Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

CANARIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Resolver un máximo de cuatro preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1; UNA entre A2 y B2; UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema A1:

A1) Un centro de estudios utiliza tres servidores para conectarse a Internet. El 40 % de los accesos a la red se realiza a través del servidor uno, el 35 % a través del servidor dos y el resto a través del tres. El 4 % de los accesos a la red que utilizan el servidor 1 resultan bloqueados. También se bloquean el 6 % de los accesos que se producen a través del servidor 2 y el 9 % de los que usan el servidor 3.

a) Dibuja el diagrama en árbol para describir esta situación.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un acceso a internet no resulta bloqueado?

c) Si un acceso a Internet resulta bloqueado, ¿cuál es la probabilidad de que el bloqueo haya ocurrido en el servidor 2?

Problema B1:

B1) Una compañía de seguros tiene asegurados 2.500 coches, 560 guaguas y 220 motos. Se estima que las probabilidades de tener un accidente a lo largo de un año son 0,1 para los coches, 0,08 para las guaguas y 0,16 para las motos.

a) ¿Cuál es el número total de vehículos (sumando coches, guaguas y motos) que se puede esperar que tengan un accidente a lo largo del próximo año?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo año tengan un accidente al menos 270 de los coches asegurados?

c) La Administración Tributaria decide inspeccionar las cuentas de esta aseguradora. Para realizar la inspección elige al azar las pólizas de 10 de los vehículos asegurados por la compañía. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los vehículos elegidos haya al menos dos guaguas?

Problema A2:

A2) Se realiza un estudio sobre el gasto en electricidad en los hogares canarios durante el año en curso. A partir de una muestra de 289 viviendas se obtuvo el intervalo de confianza $[128{,}76; 134{,}32]$ para el gasto medio mensual (en euros). Sabiendo que la varianza del gasto en electricidad es de 729 $euros^2$:

a) ¿Cuál fue el gasto medio mensual por hogar en Canarias obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con que se obtuvo el intervalo?

b) Usando como valor de la media la estimación puntual obtenida en al apartado a), y tomando una muestra de 576 hogares, ¿cuál es la probabilidad de que el gasto medio en electricidad de dichos hogares sea mayor que 130 euros?

Problema B2:

B2) En un periódico se lee el siguiente titular: "Un 63 % de los españoles valoran positivamente el teletrabajo".

a) Sabiendo que para obtener dicha proporción se han realizado 800 encuestas telefónicas, construir un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo.

b) Utilizando el valor publicado por el periódico como estimación inicial de dicha proporción, ¿a cuántas personas habría que encuestar, para estimar la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo, con un error máximo del 1 % y con un nivel de confianza del 88 %?

Problema A3:

A3) Durante los últimos 15 meses se ha consumido agua de un depósito (en decenas de miles de metros cúbicos) según la función:

$$c(m) = \begin{cases} \frac{1}{10}(m^2 - 9m + 30) & si \ \ 0 \le m < 10 \\ \frac{1}{5}(m^2 - 25m + 170) & si \ \ 10 \le m \le 15 \end{cases}.$$

$a)$ Representar gráficamente la función. Justificando las respuestas, decir si es continua, y determinar cuándo es creciente y cuando es decreciente.

$b)$ ¿Cuándo se alcanzaron los consumos mínimo y máximo? ¿Cuáles fueron los correspondientes valores?

$c)$ ¿Cuándo el consumo fue igual a 10 millones de litros $(10.000\ m^3)$?

Problema B3:

B3) En una pared se quiere pintar un mural abstracto. En ese mural hay que pintar la figura encerrada dentro de la parábola $y = x^2 - 1$, y limitada por encima por la recta $y = 11 - x$ y por debajo por el eje OX. Las distancias en los ejes están definidas en metros.

$a)$ ¿Cuántos metros cuadrados mide la figura?

$b)$ El trozo de figura a la izquierda de la recta $x = -1$ se pinta de azul, y el otro trozo a la derecha de gris. Si cada metro cuadrado de pintura azul cuesta 2 euros, y pintar el mural ha costado en total 95 euros, ¿cuánto cuesta cada m^2 de pintura gris?

Problema A4:

A4) Una empresa dedicada a actividades y deportes acuáticos ha vendido en un día, un total de 45 sesiones entre paddle surf, kayak y moto acuática. Los precios por sesión y persona de cada una de estas actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1.700 euros ese día. Si por cada persona que elige kayak hay tres que eligen paddle sur:

$a)$ Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

$b)$ ¿Cuántas personas van a cada actividad?

Problema B4:

B4) Una fábrica de helados produce helados con dos sabores (turrón y pistacho) que se envasan en tarrinas de dos tamaños, pequeño y grande. Las tarrinas pequeñas llevan 200 gramos de helado de turrón y 150 gramos de pistacho; las tarrinas grandes llevan 500 gramos de turrón y 300 de pistacho. La fábrica obtiene un beneficio de 2 euros por la venta de cada tarrina pequeña y de 4,50 euros por la venta de cada tarrina grande. La fábrica produce cada semana 400 kg de helado de turrón y 255 kg de helado de pistacho que envasa en estas tarrinas. Para satisfacer la demanda de las heladerías de la zona, debe producir semanalmente al menos 200 tarrinas pequeñas y 50 grandes. Suponiendo que pueda vender toda la producción:
$a)$ Formular el correspondiente problema de programación lineal.
$b)$ Representar la región factible.
$a)$ ¿Cuántas tarrinas de cada clase debe producir la fábrica cada semana si quiere maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema A1:

A1) Un centro de estudios utiliza tres servidores para conectarse a Internet. El 40 % de los accesos a la red se realiza a través del servidor uno, el 35 % a través del servidor dos y el resto a través del tres. El 4 % de los accesos a la red que utilizan el servidor 1 resultan bloqueados. También se bloquean el 6 % de los accesos que se producen a través del servidor 2 y el 9 % de los que usan el servidor 3.

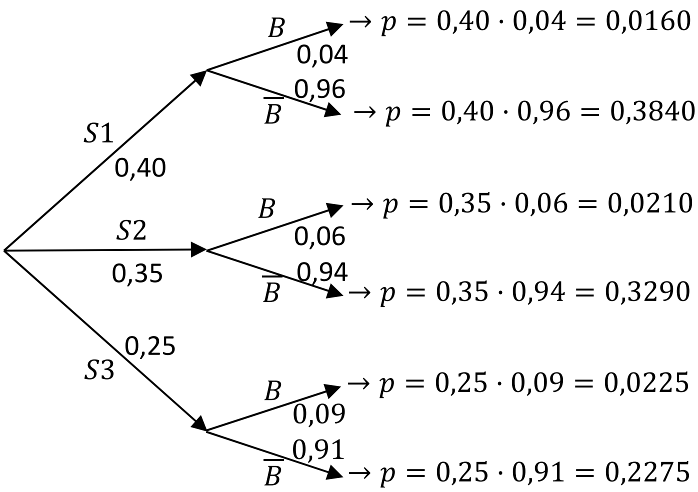
a) Dibuja el diagrama en árbol para describir esta situación.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un acceso a internet no resulta bloqueado?

c) Si un acceso a Internet resulta bloqueado, ¿cuál es la probabilidad de que el bloqueo haya ocurrido en el servidor 2?

Solución:

a)



b) $P = P(\overline{B}) = P(S1 \cap \overline{B}) + P(S2 \cap \overline{B}) + P(S3 \cap \overline{B}) =$

$= P(S1) \cdot P(\overline{B}/S1) + P(S2) \cdot P(\overline{B}/S2) + P(S3) \cdot P(\overline{B}/S3) =$

$= 0{,}40 \cdot 0{,}04 + 0{,}35 \cdot 0{,}06 + 0{,}25 \cdot 0{,}09 = 0{,}3840 + 0{,}3290 + 0{,}2275 = \underline{0{,}9405}.$

$$\boldsymbol{P(\overline{B}) = \underline{0{,}9405}.}$$

c) $P = P(S2/B) = \frac{P(S2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(S2) \cdot P(B/S2)}{1 - P(\overline{B})} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}06}{1 - 0{,}9405} = \frac{0{,}0210}{0{,}0595} = \underline{0{,}3529}.$

$$\boldsymbol{P(S2/B) = \underline{0{,}3529}.}$$

Problema B1:

B1) Una coB1pañía de seguros tiene asegurados 2.500 coches, 560 guaguas y 220 motos. Se estima que las probabilidades de tener un accidente a lo largo de un año son 0,1 para los coches, 0,08 para las guaguas y 0,16 para las motos.

a) ¿Cuál es el número total de vehículos (sumando coches, guaguas y motos) que se puede esperar que tengan un accidente a lo largo del próximo año?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo año tengan un accidente al menos 270 de los coches asegurados?

c) La Administración Tributaria decide inspeccionar las cuentas de esta aseguradora. Para realizar la inspección elige al azar las pólizas de 10 de los vehículos asegurados por la compañía. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los vehículos elegidos haya al menos dos guaguas?

Solución:

a) $N = 2.500 \cdot 0{,}1 + 560 \cdot 0{,}08 + 220 \cdot 0{,}16 = 250 + 44{,}8 + 35{,}2 = 330.$

$$\underline{\boldsymbol{Se\ puede\ esperar\ que\ tengan\ accidente\ el\ próximo\ año\ 330\ vehículos.}}$$

b) $\mu = n \cdot p = 2.500 \cdot 0{,}1 = 250.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{2.500 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{225} = 15.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(250, 15).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-250}{15}$.

$P = P(X \geq 270) = P\left(Z \geq \frac{270-250}{15}\right) = P\left(Z \geq \frac{20}{15}\right) = P(Z \geq 1{,}33) =$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = \underline{0{,}0928}.$

$$\boldsymbol{P(X \geq 270) = \underline{0,0928}.}$$

c) Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 10;\ \ p = \frac{560}{2.500+560+220} = \frac{560}{3.280} = \frac{7}{41};\ \ q = 1 - \frac{7}{41} = \frac{34}{41}.$

Por el suceso contrario, la probabilidad de que haya al menos 2 guaguas es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que haya 0 guaguas o 1 guagua.

La fórmula de la probabilidad binomial de n elementos de los cuales se produzcan r viene dada por la fórmula: $P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$$P = 1 - [P(0) + P(1)] = 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot \left(\frac{7}{41}\right)^0 \cdot \left(\frac{34}{41}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{7}{41}\right)^1 \cdot \left(\frac{34}{41}\right)^9\right] =$$

$$= 1 - \left[1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{34}{41}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{7}{41} \cdot \left(\frac{34}{41}\right)^9\right] = 1 - \left(\frac{34}{41}\right)^9 \left(\frac{34}{41} + \frac{70}{41}\right) = 1 - \left(\frac{34}{41}\right)^9 \cdot \frac{104}{41} =$$

$$= 1 - 0{,}1855 \cdot 2{,}5366 = 1 - 0{,}4704 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P = 0,5296.}}$$

Problema A2:

A2) Se realiza un estudio sobre el gasto en electricidad en los hogares canarios durante el año en curso. A partir de una muestra de 289 viviendas se obtuvo el intervalo de confianza $[128{,}76; 134{,}32]$ para el gasto medio mensual (en euros). Sabiendo que la varianza del gasto en electricidad es de $729\ euros^2$:

$a)$ ¿Cuál fue el gasto medio mensual por hogar en Canarias obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con que se obtuvo el intervalo?

$b)$ Usando como valor de la media la estimación puntual obtenida en al apartado $a)$, y tomando una muestra de 576 hogares, ¿cuál es la probabilidad de que el gasto medio en electricidad de dichos hogares sea mayor que 130 euros?

Solución:

$a)$ $\overline{x} = \frac{128{,}76+134{,}32}{2} = \frac{263{,}08}{2} = 131{,}54.$ $E = \frac{128{,}76-134{,}32}{2} = \frac{5{,}56}{2} = 2{,}78.$

$\rho = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{729} = 27.$

$\underline{\boldsymbol{El\ gasto\ medio\ mensual\ por\ hogar\ canario\ fue\ de\ 131{,}54\ euros.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ error\ de\ estimaci\acute{o}n\ cometido\ fue\ de\ 2{,}78\ euros.}}$

Sabiendo que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{2{,}22\cdot\sqrt{289}}{27} = \frac{2{,}22\cdot 17}{27} = 1{,}3978.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de manera inversa, al valor aproximado $(1{,}40)$ le corresponde 0,9192, por lo cual:

$\underline{\boldsymbol{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ fue\ del\ 91{,}92\ \%.}}$

$b)$ $Datos$: $\mu = 131{,}54;\ \ \sigma = \frac{27}{\sqrt{576}} = 1{,}125.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(131{,}54;\ 1{,}125).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-131{,}54}{1{,}125}.$

$P = P(X > 130) = P\left(Z > \frac{130-131{,}54}{1{,}125}\right) = P\left(Z > \frac{-1{,}54}{1{,}125}\right) = P(Z > -1{,}37) =$

$= P(Z \leq 1{,}37) = \underline{0{,}0147}.$

Problema B2:

B2) En un periódico se lee el siguiente titular: “Un 63 % de los españoles valoran positivamente el teletrabajo”.

a) Sabiendo que para obtener dicha proporción se han realizado 800 encuestas telefónicas, construir un intervalo de confianza al 90 % para la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo.

b) Utilizando el valor publicado por el periódico como estimación inicial de dicha proporción, ¿a cuántas personas habría que encuestar, para estimar la proporción de españoles que valoran positivamente el teletrabajo, con un error máximo del 1 % y con un nivel de confianza del 88 %?

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1-\alpha=0{,}90\ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}90=0{,}10\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$$

$(1-0{,}05=0{,}9500\ \rightarrow z=1{,}645)$.

Datos: $n=800;\ \ p=0{,}63;\ \ q=1-0{,}63=0{,}37;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}},p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}63-1{,}645\cdot\sqrt{\frac{0{,}63\cdot 0{,}37}{800}};\ 0{,}63+1{,}645\cdot\sqrt{\frac{0{,}63\cdot 0{,}37}{800}}\right);$$

$(0{,}63-1{,}645\cdot 0{,}0171;\ 0{,}63+1{,}645\cdot 0{,}0171);$

$(0{,}63-0{,}0281;\ 0{,}63+0{,}0281).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{90\ \%}=(0{,}6019;\ 0{,}6581).}}$$

b) Para un nivel de confianza del 88 % es:

$$1-\alpha=0{,}88\ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}88=0{,}12\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}06}=1{,}555.$$

$(1-0{,}06=0{,}9400\ \rightarrow z=1{,}555)$.

Datos: $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}555;\ \ E=1\ \%=0{,}01;\ \ p=0{,}63;\ \ q=0{,}37.$

$$E^2=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{n}\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{E^2}=1{,}555^2\cdot\frac{0{,}63\cdot 0{,}37}{0{,}01^2}=2{,}4180\cdot\frac{0{,}2331}{0{,}0001}=$$

$=2{,}4180\cdot 2.331=5.636{,}42.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 5.637\ españoles.}}$$

Problema A3:

A3) Durante los últimos 15 meses se ha consumido agua de un depósito (en decenas de miles de metros cúbicos) según la función:

$$c(m) = \begin{cases} \frac{1}{10}(m^2 - 9m + 30) \;\; si \;\; 0 \le m < 10 \\ \frac{1}{5}(m^2 - 25m + 170) \;\; si \;\; 10 \le m \le 15 \end{cases}.$$

$a)$ Representar gráficamente la función. Justificando las respuestas, decir si es continua, y determinar cuándo es creciente y cuando es decreciente.

$b)$ ¿Cuándo se alcanzaron los consumos mínimo y máximo? ¿Cuáles fueron los correspondientes valores?

$c)$ ¿Cuándo el consumo fue igual a 10 millones de litros $(10.000\ m^3)$?

Solución:

$a)$ La función $c(m)$ es continua en R, excepto para $m = 10$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$m = 10 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{m\to 10^-} c(m) = \lim\limits_{m\to 10} \left[\frac{1}{10}(m^2 - 9m + 30)\right] = 4 \\ \lim\limits_{m\to 10^+} c(m) = \lim\limits_{m\to 10} \left[\frac{1}{5}(m^2 - 25m + 170)\right] = 4 = c(10) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to 10^-} c(m) = \lim_{m\to 10^+} c(m) = c(10) \Rightarrow \underline{c(m)\ es\ continua\ en\ su\ dominio}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$c'(m) = \begin{cases} \frac{1}{10}(2m - 9) \;\; si \;\; 0 \le m < 10 \\ \frac{1}{5}(2m - 25) \;\; si \;\; 10 \le m \le 15 \end{cases}.$$

$$c'(m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{9}{2} = 4{,}5 \;\; si \;\; 0 \le m < 10 \\ m_2 = \frac{25}{2} = 12{,}5 \;\; si \;\; 10 \le m \le 15 \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta que ambas parábolas son convexas (∪), por ser positivo el coeficiente de m^2, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: c'(m) > 0 \Rightarrow m\epsilon(4,5;\ 10) \cup (12,5; 15).}$$

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: c'(m) < 0 \Rightarrow m\epsilon(0; 4,5) \cup (10; 12,5).}$$

Los puntos de corte con el eje de abscisas de la función son los siguientes:

$$0 \le m < 10 \Rightarrow \frac{1}{10}(m^2 - 9m + 30) = 0;\;\; m^2 - 9m + 30 = 0;$$

$$m = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 120}}{2} \Rightarrow m \notin R.$$

$10 \leq m \leq 15 \Rightarrow \frac{1}{5}(m^2 - 25m + 170) = 0;\ \ m^2 - 25m + 170 = 0;$

$m = \frac{25 \pm \sqrt{625-680}}{2} \Rightarrow m \notin R.$

La función $c(m)$ no corta al eje de abscisas.

El punto de corte con el eje de ordenadas es: $c(0) = 3 \Rightarrow A(0, 3)$.

$c(10^-) = 4 \Rightarrow B(10, 4)$, punto vacío por no pertenecer a la función.

$c(10) = 4 \Rightarrow B(10, 4)$.

Los vértices de las parábolas (mínimos) son los siguientes:

$c(m) = \frac{1}{10}(m^2 - 9m + 30) \Rightarrow x_1 = \frac{9}{2} = 4{,}5.$

$c\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{1}{10} \cdot \left[\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 9 \cdot \frac{9}{2} + 30\right] = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2} + 30\right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{81-162+120}{4} =$

$= \frac{1}{10} \cdot \frac{39}{4} = \frac{39}{40} \Rightarrow V_1\left(4{,}5;\ \frac{39}{40}\right).$

$c(m) = \frac{1}{5}(m^2 - 25m + 170) \Rightarrow x_2 = \frac{25}{2}.$

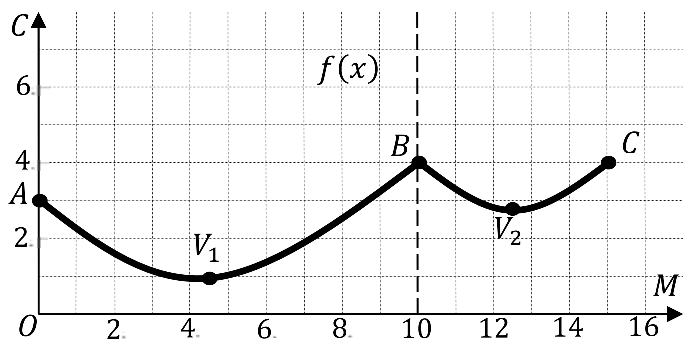
$c\left(\frac{25}{2}\right) = \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\frac{25}{2}\right)^2 - 25 \cdot \frac{25}{2} + 170\right] = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{625}{4} - \frac{625}{2} + 170\right) =$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{625-1.250+680}{4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{55}{4} = \frac{11}{4} \Rightarrow V_2\left(\frac{25}{2}, \frac{11}{4}\right).$

$c(15) = \frac{1}{5} \cdot (15^2 - 25 \cdot 15 + 170) = \frac{225-375+170}{5} = \frac{395-375}{5} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(15, 4).$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que se expresa en la figura adjunta.



$b)$ De la representación gráfica de la función se deducen los valores máximos y mínimo de la función, que son los siguientes:

$$\frac{39}{40} = 0{,}975 \Rightarrow$$

El consumo mínimo se produce para $m = 4{,}5$ y es de $9.750\ m^3$.

El consumo máximo se produce para $m = 10$ y $m = 15$ y es de $4.000\ m^3$.

c) El consumo fue igual a 10 millones de litros $(10.000\ m^3)$, $c = 1$, teniendo en cuenta que el consumo se expresa en decenas de miles de metros cúbicos.

$$0 \leq m < 10 \Rightarrow c(m) = 1 \Rightarrow \frac{1}{10}(m^2 - 9m + 30) = 1;\ \ m^2 - 9m + 30 = 10;$$

$m^2 - 9m + 20 = 0;\ \ m = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 4, m_2 = 5.$

$$10 \leq m \leq 15 \Rightarrow c(m) = 1 \Rightarrow \frac{1}{5}(m^2 - 25m + 170) = 1;$$

$m^2 - 25m + 170 = 5;\ \ m^2 - 25m + 165 = 0;\ \ m = \frac{25 \pm \sqrt{625-660}}{2} \Rightarrow m \notin R.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ consumo\ es\ de\ 10.000\ m^3\ a\ los\ 4\ meses\ y\ a\ los\ 5\ meses.}}$$

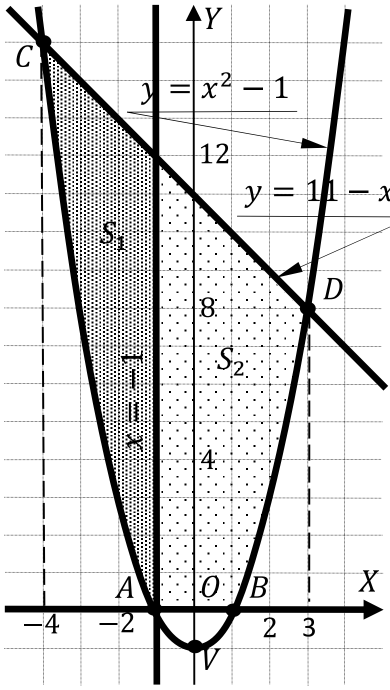
Problema B3:

B3) En una pared se quiere pintar un mural abstracto. En ese mural hay que pintar la figura encerrada dentro de la parábola $y = x^2 - 1$, y limitada por encima por la recta $y = 11 - x$ y por debajo por el eje OX. Las distancias en los ejes están definidas en metros.

$a)$ ¿Cuántos metros cuadrados mide la figura?

$b)$ El trozo de figura a la izquierda de la recta $x = -1$ se pinta de azul, y el otro trozo a la derecha de gris. Si cada metro cuadrado de pintura azul cuesta 2 euros, y pintar el mural ha costado en total 95 euros, ¿cuánto cuesta cada m^2 de pintura gris?

Solución:



$a)$ La parábola $y = x^2 - 1$ es convexa $(\cup)$, por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es $V(0, -1)$ y corta al eje de abscisas en los puntos $A(-1, 0)$ y $B(1, 0)$.

Los puntos de corte de la parábola y la recta tienen por abscisas las raíces de la ecuación que se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 1 = 11 - x;\; x^2 + x - 12 = 0;\;\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \rightarrow C(-4, 15) \\ x_2 = 3 \rightarrow D(3, 8) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.

La superficie sombreada es la siguiente:

$$S = \int_{-4}^{3} [(11 - x) - (x^2 - 1)] \cdot dx + \int_{-1}^{1} (x^2 - 1) \cdot dx =$$

$$= \int_{-4}^{3} (-x^2 - x + 12) dx + \int_{-1}^{1} (x^2 - 1) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x\right]_{-4}^{3} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12 \cdot 3\right) - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - \frac{(-4)^2}{2} + 12 \cdot (-4)\right] + \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) - \left[\frac{(-1)^3}{3} + 1\right] =$$

$$= -9 - \frac{9}{2} + 36 - \frac{64}{3} + 8 + 48 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1 = 81 - \frac{9}{2} - \frac{62}{3} = \frac{486 - 27 - 124}{6} = \frac{335}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{La\ figura\ mide\ \frac{335}{6}\ m^2 \cong 55{,}83\ m^2.}}$$

$$b)\; S_1 = \int_{-4}^{-1} [(11 - x) - (x^2 - 1)] \cdot dx = \int_{-4}^{-1} (-x^2 - x + 12) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x\right]_{-4}^{-1} = \left[-\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 12\right] - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - \frac{(-4)^2}{2} + 12 \cdot (-4)\right] =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 12 - \frac{64}{3} + 8 + 48 = 44 - \frac{63}{3} - \frac{1}{2} = 44 - 21 - \frac{1}{2} = 23 - \frac{1}{2} \Rightarrow S_1 = \frac{45}{2}\ m^2.$$

$$S_2 = \int_{-1}^{3} [(11 - x) - (x^2 - 1)] \cdot dx + \int_{-1}^{1} (x^2 - 1) \cdot dx =$$

$= \int_{-1}^{3} (-x^2 - x + 12)dx + \int_{-1}^{1} (x^2 - 1) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x\right]_{-1}^{3} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} =$

$= \left(-\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12 \cdot 3\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + 12 \cdot (-1)\right] + \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) - \left[\frac{(-1)^3}{3} + 1\right] =$

$= -9 - \frac{9}{2} + 36 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 12 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1 = 37 - 4 + \frac{1}{3} = 33 + \frac{1}{3} = \frac{100}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_2 = \frac{100}{3}\ m^2.$

Sea z el precio por metro cuadrado de la pintura gris:

$S_1 \cdot 2 + S_2 \cdot z = 95;\ \ \frac{45}{2} \cdot 2 + \frac{100}{3} \cdot z = 95;\ \ 45 + \frac{100}{3} \cdot z = 95;\ \ \frac{100}{3} \cdot z = 50;$

$100z = 150 \Rightarrow z = 1{,}5.$

El precio de la pintura gris es de 1,5 euros el metro cuadrado.

Problema A4:

A4) Una empresa dedicada a actividades y deportes acuáticos ha vendido en un día, un total de 45 sesiones entre paddle surf, kayak y moto acuática. Los precios por sesión y persona de cada una de estas actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1.700 euros ese día. Si por cada persona que elige kayak hay tres que eligen paddle sur:

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) ¿Cuántas personas van a cada actividad?

Solución:

a) Sean x, y, z el número de sesiones de paddle surf, kayak y moto acuática que vendió la empresa ese día, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=45 \\ 40x+20y+60z=1.700 \\ x=3y \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y+z=45} \\ \boldsymbol{2x+y+3z=85} \\ \boldsymbol{x-3y=0} \end{array}\right\}.$$

b) Resolviendo por sustitución:

$$x=3y \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3y+y+z=45 \\ 2\cdot(3y)+y+3z=85 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4y+z=45 \\ 7y+3z=85 \end{array}\right\} \Rightarrow z=45-4y \Rightarrow$$

$\Rightarrow 7y+3\cdot(45-4y)=85;\ \ 7y+135-12y=85;\ \ 50=5y \Rightarrow y=10.$

$z=45-4y=45-40 \Rightarrow z=5. \quad x=3y \Rightarrow x=30.$

$$\underline{\boldsymbol{Ese\ día\ van\ 30\ personas\ a\ paddle\ surf, 10\ a\ kayak\ y\ 5\ a\ moto\ acuática.}}$$

Problema B4:

B4) Una fábrica de helados produce helados con dos sabores (turrón y pistacho) que se envasan en tarrinas de dos tamaños, pequeño y grande. Las tarrinas pequeñas llevan 200 gramos de helado de turrón y 150 gramos de pistacho; las tarrinas grandes llevan 500 gramos de turrón y 300 de pistacho. La fábrica obtiene un beneficio de 2 euros por la venta de cada tarrina pequeña y de 4,50 euros por la venta de cada tarrina grande. La fábrica produce cada semana 400 kg de helado de turrón y 255 kg de helado de pistacho que envasa en estas tarrinas. Para satisfacer la demanda de las heladerías de la zona, debe producir semanalmente al menos 200 tarrinas pequeñas y 50 grandes. Suponiendo que pueda vender toda la producción:

$a)$ Formular el correspondiente problema de programación lineal.

$b)$ Representar la región factible.

$a)$ ¿Cuántas tarrinas de cada clase debe producir la fábrica cada semana si quiere maximizar sus beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución:

$a)$ Sean x e y las tarrinas de turrón y pistacho que se producen semanalmente en la fábrica de helados, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} 200x + 500y \leq 400.000 \\ 150x + 300y \leq 255.000 \\ x \geq 200;\ y \geq 50 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x + 5y \leq 4.000} \\ \mathbf{x + 2y \leq 1.700} \\ \mathbf{x \geq 200;\ y \geq 50} \end{array}\right\}.$$

$b)$

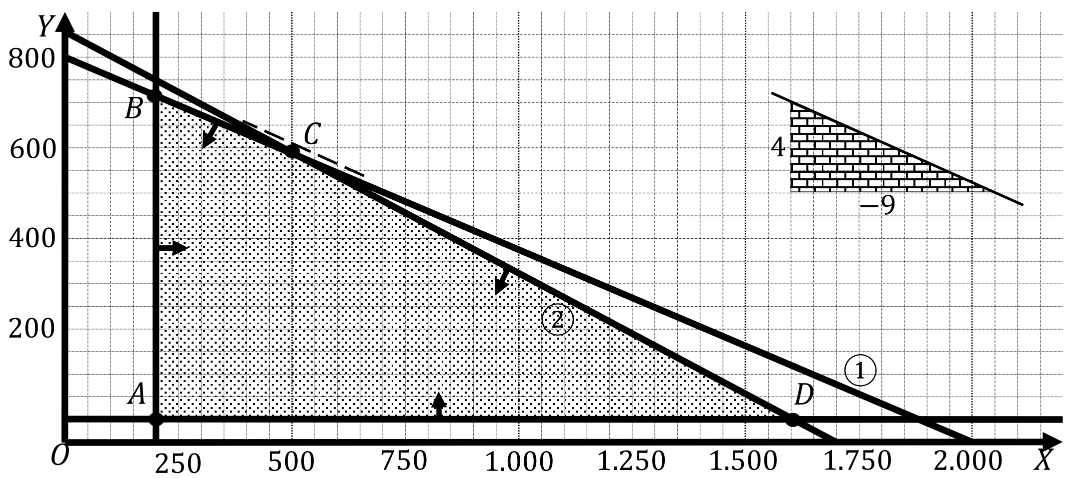
① $\Rightarrow 2x + 5y \leq 4.000 \Rightarrow y \leq \frac{4.000-2x}{5} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	2.000
y	800	0

② $\Rightarrow x + 2y \leq 1.700 \Rightarrow y \leq \frac{1.700-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	1.700
y	850	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 200 \\ y = 50 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(200, 50).$

$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 200 \\ 2x + 5y = 4.000 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 400 + 5y = 4.000; \;\; 5y = 3.600; \;\; y = 720 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(200, 720).$

$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + 5y = 4.000 \\ x + 2y = 1.700 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2x + 5y = 4.000 \\ -2x - 4y = -3.400 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 600;$

$x + 1.200 = 1.700; \;\; x = 500 \Rightarrow C(500, 600).$

$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 50 \\ x + 2y = 1.700 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + 100 = 1.700; \;\; x = 1.600 \Rightarrow D(1.600, 50).$

$c)$ La función de objetivos: $f(x, y) = 2x + 4{,}5y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(200, 50) = 2 \cdot 200 + 4{,}5 \cdot 50 = 400 + 225 = 625.$

$B \Rightarrow f(200, 50) = 2 \cdot 200 + 4{,}5 \cdot 720 = 400 + 3.240 = 3.640.$

$C \Rightarrow f(500, 600) = 2 \cdot 500 + 4{,}5 \cdot 600 = 1.000 + 2.700 = 3.700.$

$D \Rightarrow f(1.600, 50) = 2 \cdot 1.600 + 4{,}5 \cdot 50 = 3.200 + 225 = 3.425.$

El valor máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 2x + 4{,}5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{4{,}5}x = -\frac{4}{9}x \Rightarrow m = -\frac{4}{9}.$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ es\ máximo\ produciendo\ 500\ tarrinas\ pequeñas\ y\ 600\ grandes}}$.

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 3.700\ euros}}$.

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Resolver un máximo de cuatro preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1; UNA entre A2 y B2; UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A1:

A1) Se dispone de tres urnas idénticas con bolas de colores dentro. La primera tiene 6 bolas blancas y 4 negras. La segunda tiene 5 blancas y dos negras y la tercera tiene 4 blancas y 7 negras.

$a)$ Se extrae una bola de una urna elegida al azar. Haz un diagrama con las probabilidades de los posibles resultados.

$b)$ Calcula la probabilidad de extraer una bola negra de una urna elegida al azar.

$c)$ Se ha hecho una extracción de una bola al azar y ha resultado ser blanca. Calcula la probabilidad de que haya sido extraída de la primera urna.

Problema B1:

B1) Se ha observado que el número de horas que dedican a caminar cada semana las personas adultas que viven en Canarias sigue una distribución normal de media 5,25 horas, con una desviación típica de 1,25 horas. En esta población:

$a)$ Se elige una persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana dedique a caminar más de 6 horas?

$b)$ Calcula la probabilidad de que el número medio de horas semanales dedicadas a caminar por una muestra de 64 personas sea inferior a 5 horas.

$c)$ En una muestra de 1.000 personas, ¿cuál es el número esperado de personas que caminan al menos 5,5 horas a la semana?

Problema A2:

A2) En un estudio realizado por el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de una Universidad se lee el siguiente informe: "Se ha tomado una muestra del número de fotocopias (en miles), realizadas en 16 departamentos de la Universidad en una semana, y el intervalo de confianza al 95 % para el número medio de fotocopias ha sido $[17{,}9; 24{,}1]$". Según la información:

$a)$ ¿Cuál fue el número medio muestral de fotocopias?

$b)$ ¿Cuál fue la desviación típica?

$c)$ Determinar un intervalo de confianza al 90 % para el número medio de fotocopias (en miles).

Problema B2:

B2) Se ha realizado una encuesta entre los medios de los distintos centros sanitarios de las islas para evaluar la proporción de médicos que han sufrido episodios de ansiedad durante el último año. En la encuesta participaron 350 médicos elegidos al azar entre los distintos centros, de los cuáles 84 manifestaron haber tenido al menos uno de estos episodios en el último año.

$a)$ ¿Cuál es la proporción de médicos de la muestra que han sufrido episodios de ansiedad el último año? Calcular un intervalo de confianza al 94 % para dicha proporción en la población de médicos de las islas. $b)$ Utilizando la proporción obtenida en el apartado anterior como estimador de la proporción de médicos con episodios de ansiedad, ¿de qué tamaño debe ser la muestra de médicos si se desea construir el intervalo anterior con un error máximo de 0,02? $c)$ ¿Cuál ha sido el nivel de confianza empleado si, con los mismos datos, el intervalo de confianza obtenido es $[0{,}1905;\ 0{,}2895]$?

Problema A3:

A3) De acuerdo con los datos disponibles, el número mensual de casos activos de COVID-19, por cada 100.000 personas mayores de 70 años en Canarias entre marzo y diciembre de 2.020, puede aproximarse mediante la función:

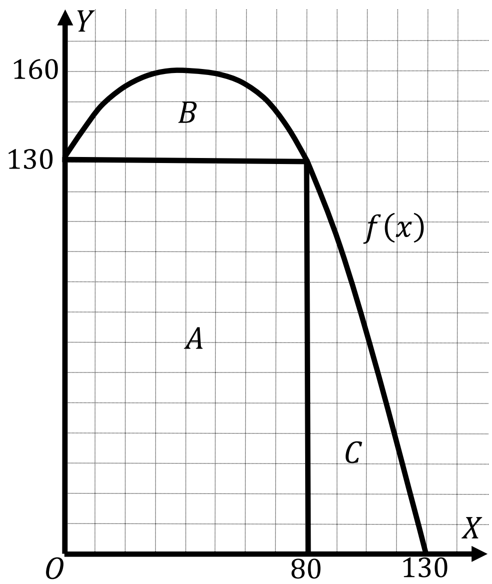
$$C(t)=\begin{cases}-15t^2+150t-315 & si\ \ 3\le t\le 6{,}5\\ \frac{53}{8}t-\frac{269}{16} & si\ \ 6{,}5<t\le 8{,}5\\ -18t^2+360t-1.720 & si\ \ 8{,}5<t\le 12\end{cases}$$

, donde t es el tiempo (en meses) transcurrido desde el 1 de enero de 2.020.

$a)$ Representar gráficamente esta función. ¿Es continua? $b)$ Describir la variación de la curva de casos activos (cuando crece y cuando decrece). ¿Cuándo se produjeron los picos del número de casos activos de COVID en estas personas? ¿Cuántos casos activos había en esos momentos? $c)$ ¿En qué momento se alcanzaron por primera vez los 62 casos cativos por cada 100.000 personas de este grupo de edad?

Problema B3:

B3) Un agricultor dispone de un terreno cuya forma coincide con el área limitada entre los ejes de coordenadas y la parábola $f(x)=-0{,}02x^2+1{,}6x+130$. El agricultor ha dividido el terreno en tres parcelas A, B y C tal como se muestra en la figura adjunta. Las líneas que dividen las parcelas corresponden, respectivamente, a las rectas $x=80$ e $y=130$ (las distancias se miden en metros).



$a)$ Calcular la superficie de cada parcela.

$b)$ El agricultor dedicará una de las parcelas a plantar trigo, otra a plantar millo y la tercera a plantar cebada. El coste total anual de producción de toda la finca (mano de obra, maquinaria, semillas, agua, transporte, etc.) asciende a 22.143 euros. Si el trigo le produce un ingreso anual de 4 euros/m^2, el millo 3,5 euros/m^2, y la cebada 2 euros/m^2. ¿Qué deberá plantar el agricultor en cada parcela si quiere maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio total anual?

Problema A4:

A4) Por cierre de campaña, un vivero de frutales necesita vender 350 aguacateros y 400 mangos. Anuncia dos ofertas: la oferta A consiste en un lote con una planta de aguacate y dos de mango por 40 euros, la oferta B consiste en un lote con dos plantas de aguacate y una de mango por 45 euros. Es necesario vender al menos 80 lotes de la oferta A y al menos 90 de la oferta B.

$a)$ Formular el correspondiente problema de programación lineal. $b)$ Representar la región factible. $c)$ Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo?

Problema B4:

B4) Un comercio ha vendido 600 ejemplares de tres ediciones de un libro por un total de 19.152 euros. Los ejemplares de la tercera edición se vendieron por 36 euros cada uno. Los ejemplares de las dos ediciones anteriores se vendieron con un descuento del 30 % los de la primera edición, y del 40 % los de la segunda (ambos respecto al precio de la tercera edición). Se sabe que el número total de ejemplares vendidos en las dos ediciones anteriores fue la mitad de los de la última edición. ¿Cuántos libros vendió de cada edición?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema A1:

A1) Se dispone de tres urnas idénticas con bolas de colores dentro. La primera tiene 6 bolas blancas y 4 negras. La segunda tiene 5 blancas y dos negras y la tercera tiene 4 blancas y 7 negras.

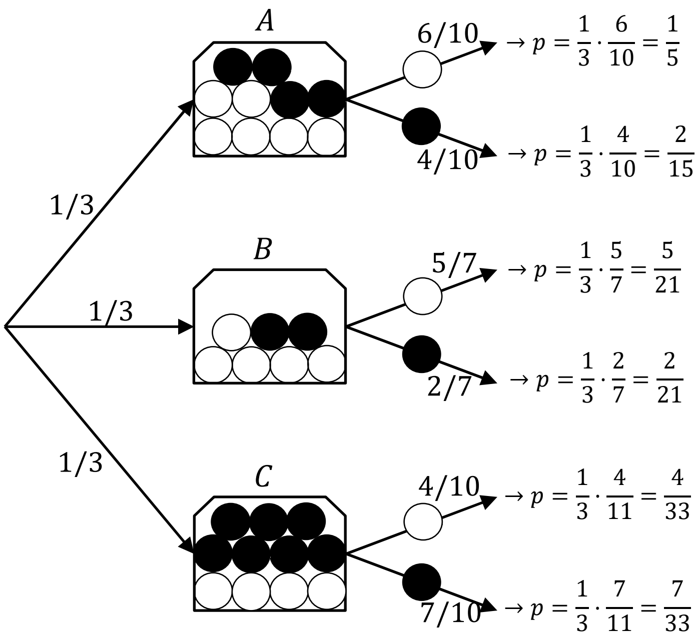
a) Se extrae una bola de una urna elegida al azar. Haz un diagrama con las probabilidades de los posibles resultados.

b) Calcula la probabilidad de extraer una bola negra de una urna elegida al azar.

c) Se ha hecho una extracción de una bola al azar y ha resultado ser blanca. Calcula la probabilidad de que haya sido extraída de la primera urna.

Solución:

a)



b) $P = P(Ne) = P(A \cap Ne) + P(B \cap Ne) + P(C \cap Ne) =$

$= P(A) \cdot P(Ne/A) + P(B) \cdot P(Ne/B) + P(C) \cdot P(Ne/C) =$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{11} = \frac{2}{15} + \frac{2}{21} + \frac{7}{33} = \frac{2 \cdot 77 + 2 \cdot 55 + 7 \cdot 35}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{154 + 110 + 245}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{509}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P(Ne) = \frac{509}{1.155} \cong 0,4407.}}$$

c) $P = P(A/Bl) = \frac{P(A \cap Bl)}{P(Bl)} = \frac{P(A) \cdot P(Bl/A)}{1 - P(Ne)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10}}{1 - 0,4407} = \frac{\frac{1}{5}}{0,5593} = \frac{1}{2,7965} = \underline{0,3576}.$

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema B1:

B1) Se ha observado que el número de horas que dedican a caminar cada semana las personas adultas que viven en Canarias sigue una distribución normal de media 5,25 horas, con una desviación típica de 1,25 horas. En esta población:

a) Se elige una persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana dedique a caminar más de 6 horas?

b) Calcula la probabilidad de que el número medio de horas semanales dedicadas a caminar por una muestra de 64 personas sea inferior a 5 horas.

c) En una muestra de 1.000 personas, ¿cuál es el número esperado de personas que caminan al menos 5,5 horas a la semana?

Solución:

$a)\ Datos:\ \mu = 5{,}25;\ \ \sigma = 1{,}25.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(5{,}25; 1{,}25).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-5{,}25}{1{,}25}.$

$P = P(X > 6) = P\left(Z > \frac{6-5{,}25}{1{,}25}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}75}{1{,}25}\right) = P(Z > 0{,}6) =$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = \underline{0{,}2743}.$

$b)\ Datos:\ \mu = 5{,}25;\ \ \sigma = 1{,}25;\ \ n = 64.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N\left(5{,}25, \frac{1{,}25}{\sqrt{64}} \cong 0{,}156\right).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-5{,}25}{0{,}156}.$

$P = P(X < 5) = P\left(Z < \frac{5-5{,}25}{0{,}156}\right) = P\left(Z < \frac{-0{,}25}{0{,}156}\right) = P(Z < -1{,}6) =$

$= P(Z > 1{,}6) = 1 - P(Z \leq 1{,}6) = 1 - 0{,}9452 = \underline{0{,}0548}.$

c) Considerando la media de la muestra la media de la población:

$Datos:\ \mu = 5{,}25;\ \ \sigma = 1{,}25.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(5{,}25; 1{,}25).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-5{,}25}{1{,}25}.$

$P = P(X \geq 5{,}5) = P\left(Z \geq \frac{5{,}5-5{,}25}{1{,}25}\right) = P\left(Z \geq \frac{0{,}25}{1{,}25}\right) = P(Z \geq 0{,}2) =$

$= 1 - P(Z \leq 0{,}2) = 1 - 0{,}5793 \Rightarrow P = 0{,}4207.$

$n = N \cdot P = 1.000 \cdot 0{,}4207 = 420{,}7.$

$\underline{\boldsymbol{Caminan\ al\ menos\ 5{,}5\ horas\ a\ la\ semana\ 421\ personas\ de\ las\ mil.}}$

Problema A2:

A2) En un estudio realizado por el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de una Universidad se lee el siguiente informe: "Se ha tomado una muestra del número de fotocopias (en miles), realizadas en 16 departamentos de la Universidad en una semana, y el intervalo de confianza al 95 % para el número medio de fotocopias ha sido $[17{,}9; 24{,}1]$". Según la información:

$a)$ ¿Cuál fue el número medio muestral de fotocopias?

$b)$ ¿Cuál fue la desviación típica?

$c)$ Determinar un intervalo de confianza al 90 % para el número medio de fotocopias (en miles).

Solución:

$a)$ $\overline{x} = \frac{24{,}1+17{,}9}{2} = \frac{42}{2} = 21$

$$\underline{\boldsymbol{La\ media\ semanal\ es\ de\ 21.000\ fotocopias}}.$$

$b)$ Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$

$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \rightarrow z = 1{,}96).$

$E = \frac{24{,}1-17{,}9}{2} = \frac{6{,}2}{2} = 3{,}1.$

Datos: $n = 16;\ \overline{x} = 21;\ E = 3{,}1;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

Sabiendo que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{z_{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{3{,}1\cdot\sqrt{16}}{1{,}96} = \frac{12{,}4}{1{,}96} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma \cong 6{,}33\ horas}}.$$

$c)$ Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 1-0{,}90 = 0{,}10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$

$(1-0{,}05 = 0{,}9500 \rightarrow z = 1{,}645).$

Datos: $n = 16;\ \overline{x} = 21;\ \sigma = 6{,}33;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(21 - 1{,}645 \cdot \frac{6{,}33}{\sqrt{16}};\ 21 + 1{,}645 \cdot \frac{6{,}33}{\sqrt{16}}\right);$

$(21 - 1{,}645 \cdot 1{,}5816;\ 21 + 1{,}645 \cdot 1{,}5816);\ \ (21 - 2{,}6017;\ 21 + 2{,}6017).$

Teniendo en cuenta que las fotocopias se expresan en miles:

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{90\,\%} = (18.398;\ 23.602)}}.$$

Problema B2:

B2) Se ha realizado una encuesta entre los medios de los distintos centros sanitarios de las islas para evaluar la proporción de médicos que han sufrido episodios de ansiedad durante el último año. En la encuesta participaron 350 médicos elegidos al azar entre los distintos centros, de los cuáles 84 manifestaron haber tenido al menos uno de estos episodios en el último año.

a) ¿Cuál es la proporción de médicos de la muestra que han sufrido episodios de ansiedad el último año? Calcular un intervalo de confianza al 94 % para dicha proporción en la población de médicos de las islas.

b) Utilizando la proporción obtenida en el apartado anterior como estimador de la proporción de médicos con episodios de ansiedad, ¿de qué tamaño debe ser la muestra de médicos si se desea construir el intervalo anterior con un error máximo de 0,02?

c) ¿Cuál ha sido el nivel de confianza empleado si, con los mismos datos, el intervalo de confianza obtenido es $[0{,}1905;\ 0{,}2895]$?

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 94 % es:

$$1-\alpha=0{,}94\ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}94=0{,}06\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}03}=1{,}88.$$

$$(1-0{,}03=0{,}9700\ \rightarrow z=1{,}88).$$

Datos: $n=350;\ \ p=\frac{84}{350}=0{,}24;\ \ q=1-0{,}24=0{,}76;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}88.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}24-1{,}88\cdot\sqrt{\frac{0{,}24\cdot 0{,}76}{350}};\ 0{,}24+1{,}88\cdot\sqrt{\frac{0{,}24\cdot 0{,}76}{350}}\right);$$

$(0{,}24-1{,}88\cdot 0{,}0228;\ 0{,}24+1{,}88\cdot 0{,}0228);\ \ (0{,}24-0{,}0429;\ \ 0{,}24+0{,}0429).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{94\,\%}=(0,1971;\ 0,2829).}}$$

b) Datos: $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}88;\ \ E=0{,}02;\ \ p=0{,}24;\ \ q=0{,}76.$

$$E^2=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{n}\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{E^2}=1{,}88^2\cdot\frac{0{,}24\cdot 0{,}76}{0{,}02^2}=3{,}5344\cdot\frac{0{,}1824}{0{,}0004}=$$

$$=3{,}5344\cdot 456=1.611{,}69.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 1.612\ médicos.}}$$

c) $E=\frac{0{,}2895-0{,}1905}{2}=\frac{0{,}099}{2}=0{,}0495.$

Datos: $n=350;\ \ E=0{,}0495;\ \ p=0{,}24;\ \ q=0{,}76.$

$$E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \frac{E^2 \cdot n}{p \cdot q} = \frac{0{,}0495^2 \cdot 350}{0{,}24 \cdot 0{,}76} = \frac{0{,}8576}{0{,}1824} = 4{,}7017 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{4{,}7017} \cong 2{,}17.$$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ a 2,17 le corresponde el valor 0,9850;

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9850;\ \ 2 - \alpha = 1{,}9700;\ \ \alpha = 2 - 1{,}9700 = 0{,}0300.$

$1 - \alpha = 1 - 0{,}0300 = 0{,}97.$

$\underline{\boldsymbol{El\ nivel\ de\ confianza\ empleado\ ha\ sido\ del\ 97\ \%.}}$

Problema A3:

A3) De acuerdo con los datos disponibles, el número mensual de casos activos de COVID-19, por cada 100.000 personas mayores de 70 años en Canarias entre marzo y diciembre de 2.020, puede aproximarse mediante la función:

$$C(t)=\begin{cases}-15t^2+150t-315 & si\ \ 3\le t\le 6{,}5\\ \frac{53}{8}t-\frac{269}{16} & si\ \ 6{,}5<t\le 8{,}5\\ -18t^2+360t-1.720 & si\ \ 8{,}5<t\le 12\end{cases}$$

, donde t es el tiempo (en meses) transcurrido desde el 1 de enero de 2.020.

a) Representar gráficamente esta función. ¿Es continua?

b) Describir la variación de la curva de casos activos (cuando crece y cuando decrece). ¿Cuándo se produjeron los picos del número de casos activos de COVID en estas personas? ¿Cuántos casos activos había en esos momentos?

c) ¿En qué momento se alcanzaron por primera vez los 62 casos cativos por cada 100.000 personas de este grupo de edad?

Solución

a) En el intervalo $[3;6{,}5]$ la función es la parábola $C(t)=-15t^2+150t-315$, que es cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de t^2, cuyo vértice (máximo) y puntos extremos del intervalo son los siguientes:

$$C'(t)=-30t+150=0\Rightarrow 30t=150;\ \ t=5.$$

$$C(5)=-15\cdot 5^2+150\cdot 5-315=-375+750-315=750-690=$$

$$=60\Rightarrow V_1(5,60).$$

$$C(3)=-15\cdot 3^2+150\cdot 3-315=-135+450-315=450-450=$$

$$=0\Rightarrow A(3,0).$$

$$C(6{,}5)=-15\cdot(6{,}5)^2+150\cdot 6{,}5-315=-633{,}75+975-315=$$

$$=975-948{,}75=26{,}25\Rightarrow B(6{,}5;26{,}25).$$

En el intervalo $(6{,}5;\ 8{,}5]$ la función es la recta $C(t)=\frac{53}{8}t-\frac{269}{16}$, cuyos puntos extremos del intervalo son los siguientes:

$$C(6{,}5)=\frac{53\cdot 6{,}5}{8}-\frac{269}{16}=\frac{689-269}{16}=\frac{420}{16}=26{,}25\Rightarrow B(6{,}5;26{,}25).$$

$$C(8{,}5)=\frac{53\cdot 8{,}5}{8}-\frac{269}{16}=\frac{901-269}{16}=\frac{632}{16}=39{,}5\Rightarrow C(8{,}5;39{,}5).$$

En el intervalo $(8{,}5;\ 12]$ la función es la parábola $C(t)=-18t^2+360t-1.720$, que es cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de t^2, cuyo vértice (máximo) y puntos extremos del intervalo son los siguientes:

$$C'(t)=-36t+360=0\Rightarrow 36t=360;\ \ t=10.$$

$$C(10)=-18\cdot 10^2+360\cdot 10-1.720=-1.800+3.600-1.720=$$

$$=3.600-3.520=80\Rightarrow V_2(10,80).$$

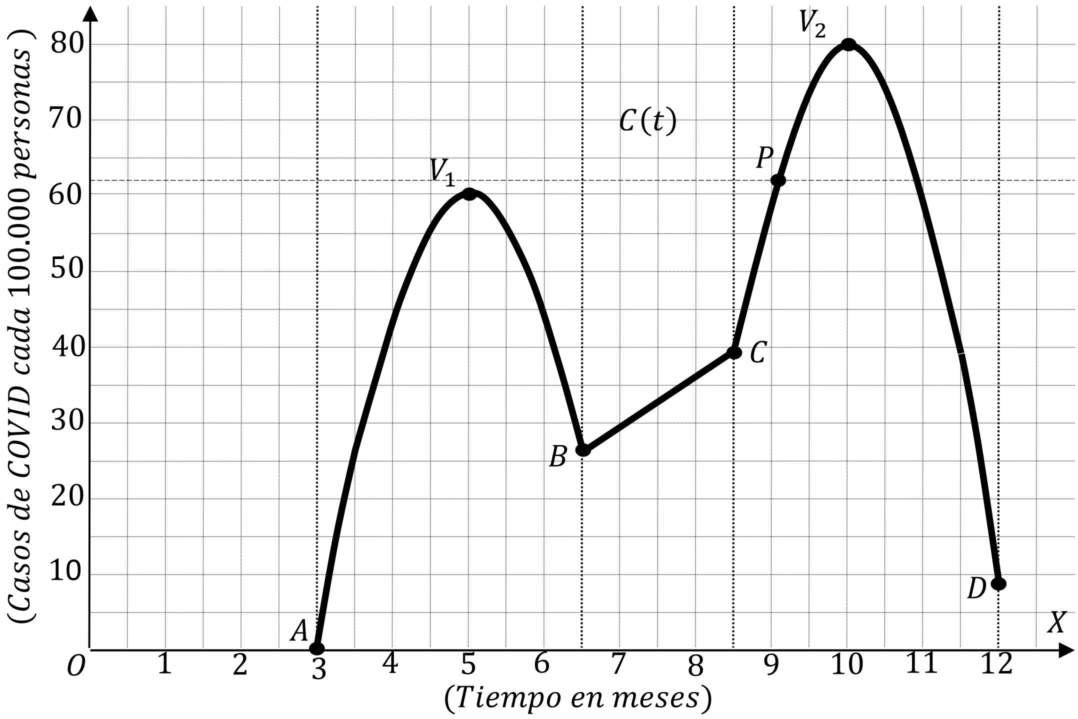
$$C(8{,}5)=-18\cdot 8{,}5^2+360\cdot 8{,}5-1.720=-1.300{,}5+3.060-1.720=$$

$= 3.060 - 3.020{,}5 = 39{,}5 \Rightarrow C(8{,}5; 39{,}5)$.

$C(12) = -18 \cdot 12^2 + 360 \cdot 12 - 1.720 = -2.592 + 4.320 - 1.720 =$

$= 4.320 - 4.312 = 8 \Rightarrow D(12, 8)$.

La representación gráfica de la función, de forma aproximada, se expresa en la figura adjunta.



Como puede observarse, la función es continua en su dominio.

$b)$ Teniendo en cuenta lo anterior y de la observación de la figura se deduce que la función es creciente en los intervalos $(3, 5) \cup (6{,}5; 10)$ y es decreciente en los intervalos $(5; 6{,}5) \cup (10, 12)$.

Los picos de máximos se producen para $t = 5 \Rightarrow 60$ casos y $t = 10 \Rightarrow 80$ casos, y los picos de mínimos para $t = 3 \Rightarrow 0$ casos, $t = 6{,}5 \Rightarrow 26$ casos y $t = 12 \Rightarrow 8$ casos.

$c)$ De la observación de la figura se deduce que los 62 casos se producen en el intervalo $(8{,}5; 12)$, donde la función es $C(t) = -18t^2 + 360t - 1.720$.

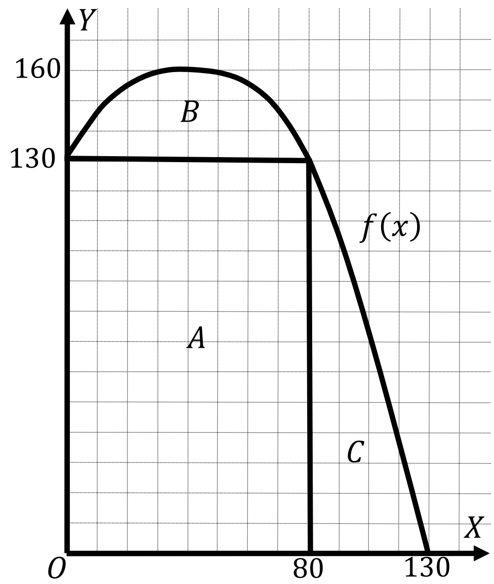
$C(t) = 62\text{:}\ -18t^2 + 360t - 1.720 = 62;\ \ 18t^2 - 360t + 1.782 = 0;$

$t^2 - 20t + 99 = 0;\ \ t = \frac{20 \pm \sqrt{400-296}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{20 \pm 2}{2} = 10 \pm 1 \Rightarrow t = 9.$

Se alcanzan por primera vez 62 casos a los 9 meses.

Problema B3:

B3) Un agricultor dispone de un terreno cuya forma coincide con el área limitada entre los ejes de coordenadas y la parábola $f(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}6x + 130$. El agricultor ha dividido el terreno en tres parcelas A, B y C tal como se muestra en la figura adjunta. Las líneas que dividen las parcelas corresponden, respectivamente, a las rectas $x = 80$ e $y = 130$ (las distancias se miden en metros).



a) Calcular la superficie de cada parcela.

b) El agricultor dedicará una de las parcelas a plantar trigo, otra a plantar millo y la tercera a plantar cebada. El coste total anual de producción de toda la finca (mano de obra, maquinaria, semillas, agua, transporte, etc.) asciende a 22.143 euros. Si el trigo le produce un ingreso anual de 4 euros/m^2, el millo 3,5 euros/m^2, y la cebada 2 euros/m^2. ¿Qué deberá plantar el agricultor en cada parcela si quiere maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio total anual?

Solución:

a) $A = 80 \cdot 130 = \underline{10.400\ m^2}.$

$$B = \int_0^{80} [f(x) - 130] \cdot dx = \int_0^{80} (-0{,}02x^2 + 1{,}6x + 130 - 130) \cdot dx =$$

$$= \int_0^{80} (-0{,}02x^2 + 1{,}6x) \cdot dx = \left[-0{,}02 \cdot \frac{x^3}{3} + 1{,}6 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^{80} = \left[-\frac{0{,}02x^3}{3} + 0{,}08x^2\right]_0^{80} =$$

$$= \left(-\frac{0{,}02 \cdot 80^3}{3} + 0{,}8 \cdot 80^2\right) - 0 = -3.413{,}33 + 5.120 \Rightarrow \underline{B = 1.706{,}67\ m^2}.$$

$$C = \int_{80}^{130} f(x) \cdot dx = \int_{80}^{130} (-0{,}02x^2 + 1{,}6x + 130) \cdot dx =$$

$$= \left[-0{,}02 \cdot \frac{x^3}{3} + 1{,}6 \cdot \frac{x^2}{2} + 130x\right]_{80}^{130} =$$

$$= \left(-\frac{0{,}02 \cdot 130^3}{3} + 0{,}8 \cdot 130^2 + 130 \cdot 130\right) - \left(-\frac{0{,}02 \cdot 80^3}{3} + 0{,}8 \cdot 80^2 + 130 \cdot 80\right) =$$

$$= -14.646{,}67 + 13.520 + 16.900 + 3.413{,}33 - 5.120 - 10.400 =$$

$$= 33.833{,}33 - 30.166{,}67 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{C = 3.666{,}67\ m^2}}.$$

b) $Gastos: G = 22.143\ euros.$

Para maximizar el beneficio, teniendo en cuenta que loa gastos son fijos, deberá plantar los cereales de mayor precio en las mayores superficies, por lo cual, deberá plantar:

$$\underline{\boldsymbol{En\ la\ parcela\ A, trigo; en\ la\ B, cebada\ y\ en\ la\ C, millo}}.$$

$Ingresos: I = 4 \cdot A + 2 \cdot B + 3{,}5 \cdot C =$
$= 4 \cdot 10.400 + 2 \cdot 1.706{,}67 + 3{,}5 \cdot 3.666{,}67 = 41.600 + 3.413{,}33 + 12.833{,}33 \Rightarrow$
$\Rightarrow I = 57.846{,}66\ euros.$

$Beneficio = Ingresos - Costes = 57.846{,}67 - 22.143 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{Beneficio = 35.703{,}67\ euros}}.$$

Problema A4:

A4) Por cierre de campaña, un vivero de frutales necesita vender 350 aguacateros y 400 mangos. Anuncia dos ofertas: la oferta A consiste en un lote con una planta de aguacate y dos de mango por 40 euros, la oferta B consiste en un lote con dos plantas de aguacate y una de mango por 45 euros. Es necesario vender al menos 80 lotes de la oferta A y al menos 90 de la oferta B.

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible.

c) Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se deben vender de cada tipo?

Solución:

a) Sean x e y el número de lotes de los tipos A y B que se venden en el vivero de frutales, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{x+2y\leq 350}\\ \boldsymbol{2x+y\leq 400}\\ \boldsymbol{x\geq 80;\ y\geq 90}\end{array}\right\}.$

b)

$① \Rightarrow x+2y\leq 350 \Rightarrow y\leq \frac{350-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	350
y	175	0

$② \Rightarrow 2x+y\leq 400 \Rightarrow y\leq 400-2x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	200	0
y	0	400

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x=80\\ y=90\end{array}\right\} \Rightarrow A(80,90).$

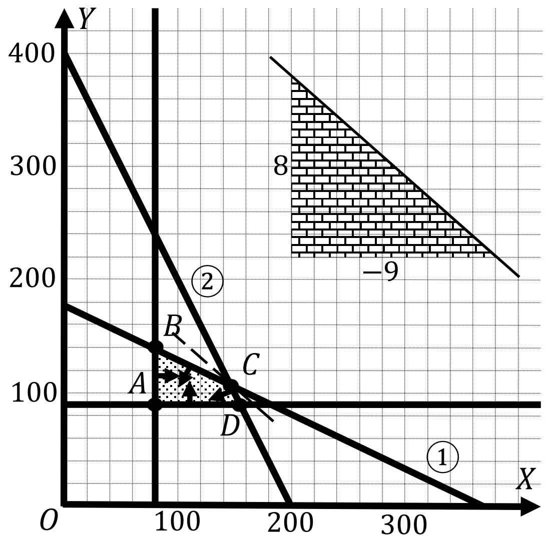
$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x=80\\ x+2y=350\end{array}\right\} \Rightarrow 2y=270;$

$y=135 \Rightarrow B(80,135).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r}2x+y=400\\ x+2y=350\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}4x+2y=800\\ -x-2y=-350\end{array}\right\};$

$\Rightarrow 3x=450;\ \ x=150;\ \ 150+2y=350;\ \ 2y=200;\ \ y=100 \Rightarrow C(150,100).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r}y=90\\ 2x+y=400\end{array}\right\} \Rightarrow 2x+90=270;\ \ 2x=180;\ \ x=90 \Rightarrow D(90,90).$



c) La función de objetivos es : $f(x,y)=40x+45y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(80,90)=40\cdot 800+45\cdot 90=3.200+4.050=7.250.$

$B \Rightarrow f(80, 135) = 40 \cdot 80 + 45 \cdot 135 = 3.200 + 6.075 = 9.275.$

$C \Rightarrow f(150, 100) = 40 \cdot 150 + 45 \cdot 100 = 6.000 + 4.500 = 10.500.$

$D \Rightarrow f(90, 90) = 40 \cdot 90 + 45 \cdot 90 = 3.600 + 4.050 = 7.650.$

El valor máximo se produce en el punto $C(150, 100)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 40x + 45y = 0 \Rightarrow y = -\frac{40}{45}x = -\frac{8}{9}x \Rightarrow m = -\frac{8}{9}.$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ es\ m\acute{a}ximo\ vendiendo\ 150\ lotes\ A\ y\ 100\ lotes\ B.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ m\acute{a}ximo\ es\ de\ 10.500\ euros.}}$

Problema B4:

B4) Un comercio ha vendido 600 ejemplares de tres ediciones de un libro por un total de 19.152 euros. Los ejemplares de la tercera edición se vendieron por 36 euros cada uno. Los ejemplares de las dos ediciones anteriores se vendieron con un descuento del 30 % los de la primera edición, y del 40 % los de la segunda (ambos respecto al precio de la tercera edición). Se sabe que el número total de ejemplares vendidos en las dos ediciones anteriores fue la mitad de los de la última edición. ¿Cuántos libros vendió de cada edición?

Solución:

Sean x, y, z el número de ejemplares que se venden de las ediciones primera, segunda y tercera, respectivamente.

Los ejemplares de la primera edición se vendieron al 70 % de 36 euros, cuyo precio es: $0{,}7 \cdot 36 = 25{,}2$ euros.

Los ejemplares de la segunda edición se vendieron al 60 % de 36 euros, cuyo precio es: $0{,}6 \cdot 36 = 21{,}6$ euros.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce de lo anterior y del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=600 \\ 25{,}2x+21{,}6y+36z=19.152 \\ x+y=\frac{z}{2} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y+z=600} \\ \boldsymbol{126x+108y+180z=95.760} \\ \boldsymbol{2x+2y-z=0} \end{array}\right\}.$$

Restando a la tercera ecuación el doble de la primera, resulta:

$-3z=-1.200;\;\; z=400.$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+400=600 \\ 126x+108y+180\cdot 400=95.760 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y=200 \\ 126x+108y=95.760-72.000 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=200 \\ 126x+108y=23.760 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y=200 \\ 63x+54y=11.880 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 63x+63y=12.600 \\ -63x-54y=-11.880 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9y=720;\;\; y=80;\;\; x+80=200;\;\; x=120.$

En la primera edición vendió 120 libros, en la 2ª, 80 y en la 3ª, 200.