Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2022
Comunidad autónoma de
NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Elija tres de los seis ejercicios propuestos.**TIEMPO:** 90 minutos.

1º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule $A \cdot B^t$ y explique razonadamente si la matriz resultante tiene inversa.

$b)$ Determine las matrices X e Y que verifican el sistema $\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ 3X - 2Y = B \end{cases}$.

2º) Un joven estudiante ganó 20.000 euros en un concurso cultural y está pensando en invertir al menos el 20 % y no más del 50 % del premio. Un asesor se aconseja que reparta su inversión en dos carteras (C1 y C2). La cartera C1 tiene un perfil de riesgo audaz y una rentabilidad del 7 %, mientras que la cartera C2 tiene un perfil de riesgo moderado y una rentabilidad del 4 %. Es estudiante decide invertir no más de 8.000 euros en la cartera C1 y al menos 3.000 euros en la cartera C2. Además, el asesor le recomienda que invierta en C2 una cantidad igual o superior a lo invertido en C1. ¿Cuánto deberá invertir en cada cartera si se desea maximizar la rentabilidad?

$a)$ Plantee el problema.

$b)$ Resuélvalo gráficamente.

$c)$ Analice gráficamente qué ocurriría si considerando el perfil de riesgo, el estudiante modifica su idea inicial y decide no invertir más de 2.500 euros en la cartera C1.

3º) Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

$a)$ Estudie la continuidad de $f(x)$ y, clasificando los puntos de discontinuidad.

$b)$ Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 1$.

$c)$ Calcule $\int f(x) \cdot dx$.

4º) Sea la función $f(x) = x \cdot (x-3)^2$.

$a)$ Calcule los puntos de corte con los ejes.

$b)$ Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$c)$ Dibuje el recinto limitado por la función $f(x)$ y el eje OX.

$d)$ Calcule el área de dicho recinto.

5º) Una empresa vende tres productos (A, B y C) que distribuye a sus clientes a través de dos empresas de transporte (Trans y Logis). El año pasado, la empresa realizó 1.500 ventas y encargó a Trans el 60 % del reparto y a Logis el 40 %. El 20 % de los productos distribuidos por Trans fueron del tipo A, el 50 % fueron del tipo B y el 30 % tipo C. Para la empresa Logis, estos porcentajes fueron 40 %, 35 % y 25 %, respectivamente.

a) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Calcule la probabilidad de que sea un producto tipo B y distribuido por Trans.

b) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Sabiendo que es un producto de C, calcule la probabilidad de que fuera distribuido por Logis.

c) Se seleccionan al azar (sin reemplazamiento) dos ventas realizadas el año pasado. Calcule la probabilidad de que las dos ventas fueran distribuidas por Trans.

6º) El consumo energético mensual (en Kw/h) de los hogares de una región sigue una distribución normal con varianza 400. Se elige una muestra de 64 hogares, obteniéndose una suma total del consumo de 17.280 Kw/h.

a) Calcule un intervalo de confianza al 92 % para el consumo energético medio en los hogares.

b) Determine el tamaño de la muestra necesario para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo cometido se reduzca a la mitad. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule $A\cdot B^t$ y explique razonadamente si la matriz resultante tiene inversa.

$b)$ Determine las matrices X e Y que verifican el sistema $\begin{cases}2X-3Y=A\\ 3X-2Y=B\end{cases}$.

Solución

$$a)\ A\cdot B^t=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\\ 5 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A\cdot B^t=\begin{pmatrix}5 & -8\\ -13 & 9\end{pmatrix}}.}$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A\cdot B^t|=\begin{vmatrix}5 & -8\\ -13 & 9\end{vmatrix}=45-104=-59\neq 0\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A\cdot B^t\ es\ invertible}.}$$

$$b)\ \begin{cases}2X-3Y=A\\ 3X-2Y=B\end{cases}\Rightarrow\left.\begin{matrix}-4X+6Y=-2A\\ 9X-6Y=3B\end{matrix}\right\}\Rightarrow 5X=-2A+3B=$$

$$=-2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ 6 & -2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9 & 3 & 15\\ -6 & 12 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5X=\begin{pmatrix}5 & 5 & 15\\ 0 & 10 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}}.}$$

$$\begin{cases}2X-3Y=A\\ 3X-2Y=B\end{cases}\Rightarrow\left.\begin{matrix}-6X+9Y=-3A\\ 6X-4Y=2B\end{matrix}\right\}\Rightarrow 5Y=-3A+2B=$$

$$=-3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 3 & 0\\ 9 & -3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 2 & 10\\ -4 & 8 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5Y=\begin{pmatrix}0 & 5 & 10\\ 5 & 5 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Y=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}}.}$$

2º) Un joven estudiante ganó 20.000 euros en un concurso cultural y está pensando en invertir al menos el 20 % y no más del 50 % del premio. Un asesor se aconseja que reparta su inversión en dos carteras (C1 y C2). La cartera C1 tiene un perfil de riesgo audaz y una rentabilidad del 7 %, mientras que la cartera C2 tiene un perfil de riesgo moderado y una rentabilidad del 4 %. Es estudiante decide invertir no más de 8.000 euros en la cartera C1 y al menos 3.000 euros en la cartera C2. Además, el asesor le recomienda que invierta en C2 una cantidad igual o superior a lo invertido en C1. ¿Cuánto deberá invertir en cada cartera si se desea maximizar la rentabilidad?

a) Plantee el problema. b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando el perfil de riesgo, el estudiante modifica su idea inicial y decide no invertir más de 2.500 euros en la cartera C1.

Solución

a) Sean x e y las cantidades invertidas (en miles de euros) en las carteras C1 y C2, respectivamente.

Las restricciones que se deducen del enunciado son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} x+y \geq 20\ \%\ de\ 20 \\ x+y \leq 50\ \%\ de\ 20 \\ y \geq x \\ x \leq 8;\ y \geq 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y \geq 4 \\ x+y \leq 10 \\ x-y \leq 0 \\ x \leq 8;\ y \geq 3 \end{array}\right\}.$$

b)

$(1) \Rightarrow x+y \geq 4 \Rightarrow y \geq 4-x \Rightarrow O(0,0) \to No.$

x	0	4
y	4	0

$(2) \Rightarrow x+y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10-x \Rightarrow O(0,0) \to No.$

x	0	10
y	10	0

$(3) \Rightarrow x-y \leq 0 \Rightarrow y \geq x \Rightarrow P(2,0) \to No.$

x	0	10
y	0	10

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

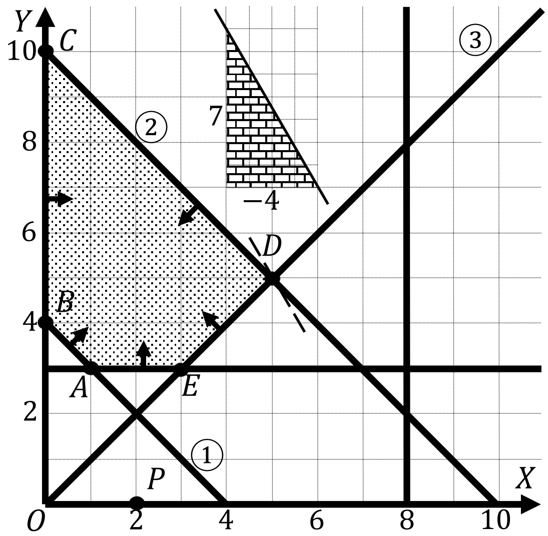
$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=3 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow A(1,3).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0,4).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow C(0,10).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ x+y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=10;\ \ x=5 \Rightarrow D(5,5).$$

$$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=3 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x-3=0;\ \ x=3 \Rightarrow E(3,3).$$



La función de objetivos es $f(x,y)=0{,}07x+0{,}04y$.

Los valores de la función de objetivos (ya expresado en euros) en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(1,3) = 0{,}07 \cdot 1.000 + 0{,}04 \cdot 3.000 = 70 + 120 = 190.$
$B \Rightarrow f(0,4) = 0{,}07 \cdot 0 + 0{,}04 \cdot 4.000 = 0 + 160 = 160.$
$C \Rightarrow f(0,10) = 0{,}07 \cdot 0 + 0{,}04 \cdot 10.000 = 0 + 400 = 400.$
$D \Rightarrow f(5,5) = 0{,}07 \cdot 5.000 + 0{,}04 \cdot 5.000 = 350 + 200 = 550.$
$E \Rightarrow f(3,3) = 0{,}07 \cdot 3.000 + 0{,}04 \cdot 3.000 = 210 + 120 = 330.$
El valor máximo se produce en el punto $D(5,5)$.

También se hubiera obtenido el punto D por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 0{,}07x + 0{,}04y \Rightarrow y = -\frac{0{,}07}{0{,}04}x = -\frac{7}{4}x \Rightarrow m = -\frac{7}{4}.$

$\underline{Máximo\ beneficio\ invirtiendo\ 5.000\ euros\ en\ C1\ y\ 5.000\ euros\ en\ C2.}$

c) Si decide no invertir más de 2.500 euros en la cartera C1, la situación sería la siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x+y \geq 20\ \%\ de\ 20 \\ x+y \leq 50\ \%\ de\ 20 \\ y \geq x \\ x \leq 2{,}5;\ y \geq 3 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x+y \geq 4 \\ x+y \leq 10 \\ x-y \leq 0 \\ x \leq 2{,}5;\ y \geq 3 \end{aligned}\right\}.$$

La nueva región factible es la que aparece sombreada en la figura siguiente.

Los vértices de la nueva sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow A(1,3).\ \ B \Rightarrow B(0,4).\ \ C \Rightarrow C(0,10).$

$F \Rightarrow \left.\begin{aligned} x = 2{,}5 \\ x+y = 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(2{,}5;\ 7{,}5). \quad G \Rightarrow \left.\begin{aligned} x = 2{,}5 \\ y = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow G(2{,}5;\ 3).$

Los valores de la nueva función de objetivos (ya expresado en euros) en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(1,3) = 190.$

$B \Rightarrow f(0,4) = 160.$

$C \Rightarrow f(0,10) = 400.$

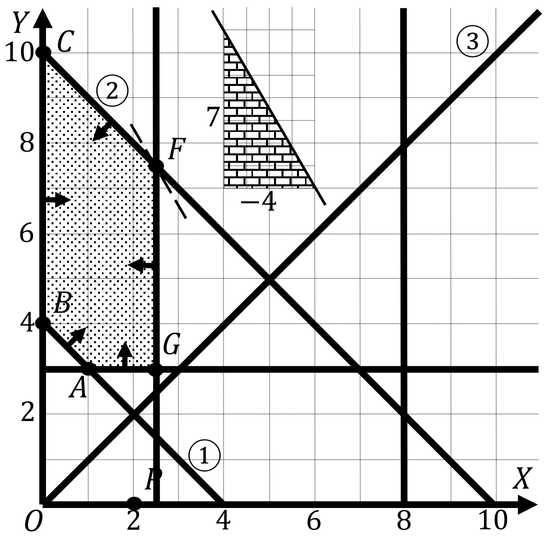
$F \Rightarrow P(2{,}5;\ 7{,}5) = 0{,}07 \cdot 2.500 + 0{,}04 \cdot 7.500 =$

$= 175 + 300 = 475.$

$G \Rightarrow P(2{,}5;\ 3) = 0{,}07 \cdot 2.500 + 0{,}04 \cdot 3.000 =$
$175 + 120 = 295.$

El valor máximo se produce ahora en el punto $F(2{,}5;\ 7{,}5)$.

También se hubiera obtenido el punto F por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.



$f(x,y) = 0{,}07x + 0{,}04y \Rightarrow y = -\frac{0{,}07}{0{,}04}x = -\frac{7}{4}x \Rightarrow m = -\frac{7}{4}.$

$\underline{Máximo\ beneficio\ invirtiendo\ 2.500\ euros\ en\ C1\ y\ 7.500\ euros\ en\ C2.}$

3º) Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

a) Estudie la continuidad de $f(x)$ y, clasificando los puntos de discontinuidad.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 1$.

c) Calcule $\int f(x) \cdot dx$.

Solución

a) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x}{x^2-4} = \frac{2}{2^2-4} = +\infty.$$

El dominio de la función $f(x)$ es: $D(f) \Rightarrow R - \{-2, 2\}$.

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ es\ continua\ en\ su\ dominio.}}$$

Para los valores $x = -2$ y $x = 2$:

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ presenta\ discontinuidad\ inevitable\ de\ salto\ infinito.}}$$

b) La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-4)-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}.$$

$$Para\ x = 1 \Rightarrow m = f'(1) = \frac{-1^2-4}{(1^2-4)^2} = \frac{-5}{9} \Rightarrow m = -\frac{5}{9}.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(1) = \frac{1}{1^2-4} = -\frac{1}{3} \Rightarrow P\left(1, -\frac{1}{3}\right)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P\left(1, -\frac{1}{3}\right)$:

$$y + \frac{1}{3} = -\frac{5}{9} \cdot (x - 1);\ \ 9y + 3 = -5x + 5.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 5x + 9y - 2 = 0.}}$$

$$c)\ \int f(x) \cdot dx = \int \frac{x}{x^2-4} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2 - 4 = t \\ 2x \cdot dx = dt \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot L|t| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{\int f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot L\left|x^2 - 4\right| + C.}}$$

4º) Sea la función $f(x) = x \cdot (x-3)^2$.

a) Calcule los puntos de corte con los ejes.

b) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Dibuje el recinto limitado por la función $f(x)$ y el eje OX.

d) Calcule el área de dicho recinto.

Solución

a) Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0;\ \ x \cdot (x-3)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 = 3 \end{cases}.$$

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0,0)$.

Los puntos de corte son: $\underline{\boldsymbol{O(0,0)\ y\ A(3,0)}}$.

b) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 1 \cdot (x-3)^2 + x \cdot 2 \cdot (x-3) \cdot 1 = (x-3) \cdot [(x-3) + 2x] =$

$= (x-3)(3x-3) \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot (x-3)(x-1)$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$.

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, 1), (1,3)\ y\ (3, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in (-\infty, 1)$ es:

$f'(0) = 3 \cdot (0-3)(0-1) = 9 > 0 \Rightarrow Creciente$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)}.}$$

$$\boldsymbol{f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (1,3)}.}$$

De los periodos de crecimiento y decrecimiento se deducen los máximos y mínimos relativos de la función, no obstante, se hace su estudio por derivadas.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = 3 \cdot 1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (x-3) \cdot 1 = 3x - 3 + 3x - 9 = 6x - 12$.

$f''(1) = 6 - 12 < 0 \Rightarrow$

$Máximo\ relativo\ para\ x = 1$.

$$f(1) = 1 \cdot (1-3)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{M\acute{a}ximo\ relativo}: B(1,4).}$$

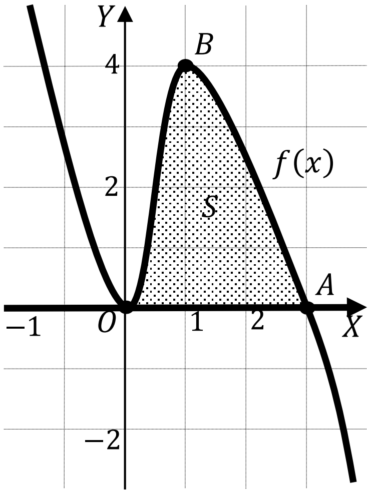
$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow M\acute{i}nimo\ relativo\ para\ x = 3.$$

$$f(3) = 3 \cdot (3-3)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{M\acute{i}nimo\ relativo}: A(3,0).}$$

Para $x = 0 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow Ni\ m\acute{a}x.ni\ m\acute{i}n.$ (para punto de inflexión).

$c)$ De los apartados anteriores se deduce la representación gráfica de la situación, que es, aproximadamente, la que aparece en la figura adjunta.



$d)$ La superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^3 f(x) \cdot dx = \int_0^3 [x \cdot (x-3)^2] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 [x(x^2 - 6x + 9)] \cdot dx = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3 = \left(\frac{3^4}{4} - 2 \cdot 3^3 + \frac{9 \cdot 3^2}{2}\right) - 0 =$$

$$= \frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2} = \frac{81 - 216 + 162}{4} = \frac{243 - 216}{4} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{27}{4} u^2 = 6,75\ u^2.}}$$

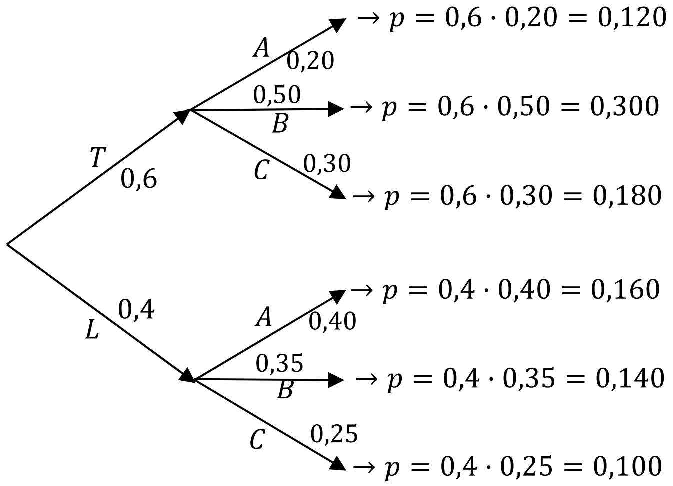
5º) Una empresa vende tres productos (A, B y C) que distribuye a sus clientes a través de dos empresas de transporte (Trans y Logis). El año pasado, la empresa realizó 1.500 ventas y encargó a Trans el 60 % del reparto y a Logis el 40 %. El 20 % de los productos distribuidos por Trans fueron del tipo A, el 50 % fueron del tipo B y el 30 % tipo C. Para la empresa Logis, estos porcentajes fueron 40 %, 35 % y 25 %, respectivamente.

a) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Calcule la probabilidad de que sea un producto tipo B y distribuido por Trans.

b) Se selecciona al azar una venta realizada el año pasado. Sabiendo que es un producto de C, calcule la probabilidad de que fuera distribuido por Logis.

c) Se seleccionan al azar (sin reemplazamiento) dos ventas realizadas el año pasado. Calcule la probabilidad de que las dos ventas fueran distribuidas por Trans.

Solución



a) $P = P(T \cap B) = P(T) \cdot P(B/T) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = \underline{0{,}30}$

b) $P = P(L/C) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{P(L) \cdot P(C/L)}{P(T \cap C) + P(L \cap C)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}25}{0{,}6 \cdot 0{,}30 + 0{,}4 \cdot 0{,}25} = \frac{0{,}10}{0{,}18 + 0{,}10} = \frac{0{,}10}{0{,}28} = \underline{0{,}3571}$.

c) Trans realizó el 60 % de 1.500 de las ventas, que son: $n = 0{,}6 \cdot 1.500 = 900$.

$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{900}{1.500} \cdot \frac{899}{1.499} = \frac{3}{5} \cdot \frac{899}{1.499} = \frac{2.697}{7.495} = \underline{0{,}3598}$.

6º) El consumo energético mensual (en Kw/h) de los hogares de una región sigue una distribución normal con varianza 400. Se elige una muestra de 64 hogares, obteniéndose una suma total del consumo de 17.280 Kw/h.

a) Calcule un intervalo de confianza al 92 % para el consumo energético medio en los hogares.

b) Determine el tamaño de la muestra necesario para que, manteniendo el mismo nivel de confianza, el error máximo cometido se reduzca a la mitad. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

Solución

a) Para un nivel de confianza del 92 % es:

$1-\alpha=0{,}92 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}92=0{,}08 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}04}=1{,}75.$

$(1-0{,}04=0{,}960 \;\rightarrow z=1{,}75).$

Datos: $n=64;\;\; \overline{x}=\frac{17.280}{64}=270;\;\; \sigma^2=400 \Rightarrow \sigma=20;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\; \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(270-1{,}75\cdot\frac{20}{\sqrt{64}};\; 270+1{,}75\cdot\frac{20}{\sqrt{64}}\right);$

$(270-1{,}75\cdot 2{,}5;\; 270+1{,}75\cdot 2{,}5);\;\; (270-4{,}375;\; 270+4{,}375).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{92\,\%}=(265{,}625;\; 274{,}375).}}$$

b) $E=\frac{274{,}375-265{,}625}{2}=\frac{8{,}75}{2}=4{,}375.$

Datos: $\sigma=20;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75;\;\; E=4{,}375.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}75\cdot\frac{20}{4{,}375}\right)^2=$

$=(1{,}75\cdot 4{,}5714)^2=8^2=64.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 64\ hogares.}}$$

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Elija tres de los seis ejercicios propuestos.**TIEMPO:** 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$, dependiente del parámetro real k:

a) Determine los valores de k para loa cuales A no tiene inversa.

b) Para $k = 1$, calcule la matriz inversa de A.

c) Para $k = 0$, calcule $(A - 2A^t)^2$.

2º) Una empresa fabrica dos productos P1 y P2, con un coste de fabricación de 20 y 15 euros/kg, respectivamente. Para ello utiliza tres recursos (R1, R2 y R3). La siguiente tabla muestra la cantidad necesaria de cada recurso para obtener un kg de cada producto y la disponibilidad semanal de los recursos. Determine cuántos kg de cada producto deberá fabricar semanalmente esta empresa si desea minimizar el coste de producción, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 30 kg.

	$P1$	$P2$	$Disponibilidad\ semanal$
$R1$	6	3	180
P2	4	5	200
$R3$	1	1,5	70

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente.

c) Analice gráficamente qué ocurriría si la fabricación del producto P2 se encarece y su coste pasa a ser 20 euros/kg.

3º) a) Calcule la derivada de la función $f(x) = \frac{3}{(2x-3)^2} + L(2x^4 - 3)$.

b) Calcule la integral $I = \int \left(sen\ 2x + e^{\frac{x}{5}} \right) \cdot dx$.

c) Calcule la integral $I = \int_1^2 \frac{x}{2x^2+1} \cdot dx$.

4º) Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, responde a las siguientes cuestiones:

a) Determine el valor de los parámetros $a\ y\ b$ de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tenga de pendiente $m = -2$.

b) Tomando los valores $a = -2\ y\ b = -4$, determine los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.

5º) Se considera que el 4 % de los deportistas federados consumen algún tipo de sustancia no permitida para mejorar su rendimiento. Se ha diseñado una nueva prueba de detección con dos posibles resultados: positivo y negativo. La prueba identifica correctamente el consumo de estas sustancias el 92 % de los casos. Sin embargo, si un deportista no consume estas sustancias, la prueba da positivo en el 10 % de los casos. Se selecciona un deportista al azar. Calcule (use 4 decimales):

a) La probabilidad de que obtenga un resultado positivo de la prueba.

b) La probabilidad de que sea consumidor y la prueba tenga resultado negativo.

c) La probabilidad de que no sea consumidor sabiendo que la prueba ha dado resultado negativo.

6º) En una encuesta realizada a 300 jóvenes navarros entre los 18 y los 30 años, 180 contestaron que utilizan habitualmente una determinada red social.

a) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que no utilizan dicha red social, con un nivel de confianza del 96 %.

b) Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan habitualmente la red social: $[0{,}544563; 0{,}655437]$.

Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$, dependiente del parámetro real k:

a) Determine los valores de k para loa cuales A no tiene inversa.

b) Para $k = 1$, calcule la matriz inversa de A.

c) Para $k = 0$, calcule $(A - 2A^t)^2$.

Solución

a) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & k \\ k & 1 & k \end{vmatrix} = k + 2k^2 + k - 6k = 2k^2 - 4k = 0;\ \ 2k(k-2) = 0;$$

$\Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 2.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ no\ tiene\ inversa\ para\ k = 0\ y\ para\ k = 2.}}$$

b) Para $k = 1$ la matriz resulta $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que es invertible por ser su determinante distinto de cero.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 + F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_1 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_3 - 3F_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 3 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to -\tfrac{1}{2}F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}}}.$$

Autor: ANTONIO MENGUIANO

$c)$ Para $k = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\quad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A - 2A^t)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^2 =$$

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{(A - 2A^t)^2 = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 8 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}.$$

2º) Una empresa fabrica dos productos P1 y P2, con un coste de fabricación de 20 y 15 euros/kg, respectivamente. Para ello utiliza tres recursos (R1, R2 y R3). La siguiente tabla muestra la cantidad necesaria de cada recurso para obtener un kg de cada producto y la disponibilidad semanal de los recursos. Determine cuántos kg de cada producto deberá fabricar semanalmente esta empresa si desea minimizar el coste de producción, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 30 kg.

	$P1$	$P2$	$Disponibilidad\ semanal$
$R1$	6	3	180
P2	4	5	200
$R3$	1	1,5	70

$a)$ Plantee el problema. $b)$ Resuélvalo gráficamente.

$c)$ Analice gráficamente qué ocurriría si la fabricación del producto P2 se encarece y su coste pasa a ser 20 euros/kg.

Solución

$a)$ Sean $x\ e\ y$ el número de productos P1 y P2 que fabrica la empresa, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} 6x+3y\le 180 \\ 4x+5y\le 200 \\ x+1{,}5y\le 70 \\ x+y\ge 30 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+y\le 60 \\ 4x+5y\le 200 \\ 2x+3y\le 140 \\ x+y\ge 30 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$

$b)$

① $\Rightarrow 2x+y\le 60 \Rightarrow y\le 60-2x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	30
y	60	0

② $\Rightarrow 4x+5y\le 200 \Rightarrow y\le \frac{200-4x}{5} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	50
y	40	0

③ $\Rightarrow 2x+3y\le 140 \Rightarrow y\le \frac{140-2x}{3} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	70	40
y	0	30

④ $\Rightarrow x+y\ge 30 \Rightarrow y\ge 30-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

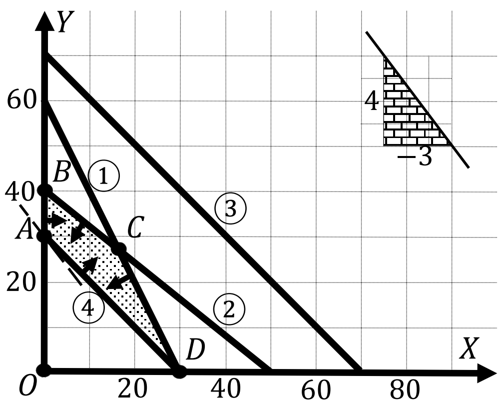
x	0	30
y	30	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow y=30;\ A(0,30).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 4x+5y=200 \end{array}\right\} \Rightarrow y=20;\ B(0,50).$



$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 60 \\ 4x + 5y = 200 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -4x - 2y = -120 \\ 4x + 5y = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{3}; 2x + \frac{80}{3} = 60;\ \ 6x + 80 = 180;\ \ 6x = 100;$$

$$3x = 50;\ \ x = \frac{50}{3} \Rightarrow C\left(\frac{50}{3}, \frac{80}{3}\right).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x + y = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow D(30, 0).$$

La función de objetivos: $f(x, y) = 20x + 15y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 30) = 20 \cdot 0 + 15 \cdot 30 = 0 + 450 = 450.$

$B \Rightarrow f(0, 50) = 20 \cdot 0 + 15 \cdot 50 = 0 + 750 = 750.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{50}{3}, \frac{80}{3}\right) = 20 \cdot \frac{50}{3} + 15 \cdot \frac{80}{3} = \frac{1.000}{3} + 400 = \frac{2.200}{3} \cong 733{,}33.$

$D \Rightarrow f(30, 0) = 20 \cdot 30 + 15 \cdot 0 = 600 + 0 = 600.$

El valor mínimo se produce en el punto $A(0, 30)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 20x + 15y = 0 \Rightarrow y = -\frac{20}{15}x = -\frac{4}{3}x \Rightarrow m = -\frac{4}{3}.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ coste\ semanal\ es\ mínimo\ fabricando\ únicamente\ 30\ kg\ del\ producto\ P2}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ coste\ míximo\ es\ de\ 450\ euros}}.$$

c) La nueva función de objetivos es: $g(x, y) = 20x + 20y$.

Los valores de la nueva función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 30) = 20 \cdot 0 + 20 \cdot 30 = 0 + 600 = 600.$

$B \Rightarrow f(0, 50) = 20 \cdot 0 + 20 \cdot 50 = 0 + 1.000 = 1.000.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{50}{3}, \frac{80}{3}\right) = 20 \cdot \frac{50}{3} + 20 \cdot \frac{80}{3} = \frac{1.000}{3} + \frac{1.000}{3} = \frac{2.000}{3} \cong 666{,}67.$

$D \Rightarrow f(30, 0) = 20 \cdot 30 + 20 \cdot 0 = 600 + 0 = 600.$

El valor mínimo se produce en los puntos $A(0, 30)\ y\ D(30, 0)$, es decir:

$$\underline{\boldsymbol{El\ coste\ mínimo\ se\ produciría\ en\ todos\ los\ puntos\ del\ segmento\ \overline{AD}}}.$$

3º) $a)$ Calcule la derivada de la función $f(x) = \frac{3}{(2x-3)^2} + L(2x^4 - 3)$.

$b)$ Calcule la integral $I = \int \left(sen\ 2x + e^{\frac{x}{5}}\right) \cdot dx$.

$c)$ Calcule la integral $I = \int_1^2 \frac{x}{2x^2+1} \cdot dx$.

Solución

$a)$ $f'(x) = \frac{0-3\cdot[2\cdot(2x-3)\cdot 2]}{(2x-3)^4} + \frac{8x^3}{2x^4-3} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{f'(x) = \frac{-12}{(2x-3)^3} + \frac{8x^3}{2x^4-3}}}.$$

$b)$ $I = \int \left(sen\ 2x + e^{\frac{x}{5}}\right) \cdot dx = \int sen\ 2x \cdot dx + \int e^{\frac{x}{5}} \cdot dx = A + B.$ (*)

$$A = \int sen\ 2x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int sen\ t \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \cos t =$$

$= -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x.$

$$B = \int e^{\frac{x}{5}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{x}{5} = t \\ dx = 5 \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow 5 \int e^t \cdot dt = 5 \cdot e^t = 5 \cdot e^{\frac{x}{5}}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$\underline{\boldsymbol{I = \int \left(sen\ 2x + e^{\frac{x}{5}}\right) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x + 5 \cdot e^{\frac{x}{5}} + C}}.$$

$c)$ $I = \int_1^2 \frac{x}{2x^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} 2x^2 + 1 = t & x = 2 \rightarrow t = 9 \\ x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot dt & x = 1 \rightarrow t = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \int_3^9 \frac{1}{t} \cdot dx =$

$$= \frac{1}{4} \cdot [Lt]_3^9 = \frac{1}{4} \cdot (L9 - L3) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int_1^2 \frac{x}{2x^2+1} \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot L3}}.$$

4º) Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, responde a las siguientes cuestiones:

a) Determine el valor de los parámetros a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tenga de pendiente $m = -2$.

b) Tomando los valores $a = -2$ y $b = -4$, determine los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.

Solución

a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Por tener un extremo relativo para $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$:

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0;\ \ 2a + b = -3.$ (*)

La pendiente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto, por lo cual: $f'(0) = -2$:

$f'(0) = -2 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = -2 \Rightarrow \underline{b = -2}$.

Sustituyendo el valor obtenido de b en la expresión (*):

$2a - 2 = -3;\ \ 2a = -1 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{a = -\frac{1}{2}}}.$$

b) Para $a = -2$ y $b = -4$ la función resulta: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$.

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} = \frac{2 \pm 4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 2$.

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función, que es R, en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$ y $(2, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$ es:

$f'(0) = -4 < 0 \Rightarrow Decreciente$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in \left(-\frac{2}{3}, 2\right)}}.$$

$$\boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)}}.$$

Teniendo en cuenta el dominio y la continuidad de la función, así como sus periodos de crecimiento y decrecimiento, se pueden deducir fácilmente sus extremos relativos, no obstante, se hace su estudio mediante derivadas.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = 6x - 4.$

$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 4 = -8 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2.$

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 1 =$

$$= \frac{-8 - 24 + 72 + 27}{27} = \frac{99 - 32}{27} = \frac{67}{27} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Máximo}: \boldsymbol{A}\left(-\frac{3}{2}, \frac{67}{27}\right).}$$

$f(-2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 8 - 8 - 8 + 1 = -7 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{Mínimo}: \boldsymbol{B}(2, -7).}$$

Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 4 = 0;\ \ 3x - 2 = 0;\ \ x = \frac{2}{3}.$

$$Para\ x < \frac{2}{3} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Concavidad}\ (\cap): \boldsymbol{x} \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right).}$$

$$Para\ x > \frac{2}{3} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Convexidad}\ (\cup): \boldsymbol{x} \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right).}$$

Una función tiene un punto de inflexión cuando pasa de ser cóncava a convexa o viceversa. También puede determinarse el punto un inflexión cuando se anula la segunda derivada de la función siendo distinta de cero la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$ $\qquad f'''(x) = 4 \neq 0 \Rightarrow P.I. para\ x = \frac{2}{3}.$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{27} - \frac{8}{9} - \frac{8}{3} + 1 = \frac{8-24-72+27}{27} = \frac{35-96}{27} = -\frac{61}{27} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{Punto\ de\ inflexión}: \boldsymbol{C}\left(\frac{2}{3}, -\frac{61}{27}\right).}$$

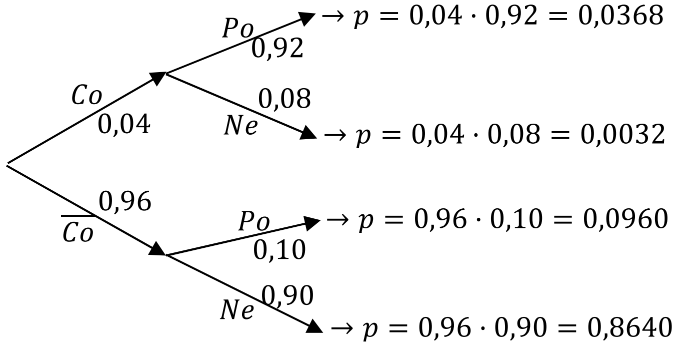
5º) Se considera que el 4 % de los deportistas federados consumen algún tipo de sustancia no permitida para mejorar su rendimiento. Se ha diseñado una nueva prueba de detección con dos posibles resultados: positivo y negativo. La prueba identifica correctamente el consumo de estas sustancias el 92 % de los casos. Sin embargo, si un deportista no consume estas sustancias, la prueba da positivo en el 10 % de los casos. Se selecciona un deportista al azar. Calcule (use 4 decimales):

a) La probabilidad de que obtenga un resultado positivo de la prueba.

b) La probabilidad de que sea consumidor y la prueba tenga resultado negativo.

c) La probabilidad de que no sea consumidor sabiendo que la prueba ha dado resultado negativo.

Solución



a) $\quad P = P(Po) = P(Co \cap Po) + P\left(\overline{Co} \cap Po\right) =$

$= P(Co) \cdot P(Po/Co) + P\left(\overline{Co}\right) \cdot P\left(Po/\overline{Co}\right) = 0{,}04 \cdot 0{,}92 + 0{,}96 \cdot 0{,}10 =$

$= 0{,}0368 + 0{,}0960 = \underline{0{,}1328}$.

b) $\quad P = P(Co \cap Ne) = P(Co) \cdot P(Ne/Co) = 0{,}04 \cdot 0{,}08 = \underline{0{,}0032}$.

c) $\quad P = P\left(\overline{Co}/Ne\right) = \frac{P\left(\overline{Co} \cap Ne\right)}{P(Ne)} = \frac{P\left(\overline{Co}\right) \cdot P\left(Ne/\overline{Co}\right)}{1 - P(Po)} = \frac{0{,}96 \cdot 0{,}90}{1 - 0{,}1328} = \frac{0{,}8640}{0{,}8672} = \underline{0{,}9963}$.

6º) En una encuesta realizada a 300 jóvenes navarros entre los 18 y los 30 años, 180 contestaron que utilizan habitualmente una determinada red social.

a) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que no utilizan dicha red social, con un nivel de confianza del 96 %.

b) Con los datos de esa muestra se ha calculado el siguiente intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan habitualmente la red social: $[0{,}544563; 0{,}655437]$.

Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

Solución

a) Para un nivel de confianza del 96 % es:

$$1-\alpha = 0{,}96 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}96 = 0{,}04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}02} = 2{,}055.$$

$$(1 - 0{,}02 = 0{,}9800 \rightarrow z = 2{,}055).$$

Datos: $n = 300$; $p = \frac{300-180}{300} = \frac{120}{300} = 0{,}4$; $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}055$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}4 - 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{300}};\ 0{,}4 + 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{300}}\right);$$

$(0{,}4 - 2{,}055 \cdot 0{,}0283;\ 0{,}4 + 2{,}055 \cdot 0{,}0283)$; $(0{,}4 - 0{,}0581;\ 0{,}4 + 0{,}0581\ \cdot)$.

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{96\,\%} = (0,3419;\ 0,4581).}}$$

b) $\overline{x} = \frac{0{,}655437+0{,}544563}{2} = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6.$

$$E = \frac{0{,}655437-0{,}544563}{2} = \frac{0{,}1109}{2} = 0{,}055437.$$

Datos: $n = 300$; $E = 0{,}055437$; $p = 0{,}6$; $q = 0{,}4$.

$$E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \frac{E^2 \cdot n}{p \cdot q} = \frac{0{,}055437^2 \cdot 300}{0{,}6 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}921978}{0{,}24} = 3{,}8416 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{3{,}8416} \cong 1{,}96.$$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ a 1,96 le corresponde el valor 0,9750;

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9750;\ 2 - \alpha = 1{,}9500;\ \alpha = 2 - 1{,}9500 = 0{,}0500.$$

$$1 - \alpha = 1 - 0{,}0500 = 0{,}95.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ nivel\ de\ confianza\ empleado\ ha\ sido\ del\ 95\ \%.}}$$