Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 problemas. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

TIEMPO: 90 minutos.

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X + C = B^t - 2X$, donde B^t es la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

2º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x no existe la matriz inversa de A.

$b)$ Calcular la inversa de A para $x = 2$.

3º) Resolver, justificando la respuesta, el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x + 2y + z = -3 \\ x - y + 2z = -3 \\ 4x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$.

4º) En un taller de decoración se venden espejos y cuadros con un beneficio de 120 euros por cada espejo y 180 euros por cada cuadro. Dispone para la venta de 45 artículos en total entre ambos productos que previamente ha fabricado, necesitando 1 hora para la fabricación de cada espejo y 4 horas para elaborar cada cuadro, con una disponibilidad de, como mucho, 60 horas. Calcula el número de espejos y cuadros que debe vender para hacer máximos los beneficios, así como el valor de dichos beneficios máximos.

5º) Los beneficios de una empresa (en miles de euros) (Bt) durante los primeros 10 años dependen del tiempo transcurrido t (en años) desde su creación según la función:

$B(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 2A & si\ \ 1 \le t < 6 \\ Bt & si\ \ 6 \le t \le 10 \end{cases}$. Calcular, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función $B(t)$ es continua y que en el año 8 obtuvo unos beneficios de 16 mil euros.

6º) El precio de cierto perfume, $P(x)$, (en euros) depende del porcentaje que contiene de la esencia de cierta flor, x, (en tanto por ciento), de acuerdo con la siguiente función:

$P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 90$, con $0 \leq x \leq 4$. Se pide determinar, razonando las respuestas, para qué porcentajes alcanza este perfume sus precios máximo y mínimo y a cuánto asciendes estos precios.

7º) a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = -x^2 + x$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{3-2x^2}{-x^2+x}$.

8º) En un quiosco de prensa, el 50 % de los clientes compra prensa deportiva, el 15 % prensa nacional y el resto prensa regional. El 20 % de los clientes de prensa deportiva, el 40 % de los de prensa nacional y el 60 % de los de prensa regional son mujeres. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que un cliente de dicho quiosco sea mujer.

b) Calcular la probabilidad de que un cliente, que sabemos que es hombre, compre prensa regional.

9º) El contenido de verdura de los botes de una marca de purés para bebés es una variable que se supone con distribución normal con desviación típica 23 gramos. Se seleccionan al azar 121 botes, registrándose el contenido en verdura de dichos botes, resultando una media de 146 gramos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la cantidad media de verduras que contienen dichos botes de puré. Razona la respuesta.

10º) Una cadena de supermercados tiene en plantilla 3.000 cajeros, 4.000 reponedores y 1.000 transportistas. Se desea obtener una muestra de 200 trabajadores para una encuesta sobre la satisfacción con el puesto de trabajo. Se pide, razonando las respuestas:

a) Atendiendo a razones de proporcionalidad, ¿cuántos cajeros, reponedores y transportistas debería seleccionar la empresa para la encuesta?

b) Si 30 de los cajeros encuestados estaban satisfechos con su trabajo, dar una estimación de la proporción de cajeros satisfechos con su puesto de trabajo.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X + C = B^t - 2X$, donde B^t es la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

Solución:

$$A \cdot X + C = B^t - 2X; \;\; A \cdot X + 2X = B^t - C; \;\; (A + 2I) \cdot X = B^t - C;$$

$$(A + 2I)^{-1} \cdot (A + 2I) \cdot X = (A + 2I)^{-1}(B^t - C); \; I \cdot X = (A + 2I)^{-1} \cdot (B^t - C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{X = (A + 2I)^{-1} \cdot (B^t - C)}}.$$

$$B^t - C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$(A + 2I)^t = A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \;\; |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1.$$

$$Adj.de\ (A + 2I)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + 2I)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A+2I)^t}{|A+2I|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A + 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A + 2I)^{-1} \cdot (B^t - C) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -11 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}}}$$

2º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x no existe la matriz inversa de A.

$b)$ Calcular la inversa de A para $x = 2$.

Solución:

$a)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ -x & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4x + 3 + x^2 = 0;\ x^2 - 4x + 3 = 0;\ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ no\ es\ invertible\ para\ x = 1\ y\ x = 3.}}$$

$b)$ Para $x = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. $\quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$|A| = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -7 & 6 & -4 \end{pmatrix}.}}$$

3º) Resolver, justificando la respuesta, el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x + 2y + z = -3 \\ x + y - 2z = -3 \\ 4x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 3 - 16 - 4 + 18 - 4 = 3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{-6-9+12+3-18+12}{3} = \frac{27-33}{3} = \frac{-6}{3} = -2.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-18-3+24+12-18+6}{3} = \frac{42-39}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-9-9-24+12+27+6}{3} = \frac{45-42}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x = -2,\ \ y = 1,\ \ z = 1.}}$$

4º) En un taller de decoración se venden espejos y cuadros con un beneficio de 120 euros por cada espejo y 180 euros por cada cuadro. Dispone para la venta de 45 artículos en total entre ambos productos que previamente ha fabricado, necesitando 1 hora para la fabricación de cada espejo y 4 horas para elaborar cada cuadro, con una disponibilidad de, como mucho, 60 horas. Calcula el número de espejos y cuadros que debe vender para hacer máximos los beneficios, así como el valor de dichos beneficios máximos.

Solución:

Sean x e y el número de espejos y cuadros que vende el taller, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+y\le 45 \\ x+4y\le 60 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$.

① $\Rightarrow x+y\le 45 \Rightarrow y\le 45-x \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

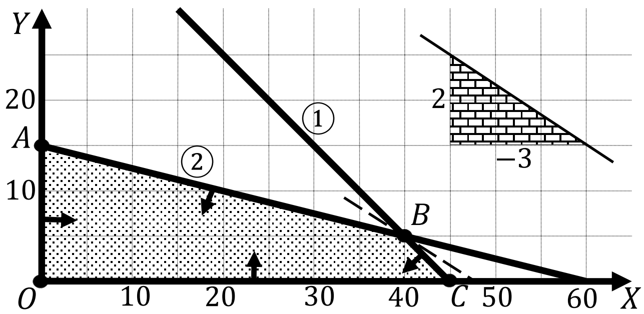
x	20	45
y	25	0

② $\Rightarrow x+4y\le 60 \Rightarrow y\le \dfrac{60-x}{4} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	60
y	15	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+4y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,15).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=45 \\ x+4y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y=-45 \\ x+4y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=15;\ \ y=5;\ \ x+20=60;\ \ x=40 \Rightarrow B(40,5).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+y=45 \end{array}\right\} \Rightarrow x=45 \Rightarrow C(45,0).$

La función de objetivos es $f(x,y)=120x+180y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,15)=120\cdot 0+180\cdot 15=0+2.700=2.700.$

$B \Rightarrow f(40,5)=120\cdot 40+180\cdot 5=4.800+900=5.700.$

$C \Rightarrow f(45,0)=120\cdot 45+180\cdot 0=5.400+0=5.400.$

El valor máximo se produce en el punto $B(40,5)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y)=120x+180y=0 \Rightarrow y=-\frac{120}{180}x=-\frac{2}{3}x \Rightarrow m=-\frac{2}{3}.$

$\underline{\boldsymbol{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ vendiendo\ 40\ espejos\ y\ 5\ cuadros.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 5.700\ euros.}}$

5º) Los beneficios de una empresa (en miles de euros) (Bt) durante los primeros 10 años dependen del tiempo transcurrido t (en años) desde su creación según la función:

$B(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 2A & si \;\; 1 \leq t < 6 \\ Bt & si \;\; 6 \leq t \leq 10 \end{cases}$. Calcular, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función $B(t)$ es continua y que en el año 8 obtuvo unos beneficios de 16 mil euros.

Solución:

La función $B(t)$ es continua en su dominio, excepto para el valor de $t = 6$, cuya continuidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de $A \; y \; B$.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ t = 6 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to 6^-} B(t) = \lim\limits_{t \to 6} (t^2 - 8t + 2A) = 2A - 12 \\ \lim\limits_{t \to 6^+} B(t) = \lim\limits_{t \to 6} (6B) = 6B = B(6) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 6^-} B(t) = \lim_{t \to 6^+} B(t) = B(6) \Rightarrow 2A - 12 = 6B; \;\; A - 3B = 6. \quad (1)$$

$$B(8) = 16 \Rightarrow B \cdot 8 = 16 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{B = 2}}.$$

Sustituyendo el valor de B en (1):

$$A - 3B = 6; \;\; A - 3 \cdot 2 = 6; \;\; A - 6 = 6 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A = 12}}.$$

6º) El precio de cierto perfume, $P(x)$, (en euros) depende del porcentaje que contiene de la esencia de cierta flor, x, (en tanto por ciento), de acuerdo con la siguiente función:

$P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 90$, con $0 \leq x \leq 4$. Se pide determinar, razonando las respuestas, para qué porcentajes alcanza este perfume sus precios máximo y mínimo y a cuánto asciendes estos precios.

Solución:

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$P'(x) = 12x^2 - 12x - 24.$

$P'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 12x - 24 = 0;\ \ x^2 - x - 2 = 0;\ \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -1 \notin D(P), x_2 = 2 \Rightarrow x = 2.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$P''(x) = 24x - 12.$

$P''(2) = 24 \cdot 2 - 12 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 2.$

$\underline{\boldsymbol{El\ perfume\ alcanza\ su\ mínimo\ valor\ para\ el\ 2\ \%\ de\ esencia.}}$

$P(2) = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 90 = 32 - 24 - 48 + 90 = 50.$

$\underline{\boldsymbol{El\ precio\ mínimo\ del\ perfume\ es\ de\ 50\ euros.}}$

$P(0) = 90.$

$P(4) = 4 \cdot 4^3 - 6 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 90 = 256 - 96 - 96 + 90 = 154.$

$\underline{\boldsymbol{El\ perfume\ alcanza\ su\ máximo\ valor\ para\ el\ 4\ \%\ de\ esencia.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ precio\ máximo\ del\ perfume\ es\ de\ 154\ euros.}}$

7º) a) Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x)=-x^2+x$ y el eje OX entre $x=0$ y $x=2$.

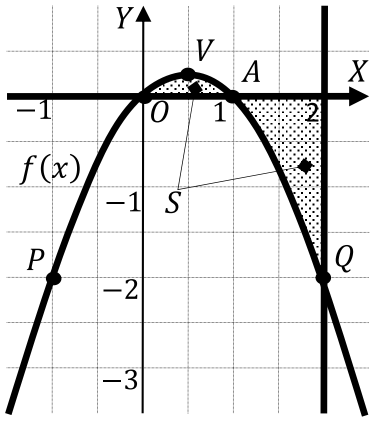
b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x)=\frac{3-2x^2}{-x^2+x}$.

Solución:

a) La función $f(x)=-x^2+x$ es una parábola cóncava $(\cap)$ por ser negativo el coeficiente de x^2 y su vértice es siguiente:

$$f'(x)=-2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\tfrac{1}{2}\right)=-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{1}{2}=-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{-1+2}{4}=\tfrac{1}{4} \Rightarrow V\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4}\right).$$



Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son los siguientes:

$$f(x)=0 \Rightarrow -x^2+x=0=-x(x-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \Rightarrow O(0,0) \\ x_2=1 \Rightarrow A(1,0) \end{cases}.$$

Otros puntos de la parábola son $P(-1,-2)$ y $Q(2,-2)$.

La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta de donde se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S=\int_0^1 f(x)\cdot dx+\int_2^1 f(x)\cdot dx=\int_0^1(-x^2+x)\cdot dx+\int_2^1(-x^2+x)\cdot dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_2^1=\left[\left(-\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}\right)-0\right]+\left[\left(-\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}\right)-\left(-\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}\right)\right]=$$

$$=2\cdot\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}\right)=2\cdot\frac{-2+3}{6}+\frac{8}{3}-2=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-2 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S=1\ u^2}}.$$

b) Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-2x^2}{-x^2+x}=2 \Rightarrow \underline{\textit{La recta } y=2 \textit{ es asíntota horizontal}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$-x^2+x=0;\ -x(x-1)=0 \Rightarrow x_1=0, x_1=1.$$

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ x=0\ (eje\ Y)\ e\ y=1\ son\ asíntotas\ verticales}}.$$

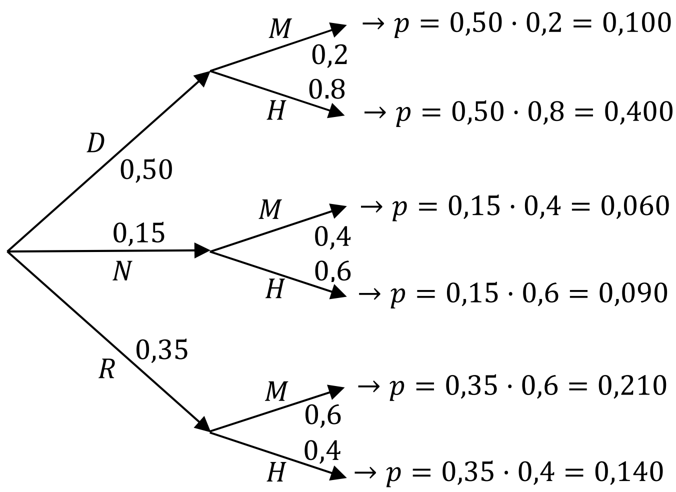
No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

8º) En un quiosco de prensa, el 50 % de los clientes compra prensa deportiva, el 15 % prensa nacional y el resto prensa regional. El 20 % de los clientes de prensa deportiva, el 40 % de los de prensa nacional y el 60 % de los de prensa regional son mujeres. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que un cliente de dicho quiosco sea mujer.

b) Calcular la probabilidad de que un cliente, que sabemos que es hombre, compre prensa regional.

Solución:



a) $\quad P = P(M) = P(D \cap M) + P(N \cap M) + P(R \cap M) =$

$= P(D) \cdot P(M/D) + P(N) \cdot P(M/N) + P(R) \cdot P(M/R) =$

$= 0{,}50 \cdot 0{,}2 + 0{,}15 \cdot 0{,}4 + 0{,}35 \cdot 0{,}6 = 0{,}100 + 0{,}060 + 0{,}210 = \underline{0{,}370}.$

b) $\quad P = P(R/H) = \frac{P(R \cap H)}{P(H)} = \frac{P(R) \cdot P(H/R)}{1 - P(M)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}4}{1 - 0{,}370} = \frac{0{,}140}{0{,}630} = \underline{0{,}2222}.$

9º) El contenido de verdura de los botes de una marca de purés para bebés es una variable que se supone con distribución normal con desviación típica 23 gramos. Se seleccionan al azar 121 botes, registrándose el contenido en verdura de dichos botes, resultando una media de 146 gramos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la cantidad media de verduras que contienen dichos botes de puré. Razona la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95\ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}95=0{,}05\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$

$(1-0{,}025=0{,}9750\ \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=121;\ \ \overline{x}=146;\ \ \sigma=23;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(146-1{,}96\cdot\frac{23}{\sqrt{121}};\ 146+1{,}96\cdot\frac{23}{\sqrt{121}}\right);$

$(146-1{,}96\cdot 2{,}0909;\ 146+1{,}96\cdot 2{,}0909);\ \ (146-4{,}0982;\ 146+4{,}0982).$

$\underline{\boldsymbol{I.C._{95\,\%}=(141{,}9018;\ 150{,}0982).}}$

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

10º) Una cadena de supermercados tiene en plantilla 3.000 cajeros, 4.000 reponedores y 1.000 transportistas. Se desea obtener una muestra de 200 trabajadores para una encuesta sobre la satisfacción con el puesto de trabajo. Se pide, razonando las respuestas:

a) Atendiendo a razones de proporcionalidad, ¿cuántos cajeros, reponedores y transportistas debería seleccionar la empresa para la encuesta?

b) Si 30 de los cajeros encuestados estaban satisfechos con su trabajo, dar una estimación de la proporción de cajeros satisfechos con su puesto de trabajo.

Solución:

a) Sean a, b, c el número de cajeros, reponedores y transportistas que componen la muestra de 200 trabajadores de la cadena de supermercados.

$$\frac{a}{3.000} = \frac{b}{4.000} = \frac{c}{1.000} = \frac{a+b+c}{3.000+4.000+1.000} = \frac{200}{8.000} = \frac{1}{40}.$$

$$a = \frac{1}{40} \cdot 3.000 = 75; \;\; b = \frac{1}{40} \cdot 4.000 = 100; \;\; c = \frac{1}{40} \cdot 1.000 = 25.$$

$$\underline{\boldsymbol{Se\ deben\ seleccionar\ a\ 75\ cajeros, 100\ reponedores\ y\ 25\ transportistas.}}$$

b) $p = \frac{30}{75} = 0{,}4.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ 40\ \%\ de\ los\ cajeros\ están\ satisfechos\ con\ su\ trabajo.}}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 problemas. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}$. Calcular la matriz X que cumpla la ecuación matricial $A\cdot X-B^t=C+3X$, siendo B^t la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

2º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & x & -1\\ x & -2 & 1\end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

$b)$ Calcular la inversa de A para $x=0$.

3º) Resolver, justificando la respuesta, el sistema: $\begin{cases}3x-2y+4z=3\\ x+y-z=-2\\ 2x-3y+2z=-1\end{cases}$.

4º) En una pastelería se elaboran pasteles de los tipos A y B. Cada pastel de tipo A necesita 6 gramos de azúcar y 3 gramos de levadura, con un beneficio de 4,5 euros. Cada pastel de tipo B se elabora con 4 gramos de azúcar y 4 de levadura, con un beneficio de 5,5 euros. Sabiendo que solo dispone de 240 gramos de azúcar y 180 gramos de levadura, calcular, justificando la respuesta, el número de pasteles de cada tipo que debe fabricar para obtener unos beneficios máximos, así como el valor di dichos beneficios máximos.

5º) El consumo eléctrico de una tienda $C(t)$ (en kilovatios) durante las 8 horas que permanece abierta depende del tiempo t (en horas) desde que abrió según la siguiente función: $C(t)=10+6Bt+6At^2+t^3$ $(1\leq t\leq 8)$. Determinar, razonando las respuestas, las constantes A y B sabiendo que su consumo máximo se alcanza a las 6 horas y asciende a 10 kilovatios.

6º) La cantidad de pescado capturado en cierto lago en pequeñas embarcaciones, $P(x)$ (en kg) es una función de la longitud de la embarcación, x, que oscila entre 1 y 12 metros. La función que relaciona ambas magnitudes es la siguiente:

$P(x) = 3x^3 - 45x^2 + 144x + 230 \;\; (1 \leq x \leq 12)$. Se pide, razonando las respuestas:

$a)$ Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la cantidad de pescado capturado en función de la longitud de la embarcación utilizada.

$b)$ Representar gráficamente la función $P(x)$.

7º) $a)$ Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = 4 - x^2$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$.

$b)$ Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{3x^2+2}{4-x^2}$.

8º) Un club de fútbol tiene 200 abonados de gran antigüedad, 500 abonados con varios años de antigüedad y 300 nuevos abonados. Se pregunta a los abonados si están de acuerdo con una subida de los precios de los abonos a cambio de que el club ofrezca servicios adicionales. Se muestran favorables a la subida 80 abonados de gran antigüedad, 280 con varios años de antigüedad y 120 nuevos abonados. Se pide, razonando la respuesta:

$a)$ Calcular la probabilidad de que un abonado sea nuevo y favorable a la subida.

$b)$ Calcular la probabilidad de que un abonado, que se sabe que es favorable a la subida, tengan gran antigüedad en el club.

9º) La producción de tomates en parcelas de una zona de regadío se ajusta a distribución normal con desviación típica 1 tonelada. Con objeto de estimar la producción media de la zona, se registran los datos de 36 parcelas que arrojan una producción media de 8,7 toneladas. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90 %, para la producción media de tomates de las parcelas de la zona. Razonar la respuesta.

10º) Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de hogares españoles con conexión de fibra óptica. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor $p = 0{,}5$. Se pide determinar el número mínimo de hogares que hay que visitar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel de confianza del 99 % y coya longitud sea inferior a 0,14. Razonar la respuesta.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz X que cumpla la ecuación matricial $A \cdot X - B^t = C + 3X$, siendo B^t la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

Solución:

$$A \cdot X - B^t = C + 3X; \;\; A \cdot X - 3X = C + B^t; \;\; (A - 3I) \cdot X = (C + B^t);$$

$$(A - 3I)^{-1} \cdot (A - 3I) \cdot X = (A - 3I)^{-1} \cdot (C + B^t);$$

$$I \cdot X = (A - 3I)^{-1} \cdot (C + B^t) \Rightarrow \underline{X = (A - 3I)^{-1} \cdot (C + B^t)}.$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A - 3I| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1; \;\; (A - 3I)^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ (A - 3I)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(A - 3I)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A-3I)^t}{|A-3I|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C + B^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A - 3I)^{-1} \cdot (C + B^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

2º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & x & -1\\ x & -2 & 1\end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

$b)$ Calcular la inversa de A para $x=0$.

Solución:

$a)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & x & -1\\ x & -2 & 1\end{vmatrix}=x+2-x-x^2-2+1=-x^2+1=0;\ \ x^2=1\Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1=-1, x_2=1.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ es\ invertible}\ \forall a\in \boldsymbol{R}-\{-\boldsymbol{1},\boldsymbol{1}\}.}$$

$b)$ Para $x=0$ es $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to F_2+F_1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}F_1\to F_1-F_2\\ F_3\to F_3+2F_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_1\to F_1-F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{-1}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{-2} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{-1}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1}\end{pmatrix}.}$$

3º) Resolver, justificando la respuesta, el sistema: $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 3 \\ x + y - z = -2 \\ 2x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 12 + 4 - 8 - 9 + 4 = -15 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ de\ incógnitas.$$

$$\underline{\boldsymbol{Según\ el\ teorema\ de\ Rouché - Fröbenios \Rightarrow S.C.D.}}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{6+24-2+4-9-8}{-15} = \frac{34-19}{-15} = \frac{15}{-15} = -1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-12-4-6+16-3-6}{-15} = \frac{-15}{-15} = 1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-3-9+8-6-18-2}{-15} = \frac{-30}{-15} = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x = -1, y = 1, z = 2.}}$$

4º) En una pastelería se elaboran pasteles de los tipos A y B. Cada pastel de tipo A necesita 6 gramos de azúcar y 3 gramos de levadura, con un beneficio de 4,5 euros. Cada pastel de tipo B se elabora con 4 gramos de azúcar y 4 de levadura, con un beneficio de 5,5 euros. Sabiendo que solo dispone de 240 gramos de azúcar y 180 gramos de levadura, calcular, justificando la respuesta, el número de pasteles de cada tipo que debe fabricar para obtener unos beneficios máximos, así como el valor di dichos beneficios máximos.

Solución:

Sean x e y el número de pasteles que se elaboran en la pastelería de los tipos A y B, respectivamente.

Las restricciones son : $\left.\begin{array}{r} 6x+4y \le 240 \\ 3x+4y \le 180 \\ x \ge 0;\;\; y \ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x+2y \le 120 \\ 3x+4y \le 180 \\ x \ge 0;\;\; y \ge 0 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow 3x+2y \le 120 \Rightarrow y \le \frac{120-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

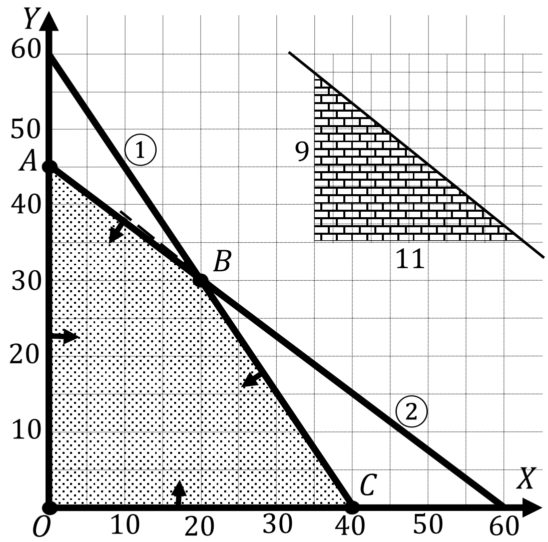
x	0	40
y	60	0

$② \Rightarrow 3x+4y \le 180 \Rightarrow y \le \frac{180-3x}{4} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	60
y	45	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 3x+4y=180 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,45).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y=120 \\ 3x+4y=180 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r} 6x+4y=240 \\ -3x-4y=-180 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=60;\;\; x=20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 60+2y=120;\;\; 2y=60;\;\; y=30 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(20,30).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 3x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=120;\;\; x=40 \Rightarrow$ $C(40,0).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 4{,}5x+5{,}5y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,45) = 4{,}5 \cdot 0 + 5{,}5 \cdot 45 = 0 + 247{,}5 = 247{,}5.$

$B \Rightarrow f(20,30) = 4{,}5 \cdot 20 + 5{,}5 \cdot 30 = 90 + 165 = 255.$

$C \Rightarrow f(40,0) = 4{,}5 \cdot 40 + 5{,}5 \cdot 0 = 180 + 0 = 180.$

El máximo se produce en el punto $B(20,30)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 4{,}5x + 5{,}5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{4{,}5}{5{,}5}x = -\frac{45}{55}x \Rightarrow m = -\frac{9}{11}.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ es\ máximo\ elaborando\ 20\ pasteles\ tipo\ A\ y\ 30\ tipo\ B.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 255\ euros.}}$$

5º) El consumo eléctrico de una tienda $C(t)$ (en kilovatios) durante las 8 horas que permanece abierta depende del tiempo t (en horas) desde que abrió según la siguiente función: $C(t) = 10 + 6Bt + 6At^2 + t^3 \ (1 \leq t \leq 8)$. Determinar, razonando las respuestas, las constantes A y B sabiendo que su consumo máximo se alcanza a las 6 horas y asciende a 10 kilovatios.

Solución:

Por alcanzar a las 6 horas un consumo de 10 kilovatios: $C(6) = 10$.

$C(6) = 10 \Rightarrow 10 + 6B \cdot 6 + 6A \cdot 6^2 + 6^3 = 10;\ \ 6B \cdot 6 + 6A \cdot 6^2 + 6^3 = 0;$

$6A + B = -6.$ (1)

Por alcanzar el máximo para $t = 6$: $C'(6) = 0$.

$C'(t) = 6B + 12At + 3t^2$.

$C'(6) = 0 \Rightarrow 6B + 72A + 3 \cdot 36 = 0;\ \ 12A + B = -18.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 6A + B = -6 \\ 12A + B = -18 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -6A - B = 6 \\ 12A + B = -18 \end{array}\right\} \Rightarrow 6A = -12;$$

$$\underline{\boldsymbol{A = -2}}.$$

$$-6 + B = -6 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{B = 6}}.$$

6º) La cantidad de pescado capturado en cierto lago en pequeñas embarcaciones, $P(x)$ (en kg) es una función de la longitud de la embarcación, x, que oscila entre 1 y 12 metros. La función que relaciona ambas magnitudes es la siguiente:

$P(x) = 3x^3 - 45x^2 + 144x + 230 \;\; (1 \leq x \leq 12)$. Se pide, razonando las respuestas:

$a)$ Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la cantidad de pescado capturado en función de la longitud de la embarcación utilizada.

$b)$ Representar gráficamente la función $P(x)$.

Solución:

$a)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$P'(x) = 9x^2 - 90x + 144.$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 9x^2 - 90x + 144 = 0; \;\; x^2 - 10x + 16 = 0; \;\; x = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} =$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = 5 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 8.$$

Por ser $P(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función en los intervalos $(1, 2)$, $(2, 8)$ y $(8, 10)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 3 \in (2, 8)$ es:

$$P'(3) = 9 \cdot 3^2 - 90 \cdot 3 + 144 = 81 - 270 + 144 = -45 < 0 \Rightarrow Decreciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$P'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (2, 8)}.$$

$$P'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (1, 2) \cup (8, 12)}.$$

$b)$ Para la representación gráfica de la función determinamos sus máximos y mínimos relativos.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$P'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 8.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$P''(x) = 18x - 90.$$

$$P''(2) = 18 \cdot 2 - 90 = -54 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$P(2) = 3 \cdot 2^3 - 45 \cdot 2^2 + 144 \cdot 2 + 230 = 24 - 180 + 288 + 320 =$$

$$= 632 - 180 = 452 \Rightarrow Máx. \Rightarrow A(2, 452).$$

$$P''(8) = 18 \cdot 8 - 90 = 54 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 8.$$

$$P(8) = 3 \cdot 8^3 - 45 \cdot 8^2 + 144 \cdot 8 + 230 = 1.536 - 2.880 + 1.152 + 230 =$$

$= 2.918 - 2.880 = 38 \Rightarrow Mín. \Rightarrow B(8, 38).$

Los valores extremos de la función son los siguientes:

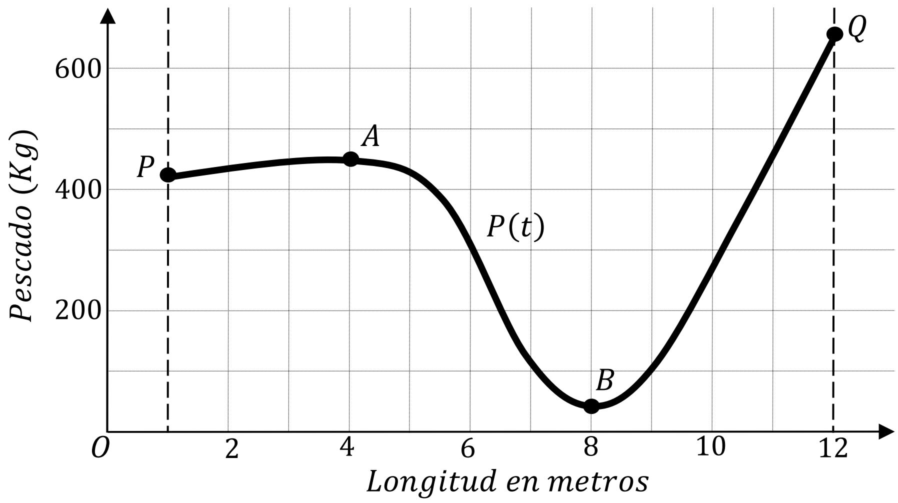
$P(1) = 3 \cdot 1^3 - 45 \cdot 1^2 + 144 \cdot 1 + 230 = 3 - 45 + 144 + 320 =$

$= 467 - 45 = 422 \Rightarrow P(1, 422).$

$P(12) = 3 \cdot 12^3 - 45 \cdot 12^2 + 144 \cdot 12 + 230 =$

$= 5.184 - 6.480 + 1.728 + 230 = 7.142 - 6.480 = 662 \Rightarrow Q(12, 662).$

Teniendo en cuenta el estudio realizado, la representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



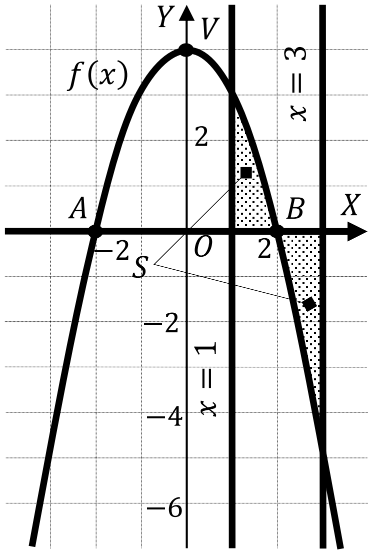
7º) $a)$ Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = 4 - x^2$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$.

$b)$ Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{3x^2+2}{4-x^2}$.

Solución:

$a)$

La función $f(x) = 4 - x^2$ es una parábola cóncava $(\cap)$ por ser negativo el coeficiente de x^2 y su vértice es el punto $V(0,4)$; es simétrica con respecto al eje de ordenadas por ser $f(-x) = f(x)$ y sus puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:



$$f(x) = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \Rightarrow A(-2,0) \\ x_2 = 2 \Rightarrow B(2,0) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta de donde, teniendo en cuanta la simetría de la función, se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^2 f(x) \cdot dx + \int_3^2 f(x) \cdot dx = \int_1^2 (4 - x^2) \cdot dx + \int_3^2 (4 - x^2) \cdot dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_3^2 =$$

$$= \left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4 \cdot 1 - \frac{1^3}{3}\right)\right] + \left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4 \cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right)\right] =$$

$$= 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} + 8 - \frac{8}{3} - 12 + 9 = 9 - \frac{15}{3} = 9 - 5 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 4\ u^2}}.$$

$b)$ Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2+2}{4-x^2} = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{La\ recta\ y = -3\ es\ asíntota\ horizontal}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ x = -2\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales}}.$$

Asíntotas oblicuas:

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales}.$$

8º) Un club de fútbol tiene 200 abonados de gran antigüedad, 500 abonados con varios años de antigüedad y 300 nuevos abonados. Se pregunta a los abonados si están de acuerdo con una subida de los precios de los abonos a cambio de que el club ofrezca servicios adicionales. Se muestran favorables a la subida 80 abonados de gran antigüedad, 280 con varios años de antigüedad y 120 nuevos abonados. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que un abonado sea nuevo y favorable a la subida.

b) Calcular la probabilidad de que un abonado, que se sabe que es favorable a la subida, tengan gran antigüedad en el club.

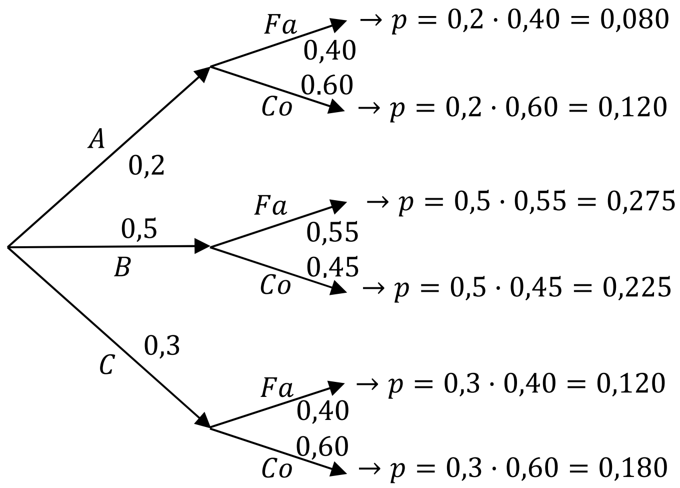
Solución:

Sean A, B y C los abonados de gran antigüedad, con varios años de antigüedad y nuevos abonados, respectivamente.

$$P(A) = \frac{200}{200+500+300} = \frac{200}{1.000} = 0{,}2;\;\; P(B) = \frac{500}{1.000} = 0{,}5;\;\; P(C) = \frac{300}{1.000} = 0{,}3.$$

Las probabilidades de que estén a favor A, B y C son las siguientes:

$$Fa(A) = \frac{80}{200} = 0{,}40;\;\; Fa(B) = \frac{280}{500} = 0{,}55;\;\; Fa(C) = \frac{120}{300} = 0{,}40.$$



a) $$P = P(C \cap Fa) = P(C) \cdot P(Fa/C) = 0{,}3 \cdot 0{,}40 = \underline{0{,}120}.$$

b) $$P = P(A/Fa) = \frac{P(A \cap Fa)}{P(Fa)} = \frac{P(A) \cdot P(Fa/A)}{P(A) \cdot P(Fa/A) + P(B) \cdot P(Fa/B) + P(C) \cdot P(Fa/C)} =$$

$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}40}{0{,}2 \cdot 0{,}40 + 0{,}5 \cdot 0{,}55 + 0{,}3 \cdot 0{,}40} = \frac{0{,}080}{0{,}080 + 0{,}275 + 0{,}120} = \frac{0{,}08}{0{,}475} = \underline{0{,}168}.$$

9º) La producción de tomates en parcelas de una zona de regadío se ajusta a distribución normal con desviación típica 1 tonelada. Con objeto de estimar la producción media de la zona, se registran los datos de 36 parcelas que arrojan una producción media de 8,7 toneladas. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90 %, para la producción media de tomates de las parcelas de la zona. Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha=0{,}90 \rightarrow \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$

$(1-0{,}05=0{,}9500 \rightarrow z=1{,}645).$

Datos: $n=36;\ \overline{x}=8{,}7;\ \sigma=1;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(8{,}7-1{,}645\cdot\frac{1}{\sqrt{36}};\ 8{,}7+1{,}645\cdot\frac{1}{\sqrt{36}}\right);$

$(8{,}7-1{,}645\cdot 0{,}1667;\ 8{,}7+1{,}645\cdot 0{,}1667);\ \ (8{,}7-0{,}2742;\ 8{,}7+0{,}2742).$

$\boldsymbol{I.C._{90\,\%}=(8{,}4258;\ 8{,}9742).}$

10º) Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de hogares españoles con conexión de fibra óptica. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor $p = 0{,}5$. Se pide determinar el número mínimo de hogares que hay que visitar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel de confianza del 99 % y coya longitud sea inferior a 0,14. Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = 2{,}575.$

$(1 - 0{,}005 = 0{,}9950 \rightarrow z = 2{,}575).$

Datos: $p = q = 058;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575;\ \ E = \frac{0{,}14}{2} = 0{,}07.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$, de donde se deduce la expresión del error máximo cometido: $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$.

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ \ \frac{E}{z_{\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ \ \frac{E^2}{\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2} = \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow n = \frac{p \cdot q \cdot \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{E^2} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}575^2}{0{,}07^2} =$$

$$= \frac{0{,}25 \cdot 6{,}6306}{0{,}07^2} = \frac{1{,}6577}{0{,}0049} = 338{,}30.$$

$\underline{\boldsymbol{Hay\ que\ visitar\ un\ mínimo\ de\ 339\ hogares}}.$