A| = 2^3|A| = 8|A|$$

Como queremos que valga -8 tenemos que igualar a ese valor:

$$|2A| = 2^3|A| = 8|A| = -8 \rightarrow |A| = -1$$

En el apartado a) hemos obtenido el determinante de la matriz en función del valor de m por lo que hay que resolver:

$$-3m^3 + 2m^2 = -1 \;\rightarrow -3m^3 + 2m^2 + 1 = 0$$

Es una ecuación cúbica que tenemos que factorizar por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & & -3 & -1 & -1 \\ \hline & -3 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

La ecuación de 2º grado resultante de la primera factorización es: $-3m^2 - m - 1 = 0$

que podemos comprobar que no tiene soluciones reales: $m = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-1)}}{2\cdot(-3)} = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{-6}$

Por lo que la factorización queda: $-3m^3 + 2m^2 + 1 = 0 \rightarrow (m-1)\cdot(-3m^2 - m - 1) = 0$

La única solución real es la solución del problema: $\boldsymbol{m = 1}$

Problema 3:

Dadas las rectas $r:\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$

a) Indicar justificadamente la posición relativa de *r* y *s*.

b) Hallar la ecuación de la recta *l* que pasa por el origen y corta a *r* y *s*.

Solución:

Lo primero que hemos de tener en cuenta en este problema es que las rectas que nos han dado están en forma implícita pero nos han despejado *x* e *y* en función de *z* por lo que sería muy fácil pasarlas a paramétricas identificando *z* con el parámetro y hallar un punto y un vector de cada una de ellas:

$$r:\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \to r:\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \forall\lambda \in \mathbb{R} \to P_r = (-1,2,0);\ \overrightarrow{v_r} = (1,-3,1)$$

$$s:\begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases} \to s:\begin{cases} x = 4 - 5\alpha \\ y = -3 + 4\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \forall\alpha \in \mathbb{R} \to P_s = (4,-3,0);\ \overrightarrow{v_s} = (-5,4,1)$$

a) Indicar justificadamente la posición relativa de *r* y *s*.

Dos rectas en el espacio $\mathbb{R}^3$ pueden ser: coincidentes, paralelas, secantes o se cruzan.

Para las dos primeras formas los vectores directores tienen que ser proporcionales. Es fácil comprobar que no lo son: $\frac{1}{-5} \neq \frac{-3}{4} \neq \frac{1}{1}$

Por lo que tienen que cortarse en un punto o cruzarse.

Hallamos ahora un vector auxiliar a partir de los puntos de ambas rectas:

$\overrightarrow{P_rP_s} = (4-(-1), -3-2, 0-0) = (5,-5,0)$ (Podríamos tomar el $(1,-1,0)$)

Si los vectores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$, y $\overrightarrow{P_rP_s}$ son **coplanarios** las rectas se cortan en un punto, en caso contrario **se cruzan**.

Si son coplanarios han de depender linealmente por lo que el determinante formado por los tres vectores debe valer cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 15 + 25 - 20 - 0 + 5 = -5 \neq 0$$

Por lo tanto las rectas se cruzan en el espacio.

b) Hallar la ecuación de la recta *l* que pasa por el origen y corta a *r* y *s*.

Queremos básicamente la ecuación de una recta que se apoye en las que nos han dado y pase por un punto determinado (el origen).

La forma más sencilla de abordar este apartado es con el haz de planos de ambas rectas:

- Hallamos la ecuación del plano que contiene a *r* y pasa por el origen.
- Hallamos la ecuación del plano que contiene a *s* y pasa por el origen.

La intersección de ambos planos será una recta que se apoyará en las rectas dadas y pasará por el origen.

Para obtener el haz de planos hemos de tener las rectas en forma general o implícita. Esto es muy sencillo pasando todos los elementos al miembro de la izquierda:

$$r:\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases} \rightarrow s:\begin{cases} x + 5z - 4 = 0 \\ y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

Haz de planos de la recta *r* (son todos los planos que contienen a la recta):

$$r:\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow (x - z + 1) + k(y + 3z - 2) = 0$$

Como queremos que pase por el origen sustituimos las coordenadas y hallamos el *k*:

$$(x - z + 1) + k(y + 3z - 2) = 0 \rightarrow (0 - 0 + 1) + k(0 + 3 \cdot 0 - 2) = 0 \rightarrow 1 - 2k = 0 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo en el haz de planos ya tenemos el primer plano buscado:

$$(x - z + 1) + k(y + 3z - 2) = 0 \rightarrow (x - z + 1) + \frac{1}{2}(y + 3z - 2) = 0 \rightarrow x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0$$

Como la ecuación del plano está igualada a cero podemos multiplicarla por 2 para simplificar el resultado: $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \rightarrow 2x + y + z = 0$

Hacemos lo mismo para la otra recta.

Haz de planos de la recta *s* (son todos los planos que contienen a la recta):

$$s:\begin{cases} x + 5z - 4 = 0 \\ y - 4z + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow (x + 5z - 4) + k(y - 4z + 3) = 0$$

Como queremos que pase por el origen sustituimos las coordenadas y hallamos el *k*:

$$(x + 5z - 4) + k(y - 4z + 3) = 0 \rightarrow (0 + 5 \cdot 0 - 4) + k(0 - 4 \cdot 0 + 3) = 0 \rightarrow -4 + 3k = 0 \rightarrow k = \frac{4}{3}$$

Sustituyendo en el haz de planos ya tenemos el segundo plano buscado:

$$(x + 5z - 4) + k(y - 4z + 3) = 0 \rightarrow (x + 5z - 4) + \frac{4}{3}(y - 4z + 3) = 0 \rightarrow x + \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z = 0$$

Como la ecuación del plano está igualada a cero podemos multiplicarla por 3 para simplificar el resultado: $x + \frac{4}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \rightarrow 3x + 4y - z = 0$

La ecuación de la recta *l* es la intersección de ambos planos:

$$\boxed{l:\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}}$$

Autores: Pedro Ramón Podadera Sánchez y Antonio Menguianos

Problema 4:

Dados los planos $\pi_1 = 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2 \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$ y la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2.

b) Calcular el punto *P'* que es simétrico al punto $P = (1,0,0)$ respecto del planoπ_1

c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1y *r.*

Solución:

a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2.

Dos planos en el espacio sólo pueden ser coincidentes, paralelos o que se corten según una recta.

Para conocer esa posición relativa basta con comparar sus vectores normales. El vector normal es el vector formado por los coeficientes de la ecuación general del mismo. El primero de los planos lo tenemos en forma general por lo que la obtención del vector normal es inmediata:

$\pi_1 = 2x - y - z + 4 = 0 \rightarrow \overrightarrow{n_1} = (2, -1, -1)$

El segundo plano está en forma paramétrica por lo que tenemos que pasarlo a forma general. Para ello tomamos del plano un punto y dos vectores directores:

$\pi_2 \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases} \rightarrow P_2 = (-1,1,0);\ \vec{v} = (1,1,1);\ \vec{w} = (0,1,-1)$

Y aplicamos la ecuación cartesiana: $\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ desarrollamos por la primera fila:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}(x+1) - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}(y-1) + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} z = 0$

Calculando el valor de los menores tenemos que:

$-2(x+1) + (y-1) + z = 0 \rightarrow -2x + y + z - 3 = 0$

$\pi_2 \equiv -2x + y + z - 3 = 0$

Por lo que tenemos que $\overrightarrow{n_2} = (-2,1,1)$

Tomando ahora ambos vectores normales observamos que son proporcionales:

$\overrightarrow{n_1} = (2, -1, -1);\ \overrightarrow{n_2} = (-2,1,1) \rightarrow \frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{1}$

Como los vectores normales son proporcionales sólo pueden ser coincidentes o paralelos. Los coincidentes tendrán todos los puntos en común mientras que, si son paralelos, no tendrán ningún punto en común.

Tomamos un punto de π_2y comprobamos si pertenece también aπ_1:

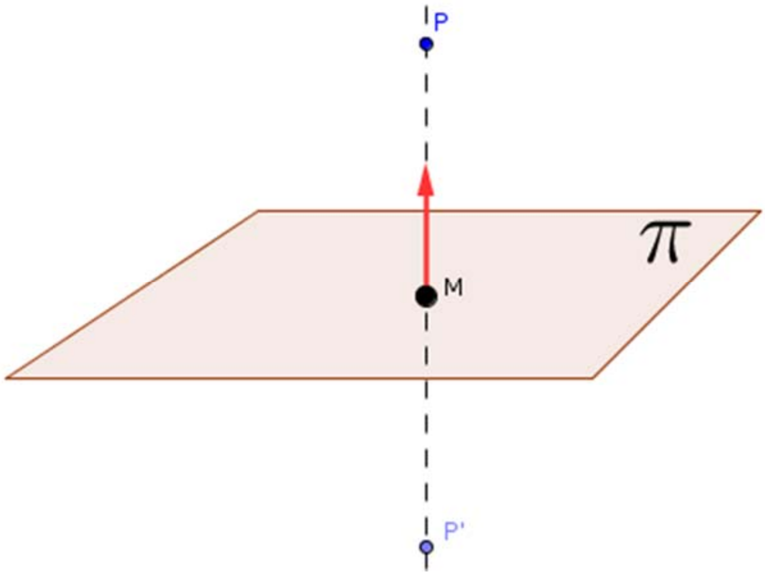
Sustituimos el punto $P_2 = (-1,1,0)$ en la ecuación de π_1:

$\pi_1 = 2x - y - z + 4 = 0 \rightarrow \pi_1 = 2 \cdot (-1) - 1 - 0 + 4 = 1 \neq 0$ por lo que $P_2 \notin \pi_1$ lo que implica que

Ambos planos son paralelos.

b) Calcular el punto *P'* que es simétrico al punto $P = (1,0,0)$ respecto del plano π_1

El cálculo planteado responde al siguiente dibujo:



La forma de resolverlo puede ser variada y cualquier solución que dé el mismo resultado será válida. En estos casos yo suelo recomendar "localizar" el punto *P'* mediante los siguientes pasos:

- Primero trazamos la recta *s* que tendría la dirección del vector normal del plano y pasa por el punto *P*.
- A continuación hallamos el punto *M* intersección de la recta s y del plano π_1
- Hallamos el vector que une *P* y *M*, $(\overrightarrow{PM})$
- Aplicamos el vector$\overrightarrow{PM}$en el punto *M* y el resultado es el punto *P'*.

Comenzamos con la recta *s* que tendría la dirección del vector normal del plano $(2,-1,-1)$ y pasa por el punto *P*$(1,0,0)$. Lo hago en forma paramétrica:

$$s:\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

Hallamos el punto *M* intersección de la recta s y del plano $\pi_1$para ello basta con sustituir las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano y hallar el valor del parámetro que las verifica:

$$2(1 + 2\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) + 4 = 0 \rightarrow 6 + 6\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

Sustituyendo el valor hallado en las ecuaciones de la recta tenemos el punto *M*:

$$s:\begin{cases} x = 1 + 2 \cdot (-1) \\ y = -(-1) \\ z = -(-1) \end{cases} \rightarrow M = (-1,1,1)$$

Hallamos el vector que une *P* y *M*, $\overrightarrow{PM} = (-1-1, 1-0, 1-0) = (-2,1,1)$

Aplicamos el vector$\overrightarrow{PM}$en el punto *M* y el resultado es el punto *P'* :

$$(-1,1,1) + (-2,1,1) = (-3,2,2)$$

Por lo que tenemos que:

$$\boldsymbol{P'} = (\mathbf{-3}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$$

c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y *r.*

Lo más fácil sería hacer un ejercicio parecido al apartado anterior pasando la recta a paramétricas, sustituyendo en la ecuación del plano y hallando el valor del parámetro que lo verifica.

Pasamos la recta a paramétricas:

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1} \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano las paramétricas tenemos que:

$$\pi_1 = 2x - y - z + 4 = 0 \rightarrow 2(1+\lambda) - (2\lambda) - (2-\lambda) + 4 = 0 \rightarrow \lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = -4$$

Sustituyendo el valor del parámetro en la ecuación de la recta obtenemos el punto de intersección:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - 4 = -3 \\ y = 2 \cdot (-4) = -8 \\ z = 2 - (-4) = 6 \end{cases}$$

Por lo que:

El punto de intersección de π_1 y *r* es: $(\mathbf{-3}, \mathbf{-8}, \mathbf{6})$

Autores: Pedro Ramón Podadera Sánchez y Antonio Menguianos

Problema 5:

Consideramos la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$, obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes.

b) Las asíntotas de la función.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos

d) La primitiva de la función $f(x)$.

Solución:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes.

Se trata de una función racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$ por lo que no existe en esos puntos.

El **dominio** será: $Dom f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x) = 0$:

$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4} = 0$por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$x^2 + 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$ **como no tiene solución NO corta al eje OX**.

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de *f (x)* cuando $x = 0$:

$f(0) = \frac{0^2+3}{0^2-4} = \frac{-3}{4}$ por lo que es el punto $(0, -\frac{3}{4})$

$Dom f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$; **NO corta al eje OX;** El **punto de corte con el eje OY:** $(0, -\frac{3}{4})$

b) Las asíntotas de la función.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = 1$ (por ser polinomios del mismo grado) luego **tiene asíntota horizontal en** $y = 1$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = 1$ (por ser polinomios del mismo grado) luego **tiene asíntota horizontal en** $y = 1$.

Como tiene asíntota horizontal **NO tiene asíntota oblicua**.

Para las **asíntotas verticales** tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos dos: $x = -2$ y $x = 2$, calculamos los límites:

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^2+3}{x^2-4} = \left(\frac{7}{0}\right) = \left\langle \begin{array}{l} \lim_{x\to-2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = +\infty \\ \lim_{x\to-2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = -\infty \end{array} \right.$$ por lo que $x = -2$ es asíntota vertical

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x^2-4} = \left(\frac{7}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2+3}{x^2-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2+3}{x^2-4} = +\infty \end{cases}$ por lo que $x = 2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal en $y = 1$. Asíntota verticales en $x = 2$ y en $x = -2$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos.

Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

Calculamos la derivada aplicando la regla del cociente:

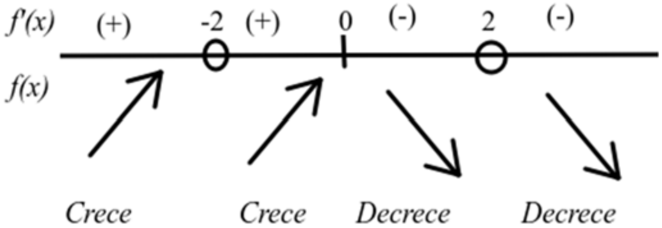
$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4)-(x^2+3)2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3-8x-2x^3-6x}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

Igualamos a cero la derivada:

$f'(x) = \frac{-14x}{(x^2-4)^2} = 0 \to -14x = 0 \to x = 0$

por lo que tiene un posible punto crítico $x = 0$

Con este punto y las discontinuidades del dominio $x = \pm 2$ estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores considerados.



Los valores calculados han sido:

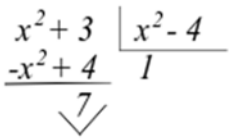
$f'(-3) = 1.68 > 0;\ f'(-1) = 1.55 > 0;\ f'(1) = -1.55 < 0;\ f'(3) = -1.68 < 0$

Con lo que tenemos que los intervalos son:

Decrece en]0, 2[U]2, +∞[Crece en]-∞, -2[U]-2, 0[En el punto $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ hay un máximo relativo.

d) La primitiva de la función$f(x)$. Tenemos que calcular la integral: $\int \frac{x^2+3}{x^2-4}dx$

Como se trata de una función racional y los polinomios son del mismo grado tenemos que hacer la división:



$\frac{x^2+3}{x^2-4} = 1 + \frac{7}{x^2-4}$; (Recordemos que: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$)

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-4}dx = \int (1+\frac{7}{x^2-4})dx = \int 1dx + \int \frac{7}{x^2-4}dx = x + \int \frac{7}{x^2-4}dx$$

Para hacer la integral del segundo término tenemos que descomponer el denominador y escribir la fracción como suma de dos fracciones algebraicas.

$x^2-4=(x+2)(x-2)$

$$\frac{7}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A+2B}{x^2-4}$$

De donde se deduce que: $\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B=7 \end{cases}$

Resolviendo por reducción tenemos que: $B=\frac{7}{4}$ y $A=\frac{-7}{4}$

Volvemos a la integral:

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-4}dx = x + \int \frac{7}{x^2-4}dx = x + \int (\frac{\frac{-7}{4}}{x+2} + \frac{\frac{7}{4}}{x-2})dx = x - \frac{7}{4}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{7}{4}\int \frac{1}{x-2}dx$$

Las dos últimas integrales son de logaritmo neperiano:

$\int \frac{x^2+3}{x^2-4}dx = x - \frac{7}{4}ln|x+2| + \frac{7}{4}ln|x-2| + C$ (podemos emplear propiedades de logaritmos y expresarlo más compacto)

$$\boxed{\int \frac{x^2+3}{x^2-4}dx = x - \frac{7}{4}ln|x+2| + \frac{7}{4}ln|x-2| + C}$$

Problema 6:

Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m de longitud.

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor *x* que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo.

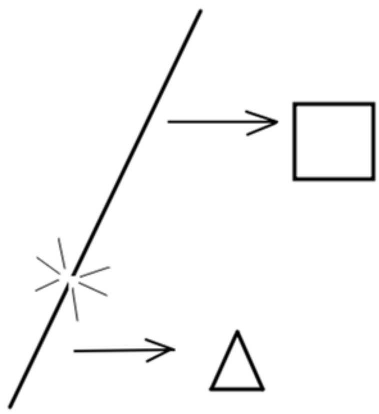
b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima.

Solución:

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor *x* que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo.

En los problemas de optimización es muy importante comprender la situación para poder abordarlos de manera correcta.

Tenemos un cable de 240 m que vamos a dividir en dos partes de forma que con una de ellas haremos un triángulo equilátero y con la otra un cuadrado.

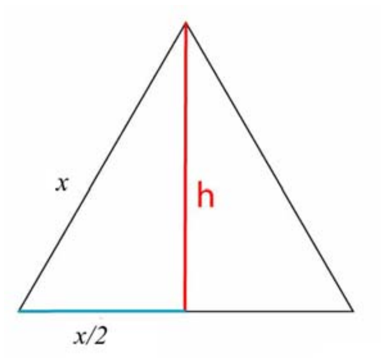


Nos dicen además que nuestra variable tiene que ser:

x – Lado del triángulo equilátero.

Es un problema sencillo de trigonometría hallar lo que vale el área del triángulo en función de ese lado:

Sabemos que el área de un triángulo responde a la fórmula $A_t = \frac{b \cdot h}{2}$ donde *b* es la base (en este caso *x*) y *h* es la altura que podemos determinar por trigonometría o por Pitágoras:



$x^2 = h^2 + (\frac{x}{2})^2 \to x^2 = h^2 + \frac{x^2}{4} \to x^2 - \frac{x^2}{4} = h^2 \to h^2 = \frac{3}{4}x^2 \to h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

Por trigonometría hemos de considerar que los ángulos de un triángulo equilátero son de 60º por lo que podemos escribir que: $sen60º = \frac{h}{x} \to \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{x} \to h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

Sustituyendo en la fórmula del área: $A_t = \frac{b \cdot h}{2} \to A_t = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

Como los tres lados del triángulo son iguales (es equilátero) la longitud de cable empleada para construir el triángulo será: $3x$

Como el cable mide 240 m totales la longitud que queda para el cuadrado es: $240 - 3x$

Como los lados del cuadrado son también iguales, si destinamos a su construcción $240 - 3x$ cada lado medirá: $\frac{240-3x}{4} = 60 - \frac{3}{4}x$

Por lo que el área del cuadrado será: $A_c = (60 - \frac{3}{4}x)^2$

La fórmula pedida es la suma de las dos de área anteriores:

$$A(x) = A_t + A_c = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + (60 - \frac{3}{4}x)^2$$

b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima.

Tenemos que sacar un mínimo de la función que hemos construido antes. Para ello tenemos que derivar e igualar a cero:

$A'(x) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}x + 2 \cdot (60 - \frac{3}{4}x) \cdot \frac{(-3)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 90 + \frac{9}{8}x = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{8})x - 90 = 0$

Despejando tenemos que: $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{8})x - 90 = 0 \to x = \frac{90}{(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{8})} \approx 45.2\text{m}$

Hay que demostrar que ese valor es un mínimo para ello calculamos la segunda derivada (tiene que ser positiva)

$A''(45.2) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{8} > 0$ por lo que se trata de un mínimo relativo.

También es absoluto puesto que los valores de x varían en el intervalo cerrado $[0, 80]$ (que sería destinar todo el cable para el cuadrado o todo para el triángulo).

Como la función es continua (es un polinomio) y está definida en un intervalo cerrado alcanza sus máximos y mínimos absolutos en los relativos o en los extremos del intervalo:

$$A(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}0^2 + \left(60 - \frac{3}{4}0\right)^2 = 3\,600$$

$$A(45.2) = \frac{\sqrt{3}}{4}45.2^2 + \left(60 - \frac{3}{4}45.2\right)^2 = 1\,565.87$$

$$A(80) = \frac{\sqrt{3}}{4}80^2 + \left(60 - \frac{3}{4}80\right)^2 = 2\,771.28$$

Como podemos observar el máximo absoluto corresponde a destinar todo el cable al cuadrado y el mínimo a construir un triángulo de lado 45.2 .

Pregunta la longitud de cable necesaria para construir el triángulo para lo cual tenemos que tomar $3x=3\cdot 45.2=135.6$ m y el área mínima: 1 565.87 m²

La longitud de cable necesaria para construir el triángulo es **135.6 m** y el área mínima: **1 565.87 m²**

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumno contestará solo tres problemas entre los seis propuestos. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}$.

a) Discutir el sistema en función del parámetro real a.

b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando esto sea posible.

Problema 2:

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$:

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4.

c) Calcular $det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$.

Problema 3:

3º) Dados los puntos $A(2,0,0)$ y $B(0,1,0)$, y la recta $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$:

a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B.

b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.

c) Calcular la distancia del punto A a la recta s.

Problema 4:

4º) Dados los puntos $A(2,1,-2)$ y $B(3,2,3)$, y el plano $\pi \equiv 2x + 2y + z = 3$, obtener:

a) El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B.

b) El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

Problema 5:

5º) $a)$ Calcular, indicando todos los pasos, la integral $I = \int \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx$.

$b)$ Determinar, en función de t, el valor de $A = \int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx$.

$c)$ Determinar el valor de $t > 8$ para que $A = \int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx = L\frac{25}{4}$.

Problema 6:

6º) Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x. Por cada punto $M[x, f(x)]$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY. Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

$a)$ Determinar el área del rectángulo en función de x.

$b)$ Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}$.

$a)$ Discutir el sistema en función del parámetro real a.

$b)$ Encontrar todas las soluciones del sistema cuando esto sea posible.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 - (a-1) = 0;\;\; 1 - a^2 - a + 1 = 0;$$

$$a^2 + a - 2 = 0;\;\; a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = 1.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq -2 \\ a \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 1 - 4 + 2 = -3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a = -2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$ Resolvemos, en primer lugar, para $\begin{Bmatrix} a \neq -2 \\ a \neq 1 \end{Bmatrix}$, que resulta un sistema compatible determinado. Se resuelve por la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & a & a-1 \end{vmatrix}}{-(a^2+a-2)} = \frac{a - a - (a-1)}{-(a+2)(a-1)} = \frac{1}{a+2}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}}{-(a^2+a-2)} = \frac{a(a-1)+1-a^2-(a-1)}{-(a+2)(a-1)} = \frac{a^2-a+1-a^2-a+1}{-(a+2)(a-1)} = \frac{-2(a-1)}{-(a+2)(a-1)} = \frac{2}{a+2}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{-(a^2+a-2)} = \frac{a+1-a^2-a}{-(a+2)(a-1)} = \frac{1-a^2}{-(a+2)(a-1)} = \frac{-(a+1)(a-1)}{-(a+2)(a-1)} = \frac{a+1}{a+2}.$$

$$\underline{Solución:\ x = \frac{1}{a+2};\ \ y = \frac{2}{a+2};\ \ z = \frac{a+1}{a+2}, \forall a \in R - \{-2, 1\}}.$$

Se resuelva ahora para $a = 1$. El sistema resulta: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$.

Haciendo $x = \lambda$:

$$\underline{Solución:\ x = \lambda;\ \ y = 1 - \lambda;\ \ z = 1 - \lambda, \forall \lambda \in R}.$$

Autores: Pedro Ramón Podadera Sánchez y Antonio Menguianos

Problema 2:

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$:

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4.

c) Calcular $det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$.

Solución:

a) $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I;\ \begin{pmatrix} a+b & -a-b+1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = I;$

$$\begin{pmatrix} a+b & -a-b+1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} a+b=1 \\ -a-b+1=0 \\ a-b=1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{a = 1, b = 0}.$$

b) Para $a = 1$ y $b = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

c) $det(A^{-50}) = \frac{1}{(|A|)^{50}} = \frac{1}{\left(\begin{vmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{vmatrix}\right)^{50}} = \frac{1}{(a^2-b^2)^{50}} \Rightarrow$

$$\underline{det(A^{-50}) = (a^2 - b^2)^{-50}}.$$

Problema 3:

3º) Dados los puntos $A(2,0,0)\ y\ B(0,1,0)$, y la recta $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$:

$a)$ Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B.

$b)$ Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.

$c)$ Calcular la distancia del punto A a la recta s.

Solución:

$a)$ Los puntos A y B determinan el vector:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,0) - (2,0,0)] \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v_r} = (-2,1,0).$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 + \lambda. \\ z = 0 \end{cases}}$$

$b)$ Un punto y un vector director de s son $P(1,1,0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2,3,1)$.

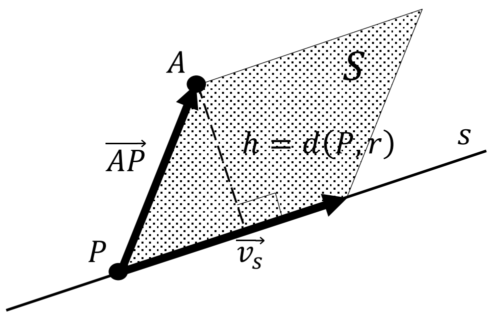
$$\pi(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{v_s};\ P) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ (x-1) - 6z - 2z + 2(y-1) = 0;$$

$$x - 1 - 8z + 2y - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\pi \equiv x + 2y - 8z - 3 = 0.}$$

$c)$ La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.



$$\left.\begin{array}{r} S = \left|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{PA}\right| \\ S = |\overrightarrow{v_s}| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{PA}\right| = |\overrightarrow{v_s}| \cdot h \ \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow h = d(A,s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{PA}\right|}{|\overrightarrow{v_s}|}.}$$

$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} =$

$= [(2,0,0) - (1,1,0)] = (1,-1,0).$

$$d(A,s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{PA}\right|}{|\overrightarrow{v_s}|} = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{|j-2k-3k+i|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{|i+j-5k|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{1^2+1^2+(-5)^2}}{\sqrt{14}} =$$

$$\frac{\sqrt{1+1+25}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{14}} \Rightarrow$$

$$\underline{d(A,s) = \frac{3\sqrt{52}}{14}\ u.}$$

Problema 4:

4º) Dados los puntos $A(2,1,-2)\ y\ B(3,2,3)$, y el plano $\pi \equiv 2x+2y+z=3$, obtener:

$a)$ El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B.

$b)$ El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

Solución:

$a)$ Un vector normal del plano π es $\vec{n}=(2,2,1)$.

La recta r, perpendicular a π, tiene como vector director a vector normal del plano, o sea: $\overrightarrow{v_r}=(2,2,1)$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$.

El punto C, intersección de la recta r con el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x+2y+z=3 \\ r \equiv \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(3+2\lambda)+2(2+2\lambda)+(3+\lambda)=3;$$

$$6+4\lambda+4+4\lambda+3+\lambda=3;\ \ 9\lambda=-10;\ \ \lambda=-\frac{10}{9} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-\frac{20}{9}=\frac{7}{9} \\ y=2-\frac{20}{9}=-\frac{2}{9} \\ z=3-\frac{10}{9}=\frac{17}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{C\left(\frac{7}{9},-\frac{2}{9},\frac{17}{9}\right)}.$$

$b)$ Los puntos $A(2,1,-2), B(3,2,3), C\left(\frac{7}{9},-\frac{2}{9},\frac{17}{9}\right)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(3,2,3)-(2,1,-2)]=(1,1,5)$.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\left[\left(\frac{7}{9},-\frac{2}{9},\frac{17}{9}\right)-(2,1,-2)\right]=\left(-\frac{11}{9},-\frac{11}{9},\frac{35}{9}\right)$, que también puede expresarse de la forma $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{9}\cdot(-11,-11,35)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 5 \\ -11 & -11 & 35 \end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{18}\cdot|35i-55j-11k+11k+55i-35j|=\frac{1}{18}\cdot|90i-90j|=5\cdot|i-j|=$$

$$=5\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}=5\cdot\sqrt{1+1}\Rightarrow$$

$$\underline{S=5\sqrt{2}\,u^2}.$$

Problema 5:

5º) $a)$ Calcular, indicando todos los pasos, la integral $I = \int \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx$.

$b)$ Determinar, en función de t, el valor de $A = \int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx$.

$c)$ Determinar el valor de $t > 8$ para que $A = \int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx = L\frac{25}{4}$.

Solución:

$a)\ I = \int \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx.$

$$x^2 - 5x - 14 = 0;\ \ x = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 7.$$

$$x^2 - 5x - 14 = (x+2)(x-7).$$

$$\frac{18}{x^2-5x-14} = \frac{M}{x+2} + \frac{N}{x-7} = \frac{Mx-7M+Nx+2N}{(x+2)(x-7)} = \frac{(M+N)x+(-7M+2N)}{x^2-5x-14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=0 \\ -7M+2N=18 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2M-2N=0 \\ -7M+2N=18 \end{array}\right\} \Rightarrow -9M = 18M;\ \ M=-2;\ \ N=2.$$

$$I = \int \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx = \int \left(\frac{-2}{x+2} + \frac{2}{x-7}\right) \cdot dx = -2L|x+2| + 2L|x-7| + C \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow I = \int \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx = 2 \cdot L\left|\frac{x-7}{x+2}\right| + C.}$$

$$b)\ A = \int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx = 2 \cdot \left[L\left|\frac{x-7}{x+2}\right|\right]_8^t = 2 \cdot \left(L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| - L\left|\frac{8-7}{8+2}\right|\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| - L\frac{1}{10}\right) = 2 \cdot \left(L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| - L1 + L10\right) \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow A = \int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx = 2 \cdot \left(L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| + L10\right).}$$

$$c)\ A = \int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} \cdot dx = L\frac{25}{4} \Rightarrow 2 \cdot \left(L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| + L10\right) = L\frac{25}{4} = L5^2 - L2^2;$$

$$2 \cdot \left(L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| + L10\right) = 2 \cdot L5 - 2L2;\ \ L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| + L10 = L5 - L2;$$

$$L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| + L10 = L5 - L2 - L10;\ \ L\left|\frac{t-7}{t+2}\right| = L5 - L20 = L\frac{5}{20} = L\frac{1}{4} \Rightarrow \left|\frac{t-7}{t+2}\right| = \frac{1}{4}.$$

$$\left.\begin{array}{r} \frac{t-7}{t+2} = \frac{1}{4} \\ \frac{t-7}{t+2} = -\frac{1}{4} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4t-28 = t+2;\ \ 3t = 30 \Rightarrow t_1 = 10 \\ \frac{t-7}{t+2} = -\frac{1}{4};\ \ 4t-28 = -t-3;\ \ 5t = 25 \Rightarrow t_2 = 5 \ngtr 8 \end{array}\right\}.$$

$\underline{\textit{El único valor de t que cumple las condiciones pedidas es } t = 10.}$

Autores: Pedro Ramón Podadera Sánchez y Antonio Menguianos

Problema 6:

6º) Considerar la función $f(x)=e^{-x^2}$ para los valores positivos de x. Por cada punto $M[x,f(x)]$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY. Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

$a)$ Determinar el área del rectángulo en función de x.

$b)$ Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área.

Solución:

$a)$ Los máximos y mínimos de la función $f(x)=e^{-x^2}$ son los siguientes:

$$f'(x)=-2x\cdot e^{-x^2}=0 \Rightarrow -2x=0;\ \ x=0.$$

$$f''(x)=-2\cdot e^{-x^2}-2x\cdot\left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)=-2e^{-x^2}\cdot(1-2x^2).$$

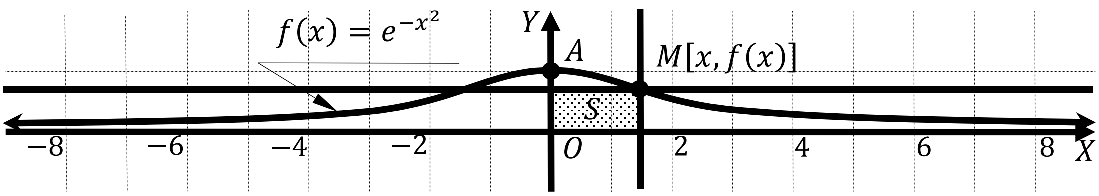
$$f''(0)=-2\cdot e^0\cdot(1-0)=-2<0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x=0.$$

$$f(0)=e^{-0^2}=e^0=1 \Rightarrow Máx: A(0,1).$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

La recta $y=0$ (eje X) es asíntota horizontal de la función.

Teniendo en cuenta que la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas, por ser $f(-x)=f(x)$ y que $f(x)>0, \forall x\in R$, la representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en el gráfico siguiente.



$$S=x\cdot f(x)\Rightarrow$$

$$\underline{S(x)=x\cdot e^{-x^2}}.$$

$b)$ Para que una función tenga un máximo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$S'(x)=1\cdot e^{-x^2}+x\cdot\left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)=e^{-x^2}(1-2x^2).$$

$$S'(x)=0\Rightarrow e^{-x^2}(1-2x^2)=0;\ \ e^{-x^2}\neq 0, \forall x\in r;\ \ 1-2x^2=0;\ \ x^2=\frac{1}{2};\ x=+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{e}\Rightarrow \underline{M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{e}}{e}\right)}.$$

$$S\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{e}}{e}\Rightarrow$$

$$\underline{S=\frac{\sqrt{2e}}{2e}\ u^2}.$$