Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

GALICIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 6 preguntas, de las que puede realizar un máximo de 3, combinadas como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, solo se corregirán los 3 primeros realizados.

TIEMPO: 90 minutos.

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule las matrices $A^2 - B$ y $A - I$, donde I representa la matriz identidad de orden 3.

$b)$ Calcula, si es posible, la inversa de la matriz $A - I$.

$c)$ Despeje X en la ecuación matricial $X \cdot A + B = A^2 + X$ y calcule su valor.

2º) Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla en dos calidades distintas: calidad A, carcasa de plástico y calidad A^+, carcasa de aluminio. El coste unitario de producción es de 70 euros para los teléfonos de calidad A y de 90 euros para los de calidad A^+. Los precios de venta son de 100 euros para los de clase A y de 150 euros para los de clase A^+. Si para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30.000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcasas de aluminio.

$a)$ Planee el problema que determina el número de teléfonos móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

$b)$ Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

$c)$ Determine una solución óptima y halle el valor óptimo de la función objetivo.

3º) En un zona protegida de un parque natural el número de aves $N(t)$, en cientos, en función del tiempo t (años transcurridos desde que se contabilizan las aves) viene dado por la función $N(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & si\ \ 0 \leq t \leq 10 \\ 95 - \frac{250}{t} & si\ \ t > 10 \end{cases}$.

$a)$ Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $N(t)$. ¿Entre que años crece la función? ¿Entre que años decrece?

$b)$ ¿Cuándo se alcanza el número mínimo de aves en el parque? ¿Cuántas aves hay en ese momento?

$c)$ Calcule el intervalo de tiempo en el que la población de aves se mantiene entre 5.000 y 7.500 aves. ¿A qué valor tiende la población de aves con el paso del tiempo?

4º) Dada la función $f(x) = x^3 - ax^2 + 8x$.

$a)$ Calcule el valor del parámetro a teniendo en cuenta que la función $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = 2$.

$b)$ Para $a = 6$, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.

5º) Un estudio revela que 2 de cada 5 habitantes de una determinada población son menores de 30 años, el 70 % de los habitantes realizan ejercicio físico con regularidad y el 30 % de los habitantes son menores de 30 años y realizan ejercicio físico con regularidad.

$a)$ ¿Qué porcentaje de la población ni es menor de 30 años ni realiza ejercicio físico con regularidad?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que un habitante que no realiza ejercicio físico con regularidad sea menor de 30 años?

$c)$ ¿Son independientes los sucesos ser menor de 30 años y realizar ejercicio físico con regularidad?

6º) Tomamos una muestra aleatoria de 36 facturas de consumo mensual de luz (en euros) y el intervalo de confianza obtenido al 95 % para el consumo mensual medio es $[60{,}1; 69{,}9]$. Según esta información:

$a)$ ¿Cuál fue el consumo medio muestral de luz?

$b)$ ¿Cuál es el error máximo cometido?

$c)$ Determine un intervalo de confianza al 90 % para el consumo medio de luz.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&2&3\\1&2&3\\-3&3&6\end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule las matrices A^2-B y $A-I$, donde I representa la matriz identidad de orden 3.

$b)$ Calcula, si es posible, la inversa de la matriz $A-I$.

$c)$ Despeje X en la ecuación matricial $X\cdot A+B=A^2+X$ y calcule su valor.

Solución

$$a)\ A^2-B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2&3\\1&2&3\\-3&3&6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&2&4\\1&1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2&3\\1&2&3\\-3&3&6\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^2-B=\begin{pmatrix}3&-1&0\\1&0&1\\4&-2&-3\end{pmatrix}}}.$$

$$A-I=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A-I=\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}}}.$$

$b)$ Se obtiene la inversa de $(A-I)$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(A-I|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&2&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\1&0&1&0&1&0\\-1&1&2&1&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_2\to F_2-F_1\\F_3\to F_3+F_1\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&-1\\0&1&2&1&0&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_2\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&2&1&0&1\\0&0&1&0&1&-1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to F_2-2F_3\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&1&-2&3\\0&0&1&0&1&-1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-2&3\\0&1&-1\end{pmatrix}}}.$$

$c)\ X \cdot A + B = A^2 + X;\ \ X \cdot A - X = A^2 - B;\ \ X \cdot A - X \cdot I = A^2 - B;$

$X \cdot (A - I) = A^2 - B;\ \ X \cdot (A - I) \cdot (A - I)^{-1} = (A^2 - B) \cdot (A - I)^{-1};$

$X \cdot I = (A^2 - B) \cdot (A - I)^{-1} \Rightarrow \underline{X = (A^2 - B) \cdot (A - I)^{-1}}.$

Sustituyendo en la expresión anterior los valores obtenidos en a):

$$X = (A^2 - B) \cdot (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

2º) Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla en dos calidades distintas: calidad A, carcasa de plástico y calidad A^+, carcasa de aluminio. El coste unitario de producción es de 70 euros para los teléfonos de calidad A y de 90 euros para los de calidad A^+. Los precios de venta son de 100 euros para los de clase A y de 150 euros para los de clase A^+. Si para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30.000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcasas de aluminio.

a) Planee el problema que determina el número de teléfonos móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Determine una solución óptima y halle el valor óptimo de la función objetivo.

Solución

a) Sean x e y el número móviles de calidades A y A^+ que vende la empresa, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 70x + 90y \le 30.000 \\ x + y \le 350 \\ x \ge 0; 0 \le y \le 310 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 7x + 9y \le 3.000 \\ x + y \le 350 \\ x \ge 0; 0 \le y \le 310 \end{array}\right\}.$

b)

① $\Rightarrow 7x + 9y \le 3.000 \Rightarrow y \le \frac{3.000-7x}{9} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

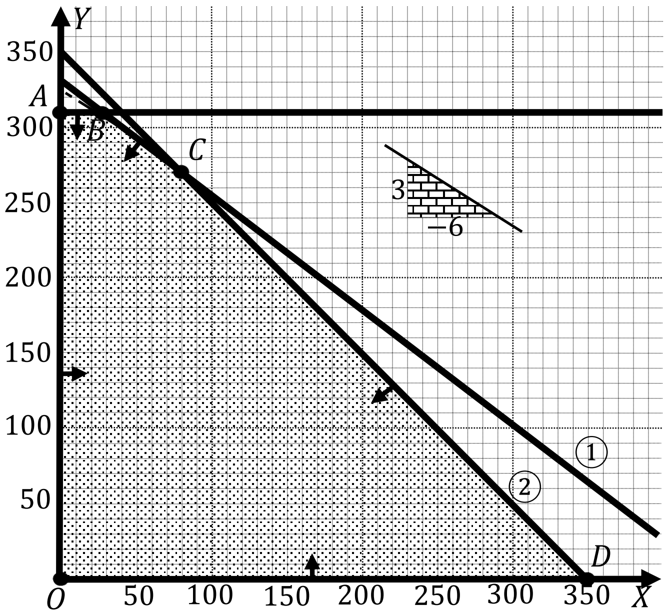
x	120	210
y	240	170

② $\Rightarrow x + y \le 350 \Rightarrow y \le 350 - x \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	350
y	350	0

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 310 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(0,310)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 310 \\ 7x + 9y = 3.000 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x + 2.790 = 3.000; \;\; 7x = 210 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 30 \Rightarrow \underline{B(30,210)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x + 9y = 3.000 \\ x + y = 350 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 7x + 9y = 3.000 \\ -7x - 7y = -2.450 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$2y = 550; \;\; y = 275;$

$x = 75 \Rightarrow \underline{B(75,275)}.$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x + y = 350 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 350 \Rightarrow \underline{D(350,0)}.$

c) Teniendo en cuenta que los beneficios son la diferencia entre los precios de venta y de compra de las carcasas, la función de objetivos es $f(x,y) = 30x + 60y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,310) = 30 \cdot 0 + 60 \cdot 310 = 0 + 1.860 = 1.860.$

$B \Rightarrow f(30,310) = 30 \cdot 30 + 60 \cdot 310 = 900 + 18.600 = 19.500.$

$C \Rightarrow f(75,275) = 30 \cdot 75 + 60 \cdot 275 = 2.250 + 16.500 = 18.750.$

$D \Rightarrow f(350,0) = 30 \cdot 350 + 60 \cdot 0 = 10.500 + 0 = 10.500.$

El máximo se produce en el punto $B(30,310)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 30x + 60y = 0 \Rightarrow y = -\frac{30}{60}x \Rightarrow m = -\frac{3}{6}.$

$\underline{\boldsymbol{El\ máximo\ beneficio\ se\ obtiene\ vendiendo\ 30\ móviles\ tipo\ A\ y\ 310\ tipo\ A^{+}}}$.

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 19.500\ euros}}$.

3º) En un zona protegida de un parque natural el número de aves $N(t)$, en cientos, en función del tiempo t (años transcurridos desde que se contabilizan las aves) viene dado por la función $N(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & si \ \ 0 \le t \le 10 \\ 95 - \frac{250}{t} & si \ \ t > 10 \end{cases}$.

a) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $N(t)$. ¿Entre que años crece la función? ¿Entre que años decrece?

b) ¿Cuándo se alcanza el número mínimo de aves en el parque? ¿Cuántas aves hay en ese momento?

c) Calcule el intervalo de tiempo en el que la población de aves se mantiene entre 5.000 y 7.500 aves. ¿A qué valor tiende la población de aves con el paso del tiempo?

Solución

a) Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $N(t)$ es continua en R, excepto para $t = 10$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ t = 10 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to 10^-} N(t) = \lim\limits_{t \to 10} (t^2 - 8t + 50) = 70 = N(10) \\ \lim\limits_{t \to 10^+} N(t) = \lim\limits_{t \to 10} \left(95 - \frac{250}{t}\right) = 70 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 10^-} N(t) = \lim_{t \to 10^+} N(t) = N(t) \Rightarrow La\ función\ es\ continua\ en\ [0, 10).$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$N'(t) = \begin{cases} 2t - 8 & si \ \ 0 \le t \le 10 \\ \frac{250}{t^2} & si \ \ t > 10 \end{cases} \Rightarrow N'(t) = 0 \Rightarrow 2t - 8 = 0 \Rightarrow t = 4.$$

En $[0, 10)$ la función $N(t)$ es una parábola convexa $(\cup)$, por ser positivo el coeficiente de t^2, por lo cual la función tiene un mínimo relativo para $t = 4$.

Teniendo en cuenta lo anterior y que $\frac{250}{t^2} > 0, \forall t \in R$, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento: N'(t) > 0 \Rightarrow t\epsilon(4, +\infty).}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento: N'(t) < 0 \Rightarrow t\epsilon(0, 4).}}$$

$$\underline{\boldsymbol{N(t)\ decrece\ los\ cuatro\ primeros\ años\ y\ crece\ el\ resto\ del\ tiempo.}}$$

b) $N(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 50 = 16 - 32 + 50 = 34.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ mínimo\ número\ de\ aves\ del\ parque\ se\ produce\ el\ cuarto\ año.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ menor\ número\ de\ aves\ en\ el\ parque\ es\ de\ 3.400.}}$$

$c)$ $$N(t)=50 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} t^2-8t+50=50 \to t\in[0,10) \\ 95-\frac{250}{t}=50 \to t\in(10,+\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} t^2-8t+50=50;\ \ t^2-8t=0;\ \ t(t-8)=0 \Rightarrow t_1=0, t_2=8 \\ 95-\frac{250}{t}=50;\ \ \frac{250}{t}=45;\ \ t=\frac{250}{45}=\frac{50}{9}=5{,}5 \notin (10,+\infty) \end{matrix}\right\}.$$

$$N(t)=75 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} t^2-8t+50=75 \to t\in[0,10) \\ 95-\frac{250}{t}=75 \to t\in(10,+\infty) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} t^2-8t-25=0;\ \ t=\frac{8\pm\sqrt{64+100}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{164}}{2} \Rightarrow t\notin[0,10) \\ 95-\frac{250}{t}=75;\ \ \frac{250}{t}=20;\ \ t=\frac{250}{20} \Rightarrow t=12{,}5 \end{matrix}\right\}.$$

El parque tiene entre 5.000 y 7.500 aves entre los años 8 y 12,5.

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(95-\frac{250}{t}\right)=95.$$

Con el tiempo se estabilizan las aves en el parque en 9.500.

4º) Dada la función $f(x) = x^3 - ax^2 + 8x$.

a) Calcule el valor del parámetro a teniendo en cuenta que la función $f(x)$ presenta un punto de inflexión en $x = 2$.

b) Para $a = 6$, calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.

Solución

a) Una función polinómica tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada y es distinta de cero la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + 8. \qquad f''(x) = 6x - 2a. \qquad f'''(x) = 6 \neq 0.$$

$$f''(2) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 2 - 2a = 0;\ \ 6 - a = 0 \Rightarrow a = 6.$$

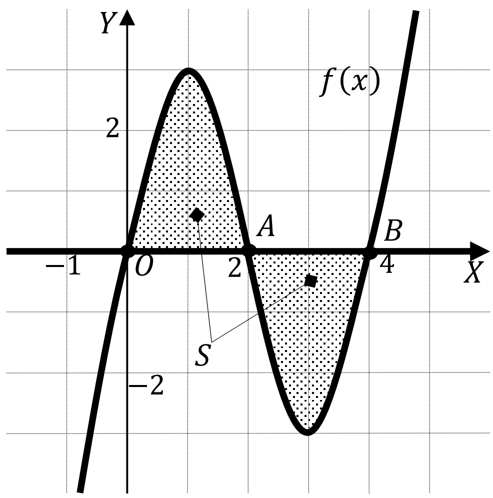
$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ tiene\ un\ punto\ de\ inflexión\ en\ x = 2\ para\ a = 6.}}$$

b) Para $a = 6$ la función resulta $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, cuyos puntos de corte con el eje X son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0;\ \ x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0;\ \ x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 3 \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \rightarrow A(2,0) \\ x_3 = 4 \rightarrow B(4,0) \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta que $f(1) = 3 > 0$, la representación gráfica, aproximada, de la función, donde se sombrea la superficie a calcular, es la que se indica en la figura adjunta.



$$S = \int_0^2 f(x) \cdot dx + \int_4^2 f(x) \cdot dx =$$

$$= [F(x)]_0^2 + [F(x)]_4^2 =$$

$$= F(2) - F(0) + F(2) - F(4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2 \cdot F(2) - F(0) - F(4). \quad (*)$$

$$F(x) = \int (x^3 - 6x^2 + 8x) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + C = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 + C.$$

Sustituyendo el valor obtenido de $F(x)$ en la expresión (*):

$$S = 2 \cdot \left(\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2\right) - 0 - \left(\frac{4^4}{4} - 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2\right) =$$

$$= 2 \cdot (4 - 16 + 16) - 64 + 128 - 64 = 8 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 8\ u^2}}.$$

5º) Un estudio revela que 2 de cada 5 habitantes de una determinada población son menores de 30 años, el 70 % de los habitantes realizan ejercicio físico con regularidad y el 30 % de los habitantes son menores de 30 años y realizan ejercicio físico con regularidad.

a) ¿Qué porcentaje de la población ni es menor de 30 años ni realiza ejercicio físico con regularidad?

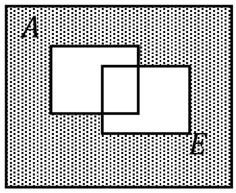
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un habitante que no realiza ejercicio físico con regularidad sea menor de 30 años?

c) ¿Son independientes los sucesos ser menor de 30 años y realizar ejercicio físico con regularidad?

Solución

Sea $A\ y\ E$ los sucesos "tener menos de 30 años" y "hacer deporte regularmente", respectivamente.

$Datos: P(A) = \frac{2}{5} = 0{,}4;\ \ P(E) = 0{,}7;\ \ P(A \cap E) = 0{,}3.$



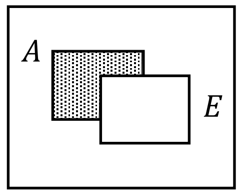
$P(\overline{A} \cap \overline{E}) = 1 - P(A \cup E)$

a) $P = P(\overline{A} \cap \overline{E}) = 1 - P(A \cup E) =$

$= 1 - [P(A) + P(E) - P(A \cap B)] = 1 - (0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}3) =$

$= 1 - 0{,}8 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{P = P(\overline{A} \cap \overline{E}) = 0,2.}}$$



$P(A \cap \overline{E}) = P(A) - P(A \cap E)$

b) $P = (A/\overline{E}) = \frac{P(A \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{P(A) - P(A \cap E)}{1 - P(E)} = \frac{0{,}4 - 0{,}3}{1 - 0{,}7} =$

$= \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{P = P(A/\overline{E}) = \frac{1}{3} = 0,3333.}}$$

c) Dos sucesos A y E son independientes cuando $P(A \cap E) = P(A) \cdot P(E)$:

$P(A) \cdot P(E) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28 \neq P(A \cap E).$

<u>Por lo expuesto anteriormente los sucesos A y B no son independientes.</u>

6º) Tomamos una muestra aleatoria de 36 facturas de consumo mensual de luz (en euros) y el intervalo de confianza obtenido al 95 % para el consumo mensual medio es $[60{,}1; 69{,}9]$. Según esta información:

a) ¿Cuál fue el consumo medio muestral de luz?

b) ¿Cuál es el error máximo cometido?

c) Determine un intervalo de confianza al 90 % para el consumo medio de luz.

Solución

a) $\quad \overline{x} = \frac{69{,}9+60{,}1}{2} = \frac{130}{2} = 65.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ consumo\ de\ luz\ medio\ muestral\ fue\ de\ 65\ euros}}.$$

b) $\quad E = \frac{69{,}9-60{,}1}{2} = \frac{9{,}8}{2} = 4.9.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ error\ máximo\ cometido\ es\ de\ 4{,}9\ euros}}.$$

c) Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha = 0{,}90 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}90 = 0{,}1 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$

$(1-0{,}05 = 0{,}9500 \ \rightarrow z = 1{,}645).$

Datos: $n = 36$; $\overline{x} = 65$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Nos falta la desviación típica. Se puede obtener teniendo en cuenta que para un nivel de confianza del 95 % el error máximo es $E = 4{,}9$.

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$

$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$

$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{z_{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{4{,}9\cdot\sqrt{36}}{1{,}96} = \frac{29{,}4}{1{,}96} \Rightarrow \sigma = 15.$

Ahora ya se puede obtener el intervalo de confianza pedido.

$\left(65 - 1{,}645 \cdot \frac{15}{\sqrt{36}};\ 65 + 1{,}645 \cdot \frac{15}{\sqrt{36}}\right);\ (65 - 1{,}645 \cdot 2{,}5;\ 65 + 1{,}645 \cdot 2{,}5);$

$(65 - 4{,}1125;\ 65 + 4{,}1125).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{90\,\%} = (60{,}8875;\ 69{,}1125)}}.$$

CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 6 preguntas, de las que puede realizar un máximo de 3, combinadas como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, solo se corregirán los 3 primeros realizados.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Para dos matrices A y B se verifica que: $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ y $2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Calcule las matrices A y B.

b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcule su valor.

2º) En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1.500 euros y el de cada motor de coche de 2.000 euros.

a) Planee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

3º) Los costes de una empresa, en cientos de miles de euros, vienen dados por la función $C(t) = t^3 - \frac{21}{2}t^2 + 30t - 12$, siendo t el tiempo en años y $1 \leq t \leq 6$.

a) Calcule los costes máximos alcanzados. ¿En qué momento se producen?

b) Estudie el crecimiento y decrecimiento de los costes. Determine el coste mínimo y en qué momento se alcanza.

c) ¿Cuáles son los costes al inicio y al final del periodo en estudio?

4º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & si \;\; x \leq 1 \\ 2x - a & si \;\; x > 1 \end{cases}$.

a) Calcule el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en todo R.

b) Para $a = 2$, calcule los extremos relativos de la función $f(x)$ y represéntala.

c) Calcule el área de la región delimitada por la función $f(x)$, para $a = 2$, y las rectas $y = 0, x = 0$ y $x = 2$.

5º) Un estudio revela que el 70 % de las personas de una población sigue la serie de televisión A, el 60 % sigue la serie B y el 30 % sólo sigue la serie A.

a) ¿Qué porcentaje de la población sigue las dos series?

b) Si elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que siga alguna de las dos series?

c) Si elegimos al azar una persona que sigue la serie A, ¿cuál es la probabilidad de que siga también la serie B?

6º) Se sabe que la edad de los trabajadores en las fábricas de una zona sigue una distribución normal de desviación típica 10 años. Con una muestra de trabajadores de la zona el intervalo de confianza al 90 % para la media de edad obtenido es $(39{,}25; 44{,}75)$:

a) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra utilizada?

b) ¿Cuánto vale la media muestral?

c) ¿Cuál sería el error cometido a un nivel de confianza del 95 %?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Para dos matrices A y B se verifica que: $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ y $2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule las matrices A y B.

$b)$ Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcule su valor.

Solución

$$a) \quad \left.\begin{array}{l} A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{array}{l} A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2A + 2B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \\ 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 3B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}}.$$

$b)$ $A \cdot X - B = X;\ \ A \cdot X - X = B;\ \ A \cdot X - X \cdot I = B;\ \ (A - I) \cdot X = B;$

$(A - I)^{-1} \cdot (A - I) \cdot X = (A - I)^{-1} \cdot B;\ \ I \cdot X = (A - I)^{-1} \cdot B \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X = (A - I)^{-1} \cdot B}.$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La inversa de la matriz $(A - I)$ es la siguiente:

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3;\ \ (A - I)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ (A - I)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A-I)^t}{|A-I|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{3} \Rightarrow\ (A - I)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A - I)^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} \end{pmatrix}}.$$

2º) En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1.500 euros y el de cada motor de coche de 2.000 euros.

$a)$ Planee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.

$b)$ Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

$c)$ Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

Solución

$a)$ Sean x e y el número de motores para motos y para coches que se ensamblan en la empresa, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} 60x+45y \le 60\cdot 120 \to Manual \\ 20x+40y \le 60\cdot 90 \to Máquina \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x+3y\le 480 \\ x+2y\le 270 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$

$b)$

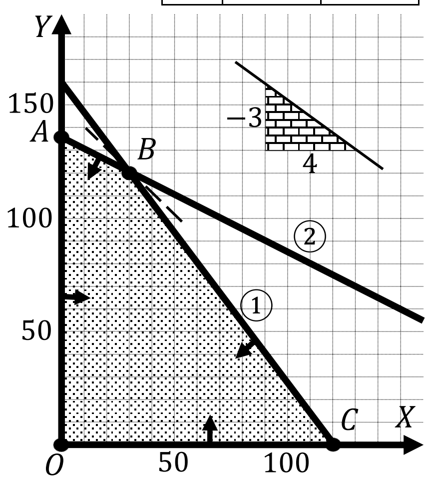
① $\Rightarrow 4x+3y\le 480 \Rightarrow y\le \frac{480-4x}{3} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	120
y	160	0

② $\Rightarrow x+2y\le 270 \Rightarrow y\le \frac{270-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	270
y	135	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=270 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=270;\ \ y=135 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{A(0,135)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y=480 \\ x+2y=270 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -4x-3y=-480 \\ 4x+8y=1.080 \end{array}\right\} \Rightarrow 5y=600;\ \ y=120;$

$x+240=270;\ \ x=30 \Rightarrow \underline{B(30,120)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 4x+3y=480 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x=480;\ \ x=120 \Rightarrow \underline{C(120,0)}.$

$c)$ La función objetivo es $f(x,y)=1.500x+2.000y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 135) = 1.500 \cdot 0 + 2.000 \cdot 135 = 0 + 270.000 = 270.000.$

$B \Rightarrow f(30, 120) = 1.500 \cdot 30 + 2.000 \cdot 120 = 45.000 + 240.000 = 285.000.$

$C \Rightarrow f(120, 0) = 1.500 \cdot 120 + 2.000 \cdot 0 = 180.000 + 0 = 180.000.$

El valor máximo se produce en el punto $B(30, 120)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 1.500x + 2.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1.500}{2.000}x = -\frac{3}{4}x \Rightarrow m = -\frac{3}{4}.$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ es\ máximo\ ensamblando\ 30\ motores\ de\ motos\ y\ 120\ de\ coche.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 285.000\ euros.}}$

3º) Los costes de una empresa, en cientos de miles de euros, vienen dados por la función $C(t) = t^3 - \frac{21}{2}t^2 + 30t - 12$, siendo t el tiempo en años y $1 \leq t \leq 6$.

a) Calcule los costes máximos alcanzados. ¿En qué momento se producen?

b) Estudie el crecimiento y decrecimiento de los costes. Determine el coste mínimo y en qué momento se alcanza.

c) ¿Cuáles son los costes al inicio y al final del periodo en estudio?

Solución

a) Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$C'(t) = 3t^2 - 21t + 30.$

$C'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 21t + 30;\;\; t^2 - 7t + 10 = 0;\;\; t = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = 5.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$C''(x) = 6t - 21.$

$C''(2) = 6 \cdot 2 - 21 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ t = 2.$

$\underline{\boldsymbol{El\ coste\ es\ máximo\ se\ produce\ a\ los\ 2\ años}}.$

$C(2) = 2^3 - \frac{21}{2} \cdot 2^2 + 30 \cdot 2 - 12 = 8 - 43 + 60 - 12 = 68 - 55 = 13.$

$\underline{\boldsymbol{El\ coste\ máximo\ es\ de\ 130.000\ euros}}.$

b) $C''(5) = 6 \cdot 5 - 21 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ t = 5.$

$\underline{\boldsymbol{El\ coste\ mínimo\ se\ produce\ a\ los\ 5\ años}}.$

$C(5) = 5^3 - \frac{21}{2} \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 - 12 = 125 - \frac{525}{2} + 150 - 12 =$

$= 275 - 262{,}5 - 12 = 275 - 274{,}5 = 0{,}5.$

$\underline{\boldsymbol{El\ coste\ máximo\ es\ de\ 50.000\ euros}}.$

Teniendo en cuanta que la función costes es polinómica, por lo cual, es continua en su dominio, y considerando los puntos máximo y mínimo, se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$\underline{\boldsymbol{Crecimiento: C'(t) > 0 \Rightarrow t \epsilon (1, 2) \cup (5, 6)}}.$

$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento: C'(t) < 0 \Rightarrow t \epsilon (2, 5)}}.$

c) $C(1) = 1^3 - \frac{21}{2} \cdot 1^2 + 30 \cdot 1 - 12 = 1 - \frac{21}{2} + 30 - 12 = 31 - 10{,}5 - 12 =$

$= 31 - 23{,}5 = 8{,}5.$

$$C(6) = 6^3 - \frac{21}{2} \cdot 6^2 + 30 \cdot 6 - 12 = 216 - 378 + 180 - 12 =$$

$$= 396 - 390 = 6.$$

$$\underline{\boldsymbol{Coste\ inicial: 850.000\ euros;\ \ coste\ final: 600.000\ euros.}}$$

4º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & si\ \ x \leq 1 \\ 2x - a & si\ \ x > 1 \end{cases}$.

$a)$ Calcule el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en todo R.

$b)$ Para $a = 2$, calcule los extremos relativos de la función $f(x)$ y represéntala.

$c)$ Calcule el área de la región delimitada por la función $f(x)$, para $a = 2$, y las rectas $y = 0, x = 0$ y $x = 2$.

Solución

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(-x^2 + 1) = 0 = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(2x - a) = 2 - a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 0 = 2 - a \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a = 2}}.$$

$b)$ Para $a = 2$ la función es: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & si\ \ x \leq 1 \\ 2x - 2 & si\ \ x > 1 \end{cases}$.

En el intervalo $(-\infty, 1]$ la función es la parábola $g(x) = -x^2 + 1$, que es cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, y cuyo vértice es el siguiente:

$g'(x) = -2x = 0 \Rightarrow x = .$

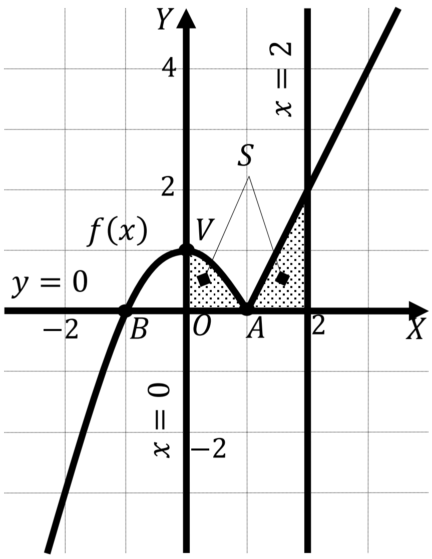
$g(0) = 1 \Rightarrow V(0, 1)$, que es un máximo relativo de la función.

Los puntos de corte con el eje X son los siguientes:

$g(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1$, que dan lugar a los puntos $A(1, 0)\ y\ B(-1, 0)$.

Nótese que el punto $A(1, 0)$ constituye un mínimo relativo de la función.

En el intervalo $[1, +\infty$ la función es la recta $h(x) = 2x - 2$ de pendiente $m = 2$ y que contiene al punto $A(1, 0)$.



La representación gráfica de la situación, de forma aproximada, se expresa en la figura anterior, donde se ha sombreado la superficie a calcular.

$$S = \int_0^1 (-x^2 + 1) \cdot dx + \int_1^2 (2x - 2) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 + \left[\frac{2x^2}{2} - 2x\right]_1^2 =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 + [x^2 - 2x]_1^2 = \left(-\frac{1^3}{3} + 1\right) - 0 + (2^2 - 2 \cdot 2) - (1^2 - 2 \cdot 1) =$$

$$= -\frac{1}{3} + 1 + 4 - 4 - 1 + 2 = 2 - \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{S = \frac{5}{3}\ u^2 = 1{,}67\ u^2}.$$

5º) Un estudio revela que el 70 % de las personas de una población sigue la serie de televisión A, el 60 % sigue la serie B y el 30 % sólo sigue la serie A.

a) ¿Qué porcentaje de la población sigue las dos series?

b) Si elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que siga alguna de las dos series?

c) Si elegimos al azar una persona que sigue la serie A, ¿cuál es la probabilidad de que siga también la serie B?

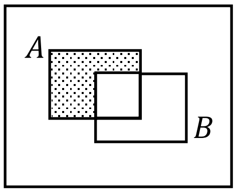
Solución

$$Datos: \ P(A) = 0{,}70; \ \ P(B) = 0{,}60; \ \ P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}30.$$

a) $\quad P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}30 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) - 0{,}30 = 0{,}70 - 0{,}30 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P(A \cap B) = 0,40}}.$$



$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B)$

b) $P = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P(A \cup B) = 0,90}}.$$

c) $\quad P = P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}40}{0{,}70} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{P(B/A) = 0,5714}}.$$

6º) Se sabe que la edad de los trabajadores en las fábricas de una zona sigue una distribución normal de desviación típica 10 años. Con una muestra de trabajadores de la zona el intervalo de confianza al 90 % para la media de edad obtenido es $(39{,}25; 44{,}75)$:

a) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra utilizada?

b) ¿Cuánto vale la media muestral?

c) ¿Cuál sería el error cometido a un nivel de confianza del 95 %?

Solución

$a, b)$ $\quad \overline{x} = \frac{44{,}75+39{,}25}{2} = \frac{84}{2} \Rightarrow \underline{\overline{x} = 42}. \qquad E = \frac{44{,}75-39{,}25}{2} = \frac{5{,}5}{2} = 2{,}75.$

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha = 0{,}90 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$

$(1 - 0{,}05 = 0{,}9500 \ \rightarrow z = 1{,}645).$

Datos: $\overline{x} = 42; \ \ \sigma = 10; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645; \ \ E = 2{,}75.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E} = \frac{1{,}645 \cdot 10}{2{,}75} = \frac{16{,}45}{2{,}75} = 5{,}9818 \Rightarrow.$

$\Rightarrow n = 5{,}9818^2 = 35{,}78.$

$\underline{\boldsymbol{El\ tama\tilde{n}o\ de\ la\ muestra\ ha\ sido\ 36}}.$

c) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$

$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $\overline{x} = 42; \ \ \sigma = 10; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96; \ \ n = 36.$

$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{36}} = \frac{19{,}6}{6} \Rightarrow$

$\underline{\boldsymbol{E \cong 2{,}27\ a\tilde{n}os}}.$