Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de BALEARES

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Sólo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

1º) Hace un año una sociedad de capital riesgo invirtió 100.000 euros en acciones de tres empresas, que llamaremos A, B y C. Ahora, las acciones de la empresa A han aumentado de valor en un 50 %, las de la empresa B han aumentado en un 10 % y, en cambio las de la empresa C han perdido un 15 % de su valor. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102.000 euros. Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas.

a) Identifique las variables e interprete el enunciado mediante un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Calcule la cantidad de dinero que la sociedad invirtió en acciones en cada empresa.

Problema 2:

2º) En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0,9 m^2 de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo se necesitan 1,2 m^2 de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m^2 de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 euros por una del segundo

a) Plantea la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Calcular el número de bolsas de cada tipo que tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determinar también este beneficio máximo.

Problema 3:

3º) Dado el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} x-ay+2z&=0\\ ax-4y-4z&=0\\ 4x+3y-2z&=0\end{aligned}\right\}$ en función del parámetro a.

a) Discuta para qué valores de a el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso.

b) Encuentre la solución para $a=-2$.

Problema 4:

4º) Considere la función a trozos siguiente: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si\ \ x<0 \\ x^3+ax+2 & si\ \ x\geq 0\end{cases}$.

a) Calcula los valores de a para que $f(x)$ sea continua y derivable.

b) Para $a=4$ calcule el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x=0$, $x=1$ e $y=0$.

Problema 5:

5º) El gasto mensual en euros en lotería de un trabajador viene determinado por su salario mediante la función $f(x) = \frac{100x}{b+x^2}$, en la que $x \geq 0$ representa el salario en miles de euros y $b > 0$ es un parámetro.

$a)$ Encuentre el valor de b para el cual el máximo del gasto se obtiene con un salario mensual de 2.000 euros.

$b)$ Para $b = 9$, determine el salario para que el gasto sea máximo. ¿A cuánto asciende este gasto?

$c)$ Para $b = 9$, ¿para qué salarios el gasto mensual es superior a 10 euros?

Problema 6:

6º) Si el precio de la entrada de un cine es de 8 euros, van 500 personas. El propietario sabe por experiencia que por cada aumento de 1,5 euros en el precio de la entrada van 30 espectadores menos. Encuentre:

$a)$ La función que determina el número de espectadores en función del precio de la entrada.

$b)$ La función que determina los ingresos del cine en función del precio de la entrada.

$c)$ El precio de la entrada para que los ingresos del propietario sean máximos.

$d)$ El número de espectadores que irán al cine cuando el precio sea el que corresponde a los ingresos máximos y estos ingresos máximos.

Problema 7:

7º) La producción en kilogramos de naranjas por naranjo en Sóller sigue una distribución normal de desviación típica 2 y media desconocida.

$a)$ Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para que al estimar la media poblacional con un nivel de confianza del 94 %, el error cometido sea inferior a 1,5 kilogramos.

$b)$ Si se toma una muestra aleatoria de 10 naranjos, con las siguiente producciones en kilogramos: $30;\ 25;\ 4;\ 70;\ 45;\ 60;\ 21;\ 32;\ 9;\ 47$. Calcule un intervalo de confianza del 97 % para estimar la producción media de naranjas por árbol.

Problema 8:

8º) En cierta empresa de exportación, el 62,5 % de los empleados habla inglés. Por otra parte, entre los empleados que hablan inglés, el 80 % habla también alemán. Entre los empleados que no hablan inglés, sólo la tercera parte sí habla alemán.

$a)$ ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas?

$b)$ ¿Qué porcentaje de empleados habla alemán?

$c)$ Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Hace un año una sociedad de capital riesgo invirtió 100.000 euros en acciones de tres empresas, que llamaremos A, B y C. Ahora, las acciones de la empresa A han aumentado de valor en un 50 %, las de la empresa B han aumentado en un 10 % y, en cambio las de la empresa C han perdido un 15 % de su valor. Si la sociedad ahora vendiera todas las acciones obtendría 102.000 euros. Sabemos que invirtió en las acciones de la empresa C lo mismo que en las otras dos juntas.

a) Identifique las variables e interprete el enunciado mediante un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Calcule la cantidad de dinero que la sociedad invirtió en acciones en cada empresa.

Solución:

a) Sean x, y, z las cantidades invertidas por la sociedad en las empresas A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=100.000 \\ 1{,}50x+1{,}10y+0{,}85z=102.000 \\ x+y=z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y+z=100.000} \\ \boldsymbol{30x+22y+17z=2.040.000} \\ \boldsymbol{x+y-z=0} \end{array}\right\}.}$$

b) Restando a la primera ecuación la tercera: $2z=100.000 \Rightarrow z=50.000$.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+50.000=100.000 \\ 30x+22y+850.000=2.040.000 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y=50.000 \\ 30x+22y=1.190.000 \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=50.000 \\ 15x+11y=595.000 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -11x-11y=-550.000 \\ 15x+11y=595.000 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x=45.000;$$

$x=\frac{45.000}{4}=11.250.\ 11.250+y=50.000 \Rightarrow y=38.750.$

$$\underline{\boldsymbol{Invirtió\ 11.250, 38.750\ y\ 50.000\ euros\ en\ A, B\ y\ C, respectivamente.}}$$

Problema 2:

2º) En un taller se fabrican dos tipos de bolsas. Para hacer una bolsa del primer modelo se necesitan 0,9 m^2 de cuero y 8 horas de trabajo. Para el segundo modelo se necesitan 1,2 m^2 de cuero y 4 horas de trabajo. Para hacer estos dos tipos de bolsas el taller dispone de 60 m^2 de cuero y puede dedicar un máximo de 400 horas de trabajo. El taller cobra 30 euros por una bolsa del primer modelo y 25 euros por una del segundo

a) Plantea la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Calcular el número de bolsas de cada tipo que tienen que fabricar para obtener un beneficio máximo. Determinar también este beneficio máximo.

Solución:

a) Sean x e y el número de bolsas de los modelos primero y segundo que se fabrican en el taller, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r}0{,}9x+1{,}2y\le 60\\ 8x+4y\le 400\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}9x+12y\le 600\\ 2x+y\le 100\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

$$\underline{\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{3x+4y\le 200}\\ \boldsymbol{2x+y\le 100}\\ \boldsymbol{x\ge 0;\ y\ge 0}\end{array}\right\}}.$$

b)

① $\Rightarrow 3x+4y\le 200 \Rightarrow y\le \frac{200-3x}{4} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

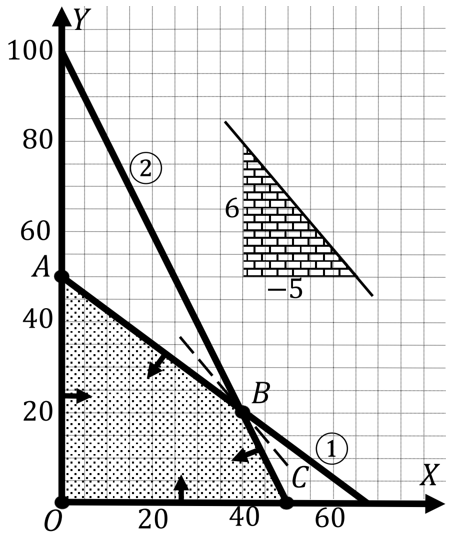
x	0	40
y	50	20

② $\Rightarrow 2x+y\le 100 \Rightarrow y\le 100-2x \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	50
y	100	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x=0\\ 3x+4y=200\end{array}\right\} \Rightarrow y=50 \Rightarrow \underline{A(0,50)}.$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r}3x+4y=200\\ 2x+y=100\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}-3x-4y=-200\\ 8x+4y=400\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x=200;\ \ x=40;\ \ y=20 \Rightarrow \underline{B(40,20)}.$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r}y=0\\ 2x+y=100\end{array}\right\} \Rightarrow x=50 \Rightarrow \underline{C(50,0)}.$$

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

$c)$ La función de objetivos es $f(x, y) = 30x + 25y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 50) = 30 \cdot 0 + 25 \cdot 50 = 0 + 1.250 = 1.250.$

$B \Rightarrow f(40, 20) = 30 \cdot 40 + 25 \cdot 20 = 1.200 + 500 = 1.700.$

$C \Rightarrow f(50, 0) = 30 \cdot 50 + 25 \cdot 0 = 1.500 + 0 = 1.500.$

El valor máximo se produce en el punto $B(40, 20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 30x + 25y = 0 \Rightarrow y = -\frac{30}{25}x = -\frac{6}{5}x \Rightarrow m = -\frac{6}{5}.$

$$\underline{\boldsymbol{Máximo\ beneficio\ fabricando\ 40\ bolsas\ del\ 1^{er}\ modelo\ y\ 20\ del\ 2º.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Máximo\ beneficio\ si\ fabrica\ 40\ bolsas\ del\ primer\ modelo\ y\ 20\ del\ segundo.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 1.700\ euros.}}$$

Problema 3:

3º) Dado el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 0 \end{array}\right\}$ en función del parámetro a.

a) Discuta para qué valores de a el sistema tiene solución y cuántas tiene en cada caso.

b) Encuentre la solución para $a = -2$.

Solución:

a) La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Por tratarse de un sistema lineal homogéneo, a efectos de rango, las matrices de coeficientes y ampliada son equivalentes.

El rango de la matriz de coeficientes en función de a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 8 + 6a + 16a + 32 + 12 - 2a^2 = 0;$$

$-2a^2 + 22a + 52 = 0;\ \ a^2 - 11a - 26 = 0;\ \ a = \frac{11 \pm \sqrt{121+104}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{225}}{2} = = \frac{11 \pm 15}{2} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{a_1 = -2;\ \ a_2 = 13.}$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e iguales al número de incógnitas; en el caso que nos ocupa el número de incógnitas es tres, por lo cual:

$$\underline{\boldsymbol{Para\ \left\{\begin{array}{l} a \neq -2 \\ a \neq 13 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ \left\{\begin{array}{l} a \neq -2 \\ a \neq 13 \end{array}\right\} el\ sistema\ tiene\ únicamente\ la\ solución\ trivial\ x = y = z = 0}}$$

.

Por contener la matriz de coeficientes el menor $\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$:

$$\underline{\boldsymbol{Para\ \left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ a = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}}$$

b) Para $a = -2$ el sistema resulta $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 0 \\ -2x - 4y - 4z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 0 \end{array}\right.$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se elimina una ecuación (segunda).

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 0 \\ 4x + 3y - 2z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Haciendo } z = \lambda:$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = -2\lambda \\ 4x + 3y = 2\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 4x + 8y = -8\lambda \\ -4x - 3y = -2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 5y = -10\lambda;\ \ y = -2\lambda.$$

$$x + 2y = -2\lambda;\ \ x - 4\lambda = -2\lambda \Rightarrow x = 2\lambda.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x = 2\lambda,\ \ y = -2\lambda,\ \ z = \lambda,\ \ \forall \lambda \in R.}}$$

Problema 4:

4º) Considere la función a trozos siguiente: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \;\; si \;\; x < 0 \\ x^3 + ax + 2 \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases}$.

a) Calcula los valores de a para que $f(x)$ sea continua y derivable.

b) Para $a = 4$ calcule el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$.

Solución:

a) Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$, por ser polinómica, es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para \; x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 3x + 2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 + ax + 2) = 2 = f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \forall a \in R.$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de a.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 \;\; si \;\; x < 0 \\ 3x^2 + a \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = -3 \\ f'(0^+) = a \end{cases} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow a = -3.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ es\ continua\ y\ derivable\ en\ x = 0\ para\ a = -3.}}$$

b) Para $a = 4$ la función resulta $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \;\; si \;\; x < 0 \\ x^3 + 4x + 2 \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases}$.

En el intervalo $(0, 1)$ la función es $f(x) = x^3 + 4x + 2$, cuyas ordenadas son todas positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^1 (x^3 + 4x + 2) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \left[\frac{x^4}{4} + 2x^2 + 2x\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1^4}{4} + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1\right) - 0 = \frac{1}{4} + 2 + 2 = 4 + \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{17}{4}\ u^2 = 4,25\ u^2.}}$$

Problema 5:

5º) El gasto mensual en euros en lotería de un trabajador viene determinado por su salario mediante la función $f(x) = \frac{100x}{b+x^2}$, en la que $x \geq 0$ representa el salario en miles de euros y $b > 0$ es un parámetro.

$a)$ Encuentre el valor de b para el cual el máximo del gasto se obtiene con un salario mensual de 2.000 euros.

$b)$ Para $b = 9$, determine el salario para que el gasto sea máximo. ¿A cuánto asciende este gasto?

$c)$ Para $b = 9$, ¿para qué salarios el gasto mensual es superior a 10 euros?

Solución:

$a)$ Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada en ese punto y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f'(x) = \frac{100\cdot(b+x^2)-100x\cdot 2x}{(b+x^2)^2} = \frac{100\cdot b+100x^2-200x^2}{(b+x^2)^2} = \frac{100b-100x^2}{(b+x^2)^2} = 100\cdot\frac{b-x^2}{(b+x^2)^2}.$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 100\cdot\frac{b-2^2}{(b+2^2)^2} = 0 \Rightarrow b-4=0 \Rightarrow b=4.$$

Se justifica a continuación de que se trata de un máximo para $b = 4$:

$$f'(x) = 100\cdot\frac{4-x^2}{(4+x^2)^2}.$$

$$f''(x) = 100\cdot\frac{-2x\cdot(4+x^2)^2-(4-x^2)\cdot[2\cdot(4+x^2)\cdot 2x]}{(4+x^2)^4} = 100\cdot\frac{-2x\cdot(4+x^2)-4x\cdot(4-x^2)}{(4+x^2)^3} =$$

$$= 100\cdot\frac{-8x-2x^3-16x+4x^3}{(4+x^2)^3} = 100\cdot\frac{2x^3-24x}{(4+x^2)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{200x\cdot(x^2-12)}{(4+x^2)^3}.$$

$$f''(2) = \frac{200\cdot 2\cdot(2^2-12)}{(4+2^2)^3} = \frac{400\cdot(-8)}{(4+2^2)^3} < 0 \Rightarrow \textit{Máximo para } b=4 \textit{ y } x=2, c.q.j.$$

El gasto mensual es máximo para $b = 4$ y un salario de 2.000 euros.

$b)$ Para $b = 9$ la función es $f(x) = \frac{100x}{9+x^2}$.

$$f'(x) = 100\cdot\frac{9-x^2}{(9+x^2)^2} = 0 \Rightarrow 9-x^2=0 \Rightarrow x=3.$$

$$f''(x) = 100\cdot\frac{-2x\cdot(9+x^2)^2-(9-x^2)\cdot[2\cdot(9+x^2)\cdot 2x]}{(9+x^2)^4} = 100\cdot\frac{-2x\cdot(9+x^2)-4x\cdot(9-x^2)}{(9+x^2)^3} =$$

$$= 100\cdot\frac{-18x-2x^3-36x+4x^3}{(9+x^2)^3} = 100\cdot\frac{2x^3-54x}{(9+x^2)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{200x\cdot(x^2-54)}{(9+x^2)^3}.$$

$$f''(3) = \frac{200\cdot 3\cdot(3^2-54)}{(9+3^2)^3} = \frac{600\cdot(-45)}{18^3} < 0 \Rightarrow \textit{Máximo para } x=3.$$

Para $b = 9$ el gasto es máximo con un salario de 3.000 euros mensuales.

Para $b = 9 \Rightarrow f(3) = \frac{100\cdot 3}{9+3^2} = \frac{300}{18} = \frac{100}{6} = 16{,}67.$

El gasto mensual es de $16{,}67$ euros.

$c)$ $\quad b = 9 \Rightarrow f(x) = \frac{100 \cdot x}{9+x^2} > 10;\ \frac{10x}{9+x^2} > 1;\ 10x > 9 + x^2;\ -x^2 + 10x - 9 > 0.$

La función $f(x) = -x^2 + 10x - 9$ es una parábola cóncava (∩), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyos puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:

$x^2 - 10x + 9 = 0;\ x = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = 5 \pm 4 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 9.$

$\underline{\boldsymbol{Gasto\ mayor\ de\ 10\ €\ con\ un\ sueldo\ mayor\ de\ 1.000\ €\ y\ menor\ de\ 9.000\ €.}}$

Problema 6:

6º) Si el precio de la entrada de un cine es de 8 euros, van 500 personas. El propietario sabe por experiencia que por cada aumento de 1,5 euros en el precio de la entrada van 30 espectadores menos. Encuentre:

a) La función que determina el número de espectadores en función del precio de la entrada.

b) La función que determina los ingresos del cine en función del precio de la entrada.

c) El precio de la entrada para que los ingresos del propietario sean máximos.

d) El número de espectadores que irán al cine cuando el precio sea el que corresponde a los ingresos máximos y estos ingresos máximos.

Solución:

a) Sea x el precio de la entrada y $N(x)$ el número de espectadores, que es una función lineal afín, por lo cual, su expresión es de la forma $N(x) = mx + n$.

Para determinar los valores de m y n se tiene en cuenta que $N(8) = 500$ y, por ejemplo: $N(9{,}5) = 470$.

$$\left.\begin{array}{l} N(8) = 500 \ \rightarrow 8\mathrm{m} + \mathrm{n} = 500 \\ N(9{,}5) = 470 \ \rightarrow 9{,}5\mathrm{m} + \mathrm{n} = 470 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -8m - n = -500 \\ 9{,}5m + n = 470 \end{array}\right\} \Rightarrow 1{,}5m = -30;$$

$15m = -300 \Rightarrow m = -20.\quad 8 \cdot (-20) + \mathrm{n} = 500;\ \ \mathrm{n} = 500 + 160 \Rightarrow \mathrm{n} = 660.$

$$\underline{\boldsymbol{N(x) = -20x + 660}}.$$

b) La función ingresos se obtiene multiplicando el número de espectadores por el precio de la entrada:

$I(x) = N(x) \cdot x = (-20x + 660) \cdot x \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{I(x) = -20x^2 + 660x}}.$$

c) Por ser la función ingresos una parábola cóncava (∩), por ser negativo el coeficiente de x^2, por lo cual su máximo se obtiene cuando se anula su primera derivada.

$I'(x) = -40x + 660 = 0;\ -2x + 33 = 0 \Rightarrow x = \frac{33}{2} = 16{,}5.$

$$\underline{\boldsymbol{Se\ obtienen\ máximos\ ingresos\ vendiendo\ las\ entradas\ a\ 16{,}5\ euros}}.$$

d) $N(16{,}5) = -20 \cdot 16{,}5 + 660 = -330 + 660 = 330.$

$$\underline{\boldsymbol{Se\ obtienen\ máximos\ ingresos\ cuando\ asisten\ 330\ espectadores}}.$$

$I(16{,}5) = -20 \cdot 16{,}5^2 + 660 \cdot 16{,}5 = 16{,}5 \cdot (-20 \cdot 16{,}5 + 660) =$

$= 16{,}5 \cdot (-330 + 660) = 16{,}5 \cdot 330 = 5.445.$

$$\underline{\boldsymbol{Los\ máximos\ ingresos\ son\ de\ 5.445\ euros}}.$$

Autor: ANTONIO MENGUIANO

Problema 7:

7º) La producción en kilogramos de naranjas por naranjo en Sóller sigue una distribución normal de desviación típica 2 y media desconocida.

a) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para que al estimar la media poblacional con un nivel de confianza del 94 %, el error cometido sea inferior a 1,5 kilogramos.

b) Si se toma una muestra aleatoria de 10 naranjos, con las siguiente producciones en kilogramos: 30; 25; 4; 70; 45; 60; 21; 32; 9; 47. Calcule un intervalo de confianza del 97 % para estimar la producción media de naranjas por árbol.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 94 % es:

$$1-\alpha=0{,}94 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}94=0{,}06 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}03}=1{,}88.$$

$(1-0{,}03=0{,}9700 \;\rightarrow z=1{,}88)$.

Datos: $\sigma=2;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}88;\;\; E=1{,}5$.

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \;\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}88\cdot\frac{2}{1{,}5}\right)^2=$

$=(1{,}88\cdot1{,}3333)^2=2{,}5067^2=6{,}28.$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 7 naranjos

b) $\overline{x}=\frac{30+25+4+70+45+60+21+32+9+47}{10}=\frac{129+105+62+47}{10}=\frac{343}{10}=34{,}3.$

Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1-\alpha=0{,}97 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}97=0{,}03 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}015}=2{,}17.$$

$(1-0{,}015=0{,}9850 \;\rightarrow z=2{,}17)$.

Datos: $n=10;\;\; \overline{x}=34{,}3;\;\; \sigma=2;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(34{,}3-2{,}17\cdot\frac{2}{\sqrt{10}};\;34{,}3+2{,}17\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$;

$(34{,}3-2{,}17\cdot0{,}6325;\;34{,}3+2{,}17\cdot0{,}6325)$; $(34{,}3-1{,}3724;\;34{,}3+1{,}3724)$.

$$\boldsymbol{I.C._{97\,\%}=(32{,}9276;\;35{,}6724).}$$

Problema 8:

8º) En cierta empresa de exportación, el 62,5 % de los empleados habla inglés. Por otra parte, entre los empleados que hablan inglés, el 80 % habla también alemán. Entre los empleados que no hablan inglés, sólo la tercera parte sí habla alemán.

a) ¿Qué porcentaje de empleados habla las dos lenguas?

b) ¿Qué porcentaje de empleados habla alemán?

c) Si un empleado no habla alemán, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés?

Solución:

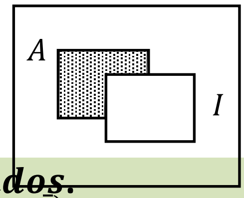
$$Datos: \; P(I) = 0{,}625; \;\; P(A/I) = 0{,}800; \;\; P\left(A/\overline{I}\right) = \frac{1}{3} = 0{,}333.$$

a) $\quad P(A/I) = \frac{P(A\cap I)}{P(I)} = 0{,}800 \Rightarrow P(A \cap I) = 0{,}8 \cdot P(I) = 0{,}8 \cdot 0{,}625 = 0{,}5.$

$$\underline{\boldsymbol{Hablan\ las\ dos\ lenguas\ el\ 50\ \%\ de\ los\ empleados}}.$$

b) $\quad P\left(A/\overline{I}\right) = \frac{P\left(A\cap\overline{I}\right)}{P\left(\overline{I}\right)} = \frac{P(A)-P(A\cap I)}{1-P(I)} = \frac{1}{3}; \;\; \frac{P(A)-0{,}5}{1-0{,}625} = \frac{1}{3};$

$3 \cdot P(A) - 1{,}5 = 0{,}375; \;\; 3 \cdot P(A) = 1{,}875 \Rightarrow P(A) = 0{,}625.$



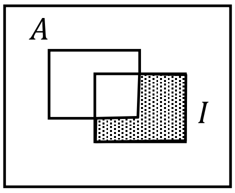
$P\left(A\cap\overline{I}\right) = P(A) - P(A \cap I)$

$$\underline{\boldsymbol{Hablan\ Alemán\ el\ 62{,}5\ \%\ de\ los\ empleados.}}$$

c) $\quad P = P\left(I/\overline{A}\right) = \frac{P\left(I\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{P(A)-P(A\cap I)}{1-P(A)} = \frac{0{,}625-0{,}5}{1-0{,}625} =$

$$= \frac{0{,}125}{0{,}375}$$

$$\underline{\Rightarrow \boldsymbol{P\left(I/\overline{A}\right) = \frac{1}{3} = 0{,}3333.}}$$



$I \cap \overline{A} = I - (A \cap I)$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Sólo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) El barco de Denia a Ibiza transporta automóviles y camiones en su bodega. Cada camión ocupa 4 plazas de automóvil. La bodega puede almacenar hasta 200 automóviles. Cada automóvil pesa 1.000 kg y cada camión, 9.000 kg. El peso total que permita la carga de la bodega es de 300.000 kg y la compañía cobra 50 euros por cada automóvil y 300 euros por cada camión.

a) Plantea la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Calcular el número de coches y camiones que se han de cargar con el fin de obtener el beneficio máximo.

Problema 2:

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

a) Calcular A^2.

b) Hallar a, b, c tales que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema 3:

3º) En una tienda de frutas hemos comprado manzanas a 0,5 euros cada una, aguacates a 1 euros y piñas a 1,5 euros la pieza. Al llegar a la caja nos damos cuenta que llevamos 70 piezas de fruta, el coste total de las cuales es de 68 euros. También observamos que si las manzanas que llevamos fueran aguacates y los aguacates fueran manzanas, la compra nos saldría 4 euros más barata.

a) Idendifique las variables e interprete el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Determinar el número de piezas de cada fruta que hemos comprado.

Problema 4:

4º) Consideramos la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} -4x + a & si \quad x \leq -2 \\ x^2 - 5 & si \quad -2 < x < 1. \\ -7x + 3 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcular los valores de a para que $f(x)$ sea continua.

b) ¿Es $f(x)$ derivable para $x = 1$?

c) Para $a = 0$, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Problema 5:

5º) El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función $P(t) = \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}$, con $t \geq 0$ mide el número de años transcurridos.

$a)$ ¿Cuál es la población inicial $(t = 0)$ y la población después de 5 años?

$b)$ ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos?

$c)$ Con el paso de los años, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos?

Problema 6:

6º) Considera la función: $f(x) = \frac{3}{x} + 8$.

$a)$ Hallar los puntos de la gráfica de $f(x)$ en el cual las rectas tangentes son paralelas a la recta $3x + 4y + 5 = 0$.

$b)$ Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos hallados en el apartado anterior.

$c)$ Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 2$, $x = 4$ e $y = 0$.

Problema 7:

7º) En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17,4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la cual procede la muestra es de 2 años.

$a)$ Calcular un intervalo de confianza al 95 % para estimar la edad media de la poblsción.

$b)$ Calcular el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para estimar la edad media de esta población con un nivel de confianza del 92 %, el error cometido sea inferior a 0,5 años.

Problema 8:

8º) En una determinada población residen 5.000 personas en el centro y 1.000 en la periferia. Se sabe que el 95 % de los residentes en el centro y el 20 % de los que viven en la periferia opina que el ayuntamiento debía restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción del acceso?

$c)$ Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) El barco de Denia a Ibiza transporta automóviles y camiones en su bodega. Cada camión ocupa 4 plazas de automóvil. La bodega puede almacenar hasta 200 automóviles. Cada automóvil pesa 1.000 kg y cada camión, 9.000 kg. El peso total que permita la carga de la bodega es de 300.000 kg y la compañía cobra 50 euros por cada automóvil y 300 euros por cada camión.

a) Plantea la maximización del beneficio de la compañía como un problema de programación lineal.

b) Dibuja la región factible para la solución, indicando las rectas y vértices que la delimitan.

c) Calcular el número de coches y camiones que se han de cargar con el fin de obtener el beneficio máximo.

Solución:

a) Sean x e y el número de automóviles y de camiones que se almacenan en la bodega del barco, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} x+4y\le 200 \\ 1.000x+9.000y\le 300.000 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+4y\le 200 \\ x+9y\le 300 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

b)

$$① \Rightarrow x+4y\le 200 \Rightarrow y\le \frac{200-x}{4} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$$

x	200	0
y	0	50

$$② \Rightarrow x+9y\le 300 \Rightarrow y\le \frac{300-x}{9} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$$

x	120	30
y	20	30

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

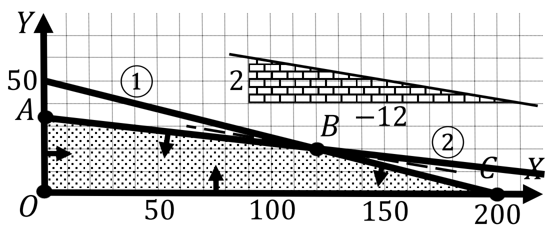
Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+9y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{100}{3} \Rightarrow A\left(0,\frac{100}{3}\right).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+4y=200 \\ x+9y=300 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-4y=-200 \\ x+9y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 5y=100;\ \ y=20;\ \ x+80=200;\ \ x=120 \Rightarrow B(120,20).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+4y=200 \end{array}\right\} \Rightarrow x=200 \Rightarrow C(200,0).$$



c) La función de objetivos es $f(x,y)=50x+300y$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f\left(0,\frac{100}{3}\right)=50\cdot 0+300\cdot\frac{100}{3}=0+10.000=10.000.$$

$B \Rightarrow f(120, 20) = 50 \cdot 120 + 300 \cdot 20 = 6.000 + 6.000 = 12.000.$

$C \Rightarrow f(200, 0) = 50 \cdot 200 + 300 \cdot 0 = 10.000 + 0 = 10.000.$

El valor máximo se produce en el punto $B(120, 20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 50x + 300y = 0 \Rightarrow y = -\frac{50}{300}x = -\frac{1}{6}x \Rightarrow m = -\frac{2}{12}.$

$\underline{\boldsymbol{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ cargando\ 120\ automóviles\ y\ 20\ camiones.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 12.000\ euros.}}$

Problema 2:

2º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcular A^2.

$b)$ Hallar a, b, c tales que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

$a)$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}}}.$$

$b)$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{Soluciones}: \begin{cases} \boldsymbol{a_1 = 1;\ \ b_1 = -1;\ \ c_1 = 1} \\ \boldsymbol{a_2 = -1;\ \ b_2 = 1;\ \ c_2 = -1} \end{cases}}.$$

Problema 3:

3º) En una tienda de frutas hemos comprado manzanas a 0,5 euros cada una, aguacates a 1 euros y piñas a 1,5 euros la pieza. Al llegar a la caja nos damos cuenta que llevamos 70 piezas de fruta, el coste total de las cuales es de 68 euros. También observamos que si las manzanas que llevamos fueran aguacates y los aguacates fueran manzanas, la compra nos saldría 4 euros más barata.

a) Idendifique las variables e interprete el enunciado como un conjunto de ecuaciones lineales.

b) Determinar el número de piezas de cada fruta que hemos comprado.

Solución:

a) Sean x, y, z el número de unidades de naranjas, aguacates y piñas que se compran en la tienda, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ 0{,}5\cdot x+1\cdot y+1{,}5\cdot z=68 \\ 1\cdot x+0{,}5\cdot y+1{,}5z=64 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y+z=70} \\ \boldsymbol{x+2y+3z=136} \\ \boldsymbol{2x+y+3z=128} \end{array}\right\}.$$

b) Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & 2 & 3 & 136 \\ 2 & 1 & 3 & 128 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 2 & 66 \\ 0 & -1 & 1 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 + F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 2 & 66 \\ 0 & 0 & 3 & 54 \end{pmatrix} \Rightarrow 3z = 54;\ \ z = 18. \qquad y + 2z = 66;$$

$y + 36 = 66 \Rightarrow y = 30.\quad x + 30 + 18 = 70 \Rightarrow x = 22.$

$\underline{\boldsymbol{Hemos\ comprado\ 22\ naranjas, 30\ aguacates\ y\ 18\ piñas.}}$

Problema 4:

4º) Consideramos la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} -4x+a & si \quad x\le -2 \\ x^2-5 & si \quad -2<x<1 \\ -7x+3 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$.

a) Calcular los valores de a para que $f(x)$ sea continua.

b) ¿Es $f(x)$ derivable para $x=1$?

c) Para $a=0$, determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) La función $f(x)$, por ser polinómica, es continua en su dominio, que es R, excepto para $x=-2$ y $x=1$ cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=-2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} (-4x+a) = a+8 = f(-2) \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} (x^2-5) = 4-5 = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) \Rightarrow a+8=-1 \Rightarrow a=-9.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x=-2\ para\ a=-8.}}$$

b) Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad para $x=1$ se estudia su continuidad.

$$Para\ x=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (x^2-5) = 1-5 = -4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (-7x+3) = -7+3 = -4 = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow f(x)\ es\ continua\ en\ x=1.$$

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} -4 & si \quad x\le -2 \\ 2x & si \quad -2<x<1 \\ -7 & si \quad x\ge 1 \end{cases}.$$

Para $x=1 \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-)=2\cdot 1=2 \\ f'(1^+)=-7 \end{cases} \Rightarrow f'(1^-)\neq f'(1^+)$

$$\underline{\boldsymbol{f(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x=1.}}$$

c) Para $a=0$ la función es $f(x)=\begin{cases} -4x & si \quad x\le -2 \\ x^2-5 & si \quad -2<x<1 \\ -7x+3 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$ y su función derivada es $f'(x)=\begin{cases} -4 & si \quad x\le -2 \\ 2x & si \quad -2<x<1 \\ -7 & si \quad x\ge 1 \end{cases}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

De la observación de la derivada se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (0, 1)}.}$$

$$\boldsymbol{f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (1, +\infty)}.}$$

Problema 5:

5º) El número de individuos, en millones, de una población viene determinado por la función $P(t) = \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}$, con $t \geq 0$ mide el número de años transcurridos.

$a)$ ¿Cuál es la población inicial $(t = 0)$ y la población después de 5 años?

$b)$ ¿A partir de qué momento la población será inferior a un millón de individuos?

$c)$ Con el paso de los años, ¿hacia qué valor tenderá el número de individuos?

Solución:

$a)$ $P(0) = \frac{2+0+0^2}{0^2+2\cdot 0+1} = \frac{2}{1} = 2.$

$\underline{\boldsymbol{La\ población\ inicial\ era\ de\ 2.000.000\ individuos.}}$

$P(5) = \frac{2+5+5^2}{5^2+2\cdot 5+1} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9} = 0{,}888888.$

$\underline{\boldsymbol{Después\ de\ 5\ años\ la\ población\ era\ de\ 888.888\ individuos.}}$

$b)$ $P(t) = \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1} < 1;\ \ 2 + t + t^2 < t^2 + 2t + 1;\ \ 1 < t.$

$\underline{\boldsymbol{La\ población\ es\ menor\ de\ un\ millón\ de\ individuos\ a\ partir\ de\ un\ año.}}$

$c)$ $\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1} = 1.$

$\underline{\boldsymbol{Con\ el\ tiempo\ la\ población\ se\ estabiliza\ en\ un\ millón\ de\ individuos.}}$

Problema 6:

6º) Considera la función: $f(x) = \frac{3}{x} + 8$.

a) Hallar los puntos de la gráfica de $f(x)$ en el cual las rectas tangentes son paralelas a la recta $3x + 4y + 5 = 0$.

b) Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos hallados en el apartado anterior.

c) Calcule el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = 2, x = 4\ e\ y = 0$.

Solución:

a) La pendiente de la recta $3x + 4y + 5 = 0$ es $m = -\frac{3}{4}$.

La pendiente de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2}.\ m = f'(x) \Rightarrow -\frac{3}{4} = -\frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 = 4;\ \ x_1 = -2, x_2 = 2.$$

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$$f(-2) = \frac{3}{-2} + 8 = \frac{13}{2} \Rightarrow \underline{T_1\left(-2, \frac{13}{2}\right)}. \qquad f(2) = \frac{3}{2} + 8 = \frac{19}{2} \Rightarrow \underline{T_2\left(2, \frac{19}{2}\right)}.$$

$$\boldsymbol{\underline{T_1\left(-2, \frac{13}{2}\right)}; \underline{T_2\left(2, \frac{19}{2}\right)}.}$$

b) La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y - \frac{13}{2} = -\frac{3}{4} \cdot (x + 2);\ \ 4y - 26 = -3x - 6 \Rightarrow \underline{t_1 \equiv 3x + 4y - 20 = 0}.$$

$$y - \frac{19}{2} = -\frac{3}{4} \cdot (x - 2);\ \ 4y - 38 = -3x + 6 \Rightarrow \underline{t_2 \equiv 3x + 4y - 44 = 0}.$$

c) En el intervalo de la superficie a calcular, $(2, 4)$, todas las ordenadas de la función $f(x) = \frac{3}{x} + 8$ son positivas, por lo cual:

$$S = \int_2^4 f(x) \cdot dx = \int_2^4 \left(\frac{3}{x} + 8\right) \cdot dx = [3Lx + 8x]_2^4 =$$

$$= (3L4 + 8 \cdot 4) - (3L2 + 8 \cdot 2) = 6L2 + 32 - 3L2 - 16 = 3L2 + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\underline{S = (3L2 + 16)\ u^2 \cong 18{,}08\ u^2}.}$$

Problema 7:

7º) En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17,4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la cual procede la muestra es de 2 años.

a) Calcular un intervalo de confianza al 95 % para estimar la edad media de la poblsción.

b) Calcular el tamaño mínimo de la muestra que se debe tomar para estimar la edad media de esta población con un nivel de confianza del 92 %, el error cometido sea inferior a 0,5 años.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$

$(1-0{,}025=0{,}9750 \;\rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=256;\;\; \overline{x}=17{,}4;\;\; \sigma=2;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\; \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(17{,}4-1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{256}};\; 17{,}4+1{,}96\cdot\frac{2}{\sqrt{256}}\right);$

$(17{,}4-1{,}96\cdot 0{,}125;\; 17{,}4+1{,}96\cdot 0{,}125);\;\; (17{,}4-0{,}245;\; 17{,}4+0{,}245).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C.}_{95\,\%}=\mathbf{(17,155;\;17,645)}.}$$

b) Para un nivel de confianza del 92 % es:

$1-\alpha=0{,}92 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}92=0{,}08 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}04}=1{,}75.$

$(1-0{,}04=0{,}9600 \;\rightarrow z=1{,}75).$

Datos: $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75;\;\; E=0{,}5;\;\; \sigma=2.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \;\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}75\cdot\frac{2}{0{,}5}\right)^2=$

$=(1{,}75\cdot 4)^2=7^2=49.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 50\ individuos.}}$$

Problema 8:

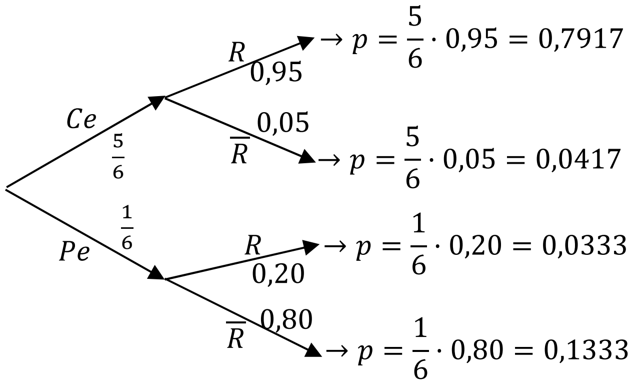
8º) En una determinada población residen 5.000 personas en el centro y 1.000 en la periferia. Se sabe que el 95 % de los residentes en el centro y el 20 % de los que viven en la periferia opina que el ayuntamiento debía restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que resida en el centro y esté a favor de la restricción del acceso?

c) Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que resida en el centro de la ciudad?

Solución:



a) $\quad P = P(R) = P(Ce \cap R) + P(Pe \cap R) =$

$= P(Ce) \cdot P(R/Ce) + P(Pe) \cdot P(R/Pe) = \frac{5}{6} \cdot 0{,}95 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}20 = 0{,}7917 + 0{,}0333 = \underline{0{,}8250}.$

$$\boldsymbol{P(R) = \underline{0,8250}.}$$

b) $\quad P = P(Ce \cap R) = P(Ce) \cdot P(R/Ce) = \frac{5}{6} \cdot 0{,}95 = \underline{0{,}7917}.$

c) $\quad P = P(Ce/R) = \frac{P(Ce \cap R)}{P(R)} = \frac{P(Ce) \cdot P(R/Ce)}{P(R)} = \frac{\frac{5}{6} \cdot 0{,}95}{0{,}8250} = \frac{0{,}7917}{0{,}8250} = \underline{0{,}9596}.$

La resolución del ejercicio mediante una tabla de contingencias es la siguiente:

	Centro	Periferia	Total
Residentes	5.000	1.000	6.000
A favor	4.750	200	4.950
En contra	250	800	1.050

Aplicando la regla de Laplace:

a) $\quad P = \frac{A\ favor}{Total} = \frac{4.950}{6.000} = \underline{0{,}8250}.$

b) $\quad P = \frac{A\ favor\ del\ centro}{Total} = \frac{4.750}{6.000} = \underline{0{,}7917}.$

c) $\quad P = \frac{Del\ centro}{A\ favor} = \frac{4.750}{4.950} = \underline{0{,}9596}.$