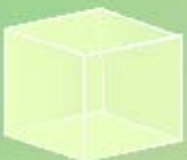


Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2022


Comunidad autónoma de **MURCIA**



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano



	<p style="text-align: center;">EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2021–2022 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II</p>	<p style="text-align: center;">CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO</p>
<p>OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables. TIEMPO: 90 minutos.</p>		
<p>1º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\left. \begin{array}{l} 4x + ay - 2z = 1 \\ ax - 2y + 2z = -1 \\ ax + y = 0 \end{array} \right\}$ en función de los valores del parámetro a. Resolverlo para $a = 1$.</p> <p>2º) La empresa Sportwear, especializada en ropa deportiva, quiere fabricar dos tipos de camisetas: técnicas y casual. Para ello utiliza tejidos sostenibles con el medio ambiente: algodón orgánico y lino. Para fabricar una camiseta técnica necesita 70 g de algodón orgánico y 20 g de lino, y para fabricar una camiseta casual necesita 60 g de algodón orgánico y 10 g de lino. Actualmente, la empresa dispone para producir 4.200 g de algodón orgánico y 800 g de lino. Además, para que sea rentable el proceso se debe fabricar al menos 10 camisetas tipo casual. Sabiendo que cada camiseta técnica da un beneficio de 5 euros y cada casual de 4 euros, calcule, justificando la respuesta:</p> <p>a) El número de camisetas de cada tipo que debería fabricar para obtener el máximo beneficio</p> <p>b) El valor de dicho beneficio máximo.</p> <p>3º) Se estima que los beneficios, en miles de euros, obtenidos en una sala de conciertos inaugurada hace 5 años, viene dado por la función $B(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 26$ donde $t \in [0, 5]$ es el tiempo, medido en años, que lleva funcionando la sala. Se quiere conocer:</p> <p>a) ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio de la sala de conciertos? Razone la respuesta.</p> <p>b) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?</p> <p>4º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - kx + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x + k & \text{si } x > 2 \end{cases}$:</p> <p>a) Calcular el valor de k para que la función sea continua en $x = 2$.</p> <p>b) Para este valor determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$.</p> <p>5º) Dada la función $f(x) = x^2 e^x$, calcule:</p> <p>a) El dominio de la función. b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.</p> <p>c) Máximos y mínimos relativos.</p> <p>d) Calcule la derivada de la función $f(x) = x^2 e^x$ en el punto de abscisa $x = 1$.</p>		

6º) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas de ecuaciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x^2 - 4x + 4$. Calcular su área.

7º) Dada la función $f(x) = \int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} \cdot dx$:

a) Calcular $\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} \cdot dx$.

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

8º) a) En el departamento informático de unos grandes almacenes se encuentran a la venta ordenadores de distintas marcas comerciales. Hay 100 ordenadores de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un ordenador esté obsoleto es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige un ordenador al azar:

I) Calcule la probabilidad de que el ordenador esté obsoleto.

II) Sabiendo que el ordenador elegido es obsoleto, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A?

b) El salario mensual de los hogares de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación típica igual a 160 euros. Seleccionados 40 hogares al azar, han tenido un salario medio mensual de 1.100 euros. Calcule un intervalo de confianza para el salario medio mensual de los hogares de ese municipio con un nivel de confianza del 95 %.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\left. \begin{array}{l} 4x + ay - 2z = 1 \\ ax - 2y + 2z = -1 \\ ax + y = 0 \end{array} \right\}$ en función de los valores del parámetro a . Resolverlo para $a = 1$.

Solución

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & a & -2 \\ a & -2 & 2 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 4 & a & -2 & 1 \\ a & -2 & 2 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & a & -2 \\ a & -2 & 2 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2a + 2a^2 - 4a - 8 = 0; \quad 2a^2 - 6a - 8 = 0;$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0; \quad a = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 4.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S. C. D.}$$

$$M' = \begin{pmatrix} 4 & a & -2 & 1 \\ a & -2 & 2 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = -2C_4, \forall a \in R\}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a = -1 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S. C. I.}$$

Para $a = 1$ el sistema resulta $\left. \begin{array}{l} 4x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x + y = 0 \end{array} \right\}$ que es compatible determinado; resolviendo

por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2-2}{-2+2-4-8} = \frac{0}{-12} = 0.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2-2}{-12} = \frac{0}{-12} = 0.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1-1+2+4}{-12} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Solución: } x = 0, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{2}.$$

2º) La empresa Sportwear, especializada en ropa deportiva, quiere fabricar dos tipos de camisetas: técnicas y casual. Para ello utiliza tejidos sostenibles con el medio ambiente: algodón orgánico y lino. Para fabricar una camiseta técnica necesita 70 g de algodón orgánico y 20 g de lino, y para fabricar una camiseta casual necesita 60 g de algodón orgánico y 10 g de lino. Actualmente, la empresa dispone para producir 4.200 g de algodón orgánico y 800 g de lino. Además, para que sea rentable el proceso se debe fabricar al menos 10 camisetas tipo casual. Sabiendo que cada camiseta técnica da un beneficio de 5 euros y cada casual de 4 euros, calcule, justificando la respuesta:

- a) El número de camisetas de cada tipo que debería fabricar para obtener el máximo beneficio
 b) El valor de dicho beneficio máximo.

Solución

- a) Sean x e y el número de camisetas de los tipos técnicas y casual que se fabrican, respectivamente.

$$\text{Las restricciones son las siguientes: } \left. \begin{array}{l} 70x + 60y \leq 4.200 \\ 20x + 10y \leq 800 \\ x \geq 0; y \geq 10 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 7x + 6y \leq 420 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \geq 0; y \geq 10 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 7x + 6y \leq 420 \Rightarrow y \leq \frac{420-7x}{6} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	0	60
y	70	0

$$\textcircled{2} \Rightarrow 2x + y \leq 80 \Rightarrow y \leq 80 - 2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	0	40
y	80	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow A(0, 10).$$

$$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 7x + 6y = 420 \end{array} \right\} \Rightarrow 6y = 420;$$

$$y = 70 \Rightarrow B(0, 70).$$

$$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x + 6y = 420 \\ 2x + y = 80 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -7x - 6y = -420 \\ 12x + 6y = 480 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x = 60; x = 12; 24 + y = 80; y = 56 \Rightarrow C(12, 56).$$

$$D \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 10 \\ 2x + y = 80 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 10 = 80; 2x = 70; x = 35 \Rightarrow D(35, 10).$$

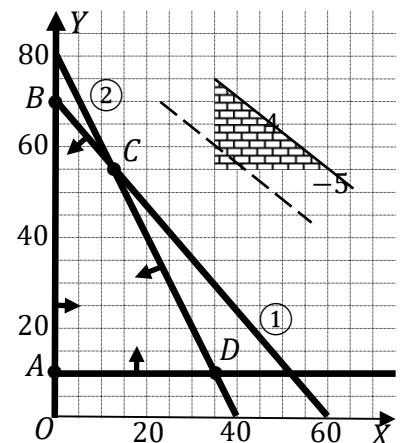
La función de objetivos es $f(x, y) = 5x + 4y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 10) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 10 = 0 + 40 = 40.$$

$$B \Rightarrow f(0, 70) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 70 = 0 + 280 = 280.$$

$$C \Rightarrow f(12, 56) = 5 \cdot 12 + 4 \cdot 56 = 60 + 224 = 284.$$



$$D \Rightarrow f(35, 10) = 5 \cdot 35 + 4 \cdot 10 = 175 + 40 = 215.$$

El valor máximo se produce en el punto $C(12, 56)$.

Máximo beneficio fabricando 12 camisetas técnicas y 56 casual.

El máximo beneficio es de 284 euros.

3º) Se estima que los beneficios, en miles de euros, obtenidos en una sala de conciertos inaugurada hace 5 años, viene dado por la función $B(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 26$ donde $t \in [0, 5]$ es el tiempo, medido en años, que lleva funcionando la sala. Se quiere conocer:

- a) ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio de la sala de conciertos? Razone la respuesta.
 b) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Solución

a) $B(0) = 26.$

$$B(5) = 2 \cdot 5^3 - 15 \cdot 5^2 + 24 \cdot 5 + 26 = 250 - 375 + 120 + 26 = 396 - 375 = 21.$$

Para que el beneficio sea máximo o un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$B'(t) = 6t^2 - 30t + 24.$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 30t + 24 = 0; \quad t^2 - 5t + 4 = 0; \quad t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = 1; \quad t_2 = 4.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$B''(t) = 12t - 30 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \rightarrow 12 \cdot 1 - 30 = -18 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \\ t_2 = 4 \rightarrow 12 \cdot 4 - 30 = 18 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

La sala alcanza su máximo rendimiento al año de comenzar su actividad.

b) $B(1) = 2 \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 + 26 = 2 - 15 + 24 + 26 = 37.$

El beneficio máximo es de 37.000 euros anuales.

4º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - kx + 3 & \text{si } x \leq 2, \\ 2x + k & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

a) Calcular el valor de k para que la función sea continua en $x = 2$.

b) Para este valor determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución

a) La función $f(x)$ es continua en \mathbb{R} , excepto para $x = 2$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de k para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\begin{aligned} \text{Para } x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - kx + 3) = 7 - 2k = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + k) = 4 + k \end{cases} & \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 7 - 2k = 4 + k; \quad 3 = 3k & \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{k = 1.}}$$

b) Para $k = 1$ la función resulta: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & \text{si } x \leq 2, \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow m = f'(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 \Rightarrow m = -3.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(-1) = (-1)^2 - (-1) + 3 = 1 + 1 + 3 = 5 \Rightarrow P(-1, 5).$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(-1, 5)$ con $m = -3$ es:

$$y - 5 = -3 \cdot (x + 1) = -3x - 3.$$

$$\underline{\underline{La recta tangente es t \equiv 3x + y - 2 = 0.}}$$

5º) Dada la función $f(x) = x^2 e^x$, calcule:

- a) El dominio de la función. b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 c) Máximos y mínimos relativos.
 d) Calcule la derivada de la función $f(x) = x^2 e^x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución

a) La función f es el producto de un monomio por una función exponencial, por lo cual:

$$\underline{D(f) \Rightarrow R.}$$

b) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x \cdot e^x \cdot (2 + x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^x \cdot (2 + x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0.$$

Por ser $D(f) \Rightarrow R$, las raíces de su primera derivada dividen su dominio en tres intervalos donde la función es, alternativamente, en creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, +\infty)$:

$$f'(1) = 1 \cdot e^1 \cdot (2 + 1) = 3e > 0 \Rightarrow \text{Creciente.}$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\text{Crecimiento: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty).}$$

$$\underline{\text{Decrecimiento: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-2, 0).}$$

c) Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 1 \cdot e^x \cdot (2 + x) + x \cdot e^x \cdot (2 + x) + x \cdot e^x \cdot 1 = \\ = e^x [(2 + x) + x(2 + x) + x] = e^x (2 + x + 2x + x^2 + x) = e^x (x^2 + 4x + 2).$$

$$f''(-2) = e^{-2} (4 - 8 + 2) < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = -2.$$

$$f(-2) = (-2)^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \Rightarrow$$

$$\underline{\text{Máximo: } A \left(-2, \frac{4}{e^2} \right).}$$

$$f''(0) = e^0 (0^2 + 4 \cdot 0 + 2) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = 0.$$

$$f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0 \Rightarrow$$

Mínimo: $O(0, 0)$.

$$d) f'(x) = x \cdot e^x \cdot (2 + x).$$

$$f'(1) = 1 \cdot e^1 \cdot (2 + 1) \Rightarrow$$

$f'(1) = 3e.$

6º) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas de ecuaciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x^2 - 4x + 4$. Calcular su área.

Solución

Las abscisas de los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$-x^2 + 2x + 4 = x^2 - 4x + 4; \quad 2x^2 - 6x = 0; \quad x^2 - 3x = 0; \quad x(x - 3) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3. \quad \text{Los puntos de corte son: } A(0, 4) \text{ y } B(3, 1).$$

La parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$, que es cóncava (\cap), por ser negativo el coeficiente de x^2 , tiene su vértice en el punto siguiente:

$$f'(x) = -2x + 2 = 0; \quad -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow V_1(1, 5).$$

La parábola $g(x) = x^2 - 4x + 4$, que es convexa (\cup) por ser positivo el coeficiente de x^2 , tiene su vértice en el punto siguiente:

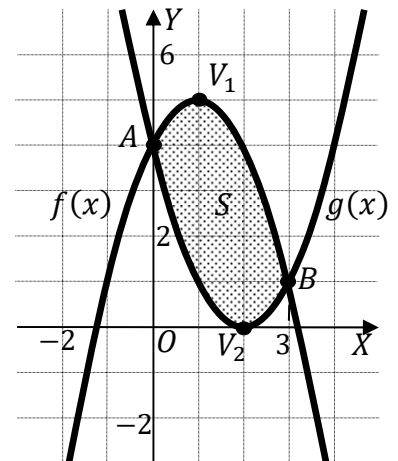
$$g'(x) = 2x - 4 = 0; \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow V_2(2, 0).$$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

Por ser las ordenadas de la parábola $g(x)$ iguales o menores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x)$ en el intervalo del área a calcular, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^3 [(-x^2 + 2x + 4) - (x^2 - 4x + 4)] \cdot dx = \\ = \int_0^3 (-x^2 + 2x + 4 - x^2 + 4x - 4) \cdot dx = \\ = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} \right]_0^3 = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3 \\ = \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 \right) - 0 = -18 + 27 \Rightarrow$$

$$\underline{S = 9 \text{ u}^2}.$$



7º) Dada la función $f(x) = \int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+2} \cdot dx$:

a) Calcular $\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} \cdot dx$.

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

Solución

$$a) \int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{x^2} + 1 = t \\ 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot dt = Lt + C =$$

$$\underline{L(e^{x^2} + 1) + C.}$$

b) La función $f(x) = L(e^{x^2} + 2)$ es continua en su dominio, que es \mathbb{R} , por ser $e^{x^2} + 2 \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$, por lo cual, sus ordenadas son mayores que cero en el intervalo que interesa, que es $(0, 1)$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+2} \cdot dx = [L(e^{x^2} + 2)]_0^1 = \\ &= L(e^1 + 2) - L(e^0 + 2) = L(e + 2) - L3 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\underline{S = L \frac{e+2}{3} u^2 \cong 0,45 u^2.}$$

8º) a) En el departamento informático de unos grandes almacenes se encuentran a la venta ordenadores de distintas marcas comerciales. Hay 100 ordenadores de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un ordenador esté obsoleto es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige un ordenador al azar:

I) Calcule la probabilidad de que el ordenador esté obsoleto.

II) Sabiendo que el ordenador elegido es obsoleto, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A?

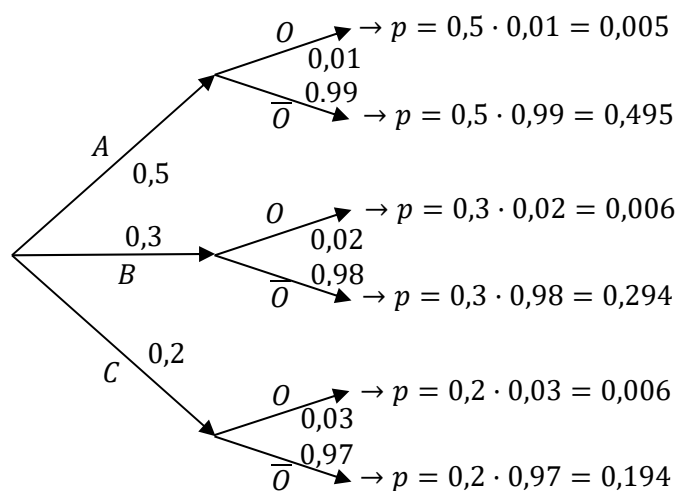
b) El salario mensual de los hogares de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación típica igual a 160 euros. Seleccionados 40 hogares al azar, han tenido un salario medio mensual de 1.100 euros. Calcule un intervalo de confianza para el salario medio mensual de los hogares de ese municipio con un nivel de confianza del 95 %.

Solución

a) El número de ordenadores es $N = 100 + 60 + 40 = 200$.

Las probabilidades de elegir un ordenador de cada una de las marcas es el siguiente:

$$P(A) = \frac{100}{200} = 0,5; \quad P(B) = \frac{60}{200} = 0,3; \quad P(C) = \frac{40}{200} = 0,2.$$



$$\begin{aligned} I) \quad P &= P(O) = P(A \cap O) + P(B \cap O) + P(C \cap O) = \\ &= P(A) \cdot P(O/A) + P(B) \cdot P(O/B) + P(C) \cdot P(O/C) = \\ &= 0,5 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,03 = 0,005 + 0,006 + 0,006 = \underline{\underline{0,017}}. \end{aligned}$$

$$II) \quad P = P(A/O) = \frac{P(A \cap O)}{P(O)} = \frac{P(A) \cdot P(O/A)}{P(O)} = \frac{0,5 \cdot 0,01}{0,0117} = \frac{0,005}{0,0117} = \underline{\underline{0,2941}}.$$

b) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

$$\text{Datos: } n = 40; \quad \bar{x} = 1.100; \quad \sigma = 160; \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de \bar{x} , σ y n , es la siguiente:


$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

$$\left(1.100 - 1,96 \cdot \frac{160}{\sqrt{40}}; 1.100 + 1,96 \cdot \frac{160}{\sqrt{40}}\right);$$

$$(1.100 - 1,96 \cdot 25,2982; 1.100 + 1,96 \cdot 25,2982);$$

$$(1.100 - 49,5845; 1.100 + 49,5845).$$

$$\underline{I. C. 95\% = (1.050,4155; 1.149,5845)}.$$

	<p>EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2021–2022 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II</p>	<p>CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA</p>
---	--	---

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el valor de a para que $B^2 = A$.

b) Calcular la matriz inversa A^{-1} .

c) Para $a = 0$, encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX + B = C$.

2º) Sea S la región del plano delimitado por el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x + 2y \geq 8 \\ 2 \leq y \leq x + 6 \\ x \leq 6 \end{array} \right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices.

b) Determine el punto de la región factible donde la función $f(x, y) = -x + 2y$ alcanza su valor mínimo. Calcule dicho valor.

3º) La ecuación de demanda de un determinado producto viene dado por la expresión $p = 400 - 2q$, y su función de coste total es $C(q) = 0,2q^2 + 4q + 400$, donde q es número de unidades de dicho producto y p se expresa en euros por unidad. Determine:

a) La expresión de la función de beneficios de la empresa.

b) El nivel de producción, q , para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa.

c) El precio para el que el beneficio es máximo.

d) El beneficio máximo.

4º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 + x \cdot Lx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio.

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

5º) Dada la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$, calcule:

- El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados.
- Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos relativos.

6º) Dada la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$:

- Calcular la derivada $f'(x)$.
- Calcular $I = \int f(x) \cdot dx$.
- Calcular $I = \int_0^1 f(x) \cdot dx$.

7º) Dada la función $f(x) = 4x - x^2$:

- Representar gráficamente el recinto limitado por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.
- Calcular el área del recinto del apartado anterior.

8º) a) Sean A y B dos sucesos independientes, tales que $P(A) = 0,3$ y $P(A \cap B) = 0,12$.

- I) Calcular $P(B)$. II) Calcular $P(A \cup B)$. III) Calcular $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

b) En una estación del AVE, el tiempo que tarda un viajero para acceder al tren desde que llega al control de equipajes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 2 minutos. Se tomó una muestra de 50 viajeros, y se observó que el tiempo medio de espera era de 16 minutos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera de la maleta en ese aeropuerto con un nivel de confianza del 90 %.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el valor de a para que $B^2 = A$.

b) Calcular la matriz inversa A^{-1} .

c) Para $a = 0$, encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX + B = C$.

Solución

$$a) B^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 + a^2 & 3a + a \\ 3a + a & a^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 9 + a^2 & 4a \\ 4a & a^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9 + a^2 = 10 \\ 4a = 4 \\ a^2 + 1 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{a = 1.}$$

$$b) |A| = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 16 = 4; A^t = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; Adj. de A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj. de A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}}{4} \Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.}$$

$$c) A \cdot X + B = C; A \cdot X = C - B; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B);$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (C - B).}$$

$$\text{Para } a = 0 \text{ es } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (C - B) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}.}$$

2º) Sea S la región del plano delimitado por el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x + 2y \geq 8 \\ 2 \leq y \leq x + 6 \\ x \leq 6 \end{array} \right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices.

b) Determine el punto de la región factible donde la función $f(x, y) = -x + 2y$ alcanza su valor mínimo. Calcule dicho valor.

Solución

$$a) \left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x + 2y \geq 8 \\ 2 \leq y \leq x + 6 \\ x \leq 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 10 \\ x + 2y \geq 8 \\ y \leq x + 6 \\ x \leq 6; y \geq 2 \end{array} \right\}$$

① $\Rightarrow x + y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

② $\Rightarrow x + 2y \geq 8; y \geq \frac{8-x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

③ $\Rightarrow y \leq x + 6 \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6 \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A(6, 2)}.$$

$$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 8 \\ x + 2y = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \underline{B(4, 2)}.$$

$$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 8 \\ x - y = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 8 \\ -x + y = 6 \end{array} \right\}$$

$$3y = 14; y = \frac{14}{3}; x + \frac{28}{3} = 8; 3x + 28 = 24; 3x = -4; x = -\frac{4}{3} \Rightarrow \underline{C\left(-\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)}.$$

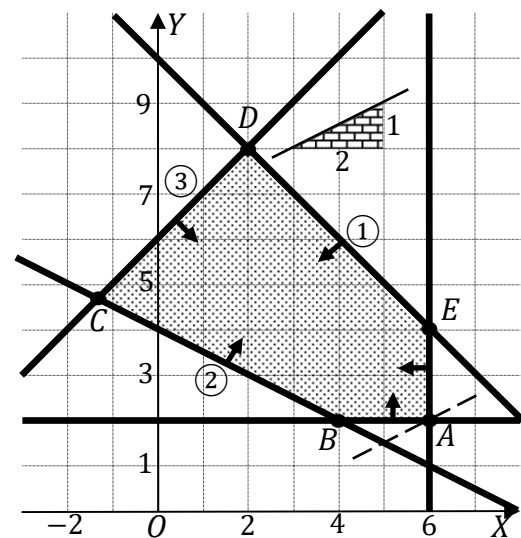
$$D \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ x - y = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 4; x = 2; y = 8 \Rightarrow \underline{D(2, 8)}.$$

$$E \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6 \\ x + y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \underline{E(6, 4)}.$$

x	5	3
y	5	7

x	0	4
y	4	2

x	0	4
y	4	2



b) La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = -x + 2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(6, 2) = -6 + 2 \cdot 2 = -6 + 4 = -2.$$

$$B \Rightarrow f(4, 2) = -4 + 2 \cdot 2 = -4 + 4 = 0.$$

$$C \Rightarrow f\left(-\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right) = -\frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{14}{3} = -\frac{4}{3} + \frac{28}{3} = 8.$$

$$D \Rightarrow f(2, 8) = -2 + 2 \cdot 8 = -2 + 16 = 14.$$

$$E \Rightarrow f(6, 4) = -6 + 2 \cdot 4 = -6 + 8 = 2.$$

El máximo se produce en el punto $A(6, 2)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = -x + 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x \Rightarrow m = \frac{1}{2}.$$

El mínimo se obtiene en el punto $A(6, 2)$ y su valor es -2 .

3º) La ecuación de demanda de un determinado producto viene dado por la expresión $p = 400 - 2q$, y su función de coste total es $C(q) = 0,2q^2 + 4q + 400$, donde q es número de unidades de dicho producto y p se expresa en euros por unidad. Determine:

- La expresión de la función de beneficios de la empresa.
- El nivel de producción, q , para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa.
- El precio para el que el beneficio es máximo.
- El beneficio máximo.

Solución

a) La función beneficios, $B(q)$, es la diferencia entre la función ingresos, $I(q)$, menos la función costes.

$$I(q) = q \cdot p = q \cdot (400 - 2q) = 400q - 2q^2.$$

$$B(q) = I(q) - C(q) = 400q - 2q^2 - (0,2q^2 + 4q + 400) = \\ = -2q^2 + 400q - 0,2q^2 - 4q - 400 \Rightarrow \underline{B(q) = -2,2q^2 + 396q.}$$

b) La función beneficios es una parábola cóncava (\cap), por ser negativo el coeficiente de q^2 , por lo cual, su mínimo absoluto es su vértice, que es el siguiente:

$$B'(q) = -4,4q + 396.$$

$$B'(q) = 0 \Rightarrow -4,4q + 396 = 0; \quad q = \frac{396}{4,4} = 90.$$

El beneficio es máximo cuando se producen 90 unidades del producto.

c) $p = 400 - 2q = 400 - 2 \cdot 90 = 400 - 180 = 220.$

El beneficio es máximo cuando la unidad del producto vale 220 euros.

d) $B(90) = -2,2 \cdot 90^2 + 396 \cdot 90 = -17.820 + 35.640 = 17.820.$

El beneficio máximo es de 17.820 euros.

$$49) \text{ Sea la función } f(x) = \begin{cases} x \cdot e^x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 + x \cdot Lx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio.
 b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución

a) La función $f(x)$ es continua en \mathbb{R} , excepto para $x = 0$ y para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x \cdot e^x) = 0 = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{b = 0}.$$

$$\text{La función resulta: } f(x) = \begin{cases} x \cdot e^x & \text{si } x \leq 0 \\ ax & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 + x \cdot Lx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax) = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 + x \cdot Lx) = 1 = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{a = 1.}}$$

b) Para $x = 1$ la función resulta $f(x) = 1 + x \cdot Lx$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 0 + 1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + Lx.$$

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow m = f'(1) = 1 + L1 = 1 + 0 \Rightarrow m = 1.$$

$$\text{El punto de tangencia es el siguiente: } f(1) = 1 + L1 = 1 + 0 = 1 \Rightarrow P(1, 1).$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(1, 1)$:

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 1) = x - 1.$$

$$\underline{\underline{\text{La recta tangente es } t \equiv x - y = 0.}}$$

5º) Dada la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$, calcule:

- El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados.
- Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos relativos.

Solución

a) El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{-2, 2\}}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$\text{Eje } X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x^2-4} = 0; \quad 1-x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow A(-1, 0) \\ x_2 = 1 \rightarrow B(1, 0) \end{cases}.$$

$$\text{Eje } Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1-0^2}{0^2-4} = \frac{1}{-4} \Rightarrow C\left(0, -\frac{1}{4}\right).$$

b) Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -1 \Rightarrow$$

La recta $y = -1$ es asíntota horizontal.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

Las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

c) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{-2x \cdot (x^2-4) - (1-x^2) \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^3 + 8x - 2x + 2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{6x}{(x^2-4)^2}.$$

Teniendo en cuenta que el denominador de la derivada es positivo para los valores del dominio de la función, el valor de la derivada es el que tenga su numerador.

Teniendo en cuenta lo anterior y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Decrecimiento: } x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0)}.$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{\text{Crecimiento: } x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)}.$$

d) De los periodos de crecimiento y decrecimiento se deduce que la función tiene un mínimo relativo para $x = 0$; no obstante se hace el estudio por derivadas.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{6 \cdot (x^2-4)^2 - 6x \cdot [2 \cdot (x^2-4) \cdot 2x]}{(x^2-4)^4} = \frac{6 \cdot (x^2-4) - 24x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{6x^2 - 24 - 24x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{-18x^2 - 24}{(x^2-4)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{-6(3 \cdot 0^2 + 4)}{(0^2 - 4)^3} = \frac{-24}{-64} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = 0.$$

$$f(0) = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

Mínimo: $C\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.

6º) Dada la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$:

a) Calcular la derivada $f'(x)$.

b) Calcular $I = \int f(x) \cdot dx$.

c) Calcular $I = \int_0^1 f(x) \cdot dx$.

Solución

$$a) f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow$$

$$\underline{f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}$$

$$b) I = \int f(x) \cdot dx = \int \frac{x}{1+x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot L|t| + C \Rightarrow$$

$$\underline{I = \int \frac{x}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot L(1+x^2) + C.}$$

$$c) I = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot [L(1+x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot [L(1+1^2) - L(1+0^2)] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (L2 - L1) = \frac{1}{2} \cdot (L2 - 0) \Rightarrow$$

$$\underline{I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot L2.}$$

7º) Dada la función $f(x) = 4x - x^2$:

a) Representar gráficamente el recinto limitado por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

b) Calcular el área del recinto del apartado anterior.

Solución

a) La parábola $f(x) = 4x - x^2$ es cóncava (\cap), por ser negativo el coeficiente de x^2 , tiene su vértice en el punto siguiente:

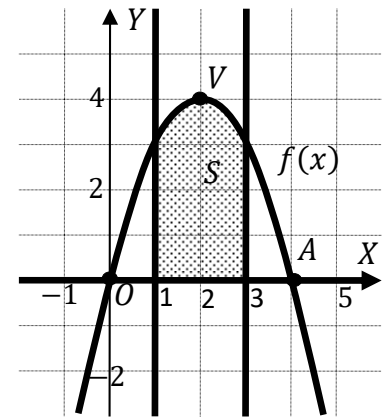
$$f'(x) = 4 - 2x = 0; \quad 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$f(2) = 4 \cdot 2 - 2^2 = 8 - 4 = 4 \Rightarrow V(2, 4).$$

Los puntos de corte de parábola con el eje de abscisas son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0; \quad x(4 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0, 0) \\ x_2 = 4 \rightarrow A(4, 0) \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



$$\begin{aligned} b) \quad S &= \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (4x - x^2) \cdot dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \\ &= \left(2 \cdot 3^2 - \frac{3^3}{3} \right) - \left(2 \cdot 1^2 - \frac{1^3}{3} \right) = 18 - 9 - 2 + \frac{1}{3} = 7 + \frac{1}{3} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\underline{S = \frac{22}{3} \text{ u}^2 \cong 7,33 \text{ u}^2.}$$

8º) a) Sean A y B dos sucesos independientes, tales que $P(A) = 0,3$ y $P(A \cap B) = 0,12$.

I) Calcular $P(B)$.

II) Calcular $P(A \cup B)$.

III) Calcular $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

b) En una estación del AVE, el tiempo que tarda un viajero para acceder al tren desde que llega al control de equipajes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 2 minutos. Se tomó una muestra de 50 viajeros, y se observó que el tiempo medio de espera era de 16 minutos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera de la maleta en ese aeropuerto con un nivel de confianza del 90 %.

Solución

a) Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$P(A) = 0,3 \text{ y } P(A \cap B) = 0,12.$$

$$I) P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,12}{0,3} \Rightarrow$$

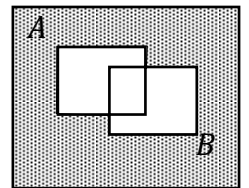
$$\underline{P(B) = 0,4.}$$

$$II) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,4 - 0,12 = 0,7 - 0,12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P(A \cup B) = 0,58.}$$

$$III) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,58 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,42.}$$



$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

b) Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$

$$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$$

$$\text{Datos: } n = 50; \bar{x} = 16; \sigma = 2; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de \bar{x} , σ y n , es la siguiente:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

$$\left(16 - 1,645 \cdot \frac{2}{\sqrt{50}}; 16 + 1,645 \cdot \frac{2}{\sqrt{50}} \right);$$

$$(16 - 1,645 \cdot 0,2828; 16 + 1,645 \cdot 0,2828); (16 - 0,4653; 16 + 0,4653).$$

$$\underline{I. C. 90\% = (15,5347; 16,4653).}$$