# Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

# Selectividad 2022

# Comunidad autónoma de

# MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

| | | |
|---|---|---|
| | EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL<br>CURSO: **2021–2022**<br>**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II** | CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO |

**INSTRUCCIONES GENERALES**

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

**TIEMPO:** 90 minutos.

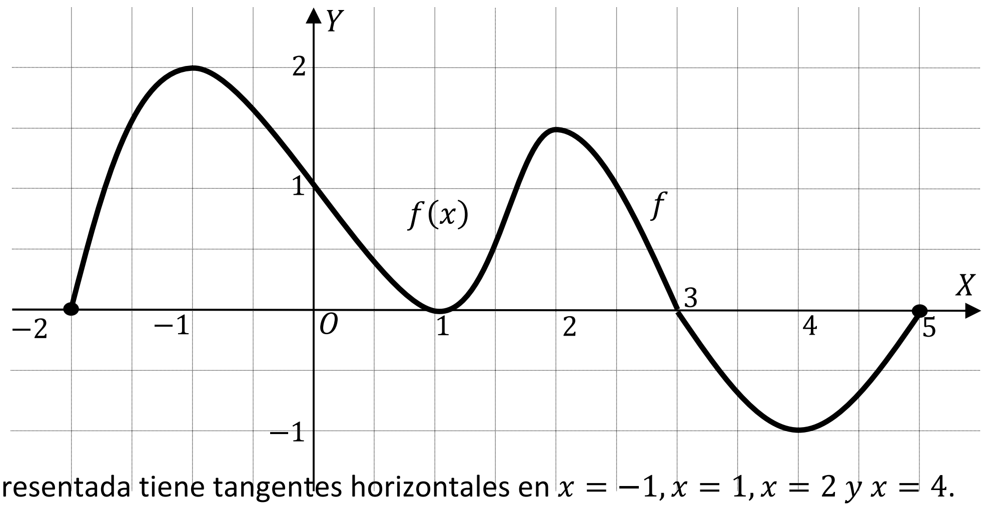
1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$:

$a)$ Determine los valores del parámetro real $a$ para los cuales la matriz A es invetible.

$b)$ Calcule $A^{-1}$ para $a = 1$.

2º) El dueño de una empresa que organiza fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche, y por cada litro de leche debe echar como máximo 1,6 litros de chocolate. Además, solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de un euro y por cada litro de chocolate un beneficio de 2 euros. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

3º) La figura dada representa la gráfica de cierta función $f$.




La gráfica representada tiene tangentes horizontales en $x = -1, x = 1, x = 2$ y $x = 4$.

$a)$ Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x) > 0$.

$b)$ Determine razonadamente cuál es el signo de $\int_{-2}^{5} f(x) \cdot dx$.

4º) Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatoria tales que $P(A) = 0{,}6$, $P(A/B) = 0{,}4$ y $P(A/B^c) = 0{,}8$, siendo $B^c$ el suceso complementario de B.

$a)$ Calcule $P(B)$.  $b)$ ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.



BY NC SA

Textos Marea Verde

5º) Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.

$a)$ Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99 % para el peso medio de un saco de cemento.

$b)$ Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kg, con un nivel de confianza del 90 %.

6º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+ay+z=a \\ ax-y-az=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro $a \in R$.

$a)$ Discuta la compatibilidd del sistema para los diferentes valores de $a$.

$b)$ Resuelva el sistema para $a=2$.

7º) Considere la función real de variable real $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$:

$a)$ Determine sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

$b)$ Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

8º) Un escultor quiere dividir un alambre muy fino en dos trozos que se utilizarán para delimitar, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo cuya base debe medir el doble que su altura. Posteriormente, se fabricarán ambas figuras planas con un material que cuesta 16 céntimos de euro/cm$^2$ para el cuadrado y 10 céntimos de euro/cm$^2$ para el rectángulo. Si el alambre inicial mide 450 cm, determine la función de coste total de ambas figuras. Obtenga la longitud de cada trozo de alambre para que el coste total de estas piezas sea mínimo.

Sugerencia: Exprese el coste total en función de la altura del rectángulo y utilice 3 decimales para realizar cálculos.

9º) Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.

$a)$ Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.

$b)$ Si la cara observada no es de diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

10º) Considere la población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media $\mu$ y desviación típica $\sigma$. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

$a)$ Determine el valor de $\sigma$ sabiendo que $I=(58{,}2; 73{,}8)$ es un intervalo de confianza del 95 % para $\mu$.

$b)$ Si $\sigma=20$, calcule $P\left(-10<\overline{X}-\mu<10\right)$.


Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

# RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$:

$a$) Determine los valores del parámetro real $a$ para los cuales la matriz A es invetible.

$b$) Calcule $A^{-1}$ para $a = 1$.

***Solución***

$a$) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -2 + a^2 - 2a = 0;\ \ a^2 - 2a - 2 = 0;\ \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow a_1 = 1 - \sqrt{3}, a_2 = 1 + \sqrt{3}.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ es\ invertible}\ \forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R} - \left\{\mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{3}}, \mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{3}}\right\}.}$$

$b$) Para $a = 1$ la matriz resulta $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que es invertible por ser su determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 - 2 = -3. \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}}{-3} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}.$$


BY NC SA

2º) El dueño de una empresa que organiza fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche, y por cada litro de leche debe echar como máximo 1,6 litros de chocolate. Además, solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de un euro y por cada litro de chocolate un beneficio de 2 euros. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

***Solución***

Sean $x$ e $y$ el número de litros de leche y chocolate que se utilizan, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} x \leq 2y \\ y \leq 1{,}6x \\ x + y \leq 45 \\ 30 \geq x \geq 0;\, 20 \geq y \geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y \geq 0{,}5x \\ y \leq 1{,}6x \\ x + y \leq 45 \\ 30 \geq x \geq 0;\, 20 \geq y \geq 0 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow y \geq 0{,}5x \Rightarrow P(10, 0) \rightarrow No.$

| | | |
|---|---|---|
| **x** | 0 | 40 |
| **y** | 0 | 20 |

$② \Rightarrow y \leq 1{,}6x \Rightarrow P(10, 0) \rightarrow Si.$

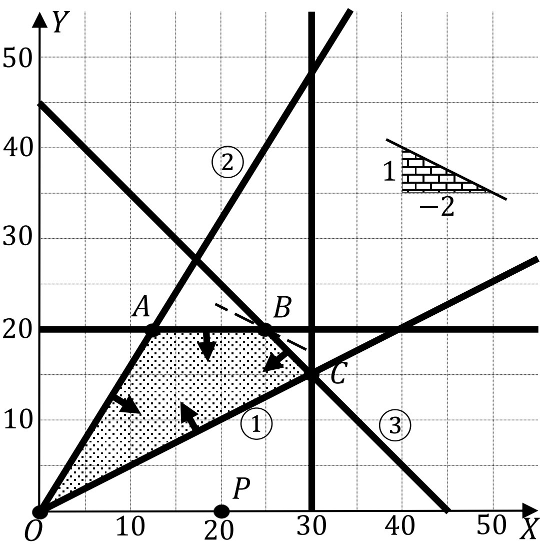
| | | |
|---|---|---|
| **x** | 0 | 25 |
| **y** | 0 | 40 |

$③ \Rightarrow x + y \leq 45 \Rightarrow y \leq 45 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

| | | |
|---|---|---|
| **x** | 0 | 45 |
| **y** | 45 | 0 |

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:




$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 1{,}6x \\ y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{20}{1{,}6} = 12{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(12'5, 20).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 45 \\ y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow B(25, 20).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 45 \\ x = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow C(30, 15).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = x + 2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(12'5, 20) = 1 \cdot 12{,}5 + 2 \cdot 20 = 12{,}5 + 20 = 32{,}5.$

$B \Rightarrow f(25, 20) = 1 \cdot 25 + 2 \cdot 20 = 25 + 40 = 65.$

$C \Rightarrow f(30, 15) = 1 \cdot 30 + 2 \cdot 15 = 30 + 30 = 60.$

El máximo se produce en el punto $B(25, 20)$.

También se hubiera obtenido el punto $B$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.


BY NC SA

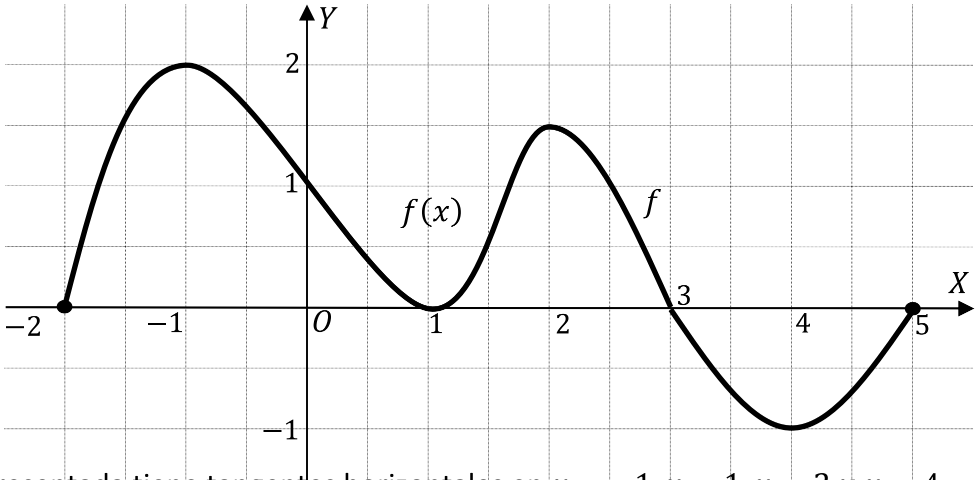
$$f(x,y) = x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ mezclando\ 25\ litros\ de\ leche\ y\ 20\ de\ chocolate}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 65\ euros}}.$$


Textos Marea Verde

3º) La figura dada representa la gráfica de cierta función $f$.




La gráfica representada tiene tangentes horizontales en $x = -1, x = 1, x = 2$ y $x = 4$.

$a$) Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x) > 0$.

$b$) Determine razonadamente cuál es el signo de $\int_{-2}^{5} f(x) \cdot dx$.

***Solución***

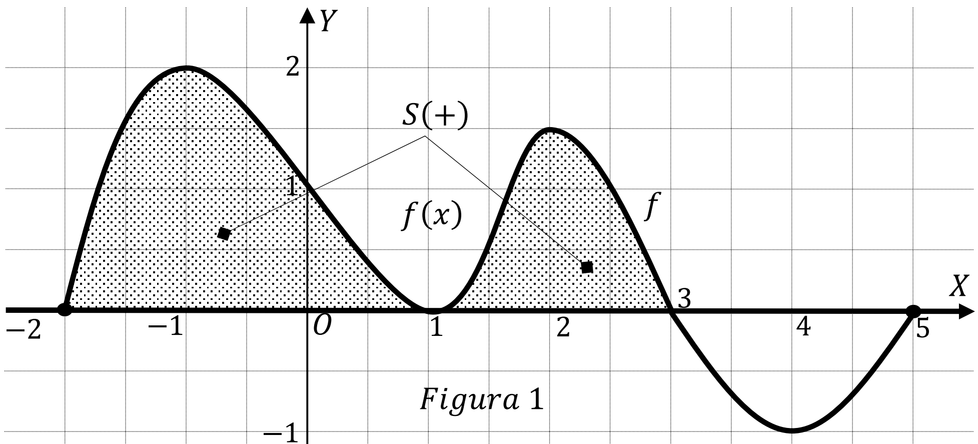
$a$) Un función $f(x)$ es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

De la observación de la figura se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: \boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-2, -1) \cup (1, 2) \cup (4, 5)}}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-1, 1) \cup (2, 4)}.$$

$b$)




$Figura\ 1$

Nótese que una integral definida no es, necesariamente, el área de la zona limitada por la función y el eje de abscisas en el intervalo que determinan los límites de integración ya que, cuando todas las ordenadas de la función son positivas el valor de la integral definida es positiva y cuando las ordenadas de la función son negativas, el valor de la integral definida es negativa.



Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

La figura 1 expresa superficie que resulta positiva al resolver la integral definida entre sus extremos, es decir: $S(+) = \int_{-2}^{3} f(x) \cdot dx$.

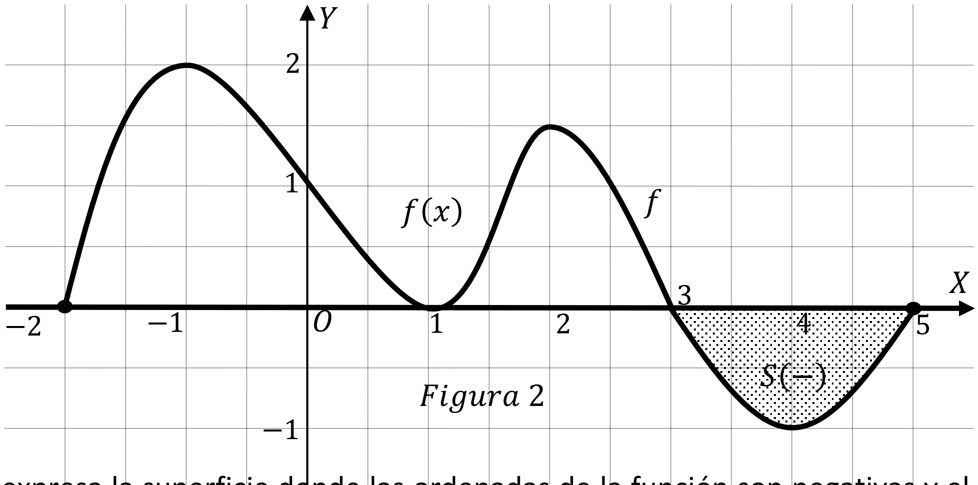



*Figura 2*

La figura 2 expresa la superficie donde las ordenadas de la función son negativas y el valor de la integral sería: $S(-) = \int_{3}^{5} f(x) \cdot dx$.

De la observación de las figuras se deduce que la superficie positiva es bastante mayor que la negativa y, en consecuencia:

$$\underline{\boldsymbol{\int_{-2}^{5} f(x) \cdot dx > 0.}}$$

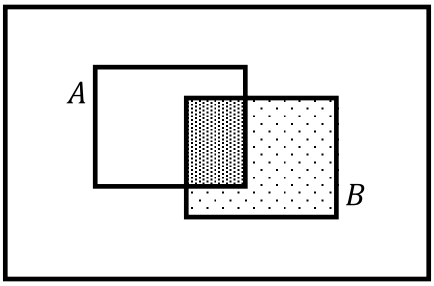


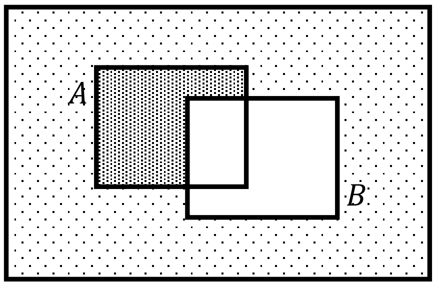
BY NC SA

4º) Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatoria tales que $P(A) = 0,6$, $P(A/B) = 0,4$ y $P(A/B^c) = 0,8$, siendo $B^c$ el suceso complementario de B.

$a)$ Calcule $P(B)$. $b)$ ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

***Solución***




$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0,4.$ (1) $P(A/B^c) = \frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(B^c)} = 0,8.$ (2)

$a)$ De la expresión (1): $P(A \cap B) = 0,4 \cdot P(B)$.

Sustituyendo en (2) el valor obtenido $P(A \cap B) = 0,4 \cdot P(B)$ y teniendo en cuanta que $P(B^c) = 1 - P(B)$:

$\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(B^c)} = 0,8;\ \frac{0,6-0,4\cdot P(B)}{1-P(B)} = 0,8;\ 0,6 - 0,4 \cdot P(B) = 0,8 \cdot [1 - P(B)].$

Multiplicando los dos términos por 5: $3 - 2 \cdot P(B) = 4 \cdot [1 - P(B)]$;.

$3 - 2 \cdot P(B) = 4 - 4 \cdot P(B);\ 2 \cdot P(B) = 1;\ P(B) = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{P(B) = 0,5}.$

$b)$ A y B son independientes cuando se cumple: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Del apartado anterior: $P(A \cap B) = 0,4 \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,5 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,2$.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow 0,2 \neq 0,6 \cdot 0,5$.

***Por lo expuesto anteriormente los sucesos A y B no son independientes.***


Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

5º) Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.

$a$) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99 % para el peso medio de un saco de cemento.

$b$) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kg, con un nivel de confianza del 90 %.

***Solución***

$a$) Para un nivel de confianza del 99 % es:

$$1-\alpha=0{,}99 \rightarrow \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}575.$$

$(1-0{,}005=0{,}9950 \rightarrow z=2{,}575)$.

Datos: $n=20$; $\overline{x}=50$; $\sigma=2$; $z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(50-2{,}575\cdot\frac{2}{\sqrt{20}};\ 50+2{,}575\cdot\frac{2}{\sqrt{20}}\right);$$

$(50-2{,}575\cdot 0{,}4472;\ 50+2{,}575\cdot 0{,}4472)$; $(50-1{,}1516;\ 50+1{,}1516) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{I.C._{99\,\%}=(48{,}8484;\ 51{,}1516).}}$$

$b$) Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1-\alpha=0{,}90 \rightarrow \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$$

$(1-0{,}05=0{,}9500 \rightarrow z=1{,}645)$.

Datos: $\sigma=2$; $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645$; $E=1$.

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}645\cdot\frac{2}{1}\right)^2=$

$=(1{,}645\cdot 2)^2=3{,}29^2=10{,}82.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 11\ sacos.}}$$


Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

6º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+ay+z=a \\ ax-y-az=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro $a \in R$.

$a)$ Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de $a$.

$b)$ Resuelva el sistema para $a=2$.

***Solución***

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ a & -1 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro $a$ es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1+a-a^2+1+a-a^2=0;\ \ 2a^2-2a=0;$$

$a^2-a=0;\ \ a(a-1)=0 \Rightarrow a_1=0, a_2=1.$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ \left\{\begin{array}{l} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_3\} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a=0 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}}$$

$b)$ Para $a=2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=2 \\ 2x-y-2z=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-2-4+1+4}{-1+2-4+1+2-4}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{2-4+2-4}{-4}=\frac{-4}{-4}=1.$$



Textos Marea Verde

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-1+4+2-4}{-4} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n}: \boldsymbol{x = \frac{1}{4},\ \ y = 1,\ \ z = -\frac{1}{4}}.}$$


BY NC SA

7º) Considere la función real de variable real $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$:

$a$) Determine sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

$b$) Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

***Solución***

$a$) Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando $x$ tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+12}{x-1}=\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de $x$ que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x-1=0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ x=1\ es\ asíntota\ vertical}}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$, con $m$ finito y $m\neq 0$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-x+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-x}=1.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1-x^2+x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0.$$

$$\underline{\boldsymbol{Asíntota\ oblicua}: \boldsymbol{y=x}}.$$

$b$) $$f'(x)=\frac{(2x-1)\cdot(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\Rightarrow \underline{f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}}.$$

$$f'(2)=\frac{2\cdot(2-2)}{(2-1)^2}=\frac{2\cdot 0}{1}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{f'(2)=0}}.$$


Textos Marea Verde

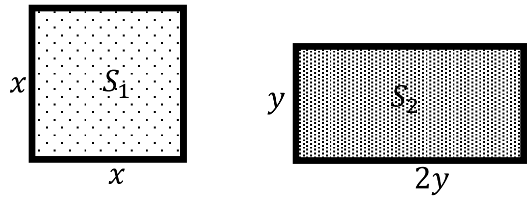
8º) Un escultor quiere dividir un alambre muy fino en dos trozos que se utilizarán para delimitar, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo cuya base debe medir el doble que su altura. Posteriormente, se fabricarán ambas figuras planas con un material que cuesta 16 céntimos de euro/cm$^2$ para el cuadrado y 10 céntimos de euro/cm$^2$ para el rectángulo. Si el alambre inicial mide 450 cm, determine la función de coste total de ambas figuras. Obtenga la longitud de cada trozo de alambre para que el coste total de estas piezas sea mínimo.

Sugerencia: Exprese el coste total en función de la altura del rectángulo y utilice 3 decimales para realizar cálculos.

***Solución***

$4x + 2y + 4y = 450; \;\; 4x + 6y = 450;$

$2x + 3y = 225 \Rightarrow y = \frac{225-2x}{3}.$




$S = S_1 + S_2 = x^2 + y \cdot 2y = x^2 + 2y^2 = x^2 + 2 \cdot \left(\frac{225-2x}{3}\right)^2 =$

$= x^2 + \frac{2}{9}(225 - 2x)^2.$

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$S'(x) = 2x + \frac{4}{9} \cdot (225 - 2x) \cdot (-2) = 0; \;\; x - \frac{4}{9}(225 - 2x) = 0;$

$9x - 4(225 - 2x) = 0; \;\; 9x - 900 + 8x = 0; \;\; 17x = 900; \;\; x = \frac{900}{17} \Rightarrow x = 52{,}94.$

$y = \frac{225-2x}{3} = \frac{225-2\cdot 52{,}94}{3} = \frac{225-105{,}88}{3} = \frac{119{,}12}{3} \Rightarrow y = 39{,}71.$

$\underline{\boldsymbol{La\ superficie\ es\ mínima\ cuando\ los\ trozos\ son\ de\ 52{,}94\ cm\ y\ 39{,}71\ cm.}}$


Textos Marea Verde

9º) Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.

$a$) Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.

$b$) Si la cara observada no es de diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

***Solución***

Se considera la carta eliminada como $C1$ y la carta observada como $C2$.

$a$) La probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de que la carta eliminada sea de diamantes o no sea de diamantes:

$$P = P(D1) \cdot P(D2) + P(\overline{D1}) \cdot P(D2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{51} + \frac{3}{4} \cdot \frac{13}{51} = \frac{12+39}{4 \cdot 51} = \frac{51}{4 \cdot 51} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P = \frac{1}{4} = 0,25.}}$$

$b$) Si la cara observada no es de diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

$$P = P\left(\overline{D1}/\overline{D2}\right) = \frac{P(\overline{D1} \cap \overline{D2})}{P(\overline{D2})} = \frac{\frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51}}{\frac{39}{52}} = \frac{38}{51} \Rightarrow \underline{P = 0,7451}.$$



Textos Marea Verde

10º) Considere la población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media $\mu$ y desviación típica $\sigma$. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

$a)$ Determine el valor de $\sigma$ sabiendo que $I = (58{,}2; 73{,}8)$ es un intervalo de confianza del 95 % para $\mu$.

$b)$ Si $\sigma = 20$, calcule $P(-10 < \overline{X} - \mu < 10)$.

***Solución***

$a)$ Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$$

$$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \rightarrow z = 1{,}96).$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Datos: $n = 10$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

$$\left(\overline{x} - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}};\ \overline{x} + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}}\right) = (58{,}2; 73{,}8) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{x} - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 58{,}2 \\ \overline{x} + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 73{,}8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \overline{x} = 132 \Rightarrow \overline{x} = 66. \quad 66 - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 58{,}2;\ 7{,}8 = 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{7{,}8 \cdot \sqrt{10}}{1{,}96} = \frac{24{,}6658}{1{,}96} \Rightarrow \underline{\sigma = 12{,}58}.$$

$b)$ Datos: $n = 10$; $\sigma = 20$.

$X \rightarrow N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu, \frac{20}{\sqrt{10}}\right) = N(\mu, 6{,}32)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{6{,}32}$.

$$P(-10 < \overline{X} - \mu < 10) = P(-10 + \mu < \overline{X} - \mu + \mu < 10 + \mu) =$$

$$= P(-10 + \mu < \overline{X} < 10 + \mu) = P\left(\frac{-10+\mu-\mu}{6{,}32} < Z < \frac{10+\mu-\mu}{6{,}32}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-10}{6{,}32} < Z < \frac{10}{6{,}32}\right) = P(-1{,}58 < Z < 1{,}58) = P(Z < 1{,}58) - P(Z < -1{,}58) =$$

$$= P(Z < 1{,}58) - [1 - P(Z < 1{,}58)] = P(Z < 1{,}58) - 1 + P(Z < 1{,}58) =$$

$$= 2 \cdot 0{,}9429 - 1 = 1{,}8858 - 1 = \underline{0{,}8858}.$$



Textos Marea Verde

| | EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL<br>CURSO: **2021–2022**<br>MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II | CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA |
|---|---|---|

**INSTRUCCIONES GENERALES**

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

**TIEMPO:** 90 minutos.

# CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Sea $a \in R$. Considera las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ e\ Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}:$$

$a)$ Determina los valores del parámetro real $a$ para que A tenga inversa.

$b)$ Calcule, para $a = 1$, la solución del sistema $(A - B) \cdot X = Y$.

2º) Sea S la región del plano definida por: $7y - 8x \leq 3.400$; $3x - 8y \leq 2.000$; $11x + 14y \geq 9.500$; $x \leq 1.200$; $y \leq 1.000$.

$a)$ Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

$b)$ Obtenga el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

3º) Considere las funciones reales de variable real $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + ax + 3$.

$a)$ Se define $h(x)$ de la siguiente manera: $h(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \leq 1 \\ g(x) & si\ x > 1 \end{cases}$. ¿Qué valor debe darle a la constante $a \in R$ para que la función $h$ sea continua en R?

$b)$ Para $a = 1$, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de $f\ y\ g$.

4º) Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatoria es la unión de los sucesos A y B. Esto es, $E = A \cup B$. Además, suponga que $P(A \cap B) = 0{,}2$ y $P(B) = 0{,}7$.

$a)$ Calcule $P(A^c)$

$b)$ Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

Nota: $A^c$ y $B^c$ son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B

5º) Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del 95 % para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo 0,2 y 0,3 los extremos de dicho intervalo.

$a)$ Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.

$b)$ Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?



Textos Marea Verde

6º) Considere el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+ay+z=2 \\ x-az=0 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$ dependiente del parámetro real $a$:

$a$) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de $a$.

$b$) Resuelva el sistema para $a=0$.

7º) $a$) Determine los valores de los parámetros $a, b \in R$ para que la función $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ verifique que $f(2)=4$ $y$ $f'(2)=0$.

$b$) Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x)=x+\frac{1}{x}$.

8º) Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, $I(x)$, en miles de euros, vienen expresados por la función $I(x)=x\cdot\frac{170-0,85x}{5}$, en la que $x$ representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x)=10+2x+x^2$.

$a$) Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda $x$ y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.

$b$) Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $\frac{C(x)}{x}$, no supere los diez mil euros.

Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

9º) Tres amigas (Ana, Berta y Carla) elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30 % de las invitaciones, Berta el 40 % y Carla las restantes. El 2 % de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3 % y 1 %, respectivamente.

$a$) Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.

$b$) Si una invitación no llegó a su destino, ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?

10º) Considere una población donde observamos una variable aleatoria $X$ con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son 157,125 y 182,875.

$a$) Calcule el valor de la media muestral.

$b$) Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál será el nivel de confianza para este intervalo?


Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

# RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Sea $a \in R$. Considera las matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}-a & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\ e\ Y=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}:$$

$a)$ Determina los valores del parámetro real $a$ para que A tenga inversa.

$b)$ Calcule, para $a=1$, la solución del sistema $(A-B)\cdot X=Y$.

***Solución***

$a)$ Una matriz es invertible cuando es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}-a & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}=a+a+a+a=0;\ \ 4a=0;\ \ a=0.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R-\{0\}.}}$$

$b)$ $(A-B)\cdot X=Y;\ \ (A-B)^{-1}\cdot(A-B)\cdot X=(A-B)^{-1}\cdot Y;$

$I\cdot X=(A-B)^{-1}\cdot Y \Rightarrow \underline{X=(A-B)^{-1}\cdot Y}.$

Para $a=1 \Rightarrow A-B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$

Se obtiene la inversa de $(A-B)$ por el método de Gauss-Jordan:

$$(A-B|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}F_1\leftrightarrow F_2\\ F_3\to -F_3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to F_2+2F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{F_2\to -\tfrac{1}{4}F_2\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}F_1\to F_1+2F_2\\ F_2\to F_2+\frac{1}{2}F_3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\Rightarrow(A-B)^{-1}=-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

$$X=(A-B)^{-1}\cdot Y\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 8\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{4}\\ -2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x=-\frac{1}{2}, y=-\frac{5}{4}, z=-2.}}$$



Textos Marea Verde

2º) Sea S la región del plano definida por: $7y - 8x \leq 3.400$; $3x - 8y \leq 2.000$; $11x + 14y \geq 9.500$; $x \leq 1.200$; $y \leq 1.000$.

$a)$ Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

$b)$ Obtenga el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

① $\Rightarrow 7y - 8x \leq 3.400 \Rightarrow y \leq \frac{3.400+8x}{7} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

| x | 100 | 450 |
|---|---|---|
| y | 600 | 1.000 |

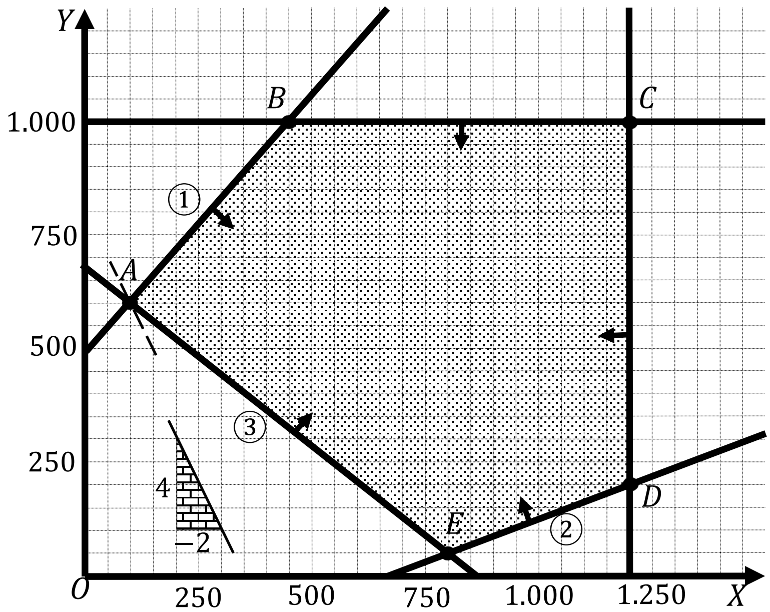
② $\Rightarrow 3x - 8y \leq 2.000 \Rightarrow y \geq \frac{3x-2.000}{8} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

| x | 800 | 1.200 |
|---|---|---|
| y | 50 | 200 |

③ $\Rightarrow 11x + 14y \geq 9.500 \Rightarrow y \geq \frac{9.500-11x}{14} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

| x | 100 | 800 |
|---|---|---|
| y | 600 | 50 |

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.




Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7y - 8x = 3.400 \\ 11x + 14y = 9.500 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -14y + 16x = -6.800 \\ 11x + 14y = 9.500 \end{array}\right\} \Rightarrow 27x = 2.700 \Rightarrow$$

$x = 100$; $7y - 800 = 3.400$; $y = \frac{4.200}{7} = 600 \Rightarrow \underline{A(100, 600)}$.

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 1.000 \\ 7y - 8x = 3.400 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{7.000-3.400}{8} = \frac{3.600}{8} = 450 \Rightarrow \underline{B(450, 1.000)}.$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 1.200 \\ y = 1.000 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(1.200, 1.000)}.$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 1.200 \\ 3x - 8y = 2.000 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{3.600-2.000}{8} = \frac{1.600}{8} = 200 \Rightarrow \underline{D(1.200, 200)}.$$

$b)$ La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 2x + y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(100, 600) = 2 \cdot 100 + 600 = 800.$

$B \Rightarrow f(450, 1.000) = 2 \cdot 450 + 1.000 = 1.900.$

$C \Rightarrow f(1.200, 1.000) = 2 \cdot 1.200 + 1.000 = 3.400.$

$D \Rightarrow f(1.200, 200) = 2 \cdot 1.200 + 200 = 2.600.$

***El valor mínimo de la función es $\mathbf{800}$ y se produce en el punto $A(\mathbf{100}, \mathbf{600})$.***

También se hubiera obtenido el punto $A$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 2x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{1}x \Rightarrow m = -\frac{4}{2}.$


BY NC SA
Textos Marea Verde

3º) Considere las funciones reales de variable real $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + ax + 3$.

$a$) Se define $h(x)$ de la siguiente manera: $h(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \leq 1 \\ g(x) & si\ x > 1 \end{cases}$. ¿Qué valor debe darle a la constante $a \in R$ para que la función $h$ sea continua en R?

$b$) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada del plano que está delimitada por las gráficas de $f\ y\ g$.

***Solución***

$a$) La función resulta ser $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & si\ x \leq 1 \\ -x^2 + ax + 3 & si\ x > 1 \end{cases}$, que es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor de $a$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 - 4x + 3) = 0 = f(1) \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (-x^2 + ax + 3) = a + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 0 = a + 2 \Rightarrow a = -2.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ h(x)\ es\ continua\ en\ R\ para\ a = -2.}}$$

$b$) Para $a = 2$ la función es $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \\ -x^2 + 2x + 3 \end{cases}$.

Las abscisas de los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3;\ \ 2x^2 - 6x = 0;\ \ x^2 - 3x = 0;\ \ x(x - 3) = 0 \Rightarrow$$

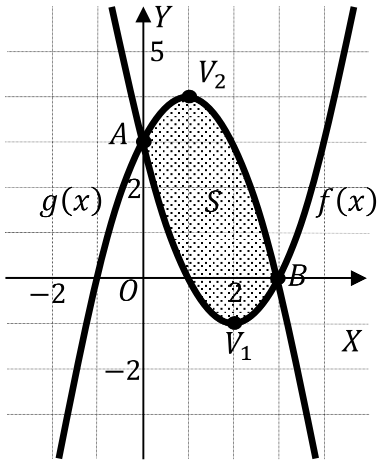
$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$ Los puntos de corte son: $A(0, 3)\ y\ B(3, 0)$.

La parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$, que es convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de $x^2$, tiene su vértice en el punto siguiente:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0;\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow V_1(2, -1).$$

La parábola $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, que es cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de $x^2$, tiene su vértice en el punto siguiente:

$$f'(x) = -2x + 2 = 0;\ -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow V_2(1, 4).$$




La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

Por ser las ordenadas de la parábola $g(x)$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x)$ en el intervalo del área a calcular, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^3 [(-x^2 + 2x + 3) - (x^2 - 4x + 3)] \cdot dx =$$


Textos Marea Verde

$$= \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3 - x^2 + 4x - 3) \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-2x^2 + 6x)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_0^3 = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x^2\right]_0^3 = \left(-\frac{2\cdot 3^3}{3} + 3 \cdot 3^2\right) - 0 =$$

$$= -18 + 27 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 9\, u^2}}.$$

4º) Supongamos que el espacio muestral de cierto experimento aleatoria es la unión de los sucesos A y B. Esto es, $E = A \cup B$. Además, suponga que $P(A \cap B) = 0{,}2$ y $P(B) = 0{,}7$.

$a)$ Calcule $P(A^c)$ $\qquad$ $b)$ Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

Nota: $A^c$ y $B^c$ son, respectivamente, los sucesos complementarios de A y B.

Siendo $E = A \cup B \Rightarrow P(A \cup B) = 1$.

$a)$ $\quad Datos$: $P(A \cap B) = 0{,}2;\ \ P(B) = 0{,}7;\ \ P(A \cup B) = 1.$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

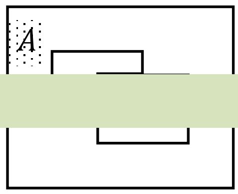
$$\Rightarrow P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0{,}7 + 0{,}2 \Rightarrow P(A) = 0{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}5 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(A^c) = 0,5.}}$$

$b)$ $P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P(A^c \cup B^c) = 0,8.}}$$




$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B)$

5º) Una muestra de tornillos, tomada de una compañía encargada de fabricarlos, ha permitido obtener un intervalo de confianza del 95 % para estimar la proporción de tornillos con defectos de fabricación, siendo 0,2 y 0,3 los extremos de dicho intervalo.

$a$) Estime la proporción de tornillos con defectos de fabricación a partir de esa muestra y dé una cota del error de estimación al nivel de confianza considerado.

$b$) Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería el error máximo de estimación si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 700 tornillos?

***Solución***

$a$) La proporción muestral es el valor central del intervalo de confianza:

$p = \frac{0,2+0,3}{2} = 0,25.$

$\underline{\boldsymbol{El\ 25\ \%\ de\ los\ tornillos\ de\ la\ muestra\ son\ defectuosos.}}$

El error máximo cometido es la mitad del valor del intervalo de confianza:

$E = \frac{0,3-0,2}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05.$

$\underline{\boldsymbol{El\ error\ máximo\ cometido\ es\ del\ 5\ \%}}.$

$b$) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0,95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$

$(1 - 0,025 = 0,9750 \ \rightarrow z = 1,96).$

$Datos\colon\ n = 700;\ \ p = 0,25;\ \ q = 1 - 0,25 = 0,75;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{700}} = 1,96 \cdot 0,0164 = 0,0321.$

$\underline{\boldsymbol{El\ error\ máximo\ sería\ del\ 3,21\ \%}}$


Textos Marea Verde

6º) Considere el sistema $\left.\begin{array}{r} x+ay+z=2 \\ x-az=0 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$ dependiente del parámetro real $a$:

$a$) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de $a$.

$b$) Resuelva el sistema para $a=0$.

***Solución***

$a$) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro $a$ es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1-a^2+a-a=0;\ \ 1-a^2=0 \Rightarrow a_1=-1, a_2=1.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{c} a\neq -1 \\ a\neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_3\} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2+2=4\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a=-1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}}$$

$b$) Para $a=0$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+z=2 \\ x=0 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$, cuyas soluciones son:

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x=0,\ \ y=0,\ \ z=2.}}$$


BY NC SA

7º) $a$) Determine los valores de los parámetros $a, b \in R$ para que la función $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ verifique que $f(2) = 4$ y $f'(2) = 0$.

$b$) Encuentre todas las asíntotas de la función $g(x) = x + \frac{1}{x}$.

***Solución***

$a$) $f(2) = 4 \Rightarrow a \cdot 2 + \frac{b}{2} = 4;\ \ 4a + b = 8.$ (1)

$f'(x) = a - \frac{b}{x^2} \ \Rightarrow\ f'(2) = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{2^2} = 0;\ \ 4a - b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = 8 \\ 4a - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 8a = 8;\ \ \underline{a = 1}. \qquad 4 + b = 8 \Rightarrow \underline{b = 4}.$$

$b$) $g(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando $x$ tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x} = \infty \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de $x$ que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x = 0 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ x = 0\ (eje\ Y)\ es\ asíntota\ vertical.}}$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$, con $m$ finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{Asíntota\ oblicua: y = x.}}$$



Textos Marea Verde

8º) Un investigador ha desarrollado un fertilizante para un determinado cultivo. Los estudios de mercado indican que los ingresos, $I(x)$, en miles de euros, vienen expresados por la función $I(x) = x \cdot \frac{170-0,85x}{5}$, en la que $x$ representa la demanda del producto, expresada en miles de litros. Por otra parte, los costes de producción que asume la empresa, en miles de euros, se expresan en función de la demanda mediante la función $C(x) = 10 + 2x + x^2$.

$a)$ Proporcione una expresión para la función beneficio en términos de la demanda $x$ y encuentre la cantidad de producto que debería venderse para maximizarlo. Obtenga también el beneficio máximo.

$b)$ Determine entre qué valores debería encontrarse la cantidad demandada de fertilizante para que el coste medio, $\frac{C(x)}{x}$, no supere los diez mil euros.

Nota: Exprese los resultados con 2 cifras decimales.

***Solución***

$a)$ $\quad B(x) = I(x) - C(x) = x \cdot \frac{170-0,85x}{5} - (10 + 2x + x^2) =$

$= \frac{170x-0,85x^2-50-10x-5x^2}{5} = \frac{-5,85x^2+160x-50}{5} \Rightarrow \underline{B(x) = -1,17x^2 + 32x - 10}.$

La función beneficios es una parábola cóncava (∩) por tener negativo el coeficiente de $x^2$, por lo cual, su vértice es su valor máximo.

$B'(x) = -2,34x + 32 = 0;\ 234x = 3.200;\ 117x = 1.600 \Rightarrow x = \frac{1.600}{117} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cong 13,675.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ es\ máximo\ vendiendo\ 13.675\ litros\ de\ fertilizante.}}$$

$B(13,675) = -1,17 \cdot 13,675^2 + 32 \cdot 13,675 - 10 =$

$= -218,803 + 437,6 - 10 = 208,797.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 208.797\ euros}}.$$

$b)$ $\quad C(m) = \frac{C(x)}{x} = \frac{10+2x+x^2}{x} = x + 2 + \frac{10}{x}.$

$C(m) \leq 10 \Rightarrow x + 2 + \frac{10}{x} \leq 10;\ \ x^2 + 2x + 10 \leq 10x;\ \ x^2 - 8x + 10 \leq 0.$

Resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2 - 8x + 10 = 0$:

$$x = \frac{8\pm\sqrt{64-40}}{2} = \frac{8\pm\sqrt{24}}{2} = \frac{8\pm2\sqrt{6}}{2} = 4 \pm \sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - \sqrt{6} \cong 1,55 \\ x_2 = 4 + \sqrt{6} \cong 6,45 \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta que la parábola $g(x) = x^2 - 8x + 10$ en convexa (∪) por tener positivo el coeficiente se $x^2$, los valores que hacen que el coste medio no supere los 10.000 euros son los comprendidos entre las raíces: $x \in (1,55;\ 6,45)$.

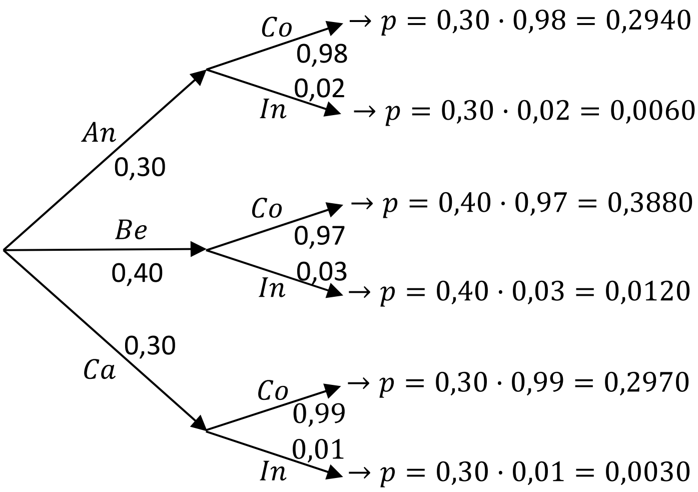
$$\underline{\boldsymbol{C(m) < 10.000\ euros\ fabricando\ entre\ 1.550\ y\ 6.450\ litros\ del\ producto.}}$$

9º) Tres amigas (Ana, Berta y Carla) elaboran una lista para hacer una fiesta sorpresa a una compañera de trabajo. Ana enviará el 30 % de las invitaciones, Berta el 40 % y Carla las restantes. El 2 % de los nombres de la lista de Ana son incorrectos y las invitaciones no llegarán a su destino. En las listas de Berta y Carla, los porcentajes de nombres incorrectos son 3 % y 1 %, respectivamente.

$a$) Calcule la probabilidad de que una invitación no llegue a su destino.

$b$) Si una invitación no llegó a su destino, ¿cuál es la probabilidad de que la haya enviado Ana?

***Solución***




$a$) $\quad P = P(In) = P(An \cap In) + P(Be \cap In) + P(Ca \cap In) =$

$= P(An) \cdot P(In/An) + P(Be) \cdot P(In/Be) + P(Ca) \cdot P(In/Ca) =$

$= 0{,}30 \cdot 0{,}02 + 0{,}40 \cdot 0{,}03 + 0{,}30 \cdot 0{,}01 = 0{,}006 + 0{,}012 + 0{,}003 = \underline{0{,}021}.$

$b$) $P = P\left(\frac{In}{An}\right) = \frac{P(An \cap In)}{P(In)} = \frac{P(An) \cdot P\left(\frac{In}{An}\right)}{P(In)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}02}{0{,}021} = \frac{0{,}006}{0{,}021} =$


cc BY NC SA

10º) Considere una población donde observamos una variable aleatoria $X$ con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 15. Se toma una muestra aleatoria simple para estimar la media muestral que arroja un intervalo de confianza cuyos extremos son 157,125 y 182,875.

$a$) Calcule el valor de la media muestral.

$b$) Si el tamaño de la muestra es 9, ¿cuál será el nivel de confianza para este intervalo?

***Solución***

$a$) $\overline{x} = \frac{182,875+157,125}{2} = \frac{340}{2} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{\overline{x} = 170.}}$$

$b$) $E = \frac{182,875-157,125}{2} = \frac{27,75}{2} = 12,875.$

Datos: $\sigma = 15;\ \ n = 9;\ \ E = 12,875.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \ \Rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{12,875 \cdot \sqrt{9}}{15} = \frac{12,875}{5} = 2,575.$

Mirando en la tabla $N(0,1) \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2,57 \rightarrow 0,9949 \\ 2,58 \rightarrow 0,9951 \end{Bmatrix} \Rightarrow 2,575 \rightarrow 0,9950.$

$\frac{\alpha}{2} - 1 = 0,9950;\ \ \alpha - 2 = 1,99 \Rightarrow \alpha = 0,01.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ es\ del\ 99\ \%.}}$$



BY NC SA