Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

TIEMPO: 90 minutos.

Sección 1. Bloque 1

1º) Un fabricante comercializa 2 modelos de zapatillas para montaña, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 28 euros por par y otro para hombre con un beneficio por cada par de 30 euros. El próximo mes tiene que fabricar entre 100 y 600 pares de zapatillas de hombre y un mínimo de 400 pares de mujer. Además, solamente puede fabricar un máximo de 1.200 pares de zapatillas.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

b) Determina cuántos pares de zapatillas de cada modelo debe fabricar para que el beneficio sea máximo.

2º) La caja de bombones que compro cuesta 51 euros y contiene 12 bombones de chocolate negro, 6 de chocolate con leche y 6 de chocolate blanco. Cada bombón de chocolate negro cuesta un euro más que los de chocolate con leche y estos últimos cuestan 50 céntimos menos que los de chocolate blanco.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada tipo de bombón.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Bloque 2

1º) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 \;\; si \;\; x \le c \\ -(x-3)^2 + 2 \;\; si \; x > c \end{cases}$.

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$?

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 1$.

2º) La función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ tiene un mínimo en el punto $P(-1, 0)$ y corta al eje OY en el punto de ordenada $y = 1$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros $a, b \; y \; c$.

Sección 2. Bloque 1

3º) El 70 % de los turistas que visitan una determinada ciudad se alojan en el centro, y el resto lo hace en las afueras. El 60 % de los que se alojan en el centro y el 40 % de los que se alujan en las afueras lo hacen en hoteles de 3 o más estrellas, mientras que el resto lo hace en establecimientos de menor calidad.

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya alojado en un hotel de 3 o más estrellas?

b) Si se sabe que una persona se ha alojado en un establecimiento de menor calidad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona se haya alujado en el centro?

4º) El número de pacientes que se atienden en un centro de salud a la semana sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ pacientes. Se ha tomado una muestra aleatoria de 25 semanas y se ha registrado el número de pacientes atendidos, proporcionando una media de 322 pacientes.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de pacientes atendidos con un nivel de confianza del 95 %.

b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de la muestra.

$c)$ ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de pacientes atendidos a la semana es de 330 con un nivel de confianza del 99 %? Justificar la respuesta.

Bloque 2

3º) En un programa de televisión hay tres secciones: magia, humor y noticias. La sección de humor dura cinco minutos más que la de magia. El tiempo ocupado por la magia y el humor es en total la cuarta parte del dedicado a noticias y la duración total del programa es de 1 hora y 55 minutos.

$a)$ Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto tiempo se dedica a cada una de las tres secciones del programa.

$b)$ Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

4º) $a)$ Dadas dos matrices cuadradas A y B, razona si se obtendría el mismo resultado en la resolución de las ecuaciones $A \cdot X = B$ y $B = X \cdot A$. ¿De qué propiedad estamos hablando?

$b)$ Si la dimensión de la matriz M es $3 \times m$, la dimensión de la matriz N es 2×5 y P es una matriz cuadrada de orden p. ¿Qué valores han de tomar m y p para que se pueda realizar el producto $M \cdot N \cdot P$? ¿Qué dimensión tendría la matriz resultante?

$c)$ Para las matrices $C = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación $X \cdot C - D^2 = \frac{1}{3} \cdot E^t$.

Sección 3. Bloque 1

5º) El 40 % de las personas que acuden a una consulta médica lo hacen para diagnosticar una enfermedad, el 30 % para solicitar recetas y un 10 % para ambas cosas, diagnosticas enfermedad y solicitar recetas.

$a)$ Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acuda a solicitar recetas o a diagnosticar una enfermedad o ambas?

$b)$ Si se sabe que una persona ha acudido a diagnosticar una enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona también solicite recetas?

6º) El número de libros que lee un estudiante de Bachillerato al año sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 6$ libros. Se ha tomado una muestra de 10 estudiantes de Bachillerato y el número de libros que han leído ha sido el siguiente: $4,\ 8,\ 2,\ 9,\ 3,\ 7,\ 5,\ 6,\ 7\ y\ 4$ libros.

$a)$ Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de libros leídos con un nivel de confianza del 97 %.

$b)$ Explica razonadamente qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza.

$c)$ ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 64 estudiantes y un nivel de confianza del 95,96 %?

Bloque 2

5º) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+t+1)^2 & si\ x < -1 \\ 1 & si\ x = -1 \\ -x^2 + (t+2)x + 5 & si\ x > -1 \end{cases}$:

$a)$ ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua para $x = -1$? $b)$ Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, \infty)$. $c)$ Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, \infty)$.

6º) El número de socios de una protectora de animales durante los cinco primeros años de su existencia viene dado por la función $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, siendo x el número de años y $1 \leq x \leq 5$.

$a)$ ¿En qué intervalos aumenta el número de socios? ¿Y en cuáles disminuye? $b)$ ¿Cuándo hay mayor número de socios y cuántos son? $c)$ ¿En qué año son menos socios y cuántos hay?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Sección 1. Bloque 1

1º) Un fabricante comercializa 2 modelos de zapatillas para montaña, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 28 euros por par y otro para hombre con un beneficio por cada par de 30 euros. El próximo mes tiene que fabricar entre 100 y 600 pares de zapatillas de hombre y un mínimo de 400 pares de mujer. Además, solamente puede fabricar un máximo de 1.200 pares de zapatillas.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

b) Determina cuántos pares de zapatillas de cada modelo debe fabricar para que el beneficio sea máximo.

Solución:

a) Sean x e y el número de zapatillas de hombre y mujer que se fabrican mensualmente, respectivamente.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 28x + 30y$.

Las restricciones que se plantean en el ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} x + y \le 1.200 \\ 100 \le x \le 600 \\ y \ge 400 \end{array}\right\}$.

$① \Rightarrow x + y \le 1.200 \Rightarrow y \le 1.200 - x \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	1.200
y	1.200	0

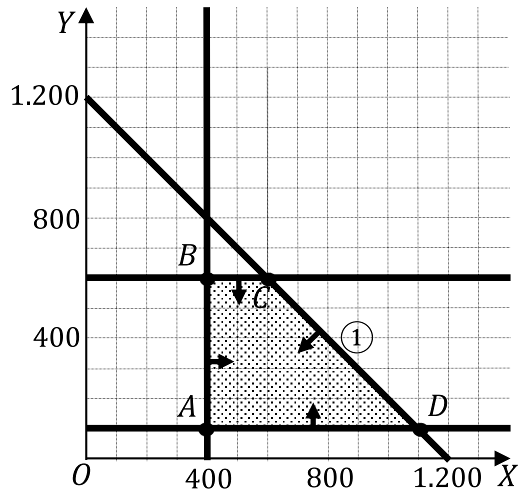
La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 400 \\ y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow A(400, 100).$ $B \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{r} x = 400 \\ y = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow B(400, 600).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 600 \\ x + y = 1.200 \end{array}\right\} \Rightarrow C(600, 600).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 100 \\ x + y = 1.200 \end{array}\right\} \Rightarrow D(1.100, 100).$



b) Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(400, 100) = 28 \cdot 400 + 30 \cdot 100 =$
$= 11.200 + 3.000 = 14.200.$

$B \Rightarrow f(400, 600) = 28 \cdot 400 + 30 \cdot 600 = 11.200 + 18.000 = 29.200.$

$C \Rightarrow f(600, 600) = 28 \cdot 600 + 30 \cdot 600 = 16.800 + 18.000 = 34.800.$

$D \Rightarrow f(1.100, 100) = 28 \cdot 1.100 + 30 \cdot 100 = 30.800 + 3.000 = 33.800.$

$\underline{\boldsymbol{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ fabricando\ 600\ zapatilla\ de\ cada\ clase.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 34.800\ euros.}}$

2º) La caja de bombones que compro cuesta 51 euros y contiene 12 bombones de chocolate negro, 6 de chocolate con leche y 6 de chocolate blanco. Cada bombón de chocolate negro cuesta un euro más que los de chocolate con leche y estos últimos cuestan 50 céntimos menos que los de chocolate blanco.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada tipo de bombón.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sean x, y, z el precio de los bombones de chocolate negro, con leche y blanco, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 12x+6y+6z=51 \\ x=y+1 \\ y=z-0{,}5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 12x+6y+6z=51 \\ x-y=1 \\ 2y=2z-1 \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{r} 12x+6y+6z=51 \\ x-y=1 \\ -2y+2z=1 \end{array}\right\}}.$$

Resolviendo por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} 12x+6y+6z=51 \\ x-y=1 \\ -2y+2z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y=x-1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 12x+6(x-1)+6z=51 \\ -2(x-1)+2z=1 \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} 12x+6x-6+6z=51 \\ -2x+2+2z=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 18x+6z=57 \\ -2x+2z=-1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 18x+6z=57 \\ -18x+18z=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow 24z=48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=2. \qquad -2x+4=-1;\ \ 2x=5;\ \ x=2{,}5. \qquad y=2{,}5-1 \Rightarrow y=1{,}5.$$

Los bombones valen lo siguiente:

$\underline{\boldsymbol{Chocolate\ negro\ 2,5\ euros;\ con\ leche\ 1,5\ euros\ y\ blanco\ 2\ euros.}}$

Bloque 2

1º) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 2x-4 \ \ si \ \ x\leq c \\ -(x-3)^2+2 \ \ si \ x>c \end{cases}$.

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x=c$?

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c=1$.

Solución:

a) La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=c$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de c para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para \ x=c \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c}(2x-4)=2c-4=f(c) \\ \lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\lim\limits_{x\to c}[-(x-3)^2+2]=-(c-3)^2+2 \end{cases} \Rightarrow$$

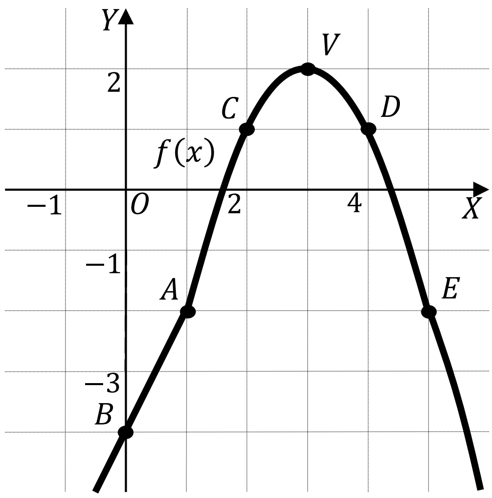
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=f(c)\Rightarrow 2c-4=-(c-3)^2+2;$

$2c-4=-(c^2-6c+9)+2; \ \ 2c-6=-c^2+6c-9; \ \ c^2-4c+3=0;$

$c=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=2\pm 1\Rightarrow c_1=1, c_2=3.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ continua\ en\ R\ para\ c=1\ y\ c=3.}}$$

b) Para $c=1$ la función resulta $f(x)=\begin{cases} 2x-4 \ \ si \ \ x\leq 1 \\ -(x-3)^2+2 \ \ si \ x>1 \end{cases}$ que, teniendo en cuenta que $-(x-3)^2+2=-x^2+6x-9+2=-x^2+6x-7$, puede expresarse de la forma: $f(x)=\begin{cases} 2x-4 \ \ si \ \ x\leq 1 \\ -x^2+6x-7 \ \ si \ x>1 \end{cases}$, cuya representación gráfica se hace a continuación.



En el intervalo $(-\infty,1]$ la función es la recta $f(x)=2x-4$, que contiene los puntos $A(1,-2)$ y $B(0,-4)$.

En el intervalo $(1,\infty)$ la función es la parábola $f(x)=-x^2+6x-7$, que es cóncava (∩), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice (máximo) es el punto siguiente:

$f'(x)=-2x+6=0; \ \ x-3=0\Rightarrow x=3.$

$f(3)=-3^2+6\cdot 3-7=-9+18-7=2\Rightarrow V(3,2).$

Otros puntos de la parábola son $A(1,-2)\ y\ E(5,-2); \ \ C(2,1)\ y\ D(4,1).$

De todo lo anterior se deduce la representación gráfica, aproximada, de la figura, que es la que aparece en la gráfica adjunta.

2º) La función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ tiene un mínimo en el punto $P(-1, 0)$ y corta al eje OY en el punto de ordenada $y = 1$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

Solución:

Por cortar al eje OY en el punto de ordenada $y = 1 \Rightarrow f(0) = 1$:

$f(0) = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^2 + c = 1 \Rightarrow \underline{c = 1}$.

Por contener al punto $P(-1, 0) \Rightarrow f(-1) = 0$:

$f(-1) = a \cdot (-1)^4 + b \cdot (-1)^2 + 1 = a + b = -1$. (1)

Por tener un mínimo en $P(-1, 0) \Rightarrow f'(-1) = 0$:

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$.

$f'(-1) = 4a \cdot (-1)^3 + 2b \cdot (-1) = 0;\ -4a - 2b = 0;\ \ 2a + b = 0$. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + b = -1 \\ 2a + b = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -a - b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

$1 + b = -1 \Rightarrow \underline{b = -2}$.

Sección 2. Bloque 1

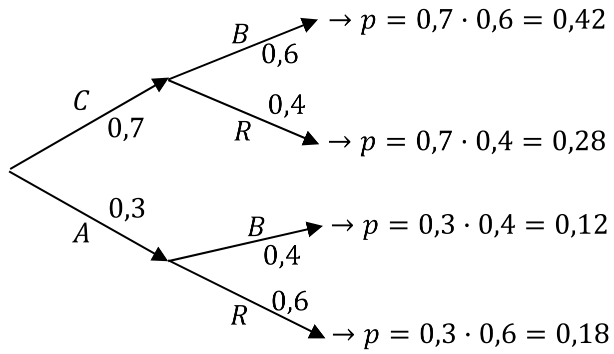
3º) El 70 % de los turistas que visitan una determinada ciudad se alojan en el centro, y el resto lo hace en las afueras. El 60 % de los que se alojan en el centro y el 40 % de los que se alujan en las afueras lo hacen en hoteles de 3 o más estrellas, mientras que el resto lo hace en establecimientos de menor calidad.

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya alojado en un hotel de 3 o más estrellas?

b) Si se sabe que una persona se ha alojado en un establecimiento de menor calidad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona se haya alujado en el centro?

Solución:

Llamemos buenos (B) a los hoteles de 3 o más estrellas y regulares (R) a los establecimientos de menor calidad.



a) $P = P(B) = P(C \cap B) + P(A \cap B) = P(C) \cdot P(B/C) + P(A) \cdot P(B/A) =$

$= 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}42 + 0{,}12 = \underline{0{,}54}.$

b) $P = P(C/R) = \frac{P(C\cap R)}{P(R)} = \frac{P(C)\cdot P(R/C)}{1-P(B)} = \frac{0{,}7\cdot 0{,}4}{1-0{,}54} = \frac{0{,}28}{0{,}46} = \underline{0{,}6087}.$

4º) El número de pacientes que se atienden en un centro de salud a la semana sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ pacientes. Se ha tomado una muestra aleatoria de 25 semanas y se ha registrado el número de pacientes atendidos, proporcionando una media de 322 pacientes.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de pacientes atendidos con un nivel de confianza del 95 %.

b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de la muestra.

c) ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de pacientes atendidos a la semana es de 330 con un nivel de confianza del 99 %? Justificar la respuesta.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1{,}96.$$

$$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \;\rightarrow z = 1{,}96).$$

Datos: $n = 25;\;\; \overline{x} = 322;\;\; \sigma = 50;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\; \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(322 - 1{,}96 \cdot \frac{50}{\sqrt{25}};\; 322 + 1{,}96 \cdot \frac{80}{\sqrt{25}}\right);\;\; (322 - 1{,}96 \cdot 10;\; 322 + 1{,}96 \cdot 10);$$

$(322 - 19{,}6;\; 322 + 19{,}6)$.

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{95\,\%} = (302,4;\; 341,6).}}$$

b) $\underline{\textit{Si aumenta el número de la muestra disminuye el intervalo de confianza}}$.

c) Antes de hacer el estudio ya se puede afirmar que la respuesta es afirmativa.

Si con un nivel de confianza del 95 % se incluye el valor 330, también estará contenido este valor cuando aumente el nivel de confianza, puesto que al aumentar el nivel de confianza aumenta el valor del intervalo.

No obstante lo anterior, se hace el estudio para confirmarlo.

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}99 \;\rightarrow\; \alpha = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2{,}575.$$

$$(1 - 0{,}005 = 0{,}9950 \;\rightarrow z = 2{,}575).$$

$$(322 - 2{,}575 \cdot 10;\; 322 + 2{,}575 \cdot 10);\;\; (322 - 2{,}575 \cdot 10;\; 322 + 2{,}575 \cdot 10);$$

$(322 - 25{,}75;\; 322 + 25{,}75) \Rightarrow I.C._{99\,\%} = (296{,}25;\; 347{,}75)$.

Al estar contenido el número de 330 pacientes en el intervalo de confianza:

$$\underline{\boldsymbol{Se\ puede\ aceptar\ la\ afirmación.}}$$

Bloque 2

3º) En un programa de televisión hay tres secciones: magia, humor y noticias. La sección de humor dura cinco minutos más que la de magia. El tiempo ocupado por la magia y el humor es en total la cuarta parte del dedicado a noticias y la duración total del programa es de 1 hora y 55 minutos.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto tiempo se dedica a cada una de las tres secciones del programa.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sean x, y, z la duración en minutos de las secciones de magia, humor y noticias del programa de televisión, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} y = x + 5 \\ x + y = \frac{1}{4}z \\ x + y + z = 115 \end{array}\right\}$$

$$\underline{\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x - y = -5} \\ \boldsymbol{4x + 4y - z = 0} \\ \boldsymbol{x + y + z = 115} \end{array}\right\}}.$$

b) Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 115 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-20+115-5}{4+1+1+4} = \frac{115-25}{10} = \frac{90}{10} = 9.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & 115 & 1 \end{vmatrix}}{10} = \frac{5+115+20}{10} = \frac{140}{10} = 14.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 115 \end{vmatrix}}{10} = \frac{460-20+20+460}{10} = \frac{920}{10} = 92.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ magia\ dura\ 9\ minutos, el\ humor\ 14\ minutos\ y\ las\ noticias, 92\ minutos.}}$$

4º) a) Dadas dos matrices cuadradas A y B, razona si se obtendría el mismo resultado en la resolución de las ecuaciones $A \cdot X = B$ y $B = X \cdot A$. ¿De qué propiedad estamos hablando?

b) Si la dimensión de la matriz M es $3 \times m$, la dimensión de la matriz N es 2×5 y P es una matriz cuadrada de orden p. ¿Qué valores han de tomar m y p para que se pueda realizar el producto $M \cdot N \cdot P$? ¿Qué dimensión tendría la matriz resultante?

c) Para las matrices $C = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $y\ E = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación $X \cdot C - D^2 = \frac{1}{3} \cdot E^t$.

Solución

a) Lo normal es que no se obtenga la misma solución debido a que, en general:

El producto de matrices no tiene la propiedad conmutativa.

b) Para que pueda efectuarse el producto de dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual que el número de filas de la segunda matriz y, la matriz producto, tiene las mismas filas de la primera y las mismas columnas de la segunda: $M_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}$.

Teniendo en cuenta la propiedad asociativa del producto de matrices:

$M_{(3,m)} \cdot N_{(2,5)} = X_{(3,5)} \ \Rightarrow \ \underline{m = 2}$.

$M_{(3,m)} \cdot N_{(2,5)} \cdot P_{(p,p)} = X_{(3,5)} \cdot P_{(p,p)} = Y_{(3,p)} \ \Rightarrow \ \underline{p = 5}$.

La matriz resultante tiene por dimensión 3×5.

c) $X \cdot C - D^2 = \frac{1}{3} \cdot E^t;\ \ X \cdot C = \frac{1}{3} \cdot E^t + D^2;\ \ X \cdot C \cdot C^{-1} = \left(\frac{1}{3}E^t + D^2\right) \cdot C^{-1};$

$X \cdot I = \left(\frac{1}{3}E^t + D^2\right) \cdot C^{-1} \Rightarrow \underline{X = \left(\frac{1}{3}E^t + D^2\right) \cdot C^{-1}}$. (*)

$$\frac{1}{3}E^t + D^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}E^t + D^2 = \begin{pmatrix} 28 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$|C| = \begin{vmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1;\ \ C^t = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 11 & -3 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ C^t = \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} = \frac{Adj.de\ C^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión (*):

$$X = \left(\frac{1}{3}E^t + D^2\right) \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 28 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\underline{X = \begin{pmatrix} -81 & -296 \\ 19 & 68 \end{pmatrix}}}.$$

Sección 3. Bloque 1

5º) El 40 % de las personas que acuden a una consulta médica lo hacen para diagnosticar una enfermedad, el 30 % para solicitar recetas y un 10 % para ambas cosas, diagnosticas enfermedad y solicitar recetas.

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acuda a solicitar recetas o a diagnosticar una enfermedad o ambas?

b) Si se sabe que una persona ha acudido a diagnosticar una enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona también solicite recetas?

Solución:

$$Datos:\ P(D)=0{,}4;\ \ P(R)=0{,}3;\ \ P(D\cap R)=0{,}1.$$

a) $$P=P(D\cup R)=P(D)+P(R)-P(D\cap R)=0{,}4+0{,}3-0{,}1=\underline{0{,}6}.$$

b) $$P=P(R/D)=\frac{P(D\cap R)}{P(D)}=\frac{0{,}1}{0{,}4}=\underline{0{,}25}.$$

6º) El número de libros que lee un estudiante de Bachillerato al año sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 6$ libros. Se ha tomado una muestra de 10 estudiantes de Bachillerato y el número de libros que han leído ha sido el siguiente: $4,\ 8,\ 2,\ 9,\ 3,\ 7,\ 5,\ 6,\ 7\ y\ 4$ libros.

$a)$ Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de libros leídos con un nivel de confianza del 97 %.

$b)$ Explica razonadamente qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza.

$c)$ ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 64 estudiantes y un nivel de confianza del 95,96 %?

Solución:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{2+3+2\cdot4+5+6+2\cdot7+8+9}{10} = \frac{55}{10} = 5{,}5.$$

$a)$ Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1-\alpha = 0{,}97 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}97 = 0{,}03 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}015} = 2{,}17.$$

$$(1-0{,}015 = 0{,}9850 \ \rightarrow z = 2{,}17).$$

Datos: $n = 10;\ \ \overline{x} = 5{,}5;\ \ \sigma = \sqrt{6};\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$$\left(5{,}5 - 2{,}17 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}};\ 5{,}5 + 2{,}17 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\right);$$

$$(5{,}5 - 2{,}17 \cdot 0{,}7746;\ 5{,}5 + 2{,}17 \cdot 0{,}7746);\ \ (5{,}5 - 1{,}6809;\ 5{,}5 + 1{,}6809).$$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{97\,\%} = (3{,}8191;\ 7{,}1809).}}$$

$b)$ Para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza es necesario aumentar la expresión $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y, teniendo en cuenta que la desviación típica es impuesta:

$$\underline{\boldsymbol{Se\ tiene\ que\ aumentar\ el\ número\ de\ elementos\ de\ la\ muestra.}}$$

$c)$ Para un nivel de confianza del 95,96 % es:

$$1-\alpha = 0{,}9596 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}9596 = 0{,}0404 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}0202} = 2{,}05.$$

$$(1-0{,}0202 = 0{,}9798 \ \rightarrow z = 2{,}05).$$

$Datos:\ \sigma = \sqrt{6};\ n = 64;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}05.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}05 \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{64}} = 2{,}05 \cdot 0{,}3062 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{E = 0{,}6277.}}$$

Bloque 2

5º) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+t+1)^2 & si\ \ x < -1 \\ 1 & si\ \ x = -1 \\ -x^2 + (t+2)x + 5 & si\ \ x > -1 \end{cases}$:

$a)$ ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua para $x = -1$?

$b)$ Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, \infty)$.

$c)$ Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, \infty)$.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = -1$, independientemente del valor real de t, excepto para $x = -1$, para lo cual se va a determinar el valor real de t para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = -1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} (x+t+1)^2 = t^2 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} [-x^2 + (t+2)x + 5] = 2 - t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow \begin{Bmatrix} t^2 = 1 \\ 2 - t = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow t = 1.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = -1\ para\ t = 1.}}$$

$b)$ Para $t = 0$ la función es $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & si\ \ x < -1 \\ 1 & si\ \ x = -1 \\ -x^2 + 2x + 5 & si\ \ x > -1 \end{cases}$.

En el intervalo $(-1, \infty)$ la función es $f(x) = -x^2 + 2x + 5$, que es una parábola cóncava $(\cap)$ por ser negativo el coeficiente de x^2, y cuyo extremo relativo (máximo) es el siguiente:

$f'(x) = -2x + 2 = 0;\ -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$

$f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 5 = -1 + 2 + 5 = 6 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{M\acute{a}ximo: V(1, 6).}}$$

$c)$ Teniendo en cuenta el apartado anterior, se trata de determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 5$, que sabemos que tiene su máximo en el punto $V(1, 6)$, por lo que, considerando el intervalo $(-1, \infty)$:

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento: (-1, 1).}} \qquad \underline{\boldsymbol{Decrecimiento: (1, +\infty).}}$$

6º) El número de socios de una protectora de animales durante los cinco primeros años de su existencia viene dado por la función $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, siendo x el número de años y $1 \leq x \leq 5$.

$a)$ ¿En qué intervalos aumenta el número de socios? ¿Y en cuáles disminuye?

$b)$ ¿Cuándo hay mayor número de socios y cuántos son?

$c)$ ¿En qué año son menos socios y cuántos hay?

Solución:

$a)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$P'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$

$P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0;\ \ x^2 - 4x + 3 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$

$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$

Por ser $P(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función en los intervalos $(1, 3)\ y\ (3, 5)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 2 \in (1, 3)$ es:

$P'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = 12 - 24 + 9 = -3 < 0 \Rightarrow Decreciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{P'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (1, 3)}.}$$

$$\boldsymbol{P'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (3, 5)}.}$$

$b)$ Los valores de la función en sus extremos son los siguientes:

$P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 4 = 1 - 6 + 9 + 4 = 8.$

$P(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 9 \cdot 5 + 4 = 125 - 150 + 45 + 4 = 24.$

Teniendo en cuenta que la función, por ser polinómica, es continua en su dominio, del apartado anterior se deduce que la función tiene un máximo relativo para el valor $x = 3$:

$P(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 4 = 27 - 54 + 27 + 4 = 4.$

$$\boldsymbol{\underline{El\ mayor\ número\ de\ socios\ se\ produce\ para\ x = 5\ y\ son\ 24}.}$$

$c)$

$$\boldsymbol{\underline{El\ menor\ número\ de\ socios\ se\ produce\ para\ x = 3\ y\ son\ 4}.}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Sección 1. Bloque 1

1º) El siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 8x + 3y$, sujeta a las siguientes restricciones: $\begin{cases} -2x + 4 \geq y \\ x + 2y \geq 2 \\ x \geq 0; \quad y \leq 3 \end{cases}$.

$a)$ Dibuja la región factible y determina sus vértices.

$b)$ Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores.

2º) El número total de premios Goya recibidos a lo largo de su carrera por tres mujeres (Isabel, Carmen y Enma) es de 15. Si aumentamos en un premio la cantidad que ha recibido Isabel obtenemos el triple de los precios ganados por Enma y los que recibe Enma equivalen a las tres cuartas partes de los que recibe Carmen.

$a)$ Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos premios Goya han recibido cada una.

$b)$ Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Bloque 2

1º) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 2t \;\; si \;\; x \leq -1 \\ t + 1 \;\; si \;\; -1 \leq x \leq 1 \\ -x^3 + 4x^2 + 3x - 1 \;\; si \; x > 1 \end{cases}$.

$a)$ ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = -1$?

$b)$ Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, \infty)$.

$c)$ Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, \infty)$.

2º) La función $f(x) = ax^3 + bx + c$ presenta un mínimo en el punto $P(2, 1)$ y la pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es -12. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros $a, b \; y \; c$.

Sección 2. Bloque 1

3º) En un concurso se les proponen a los participantes tres pruebas (A, B y C) de las que han de elegir una. El 40 % de los participantes eligen la prueba A, superándola el 50 % de estos. El 25 % eligen la prueba B y en este caso la prueba no es superada por el 45 % de los participantes. La prueba C la superan el 60 % de los participantes que la eligen.

$a)$ Elegido un participante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya superado la prueba?

$b)$ Si se sabe que el participante no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la prueba A?

4º) El tiempo empleado para resolver un problema de Estadística sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 6{,}4$ minutos. Se ha tomado una muestra a 9 personas y los tiempos empleados en resolver el problema han sido los siguientes: $12, \; 11, \; 10, \; 9, \; 8, \; 12, \; 11, \; 7 \; y \; 10$ minutos.

$a)$ Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo empleado en resolver el problema con un nivel de confianza del 97 %.

$b)$ Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 3 minutos.

Bloque 2

3º) Un concesionario de automóviles tiene en oferta tres modelos de coche: uno deportivo, otro familiar y el tercero es un monovolumen. El mes pasado se vendieron 10 deportivos, 6 familiares y 3 monovolúmenes y se obtuvieron 851.000 euros. El coche deportivo vale 2.000 euros más que el familiar. Por 5 deportivos vendidos se obtienen 13.000 euros más que si se venden 6 monovolúmenes.

$a)$ Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio de cada uno de los tres modelos.

$b)$ Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

4º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

$a)$ Resuelve la ecuación matricial $X + X \cdot \frac{1}{2}A = A \cdot B$.

$b)$ Calcula $-\frac{1}{2}A - 2 \cdot B^t + C$.

Sección 3. ***Bloque 1***

5º) En un ejercicio de oposición, el opositor ha de presentar un tema de los cuatro que se seleccionan al azar de un programa de 40 temas. Si los cuatro temas seleccionados han de ser distintos y el opositor tiene bien preparados 22 temas:

$a)$ ¿Qué probabilidad tiene el opositor de aprobar el examen?

$b)$ ¿Qué probabilidad tiene el opositor de saberse exactamente uno de los cuatro temas?

6º) Una marca de neumáticos ha tomado una muestra aleatoria de 100 ruedas y ha medido la presión de inflado, proporcionando una media de 2,3 bares. Si se sabe que la presión de inflado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 0{,}81$ bares^2.

$a)$ Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la presión de inflado con un nivel de confianza del 95 %.

$b)$ Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza disminuimos el tamaño de la muestra.

$c)$ La marca de neumáticos afirma que la media de presión de inflado es de 2 bares. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 90 %? Justificar la respuesta.

Bloque 2

5º) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 + t & si \;\; x < -1 \\ 3 & si \;\; -1 \le x \le 2 \\ x^2 - 6x + 9 + t & si \;\; x > 2 \end{cases}$:

$a)$ ¿Existe un valor de t para que la función $f(x)$ es continua para $x = -1$ y $x = 2$?

$b)$ Representa la función $f(x)$ para $t = 0$.

6º) El tiempo de publicidad (en minutos) en una emisión de radio a lo largo de la semana viene dado por la función $S(x) = x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + 36$, con x expresado en días y $1 \le x \le 7$.

$a)$ ¿Cuántos minutos de publicidad emite el tercer día?

$b)$ ¿Durante qué día se emite más publicidad y cuánto tiempo?

$c)$ ¿Qué día emitieron menos publicidad? ¿Cuántos minutos?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Sección 1. Bloque 1

1º) El siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = 8x + 3y$, sujeta a las siguientes restricciones: $\begin{cases} -2x + 4 \geq y \\ x + 2y \geq 2 \\ x \geq 0;\ \ y \leq 3 \end{cases}$.

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices.

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores.

Solución:

a)

① $\Rightarrow -2x + 4 \geq y \Rightarrow y \leq -2x + 4 \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	2
y	4	0

② $\Rightarrow x + 2y \geq 2 \Rightarrow y \geq \frac{2-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	2	10
y	0	1

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

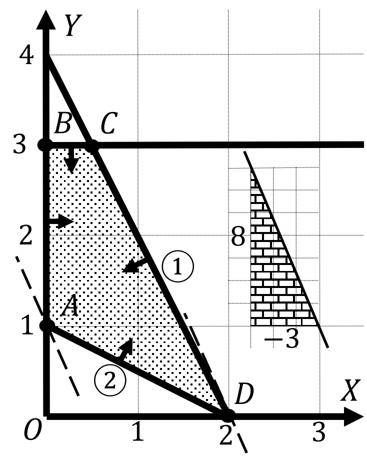
Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + 2y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \underline{A(0,1)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B(0,3)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 1;\ \ x = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{C\left(\frac{1}{2}, 3\right)}.$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x + y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{D(2,0)}.$



b) La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 8x + 3y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,1) = 8 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 0 + 3 = 3.$
$B \Rightarrow f(0,3) = 8 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 0 + 9 = 9.$
$C \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}, 3\right) = 8 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 3 = 4 + 9 = 13.$
$D \Rightarrow f(2,0) = 8 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 16 + 0 = 16.$

$\underline{\boldsymbol{El\ máximo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ D(2,0)\ y\ su\ valor\ es\ 16.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ mínimo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ A(0,1)\ y\ su\ valor\ es\ 3.}}$

También se hubieran obtenido los puntos $D(2,0)\ y\ A(0,1)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 8x + 3y = 0 \Rightarrow y = -\frac{8}{3}x \Rightarrow m = -\frac{8}{3}.$

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

2º) El número total de premios Goya recibidos a lo largo de su carrera por tres mujeres (Isabel, Carmen y Enma) es de 15. Si aumentamos en un premio la cantidad que ha recibido Isabel obtenemos el triple de los precios ganados por Enma y los que recibe Enma equivalen a las tres cuartas partes de los que recibe Carmen.

$a)$ Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos premios Goya han recibido cada una.

$b)$ Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

$a)$ Sean x, y, z el número de premios Oscar que han recibido a lo largo de su carrera Isabel, Carmen y Enma, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=15 \\ x+1=3z \\ z=\frac{3}{4}y \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y+z=15} \\ \boldsymbol{x-3z=-1} \\ \boldsymbol{3y-4z=0} \end{array}\right\}.$$

$b)$ Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 15 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{-3+135-4}{3+9+4}=\frac{135-7}{16}=\frac{128}{16}=8.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 15 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{16}=\frac{4+60}{16}=\frac{64}{16}=4.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{16}=\frac{45+3}{16}=\frac{48}{16}=3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Isabel\ tiene\ 8\ Goyas, Carmen\ tiene\ 4\ y\ Enma, 3.}}$$

Bloque 2

1º) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 2t \;\; si \;\; x \leq -1 \\ t + 1 \;\; si \; -1 \leq x \leq 1 \\ -x^3 + 4x^2 + 3x - 1 \;\; si \; x > 1 \end{cases}$.

$a)$ ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = -1$?

$b)$ Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(1, \infty)$.

$c)$ Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(1, \infty)$.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = -1$ y para $x = 1$ cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación únicamente, como se pide, la continuidad para $x = -1$, para lo cual, se va a determinar el valor real de t para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = -1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} (2x + 2t) = 2t - 2 = f(-1) \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} (t + 1) = t + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow 2t - 2 = t + 1 \Rightarrow t = 3.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ es\ continua\ en\ x = -1\ para\ t = 3.}}$$

$c)$ En el intervalo $(1, \infty)$ la función es $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 3x - 1$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = -3x^2 + 8x + 3.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x - 3 = 0; \;\; x = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6} = \frac{4 \pm 5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3} \notin (1, \infty), x_2 = 3.$$

Por ser $P(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función, que es $D(f) \Rightarrow (1, \infty)$, en los intervalos $(1, 3)\ y\ (3, \infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 2 \in (1, 3)$ es:

$$f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 3 = -12 + 16 + 3 = 7 > 0 \Rightarrow Creciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (3, \infty)}.$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (1, 3)}.$$

$b)$ Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = -6x + 8.$

$f''(3) = -6 \cdot 3 + 8 = -10 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 3.$

$f(3) = -3^3 + 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 1 = -27 + 36 + 9 - 1 = 17.$

$\underline{\boldsymbol{Máximo\ relativo: P(3, 17).}}$

2º) La función $f(x) = ax^3 + bx + c$ presenta un mínimo en el punto $P(2, 1)$ y la pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es -12. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

Solución:

Por contener al punto $P(2, 1) \Rightarrow f(2) = 1$.

$f(2) = 1 \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + c = 1;\ \ 8a + 2b + c = 1.$ (1)

$f'(x) = 3ax^2 + b.$

Por presentar un mínimo en el punto $P(2, 1) \Rightarrow f'(2) = 0.$

$f'(2) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + b = 0;\ \ 12a + b = 0.$ (2)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

Por tener la función la recta tangente en $x = 0$ con una pendiente $m = -12$ se cumple que $f'(0) = -12$.

$f'(0) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 0 + b = -12 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{b = -12}}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de b:

$12a + b = 0 \Rightarrow 12a - 12 = 0;\ \ a - 1 = 0 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{a = 1}}.$$

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos de a y b:

$8a + 2b + c = 1 \Rightarrow 8 + 2 \cdot (-12) + c = 1;\ \ -24 + c = -7 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{c = 17}}.$$

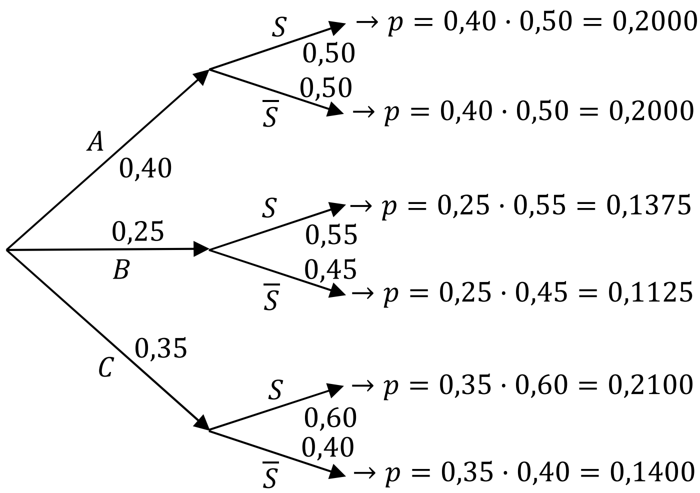
Sección 2. Bloque 1

3º) En un concurso se les proponen a los participantes tres pruebas (A, B y C) de las que han de elegir una. El 40 % de los participantes eligen la prueba A, superándola el 50 % de estos. El 25 % eligen la prueba B y en este caso la prueba no es superada por el 45 % de los participantes. La prueba C la superan el 60 % de los participantes que la eligen.

a) Elegido un participante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya superado la prueba?

b) Si se sabe que el participante no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la prueba A?

Solución



a) $P = P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) =$

$= P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B) + P(C) \cdot P(S/C) =$

$= 0{,}40 \cdot 0{,}50 + 0{,}25 \cdot 0{,}55 + 0{,}35 \cdot 0{,}60 = 0{,}2000 + 0{,}1375 + 0{,}2100 = \underline{0{,}5475}.$

b) $P = P\left(A/\overline{S}\right) = \frac{P(A \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{S}/A)}{1 - P(S)} = \frac{0{,}40 \cdot 0.50}{1 - 0{,}5475} = \frac{0{,}2000}{0{,}4525} = \underline{0{,}4420}.$

4º) El tiempo empleado para resolver un problema de Estadística sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 6{,}4$ minutos. Se ha tomado una muestra a 9 personas y los tiempos empleados en resolver el problema han sido los siguientes: $12,\ 11,\ 10,\ 9,\ 7,\ 12,\ 11,\ 8\ y\ 10$ minutos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo empleado en resolver el problema con un nivel de confianza del 97 %.

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 3 minutos.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1-\alpha = 0{,}97 \ \rightarrow\ \alpha = 1-0{,}97 = 0{,}03 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}015} = 2{,}17.$$

$$(1-0{,}015 = 0{,}9850 \ \rightarrow z = 2{,}17).$$

$$\overline{x} = \frac{2\cdot 12+2\cdot 11+2\cdot 10+9+7+8}{9} = \frac{24+22+20+24}{9} = \frac{90}{9} = 10.$$

Datos: $n = 9;\ \ \overline{x} = 10;\ \ \sigma = 6{,}4;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(10 - 2{,}17 \cdot \frac{6{,}4}{\sqrt{9}};\ 10 + 2{,}17 \cdot \frac{6{,}4}{\sqrt{9}}\right);\quad (10 - 2{,}17 \cdot 2{,}1333;\ 10 + 2{,}17 \cdot 2{,}1333);$$

$(10 - 4{,}6293;\ 10 + 4{,}6293).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{97\,\%} = (5{,}3707;\ 14{,}6293).}}$$

b) Datos: $\sigma = 6{,}4;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17;\ \ E = 3.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow\ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2{,}17 \cdot \frac{6{,}4}{3}\right)^2 =$

$= (2{,}17 \cdot 2{,}1333)^2 = 4{,}6293^2 = 21{,}43.$

<u>El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 22 personas</u>

Bloque 2

3º) Un concesionario de automóviles tiene en oferta tres modelos de coche: uno deportivo, otro familiar y el tercero es un monovolumen. El mes pasado se vendieron 10 deportivos, 6 familiares y 3 monovolúmenes y se obtuvieron 851.000 euros. El coche deportivo vale 2.000 euros más que el familiar. Por 5 deportivos vendidos se obtienen 13.000 euros más que si se venden 6 monovolúmenes.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el precio de cada uno de los tres modelos.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sean x, y, z el número de coches de los modelos deportivo, familiar y monovolumen que el concesionario tiene en oferta, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado, expresado en miles de euros, es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 10x+6y+3z=851 \\ x-2=y \\ 5x-13=6z \end{array}\right\}$$

$$\boldsymbol{\left.\begin{array}{r} 10x+6y+3z=851 \\ x-y=2 \\ 5x-6z=13 \end{array}\right\}.}$$

b) Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 851 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 13 & 0 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -6 \end{vmatrix}}=\frac{5.106+39+72}{60+15+36}=\frac{5.217}{111}=47.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 10 & 851 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 13 & -6 \end{vmatrix}}{111}=\frac{-120+39-30+5.106}{111}=\frac{5.145-150}{111}=\frac{4.995}{111}=45.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 10 & 6 & 851 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 13 \end{vmatrix}}{111}=\frac{-130+60+4.255-78}{111}=\frac{4.315-208}{111}=\frac{4.107}{111}=37.$$

Los precios de los tres modelos de coches son los siguientes:

$\underline{\boldsymbol{Deportivo: 47.000\ euros, familiar: 45.000\ euros; monovolumen: 37.000\ euros}}$

4º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & -6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}0 & 9\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

$a)$ Resuelve la ecuación matricial $X+X\cdot\frac{1}{2}A=A\cdot B$.

$b)$ Calcula $-\frac{1}{2}A-2\cdot B^t+C$.

Solución:

$a)\ X+X\cdot\frac{1}{2}A=A\cdot B;\ \ X\cdot I+X\cdot\frac{1}{2}A=A\cdot B;\ \ X\cdot\left(I+\frac{1}{2}A\right)=A\cdot B;$

$X\cdot\left(I+\frac{1}{2}A\right)\cdot\left(I+\frac{1}{2}A\right)^{-1}=A\cdot B\cdot\left(I+\frac{1}{2}A\right)^{-1};\ \ X\cdot I=A\cdot B\cdot\left(I+\frac{1}{2}A\right)^{-1}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{X=A\cdot B\cdot\left(I+\frac{1}{2}A\right)^{-1}}.}$$

$I+\frac{1}{2}A=I+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$

$\left|I+\frac{1}{2}A\right|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-2+1=-1.\qquad \left(I+\frac{1}{2}A\right)^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}.$

$Adj.de\left(I+\frac{1}{2}A\right)^t=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$

$\left(I+\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\frac{Adj.de\left(I+\frac{1}{2}A\right)^t}{\left|I+\frac{1}{2}A\right|}=\frac{\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}}{-1}\Rightarrow\left(I+\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$

$X=A\cdot B\cdot\left(I+\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}-10 & -8\\ -30 & -26\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-28 & 18\\ -86 & 56\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{X=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-14 & 9\\ -43 & 28\end{pmatrix}}.}$$

$b)\ -\frac{1}{2}A-2\cdot B^t+C=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & -6\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}0 & 5\\ -1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 9\\ 3 & 5\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -10\\ 2 & -8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 9\\ 3 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{-\frac{1}{2}A-2\cdot B^t+C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}}.}$$

Sección 3. Bloque 1

5º) En un ejercicio de oposición, el opositor ha de presentar un tema de los cuatro que se seleccionan al azar de un programa de 40 temas. Si los cuatro temas seleccionados han de ser distintos y el opositor tiene bien preparados 22 temas:

a) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de aprobar el examen?

b) ¿Qué probabilidad tiene el opositor de saberse exactamente uno de los cuatro temas?

Solución:

a) Si tiene preparados 22 de los 40 temas tiene sin preparar 18 de los temas.

La probabilidad de aprobar es que le salga la menos un tema que tenga preparado, que es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no sepa ninguno de los temas:

$$P = 1 - \frac{18}{40} \cdot \frac{17}{39} \cdot \frac{16}{38} \cdot \frac{15}{37} = 1 - \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 37} = 1 - \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 17}{13 \cdot 19 \cdot 37} = 1 - \frac{306}{9.139} =$$

$$= \frac{9.139 - 306}{9.139} = \frac{8.833}{9.139} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P = 0,9665.}}$$

b) La probabilidad pedida es equivalente a saber el primer tema y no saber los demás; saber el segundo tema y no saber los demás; saber el tercer tema y no saber los demás y saber el cuarto tema y no saber los demás. Estos sucesos son equivalentes, por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 4 \cdot \left(\frac{22}{40} \cdot \frac{18}{39} \cdot \frac{17}{38} \cdot \frac{16}{37}\right) = 4 \cdot \frac{2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 2^4}{5 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 37} = 4 \cdot \frac{2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17}{5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37} = \frac{8.976}{45.695} = \underline{0{,}1964}.$$

6º) Una marca de neumáticos ha tomado una muestra aleatoria de 100 ruedas y ha medido la presión de inflado, proporcionando una media de 2,3 bares. Si se sabe que la presión de inflado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 0{,}81$ bares².

$a)$ Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la presión de inflado con un nivel de confianza del 95 %.

$b)$ Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza disminuimos el tamaño de la muestra.

$c)$ La marca de neumáticos afirma que la media de presión de inflado es de 2 bares. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 90 %? Justificar la respuesta.

Solución:

$a)$ Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$

$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 2{,}3;\ \ \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(2{,}3 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}9}{\sqrt{100}};\ 2{,}3 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}9}{\sqrt{100}}\right);\ \ (2{,}3 - 1{,}96 \cdot 0{,}09;\ 2{,}3 + 1{,}96 \cdot 0{,}09)$

$(2{,}3 - 0{,}1764;\ 2{,}3 + 0{,}1764).$

$$\boldsymbol{I.C._{90\,\%} = (2{,}1236;\ 2{,}4764).}$$

$b)$ La amplitud del intervalo es inversamente proporcional al número de elementos de la muestra, por lo cual:

$$\boldsymbol{Si\ disminuye\ la\ muestra\ aumenta\ el\ valor\ del\ intervalo\ de\ confianza.}$$

$c)$ Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1 - \alpha = 0{,}90 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$

$(1 - 0{,}05 = 0{,}9500 \ \rightarrow z = 1{,}645).$

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 2{,}3;\ \ \sigma = 0{,}9;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645.$

$(2{,}3 - 1{,}645 \cdot 0{,}09;\ 2{,}3 + 1{,}645 \cdot 0{,}09);$

$(2{,}3 - 0{,}1485;\ 2{,}3 + 0{,}1485) \Rightarrow I.C._{90\,\%} = (2{,}1520;\ 2{,}4485).$

$$\boldsymbol{2 \notin I.C._{90\,\%} \Rightarrow No\ se\ puede\ aceptar\ la\ afirmación\ del\ fabricane.}$$

Bloque 2

5º) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 + t & si \;\; x < -1 \\ 3 & si \;\; -1 \le x \le 2 \\ x^2 - 6x + 9 + t & si \;\; x > 2 \end{cases}$:

a) ¿Existe un valor de t para que la función $f(x)$ es continua para $x = -1$ y $x = 2$?

b) Representa la función $f(x)$ para $t = 0$.

Solución:

a) La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = -1 \; y \; x = 2$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar, si existen, los valores reales de t para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\; x = -1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} [(x+2)^2 + t] = 1 + t \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} 3 = 3 = f(-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow 1 + t = 3 \Rightarrow t = 2.$$

$$Para\; x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} 3 = 3 = f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 6x + 9 + t) = 1 + t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 3 = 1 + t \Rightarrow t = 2.$$

La función $f(x)$ es continua en R para $t = 2$.

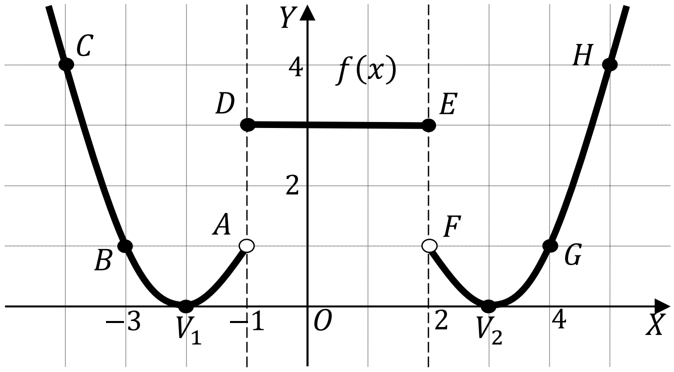
b) Para $t = 0$ la función es $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si \;\; x < -1 \\ 3 & si \;\; -1 \le x \le 2 \\ x^2 - 6x + 9 & si \;\; x > 2 \end{cases}$; teniendo en cuenta que $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, puede expresarse: $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si \;\; x < -1 \\ 3 & si \;\; -1 \le x \le 2 \\ (x-3)^2 & si \;\; x > 2 \end{cases}$.

En el intervalo $(-\infty, -1)$ la función es la parábola $f(x) = (x+2)^2$, que es convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2 y cuyo vértice es el punto $V_1(-2, 0)$. Otros puntos de la parábola son $A(-1, 1)$, aunque no pertenece a la función, $B(-3, 1)$ y $C(-4, 4)$.

En el intervalo $[-1, 2]$ la función es la recta constante $f(x) = 3$, cuyos puntos extremos son $D(-1, 3)$ y $E(2, 4)$.

En el intervalo $(2, +\infty)$ la función es la parábola $f(x) = (x-3)^2$, que es convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2 y cuyo vértice es el punto $V_3(3, 0)$. Otros puntos de la parábola son $F(2, 1)$, aunque no pertenece a la función, $G(4, 1)$ y $H(5, 4)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la figura adjunta.



6º) El tiempo de publicidad (en minutos) en una emisión de radio a lo largo de la semana viene dado por la función $S(x)=x^3-\frac{21}{2}x^2+30x+36$, con x expresado en días y $1\leq x\leq 7$.

a) ¿Cuántos minutos de publicidad emite el tercer día?

b) ¿Durante qué día se emite más publicidad y cuánto tiempo?

c) ¿Qué día emitieron menos publicidad? ¿Cuántos minutos?

Solución:

a) $S(3)=3^3-\frac{21}{2}\cdot 3^2+30\cdot 3+36=\frac{3}{2}\cdot(18-63+60+24)=\frac{3}{2}\cdot 39 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{S(3)=\frac{117}{2}\,minutos=58,5\,minutos.}}$$

b, c) Los valores de la función en los extremos de su dominio son los siguientes:

$S(1)=1^3-\frac{21}{2}\cdot 1^2+30\cdot 1+36=1-\frac{21}{2}+30+36=67-\frac{21}{2}=56{,}5.$

$S(7)=7^3-\frac{21}{2}\cdot 7^2+30\cdot 7+36=343-\frac{1.029}{2}+210+36=$

$=589-514{,}5 \Rightarrow S(7)=74{,}5.$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$S'(t)=3x^2-21x+30.$

$S'(t)=0 \Rightarrow 3x^2-21x+30;\;\; x^2-7x+10=0;\;\; x=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=2, x_2=5.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$S''(x)=6x-21.$

$S''(2)=6\cdot 2-21<0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x=2.$

$S(2)=2^3-\frac{21}{2}\cdot 2^2+30\cdot 2+36=8-42+60+36=104-42=62.$

Nótese que este máximo no es el absoluto, por ser menor que $S(7)$.

$$\underline{\boldsymbol{El\ séptimo\ día\ es\ cuando\ más\ publicidad\ se\ hace.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ dia\ que\ más\ publicidad\ se\ hizo\ fueron\ 74,5\ minutos.}}$$

$S''(5)=6\cdot 5-21>0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x=5.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ quinto\ día\ es\ cuando\ menos\ publicidad\ se\ hace.}}$$

$C(5)=5^3-\frac{21}{2}\cdot 5^2+30\cdot 5+36=125-\frac{525}{2}+150+36=$
$=311-262{,}5=48{,}5.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ dia\ que\ menos\ publicidad\ se\ hizo\ fueron\ 48,5\ minutos.}}$$