Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Pedro Ramón Podadera Sánchez y Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Se han de contestar tres problemas entre los seis propuestos. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen. Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Una agencia inmobiliaria tiene tres locales en alquiler, por los que ha cobrado en total 1 650 € en este mes. La agencia ha pagado al propietario del primer local el 95% de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; al propietario del segundo local, el 90 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; y al propietario del tercer local, el 80 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 € de ganancia. Se sabe también que el alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos. ¿Cuántos euros cobra la agencia por cada uno de los tres locales que tiene en alquiler?

Problema 2:

Una empresa apícola vende dos tipos de cajas con tres variedades de miel en cada una: miel de romero, miel de azahar y miel multifloral. La caja de tipo A contiene 2 tarros de miel de romero, 2 de azahar y 1 de multifloral. La caja de tipo B contiene 1 tarro de miel de romero, 2 de azahar y 2 de multifloral. Cada día la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero, 300 de miel de azahar y 250 de miel multifloral. Con cada caja de tipo A obtiene un beneficio de 7 euros y con cada caja de tipo B obtiene un beneficio de 5 euros.

a) ¿Cuántas cajas de cada tipo debe comercializar para obtener un beneficio máximo? (8 *puntos*)

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (2 *puntos*)

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4:

Enunciado: En una empresa se ha comprobado que sus beneficios están relacionados con su inversión en publicidad según la función $B(x) = 50\,000 + 40x - (\frac{x}{10})^2$ donde x es la inversión en publicidad $(x \geq 0)$ y $B(x)$es el beneficio obtenido, ambos en euros.

a) Calcula la cantidad invertida en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (4 puntos)

b) Calcula los intervalos para la inversión en publicidad en los que los beneficios crecen o decrecen a medida que se invierte en publicidad. (3 puntos)

c) ¿Existe un valor para la inversión en publicidad a partir del cual los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad? En caso afirmativo, determínalo. (3 puntos)

Problema 5:

Entre los clientes de una compañía de seguros de automóviles, un 30 % tiene menos de 30 años, un 55 % tiene entre 30 y 60 años, y el 15 % restante tiene más de 60 años. Se sabe que, entre los clientes de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte de accidente el año pasado; entre los clientes que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte de accidente el año pasado; y entre los clientes de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte de accidente el año pasado. Seleccionamos al azar un cliente de la compañía.

a) Llamemos *A* al suceso "el cliente seleccionado tiene más de 60 años" y llamemos *B* al suceso "el cliente seleccionado no presentó parte de accidente el año pasado". Calcula $P(A \cup B)$. (3 puntos)

b) Llamemos *C* al suceso "el cliente seleccionado tiene 30 años o más" y *D* al suceso "el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado". Calcula $P(C \cap D)$. (3 puntos)

c) Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenga 60 años o menos. (3 puntos)

Problema 6:

En un juego se lanzan dos monedas equilibradas y un dado de seis caras equilibrado. Un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien, si obtiene exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane. (2.5 puntos)

b) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas? (2.5 puntos)

c) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera un cinco al lanzar el dado? (2.5 puntos)

d) Llamemos *A* al suceso "el jugador no gana" y llamemos *B* al suceso "el jugador obtiene un seis al lanzar el dado". ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*? (2.5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Una agencia inmobiliaria tiene tres locales en alquiler, por los que ha cobrado en total 1 650 € en este mes. La agencia ha pagado al propietario del primer local el 95 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; al propietario del segundo local, el 90 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; y al propietario del tercer local, el 80 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 € de ganancia. Se sabe también que el alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos. ¿Cuántos euros cobra la agencia por cada uno de los tres locales que tiene en alquiler?

Solución:

Es un problema de sistemas de ecuaciones.

Como nos preguntan por lo que cobra la agencia por cada uno de los locales que alquila podemos definir las siguientes incógnitas:

x – Cantidad cobrada por el alquiler del primer local.

y – Cantidad cobrada por el alquiler del segundo local.

z – Cantidad cobrada por el alquiler del tercer local.

Como la agencia ha cobrado en total 1 650 €, la suma de las tres incógnitas (cantidades cobradas) debe ser esa cantidad:

$$x + y + z = 1650$$

A continuación, el enunciado nos dice lo que la agencia ha entregado a los dueños de los locales en forma de tanto por ciento, sin embargo, al finalizar, nos dice las ganancias, es decir, el dinero con el que se queda (no el que entrega). Por esto, hemos de tener en cuenta que, si la agencia entrega al primer dueño el 95 %, se queda con un 5 %, es decir, $0.05x$. De igual forma si la agencia entrega al segundo dueño el 90 %, se queda con un 10 %, es decir, $0.1y$. Por último, si la agencia entrega al tercer dueño el 80 %, se queda con un 20 %, es decir, $0.2z$. La suma de las tres cantidades son las ganancias totales:

$$0.05x + 0.1y + 0.2z = 132$$

También se sabe que el alquiler que se cobra por el primer local (x) es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos ($y+z$) por lo que la tercera ecuación es:

$$x = 2(y + z)$$

Si unimos las tres ecuaciones tenemos el sistema a resolver:

$$\begin{cases} x + y + z = 1650 \\ 0.05x + 0.1y + 0.2z = 132 \\ x = 2(y + z) \end{cases}$$

Podemos simplificar algo la resolución si multiplicamos la segunda ecuación por 100 y en la tercera debemos pasar las incógnitas al primer miembro:

$$\begin{cases} x + y + z = 1650 \\ 5x + 10y + 20z = 13200 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Para la resolución podemos elegir Gauss o Cramer. Yo aquí lo voy a resolver por los dos métodos. En el examen sólo hay que resolver por un método.

Por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 5 & 10 & 20 & 13200 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 0 & 5 & 15 & 4950 \\ 0 & -3 & -3 & -1650 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1650 \\ 0 & 5 & 15 & 4950 \\ 0 & 0 & 30 & 6600 \end{pmatrix}$$

$E_2 = E_2 - 5E_1$ $\qquad$ $E_3 = 5E_3 + 3E_2$

$E_3 = E_3 - E_1$

De la última ecuación tenemos que: $30z = 6600 \rightarrow z = \frac{6600}{30} = 220$

De la segunda ecuación tenemos que: $5y + 15z = 4950 \rightarrow 5y + 15 \cdot 220 = 4950 \rightarrow$

$5y = 4950 - 3300 \rightarrow 5y = 1650 \rightarrow y = \frac{1650}{5} = 330$

De la primera ecuación: $x + y + z = 1650 \rightarrow x + 330 + 220 = 1650 \rightarrow x = 1100$

Por lo que la agencia cobra por el alquiler del primer local 1 100 €, 330 € por el segundo y 220 € por el tercero.

Si lo resolvemos por Cramer tenemos que:

El sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas. Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 20 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -20 + 20 - 10 - 10 + 10 + 40 = 30$$

Cumple las condiciones para resolver por la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1650 & 1 & 1 \\ 13200 & 10 & 20 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{30} = \frac{-33000 + 0 - 26400 - 0 + 26400 + 66000}{30} = \frac{33000}{30} = 1100$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1650 & 1 \\ 5 & 13200 & 20 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{30} = \frac{-26400 + 33000 + 0 - 13200 + 16500 - 0}{30} = \frac{9900}{30} = 330$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1650 \\ 5 & 10 & 13200 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{30} = \frac{0 + 13200 - 16500 - 16500 - 0 + 26400}{30} = \frac{6600}{30} = 220$$

Lógicamente el resultado es el mismo que el anterior.

Problema 2:

Una empresa apícola vende dos tipos de cajas con tres variedades de miel en cada una: miel de romero, miel de azahar y miel multifloral. La caja de tipo A contiene 2 tarros de miel de romero, 2 de azahar y 1 de multifloral. La caja de tipo B contiene 1 tarro de miel de romero, 2 de azahar y 2 de multifloral. Cada día la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero, 300 de miel de azahar y 250 de miel multifloral. Con cada caja de tipo A obtiene un beneficio de 7 euros y con cada caja de tipo B obtiene un beneficio de 5 euros.

a) ¿Cuántas cajas de cada tipo debe comercializar para obtener un beneficio máximo?

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Solución:

Es un problema de programación lineal ya que tenemos dos tipos de cajas (A y B), un objetivo (maximizar beneficio) y unas restricciones (el número de tarros de cada tipo disponibles cada día).

Variables de decisión: Nos interesa saber cuántas cajas de cada tipo hay que comercializar para obtener el beneficio máximo por lo que las variables de decisión serán:

x – cajas de tipo A.

y – cajas de tipo B.

Función objetivo: Queremos un beneficio máximo. Como con cada caja de tipo A obtenemos 7 euros si comercializamos x ganamos $7x$. De la misma forma si con cada caja de tipo B ganamos 5 euros con las y cajas comercializadas ganamos $5y$. Sumando ambas cantidades tenemos que la función objetivo es:

$$B(x, y) = 7x + 5y$$

Restricciones: En principio nuestras variables no pueden ser negativas por lo que aplicaremos, ya que es posible:

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Todas las restricciones tienen que ver con el número de tarros de cada tipo disponibles:

Tenemos disponibles 280 tarros de miel de romero. Las cajas de tipo A llevan 2 de estos tarros si comercializamos x cajas necesitaremos $2x$ tarros. Las cajas de tipo B llevan 1 de estos tarros por lo que si comercializamos y cajas necesitaremos y tarros. La suma de ambas cantidades no debe superar el total (280). Por lo que la restricción será:

$$2x + y \leq 280$$

Tenemos disponibles 300 tarros de miel de azahar. Las cajas de tipo A llevan 2 de estos tarros si comercializamos x cajas necesitaremos $2x$ tarros. Las cajas de tipo B llevan 2 de estos tarros por lo que si comercializamos y cajas necesitaremos $2y$ tarros. La suma de ambas cantidades no debe superar el total (300). Por lo que la restricción será:

$$2x + 2y \leq 300$$

Tenemos disponibles 250 tarros de miel multifloral. Las cajas de tipo *A* llevan 1 de estos tarros si comercializamos *x* cajas necesitaremos *x* tarros. Las cajas de tipo *B* llevan 2 de estos tarros por lo que si comercializamos *y* cajas necesitaremos 2*y* tarros. La suma de ambas cantidades no debe superar el total (250). Por lo que la restricción será:

$$x + 2y \leq 250$$

Región factible o solución. Vendrá dada por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

$$2x + y \leq 280$$

$$2x + 2y \leq 300$$

$$x + 2y \leq 250$$

Las dos primeras inecuaciones nos informan que la representación será en el primer cuadrante.

Para representar la tercera igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "*y*":

$$y = 280 - 2x$$

tabla de valores:

x	140	100	0
y	0	80	280

Para representar la cuarta igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "*y*":

$$2x + 2y = 300;\ y = 150 - x$$

tabla de valores:

x	0	75	150
y	150	75	0

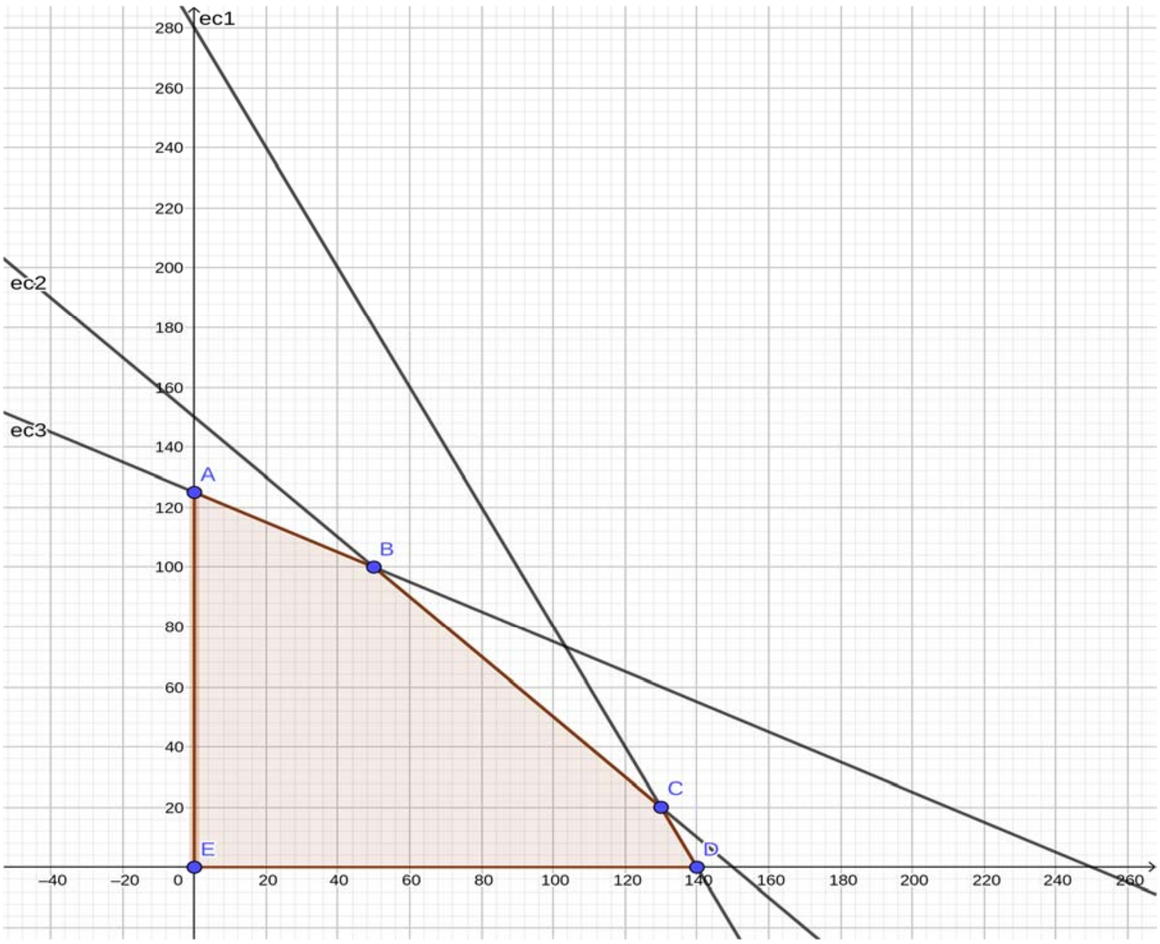
Para representar la quinta igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "*y*":

$$x + 2y = 250;\ y = 125 - x/2$$

tabla de valores:

x	0	100	250
y	125	75	0

Después de representar cada recta tenemos que sustituir un valor para hallar la región factible, en todas podemos sustituir el (0, 0) y nos sale que la región se extiende hacia ese punto. Por lo que la representación queda:



Se trata de una región cerrada que presenta cinco vértices:

- El primero es el A(0, 125) sale directamente de nuestra tabla.
- El segundo es el B(50, 100) sale de igualar las ecuaciones:
$$250-x/2=150-x \to 250-x=300-2x \to x=50 \to y=150-50=100$$
- El tercero es el C(130, 20) sale de igualar las ecuaciones:
$$150-x=280-2x \to 2x-x=280-150 \to x=130 \to y=150-130=20$$
- El cuarto es el D(140, 0) sale directamente de nuestra tabla.
- El quinto es el (0 ,0) sale directamente de nuestra tabla.

Los 5 vértices a estudiar son: (0, 125); (50, 100); (130, 20); (140, 0) y (0, 0)

La función objetivo es: $B(x, y) = 7x + 5y$ sustituimos los vértices hallados:

$B(0,125) = 7\cdot 0 + 5\cdot 125 = 625$ *euros*
$B(50,100) = 7\cdot 50 + 5\cdot 100 = 850$ *euros*
$B(130,20) = 7\cdot 130 + 5\cdot 20 = 1\,010$ *euros*
$B(140,0) = 7\cdot 140 + 5\cdot 0 = 980$ *euros*
$B(0,0) = 7\cdot 0 + 5\cdot 0 = 0$ *euros*

Como buscamos el beneficio máximo tenemos que se da comercializando **130** cajas del tipo *A* y **20** cajas del tipo *B* y el beneficio es de **1 010 €.**

Problema 3:

Se considera la función$f(x)=\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores**.**

Solución:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función racional por lo que existirá en todos los puntos, salvo en aquellos en los que se anule el denominador. Igualamos a cero el denominador:

$(x+1)^2=0\to x=-1$por lo que no existe en ese punto.

El **dominio** será: $Dom f(x)=\mathbb{R}-\{-1\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de *x* cuando $f(x)=0$:

$f(x)=\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}=0$ por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$x^2+x-2=0\to x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\left\langle\begin{matrix}\frac{-1+3}{2}=1\\ \frac{-1-3}{2}=-2\end{matrix}\right.$ por lo que la función **CORTA al eje OX en** $(1,0)$ **y** $(-2,0)$**.**

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de *f(x)* cuando $x=0$:

$f(0)=\frac{0^2+0-2}{(0+1)^2}=-2$ por lo que es el punto $(0,-2)$

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x+1}=1$ luego **tiene asíntota horizontal en** $y=1$. (Hemos desarrollado el denominador para verlo más claro)

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x+1}=1$ luego **tiene asíntota horizontal en** $y=1$. (Hemos desarrollado el denominador para verlo más claro)

No lo pide pero para realizar el dibujo es útil hallar si la función va por encima o por debajo de la asíntota. Para ello hallamos valores grandes (positivos y negativos) de la función y los comparamos con el valor $y=1$:

$f(10)=\frac{10^2+10-2}{10^2+2\cdot10+1}\simeq0.8925<1$ por lo que en $+\infty$ va por debajo de la asíntota.

$f(-10)=\frac{(-10)^2-10-2}{(-10)^2+2\cdot(-10)+1}\simeq1.09>1$ por lo que en $-\infty$ va por encima de la asíntota.

Autores: Pedro Podadera y Antonio Menguiano
www.apuntesmareaverde.org.es

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos uno en: $x = -1$, calculamos los límites:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = \left(\frac{-2}{0}\right) = \left\langle \begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = -\infty \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = -\infty \end{array} \right.$$ por lo que $x = -1$ es asíntota vertical

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada. Para calcular la derivada es conveniente desarrollar el cuadrado del denominador ya que así no hay que utilizar la regla de la cadena:

$f(x) = \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x+1}$ calculamos la derivada aplicando la regla del cociente:

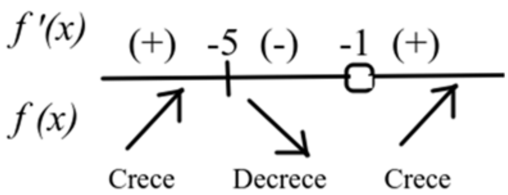
$$f'(x) = \frac{(2x+1)\cdot(x^2+2x+1)-(x^2+x-2)\cdot(2x+2)}{(x+1)^4} = \frac{x^2+6x+5}{(x+1)^4} = 0$$

Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$$x^2+6x+5 = 0 \rightarrow x = \frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1} = \frac{-6\pm\sqrt{16}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-6+4}{2} = -1 \\ \frac{-6-4}{2} = -5 \end{array} \right.$$

por lo que tiene dos posibles puntos críticos, sin embargo el valor $x = -1$ sabemos que es un punto de no existencia de la función por lo que no habrá en él máximo ni mínimo.

Con estos puntos y la discontinuidad del dominio $x = -1$ estudiamos el signo de la derivada antes y



después de los valores considerados.

Los valores calculados para establecer el signo han sido:

$f'(-6) = 0.008 > 0$

$f'(-2) = -3 < 0$

$f'(0) = 5 > 0$

Por lo que tenemos que la función decrece en]-5, -1[

Crece en]-∞, -5[U]-1, +∞[

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

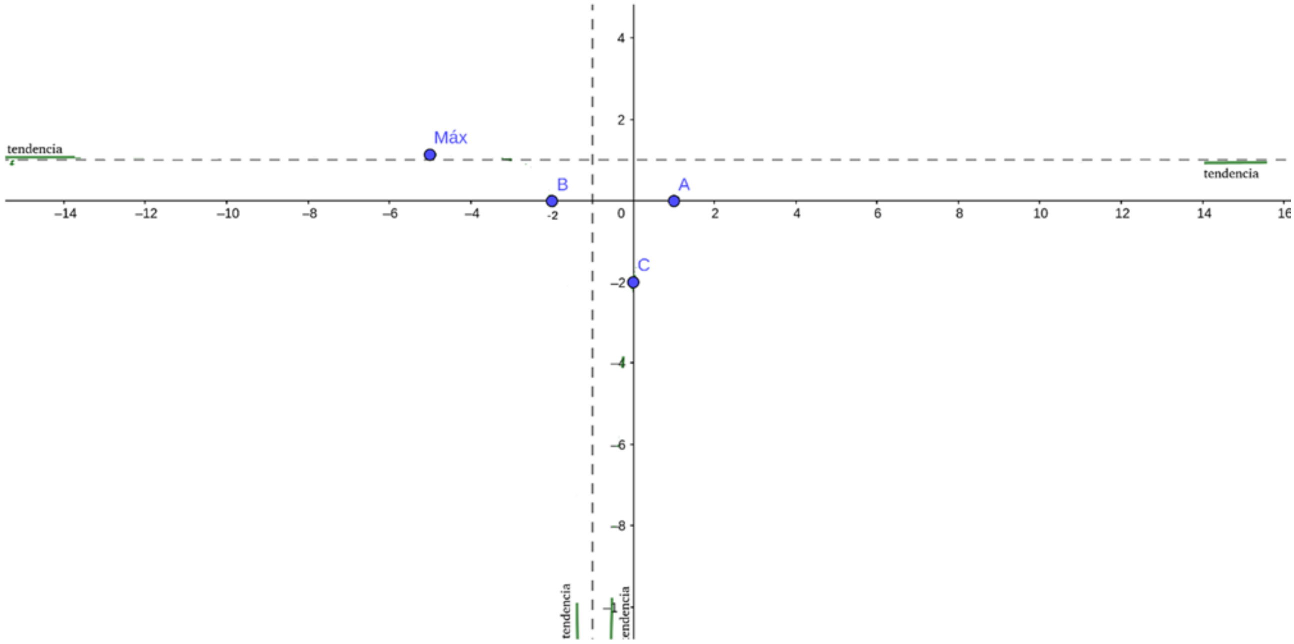
Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un **máximo relativo** en el punto de abscisa

$x = -5$ que es el punto $(-5, \frac{9}{8})$(hemos sustituido en la expresión de la función)

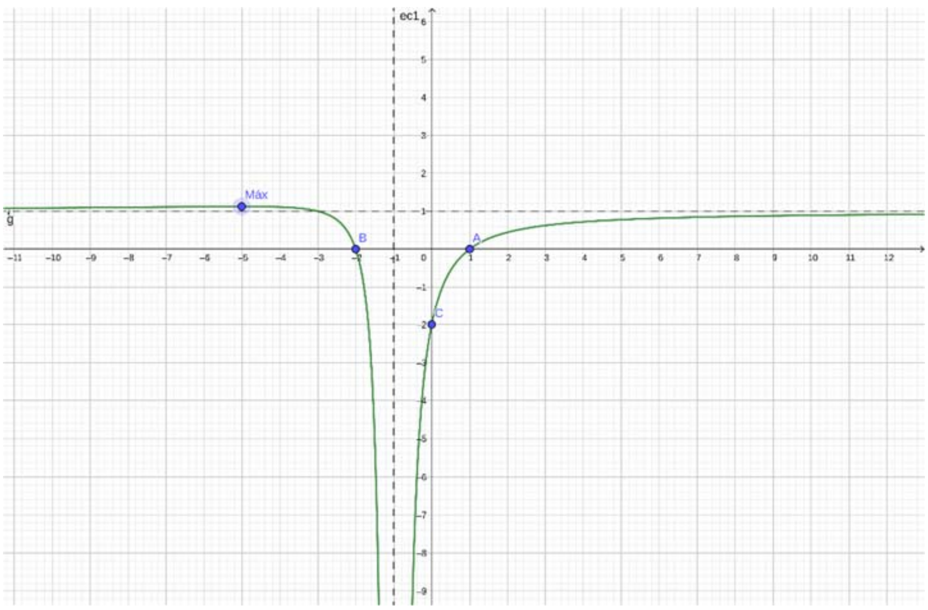
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Dibujamos los puntos de corte $(1,0)$,$(-2,0)$y$(0,-2)$, el máximo en$(-5,\frac{9}{8})$, la asíntota vertical en $x=-1$ (con sus tendencias a infinito) y la horizontal $y=1$ con sus tendencias

y obtenemos:



La gráfica queda así:



Problema 4:

Enunciado: En una empresa se ha comprobado que sus beneficios están relacionados con su inversión en publicidad según la función $B(x) = 50\,000 + 40x - (\frac{x}{10})^2$ donde x es la inversión en publicidad $(x \geq 0)$ y $B(x)$ es el beneficio obtenido, ambos en euros.

a) Calcula la cantidad invertida en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

b) Calcula los intervalos para la inversión en publicidad en los que los beneficios crecen o decrecen a medida que se invierte en publicidad.

c) ¿Existe un valor para la inversión en publicidad a partir del cual los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad? En caso afirmativo, determínalo.

Solución:

a) Calcula la cantidad invertida en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Como tenemos directamente la función beneficios sólo tenemos que buscar el máximo de la misma.

Para simplificar los cálculos podemos quitar el paréntesis del enunciado y trabajar con:

$$B(x) = 50000 + 40x - (\frac{x}{10})^2 = 50000 + 40x - \frac{x^2}{100}$$

Hay dos maneras de abordar el problema: teniendo en cuenta que se trata de un polinomio de segundo grado o derivando y haciendo un ejercicio de monotonía normal. Yo lo voy a hacer por los dos métodos pero en el examen basta hacerlo por uno de ellos.

- Se trata de una función polinómica de segundo grado con el coeficiente de x^2 negativo por lo que presentará un máximo en su vértice.

Podemos calcular el máximo sabiendo que la abscisa del mismo se encuentra en $\frac{-b}{2a}$ por lo que tenemos que: $x_{max} = \frac{-40}{2\cdot(\frac{-1}{100})} = 2000$ que será el máximo local.

Obtenemos la ordenada del mismo: $y_{max} = 50000 + 40 \cdot 2000 - \frac{2000^2}{100} = 90\,000$.

Por lo que la inversión en publicidad que origina el máximo beneficio es de **2 000 euros** y el beneficio obtenido es de **90 000 euros**.

- Podemos también hacer el problema estudiando la monotonía de la función. Para ello derivamos e igualamos a cero la derivada:

$$B'(x) = 40 - \frac{2x}{100} = 40 - \frac{x}{50} = 0 \to 40 - \frac{x}{50} = 0 \to 40 = \frac{x}{50} \to x = 2\,000$$

Nos ha salido como punto crítico el $x = 2000$ pero hay que comprobar su naturaleza. Para ello vamos a utilizar el criterio de la segunda derivada:

$$B''(x) = \frac{-1}{50} < 0$$

Como la segunda derivada es siempre negativa también lo será en nuestro punto $x = 2000$ por lo que se trata de un máximo relativo.

Hallando la segunda coordenada del máximo $B(2000) = 90000$ llegamos a la misma solución anterior.

Sin embargo de esta manera habría que demostrar que es un máximo absoluto. Para hacerlo basta con recordar que se trata de una función continua (es un polinomio) definida en el intervalo $[0, +\infty[$. Hallamos lo que vale la función en los extremos del intervalo y en el máximo relativo:

$B(0) = 50000 + 40 \cdot 0 - \frac{0^2}{100} = 50000;$ $\qquad$ $B(2000) = 50000 + 40 \cdot 2000 - \frac{2000^2}{100} = 90000$

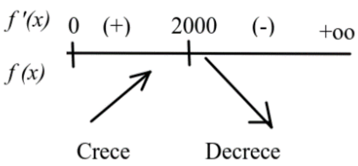
(Para ver lo que vale en el infinito hallamos un límite:

$$B(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} (50000 + 40x - (\frac{x}{10})^2) = -\infty$$

Como el mayor valor es el $x = 2\,000$ tenemos que es el **máximo absoluto**.

b) Calcula los intervalos para la inversión en publicidad en los que los beneficios crecen o decrecen a medida que se invierte en publicidad.

El intervalo de definición es $[0, +\infty[$, hemos hecho la derivada en el apartado anterior y la hemos igualado a cero comprobamos el signo de la derivada antes y después del cero (no hay problemas de continuidad):



Los signos de la derivada los hemos comprobado con los valores:

$B'(1000) = 40 - \frac{2\cdot1000}{100} = 20 > 0;$ $\qquad$ $B'(2500) = 40 - \frac{2\cdot2500}{100} = -10 < 0$

Con lo que tenemos que crece en $]-\infty, 2000[$ y decrece en $]2000, +\infty[$

c) ¿Existe un valor para la inversión en publicidad a partir del cual los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad? En caso afirmativo, determínalo.

En primer lugar hay que saber qué beneficio tenemos si no invertimos nada en publicidad ($x = 0$):

$$B(0) = 50000 + 40 \cdot 0 - (\frac{0}{10})^2 = 50000 \text{ euros}$$

Vamos a hallar para qué valor obtenemos ese mismo beneficio: $B(x) = 50000$

$50000 + 40x - (\frac{x}{10})^2 = 50000;$ $\qquad$ $40x - (\frac{x^2}{100}) = 0$

$x \cdot (40 - \frac{x}{100}) = 0 \rightarrow x = 0$ (primera solución); $\qquad$ $40 - \frac{x}{100} = 0 \rightarrow x = 4000$ (segunda solución)

Luego si se invierten 4000 euros en publicidad se obtienen los mismos beneficios que si no se invierte nada.

Como la función es decreciente en $]2000, +\infty[$ tenemos que a partir del valor 4 000 la función será decreciente por lo que los beneficios obtenidos serán menores que si no se invierte nada en publicidad.

Por lo que a partir de **4 000 euros** de inversión los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad.

Problema 5:

Entre los clientes de una compañía de seguros de automóviles, un 30 % tiene menos de 30 años, un 55 % tiene entre 30 y 60 años, y el 15 % restante tiene más de 60 años. Se sabe que, entre los clientes de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte de accidente el año pasado; entre los clientes que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte de accidente el año pasado; y entre los clientes de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte de accidente el año pasado. Seleccionamos al azar un cliente de la compañía.

a) Llamemos *A* al suceso "el cliente seleccionado tiene más de 60 años" y llamemos *B* al suceso "el cliente seleccionado no presentó parte de accidente el año pasado". Calcula $P(A \cup B)$.

b) Llamemos *C* al suceso "el cliente seleccionado tiene 30 años o más" y *D* al suceso "el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado". Calcula $P(C \cap D)$.

c) Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenga 60 años o menos.

Solución:

Es un problema de probabilidad en el que hay que tener cuidado a la hora de nombrar sucesos ya que las letras nos las fijan en el enunciado. Básicamente tenemos 3 intervalos de edad de los clientes y luego nos dicen si presentó o no parte de accidente por lo que necesitamos 5 letras para nuestros sucesos. Yo he elegido estas letras para definir los sucesos:

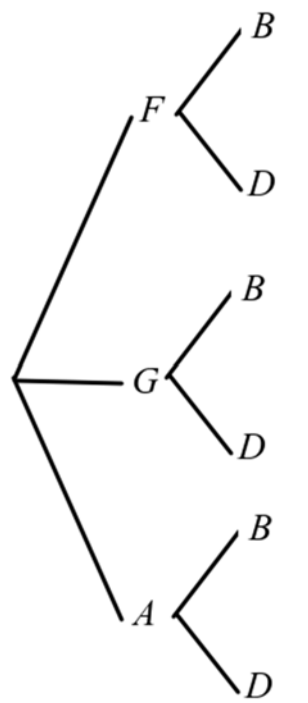
F – El cliente seleccionado tiene menos de 30 años.

G – El cliente seleccionado tiene entre 30 y 60 años.

A – El cliente seleccionado tiene más de 60 años. (Nos la da el enunciado)

B – El cliente seleccionado no presentó parte de accidente el año pasado. (Nos la da el enunciado)

D – El cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado. (Nos la da el enunciado)



Se puede resolver por diagrama de árbol o por tabla de contingencias, sin embargo, como los datos que da el enunciado son probabilidades condicionadas, es más fácil por árbol.

El árbol en el que nos vamos a basar para resolver el problema es:

Tenemos ahora que volver al enunciado para completar el árbol con las probabilidades de cada suceso:

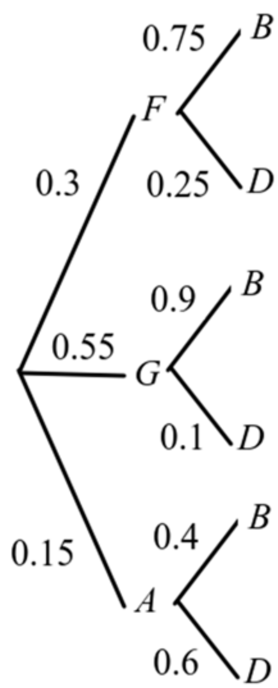
Entre los clientes de una compañía de seguros de automóviles, un 30 % tiene menos de 30 años eso quiere decir que $P(F) = 0.3$, un 55 % tiene entre 30 y 60 años lo que nos lleva a $P(G) = 0.55$, y el 15 % restante tiene más de 60 años lo que quiere decir que $P(A) = 0.15$. En esta parte nos han dado las probabilidades de las primeras ramas del árbol.

Entre los clientes de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte de accidente el año pasado, esto es una condicionada puesto que no habla de los clientes en general sino entre los que tienen menos de 30 años, por lo que tenemos que: $P(B/F) = \frac{3}{4}$; es fácil deducir que 1 de cada 4 sí presentó un parte por tanto: $P(D/F) = \frac{1}{4}$

Entre los clientes que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte de accidente el año pasado, esto es una condicionada puesto que no habla de los clientes en general sino entre los que tienen entre 30 y 60 años, por lo que tenemos que: $P(B/G) = \frac{9}{10}$; es fácil deducir que 1 de cada 10 sí presentó un parte por tanto: $P(D/G) = \frac{1}{10}$

Por último tenemos que entre los clientes de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte de accidente el año pasado, esto es una condicionada puesto que no habla de los clientes en general sino entre los que tienen más de 60 años, por lo que tenemos que: $P(B/A) = \frac{2}{5}$; es fácil deducir que 3 de cada 5 sí presentó un parte por tanto: $P(D/A) = \frac{3}{5}$

Ponemos todas estas probabilidades en el árbol (hemos utilizado decimales en lugar de fracciones para facilitar la comprensión):



Ahora podemos responder a las cuestiones planteadas:

a) Llamemos *A* al suceso “el cliente seleccionado tiene más de 60 años” y llamemos *B* al suceso “el cliente seleccionado no presentó parte de accidente el año pasado”. Calcula $P(A \cup B)$

Utilizamos la definición de la unión de sucesos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$P(A) = 0.15$ (directamente del enunciado)

Por la probabilidad total:

$P(B) = P(F \cap B) + P(G \cap B) + P(A \cap B) = P(F) \cdot P(B/F) + P(G) \cdot P(B/G) + P(A) \cdot P(B/A) =$

$= 0.3 \cdot 0.75 + 0.55 \cdot 0.9 + 0.15 \cdot 0.4 = 0.78$

En el árbol podemos calcular la intersección:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0.15 \cdot 0.4 = 0.06$

Sustituyendo valores:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.15 + 0.78 - 0.06 = 0.87 = 87\ \%.$$

$$P(A \cup B) = \mathbf{0.87}$$

b) Llamemos *C* al suceso "el cliente seleccionado tiene 30 años o más" y *D* al suceso "el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado". Calcula $P(C \cap D)$.

El suceso *C* que presenta el enunciado no es más que la unión de nuestros sucesos G y A. Por lo que, utilizando de nuevo la probabilidad total y teniendo en cuenta que los sucesos G y A son disjuntos (no tienen elementos en común):

$P(C \cap D) = P((G \cup A) \cap D) = P(G \cap D) + P(A \cap D) = P(G) \cdot P(D/G) + P(A) \cdot P(D/A) =$

$= 0.55 \cdot 0.1 + 0.15 \cdot 0.6 = 0.145 = 14.5\%$

$$P(C \cap D) = \mathbf{0.145.}$$

c) Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenga 60 años o menos.

Volvemos a tener que juntar dos sucesos ya que el tener 60 años o menos son nuestros sucesos $G \cup F$

Por otro lado, estamos con probabilidad a posteriori (Bayes) ya que sabemos que presentó un parte.

$$P(G \cup F/D) = \frac{P(G \cap D) + P(F \cap D)}{P(D)}$$

Del árbol tenemos: $P(G \cap D) = 0.55 \cdot 0.1 = 0.055$

$P(F \cap D) = 0.3 \cdot 0.25 = 0.075$

Para hallar la $P(D)$ podemos usar la probabilidad total o el suceso contrario:

$P(D) = 1 - P(B) = 1 - 0.78 = 0.22$

Sustituyendo valores:

$$P(G \cup F/D) = \frac{P(G \cap D) + P(F \cap D)}{P(D)} = \frac{0.055 + 0.075}{0.22} \simeq 0.5909 = 59.09\ \%$$

El cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, la probabilidad de que tenga 60 años o menos es $\mathbf{0.5909}$.

Problema 6:

En un juego se lanzan dos monedas equilibradas y un dado de seis caras equilibrado. Un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien, si obtiene exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane.

b) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

c) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera un cinco al lanzar el dado?

d) Llamemos *A* al suceso "el jugador no gana" y llamemos *B* al suceso "el jugador obtiene un seis al lanzar el dado". ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*?

Solución:

Es un problema de probabilidad en el que se plantea un juego de tirar dos monedas y un dado. En estos problemas de juegos lo mejor es JUGAR, es decir, plantear las opciones del juego y ver los sucesos a los que nos conducen. Yo he elegido estas letras para definir los sucesos:

C – Obtenemos una cara al lanzar una moneda.

X – Obtenemos una cruz al lanzar una moneda.

1, 2, 3, 4, 5, 6 – Obtenemos un 1, 2, 3, 4, 5 o 6 al lanzar el dado.

Lo más sencillo en este tipo de ejercicios suele ser plantear un árbol que nos dé todas las posibilidades del juego.

Como la moneda está equilibrada las probabilidades de sacar cara o cruz son las mismas por lo que:

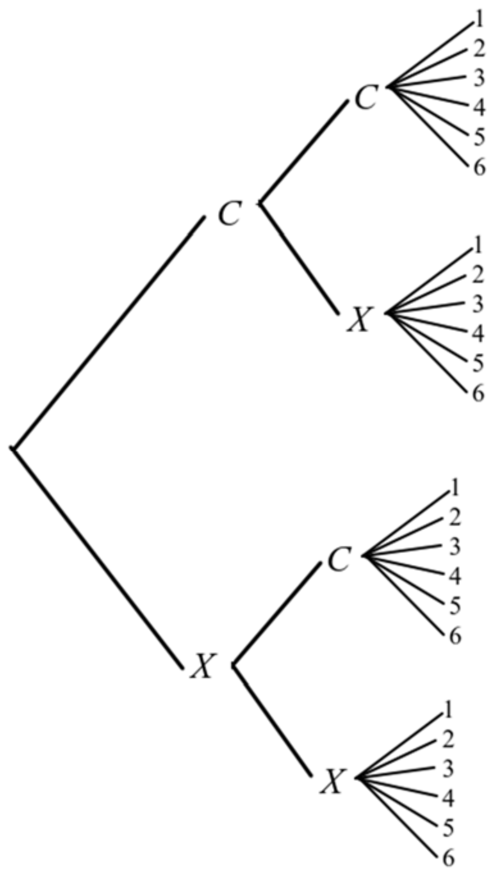
$P(C) = \frac{1}{2}$ y $P(X) = \frac{1}{2}$ (hemos aplicado Laplace)

Por otro lado, el dado también está equilibrado, por lo que tenemos que:

$$P(1) = \frac{1}{6};\ P(2) = \frac{1}{6};\ P(3) = \frac{1}{6};\ P(4) = \frac{1}{6};\ P(5) = \frac{1}{6};\ P(6) = \frac{1}{6}$$

(hemos aplicado, de nuevo, Laplace)

El árbol en el que nos vamos a basar para resolver el problema es:



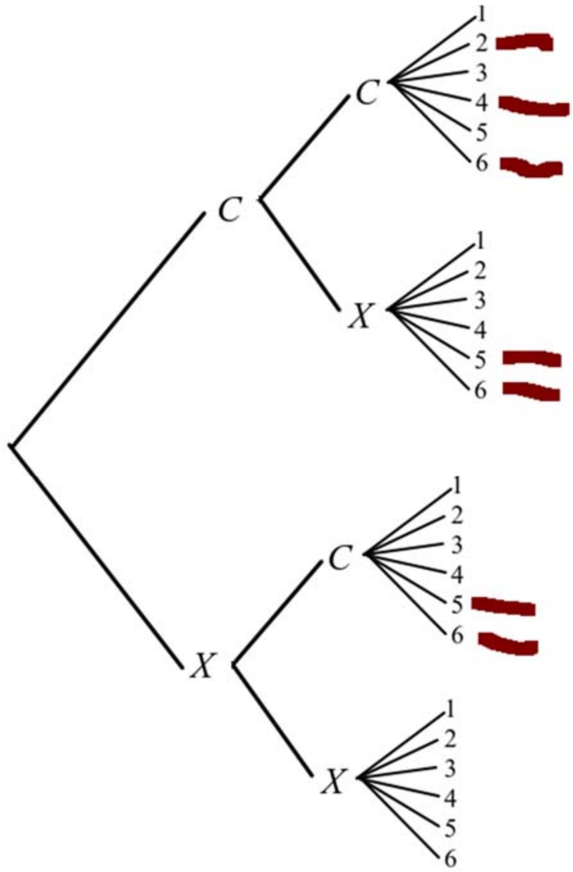
Todas las ramas de los tiros de moneda tienen probabilidad $\frac{1}{2}$ y todas las del tiro del dado tienen $\frac{1}{6}$por lo que todos los sucesos son equiprobables.

Si contamos el número total de sucesos posibles obtenemos que son 24.

Ahora podemos responder a las cuestiones planteadas:

a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane.

En el enunciado dice que un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien, si obtiene exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado. Es cuestión tan sólo de volver a nuestro diagrama y ver en cuántas ocasiones gana. Lo he marcado en rojo:



Utilizando la Ley de Laplace tenemos que gana en 7 ocasiones de las 24 posibles por lo que la probabilidad de ganar es:

$$P(Gana) = \frac{7}{24} \simeq \mathbf{0.2917} = 29.17\ \%$$

b) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

Como sabemos que ha ganado se trata de una probabilidad a posteriori por lo que utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(CC/Gana) = \frac{P(CC \cap Gana)}{P(Gana)}$$

Volvemos a nuestro árbol y vemos que saca dos caras y gana en 3 ocasiones por lo que tenemos que: $P(CC \cap Gana) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

Sustituyendo valores tenemos que:

$$P(CC/Gana) = \frac{P(CC \cap Gana)}{P(Gana)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{24}} = \frac{3}{7} \simeq 0.4286 = 42.86\ \%$$

Si se sabe que ha ganado, la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas es $\mathbf{0.4286}$.

c) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera un cinco al lanzar el dado?

Como sabemos que ha ganado se trata de una probabilidad a posteriori por lo que utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(5/Gana) = \frac{P(5 \cap Gana)}{P(Gana)}$$

Volvemos a nuestro árbol y vemos que saca un 5 y gana en 2 ocasiones por lo que tenemos que:

$$P(5 \cap Gana) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

Sustituyendo valores tenemos que:

$$P(5/Gana) = \frac{P(5 \cap Gana)}{P(Gana)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{24}} = \frac{2}{7} \simeq 0.2857 = 28.57\ \%$$

d) Llamemos *A* al suceso "el jugador no gana" y llamemos *B* al suceso "el jugador obtiene un seis al lanzar el dado". ¿Son independientes los sucesos *A* y *B*?

Para saber si dos sucesos son independientes podemos hacerlo de dos formas:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, o bien, $P(A/B) = P(A)$

Yo voy a utilizar la primera forma.

La $P(A)$es la probabilidad de NO ganar por lo que será lo contrario a ganar, que ya es una probabilidad conocida. Utilizando el suceso contrario u opuesto tenemos que:

$$P(A) = 1 - P(Ganar) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$$

La $P(B)$ es la de obtener un 6 al lanzar el dado por lo que, volviendo a nuestro diagrama, tenemos que lo saca 4 veces:

$$P(B) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

El suceso $A \cap B$ sería las veces que no gana y obtiene un 6. Si volvemos al diagrama tenemos que esto suceso sólo en un caso (cuando obtiene 2 cruces) por lo que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{24}$$

Podemos comprobar que: $\frac{1}{24} \neq \frac{17}{24} \cdot \frac{1}{6}$ por lo que:

Los sucesos *A* y *B* **NO** SON INDEPENDIENTES.

Autores: Pedro Podadera y Antonio Menguiano
www.apuntesmareaverde.org.es

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema 1:

1º) Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$.

$a)$ Justifica cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúa las que sean realizables:

$1 \rightarrow \quad B + 2CA.$

$2 \rightarrow \quad A - (BC)^t$, siendo $(BC)^t$ la matriz traspuesta de (BC).

$3 \rightarrow \quad CAB.$

$b)$ Resuelve la ecuación matricial: $\frac{1}{5} \cdot (B + AX) = C^t$, siendo C^t la matriz traspuesta de C.

Problema 2:

2º) Un vendedor dispone de café colombiano y café brasileño, y con ellos realiza mezclas que pone a la venta. Si mezcla a partes iguales los dos tipos de café, obtiene una mezcla que vende a 15 euros el kilo; si la proporción en la mezcla es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño, vende la mezcla resultante a 10 euros el kilo. El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano y de 210 kilos de café brasileño. Desea hacer dos mezclas de modo que sus ingresos por venta sean máximos.

$a)$ Halla cuántos kilos de cada mezcla debe producir para obtener el ingreso máximo.

$b)$ ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Problema 3:

3º) Se considera la función $f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}$, se pide:

$a)$ Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

$b)$ Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

$c)$ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$d)$ Los máximos y mínimos locales, si existen.

$e)$ La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Problema 4:

4º) Una máquina está productiva durante un año desde su compra. Se sabe que el rendimiento (en porcentaje) que tiene la máquina x meses después de su compra viene dado por la función $f(x) = \frac{1}{10}(800 + 15x + 6x^2 - x^3)$, para cualquier x entre 0 y 12.

a) ¿Es el rendimiento que tiene la máquina un mes después de su compra superior al rendimiento que tiene dos meses después de su compra?

b) ¿Tras cuántos meses después de su compra alcanza la máquina su mayor rendimiento?; ¿cuál es dicho rendimiento máximo?

c) A lo largo del año, ¿tiene en algún momento la máquina un rendimiento inferior al 10 %?

Problema 5:

5º) Dados dos sucesos A y B, se sabe que $P(B) = 0{,}4$; $P(A^c \cap B^c) = 0{,}2$ y $P(A \cap B) = 0{,}3$:

a) Calcular la probabilidad del suceso $A \cup B$.

b) Calcular la probabilidad de que solamente se verifique uno de los dos sucesos.

c) Calcular la probabilidad de B condicionada a A.

d) ¿Son independientes los sucesos A y B?

Problema 6:

6º) El director de una entidad que audita la contabilidad de empresas sebe, por experiencias pasadas, que cuando se hace una auditoria el 30 % de las empresas merece una calificación de “Excelente”, el 50 % de las empresas merece la calificación de “Aceptable” y el 20 % restante merece una calificación de “Deficiente”. El director también sabe que entre los auditores de su entidad hay un 90 % de auditores que siempre auditan correctamente y dan a cada empresa la calificación que merece; pero hay un 10 % de auditores que no auditan correctamente y dan siempre una calificación de “Aceptable”.

a) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación de “Deficiente”?

b) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece?

c) Para analizar si un determinado auditor audita correctamente o no, el director le encarga que audite la contabilidad de una empresa escogida al azar. No sabemos cuál es la calificación que merece esa empresa. Si el auditor da la calificación de “Aceptable”, ¿cuál es la probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}\ y\ C=(-2 \quad -2)$.

$a)$ Justifica cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúa las que sean realizables:

$1 \rightarrow \ B+2CA.$

$2 \rightarrow \ A-(BC)^t$, siendo $(BC)^t$ la matriz traspuesta de (BC).

$3 \rightarrow \ CAB.$

$b)$ Resuelve la ecuación matricial: $\frac{1}{5}\cdot(B+AX)=C^t$, siendo C^t la matriz traspuesta de C.

Solución:

$a)$ Debe tenerse en cuanta que para sumar matrices tienen que tener la misma dimensión y que el producto de matrices solamente es posible si el número de columnas de la primera es igual que el número de filas de la segunda.

$$1 \rightarrow \ B+2CA=\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}+2(-2 \quad -2)\cdot\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}+2(-16 \quad -8)=$$

$$=\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}+(-32 \quad -16)\Rightarrow \underline{B+2CA \Rightarrow No\ es\ posible}.$$

$$2 \rightarrow \ A-(BC)^t=A-\left[\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}(-2 \quad -2)\right]^t=A-\begin{pmatrix}8 & 8\\ -12 & -12\end{pmatrix}^t=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & -12\\ 8 & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 12\\ -6 & 16\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{A-(BC)^t=2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 6\\ -3 & 8\end{pmatrix}}.$$

$$3 \rightarrow \ CAB=(-2 \quad -2)\cdot\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}=(-16 \quad -8)\cdot\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{CAB=(16)}.$$

$b)\ \frac{1}{5}\cdot(B+A\cdot X)=C^t;\ \ B+A\cdot X=5C^t;\ \ A\cdot X=5C^t-B;$

$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(5C^t-B);\ \ I\cdot X=A^{-1}\cdot(5C^t-B)\Rightarrow \underline{X=A^{-1}\cdot(5C^t-B)}.$

$$|A|=\left|\begin{pmatrix}6 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}\right|=24;\ \ A^t=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix};\ \ Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -2 & 6\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}4 & 0\\ -2 & 6\end{pmatrix}}{24}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot(5C^t-B)=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\left[5\cdot\begin{pmatrix}-2\\ -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-10\\ -10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\ 6\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\ -16\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}-12\\ -42\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 7\end{pmatrix}}.$$

Problema 2:

2º) Un vendedor dispone de café colombiano y café brasileño, y con ellos realiza mezclas que pone a la venta. Si mezcla a partes iguales los dos tipos de café, obtiene una mezcla que vende a 15 euros el kilo; si la proporción en la mezcla es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño, vende la mezcla resultante a 10 euros el kilo. El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano y de 210 kilos de café brasileño. Desea hacer dos mezclas de modo que sus ingresos por venta sean máximos.

a) Halla cuántos kilos de cada mezcla debe producir para obtener el ingreso máximo.

b) ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución:

a) Sean x e y los kilos de café colombiano y brasileño que mezcla el vendedor, respectivamente.

Las condiciones son las siguientes, considerando que se obtiene un kilo de café en cada mezcla, de tal forma que en la primera mezcla 0,5 kilos de cada café y en la segunda, 0,25 kilos de colombiano y 0,75 kilos de brasileño:

$$\left.\begin{array}{r}0{,}5x+0{,}25y\le 100\\ 0{,}5x+0{,}75y\le 210\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}2x+y\le 400\\ 2x+3y\le 840\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}.$$

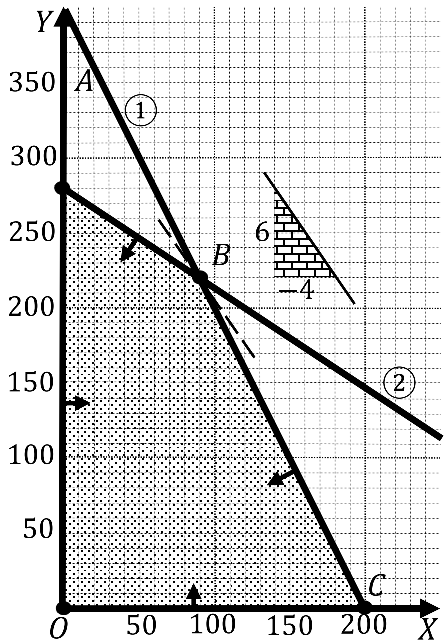
$$(1) \Rightarrow 2x+y\le 400 \Rightarrow y\le 400-2x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$$

x	100	210
y	200	170

$$(2) \Rightarrow 2x+3y\le 840 \Rightarrow y\le \frac{840-2x}{3} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$$

x	0	150
y	280	180

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r}x=0\\ 2x+3y=840\end{array}\right\}\Rightarrow 3y=840;$$

$y=280\Rightarrow A(0,280).$

$$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r}2x+y=400\\ 2x+3y=840\end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}-2x-y=-400\\ 2x+3y=840\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 2y=440;\ \ y=220;\ \ 2x+220=400;$

$2x=180;\ \ x=90\Rightarrow B(90,220).$

$$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r}y=0\\ 2x+y=400\end{array}\right\}\Rightarrow 2x=400;\ \ x=200\Rightarrow C(200,0).$$

La función de objetivos es $f(x,y)=15x+10y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A\Rightarrow f(0,280)=15\cdot 0+10\cdot 280=0+2.800=2.800.$

$B\Rightarrow f(90,220)=15\cdot 90+10\cdot 220=1.350+2.200=3.550.$

$C \Rightarrow f(200,0) = 15 \cdot 200 + 10 \cdot 0 = 3.000 + 0 = 3.000.$

El máximo se produce en el punto $B(90,220)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 15x + 10y = 0 \Rightarrow y = -\frac{15}{10}x = -\frac{3}{2}x \Rightarrow m = -\frac{6}{4}.$

$\underline{\textit{Ingreso máximo mezclando } 90 \textit{ kilos de colombiano y } 220 \textit{ de brasileño}}.$

$b)\ \underline{\textit{El ingreso máximo es de } 3.550 \textit{ euros}}.$

Problema 3:

3º) Se considera la función $f(x) = \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución:

a) Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 - x - 1 = 0;\ \ x = \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}.$$

Punto de corte con el eje Y: $f(0) = \frac{3\cdot 0^2-4\cdot 0-4}{0^2-0-1} = \frac{-4}{-1} = 4 \Rightarrow \underline{A(0,4)}.$

Cortes eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = 0;\ \ 3x^2 - 4x - 4 = 0;\ \ x = \frac{4\pm\sqrt{16+48}}{6} =$

$$= \frac{4\pm\sqrt{64}}{6} = \frac{4\pm 8}{6} = \frac{2\pm 4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} \to \underline{B\left(-\frac{2}{3}, 0\right)} \\ x_2 = 6 \to \underline{C(2,0)} \end{cases}.$$

b) Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = 3 \Rightarrow$$

$$\underline{La\ recta\ y = 3\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Las\ rectas\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0{,}62\ y\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}62\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales}$$

c) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{(6x-4)\cdot(x^2-x-1)-(3x^2-4x-4)\cdot(2x-1)}{(x^2-x-1)^2} =$$

$$= \frac{6x^3-6x^2-6x-4x^2+4x+4-(6x^3-3x^2-8x^2+4x-8x+4)}{(x^2-x-1)^2} = \frac{6x^3-10x^2-2x+4-(6x^3-11x^2-4x+4)}{(x^2-x-1)^2} =$$

$$= \frac{6x^3-10x^2-2x+4-6x^3+11x^2+4x-4}{(x^2-x-1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x^2-x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x^2-x-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(x+2)}{(x^2-x-1)^2} = 0; \;\; x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0.$$

Como quiera que el denominador de la derivada es positivo para los valores reales de x pertenecientes al dominio de R, el signo de $f'(x)$ es el que tenga el numerador, al cual lo dividen las raíces de la derivada en los intervalos $(-\infty,-2), (-2,0)$ y $(0,+\infty)$, donde la $f'(x)$ es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, $x = 3 \in (0,+\infty)$:

$$f'(3) = \frac{3\cdot(3+2)}{(3^2-3-1)^2} = \frac{15}{5^2} = \frac{15}{25} > 0.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-2,0).}$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty,-2) \cup (0,+\infty).}$$

$d)$ Del dominio de la función y de los periodos de crecimiento y decrecimiento se deducen los máximos y mínimos de la función, no obstante, se hace su estudio mediante la segunda derivada.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(2x+2)\cdot(x^2-x-1)^2 - x(x+2)\cdot[2\cdot(x^2-x-1)\cdot(2x-1)]}{(x^2-x-1)^4} =$$

$$= \frac{(2x+2)\cdot(x^2-x-1)-2x(x+2)\cdot(2x-1)}{(x^2-x-1)^3} = \frac{2x^3-2x^2-2x+2x^2-2x-2-(2x^2+4x)\cdot(2x-1)}{(x^2-x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^3-4x-2-(4x^3-2x^2+8x^2-4x)}{(x^2-x-1)^3} = \frac{2x^3-4x-2-4x^3-6x^2+4x}{(x^2-x-1)^3} = \frac{-2x^3-6x^2-2}{(x^2-x-1)^3} = \frac{-2\cdot(x^3+3x^2+1)}{(x^2-x-1)^3}.$$

$$f''(-2) = \frac{-2\cdot[(-2)^3+3(-2)^2+1]}{[(-2)^2-(-2)-1]^3} = \frac{-2\cdot(-8+12+1)}{5^3} = \frac{-10}{125} < 0 \Rightarrow Máx.para\ x = -2.$$

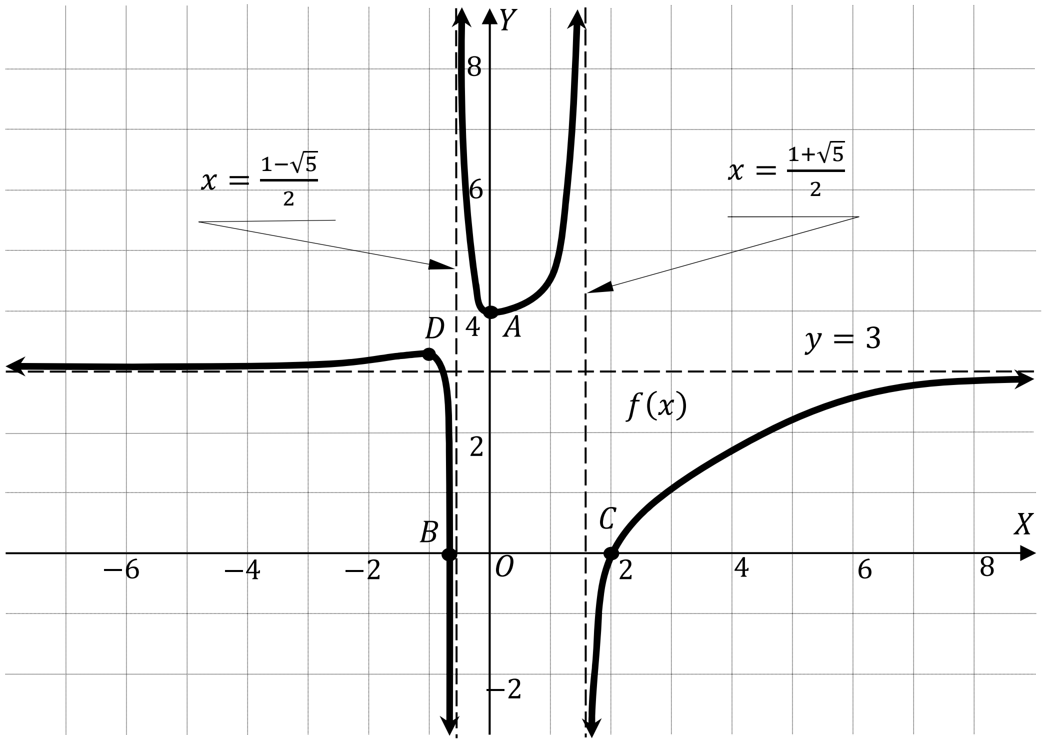
$$f(-2) = \frac{3\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)-4}{(-2)^2-(-2)-1} = \frac{12+8-4}{4+2-1} = \frac{16}{5} \Rightarrow \underline{Máx: D\left(-2,\frac{16}{5}\right)}.$$

$$f''(0) = \frac{-2\cdot(0^3+3\cdot0^2+1)}{(0^2-0-1)^3} = \frac{-2}{-1} = 2 > 0 \;\Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{3\cdot 0^2 - 4\cdot 0 - 4}{0^2-0-1} = \frac{-4}{-1} = 4 \Rightarrow$$

$$\underline{Mín: \Rightarrow A(0,4).}$$

$e)$ La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



Problema 4:

4º) Una máquina está productiva durante un año desde su compra. Se sabe que el rendimiento (en porcentaje) que tiene la máquina x meses después de su compra viene dado por la función $f(x) = \frac{1}{10}(800 + 15x + 6x^2 - x^3)$, para cualquier x entre 0 y 12.

a) ¿Es el rendimiento que tiene la máquina un mes después de su compra superior al rendimiento que tiene dos meses después de su compra?

b) ¿Tras cuántos meses después de su compra alcanza la máquina su mayor rendimiento?; ¿cuál es dicho rendimiento máximo?

c) A lo largo del año, ¿tiene en algún momento la máquina un rendimiento inferior al 10 %?

Solución:

a) $f(1) = \frac{1}{10}(800 + 15 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 - 1^3) = \frac{1}{10}(800 + 15 + 6 - 1) =$

$= \frac{1}{10} \cdot 820 \Rightarrow f(1) = 82\ \%.$

$f(2) = \frac{1}{10}(800 + 15 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 - 2^3) = \frac{1}{10}(800 + 30 + 24 - 8) =$

$= \frac{1}{10} \cdot 846 \Rightarrow f(1) = 84{,}6\ \%.$

$\underline{El\ rendimiento\ un\ mes\ del\ comienzo\ es\ menor\ que\ a\ los\ dos\ meses}.$

b) El rendimiento será máximo cuando su primera derivada sea negativa y la segunda positiva.

$f'(x) = \frac{1}{10}(15 + 12x - 3x^2) = \frac{3}{10}(5 + 4x - x^2).$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{10}(5 + 4x - x^2) = 0;\ \ x^2 - 4x - 4 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} =$

$= \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3 \Rightarrow x_1 = -1 \notin D(f), x_2 = 5.$

$f''(x) = \frac{3}{10}(4 - 2x) = \frac{3}{5}(2 - x).$

$f''(5) = \frac{3}{5}(2 - 5) = -\frac{9}{2} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 5.$

$f(5) = \frac{1}{10}(800 + 15 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 - 5^3) = \frac{1}{10}(800 + 75 + 150 - 125) =$

$= \frac{1}{10} \cdot 900 \Rightarrow f(5) = 90\ \%.$

$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ a\ los\ 5\ meses\ y\ es\ del\ 90\ \%}.$

c) Los valores de la función en los extremos de su dominio son los siguientes:

$f(0) = \frac{1}{10}(800 + 15 \cdot 0 + 6 \cdot 0^2 - 0^3) = 80\ \%.$

$f(12) = \frac{1}{10}(800 + 15 \cdot 12 + 6 \cdot 12^2 - 12^3) =$

$= \frac{1}{10}(800 + 180 + 864 - 1.728) = \frac{1}{10}(800 + 180 + 864 - 1.728) =$

$= \frac{1}{10}(1.844 - 1.728) = \frac{1}{10} \cdot 116 \Rightarrow f(12) = 11{,}6\ \% > 10\ \%.$

$\underline{El\ rendimiento\ de\ la\ máquina\ nunca\ es\ inferior\ al\ 10\ \%}.$

Problema 5:

5º) Dados dos sucesos A y B, se sabe que $P(B) = 0{,}4$; $P(A^c \cap B^c) = 0{,}2$ y $P(A \cap B) = 0{,}3$:

$a)$ Calcular la probabilidad del suceso $A \cup B$.

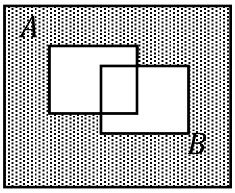
$b)$ Calcular la probabilidad de que solamente se verifique uno de los dos sucesos.

$c)$ Calcular la probabilidad de B condicionada a A.

$d)$ ¿Son independientes los sucesos A y B?

Solución:

$$Datos\text{: } P(B) = 0{,}4; \;\; P(A^c \cap B^c) = 0{,}2; \;\; P(A \cap B) = 0{,}3.$$



$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B)$

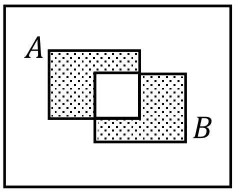
$a)$ $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cup B) \Rightarrow 1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - 0{,}2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{P(A \cup B) = 0{,}8}.$$

$b)$ La probabilidad pedida es la que indica la figura.

$P = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0{,}8 - 0{,}3 = \underline{0{,}5}.$



$c)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 0{,}8 - 0{,}4 + 0{,}3 \Rightarrow P(A) = 0{,}7.$

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}7} \Rightarrow$$

$$\underline{P(B/A) = 0{,}4286}.$$

$d)$ Dos sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow 0{,}2 \neq 0{,}6 \cdot 0{,}4 \Rightarrow$

$$\underline{A \; y \; B \; no \; son \; independientes}.$$

Problema 6:

6º) El director de una entidad que audita la contabilidad de empresas sebe, por experiencias pasadas, que cuando se hace una auditoria el 30 % de las empresas merece una calificación de “Excelente”, el 50 % de las empresas merece la calificación de “Aceptable” y el 20 % restante merece una calificación de “Deficiente”. El director también sabe que entre los auditores de su entidad hay un 90 % de auditores que siempre auditan correctamente y dan a cada empresa la calificación que merece; pero hay un 10 % de auditores que no auditan correctamente y dan siempre una calificación de “Aceptable”.

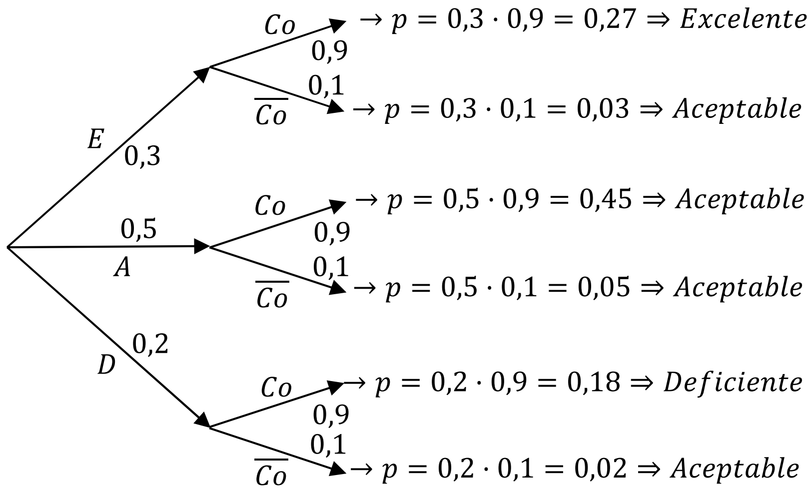
a) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación de “Deficiente”?

b) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece?

c) Para analizar si un determinado auditor audita correctamente o no, el director le encarga que audite la contabilidad de una empresa escogida al azar. No sabemos cuál es la calificación que merece esa empresa. Si el auditor da la calificación de “Aceptable”, ¿cuál es la probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente?

Solución:

Es importante observar que los auditores que no auditan correctamente siempre dan la calificación de “Aceptable”.



a) Son auditadas con “Deficiente” las empresas calificadas por un auditor que audita correctamente y es auditada como “Deficiente”, es decir:

$$P = P(D \cap Co) = P(D) \cdot P(Co/D) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = \underline{0{,}18}.$$

b) $P = P(Co) = P(E \cap Co) + P(A \cap Co) + P\left(A \cap \overline{Co}\right) + P(D \cap Co) =$

$= P(E) \cdot P(Co/E) + P(A) \cdot P(Co/A) + P(A) \cdot P\left(\overline{Co}/A\right) + P(D) \cdot P(Co/E) =$

$= 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}27 + 0{,}45 + 0{,}05 + 0{,}18 = \underline{0{,}95}.$

c) $P = P(Co/A) = \frac{P(A \cap Co)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(Co/A)}{P(E) \cdot P\left(\overline{Co}/E\right) + P(A) \cdot 1 + P(D) \cdot P\left(\overline{Co}/D\right)} =$

$= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}9}{0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 0{,}1} = \frac{0{,}45}{0{,}03 + 0{,}5 + 0{,}02} = \frac{0{,}45}{0{,}55} = \frac{0{,}9}{0{,}11} = \underline{0{,}8182}.$