Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2022

Comunidad autónoma de ASTURIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

Universidad de Oviedo	Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU) **CURSO 2021-2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.
TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.
El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

1A. Un inversor ha obtenido un beneficio de 1280 euros después de invertir un total de 22000 euros en dos empresas distintas. Estos beneficios se desglosan como sigue: la cantidad invertida en la primera empresa le ha proporcionado un m % de beneficios y la cantidad invertida en la segunda empresa le ha proporcionado un 6 % de beneficios.

a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean la cantidad invertida en cada una de las dos empresas.

b) **[2 puntos]** Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los beneficios para la primera empresa sean del 4 %? Resuelve el sistema si se supone que ese es realmente el porcentaje de beneficio para lo invertido en la primera empresa. En ese caso, ¿cuál fue la cantidad invertida en cada una de las dos empresas?

1B. En un almacén hay lavadoras y frigoríficos. Por necesidades del mercado el número de frigoríficos debe ser mayor o igual que el de lavadoras, pero no puede superar el doble del de lavadoras. Se necesitan al menos 20 frigoríficos y no hay más de 30 lavadoras disponibles para tener en el almacén. Por cada lavadora se obtiene un beneficio de 200 euros y por cada frigorífico se obtiene un beneficio de 250 euros.

a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo se pueden tener en el almacén para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían tener 20 lavadoras y 50 frigoríficos?

b) **[0,75 puntos]** ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo habría que tener para maximizar el beneficio al vender todo lo del almacén? ¿y para minimizar el número de lavadoras?

2A. El salario diario (f) de un trabajador durante los primeros cinco años en una determinada empresa se ajusta a la siguiente función, donde x representa el tiempo, en años, que lleva contratado:

$$f(x) = \begin{cases} 35 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 25 + 10x & \text{si } 1 \le x < 2 \\ -0{,}5x^2 + 4x + a & \text{si } 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

a) **[0,75 puntos]** Estudia la continuidad de la función, determinando el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.

b) **[1,75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en todo su dominio. ¿En qué momento el salario fue máximo? ¿y mínimo?

2B. Dada la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 0$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 4$.

3A. El 30 % de los estudiantes de un instituto hace deporte. De los que hacen deporte, el 40 % toca un instrumento y de los que no hacen deporte, una cuarta parte toca un instrumento. Elegido un estudiante de ese instituto al azar:

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte, pero no toque un instrumento?

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que haga deporte o toque un instrumento?

3B. Una empresa tiene contratados dos operarios, Eva y Juan, para producir determinadas piezas. Eva realiza el 60 % de la producción de esas piezas y el resto lo realiza Juan. Eva obtiene una pieza defectuosa el 10 % de las veces, subiendo ese porcentaje hasta el 25 % en el caso de Juan.

a) **[1,25 puntos]** Seleccionada una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

b) **[1,25 puntos]** Si se encuentra una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido hecha por Juan?

4A. Se quiere hacer un estudio para estimar la proporción de personas que han viajado a América.*

a) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de personas que han viajado a América a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 90 %?

b) **[1,5 puntos]** En una muestra aleatoria de 2000 personas, se sabe que 600 han viajado a América. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción poblacional de personas que han viajado a América.

4B. La duración de un tipo de pila, en horas, sigue una distribución normal con desviación típica de 80 horas.*

a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para la duración media de ese tipo de pila, a partir de una muesttra de 100 pilas, en la que se ha obtenido que la suma de las duraciones de todas ellas ha sido de 55000 horas.

b) **[1 punto]** Si el tamaño muestral siguiese siendo de 100 pilas, pero la media aumenta, ¿qué le ocurriría a los extremos del intervalo anterior? ¿aumentarían o disminuirían? Y si la media siguiese siendo la misma, pero el tamaño muestral hubiese aumentado, ¿qué le ocurriría a la amplitud del intervalo anterior? ¿aumentaría o disminuiría?

---

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$ y $F(2{,}58) = 0{,}995$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1A. Solución:

1A. *a)* Si representamos por x e y la cantidad invertida en la primera y segunda empresa, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 22000 \\ 0{,}01mx + 0{,}06y = 1280 \end{cases}$$

b) La discusión de este sistema se puede hacer, por ejemplo, por uno de los dos métodos considerados a continuación.

- **Gauss.**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0{,}01m & 0{,}06 & 1280 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0 & 0{,}06-0{,}01m & 1280-220m \end{array}\right)$$

Como $0{,}06 - 0{,}01m = 0 \Leftrightarrow m = 6$ se tiene que:

  - Si $m = 6$, la última fila es $(0 \quad 0 \mid -40)$, con lo que el sistema es incompatible.
  - En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}01m & 0{,}06 \end{vmatrix} = 0{,}06 - 0{,}01m = 0 \Longleftrightarrow m = 6$$

se tiene que:

  - Para $m = 6$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 22000 \\ 0{,}06 & 1280 \end{vmatrix} = -40 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

  concluimos que el sistema es incompatible.

  - Para $m \neq 6$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $ran(A) = 2$ y por tanto $ran(A) = ran(A') =$ nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m = 6$	S.I.
$m \neq 6$	S.C.D.

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de $m \neq 6$ y dicha solución es única.

En particular, por tanto, es posible que $m = 4$, es decir, que los beneficios para la primera empresa sean del 4 %.

En tal caso, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que $m = 4$, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0 & 0{,}02 & 400 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x + y = 22000 \\ 0{,}02y = 400 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema escalonado:

$$\begin{cases} y = 400/0{,}02 = 20000 \\ x = 22000 - 20000 = 2000 \end{cases}$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, $|A| = 0{,}02$, puesto que $m = 4$. Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 22000 & 1 \\ 1280 & 0{,}06 \end{vmatrix} = 40, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 22000 \\ 0{,}04 & 1280 \end{vmatrix} = 400.$$

Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{40}{0{,}02} = 2000, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{400}{0{,}02} = 20000.$$

Con lo cual, si el beneficio en la primera empresa es del 4 %, ha invertido en ella 2000 euros y 20000 euros en la otra.

Problema 1B. Solución:

1B. *a)* Si representamos por x e y el número de lavadoras y frigoríficos, respectivamente, en el almacén, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} y \geq x \\ y \leq 2x \\ y \geq 20 \\ x \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ y \geq 20 \\ x \leq 30 \end{cases}$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto rayado en la figura 1. Los extremos de dicho recinto son los puntos A = (10, 20), B = (20, 20), C = (30, 30) y D = (30, 60).

No podría haber 20 lavadoras y 50 frigoríficos, puesto que el punto (20, 50) no pertenece a la región factible ($2x - y = 40 - 50 = -10 < 0$).

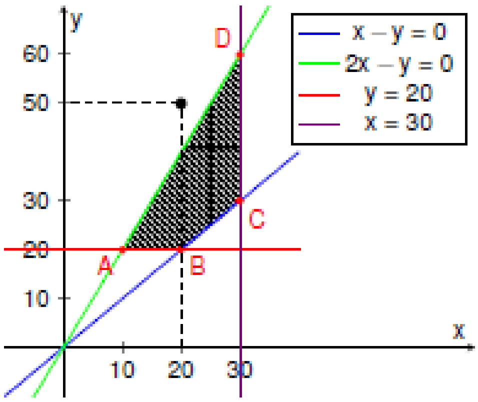


Figura 1: Región factible.

b) El beneficio con la venta total es $z_1(x, y) = 200x + 250y$. Así, queremos maximizar la función objetivo z_1 sujeta a las restricciones anteriores. Puesto que:

$$z_1(A) = 7000 \text{ euros}$$
$$z_1(B) = 9000 \text{ euros}$$
$$z_1(C) = 13500 \text{ euros}$$
$$z_1(D) = 21000 \text{ euros}$$

se tiene que el beneficio máximo se alcanza si se tienen 30 lavadoras y 60 frigoríficos.

Si lo que se busca es minimizar el número lavadoras, entonces la función objetivo es $z_2(x, y) = x$. Como

$$z_2(A) = 10$$
$$z_2(B) = 20$$
$$z_2(C) = 30$$
$$z_2(D) = 30$$

el mínimo se alcanza si se tienen 10 lavadoras y 20 frigoríficos.

Problema 2A. Solución:

2A. *a)* La función f viene dada por distintos polinomios en los tres intervalos considerados al definirla, con lo que los únicos posibles puntos de discontinuidad son x = 1 y x = 2. Se tiene que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 35 = 35, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 25 + 10x = 35 \quad \text{y} \quad f(1) = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 25 + 10x = 45, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} -0{,}5x^2 + 4x + a = 6 + a \quad \text{y} \quad f(2) = 6 + a$$

con lo que f es continua en x = 1 y existe el límite en x = 2 si 45 = 6 + a o, lo que es lo mismo, si a = 39. En tal caso el límite coincide con el valor de la función y, por tanto, si a = 39, f es continua en todo su dominio.

b) El dominio de definición de f es el intervalo [0, 5]. La función es constante en el intervalo [0, 1) y es una recta en el intervalo [1, 2). Además hemos visto que es continua, con f(0) = f(1) = 35, f(2) = 45 y f(5) = 46,5. Además se tiene que $f(x) \neq 0$ para cualquier $x \in [0, 5]$, con lo que f no corta a los ejes más que en el punto (0, 35).

Si analizamos la expresión de la función en el intervalo [2, 5] tenemos que $f'(x) = -x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$, $f''(x) = -1 < 0$, con lo que x = 4 es un máximo relativo y la función en ese intervalo es cóncava hacia abajo. Además a partir de la derivada primera obtenemos que crece en el intervalo (2, 4) y decrece en (4, 5).

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 2.

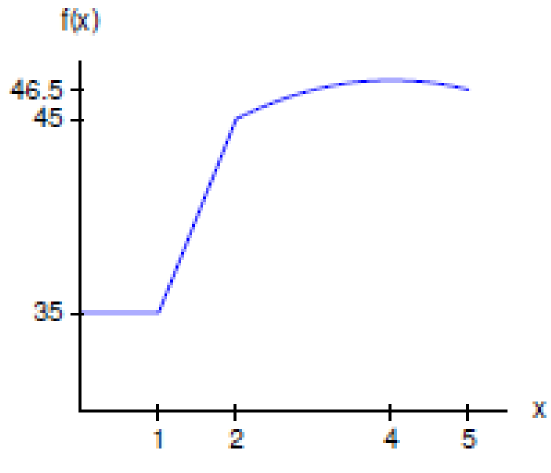


Figura 2: Representación gráfica de f.

Así pues, el salario máximo fue a los 4 años (x = 4) y el mínimo durante el primer año ($x \in [0, 1]$).

Problema 2B. Solución:

2B. *a)* Como $f(x) = x^2 - 2x - 3$, entonces $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + C$, con lo que $F(0) = C = 0 \Leftrightarrow C = 0$ y $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

b) Como f es un polinomio, está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua en todo su dominio. Además se tiene que $f(0) = -3$ y que $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ o $x = -1$, con lo que f también corta a los ejes en los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$.

Además

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x^2 - 2x - 3) = +\infty$$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando su primera derivada:

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Como $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 1)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (1, \infty)$, se tiene que f decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, \infty)$. Además se tiene que $f(1) = -4$.

Si calculamos la segunda derivada se tiene que $f''(x) = 2 > 0$, co lo que f es cóncava hacia arriba (convexa) en todo su dominio.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 3.

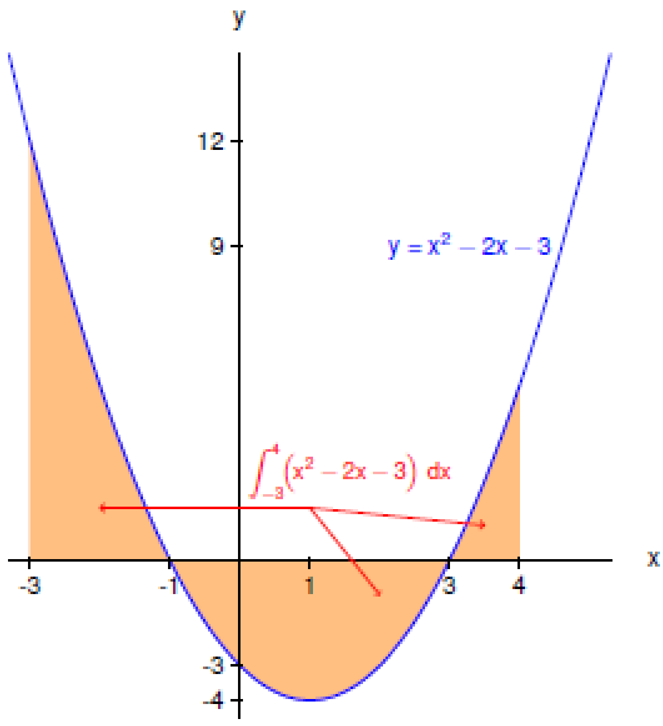


Figura 3: Representación gráfica de f.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 4$ es igual a:

$$\left|\int_{-3}^{-1} f(x)dx\right| + \left|\int_{-1}^{3} f(x)dx\right| + \left|\int_{3}^{4} f(x)dx\right| = |F(-1) - F(-3)| + |F(3) - F(-1)| + |F(4) - F(3)| =$$

$$|5/3 - (-9)| + |(-9) - 5/3| + |-20/3 - (-9)| = 71/3.$$

Problema 3A. Solución:

3A. Si denotamos por D el suceso «hacer deporte» y por T el suceso «tocar un instrumento», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(D) = 0{,}3$$
$$P(T/D) = 0{,}4$$
$$P(T/\overline{D}) = 0{,}25$$

y con esto, las probabilidades pedidas son:

a) $P(D \cap \overline{T}) = P(D) - P(D \cap T) = P(D) - P(T/D)P(D) = 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}18.$

b) $P(T \cup D) = P(T) + P(D) - P(T \cap D) = P(T) + 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3$, con lo que solo nos queda calcular $P(T)$. Ahora bien, $P(T) = P(T/D)P/D) + P(T/\overline{D})P(\overline{D}) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}295$, con lo que $P(T \cup D) = 0{,}295 + 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}475.$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	D	$\overline{D}$	
T	0,12	0,175	0,295
$\overline{T}$	0,18	0,525	0,705
	0,3	0,7	1

Autores: Andrés García Mirantes
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 3B. Solución:

3B. Si denotamos por E el suceso «la pieza fue realizada por Eva», por J el suceso «la pieza fue realizada por Juan» y por D el suceso «la pieza es defectuosa», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(E) = 0{,}6 \qquad P(J) = 0{,}4$$
$$P(D/E) = 0{,}1 \qquad P(D/J) = 0{,}25$$

con lo que las probabilidades pedidas son:

a) $P(D) = P(D \cap E) + P(D \cap J) = P(D/E)P(E) + P(D/J)P(J) = 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}16.$

b) $P(J/D) = \frac{P(D/J)P(J)}{P(D)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}4}{0{,}16} = 0{,}625.$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	E	J	
D	0,06	0,1	0,16
$\overline{D}$	0,54	0,3	0,84
	0,6	0,4	1

Problema 4A. Solución:

4A. *a)* Al estimar la proporción poblacional, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\epsilon} \right)^2$$

donde

- ϵ representa el error de estimación, en este caso $\epsilon \leq 0,05$,
- p representa la proporción poblacional, que es un valor desconocido. Al no conocer el valor de p y no poder estimarlo, puesto que aún no tenemos una muestra, se considera el caso más desfavorable posible, es decir, el valor que maximiza la desviación típica, que es $p = 0,5$ y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0,9$ para una variable Z con distribución N(0, 1) o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0,95$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1,64$.

De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(1,64 \frac{\sqrt{0,5(1-0,5)}}{0,05} \right)^2 = 268,96$$

Así pues, el tamaño mínimo muestral con el que podemos asegurar que se cumplen las condiciones es de 269 personas.

b) Si representamos por $\hat{p}$ la proporción de personas que han viajado a América en la muestra con $n = 2000$ personas, se tiene que $\hat{p} = 600/2000 = 0,3$.

El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha) \cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

donde $\hat{p}$ representa la proporción muestral, n el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ para una variable Z con distribución N(0, 1).

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de declaraciones fraudulentas, al 90 % de confianza, es:

$$\left(0,3 - 1,64\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{2000}}, 0,3 + 1,64\sqrt{\frac{0,3(1-0,3)}{2000}} \right) = (0,2832; 0,3168),$$

puesto que ya habíamos visto que $\hat{p} = 0,3$, $n = 2000$ y que al 90 % de nivel de confianza se tiene que $z_{\alpha/2} = 1,64$.

Así pues, tenemos una confianza del 90 % de que el verdadero porcentaje de personas que ha viajado a América está entre el 28,32 % y el 31,68 %.

Problema 4B. Solución:

4B. Si denotamos por X la v.a. «duración, en horas, de la pila», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 80$ horas, es decir, $X \to N(\mu, 80)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ para la cual se obtiene una media muestral $\overline{x} = 55000/100 = 550$ horas.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde

- $\overline{x}$ representa la media muestral, en este caso $\overline{x} = 550$ horas,
- n representa el tamaño de muestra, en este caso $n = 100$,
- σ representa la desviación típica poblacional, en este caso $\sigma = 80$ horas y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0{,}99$ para una variable Z con distribución $N(0, 1)$, o lo que es lo mismo, el valor que cumple que $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}995$. Con lo cual, en este caso $z_{\alpha/2} = 2{,}58$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la duración media de esta pila, al 99 % de confianza es:

$$\left(550 - 2{,}58\frac{80}{\sqrt{100}}, 550 + 2{,}58\frac{80}{\sqrt{100}}\right) = (529{,}36; 570{,}64),$$

es decir, tenemos una confianza del 99 % de que la duración media está entre 529,36 y 570,64 horas.

b) Si la media muestral aumentase, según vimos en la expresión del intervalo de confianza del apartado anterior, ambos extremos del intervalo aumentarían en la misma cantidad. Lo cual es lógico, puesto que si la media en la muestra es mayor, esperaríamos valores mayores para la media poblacional.

En cambio, si la media muestral se conserva, pero el tamaño muestral aumenta (por ejemplo considerando 1000 pilas con una duración media de 550 horas), de nuevo si vamos a la expresión del intervalo de confianza, vamos que la amplitud es $2 \cdot z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, con lo que al dividir entre un número mayor, la amplitud disminuiría. De nuevo esto es lógico, puesto que al tener más información, el intervalo esperamos que sea más preciso.

Universidad de Oviedo	Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU) **CURSO 2021-2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.
TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.
El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1A:

La dueña de una cafetería ha comprado café y leche por un importe total de 2.500 euros. Si vende todos estos productos, ganando un 80 % con el café y un m % con la leche, obtiene por ellos un importe total de $2.900 + 20m$ euros.

$a)$ Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el coste de compra del café y la leche.

$b)$ ¿Para qué valores de m, el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuánto costó el café si el beneficio de venta de la leche es del 20 %?

Problema 1B:

Las pruebas de selección de personal de una empresa consisten, entre otras actividades, en un test de 80 preguntas. Cada pregunta bien contestada suma un punto, cada pregunta mal contestada resta 0,5 puntos, no sumando ni restando las preguntas que se dejan sin contestar. Para aprobar hay que obtener al menos 35 puntos en el test.

$a)$ ¿Cuántas preguntas se pueden contestar correctamente y cuántas se pueden fallar para aprobar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían aprobar contestando exactamente 40 preguntas bien y 20 mal?

$b)$ ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente y cuántas fallar para aprobar dejando el máximo número de preguntas sin contestar? ¿Cuántos puntos se obtendrían en ese caso?

Problema 2A:

Una empresa ingresa 500 miles de euros por cada tonelada de producto que vende. En cuanto a costes, tiene unos costes de producción, entre mano de obra y materia prima, de 250 miles de euros por cada tonelada que se produce. Además, cada año debe pagar como impuestos el x % de sus ingresos, si ha vendido x toneladas de producto. Por último, la empresa tiene unos costes fijos anuales de 1.125 miles de euros. Si f representa los beneficios (ingresos menos costes) anuales, la producción máxima anual es de 40 toneladas y esta empresa vende cada año todo lo que produce, se pide:

$a)$ Obtener la expresión de la función f en función de x. Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, 40]$.

$b)$ ¿Qué cantidad debe producir en un año para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que producir en un año para que el beneficio sea positivo?

Problema 2B:

Dada la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, se pide:

$a)$ Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 1$.

$b)$ Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 4$.

Problema 3A:

Una empresa láctea se encarga de procesar leche y envasarla en botellas. De estas, el 70 % son de leche entera, el 20 % de leche semidesnatada y el resto de leche desnatada. Además, se sabe que el 5 % de las botellas de leche entera se exportan fuera del país, así como el 3 % de las de leche semidesnatada y el 10 % de las de leche desnatada.

$a)$ Si se elige una botella al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea exportada?

$b)$ Si se elige una botella al azar de entre las exportadas, ¿cuál es la probabilidad de que contenga leche semidesnatada?

Problema 3B:

En la segunda vuelta de unas elecciones presidenciales el 40 % de los votantes votan al candidato A y el 60 % restante al B. De los votantes del candidato A, el 25 % son mujeres, mientras que un 20 % de los votantes del candidato B son hombres.

$a)$ Calcular la probabilidad de que un votante, elegido al azar, sea una mujer.

$b)$ Calcula la probabilidad de que un votante, elegido al azar entre los hombres, haya votado al candidato A.

Problema 4A:

Para estudiar el tiempo medio que tarda la compañía PhoneFun en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono, se consideró una muestra aleatoria de 200 clientes y se obtuvo que el tiempo medio de portabilidad para ellos fue de 40 horas. Se supone que el tiempo de portabilidad se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 10 horas.

$a)$ Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio de portabilidad en esa compañía, al 90 % de confianza.

$b)$ ¿Cuál sería el número mínimo de clientes en la muestra necesario para estimar el verdadero tiempo medio de portabilidad en esa compañía mediante un intervalo de amplitud menor o igual a 2 horas y un nivel de confianza del 90 %?

Problema 4B:

En una determinada ciudad se ha seleccionado una muestra aleatoria de 300 hogares, de los que 240 reciclan sus envases de plástico habitualmente.

$a)$ Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de hogares que reciclan habitualmente en esa ciudad.

$b)$ En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría a la amplitud del intervalo si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?

Algunos valores de la función de distribución normal de media 0 y desviación típica 1:

$F(1{,}28) = 0{,}90;\ F(1{,}64) = 0{,}95;\ F(1{,}96) = 0{,}975;\ F(2{,}33) = 0{,}99;\ F(2{,}58) = 0{,}995.$

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1A:

La dueña de una cafetería ha comprado café y leche por un importe total de 2.500 euros. Si vende todos estos productos, ganando un 80 % con el café y un m % con la leche, obtiene por ellos un importe total de $2.900 + 20m$ euros.

$a)$ Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el coste de compra del café y la leche.

$b)$ ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuánto costó el café si el beneficio de venta de la leche es del 20 %?

Solución:

Apartado (a)

Si x e y son respectivamente el coste de compra del café, entonces $x + y = 2500$. Esa es la primera ecuación.

Por otra parte, si gana un 80% con el café, ha obtenido $\frac{80}{100}x$ euros de beneficio y el importe total es de $x + \frac{80}{100}x$ por el café. Del mismo modo, con la leche el importe total es $y + \frac{m}{100}y$. Así pues, la segunda ecuación es: $x + \frac{80}{100}x + y + \frac{m}{100}y = 2900 + 20m$

Poniendo todo junto concluimos:

El sistema de ecuaciones es $\begin{cases} x + y = 2500 \\ \left(1 + \frac{80}{100}\right)x + \left(1 + \frac{m}{100}\right)y = 2900 + 20m \end{cases}$

Apartado (b)

Para hacer el sistema más manejable, multiplicamos la segunda ecuación por 100.

$$\begin{cases} x + y = 2500 \\ 180x + (100 + m)y = 290000 + 2000m \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por -180 y sumando tenemos

$$(m - 80)y = -450000 + 290000 + 2000m$$

o lo que es lo mismo $(m - 80)y = 2000m - 160000$

El sistema tiene solución única para x salvo posiblemente en el caso de que m sea 80. Dicha solución es $x = \frac{2000m-160000}{m-80}$

Es fácil notar, llevándola a la primera ecuación, que la solución también es unica para *x.*

Es decir, el sistema tiene solución única. El resultado es $x = 2500 - \frac{2000m-160000}{m-80}$

¿Qué ocurre para $m = 80$? Vamos a hacerlo aparte.

$$\begin{cases} x + y = 2500 \\ 180x + 180y = 450000 \end{cases}$$

Como antes, multiplicando la primera ecuación por -180 y sumando tenemos 0 = 0. Eso significa que la segunda ecuación es múltiplo de la primera. Es fácil notar ahora que la segunda es la primera por 180 pues $2500 \cdot 180 = 450000$. Se podría haber visto directamente antes.

¿Qué significa esto? Pues que solo hay una ecuación independiente, *x* + *y* = 2500. Cualquier pareja (*x*, 2500 – *x*) es solución.

En resumen:

Existe solución para cualquier valor de *m*. Si m es distinto de 80 la solución es única y si *m* = 80 hay infinitas.

El sistema de ecuaciones es: $\begin{cases} x + y = 2500 \\ \left(1 + \frac{80}{100}\right)x + \left(1 + \frac{m}{100}\right)y = 2900 + 20m \end{cases}$

El caso *m* = 20 se podría resolver desde el principio, pero obviamente es más sencillo con las fórmulas que ya tenemos. Nos piden solo el café.

Sabemos que $x = 2500 - \frac{2000m - 160000}{m - 80}$ por lo que basta sustituir *m* por 20.

$$x = 2500 - \frac{2000(20) - 160000}{20 - 80} = 2500 - \frac{-120000}{-60} = 2500 - 2000 = 500$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ caf\text{é}\ cost\text{ó}\ \ 500\ euros\ \ y\ la\ leche\ 2\,000\ euros.}}$$

No nos lo piden, pero es fácil también calcular el coste de la leche.

Como *x* + *y* = 2500 se tiene que *y* = 500. También podría hacerse con la otra fórmula, claro.

Problema 1B:

Las pruebas de selección de personal de una empresa consisten, entre otras actividades, en un test de 80 preguntas. Cada pregunta bien contestada suma un punto, cada pregunta mal contestada resta 0,5 puntos, no sumando ni restando las preguntas que se dejan sin contestar. Para aprobar hay que obtener al menos 35 puntos en el test.

$a)$ ¿Cuántas preguntas se pueden contestar correctamente y cuántas se pueden fallar para aprobar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían aprobar contestando exactamente 40 preguntas bien y 20 mal?

$b)$ ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente y cuántas fallar para aprobar dejando el máximo número de preguntas sin contestar? ¿Cuántos puntos se obtendrían en ese caso?

Solución:

Apartado (a)

Tenemos tres tipos de preguntas: acertadas, falladas y sin contestar. Si leemos con calma el problema, parece claro que es de Programación Lineal.

Ahora bien, para representar gráficamente y resolverlo solo podemos usar dos variables. Escogemos pues como *x* el número de preguntas acertadas y como *y* el número de preguntas falladas.

El número de preguntas sin contestar será pues 80 – *x* – *y*. Es claro $0 \le x \le 80, 0 \le y \le 80, x + y \le 80$

Realmente, si la suma es menor o igual que 80, también lo son x e y por ser positivos. Esa parte de las restricciones no es necesario ponerla.

El número de puntos es *x*–0.5*y* de donde una ecuación es $x - 0.5y \ge 35$.

Poniendo todo junto:

$$\text{El conjunto de soluciones es: } \begin{cases} x + y \le 80 \\ x - 0.5y \ge 35 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

$p: x + y = 80$

x	Y
0	80
80	0

$q: x - 0.5y = 35$

x	Y
0	5
30	5

Para ver si podemos aprobar con 40 bien y 20 mal miramos si se cumplen las restricciones.

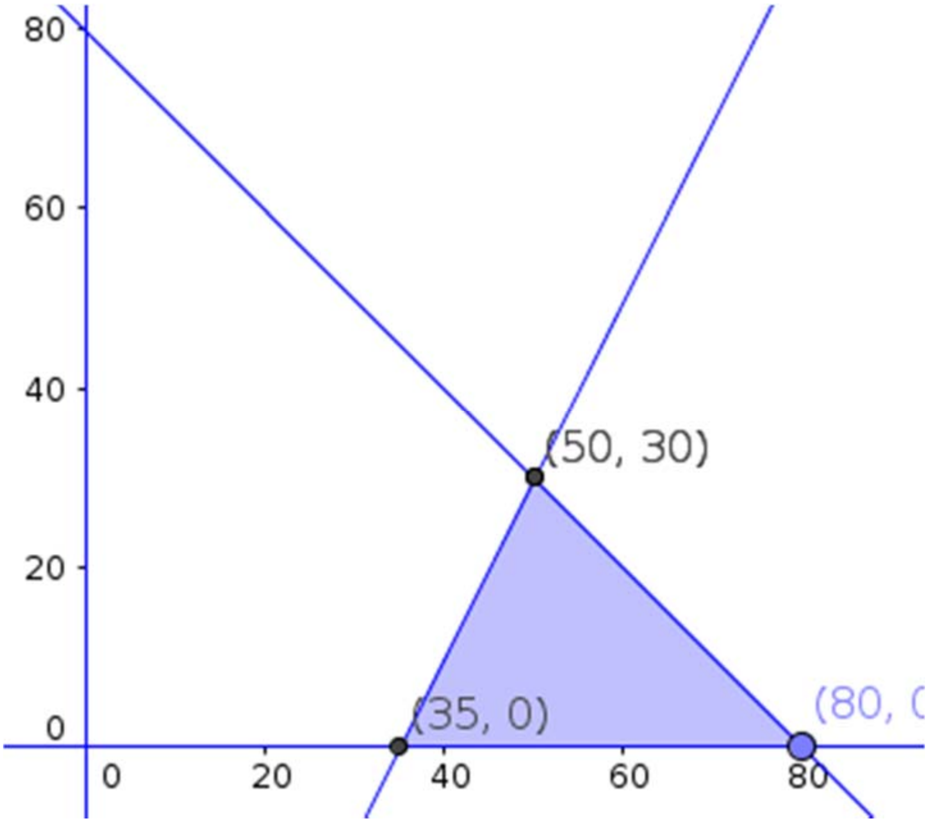
$40 + 20 = 60 \le 80$ Correcto

$40 - 0{,}5 \cdot 20 = 30 < 35$ Incorrecto

De hecho, otro modo de verlo es comprobar que se obtienen solo 30 puntos, que es menos de los exigibles para aprobar.

No, con 40 bien y 20 mal no se aprueba.

La región factible es la siguiente:



Apartado (b)

Calculamos los puntos de corte. Uno de ellos debe ser la solución.

$$A = p \cap OX = \begin{cases} x + y = 80 \\ y = 0 \end{cases}$$ Es el punto A = (80,0)

$$B = p \cap q = \begin{cases} x + y = 80 \\ x - y/2 = 35 \end{cases}$$ Es el punto B = (50,30).

$$C = q \cap OX = \begin{cases} x + y/2 = 35 \\ y = 0 \end{cases}$$ Es el punto C = (35,60)

Si lo que queremos es maximizar el número de preguntas sin contestar, la función objetivo es $f(x, y) = 80 - x - y$

La solución debe ser uno de los puntos extremos. Evaluando tenemos:

f(80,0) = 0, f(50,30) = 0 y f(35,0) = 45. La solución es el punto (35, 0) Como 35 +0/2 = 35 salen 35 puntos.

Con 35 preguntas bien y 0 mal se aprueba dejando el máximo posible de preguntas sin contestar. Obtendríamos 35 puntos

Problema 2A:

Una empresa ingresa 500 miles de euros por cada tonelada de producto que vende. En cuanto a costes, tiene unos costes de producción, entre mano de obra y materia prima, de 250 miles de euros por cada tonelada que se produce. Además, cada año debe pagar como impuestos el x % de sus ingresos, si ha vendido x toneladas de producto. Por último, la empresa tiene unos costes fijos anuales de 1.125 miles de euros. Si f representa los beneficios (ingresos menos costes) anuales, la producción máxima anual es de 40 toneladas y esta empresa vende cada año todo lo que produce, se pide:

a) Obtener la expresión de la función f en función de x. Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, 40]$.

b) ¿Qué cantidad debe producir en un año para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que producir en un año para que el beneficio sea positivo?

Solución:

Apartado (a)

Vamos a detallar cómo construir la función de beneficios.

- Llamamos *x* a la cantidad de toneladas de producto que vende. Como vende todo lo que produce, es también la cantidad de producto fabricado.
- La función f(x) representa los beneficios anuales. Las unidades serán miles de euros.
- Los ingresos son 500*x*.
- Los constes de producción son 250*x.*
- Como impuestos es $\frac{x}{100}(500x) = 5x^2$
- Los costes fijos son 1125.

Los ingresos suman, lo demás resta. Así pues, la función es:

$$f(x) = 500x - 250x - 5x^2 - 1125$$

Operando un poco:

La función es $f(x) = 250x - 5x^2 - 1125.$

Se podría representar derivando, con el procedimiento general. Pero se trata de una parábola y es más fácil hacerlo con las propiedades de las parábolas.

El coeficiente de x^2 es negativo, luego tiene ramas hacia abajo. La coordenada *x* del vértice es $\frac{-250}{2(-5)} = 25$

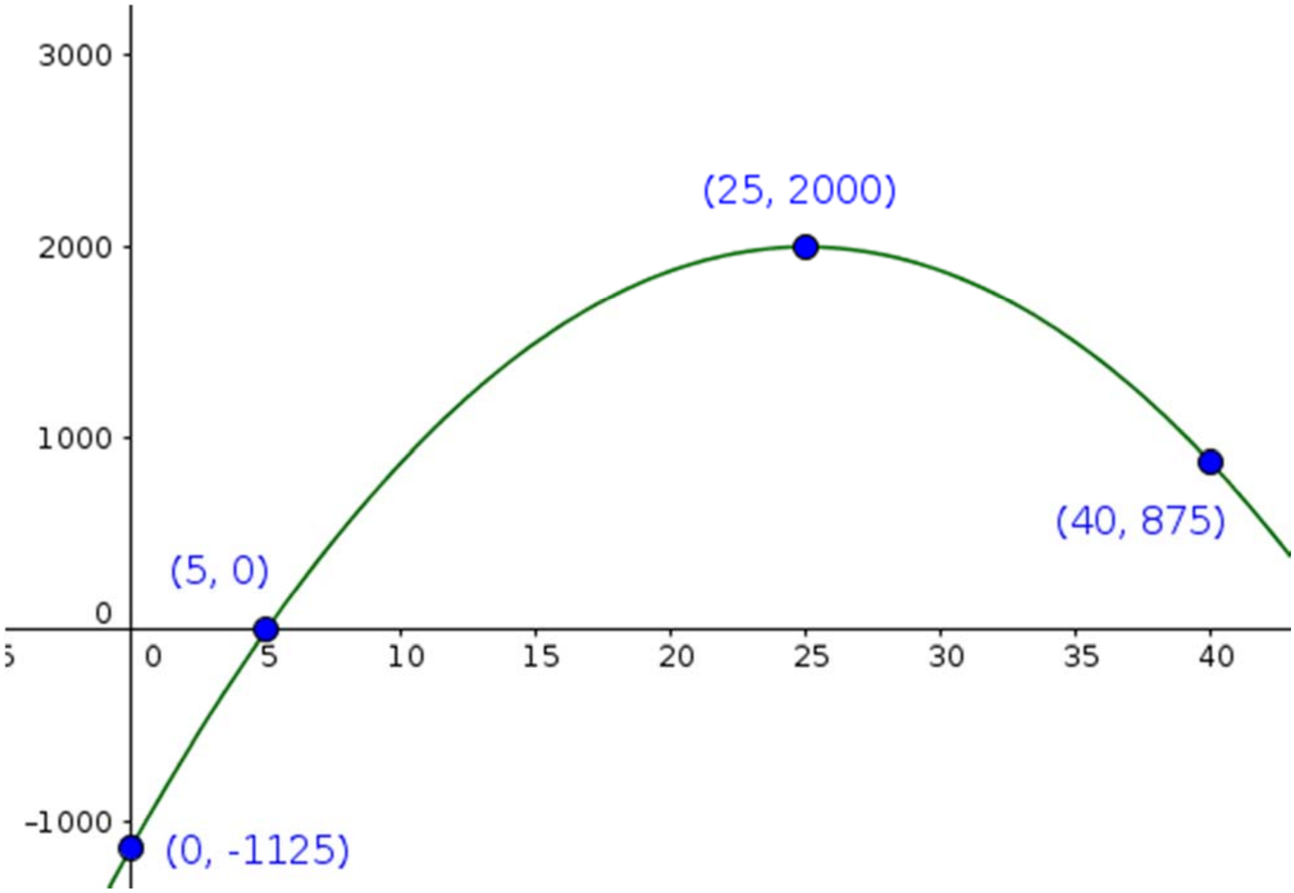
Con eso y los valores en x = 0 y x = 40 bastaría. No obstante en el apartado siguiente nos pide cuándo es positiva de modo que vamos a calcular los cortes con el eje OX.

$f(x) = -5x^2 + 250x - 1125 = 0$es $x = \frac{-250\pm\sqrt{62500-22500}}{-10} = \frac{-250\pm\sqrt{40000}}{-10} = \frac{-250\pm200}{-10}$

Dos soluciones, *x* = 5 y *x* = 45. La segunda está fuera del rango que nos piden dibujar, que es la producción posible.

Damos ahora valores para dibujar:

x	0	5	25	40
f(x)	-1125	0	2000	875



Apartado (b):

A la vista de la gráfica:

El beneficio es máximo produciendo 25 toneladas.

Dicho beneficio asciende a 2 000 miles de euros (2 millones de euros).

Para que el beneficio sea positivo deben producirse más de 5 y 40 o menos toneladas.

Con 5 toneladas es nulo, con 40 es estrictamente positivo.

Problema 2B:

Dada la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, se pide:

$a)$ Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 1$.

$b)$ Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 4$.

Solución:

Apartado (a)

Calculamos la primitiva de f.

$$F(x) = \int x^3 - 4x^2 + 3x\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + k$$

$$1 = F(1) = \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} + k = \frac{3 - 16 + 18}{12} + k = \frac{5}{12} + k$$

de donde k = 1-5/12 = 7/12

La solución es *F(x)* = $|\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \frac{7}{12} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}} \cdot (\mathbf{3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 7})$

Apartado (b)

Como es un polinomio, es continua es todos los reales. Derivando tenemos

f'(x) = $3x^2$-8x+3

Igualando a 0 es $x = \frac{8\pm\sqrt{64-36}}{6} = \frac{8\pm\sqrt{28}}{6}$ Dos raíces, aproximadamente 0.45 y 2.21

Dando valores para estudiar el signo:

f'(0)=3>0, f'(1) = -2<0 y f'(3) = 6>0

De modo que es creciente en (-∞, 0.18) U (2.49, ∞) y decreciente en (0.18, 2.49)

Derivando otra vez es:

f''(x) = 6x-8 = 0 que da x = 4/3 = 1.33333. Tiene ramas hacia abajo si x<4/3 y hacia arriba si x>4/3.

Con esto bastaría normalmente. Pero nos piden calcular un área de modo que debemos ver además los cortes con OX.

0 = $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^2 - 4x + 3)$da *x* = 0 y las soluciones de $x^2 - 4x + 3 = 0$es decir $x = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{4\pm 2}{2}$ que son 3 y 1.

Así pues la función corta a OX en *x* = 0, *x* = 1 y *x* = 2.

Calculamos los límites en los infinitos

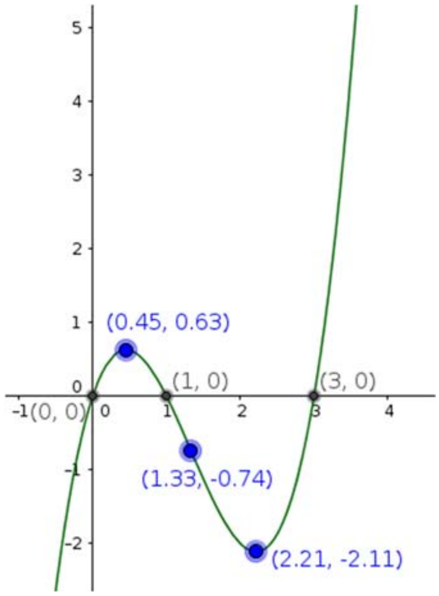
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$$

Damos valores

x	-∞	0	0.45	1	1,33	2.21	3	∞
f(x)	-∞	0	0.63	0	-0.74	-2.11	0	∞

Estamos ya en posición de dibujar la gráfica.



Obsérvese la simetría. Vamos a calcular el área, utilizando dicha simetría.

$$Área = \int_0^4 |f(x)|dx = \int_0^1 f(x)dx - \left|\int_1^3 f(x)dx\right| + \int_3^4 f(x)dx$$

una primitiva es $G(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$. Podríamos haber usado cualquiera, la constante es irrelevante

$$\int_0^1 f(x)dx = \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - 0 = 5/12$$

$$\int_1^3 f(x)dx = \left(\frac{1}{16} - \frac{32}{3} + \frac{12}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) = -32/12$$

$$\int_3^4 f(x)dx = \left(\frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2}\right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{32}{3} + \frac{12}{2}\right) = 59/12$$

El área es pues 5/12+32/12+59/12 = 96/12 = 24/3 = 8

El área es 8

.

Problema 3A:

Una empresa láctea se encarga de procesar leche y envasarla en botellas. De estas, el 70 % son de leche entera, el 20 % de leche semidesnatada y el resto de leche desnatada. Además, se sabe que el 5 % de las botellas de leche entera se exportan fuera del país, así como el 3 % de las de leche semidesnatada y el 10 % de las de leche desnatada.

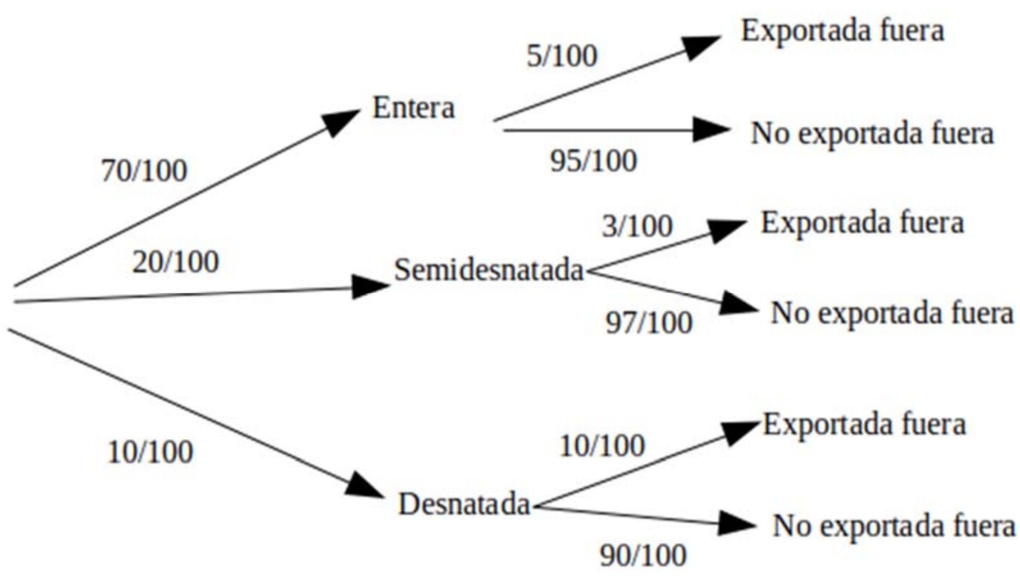
a) Si se elige una botella al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea exportada?

b) Si se elige una botella al azar de entre las exportadas, ¿cuál es la probabilidad de que contenga leche semidesnatada?

Solución:

Apartado (a)

El problema puede resumirse en el siguiente diagrama de árbol:



Sean los sucesos *E* = "Ser leche entera", *S* = "Ser leche semidesnatada" , *D* = "Ser leche desnatada" y *F* = "Exportarse fuera" [es difícil pensar cómo puede exportarse sin que sea fuera del país]. Llamaremos pues $\overline{F}$a su complementario, no exportarse.

La probabilidad de exportarse se puede calcular con la Fórmula de la Probabilidad Total:

$$P(F) = P(F/E)P(E) + P(F/S)P(S) + P(F/D)P(D) = \frac{70}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{3}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{10}{100}$$
$$= \frac{350 + 60 + 100}{10000} = \frac{510}{10000} = \frac{51}{1000}$$

Luego la del suceso contrario: $\boldsymbol{P(\overline{F}) = 0,9490}$

La probabilidad de exportarse es $51/1000 = 5.1$ % y $\boldsymbol{P(\overline{F}) = 0,9490}$

Apartado (b)

Podemos aplicar la Fórmula de la Probabilidad Condicionada, $P(S/F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)}$.

El denominador lo hemos calculado en el apartado anterior:

$$P(S/F) = \frac{P(F/D)P(S)}{P(F)} = \frac{\frac{20}{100}\cdot\frac{3}{100}}{\frac{51}{1000}} = \frac{6}{51} \approx 0.118$$

La probabilidad de contener semidesnatada si se ha exportado es 6/51 aproximadamente 0.118 o 11.8%

Problema 3B:

En la segunda vuelta de unas elecciones presidenciales el 40 % de los votantes votan al candidato A y el 60 % restante al B. De los votantes del candidato A, el 25 % son mujeres, mientras que un 20 % de los votantes del candidato B son hombres.

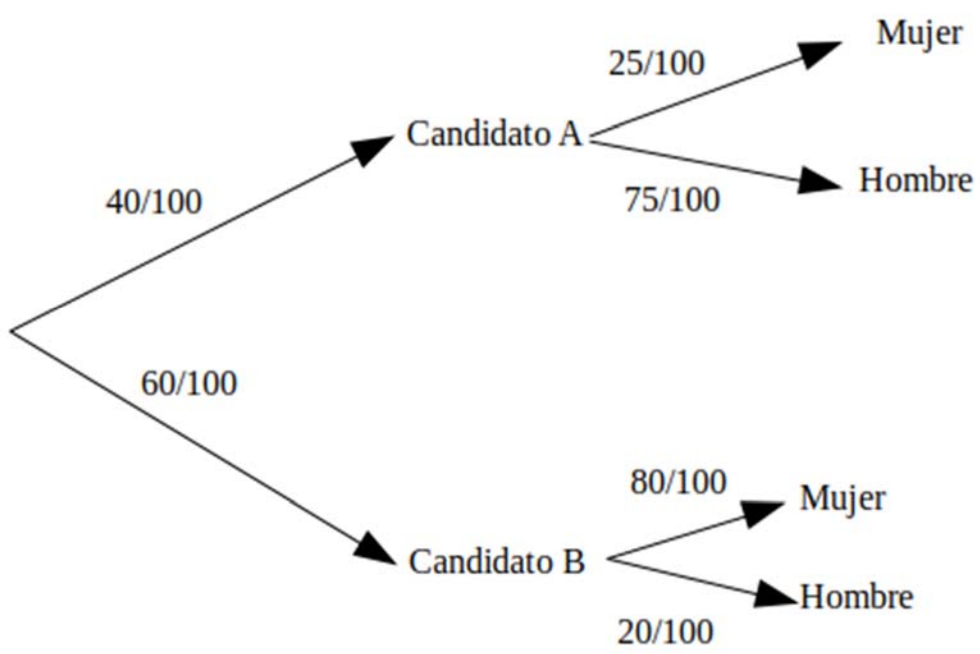
a) Calcular la probabilidad de que un votante, elegido al azar, sea una mujer.

b) Calcula la probabilidad de que un votante, elegido al azar entre los hombres, haya votado al candidato A.

Solución:

Apartado (a)

El problema puede resumirse en el siguiente diagrama de árbol:



Sean los sucesos A = "Votar al candidato A", B = "Votar al candidato B" , M = "Ser mujer" y H = "Ser hombre"

La probabilidad de que un votante sea mujer se puede calcular con la Fórmula de la Probabilidad Total:

$$P(M) = P(M/A)P(A) + P(M/B)P(B) = \frac{40}{100} \cdot \frac{25}{100} + \frac{60}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{10+48}{100} = \frac{58}{100} = \frac{29}{50}$$

La probabilidad de ser mujer es $29/50 = 58$ %

Apartado (b)

Podemos aplicar la Fórmula de la Probabilidad Condicionada, $P(A/H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$.

La probabilidad de ser hombre podríamos haberla calculado como en el apartado anterior. Sin embargo, como en este problema todas las personas que no son mujeres son hombres, es más fácil con el complementario:

P(*H*) = 1-*P*(*M*) = 1-58/100 = 42/100

Tenemos pues:

$$P(A/H) = \frac{P(H/A)P(A)}{P(F)} = \frac{\frac{40}{100} \cdot \frac{75}{100}}{\frac{42}{100}} = \frac{300}{420} = \frac{15}{21} \approx 0.714$$

La probabilidad de haber votado al candidato A si se es hombre es 15/21 aproximadamente 0.714 o 71.4%

Problema 4A:

Para estudiar el tiempo medio que tarda la compañía PhoneFun en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono, se consideró una muestra aleatoria de 200 clientes y se obtuvo que el tiempo medio de portabilidad para ellos fue de 40 horas. Se supone que el tiempo de portabilidad se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 10 horas.

a) Construye un intervalo de confianza para el tiempo medio de portabilidad en esa compañía, al 90 % de confianza.

b) ¿Cuál sería el número mínimo de clientes en la muestra necesario para estimar el verdadero tiempo medio de portabilidad en esa compañía mediante un intervalo de amplitud menor o igual a 2 horas y un nivel de confianza del 90 %?

Solución:

Apartado (a)

Tipificamos la normal. La media muestral es normal $\overline{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Nos dan los parámetros $\sigma = 10$ y $n = 200$ en tanto μ es desconocida.

Por tanto $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{10}{\sqrt{200}}} = N(0,1)$. Operando es $\frac{10}{\sqrt{200}} = 0.71$

El intervalo es del 90%. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos$P(-M < Z < M) = 0.9$

$F(M) - F(-M) = 0.9$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.9$ y finalmente $F(M) = \frac{0.9+1}{2} = 0.95$ que nos resulta en $M = 1.64$

Por tanto la desigualdad queda $-1.64 < \frac{\overline{X}-\mu}{0.71} < 1.64.$

El intervalo es pues: $\left(\overline{X} - 1.64 \cdot 0.71, \overline{X} + 1.64 \cdot 0.71\right)$ que sustituyendo la media muestral por 40 resulta ser $(40 - 1.64 \cdot 0.71, 40 + 1.64 \cdot 0.71) = (38.84, 41.16)$

El intervalo de confianza es (38.84, 41.16)

Apartado (b)

Siendo al 90%, podemos aprovechar algunos cálculos del apartado anterior.

El intervalo era $\left(\overline{X} - 1.64 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + 1.64 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}}\right)$ de modo que el error es $\frac{10 \cdot 16.4}{\sqrt{n}}$

Si la amplitud son dos horas, el intervalo será $\left(\overline{X} - 1, \overline{X} + 1\right)$

Igualando los radios, tenemos $\frac{16.4}{\sqrt{n}} = 1$ que despejando da $n = \left(\frac{16.4}{1}\right)^2 = (16.4)^2 \approx 268.96$

Como debe ser un número natural, tomamos el siguiente

Es necesario un tamaño muestral mínimo de 269 observaciones

Problema 4B:

En una determinada ciudad se ha seleccionado una muestra aleatoria de 300 hogares, de los que 240 reciclan sus envases de plástico habitualmente.

a) Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de hogares que reciclan habitualmente en esa ciudad.

b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría a la amplitud del intervalo si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?

Algunos valores de la función de distribución normal de media 0 y desviación típica 1:

$F(1{,}28) = 0{,}90;\ F(1{,}64) = 0{,}95;\ F(1{,}96) = 0{,}975;\ F(2{,}33) = 0{,}99;\ F(2{,}58) = 0{,}995.$

Solución:

Apartado (a)

Sabemos que, si calculamos la media muestral, puede aproximarse por una normal $\overline{X} = N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$, de donde $Z = \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = N(0,1)$. Ahora bien, no *p*, de modo que insertamos en la fórmula *p* = 240/300 = 0.8

El intervalo es del 95%. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.95$

$F(M) - F(-M) = 0.95$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.95$y finalmente $F(M) = \frac{0.95+1}{2} = 0.975$ que nos da $M = 1.96$

Por tanto se tiene $-1.96 < \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < 1.96$. Con números $-1.96 < \frac{\overline{X}-0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{300}}} < 1.96$ De modo que el intervalo es: $\left(0.8 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{300}}, 0.8 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{300}}\right)$ que da (0.8-0.045, 0.8+0.045) = (0.755, 0.845)

El intervalo es (0.755, 0.845) o bien (7.55%, 8.45%)

Apartado (b)

Siendo el mismo intervalo, podemos aprovechar algunos cálculos del apartado anterior.

El error de estimación es la mitad de la amplitud del intervalo, $\frac{8.45-7.555}{2} = 0.045$De hecho ya lo habíamos calculado antes y además es muy fácil verlo si ponemos el intervalo como 0.8 ± 0.045

La fórmula para la amplitud es $M\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$Lo único que cambia en la fórmula es *n*, los demás son conocidos. Resulta $1.96\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{n}}$.

Por tanto, como n está en el denominador, a mayor tamaño muestral (*n*), más pequeño es el intervalo. Es bastante lógico, cuanto más tamaño muestral tenemos, menos error cometemos y el intervalo es menor.

El error de estimación es 0.045. Si se toma una muestra más grande, el intervalo es menor.