Matemáticas II

Selectividad 2023

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Textos Marea Verde

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia),

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ebaumatematicas.com

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS

CONVOCATORIA ORDINARIA. CURSO 2022–2023.

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- **a)** **Duración: 1 hora y 30 minutos.**
- **b)** **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en dos bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
- **c)** Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- **d)** **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan.** En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.
- **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas, ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- **f)** En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1 punto]** Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 f(x)\right)$.

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Sea la función $f : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

a) **[1,5 puntos]** Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x|x-1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Considera la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(t^2\right) dt$. Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xF(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$.

BLOQUE B

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El $60\,\%$ de los coches blancos más el $50\,\%$ de los coches negros representan el $30\,\%$ de los coches vendidos. El $20\,\%$ de los coches blancos junto con el $60\,\%$ de los coches negros y el $60\,\%$ de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **[0,5 puntos]** Determina para qué valores de m existe la inversa de la matriz A.

b) **[2 puntos]** Para todo $m \neq -1$, resuelve, si es posible, la ecuación $AX + X = B$.

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

El plano perpendicular al segmento de extremos $P(0,3,8)$ y $Q(2,1,6)$ que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C.

EJERCICIO 8. (2,5 puntos)

Considera el punto $A(-1,1,3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2,1,1)$ y $C(0,1,-1)$.

a) **[1,5 puntos]** Halla la distancia del punto A a la recta r.

b) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1 punto]** Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 f(x)\right)$.

Solución:

a) Usamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$f'(x)=\frac{0-1\left(e^x-e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\frac{-e^x+e^{-x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-e^x+e^{-x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=0\Rightarrow -e^x+e^{-x}=0\Rightarrow e^{-x}=e^x\Rightarrow -x=x\Rightarrow -2x=0\Rightarrow x=0$$

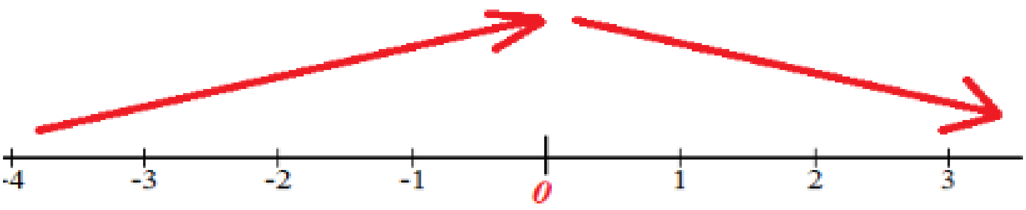
Estudiamos el cambio de signo antes y después de $x = 0$.

En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{-e^{-1}+e^{1}}{\left(e^{-1}+e^{1}\right)^2}\simeq 0.24>0$. La función crece en $(-\infty,0)$.

En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{-e^{1}+e^{-1}}{\left(e^{1}+e^{-1}\right)^2}\simeq -0.24<0$.

La función decrece en $(0,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo que es absoluto en $x = 0$. En dicho valor la función vale $f(0)=\dfrac{1}{e^0+e^{-0}}=\dfrac{1}{2}$. El máximo absoluto tiene coordenadas $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

La función no presenta mínimo relativo ni absoluto pues su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1}{0+\infty}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1}{\infty+0}=0$. La función no alcanza valores menores que 0, pero dicho valor no se alcanza en ningún punto de la gráfica de la función.

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\frac{1}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x+e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty+0}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x-e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty-0}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{2}{\infty+0}=\frac{2}{\infty}=\boxed{0}$$

Ejercicio 2.A:

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Sea la función $f : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

a) **[1,5 puntos]** Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

Solución:

a)

La pendiente de la recta que pasa por los puntos *(–2, f(–2))* y *(2, f(2))* vale:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=(-2)^3-2(-2)+5=1 \\ f(2)=2^3-2\cdot 2+5=9 \end{array}\right\} \Rightarrow Pendiente = \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{9-1}{4} = 2$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada. Igualamos las expresiones y hallamos el punto o puntos pedidos.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-2 \\ Pendiente=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2-2=2 \Rightarrow 3x^2=4 \Rightarrow x^2=\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}}$$

Existen dos puntos donde se cumple lo pedido: $x=-\sqrt{\frac{4}{3}}$; $x=+\sqrt{\frac{4}{3}}$

b) Hallamos las coordenadas del punto de inflexión igualando a cero la segunda derivada.

$$f'(x)=3x^2-2 \Rightarrow f''(x)=6x$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0$$

$$Como\ f'''(x)=6 \Rightarrow f'''(0)=6\neq 0$$

La función presenta un punto de inflexión en $x = 0$.

Hallamos la ecuación de la recta tangente en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^3-2\cdot 0+5=5 \\ f'(0)=3\cdot 0^2-2=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow y-5=-2(x-0) \Rightarrow \boxed{y=-2x+5}$$

Hallamos la ecuación de la recta normal en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=5 \\ f'(0)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow y-5=-\frac{1}{-2}(x-0) \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x+5}$$

Ejercicio 3.A:

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x|x-1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x=0$.

Solución:

La función valor absoluto la ponemos como una función a trozos.

$$f(x)=x|x-1|=\begin{cases} x(-x+1) & si\ x\le 1 \\ x(x-1) & si\ x>1\end{cases}$$

Hallamos la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$. En el entorno de este valor la función es $f(x)=x|x-1|=x(-x+1)$.

$$f(x)=x(-x+1)=-x^2+x\to f'(x)=-2x+1$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)=-0+1=1 \\ f(0)=0(-0+1)=0 \\ y-f(0)=f'(0)(x-0)\end{array}\right\}\Rightarrow y-0=1(x-0)\Rightarrow y=x$$

Nos piden calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)=x|x-1|$ y la recta $y=x$. Vemos donde se cortan ambas funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x|x-1| \\ y=x\end{array}\right\}\Rightarrow x|x-1|=x\Rightarrow$$

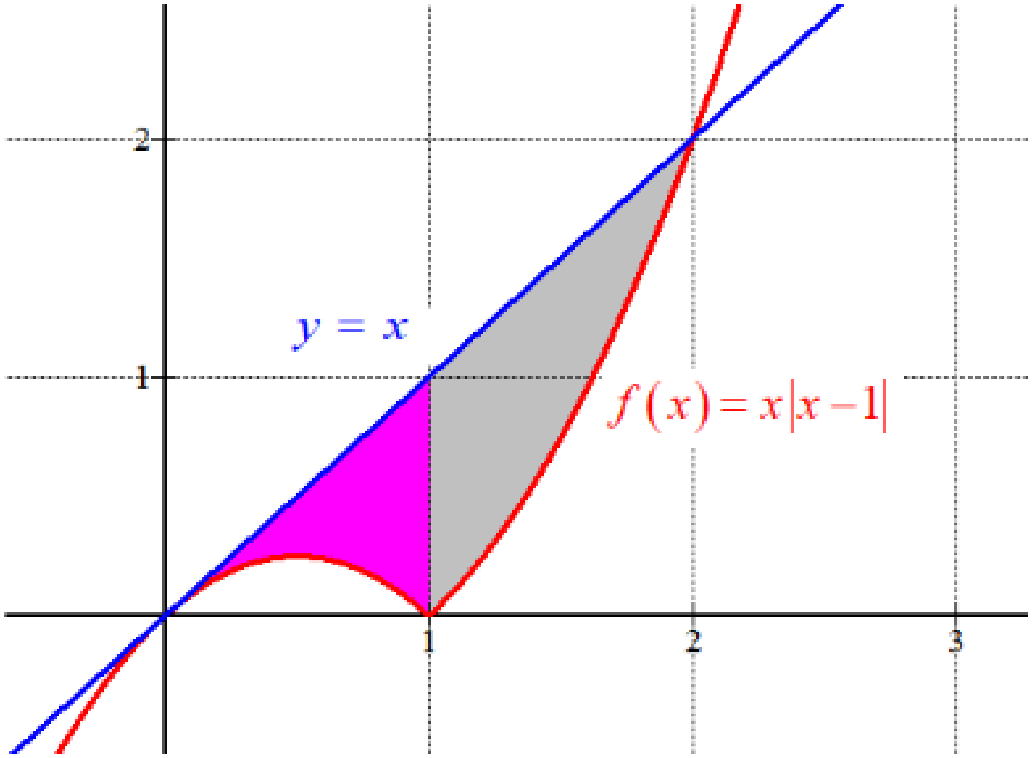
$$\Rightarrow\begin{cases} x(x-1)=x\to x^2-x=x\to x^2-2x=0\to x(x-2)=0\to\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases} \\ x(-x+1)=x\to -x^2+x=x\to -x^2=0\to x=0\end{cases}$$

El recinto del cual queremos hallar el área es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 2 de la diferencia de las dos funciones. Como la función cambia de definición en $x = 1$ dividimos el área en dos partes.

$$\int_0^1 x(-x+1)dx=\int_0^1 -x^2+xdx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left[-\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}\right]=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\int_1^2 x(x-1)dx=\int_1^2 x^2-xdx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\left[\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right]-\left[\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right]=\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

El área del recinto es la suma de estos dos valores: $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$ *unidad cuadrada*.



2
1
y = x
f(x) = x|x − 1|
1
2
3

Ejercicio 4.A:

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Considera la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\, dt$. Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{xF(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{xF(x)}{sen(x^2)} = \frac{0 \cdot F(0)}{sen(0^2)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \dots$$

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ por lo que la función $F(x)$ es continua y derivable siendo su derivada $F'(x) = sen(x^2)$

Usando esta propiedad calculamos el valor del límite pedido.

$$\dots = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) + xF'(x)}{2x \cdot \cos(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) + x sen(x^2)}{2x \cdot \cos(x^2)} = \frac{F(0) + 0 sen(0^2)}{2 \cdot 0 \cdot \cos(0^2)} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x) + sen(x^2) + x \cdot 2x \cdot \cos(x^2)}{2\cos(x^2) + 2x \cdot 2x \cdot \left[-sen(x^2)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{sen(x^2) + sen(x^2) + 2x^2 \cdot \cos(x^2)}{2\cos(x^2) - 4x^2 \cdot sen(x^2)} = \frac{0+0+0}{2\cos(0)+0} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

BLOQUE B

Ejercicio 5B:

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El $60\,\%$ de los coches blancos más el $50\,\%$ de los coches negros representan el $30\,\%$ de los coches vendidos. El $20\,\%$ de los coches blancos junto con el $60\,\%$ de los coches negros y el $60\,\%$ de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

Solución:

Llamamos "x" al número de coches blancos, "y" al número de coches negros y "z" al número de coches rojos.

El número total de coches vendidos es $x+y+z$.

"El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos" → $0.6\cdot x+0.50\cdot y=0.30(x+y+z)$

"El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos" → $0.20\cdot x+0.60\cdot y+0.60\cdot z=\frac{x+y+z}{2}$

"Se han vendido 100 coches negros más que blancos" → $y=x+100$.

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}0.6\cdot x+0.50\cdot y=0.30(x+y+z)\\ 0.20\cdot x+0.60\cdot y+0.60\cdot z=\frac{x+y+z}{2}\\ y=x+100\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}6x+5y=3(x+y+z)\\ 2x+6y+6z=10\frac{x+y+z}{2}\\ y=x+100\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}6x+5y=3x+3y+3z\\ 2x+6y+6z=5x+5y+5z\\ y=x+100\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+2y-3z=0\\ -3x+y+z=0\\ y=x+100\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+2(x+100)-3z=0\\ -3x+x+100+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+2x+200-3z=0\\ -2x+z+100=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x-3z=-200\\ z=-100+2x\end{array}\right\}\Rightarrow 5x-3(-100+2x)=-200\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x+300-6x=-200\Rightarrow -x=-500\Rightarrow\boxed{x=500}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\boxed{y=500+100=600}\\ \boxed{z=-100+2\cdot 500=900}\end{array}\right.$$

Se han vendido 500 coches blancos, 600 negros y 900 rojos.

Ejercicio 6.B:

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **[0,5 puntos]** Determina para qué valores de m existe la inversa de la matriz A.

b) **[2 puntos]** Para todo $m \neq -1$, resuelve, si es posible, la ecuación $AX + X = B$.

Solución:

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + m^3 - 0 - 0 - 0 = m^3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^3 = 0 \Rightarrow m = 0$$

La matriz A tiene inversa cuando m es distinto de 0.

b) Despejo X de la ecuación $AX + X = B$.

$$(A+I)X = B \Rightarrow X = (A+I)^{-1} B$$

Comprobamos que la matriz $A + I$ tiene inversa viendo si su determinante es no nulo.

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A+I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + m^3 - 0 - 0 - 0 = m^3 + 1$$

$$|A+I| = 0 \Rightarrow m^3 + 1 = 0 \Rightarrow m^3 = -1 \Rightarrow m = \sqrt[3]{-1} = -1$$

La matriz $A + I$ tiene inversa pues $m \neq -1$. La calculamos.

$$(A+I)^{-1} = \frac{Adj\left((A+I)^T\right)}{|A+I|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}}{m^3+1} = \frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m & 0 \\ 1 & m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^{-1}=\frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix}1 & m^2 & -m\\ -m & 1 & m^2\\ m^2 & -m & 1\end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz X.

$$X=(A+I)^{-1}B=\frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix}1 & m^2 & -m\\ -m & 1 & m^2\\ m^2 & -m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix}1 & -m & m^2\\ -m & m^2 & 1\\ m^2 & 1 & -m\end{pmatrix}}$$

Ejercicio 7.B:

EJERCICIO 8. (2,5 puntos)

Considera el punto $A(-1,1,3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2,1,1)$ y $C(0,1,-1)$.

a) **[1,5 puntos]** Halla la distancia del punto A a la recta r.

b) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

Solución:

El punto medio M del segmento PQ tiene coordenadas $M = \frac{(0,3,8)+(2,1,6)}{2} = (1,2,7)$.

El plano π perpendicular al segmento PQ tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{PQ}$. Y contiene al punto M.

$$\overrightarrow{PQ} = (2,1,6)-(0,3,8) = (2,-2,-2)$$

$$\pi : \begin{cases} \vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (2,-2,-2) \\ M(1,2,7) \in \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi : 2x-2y-2z+D=0 \\ M(1,2,7) \in \pi \end{cases} \Rightarrow 2-4-14+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 16 \Rightarrow \pi : 2x-2y-2z+16=0 \Rightarrow \boxed{\pi : x-y-z+8=0}$$

Hallamos los puntos de corte con cada uno de los ejes de coordenadas.

$$A \rightarrow \begin{cases} \pi : x-y-z+8=0 \\ OX : \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x+8=0 \Rightarrow x=-8 \Rightarrow A(-8,0,0)$$

$$B \rightarrow \begin{cases} \pi : x-y-z+8=0 \\ OY : \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow -y+8=0 \Rightarrow y=8 \Rightarrow B(0,8,0)$$

$$C \rightarrow \begin{cases} \pi : x-y-z+8=0 \\ OZ : \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow -z+8=0 \Rightarrow z=8 \Rightarrow C(0,0,8)$$

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,8,0)-(-8,0,0) = (8,8,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0,0,8)-(-8,0,0) = (8,0,8) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64i - 64k - 64j = (64,-64,-64)$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{64^2+(-64)^2+(-64)^2}}{2} = \boxed{32\sqrt{3} = 55.426 \text{ unidades cuadradas}}$$

Ejercicio 8.B:

EJERCICIO 8. (2,5 puntos)

Considera el punto $A(-1,1,3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2,1,1)$ y $C(0,1,-1)$.

a) **[1,5 puntos]** Halla la distancia del punto A a la recta r.

b) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

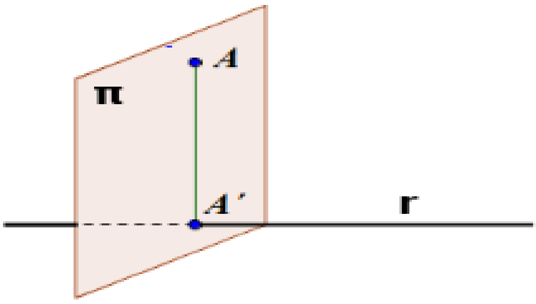
Solución:

Hallamos la ecuación de la recta r.

$$r:\begin{cases} B(2,\ 1,\ 1)\in r \\ C(0,\ 1,\ -1)\in r \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} \vec{v_r}=\overrightarrow{CB}=(2,1,1)-(0,1,-1)=(2,0,2) \\ B(2,\ 1,\ 1)\in r \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases} x=2+2t \\ y=1 \\ z=1+2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

a)



Hallamos la proyección ortogonal del punto A en la recta r. Para ello hallamos el punto A´ perteneciente a la recta tal que el vector $\overrightarrow{AA'}$ sea ortogonal al vector director de la recta $\vec{v_r}=(2,0,2)$.

$$\left.\begin{array}{r} r:\begin{cases} x=2+2t \\ y=1 \\ z=1+2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \\ A'\in r \end{array}\right\} \Rightarrow A'(2+2t,1,1+2t)$$

$$\overrightarrow{AA'}=(2+2t,1,1+2t)-(-1.1,3)=(3+2t,0,-2+2t)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=(2,0,2) \\ \overrightarrow{AA'}=(3+2t,0,-2+2t) \\ \vec{v_r}\cdot\overrightarrow{AA'}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (2,0,2)(3+2t,0,-2+2t)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6+4t-4+4t=0 \Rightarrow 8t=-2 \Rightarrow t=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x=2+2\frac{-1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \\ y=1 \\ z=1+2\frac{-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)$$

La distancia del punto A a la recta r es la distancia del punto A al punto A´, es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{AA'}$.

$$\overrightarrow{AA'}=\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)-(-1,1,3)=\left(\frac{5}{2},0,\frac{-5}{2}\right)$$

$$d(A,r)=d(A,A')=\left|\overrightarrow{AA'}\right|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+0^2+\left(\frac{-5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\approx 3.54\ unidades$$

b) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(2,1,1)-(-1,1,3)=(3,0,-2) \\ \overrightarrow{AC}=(0,1,-1)-(-1,1,3)=(1,0,-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}=-2j+12j=10j=(0,10,0)$$

$$Área\ ABC=\frac{\sqrt{0^2+10^2+0^2}}{2}=\boxed{5\ unidades\ cuadradas}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: Este ejercicio consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques A y B de 4 ejercicios cada uno. Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención del resultado deben estar suficientemente justificados.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

BLOQUE A

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f:[-2,2\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}5x+1 & si \quad -2\le x\le 0\\ e^x\cos(x) & si \quad 0<x\le 2\pi\end{cases}$.

a) **[2 puntos]** Halla los extremos relativos y absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[0,5 puntos]** Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=\dfrac{\pi}{2}$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x(\ln(x))^2$ (In denota la función logaritmo neperiano).

a) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula a con $0<a<1$, tal que $\displaystyle\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx+2=0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=5-x^2$ y $g(x)=\dfrac{4}{x^2}$.

a) **[1,25 puntos]** Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.

b) **[1,25 puntos]** Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g.

BLOQUE B

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) **[1 punto]** Halla los valores de m para que la matriz $A-mI$ no tenga inversa.

b) **[1,5 puntos]** Halla x, distinto de cero, para que $A-xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A-I)$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera los planos $\pi_1 \equiv x-y+z=0$ y $\pi_2 \equiv x+y=2$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto P(2, 6, –2).

b) **[1 punto]** Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos A(0, 2, –2), $B(3,\ 2,\ 1)$ y C(2, 3, 2) con los planos cartesianos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f:[-2,2\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}5x+1 & si & -2\le x\le 0\\ e^x\cos(x) & si & 0<x\le 2\pi\end{cases}$.

a) **[2 puntos]** Halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[0,5 puntos]** Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=\frac{\pi}{2}$.

a) En el intervalo $-2\le x\le 0$ la función es $f(x)=5x+1$ una recta creciente, por lo que el valor mínimo lo alcanza en $x=-2$ y el máximo en $x=0$. Como $f(-2)=5(-2)+1=-9$ y $f(0)=5(0)+1=1$ tenemos que el valor mínimo en $[-2,0]$ es -9 y el máximo es 1.

En el intervalo $0<x\le 2\pi$ la función es $f(x)=e^x\cos(x)$ usamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$f'(x)=e^x\cos(x)-e^x sen(x)=e^x\left(\cos(x)-sen(x)\right)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow e^x\left(\cos(x)-sen(x)\right)=0\Rightarrow\{e^x\neq 0\}\Rightarrow\cos(x)-sen(x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos(x)=sen(x)\Rightarrow\{0<x\le 2\pi\}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}\\ x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en estos valores.

$$f'(x)=e^x\left(\cos(x)-sen(x)\right)\Rightarrow f''(x)=e^x\left(\cos(x)-sen(x)\right)+e^x\left(-sen(x)-\cos(x)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=e^x\left(\cos(x)-sen(x)-sen(x)-\cos(x)\right)=e^x\left(-2sen(x)\right)=-2e^x sen(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2e^{\pi/4}sen\left(\frac{\pi}{4}\right)=-e^{\pi/4}\sqrt{2}<0\to\text{¡Máximo!}\\ f''\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-2e^{5\pi/4}sen\left(\frac{5\pi}{4}\right)=e^{\pi/4}\sqrt{2}>0\to\text{¡Mínimo!}\end{cases}$$

La función presenta un máximo relativo en $x=\frac{\pi}{4}$. En dicho valor la función vale

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\pi/4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}\approx 1.55.$$

La función presenta un mínimo relativo en $x=\frac{5\pi}{4}$. En dicho valor la función vale

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=e^{5\pi/4}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi/4}=-35.88$.

Comprobamos si la función es continua en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 5x+1=1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^x\cos(x)=e^0\cos(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

La función es continua en el intervalo $x = 0$.

En $x = 0$ la función cambia de definición y no tiene un máximo relativo pues al tener un máximo relativo en $x=\frac{\pi}{4}$ significa que la función crece en el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

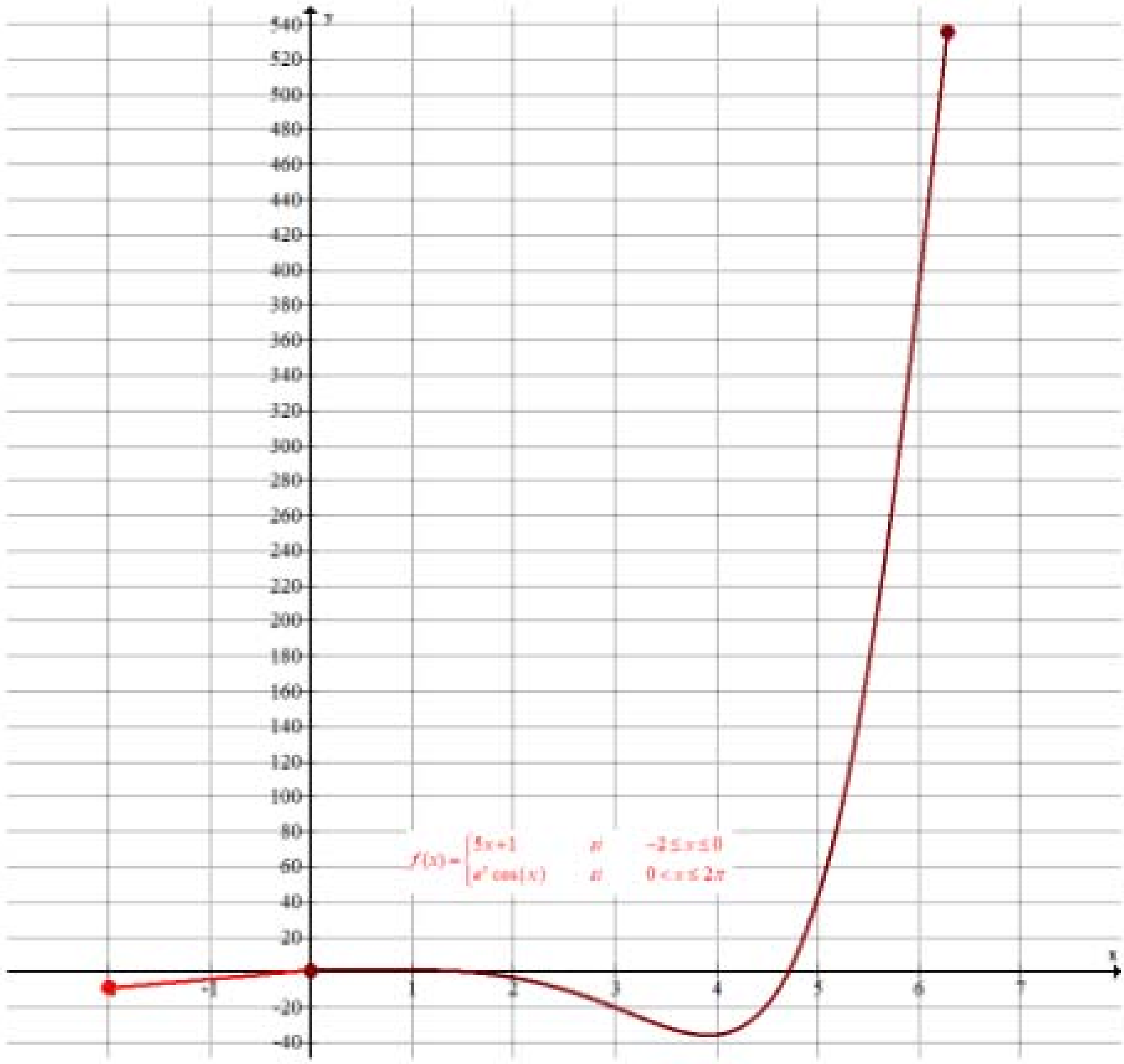
El máximo relativo de la función es $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}\right)$ y el mínimo relativo es $\left(\frac{5\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi/4}\right)$

Reunimos toda la información obtenida para decidir donde está el máximo y mínimo absoluto de la función. También valoramos la función en los extremos del intervalo de definición $[-2,2\pi]$.

- El valor mínimo en $[-2,0]$ está en $x = -2$ y es -9 y el máximo está en $x=0$ y es 1.
- El valor mínimo relativo en $[0,2\pi]$ está en $x=\frac{5\pi}{4}$ y es -35.88 y el máximo relativo está en $x=\frac{\pi}{4}$ y es 1.55.
- La función en $x=2\pi$ vale $e^{2\pi}\cos(2\pi)=e^{2\pi}\cong 535.49$.

El máximo absoluto está en $x=2\pi$ con valor $e^{2\pi}\cong 535.49$.

El mínimo absoluto está en $x=\frac{5\pi}{4}$ y su valor es $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi/4}\cong -35.88$.



b) La función en un entorno de $x=\frac{\pi}{2}$ es $f(x)=e^x\cos(x)$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=\frac{\pi}{2}$ es:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\pi/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\pi/2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=-e^{\pi/2} \\ y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow y-0=-e^{\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \boxed{y=-e^{\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x(\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

a) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) Averiguamos cuando se anula la función derivada

$$f'(x)=(\ln(x))^2+x\cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}=(\ln(x))^2+2\ln(x)=\ln(x)(\ln(x)+2)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \ln(x)(\ln(x)+2)=0\Rightarrow\begin{cases}\ln(x)=0\rightarrow\boxed{x=1}\\ \ln(x)+2=0\rightarrow\ln(x)=-2\rightarrow\boxed{x=e^{-2}}\end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$f'(x)=(\ln(x))^2+2\ln(x)\Rightarrow f''(x)=2\ln(x)\frac{1}{x}+2\frac{1}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f''(1)=2\ln(1)\frac{1}{1}+2\frac{1}{1}=2>0\rightarrow x=1 \text{ es mínimo}\\ f''(e^{-2})=2\ln(e^{-2})\frac{1}{e^{-2}}+2\frac{1}{e^{-2}}=2(-2)e^2+2e^2=-2e^2<0\rightarrow x=e^{-2}\text{ es máximo}\end{cases}$$

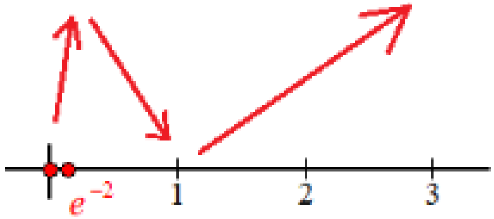
Obtenemos el valor de la función en estos dos puntos críticos.

$$f(1)=1\cdot(\ln(1))^2=0$$

$$f(e^{-2})=e^{-2}(\ln(e^{-2}))^2=4e^{-2}$$

El mínimo relativo tiene coordenadas $(1,0)$ y el máximo relativo tiene coordenadas $(e^{-2},4e^{-2})$

b) A partir de la información de los extremos relativos la función sigue el esquema siguiente:



Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

Como la función $f(x)=x(\ln(x))^2$ en su dominio $(0,+\infty)$ siempre es mayor o igual que cero el mínimo absoluto de la función es el mínimo relativo $(1,0)$.

Para decidir el máximo absoluto necesitamos conocer la evolución de la función cuando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(\ln(x))^2 = +\infty(+\infty)^2 = +\infty$$

Por lo que la función no tiene máximo absoluto.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula a con $0<a<1$, tal que $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx+2=0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

Hay que determinar cuando $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx+2=0 \Rightarrow \int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx=-2$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\int \ln(x)\frac{1}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln(x)\rightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ dv=\frac{1}{x}dx\rightarrow v=\int \frac{1}{x}dx=\ln(x)\end{array}\right\}=\ln(x)\ln(x)-\int \ln(x)\frac{1}{x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln(x)\frac{1}{x}dx=(\ln(x))^2-\int \ln(x)\frac{1}{x}dx \Rightarrow 2\int \ln(x)\frac{1}{x}dx=(\ln(x))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln(x)\frac{1}{x}dx=\frac{(\ln(x))^2}{2}+K$$

Aplicamos este resultado a la integral definida.

$$\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx=\left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_a^1=\left[\frac{(\ln(1))^2}{2}\right]-\left[\frac{(\ln(a))^2}{2}\right]=-\frac{(\ln(a))^2}{2}$$

$$\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx=-2 \Rightarrow -\frac{(\ln(a))^2}{2}=-2 \Rightarrow \frac{(\ln(a))^2}{2}=2 \Rightarrow (\ln(a))^2=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(a)=\sqrt{4}=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases}\ln(a)=2\rightarrow a=e^2>1\\ \ln(a)=-2\rightarrow \boxed{a=e^{-2}<1}\end{cases}$$

El valor buscado es $a=e^{-2}$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=5-x^2$ y $g(x)=\dfrac{4}{x^2}$.

a) **[1,25 puntos]** Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.

b) **[1,25 puntos]** Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g.

a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 5-x^2=\frac{4}{x^2}\Rightarrow 5x^2-x^4=4\Rightarrow -x^4+5x^2-4=0\Rightarrow$$

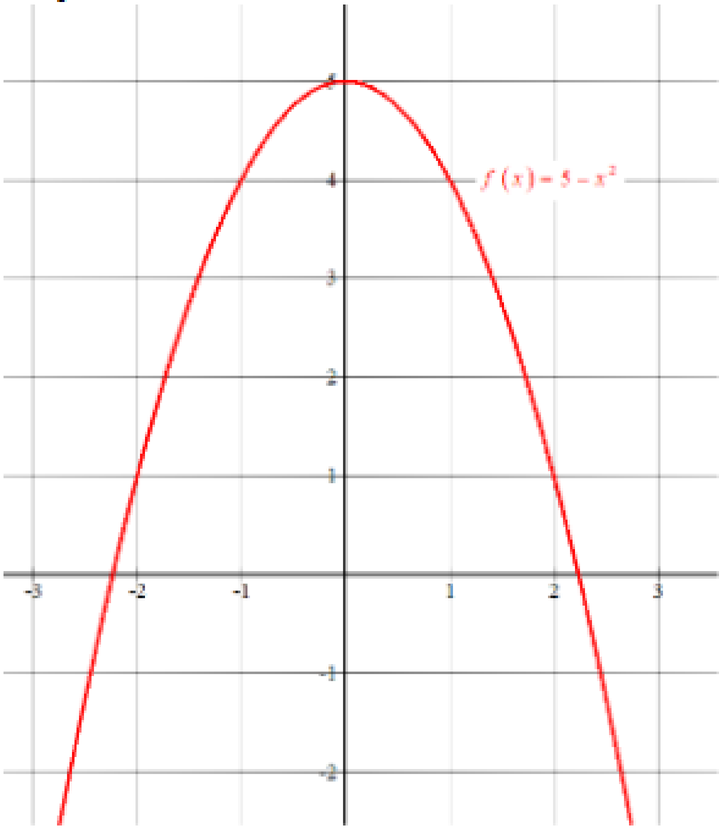
$$\Rightarrow x^2=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(-1)(-4)}}{2(-1)}=\frac{-5\pm 3}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-5+3}{-2}=1=x^2\to x=\sqrt{1}=\pm 1\\[2mm] \dfrac{-5-3}{-2}=4=x^2\to x=\sqrt{4}=\pm 2\end{cases}$$

Las gráficas tienen 4 puntos de corte: $x=-2$, $x=-1$, $x=1$, $x=2$.

La función $f(x)=5-x^2$ es una parábola con vértice en $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{0}{-2}=0$.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

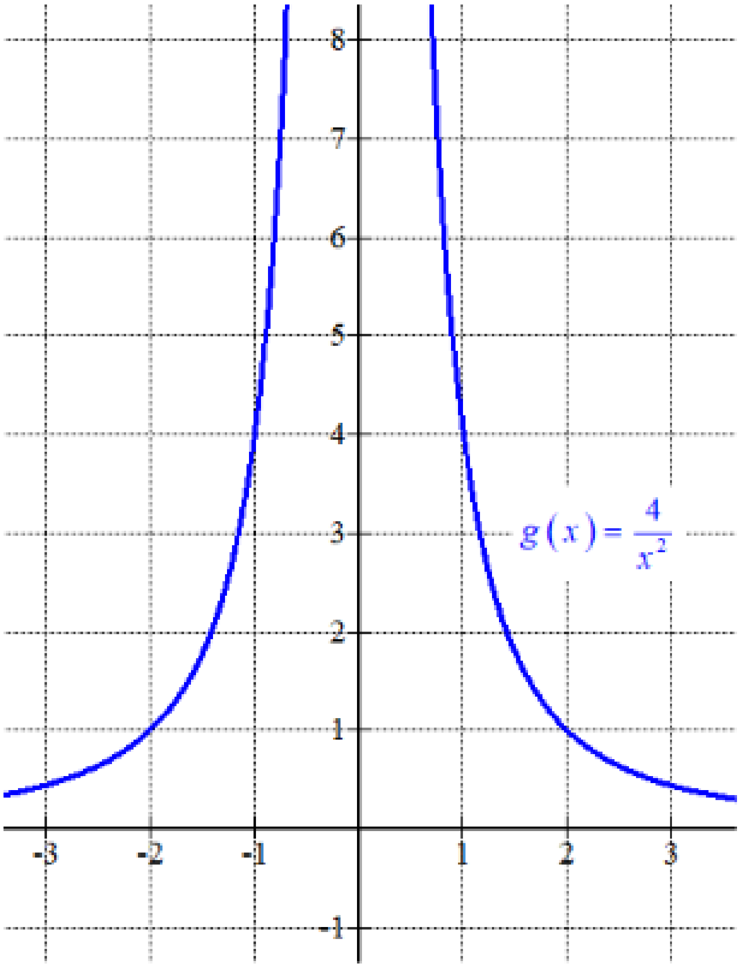
x	$y=5-x^2$
-2	1
-1	4
0	5
1	4
2	1



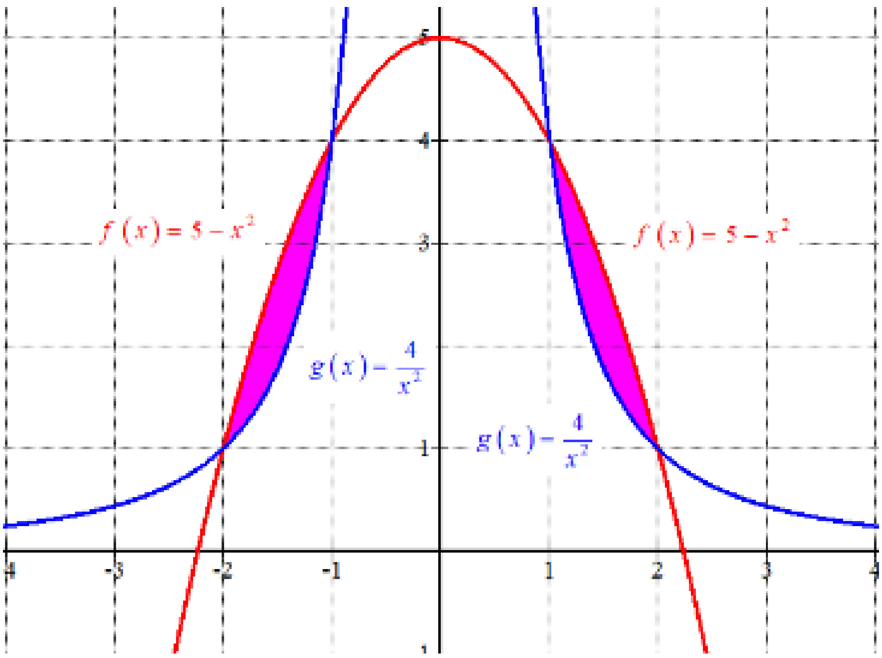
La función $g(x)=\dfrac{4}{x^2}$ tiene una asíntota vertical en $x=0$.

Hacemos una tabla de valores de la función $g(x)=\dfrac{4}{x^2}$ y la representamos.

x	$y=\frac{4}{x^2}$
-2	1
-1	4
-0.5	16
0.5	16
1	4
2	1



b) Hay dos recintos limitados por las gráficas. Dibujamos los recintos y vemos que tienen el mismo valor de área, dada la simetría de las funciones.



Calculamos una de las áreas.

$$Área1=\int_{-2}^{-1}5-x^2-\frac{4}{x^2}dx=\int_{-2}^{-1}5-x^2-4x^{-2}dx=\left[5x-\frac{x^3}{3}-4\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{-2}^{-1}=$$

$$=\left[5x-\frac{x^3}{3}+\frac{4}{x}\right]_{-2}^{-1}=\left[5(-1)-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{4}{-1}\right]-\left[5(-2)-\frac{(-2)^3}{3}+\frac{4}{-2}\right]=$$

$$=-5+\frac{1}{3}-4-\left(-10+\frac{8}{3}-2\right)=3-\frac{7}{3}=\frac{2}{3}\ u^2$$

El área total es $2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}=1.33\ u^2$

BLOQUE B

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) **[1 punto]** Halla los valores de m para que la matriz $A-mI$ no tenga inversa.

b) **[1,5 puntos]** Halla x, distinto de cero, para que $A-xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A-I)$.

a) Para que no tenga inversa el determinante debe ser nulo.

$$A-mI=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-m\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-m&1&1\\1&1-m&1\\1&1&1-m\end{pmatrix}$$

$$|A-mI|=\begin{vmatrix}1-m&1&1\\1&1-m&1\\1&1&1-m\end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{ccc}\text{Fila } 3^a & - & \text{Fila } 2^a\\1&1&1-m\\-1&-1+m&-1\\\hline 0&m&-m\end{array}\right\}=\begin{vmatrix}1-m&1&1\\1&1-m&1\\0&m&-m\end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{array}{ccc}\text{Fila } 2^a & - & \text{Fila } 1^a\\1&1-m&1\\-1+m&-1&-1\\\hline m&-m&0\end{array}\right\}=\begin{vmatrix}1-m&1&1\\m&-m&0\\0&m&-m\end{vmatrix}=m^2(1-m)+0+m^2-0+m^2-0=$$

$$=m^2(1-m)+2m^2=m^2(1-m+2)=m^2(3-m)$$

$$|A-mI|=0\Rightarrow m^2(3-m)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\3-m=0\to m=3\end{cases}$$

La matriz $A-mI$ no tiene inversa cuando m = *0* o m = *3*.

b) Para que $A-xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A-I)$ debe cumplirse que su producto es la matriz identidad.

$$\frac{1}{x}(A-I)=\frac{1}{x}\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$A-xI=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-x\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-x&1&1\\1&1-x&1\\1&1&1-x\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{x}(A-I)(A-xI)=I\Rightarrow\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-x&1&1\\1&1-x&1\\1&1&1-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x}\begin{pmatrix}1+1&1-x+1&1+1-x\\1-x+1&1+1&1+1-x\\1-x+1&1+1-x&1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x}\begin{pmatrix}2&2-x&2-x\\2-x&2&2-x\\2-x&2-x&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&2-x&2-x\\2-x&2&2-x\\2-x&2-x&2\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2&2-x&2-x\\2-x&2&2-x\\2-x&2-x&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}\Rightarrow\left|\begin{array}{l}2=x\\2-x=0\end{array}\right.\Rightarrow\boxed{x=2}$$

El valor buscado es $x = 2$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)
El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.

Llamamos "x" el gasto en refrescos sin impuestos, "y" al gasto en cerveza sin impuestos y "z" al gasto en vino sin impuestos.

El gasto total es de un importe de 500 euros sin incluir impuestos → $x+y+z=500$.

El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos → $z=x+y-60$

Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros → Los impuestos son 592.4 – 500 = 92.4 € → $0.06\cdot x+0.12\cdot y+0.30\cdot z=92.4$

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=500 \\ z=x+y-60 \\ 0.06\cdot x+0.12\cdot y+0.30\cdot z=92.4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=500 \\ z=x+y-60 \\ 6\cdot x+12\cdot y+30\cdot z=9240 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=500 \\ z-y+60=x \\ x+2y+5z=1540 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z-y+60+y+z=500 \\ z-y+60+2y+5z=1540 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2z=440 \rightarrow \boxed{z=220} \\ y+6z=1480 \end{array}\right\} \Rightarrow y+6\cdot 220=1480 \Rightarrow$$

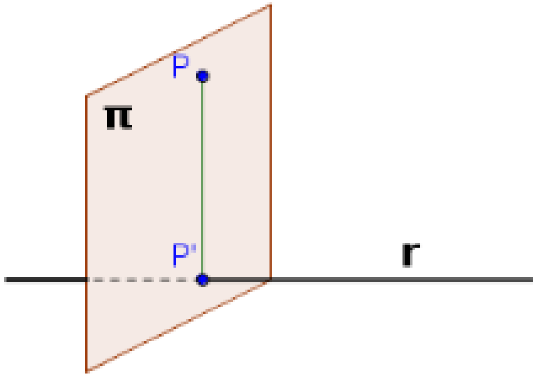
$$\Rightarrow \boxed{y=1480-1320=160} \Rightarrow \boxed{x=220-160+60=120}$$

Sin incluir impuestos se ha gastado 120 euros en refrescos, 160 en cerveza y 220 en vino. Incluyendo impuestos el gasto es de 120 · 1.06 = 127.2 € en refrescos, 160 · 1.12 = 179.2 € en cerveza y 220. 1.30 = 286 € en vino.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)
Considera los planos $\pi_1 \equiv x-y+z=0$ y $\pi_2 \equiv x+y=2$.
a) **[1,5 puntos]** Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto P(2, 6, –2).
b) **[1 punto]** Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.

a) Obtenemos la ecuación de la recta

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x-y+z=0\\ \pi_2 \equiv x+y=2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x-y+z=0\\ x=2-y\end{array}\right\} \Rightarrow 2-y-y+z=0 \Rightarrow z=-2-2y \Rightarrow r:\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=\lambda\\ z=-2-2\lambda\end{cases}$$



Hallamos el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto P.
Dicho plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r:\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=\lambda\\ z=-2-2\lambda\end{cases} \Rightarrow \overline{v_r}=(-1,1,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{n}=\overline{v_r}=(-1,1,-2)\\ P(2,6,-2)\in\pi\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\pi:-x+y-2z+D=0\\ P(2,6,-2)\in\pi\end{array}\right\} \Rightarrow -2+6-2(-2)+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-8 \Rightarrow \pi:-x+y-2z-8=0$$

Determinamos el punto P´ de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:-x+y-2z-8=0\\ r:\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=\lambda\\ z=-2-2\lambda\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow -(2-\lambda)+\lambda-2(-2-2\lambda)-8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2+\lambda+\lambda+4+4\lambda-8=0 \Rightarrow 6\lambda=6 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \begin{cases}x=2-1=1\\ y=1\\ z=-2-2=-4\end{cases} \Rightarrow P'(1,1,-4)$$

La distancia de P a la recta r es la distancia de P a P´.

$$\overline{PP'} = (1,1,-4)-(2,6,-2) = (-1,-5,-2)$$

$$d(P,r) = d(P,P') = \left|\overline{PP'}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-5)^2+(-2)^2} = \boxed{\sqrt{30} \simeq 5.47\,u}$$

b) El ángulo que forman π_1 y π_2 es el ángulo que forman sus vectores normales.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x-y+z=0 \\ \pi_2 \equiv x+y=2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{n_1}=(1,-1,1) \\ \overline{n_2}=(1,1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\overline{n_1},\overline{n_2}\right) = \frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}$$

$$\cos\left(\overline{n_1},\overline{n_2}\right) = \frac{(1,-1,1)(1,1,0)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1-1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\overline{n_1},\overline{n_2}\right) = \arccos(0) = 90^\circ$$

Los planos π_1 y π_2 son perpendiculares.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos A(0, 2, –2), $B(3,\ 2,\ 1)$ y C(2, 3, 2) con los planos cartesianos.

Hallamos la ecuación del plano determinado por los puntos A(0, 2, –2), $B(3,\ 2,\ 1)$ y C(2, 3, 2).

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,2,1)-(0,2,-2)=(3,0,3)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(2,3,2)-(0,2,-2)=(2,1,4)\\ B(3,2,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-3 & y-2 & z-1\\ 3 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(y-2)+3(z-1)-12(y-2)-3(x-3)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y-12+3z-3-12y+24-3x+9=0\Rightarrow -3x-6y+3z+18=0\Rightarrow \boxed{\pi:x+2y-z-6=0}$$

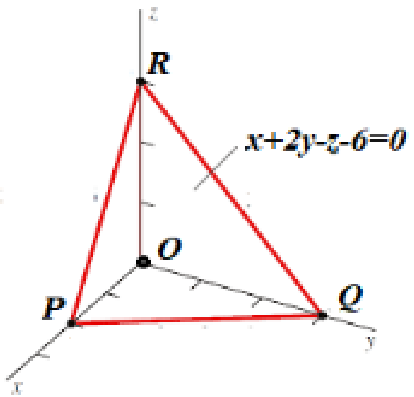
Hallamos los puntos de corte del plano con los planos coordenados.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:x+2y-z-6=0\\ OX\rightarrow\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow x-6=0\Rightarrow x=6\Rightarrow P(6,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi:x+2y-z-6=0\\ OY\rightarrow\begin{cases}x=0\\ z=0\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 2y-6=0\Rightarrow y=3\Rightarrow Q(0,3,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi:x+2y-z-6=0\\ OZ\rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow -z-6=0\Rightarrow z=-6\Rightarrow R(0,0,-6)$$

El volumen del tetraedro definido por el origen O(0, 0,0) y los puntos P, Q y R es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$.



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OP}=(6,0,0)-(0,0,0)=(6,0,0)\\ \overrightarrow{OQ}=(0,3,0)-(0,0,0)=(0,3,0)\\ \overrightarrow{OR}=(0,0,-6)-(0,0,0)=(0,0,-6)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}\right]=\begin{vmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&-6\end{vmatrix}=-108$$

$$Volumen\ OPQR=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}\right]\right|}{6}=\frac{108}{6}=\boxed{18\ u^3}$$

El volumen del tetraedro es de $18\ u^3$.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

ARAGÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

www.ebaumatematicas.com

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar). **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

Sea la siguiente función $f(x) = \begin{cases} ax - \frac{sen(x)}{x} + 2 \ \ si \ \ x \neq 0 \\ 2 \ \ si \ \ x = 0 \end{cases}$, $a \in R$.

a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

b) (1 punto) Calcula el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en x = -π/2 y di qué tipo de extremo es.

Problema 2:

Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln(x)}$.

Problema 3:

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f(x) = -x^2 y la recta de pendiente1/2 que corta a $f(x)$ en x = 7/2

Problema 4:

Dada la siguiente función $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$:

a) (0,75 puntos) Estudia y escribe su dominio de definición.

b) (1,25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas y ramas parabólicas, Determina las asíntotas caso de existir.

Problema 5:

Sean las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = A \cdot B^T - 2I,$$

donde B^Tes la matriz traspuesta de B, e I es la matriz identidad de orden 3.

a) (1 punto) Estudia si la matriz D tiene inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial: CX = A^T B, donde A^Tes la matriz traspuesta de A.

Problema 6:

Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + mz = 0 \\ my + 2z = 2 + 2m^2 \\ x + y = 2m \end{cases} \quad ;$$

a) (1,2 puntos) Discute según los valores de m reales, qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).

b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema para el valor m = 2.

Problema 7:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, y\ B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcula la matriz A^n para $n \in \mathbb{N}$.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación (A + 2I) X= B, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Problema 8:

El plano: π≡ 2x + by - 2z + 4 = 0, $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, corta a los ejes de coordenadas en tres puntos A, B y C. Calcula los valores de $b \in \mathbb{R}$ tal que el área del triángulo que determinan estos tres puntos A, B y C sea 6 u^2.

Problema 9:

Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1 punto) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

r = 2u + w; s = u + v – w; t = -3u –v - w

b) (1 punto) Si además, los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son ortogonales y unitarios, calcula razonadamente

u r + v s + w t

donde · representa el producto escalar de dos vectores.

Problema 10:

El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino que se produce en una bodega, sigue una distribución normal de media 150 mg/l y desviación típica 30 mg/l. La bodega se compromete a vender solamente vinos con un contenido total en sulfitos inferior a 200 mg/l, por lo que se desechan para la venta aquellos que superen esta cantidad. Se pide,

a) (1 punto) ¿Cuál es probabilidad de que un vino producido en la bodega se deseche por la elevada cantidad total de sulfitos?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de los vinos producidos en esta bodega tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Sea la siguiente función $f(x) = \begin{cases} ax - \frac{sen(x)}{x} + 2 \ \ si \ \ x \neq 0 \\ 2 \ \ si \ \ x = 0 \end{cases}$, $a \in R$.

a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

b) (1 punto) Calcula el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en x = -π/2 y di qué tipo de extremo es.

Solución:

a) Para $x \neq 0$ la función existe para todos los valores y es continua. Falta comprobar la continuidad en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} ax - \frac{senx}{x} + 2 = \lim_{x\to 0} \frac{ax^2 - senx + 2x}{x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2ax - \cos x + 2}{1} = \frac{2a\cdot 0 - \cos 0 + 2}{1} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \lim_{x\to 0} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0} f(x)$$

La función no es continua, independientemente del valor de a.
La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ para todo valor de a.

b) Para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -\frac{\pi}{2}$ la derivada debe anularse.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = a - \frac{x\cos x - senx}{x^2}, \quad para \ x \neq 0 \\ f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a - \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 0 - (-1)}{\frac{\pi^2}{4}} \Rightarrow a = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} \Rightarrow \boxed{a = \frac{4}{\pi^2}}$$

El valor buscado es $a = \frac{4}{\pi^2}$.

Para $a = \frac{4}{\pi^2}$ comprobamos que tipo de extremo hay en $x = -\frac{\pi}{2}$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $\left(-\infty, \frac{-\pi}{2}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$f'(-2) = \frac{4}{\pi^2} - \frac{(-2)\cos(-2) - sen(-2)}{(-2)^2} = -0.03 < 0$. La función decrece en $\left(-\infty, \frac{-\pi}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$f'(x) = \frac{4}{\pi^2} - \frac{(-1)\cos(-1) - sen(-1)}{(-1)^2} = 0.1 > 0$. La función crece en $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$. Tomamos un intervalo cercano al valor, pues no sabemos si existen más puntos críticos y por tanto, cambios de signo de la derivada.

Decrece y luego crece → En $x = -\frac{\pi}{2}$ hay un mínimo relativo.

Problema 2:

Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln(x)}$.

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x} = 1^{+\infty} = \text{Indeterminación(número e)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}-1\right]} = \ldots$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}-1\right] = \lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{(x+1)^2-x^2-3x-1}{x^2+3x+1}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{x^2+2x+1-x^2-3x-1}{x^2+3x+1}\right] = \lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{-x}{x^2+3x+1}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x\ln x}{x^2+3x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación(L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x - x\frac{1}{x}}{2x+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x-1}{2x+3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación(L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x} = \frac{-1}{\infty} = \boxed{0}$$

$$\ldots = e^0 = \boxed{1}$$

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEA GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 3:

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f(x) = -x^2 y la recta de pendiente 1/2 que corta a $f(x)$ en x = 7/2

Solución:

Hallamos la ecuación de la recta de pendiente $\frac{1}{2}$ que corta a $f(x)$ en $x=\frac{7}{2}$.

$$f\left(\frac{7}{2}\right)=-\left(\frac{7}{2}\right)^2+4\left(\frac{7}{2}\right)=-\frac{49}{4}+14=\frac{7}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} pendiente=\frac{1}{2} \\ pasa\ por\left(\frac{7}{2},\frac{7}{4}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{7}{4}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{7}{2}\right)\Rightarrow y-\frac{7}{4}=\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x}$$

Debemos calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=-x^2+4x$ y la recta $y=\frac{1}{2}x$.

Hallamos los puntos de corte de parábola y recta.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+4x \\ y=\frac{1}{2}x\end{array}\right\}\Rightarrow -x^2+4x=\frac{x}{2}\Rightarrow -2x^2+8x=x\Rightarrow -2x^2+7x=0\Rightarrow$$

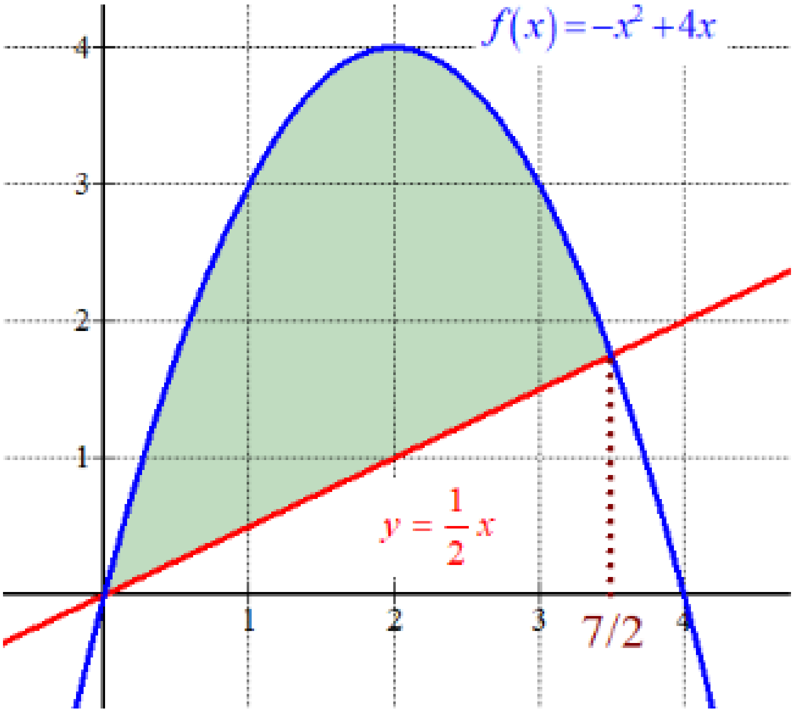
$$\Rightarrow x(-2x+7)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ -2x+7=0\rightarrow -2x=-7\Rightarrow x=\frac{7}{2}\end{cases}$$

Calculamos la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 0 y 7/2.

$$\int_0^{7/2}-x^2+4x-\frac{1}{2}xdx=\int_0^{7/2}-x^2+\frac{7}{2}x\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{7}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{7/2}=$$

$$=\left[-\frac{(7/2)^3}{3}+\frac{7(7/2)^2}{4}\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+\frac{7\cdot 0^2}{4}\right]=\frac{343}{48}\simeq 7.15$$

El área de la región pedida es $\frac{343}{48}\simeq 7.15$ unidades cuadradas.


$f(x) = -x^2 + 4x$
$y = \frac{1}{2}x$
7/2
1
2
3
4

Problema 4:

Dada la siguiente función $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$:

a) (0,75 puntos) Estudia y escribe su dominio de definición.

b) (1,25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas y ramas parabólicas, Determina las asíntotas caso de existir.

Solución:

a) Vemos cuando se anula el denominador.

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2=x\\ \frac{1-3}{2}=-1=x\end{cases}$$

Estos valores están excluidos del dominio.

Vemos cuando existe la raíz. Para ello debe ser el radicando positivo ($x^2-x-2>0$)

En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la el radicando vale $(-2)^2-(-2)-2=4>0$. La función existe en $(-\infty,-1)$.

En el intervalo $(-1,2)$ tomamos $x=0$ y la el radicando vale $0^2-0-2=-2<0$. La función **no** existe en $(-1,2)$.

En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y la el radicando vale $3^2-3-2=3>0$. La función existe en $(2,+\infty)$.

El dominio de la función es $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

b)

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{2\cdot 2-1}{\sqrt{2^2-2-2}}=\frac{3}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical

¿$x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{2(-1)-1}{\sqrt{(-1)^2-(-1)-2}}=\frac{-3}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}}=2$$

$y=2$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x}}=\left\{\begin{matrix}\text{Como } x<0\\ \text{introduzco en la raiz}\\ -x\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x-1}{x}}{-\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}=$$

$$=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{-\sqrt{1-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}}=\frac{2}{-\sqrt{1}}=-2$$

$y=-2$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene, pues tiene una asíntota horizontal

La función no tiene ramas parabólicas, pues los límites en el infinito son finitos.

Problema 5:

Sean las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = A \cdot B^T - 2I,$$

donde B^Tes la matriz traspuesta de B, e I es la matriz identidad de orden 3.

a) (1 punto) Estudia si la matriz D tiene inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial: CX = A^T B, donde A^Tes la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) Calculamos la expresión de la matriz D.

$$D = A \cdot B^T - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2+1 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1-1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$$

Comprobamos que su determinante es no nulo.

$$|D| = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0+4+0-0-8-0 = -4 \neq 0$$

Existe la inversa de la matriz D. La calculamos.

$$D^{-1} = \frac{Adj(D^T)}{|D|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{D^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 4 & 12 & -8 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial $CX = A^T \cdot B$.

$$CX = A^T \cdot B \Rightarrow X = C^{-1} \cdot A^T \cdot B$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$C^{-1} = \frac{Adj\left(C^T\right)}{|C|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = C^{-1} \cdot A^T \cdot B = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2+2-2 & 0+2+0 \\ 1+0+2 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -8/3 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

Problema 6:

Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + mz = 0 \\ my + 2z = 2 + 2m^2 \\ x + y = 2m \end{cases} ;$$

a) (1,2 puntos) Discute según los valores de m reales, qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).

b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema para el valor m = 2.

Solución:

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & m \\ 0 & m & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & m & 0 \\ 0 & m & 2 & 2+m^2 \\ 1 & 1 & 0 & 2m \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & m \\ 0 & m & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-m^2-0+2 = -m^2+2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2+2 = 0 \Rightarrow m^2 = 2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

Estudiamos tres casos distintos.

CASO 1. $m \neq \pm\sqrt{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B e igual que el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (única solución)

CASO 2. $m = +\sqrt{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de ambas utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \hline 0 & 1 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\cdot\text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad 4 \\ 0 \quad -\sqrt{2} \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, siendo menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $m = -\sqrt{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de ambas utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad -2\sqrt{2} \\ -1 \quad 0 \quad -\sqrt{2} \quad 0 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -\sqrt{2} \quad -2\sqrt{2} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\cdot\text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad \sqrt{2} \quad -2 \quad -4 \\ 0 \quad -\sqrt{2} \quad 2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, siendo menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $m = 2$ el sistema es compatible determinado (CASO 1).
Lo resolvemos.

$$\begin{cases} -x & & +2z & = & 0 \\ & 2y & +2z & = & 6 \\ x & +y & & = & 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x & & +2z & = & 0 \\ & y & +z & = & 3 \\ x & +y & & = & 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 1^{\text{a}} + \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccl} -x & & +2z & =0 \\ x & +y & & =4 \\ \hline & y & +2z & =4 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x & & +2z & = & 0 \\ & y & +z & = & 3 \\ & y & +2z & = & 4 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccl} y & +2z & = & 4 \\ -y & -z & = & -3 \\ \hline & z & = & 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+2z=0 \\ y+z=3 \\ \boxed{z=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \\ y+1=3 \rightarrow \boxed{y=2} \end{cases}$$

La solución es $x = 2, y = 2, z = 1$.

Problema 7:

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1/2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $y\ B=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcula la matriz A^n para $n\in\mathbb{N}$.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación (A + 2I) X= B, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) Calculamos las potencias sucesivas de la matriz A, en busca de alguna regularidad.

$$A^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}-1 & \frac{1}{2}-2\\ -\frac{1}{2}+2 & -1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-3}{4} & \frac{-3}{2}\\ \frac{3}{2} & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{(-3)^{2-1}}{2^2} & \frac{(-3)^{2-1}}{2^{2-1}}\\ \frac{-(-3)^{2-1}}{2^{2-1}} & \frac{-(-3)^{2-1}}{2^{2-2}}\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}\frac{-3}{4} & \frac{-3}{2}\\ \frac{3}{2} & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-3}{8}+\frac{3}{2} & \frac{-3}{4}+3\\ \frac{3}{4}-3 & \frac{3}{2}-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{8} & \frac{9}{4}\\ \frac{-9}{4} & \frac{-9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{(-3)^{3-1}}{2^3} & \frac{(-3)^{3-1}}{2^{3-1}}\\ \frac{-(-3)^{3-1}}{2^{3-1}} & \frac{-(-3)^{3-1}}{2^{3-2}}\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}\frac{9}{8} & \frac{9}{4}\\ \frac{-9}{4} & \frac{-9}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{16}-\frac{9}{4} & \frac{9}{8}-\frac{9}{2}\\ \frac{-9}{8}+\frac{9}{2} & \frac{-9}{4}+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-27}{16} & \frac{-27}{8}\\ \frac{27}{8} & \frac{27}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{(-3)^{4-1}}{2^4} & \frac{(-3)^{4-1}}{2^{4-1}}\\ \frac{-(-3)^{4-1}}{2^{4-1}} & \frac{-(-3)^{4-1}}{2^{4-2}}\end{pmatrix}$$

....

$$A^n=\begin{pmatrix}\frac{(-3)^{n-1}}{2^n} & \frac{(-3)^{n-1}}{2^{n-1}}\\ \frac{-(-3)^{n-1}}{2^{n-1}} & \frac{-(-3)^{n-1}}{2^{n-2}}\end{pmatrix}$$

OTRA FORMA DE OBTENERLO

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot 2\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}$$

$$A^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix}1-4 & 2-8\\ -2+8 & -4+16\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix}-3 & -6\\ 6 & 12\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^2(-3)\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}=\frac{-3}{2^2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \frac{-3}{2^2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{-3}{2^3}\begin{pmatrix} 1-4 & 2-8 \\ -2+8 & -4+16 \end{pmatrix} = \frac{-3}{2^3}\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-3}{2^3}(-3)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{(-3)^2}{2^3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

...

$$\boxed{A^n = \frac{(-3)^{n-1}}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}}$$

b) Despejamos la matriz X de la ecuación $(A+2I)X = B$.

$$(A+2I)X = B \Rightarrow X = (A+2I)^{-1} B$$

Comprobamos que A + 2I tiene inversa y la calculamos.

$$A+2I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A+2I| = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$(A+2I)^{-1} = \frac{Adj(A+2I)^T}{|A+2I|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de X.

$$X = (A+2I)^{-1} B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3+5 & 5+\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 15/2 \end{pmatrix}}$$

Problema 8:

El plano: $\pi \equiv 2x + by - 2z + 4 = 0$, $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, corta a los ejes de coordenadas en tres puntos A, B y C. Calcula los valores de $b \in \mathbb{R}$ tal que el área del triángulo que determinan estos tres puntos A, B y C sea 6 u^2.

Solución:

Hallamos los puntos de corte con cada uno de los ejes de coordenadas.

$$A \to \begin{cases} \pi \equiv 2x+by-2z+4=0 \\ OX: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow A(-2,0,0)$$

$$B \to \begin{cases} \pi \equiv 2x+by-2z+4=0 \\ OY: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow by+4=0 \Rightarrow y=\frac{-4}{b} \Rightarrow B\left(0,\frac{-4}{b},0\right)$$

$$C \to \begin{cases} \pi \equiv 2x+by-2z+4=0 \\ OZ: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow -2z+4=0 \Rightarrow z=2 \Rightarrow C(0,0,2)$$

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \left(0,\frac{-4}{b},0\right)-(-2,0,0)=\left(2,\frac{-4}{b},0\right) \\ \overrightarrow{AC}=(0,0,2)-(-2,0,0)=(2,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & \frac{-4}{b} & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-8}{b}i + \frac{8}{b}k - 4j = \left(-\frac{8}{b},-4,\frac{8}{b}\right)$$

$$Área = \frac{\sqrt{\left(-\frac{8}{b}\right)^2+(-4)^2+\left(\frac{8}{b}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{64}{b^2}+16+\frac{64}{b^2}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{128}{b^2}+16}}{2}$$

Igualamos el valor del área a 6 y obtenemos el valor de b.

$$Área = 6 \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{128}{b^2}+16}}{2} = 6 \Rightarrow \sqrt{\frac{128}{b^2}+16} = 12 \Rightarrow \frac{128}{b^2}+16 = 12^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{128}{b^2} = 128 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow \boxed{b=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Los valores de b buscados son -1 y $+1$.

Problema 9:

Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1 punto) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

r = 2u + w; s = u + v – w; t = -3u –v - w

b) (1 punto) Si además, los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son ortogonales y unitarios, calcula razonadamente

u r + v s + w t

donde · representa el producto escalar de dos vectores.

Solución:

a) Comprobamos si el producto mixto de los vectores en nulo o no.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}=2\vec{u}+\vec{w}\Rightarrow \vec{r}=(2,0,1) \\ \vec{s}=\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\Rightarrow \vec{s}=(1,1,-1) \\ \vec{t}=-3\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}\Rightarrow \vec{t}=(-3,-1,1) \end{array}\right\}\Rightarrow\left[\vec{r},\vec{s},\vec{t}\right]=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2+0-1+3+0-2=2\neq 0$$

Los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente independientes.

b)

$$\vec{u}\cdot\left(2\vec{u}+\vec{w}\right)+\vec{v}\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\right)+\vec{w}\cdot\left(-3\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}\right)=$$

$$=2\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{w}-3\vec{w}\cdot\vec{u}-\vec{w}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{w}=$$

$$\left.\left\{\begin{array}{l} \text{Por ser unitarios} \\ \vec{u}\cdot\vec{u}=1 \\ \vec{v}\cdot\vec{v}=1 \\ \vec{w}\cdot\vec{w}=1 \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} \text{Por ser ortogonales} \\ \vec{u}\cdot\vec{w}=0 \\ \vec{v}\cdot\vec{u}=0 \\ \vec{w}\cdot\vec{v}=0 \end{array}\right.\right\}=2+0+0+1-0-0-0+1=\boxed{4}$$

Problema 10:

El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino que se produce en una bodega, sigue una distribución normal de media 150 mg/l y desviación típica 30 mg/l. La bodega se compromete a vender solamente vinos con un contenido total en sulfitos inferior a 200 mg/l, por lo que se desechan para la venta aquellos que superen esta cantidad. Se pide,

a) (1 punto) ¿Cuál es probabilidad de que un vino producido en la bodega se deseche por la elevada cantidad total de sulfitos?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de los vinos producidos en esta bodega tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l?

Solución:

X = El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino.

X = N(150, 30)

a) Nos piden determinar $P(X \geq 200)$

$$P(X \geq 200) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-150}{30} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \frac{200-150}{30}\right) = P(Z \geq 1.67) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.67) = \{\text{Miramos en la tabla N}(0,1)\} = 1 - 0.9525 = \boxed{0.0475}$$

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	[illegible]
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	[illegible]
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	[illegible]
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	[illegible]
1.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	[illegible]	[illegible]

b)

$$P(110 \leq X \leq 150) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-150}{30} \end{array} \right\} = P\left(\frac{110-150}{30} \leq \frac{X-150}{30} \leq \frac{150-150}{30}\right) =$$

$$= P(-1.33 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1.33) =$$

$$= 0.5 - P(Z \geq 1.33) = 0.5 - [1 - P(Z \leq 1.33)] =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N}(0,1)\} = 0.5 - [1 - 0.9082] = \boxed{0.4082}$$

El porcentaje de los vinos producidos en esta bodega que tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l es del 40.82 %.

k	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	[illegible]	[illegible]
1.3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9082

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1) Sea la siguiente función

$$f(x)=\left(e^{ax}+b\right)x-e,\quad a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$

a) (1 punto) Calcula los valores de a y b, sabiendo que dicha función tiene un extremo relativo en $x=0$ y un punto de inflexión en $x=2$.

b) (1 punto) Para los valores $a=1$ y $b=2$, calcula $\int xf(x)\,dx$

2) Calcula el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$, para que el siguiente límite sea finito y calcula el valor de dicho límite

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-a\,sen(x)+3x\cos(2x)}{x^2}$$

3) Descompón el número $\sqrt{3}$ en dos sumandos positivos, de forma que la suma de sus respectivos logaritmos en base 3 sea máxima y calcula esta suma de forma exacta.

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-2x+1}$$

a) (1 punto) Indica el dominio de definición y estudia su monotonía.

b) (1 punto) Estudia la curvatura de la función (concavidad = ∩ y convexidad = U) y la existencia de puntos de inflexión, y calcúlalos si existen.

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & m\\ 2 & m & m+2\\ m-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Discute el rango de la matriz A según los valores de $m\in\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcula la inversa de la matriz A para el valor $m=1$.

6) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$, calcula razonadamente el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{pmatrix}$$

7) Una ONG aragonesa de reciente creación tiene tres sedes, una en Huesca, otra en Zaragoza y otra en Teruel. El número total de voluntarios es de 31. Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza. Además, el número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes. ¿Cuántos voluntarios hay en cada una de las tres sedes?

8) Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1,2 puntos) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}, \quad \vec{s} = \vec{u} + 3\vec{w}, \quad \vec{t} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$$

b) (0,8 puntos) Calcula razonadamente $3\vec{s} \times (\vec{t} - \vec{r})$ donde $\times$ representa el producto vectorial de dos vectores.

9) De los turistas que llegaron a España el mes pasado, el 35% visitaron Aragón. Si seleccionamos al azar y de manera independiente 7 turistas que llegaron a España el mes pasado.

a) (1 punto) Razona, sin hacer uso de la calculadora: ¿Qué es más probable, que 2 de estos turistas visitaran Aragón, o que sean 5 los que visitaron nuestra Comunidad Autónoma?

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que alguno de los 7 turistas haya visitado Aragón.

10) En el club deportivo Ares, se juegan tres modalidades de raqueta: pádel, tenis y frontón-tenis. Cada socio del club sólo puede apuntarse a una única modalidad. El 60% se apuntó a pádel, el 25% a tenis y el 15% a frontón-tenis. En los campeonatos anuales entre clubes deportivos, participaron todos los socios del club Ares, de los cuales han conseguido medalla el 21% de los jugadores de pádel, el 30% de los jugadores de tenis y el 12% de los jugadores de frontón-tenis.

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador de raqueta del club, seleccionado al azar, haya obtenido una medalla.

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador con medalla, seleccionado al azar, sea jugador de la modalidad tenis.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1) Sea la siguiente función

$$f(x)=\left(e^{ax}+b\right)x-e,\quad a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$

a) (1 punto) Calcula los valores de a y b, sabiendo que dicha función tiene un extremo relativo en $x=0$ y un punto de inflexión en $x=2$.

b) (1 punto) Para los valores $a=1$ y $b=2$, calcula $\int xf(x)dx$

a) La función tiene un extremo relativo en $x = 0$, lo que significa que $f'(0) = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=\left(e^{ax}+b\right)+x\left(ae^{ax}\right)=e^{ax}+b+axe^{ax} \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow e^{a\cdot 0}+b+a\cdot 0\cdot e^{a\cdot 0}=0 \Rightarrow 1+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

La función queda $f(x)=\left(e^{ax}-1\right)x-e,\quad a\in\mathbb{R},\ a\neq 0$

La función tiene un punto de inflexión en $x = 2$, lo que significa que $f''(2) = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=e^{ax}-1+axe^{ax} \Rightarrow f''(x)=ae^{ax}+ae^{ax}+axae^{ax} \\ f''(2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow ae^{2a}+ae^{2a}+2aae^{2a}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ae^{2a}+2a^2e^{2a}=0 \Rightarrow 2ae^{2a}(1+a)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ e^{2a}\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+a=0 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

Los valores buscados son $a = -1$, $b = -1$.

b) Para los valores $a=1$ y $b=2$ la función queda $f(x)=\left(e^x+2\right)x-e=xe^x+2x-e$.

$$\int xf(x)dx=\int x\left(xe^x+2x-e\right)dx=\int x^2e^x+2x^2-exdx=$$

$$=\int x^2e^xdx+\int 2x^2dx-\int exdx=\int x^2e^xdx+2\int x^2dx-e\int xdx=$$

$$=\int x^2e^xdx+2\frac{x^3}{3}-e\frac{x^2}{2}=\ldots$$

$$\int x^2e^xdx=\left[\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ x^2=u\rightarrow 2xdx=du \\ dv=e^xdx\rightarrow v=\int e^xdx=e^x \end{array}\right]=x^2e^x-\int e^x2xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx=$$

$$=\left[\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ x=u\rightarrow dx=du \\ dv=e^xdx\rightarrow v=\int e^xdx=e^x \end{array}\right]=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^xdx\right)=$$

$$=x^2e^x-2\left(xe^x-e^x\right)=x^2e^x-2xe^x+2e^x$$

$$\ldots = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + 2\frac{x^3}{3} - e\frac{x^2}{2} = \boxed{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + 2\frac{x^3}{3} - \frac{e}{2}x^2 + K}$$

Problema 2:

2) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, para que el siguiente límite sea finito y calcula el valor de dicho límite

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) - a sen(x) + 3x\cos(2x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) - a sen(x) + 3x\cos(2x)}{x^2} = \frac{\ln(0+1) - a sen(0) + 0 \cdot \cos(0)}{0^2} = \frac{0}{0} =$$

$$= Indeterminación(L'Hôpital) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a\cos(x) + 3\cos(2x) - 6x sen(2x)}{2x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{0+1} - a\cos(0) + 3\cos(0) - 0 sen(0)}{0} = \frac{1-a+3}{0} = \frac{4-a}{0} = \ldots$$

Como el límite debe ser finito el numerador debe de ser nulo y así seguimos resolviendo el límite con la regla de L´Hôpital → *4 – a = 0* → *a = 4*.

$$\ldots = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 4\cos(x) + 3\cos(2x) - 6x sen(2x)}{2x} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L'Hôpital) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2} + 4 sen(x) - 6 sen(2x) - 6 sen(2x) - 12x\cos(2x)}{2} =$$

$$= \frac{\frac{-1}{(0+1)^2} + 4 sen(0) - 6 sen(0) - 6 sen(0) - 0\cos(0)}{2} = \frac{-1+0-0-0-0}{2} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

Problema 3:

3) Descompón el número $\sqrt{3}$ en dos sumandos positivos, de forma que la suma de sus respectivos logaritmos en base 3 sea máxima y calcula esta suma de forma exacta.

Descomponemos $\sqrt{3}$ como $x+y=\sqrt{3}$.

La función $f(x,y)=\log_3 x+\log_3 y$ debe ser máxima. Convertimos esta función en una función de una sola variable.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=\sqrt{3}\to y=\sqrt{3}-x \\ f(x,y)=\log_3 x+\log_3 y \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=\log_3 x+\log_3\left(\sqrt{3}-x\right)$$

Esta función solo existe cuando $x > 0$ y cuando $\sqrt{3}-x>0 \Rightarrow \sqrt{3}>x$.

El dominio de la función es $\left(0,\sqrt{3}\right)$

Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=\log_3\left(\sqrt{3}x-x^2\right) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_3 e+\frac{-1}{\sqrt{3}-x}\log_3 e=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}-x}\right)\log_3 e$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-x}\right)\log_3 e \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}-x}\right)\cdot\log_3 e=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}-x}=0 \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}-x} \Rightarrow \sqrt{3}-x=x \Rightarrow \sqrt{3}=2x \Rightarrow \boxed{x=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ tomamos $x = 0.1$ y la derivada vale

$f'(0.1)=\dfrac{\sqrt{3}-0.2}{\sqrt{3}\cdot 0.1-0.1^2}\cdot\log_3 e=8.54>0$. La función crece en $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-1^2}\cdot\log_3 e=-0.33<0$.

La función decrece en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$.

Por lo tanto, la función tiene un máximo en $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Los dos sumandos que buscamos son $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ → $y=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

La función toma el valor:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\log_3\frac{\sqrt{3}}{2}+\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\log_3\frac{3}{4}=\log_3 3-\log_3 4=\boxed{1-\log_3 4}$$

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEA GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 4:

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-2x+1}$$

a) (1 punto) Indica el dominio de definición y estudia su monotonía.
b) (1 punto) Estudia la curvatura de la función (concavidad = ∩ y convexidad = U) y la existencia de puntos de inflexión, y calcúlalos si existen.

a) Vemos cuando se anula el denominador.

$$x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{2\pm 0}{2}=1$$

Este valor está excluido del dominio. Dominio = $\mathbb{R}-\{1\}$

Vemos cuando se anula la derivada de la función.

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2-2x+1\right)-x^2(2x-2)}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=\frac{\cancel{2x^3}-4x^2+2x-\cancel{2x^3}+2x^2}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=\frac{-2x^2+2x}{\left(x^2-2x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x(x-1)}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=\frac{-2x(x-1)}{\left((x-1)^2\right)^2}=\frac{-2x(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{-2x}{(x-1)^3}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x-1)^3}=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0$$

Estudiamos el signo de la derivada, antes y después de $x = 0$. Añadimos el valor excluido del dominio $x = 1$.

En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\frac{-2(-1)}{(-1-1)^3}=\frac{2}{-1}=-2<0$.

La función decrece en $(-\infty,0)$.

En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$f'(0-5)=\frac{-2(0.5)}{(0.5-1)^3}=\frac{-1}{-0.125}=8>0$. La función crece en $(0,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{-2(2)}{(2-1)^3}=\frac{-4}{1}=-4<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(0,1)$.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x-1)^3} \Rightarrow f''(x)=\frac{-2(x-1)^3-(-2x)(3)(x-1)^2}{\left((x-1)^3\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2\cancel{(x-1)^2}(x-1)+6x\cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^{\cancel{6}4}}=\frac{-2(x-1)+6x}{(x-1)^4}=\frac{-2x+2+6x}{(x-1)^4}=\frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{4x+2}{(x-1)^4}=0\Rightarrow 4x+2=0\Rightarrow 4x=-2\Rightarrow\boxed{x=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de este valor. Añadimos el valor excluido del dominio.

En el intervalo $(-\infty,-0.5)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale $f''(-1)=\frac{4\cdot(-1)+2}{(-1-1)^4}=-\frac{1}{8}<0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty,-0.5)$.

En el intervalo $(-0.5,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0)=\frac{4\cdot 0+2}{(0-1)^4}=2>0$.

La función es convexa (∪) en $(-0.5,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale $f''(2)=\frac{4\cdot 2+2}{(2-1)^4}=10>0$.

La función es convexa (∪) en $(1,+\infty)$.

Resumiendo: La función es cóncava en $(-\infty,-0.5)$ y convexa en $(-0.5,1)\cup(1,+\infty)$.

La función presenta un punto de inflexión en $x = -0.5$.

Como $f(-0.5)=\frac{(-0.5)^2}{(-0.5)^2-2(-0.5)+1}=\frac{1}{9}$ la función tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{9}\right)$

Problema 5:

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & m\\ 2 & m & m+2\\ m-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Discute el rango de la matriz A según los valores de $m\in\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcula la inversa de la matriz A para el valor $m=1$.

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & m\\ 2 & m & m+2\\ m-1 & 2 & 1\end{vmatrix}=m-(m+2)(m-1)+4m-m^2(m-1)+2-2(m+2)=$$

$$=m-\left(m^2-m+2m-2\right)+4m-m^3+m^2+2-2m-4=$$

$$=m-\cancel{m^2}+m-2m+2+4m-m^3+\cancel{m^2}+2-2m-4=-m^3+2m=-m\left(m^2-2\right)$$

$$|A|=0\Rightarrow -m\left(m^2-2\right)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\ m^2-2=0\rightarrow m^2=2\rightarrow m=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

- Si $m\neq\pm\sqrt{2}$ y $m\neq 0$ el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.
- Si $m=0$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Su rango es 2 o 1.

  La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que queda al eliminar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0+2=2\neq 0$. El rango de A es 2.

- Si $m=-\sqrt{2}$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Su rango es 2 o 1.

  La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -\sqrt{2}\\ 2 & -\sqrt{2} & 2-\sqrt{2}\\ -\sqrt{2}-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que queda al eliminar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -\sqrt{2}\end{vmatrix}=-\sqrt{2}+2\neq 0$. El rango de A es 2.

- Si $m=\sqrt{2}$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Su rango es 2 o 1.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & \sqrt{2}\\ 2 & \sqrt{2} & 2+\sqrt{2}\\ \sqrt{2}-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que queda al eliminar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & \sqrt{2}\end{vmatrix}=\sqrt{2}+2\neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo:
Si $m\neq\pm\sqrt{2}$ y $m\neq 0$ el rango de A es 3. Si $m=\pm\sqrt{2}$ o $m = 0$ el rango de A es 2.

a) Para $m = 1$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=1-0+4-0+2-6=1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 3 & -4\\ -2 & 1 & -1\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix}}$$

Problema 6:

6) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$, calcula razonadamente el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{pmatrix}^2$$

Consideramos $A = B^2$. Hallamos el determinante de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Si en la fila 1ª hay suma de elementos} \\ \text{separamos el determinante} \\ \text{en suma de determinantes} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 3\left[\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} \right] = 3\left[4\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{La fila 1ª y 2ª son iguales} \\ \text{y el determinante vale 0} \end{matrix} \right\} = 3\left[0 + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} \right] = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{Si en la fila 3ª hay suma de elementos} \\ \text{separamos el determinante} \\ \text{en suma de determinantes} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 6\left[\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right] = \left\{ \begin{matrix} \text{La fila 2ª y 3ª son iguales} \\ \text{y el determinante vale 0} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 6\left[0 + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right] = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{Intercambiamos} \\ \text{la fila 2ª y 3ª} \\ \text{El determinante} \\ \text{cambia de signo} \end{matrix} \right\} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{-3}$$

Aplicamos el resultado al cálculo del determinante de A.

$$\boxed{|A| = |B^2| = |B|^2 = (-3)^2 = 9}$$

Problema 7:

7) Una ONG aragonesa de reciente creación tiene tres sedes, una en Huesca, otra en Zaragoza y otra en Teruel. El número total de voluntarios es de 31. Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza. Además, el número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes. ¿Cuántos voluntarios hay en cada una de las tres sedes?

Llamamos "x" al número de voluntarios de la sede de Huesca, "y" al número de voluntarios de la sede de Zaragoza y "z" al número de voluntarios de la sede de Teruel.

"El número total de voluntarios es de 31" → $x+y+z=31$.
"Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza" → $x-3=y+3$.
"El número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes" → $x=y+z+1$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=31 \\ x-3=y+3 \\ x=y+z+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=31 \\ x=y+6 \\ x=y+z+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+6+y+z=31 \\ y+6=y+z+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+z=25 \\ \boxed{5=z} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y+5=25 \Rightarrow 2y=20 \Rightarrow \boxed{y=10} \Rightarrow \boxed{x=10+6=16}$$

Hay 16 voluntarios en la sede de Huesca, 10 en la de Zaragoza y 5 en la de Teruel.

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEA GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 8:

8) Si los vectores $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1,2 puntos) Comprueba si los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r}=\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w},\quad \vec{s}=\vec{u}+3\vec{w},\quad \vec{t}=2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$$

b) (0,8 puntos) Calcula razonadamente $3\vec{s}\times(\vec{t}-\vec{r})$ donde × representa el producto vectorial de dos vectores.

a) Calculamos el producto mixto de los tres vectores. Si da un resultado nulo son linealmente dependientes, en caso contrario son independientes.

Como $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son linealmente independientes sabemos que $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$ y forman una base.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}=\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}=(1,-1,-2)\\ \vec{s}=\vec{u}+3\vec{w}=(1,0,3)\\ \vec{t}=2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}=(2,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}1&-1&-2\\1&0&3\\2&-1&1\end{vmatrix}=0-6+2-0+1+3=0$$

Los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente dependientes.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente dependientes si encontramos un valor de a y de b tal que $\vec{r}=a\vec{s}+b\vec{t}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}=\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}\\ \vec{s}=\vec{u}+3\vec{w}\\ \vec{t}=2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}\\ \vec{r}=a\vec{s}+b\vec{t}\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}=a(\vec{u}+3\vec{w})+b(2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}=a\vec{u}+3a\vec{w}+2b\vec{u}-b\vec{v}+b\vec{w}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}=(a+2b)\vec{u}-b\vec{v}+(3a+b)\vec{w}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1=a+2b\\-1=-b\to\boxed{b=1}\\-2=3a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=a+2\\-2=3a+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{-1=a}\\-3=3a\to\boxed{a=-1}\end{cases}$$

Como hemos encontrado los valores que permiten expresar $\vec{r}$ como combinación lineal de los otros dos sabemos que los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente dependientes

b)

$$\left.\begin{array}{l}\bar{r}=\bar{u}-\bar{v}-2\bar{w}\\ \bar{s}=\bar{u}+3\bar{w}\\ \bar{t}=2\bar{u}-\bar{v}+\bar{w}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3\bar{s}=3\bar{u}+9\bar{w}\\ \bar{t}-\bar{r}=2\bar{u}-\bar{v}+\bar{w}-\left(\bar{u}-\bar{v}-2\bar{w}\right)=\bar{u}+3\bar{w}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\bar{s}\times\left(\bar{t}-\bar{r}\right)=\left(3\bar{u}+9\bar{w}\right)\times\left(\bar{u}+3\bar{w}\right)=\begin{vmatrix}\bar{u} & \bar{v} & \bar{w}\\ 3 & 0 & 9\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}=9\bar{v}-9\bar{v}=\boxed{\bar{0}}$$

Problema 9:

9) De los turistas que llegaron a España el mes pasado, el 35% visitaron Aragón. Si seleccionamos al azar y de manera independiente 7 turistas que llegaron a España el mes pasado.
a) (1 punto) Razona, sin hacer uso de la calculadora: ¿Qué es más probable, que 2 de estos turistas visitaran Aragón, o que sean 5 los que visitaron nuestra Comunidad Autónoma?
b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que alguno de los 7 turistas haya visitado Aragón.

a) La probabilidad de que un turista elegido al azar entre los que visitan España visite Aragón es de 0.35 y la probabilidad de que no visite Aragón es de 0.65.
De los 7 turistas elegidos al azar es más probable que sean 2 los que visitaran Aragón y 5 que no lo visitaron que el hecho de que sean 5 los que visitan Aragón y 2 no, pues es más alta la probabilidad de no visitar Aragón.

Si necesitamos más detalle.
Llamamos X a la variable que cuenta los turistas que visitaran Aragón de un grupo de 7. Esta variable es binomial pues las repeticiones son independientes y solo hay dos posibilidades (visita Aragón o no).
Los parámetros son *n = nº de repeticiones = 7. p = P(Visite Aragón) = 0.35*

X = B(7, 0.35)

$$\left.\begin{array}{l} P(X=5)=\binom{7}{5}0.35^5\cdot 0.65^2=\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 0.35^2\cdot 0.65^2\cdot 0.35^3 \\ P(X=2)=\binom{7}{2}0.35^2\cdot 0.65^5=\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 0.35^2\cdot 0.65^2\cdot 0.65^3 \\ \qquad 0.35<0.65\rightarrow 0.35^3<0.65^3 \end{array}\right\}\Rightarrow P(X=5)<P(X=2)$$

Es más probable que sean 2 los que visitaran Aragón.

b) Nos piden calcular $P(X\geq 1)$. Calculamos esta probabilidad usando el suceso contrario.

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{7}{0}0.35^0\cdot 0.65^7=1-0.65^7=\boxed{0.951}$$

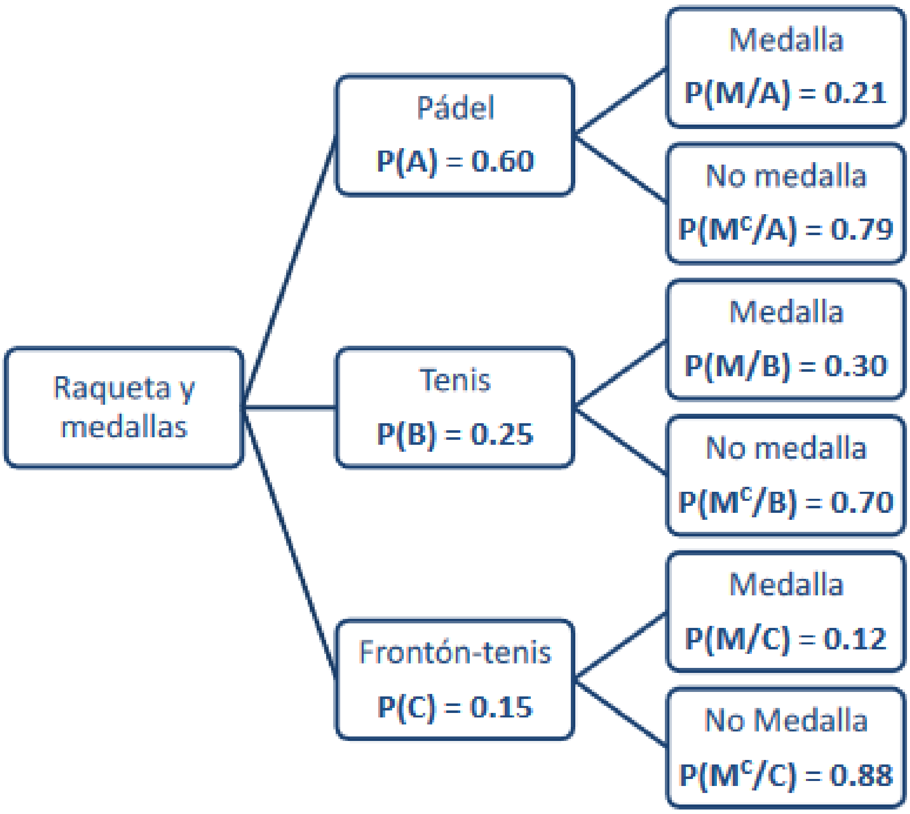
Problema 10:

10) En el club deportivo Ares, se juegan tres modalidades de raqueta: pádel, tenis y frontón-tenis. Cada socio del club sólo puede apuntarse a una única modalidad. El 60% se apuntó a pádel, el 25% a tenis y el 15% a frontón-tenis. En los campeonatos anuales entre clubes deportivos, participaron todos los socios del club Ares, de los cuales han conseguido medalla el 21% de los jugadores de pádel, el 30% de los jugadores de tenis y el 12% de los jugadores de frontón-tenis.

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador de raqueta del club, seleccionado al azar, haya obtenido una medalla.

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador con medalla, seleccionado al azar, sea jugador de la modalidad tenis.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(A)P(M/A) + P(B)P(M/B) + P(C)P(M/C) =$$

$$= 0.60 \cdot 0.21 + 0.25 \cdot 0.30 + 0.15 \cdot 0.12 = \boxed{0.219}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{P(B)P(M/B)}{P(M)} = \frac{0.25 \cdot 0.30}{0.219} = \boxed{\frac{25}{73} \approx 0.3425}$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universidad de Oviedo

Universidad de Oviedo	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Responda en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2.5 puntos. Indique en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderá: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Problema 1.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

(a) (1.25 puntos) Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot X = 2X$.

(b) (1.25 puntos) Calcula todas las matrices M que cumplen $M \cdot (B + I) = 2I$. (I es la matriz identidad 2 × 2).

Problema 2.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) (0.75 puntos) Calcula, en caso de que sea posible, las dimensiones de una matriz D tal que se pueda realizar el producto A · D · B.

(b) (0.5 puntos) Estudia si puede existir una matriz M tal que M · A = B.

(c) (1.25 puntos) Estudia si existe $(B \cdot A)^{-1}$ y calcúlala en caso de que sea posible.

Problema 3.

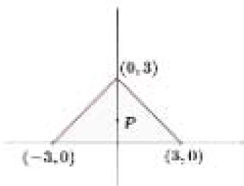
Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 + x - 1$ se pide:

(a) (1.25 puntos) Calcula los puntos de corte de ambas curvas y dibuja el recinto limitado por ambas funciones

(b) (1.25 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

Problema 4. (2.5 puntos)

Calcula las coordenadas del punto P interior al triángulo y situado sobre la altura, tal que la suma de las distancias de P a los tres vértices sea mínima.



Problema 5.

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y el plano π ≡ ax + 2y + (a − 3)z = 4,

(a) (1.25 puntos) Calcula a para que r y π sean paralelos y en ese caso, calcula distancia de r a π.

(b) (1.25 puntos) Para a = 1, calcula el plano π′ que contiene a r y es perpendicular a π.

Problema 6.

Dados los puntos A = (1, 0, 0) y B = (−1, 4, −4),

(a) (1.5 puntos) Calcula el plano π que hace que A y B sean simétricos

(b) (0.5 puntos) Calcula la distancia de A a π

(c) (0.5 puntos) Calcula una ecuación continua de la recta que pasa por A y B

Problema 7.

Una compañía tiene tres centrales en Europa en la que se fabrica el mismo producto. El 60 % de las unidades de dicho producto se fabrica en España, el 25 % en Francia y el resto en Portugal. Se observa que de las unidades fabricadas tienen algún defecto el 1 % de los fabricados en España, el 0.5 % de los fabricados en Francia y el 2 % de los fabricados en Portugal. El departamento de control de calidad central toma una de las unidades fabricadas al azar.

(a) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la unidad seleccionada tenga algún defecto?

(b) (1.25 puntos) Si la unidad seleccionada es defectuosa ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en Portugal?

Problema 8.

En un examen de acceso a Médico Interno Residente se realiza un test y se supera la prueba si se obtiene al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones de los candidatos sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10, calcule:

(a) (1.25 puntos) La probabilidad de que la calificación de una persona esté en el intervalo [75, 85].

(b) (1.25 puntos) Tras resolver las reclamaciones realizadas por los candidatos se observa que la desviación típica se mantiene pero la probabilidad de obtener más de 90 puntos es 0.05. Decide si la media de calificaciones ha aumentado, ha disminuido o se ha mantenido.

∗ Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \le x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.95) = 0.8289$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(1.645) = 0.95$, $F(1.8) = 0.9641$

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$,

(a) (1.25 puntos) Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot X = 2X$.

(b) (1.25 puntos) Calcula todas las matrices M que cumplen $M \cdot (B + I) = 2I$. (I es la matriz identidad 2 × 2).

Solución:

(a) El sistema es (A – 2I)X = [0], es decir, es un sistema homogéneo con matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que la solución sería:

$$\left. \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{array} \right\} \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

(b) Despejando $M = 2I(B + I)^{-1} = 2(B + I)^{-1}$

$$M = 2\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Problema 2.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) (0.75 puntos) Calcula, en caso de que sea posible, las dimensiones de una matriz D tal que se pueda realizar el producto A · D · B.

(b) (0.5 puntos) Estudia si puede existir una matriz M tal que M · A = B.

(c) (1.25 puntos) Estudia si existe $(B \cdot A)^{-1}$ y calcúlala en caso de que sea posible.

Solución:

(a) Por ser A una matriz 3×2, la matriz D debe tener 2 filas. Por ser B una matriz 2×3 la matriz D debe tener 2 columnas, por lo tanto D debe ser 2×2.

(b) Si M es una matriz $m \times n$, el producto $M \cdot A$ es $m \times 2$ como B es 2×3 no puede existir dicha matriz ya que el producto tendría 2 columnas y no 3 como tiene B.

(c) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, como $\det(B \cdot A) = 9 \neq 0$ entonces existe la inversa y vale $(B \cdot A)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 3.

Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 + x - 1$ se pide:

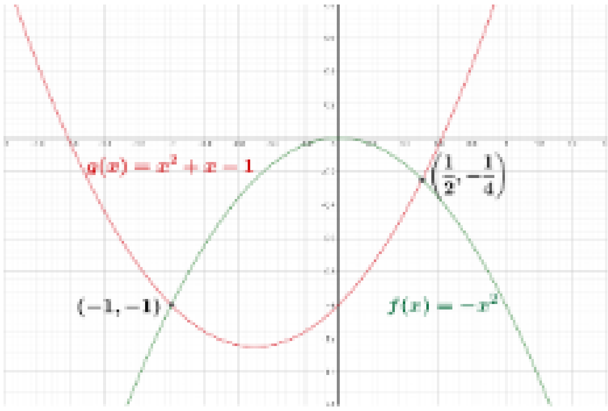
(a) (1.25 puntos) Calcula los puntos de corte de ambas curvas y dibuja el recinto limitado por ambas funciones

(b) (1.25 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

Solución:

(a) Los puntos de corte son los que cumplen $-x^2 = x^2 + x - 1$ es decir $2x^2 + x - 1 = 0$ que tiene soluciones $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$. Luego las gráficas se cortan en $(-1, -1)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

La función f tiene un máximo en $(0, 0)$ y la función g un mínimo en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ ya que son parábolas y el vértice de una parábola $y = ax^2 + bx + c$ es el punto cuyo abscisa es $-\frac{b}{2a}$. Como a para f es negativa, la parábola es convexa ($\bigcap$) y para g, al ser $a > 0$ la parábola es cóncava ($\bigcup$). Así la gráfica pedida sería:



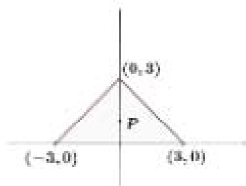
(b) Como $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [-1, 1/2]$ entonces

$$\int_{-1}^{1/2} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{1/2} (-2x^2 - x + 1)dx =$$

$$= \left(-2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)_{-1}^{1/2} = \frac{9}{8}$$

Problema 4. (2.5 puntos)

Calcula las coordenadas del punto P interior al triángulo y situado sobre la altura, tal que la suma de las distancias de P a los tres vértices sea mínima.



Solución:

El punto P tiene coordenadas (0, y). Se busca que f(y) = d((0, y), (−3, 0)) + d((

mínima. La función se puede escribir como sigue:

$$f(y)=\sqrt{(-3)^2+y^2}+\sqrt{3^2+y^2}+3-y=2\sqrt{9+y^2}+$$

su derivada es:

$$f'(y)=\frac{2y}{\sqrt{9+y^2}}-1=\frac{2y-\sqrt{9+y^2}}{\sqrt{9+y^2}}$$

que se anula si $2y=\sqrt{9+y^2}$ es decir si $4y^2=9+y^2$ de donde $y=\pm\sqrt{3}$. y =

interior al triángulo.

La segunda derivada es

$$f''(y)=\frac{18}{\sqrt{(9+y^2)^3}}\Rightarrow f''(\sqrt{3})>0$$

y sería mínimo.

Problema 5.

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y el plano π ≡ ax + 2y + (a − 3)z = 4,

(a) (1.25 puntos) Calcula a para que r y π sean paralelos y en ese caso, calcula distancia de r a π.

(b) (1.25 puntos) Para a = 1, calcula el plano π′ que contiene a r y es perpendicular a π.

Solución:

(a) Para que r y π sean paralelos, se debe cumplir que el vector director de r, $\vec{u}$

$$r \equiv (2, -1, 1) + \lambda(1, -1, 0) \Rightarrow \vec{u} = (1, -1, 0)$$

debe ser perpendicular al vector normal a π, $\vec{w} = (a, 2, a - 3)$, luego:

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{w} = (1, -1, 0) \cdot (a, 2, a - 2) = a - 2 \Rightarrow a = 2$$

La distancia de r a π se puede calcular como el valor absoluto del producto escalar de un vector unitario normal al plano y un vector que une un punto de la recta y un punto del plano. Para a = 2 la ecuación del plano es $2x + 2y - z = 4$.

$$\vec{w} = (2, 2, -1) \Rightarrow \vec{w}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Para obtener un punto del plano, fijamos x = 1, y = 1 y calculamos $z = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 4 = 0$, por tanto, P = (1, 1, 0) es un punto del plano y (2, −1, 1) es un punto de la recta, por tanto $\vec{v} = (2, -1, 1) - (1, 1, 0) = (1, -2, 1)$, por tanto la distancia es:

$$d = \left|(1, -2, 1) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right| = 1$$

(b) Para a = 1, la ecuación del plano π es $x + 2y - 2z = 4$, por tanto un vector normal a π es $\vec{w}_2 = (1, 2, -2)$. El plano π' está definido por un punto de r, un vector director de r y el vector normal a π, $\vec{w}_2$.

$$\pi' \equiv 0 = \begin{vmatrix} x - 2 & y + 1 & z - 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2x - 2y - 3z + 5 \Rightarrow \pi' \equiv 2x + 2y + 3z = 5$$

Problema 6.

Dados los puntos A = (1, 0, 0) y B = (−1, 4, −4),

(a) (1.5 puntos) Calcula el plano π que hace que A y B sean simétricos

(b) (0.5 puntos) Calcula la distancia de A a π

(c) (0.5 puntos) Calcula una ecuación continua de la recta que pasa por A y B

Solución:

(a) El plano π debe ser perpendicular a la recta que une ambos puntos y debe cortarla en el punto medio, o sea, un vector normal es:

$$\vec{u} = (-1,4,-4) - (1,0,0) = (-2,4,-4)$$

La ecuación del plano es

$$(-2)\cdot x + 4\cdot y + (-4)\cdot z = D$$

Y la constante D se obtiene de la condición de que debe contener al punto medio. El punto medio es:

$$P = \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}((1,0,0)+(-1,4,-4)) = (0,2,-2)$$

Por tanto,

$$(-2)\cdot 0 + 4\cdot 2 + (-4)\cdot(-2) = D \Rightarrow D = 16 \Rightarrow -2x+4y-4z = 16 \Rightarrow \boxed{x-2y+2z=-8}$$

(b) La distancia de A a π es la misma que la distancia de A al punto medio P, o sea,

$$d = d((1,0,0),(0,2,-2)) = \sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2+(0-(-2))^2} = 3$$

(c) La ecuación continua al obtenemos del vector director $\vec{u} = (-2,4,-4)$ y un punto, por ejemplo, A = (1, 0, 0):

$$r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y-0}{4} = \frac{z-0}{-4}$$

Problema 7.

Una compañía tiene tres centrales en Europa en la que se fabrica el mismo producto. El 60 % de las unidades de dicho producto se fabrica en España, el 25 % en Francia y el resto en Portugal. Se observa que de las unidades fabricadas tienen algún defecto el 1 % de los fabricados en España, el 0.5 % de los fabricados en Francia y el 2 % de los fabricados en Portugal. El departamento de control de calidad central toma una de las unidades fabricadas al azar.

(a) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la unidad seleccionada tenga algún defecto?

(b) (1.25 puntos) Si la unidad seleccionada es defectuosa ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en Portugal?

Solución:

Llamando Es al suceso estar fabricado en España, Fr a estarlo en Francia y Po a estar fabricado en Portugal se tiene

$$P(Es) = 0.6, \quad P(Fr) = 0.25, \quad P(Po) = 0.15$$

Ahora, si denotamos por D al suceso tener un defecto se tendría

$$P(D/Es) = 0.01, \quad P(D/Fr) = 0.005, \quad P(D/Po) = 0.02$$

(a)

$$P(D) = P(D \cap Es) + P(D \cap Fr) + P(D \cap Po) = P(D/Es)P(Es) + P(D/Fr)P(Fr) + P(D/Po)P(Po) =$$

$$= 0.01 \cdot 0.6 + 0.005 \cdot 0.25 + 0.02 \cdot 0.15 = 0.01025$$

(b)

$$P(Po/D) = \frac{P(Po \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/Po)P(Po)}{P(D)} = \frac{0.02 \cdot 0.15}{0.01025} = 0.2913$$

Problema 8.

En un examen de acceso a Médico Interno Residente se realiza un test y se supera la prueba si se obtiene al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones de los candidatos sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10, calcule:

(a) (1.25 puntos) La probabilidad de que la calificación de una persona esté en el intervalo [75, 85].

(b) (1.25 puntos) Tras resolver las reclamaciones realizadas por los candidatos se observa que la desviación típica se mantiene pero la probabilidad de obtener más de 90 puntos es 0.05. Decide si la media de calificaciones ha aumentado, ha disminuido o se ha mantenido.

∗ Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \le x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.95) = 0.8289$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(1.645) = 0.95$, $F(1.8) = 0.9641$

Solución:

(a) La probabilidad pedida es

$$P(75 \le X \le 85) = P(X \le 85) - P(X \le 75)$$

Si tipificamos cada una de las probabilidades a la normal N(0, 1)

$$P(X \le 85) = P\left(Z \le \frac{85-70}{10} = 1.5\right) = 0.9332 = 93.32\,\%$$

$$P(X \le 75) = P\left(Z \le \frac{75-70}{10} = 0.5\right) = 0.6915 = 69.15\,\%$$

Por lo que la probabilidad pedida es

$$P(75 \le X \le 85) = 0.9332 - 0.6915 = 0.2417 = 24.17\,\%$$

(b) Se pide μ tal que $P(X \le 90) = 0.95$. Esta probabilidad se corresponde con el valor F(1.645). Entonces en la normal tipificada $Z = 1.645$, por lo tanto

$$Z = \frac{90-\mu}{10} = 1.645 \Rightarrow \mu = 73.55$$

y la media ha aumentado en 3.55 puntos.

Universidad de Oviedo	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

Responda en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2.5 puntos. Indique en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderá: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) **(0.75 puntos)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

(b) **(1 punto)** Para a = 1 ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

(c) **(0.75 puntos)** Para a = 1, calcula det(M) sabiendo que $PM = M^2$.

Problema 2:

Pregunta 2. Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcl} x - y + az &=& -1 \\ 2x + y &=& 1 \\ y + 2z &=& 1 \end{array}\right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.

(b) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para el caso a = −3 si es posible.

(c) **(0.75 puntos)** Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique x = 1. Calcula la solución en ese caso.

Problema 3:

Pregunta 3. Sean $A, B \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \dfrac{x^2 + A}{Bx - 1}$. Se pide:

(a) **(0.75 puntos)** Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto (0, −3) y tenga un extremo relativo en x = −1.

(b) **(1.25 puntos)** Para los valores de A = 3 y B = 1, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos.

(c) **(0.5 puntos)** Para los valores A = 3 y B = 1, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.

Problema 4:

Pregunta 4. Se considera la función $f(x) = xe^{2x^2}$. Se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto (0, −1). (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$)

(b) **(1 punto)** Calcula el área encerrada por la gráfica de f, las rectas x = 0 y x = 1.

Problema 5:

Pregunta 5. Sea s la recta de ecuación $x - 2 = \frac{y-2}{-1} = z$, y r la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 1)$ y $B = (2, 1, 2)$.

(a) **(1 punto)** Indica la posición relativa de r y s.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula el plano paralelo a r y que contiene a s.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia entre las rectas r y s.

Problema 6:

Pregunta 6. Dados dos planos $\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A = (2, 1, 6)$

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π'.

(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π.

Problema 7:

Pregunta 7. Una imprenta compra la tinta a dos empresas distintas. En la empresa A compra el 60 % de sus pedidos, y el resto a la empresa B. Se observa que el 1.6 % de las cajas de tinta de la empresa A llegan con defecto, mientras que de la empresa B sólo el 0.9 % son defectuosas. Se toma una caja al azar:

(a) **(1.25 punto)** Calcula la probabilidad de que la caja sea defectuosa.

(b) **(1.25 puntos)** Si la caja seleccionada no es defectuosa, calcule la probabilidad de que se haya comprado a la empresa A.

Problema 8:

Pregunta 8. Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I de la Facultad de Matemáticas siguen una distribución $N(5, 2)$.

(a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota mayor o igual que 7.5.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota entre 3 y 5.

(c) **(1 punto)** Se modifica sistema de enseñanza de forma que la desviación típica ahora es 1.5 y la probabilidad de obtener una nota menor o igual que 6, sea 0.52. ¿Cuál sería la nueva media? ¿Ha funcionado el sistema aplicado?

---

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(1.25) = 0.8944$, $F(0.05) = 0.52$, $F(0.52) = 0.6985$, $F(0.8944) = 0.8133$, $F(1) = 0.8413$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) **(0.75 puntos)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

(b) **(1 punto)** Para $a = 1$ ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

(c) **(0.75 puntos)** Para $a = 1$, calcula det(M) sabiendo que $PM = M^2$.

Solución

(a) **(0.75 puntos)**

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 2a - 4$$

Si $2a - 4 \neq 0$, es decir, si $a \neq 2$, la matriz tiene rango 3. En caso contrario, y dado que el menor $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$ el rango sería 2.

(b) **(1 punto)** Para $a = 1$ el determinante no se anula, por lo tanto sí existe P^{-1}.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(Puede calcularse por menores o con operaciones elementales)

(c) **(0.75 puntos)** Si $PM = M^2$ entonces $\det(PM) = \det(M^2)$. Como el determinante del producto de matrices es el producto de los determinantes se tiene que

$$\det(PM) = \det(P)\det(M),\ \det(M^2) = \det(M)^2$$

por lo tanto

$$\det(P)\det(M) = \det(M)^2 \Rightarrow \det(M)(\det(P) - \det(M)) = 0$$

entonces, como $\det(P) = -2$, o bien $\det(M) = 0$ o bien $\det(M) = \det(P) = -2$

Problema 2:

Pregunta 2. Dado a $\in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & +az & = & -1 \\ 2x & + & y & & & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.

(b) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para el caso a = −3 si es posible.

(c) **(0.75 puntos)** Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique x = 1. Calcula la solución en ese caso.

Solución

(a) **(1 punto)** Las matrices de coeficientes y ampliada sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad Ab = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

como

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2a + 6$$

Si a $\neq$ −3 el determinante es distinto de 0, por lo tanto por el Teorema de Rouché-Frobenius, como rango(A) = rango(Ab) = 3 = número de incógnitas, el sistema es compatible determinado. Estudiemos el caso en el que a = −3:

$$Ab = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso rango(A) = rango(Ab) = 2 <número de incógnitas, por lo tanto, también por el Teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible indeterminado.

(b) **(0.75 puntos)** Resolvamos el sistema para el caso en el que a = −3:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & \alpha \\ y & = & 1 - 2\alpha \\ z & = & \alpha \end{array}\right\}$$

.

(c) **(0.75 puntos)** Si a = −3, y tomando $\alpha = 1$ tendríamos el resultado: x = 1, y = −1, z = 1

Problema 3:

Pregunta 3. Sean A, B $\in \mathbb{R}$ y $f(x) = \dfrac{x^2 + A}{Bx - 1}$. Se pide:

(a) **(0.75 puntos)** Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto $(0, -3)$ y tenga un extremo relativo en $x = -1$.

(b) **(1.25 puntos)** Para los valores de $A = 3$ y $B = 1$, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos.

(c) **(0.5 puntos)** Para los valores $A = 3$ y $B = 1$, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.

Solución

(a) **(0.75 puntos)** Si la función pasa por el punto $(0, -3)$ entonces $-3 = \dfrac{A}{-1}$ y $A = 3$. Como tiene un extremo relativo en $x = -1$ se cumple que $f'(-1) = 0$:

$$f'(x) = \frac{Bx^2 - 2x - 3B}{(Bx-1)^2}; \quad f'(-1) = \frac{-2B+2}{(-B-1)^2}$$

$f'(-1) = 0$ sólo si $B = 1$.

(b) **(1.25 puntos)** Como

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

para que la derivada se anule se debe cumplir que $x^2 - 2x - 3 = 0$, que se verifica en $x = -1$, caso estudiado en el apartado anterior, y $x = 3$.

Como $f''(x) = \dfrac{8}{(x-1)^3}$ y $f(3) > 0$ se trata de un mínimo. No tiene puntos de inflexión.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \infty$$

Por lo tanto no tiene asíntotas horizontales

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty$$

Tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

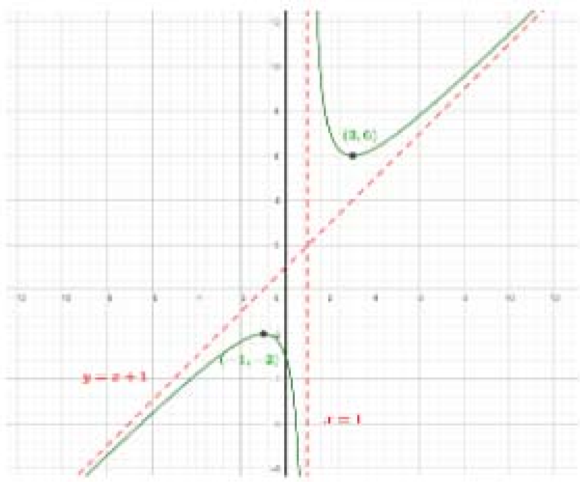
Asíntotas oblicuas (puede haber ya que no hay asíntotas horizontales)

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2+3}{x-1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1$$

$$n = \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3}{x-1} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3+x}{x-1} = 1$$

Tiene una asíntota oblicua: $y = x + 1$.

(c) **(0.5 puntos)**



Problema 4:

Pregunta 4. Se considera la función $f(x) = xe^{2x^2}$. Se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto (0, −1). (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$)

(b) **(1 punto)** Calcula el área encerrada por la gráfica de f, las rectas x = 0 y x = 1.

Solución

(a) **(1.5 puntos)** Si hacemos el cambio de variable: $2x^2 = t$, $4xdx = dt$ se tiene que

$$\int xe^{2x^2}\,dx = \int \frac{1}{4}e^t\,dt = \frac{1}{4}e^t + k = \frac{1}{4}e^{2x^2} + k$$

Como debe pasar por (0, −1) se tiene que $\frac{1}{4} + k = -1$, por lo que $k = -\frac{5}{4}$.

(b) **(1 punto)** $xe^{2x^2} \geq 0$ siempre que $x \geq 0$ el área perdida es

$$\int_0^1 xe^{2x^2}\,dx = \frac{1}{4}e^{2x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$$

Problema 5:

Pregunta 5. Sea s la recta de ecuación $x-2=\frac{y-2}{-1}=z$, y r la recta que pasa por los puntos $A=(1,0,1)$ y $B=(2,1,2)$.

(a) **(1 punto)** Indica la posición relativa de r y s.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula el plano paralelo a r y que contiene a s.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia entre las rectas r y s.

Solución

(a) **(1 punto)** La recta r es $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2-1}$ por lo tanto, se trata de discutir el sistema formado por las dos ecuaciones lineales de cada recta:

$$r\equiv\begin{cases} x-1=y \\ z-1=2y \end{cases};s\equiv\begin{cases} x-2=z \\ 2-y=z \end{cases}$$

es decir, el sistema:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2y-z=-1 \\ x-z=2 \\ y+z=1 \end{cases}$$

que es incompatible, por lo que las rectas no tienen puntos en común. Para ver si son paralelas se estudian los vectores directores: $(1,-1,1)$ de s, y $(1,1,1)$ de r. Como los vectores no son proporcionales, no son paralelas, por lo tanto las dos rectas s cruzan.

(b) **(0.75 puntos)** El vector normal al plano es el producto vectorial de unos directores de r y s:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\vec{i}+2\vec{k}$$

por lo que le plano pedido es de la forma $-2x+2z+D=0$. Como pasa por un punto de s, por ejemplo $(2,2,0)$ entonces $-4+D=0$ y $D=4$. Luego el plano pedido es $-2x+2z+4=0$.

(c) **(0.75 puntos)** La recta r pasa por $P=(1,0,1)$ y un vector director es $\vec{u}=(1,1,1)$, la recta s pasa por $Q=(2,2,0)$ y un vector director es $\vec{v}=(1,-1,1)$ Como $\vec{v}\times\vec{u}=-2\vec{i}+2\vec{k}$ entonces $|\vec{v}\times\vec{u}|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ Además el vector $\overrightarrow{PQ}=(2,2,0)-(1,0,1)=(1,2,-1)$. Haciendo

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=4$$

entonces $d(r,s)=\frac{|4|}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Problema 6:

Pregunta 6. Dados dos planos $\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A = (2, 1, 6)$

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π'.

(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π.

Solución

(a) **(0.75 puntos)** Si resolvemos el sistema se tiene que $z = 0$ y $x+y = 3$, por lo que podemos escribir la recta en forma paramétrica como:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{array}\right\} \alpha \in \mathbb{R}$$

por lo que un punto puede ser $(3, 0, 0)$ y un vector $(-1, 1, 0)$.

(b) **(1 punto)** Un vector normal a π es el $\vec{u} = (1, 1, 1)$. La recta que pasa por el punto pedido y A es perpendicular al plano, por lo tanto cumple que pasa por A y un vector director es $\vec{u}$.

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{array}\right\}$$

como el punto pertenece al plano, entonces

$$2 + \lambda + 1 + \lambda + 6 + \lambda = 3 \rightarrow \lambda = -2$$

y el punto pedido es:$P = (0, -1, 4)$.

(c) **(0.75 puntos)** El punto debe verificar que el punto medio del segmento A'A debe serr el punto calculado en el apartado anterior

$$\frac{(2, 1, 6) + (x, y, z)}{2} = (0, -1, 4) \rightarrow P = (-2, -3, 2)$$

Problema 7:

Pregunta 7. Una imprenta compra la tinta a dos empresas distintas. En la empresa A compra el 60 % de sus pedidos, y el resto a la empresa B. Se observa que el 1.6 % de las cajas de tinta de la empresa A llegan con defecto, mientras que de la empresa B sólo el 0.9 % son defectuosas. Se toma una caja al azar:

(a) **(1.25 punto)** Calcula la probabilidad de que la caja sea defectuosa.

(b) **(1.25 puntos)** Si la caja seleccionada no es defectuosa, calcule la probabilidad de que se haya comprado a la empresa A.

Solución

Llamaremos A al suceso caja comprada en la empresa A, B al suceso caja comprada en la empresa B y D al suceso caja defectuosa.

Los datos del enunciado son:

$$P(A) = 0.6,\ P(D/A) = 0.016,\ P(D/B) = 0.009$$

Además como la imprenta sólo compra a las empresas A y B s tiene que P(B) = 1 – P(A) = 1 – 0.6 = 0.4.

(a) **(1.25 puntos)**

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B) = 0.016 \cdot 0.6 + 0.009 \cdot 0.4 = 0.0132$$

es decir, el 1.32 % de las cajas serán defectuosas.

(b) **(1.25 puntos)** $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.0132 = 0.9868$.

$$P(A/\overline{D}) = \frac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P(\overline{D})} = \frac{P(\overline{D}/A)P(A)}{P(\overline{D})}$$

Como $P(\overline{D}/A) = 1 - P(D/A) = 1 - 0.016 = 0.984$ entonces

$$P(A/\overline{D}) = \frac{0.984 \cdot 0.6}{0.9868} = 0.5983.$$

Problema 8:

Pregunta 8. Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I de la Facultad de Matemáticas siguen una distribución N(5, 2).

(a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota mayor o igual que 7.5.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota entre 3 y 5.

(c) **(1 punto)** Se modifica sistema de enseñanza de forma que la desviación típica ahora es 1.5 y la probabilidad de obtener una nota menor o igual que 6, sea 0.52. ¿Cuál sería la nueva media? ¿Ha funcionado el sistema aplicado?

---

* Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: F(x) = P(Z ≤ x), F(0) = 0.5, F(1.25) = 0.8944, F(0.05) = 0.52, F(0.52) = 0.6985, F(0.8944) = 0.8133, F(1) = 0.8413.

Solución

(a) **(0.75 puntos)**

$$P(X \geq 7.5) = 1 - P(X \leq 7.5) = 1 - P\left(Z \leq \frac{7.5-5}{2}\right) = 1 - F(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

(b) **(0.75 puntos)**

$$P(3 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 3) = P\left(Z \leq \frac{5-5}{2}\right) - P\left(Z \leq \frac{3-5}{2}\right) = 0.5 - P(Z \leq -1)$$

Como $P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$ entonces

$$P(3 \leq X \leq 5) = 0.5 - 0.1587 = 0.3413$$

(c) **(1 punto)** $P(X \leq 6) = 0.52$, que corresponde al valor de la normal tipificada F(0.05) por lo tanto

$$Z = 0.05 = \frac{6-\mu}{1.5} \rightarrow \mu = 5.9250$$

La media ha pasado de 5 a 5.925, por lo que el sistema ha funcionado.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

BALEARES

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universidad de Las Islas Baleares

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

ENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho, propuestas. Solo se tendrán en cuesta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

Considera la matriu M i el vector b,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectivament.

(a) [3 punts] Indica per a quins valors de a la matriu M ´es invertible.

(b) [3 punts] Calcula, per a tots els valors de a que sigui possible, la inversa de M .

(c) [4 punts] Calcula, per al cas a = 0, el vector x tal que M x = b.

Problema 2:

Considera les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, i \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ A =}$$

i sigui O la matriu nul·la d’ordre 2 × 2.

(a) [4 punts] Calcula totes les matrius X tals que AX − X = B.

(b) [3 punts] Troba una matriu Y diferent de O tal que (A − B)Y = O.

(c) [3 punts] Indica totes les matrius Z que compleixen la igualtat AZ = O.

Problema 3:

Considera el pla π : 2x + 3y + z − 6 = 0.

(a) [3 punts] Determina els vèrtexs del triangle que ve determinat per la intersecció del pla amb els eixos de coordenades.

(b) [3 punts] Calcula l’àrea del triangle anterior.

(c) [4 punts] Sigui A el vèrtex del triangle sobre l’eix d’abscisses (eix OX). Calcula la recta perpendicular al pla que passa per A.

Problema 4:

Siguin a i b dues constants reals no nul·les.

Considerem el pla π : x + ay − 2z = 3 i la recta $r = \begin{cases} x + bz = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

(a) [4 punts] Per a quins valors de a i b la recta r és perpendicular al pla π? Per a aquests casos concrets, calcula el punt de tall entre r i π, i calcula o justifica quina ´es la distància de la recta al pla.

(b) [3 punts] Per a quins valors de a i b la recta r és paral·lela al pla π?

(c) [3 punts] Existeixen alguns valors de a i b per als quals la recta r està continguda en el pla π?

Problema 5:

La quantitat de tones d'aigua infectada per un bacteri s'espera que segueixi la funció

$f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1 sent,$ x ≥ 0 els dies d'infecci´o i f (x) les tones d'aigua infectada.

(a) [4 punts] Quantes tones d'aigua hi havia inicialment infectades pel bacteri? Cap a quin valor tendeix la quantitat d'aigua infectada? Interpreta els resultats.

(b) [4 punts] En quin moment hi ha menys quantitat d'aigua infectada? Quantes tones hi ha en aquell moment?

(c) [2 punts] Hi ha algun moment en què l'aigua no estigui infectada? Justifica la resposta.

Problema 6:

[10 punts] Representa la regió compresa entre la corba $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes x = 0 i x = 7. Calcula'n l'àrea.

Problema 7:

Un espai mostral conté dos successos A i B. Sabent que P (A ∩ B) = 0.3, P (A/B) = P (B/A) i P (A^c) = 0.4 (sent A^c el succés complementari), calcula:

(a) [2 punts] P (B/A).

(b) [3 punts] P (B).

(c) [3 punts] P ($A^c \cap B^c$).

(d) [2 punts] Són A i B successos independents?

Problema 8:

El pes dels nadons segueix una distribució normal de mitjana μ = 3.1 kg i desviació típica σ desconeguda. Se sap que només el 30.5% dels nadons pesa més de 3.8 kg. Calcula, arrodonint els resultats a 4 decimals,

(a) [4 punts] Quina és la desviació típica?

(b) [3 punts] Suposant que σ = 1.3725, quina és la probabilitat que un nadó pesi menys de 2.7 kg?

(c) [3 punts] Suposant que σ = 1.3725, quina és la probabilitat que un nadó pesi entre 2.7 i 3.5 kg?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Considera la matriu M i el vector b,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectivament.

(a) [3 punts] Indica per a quins valors de a la matriu M és invertible.

(b) [3 punts] Calcula, per a tots els valors de a que sigui possible, la inversa de M .

(c) [4 punts] Calcula, per al cas a = 0, el vector x tal que M x = b.

Solución:

P1. — Considera la matriu M i el vector $\mathbf{b}$,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivament.

(a) [**3 punts**] Indica per a quins valors de a la matriu M és invertible.

Solució.

$$\det(M) = a(a+1) + 1 - 2 - (a+1) = a^2 - 2 = 0 \longleftrightarrow a = \pm\sqrt{2}.$$

Aleshores, la matriu és invertible per a $a \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\}$.

(b) [**3 punts**] Calcula, per a tots els valors de a que sigui possible, la inversa de M.

Solució.

$$M^{-1} = \frac{1}{a^2-2} \begin{pmatrix} -1 & -1+a & 1 \\ -a & 2-a & -2+a^2+a \\ a+1 & -1 & -a-1 \end{pmatrix}.$$

(c) [**4 punts**] Calcula, per al cas $a = 0$, el vector $\mathbf{x}$ tal que $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solució. $M\mathbf{x} = \mathbf{b} \longleftrightarrow \mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{b}$. Per $a = 0$ tenim que

$$M^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notem que també es pot veure directament substituint $a = 0$ a M, ja que la darrera columna de M és el vector que es demana.

Problema 2:

Considera les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, i\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{A} =$$

i sigui O la matriu nul·la d'ordre 2 × 2.

(a) [4 punts] Calcula totes les matrius X tals que AX − X = B.

(b) [3 punts] Troba una matriu Y diferent de O tal que (A − B)Y = O.

(c) [3 punts] Indica totes les matrius Z que compleixen la igualtat AZ = O.

Solución:

(a) [**4 punts**] Calcula totes les matrius X tals que $AX - X = B$.

Solució. $AX - X = (A - I)X = B$. Per tant,

$$X = (A - I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(b) [**3 punts**] Troba una matriu Y diferent de O tal que $(A - B)Y = O$.

Solució. Sigui

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tenim que Y ha de complir que

$$\begin{pmatrix} a - 2c & b - 2d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $a = 2c$ i $b = 2d$. Llavors qualsevol matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

és vàlida sempre que c i d no s'anul.lin a la vegada.

(c) [**3 punts**] Indica totes les matrius Z que compleixen la igualtat $AZ = O$.

Solució. A és una matriu invertible, ja que $\det(A) = 9 \neq 0$. Aleshores, $AZ = O \longleftrightarrow A^{-1}AZ = A^{-1}O \longleftrightarrow Z = A^{-1}O = O$. L'única matriu és $Z = O$.

Problema 3:

Considera el pla π : 2x + 3y + z − 6 = 0.

(a) [3 punts] Determina els vèrtexs del triangle que ve determinat per la intersecció del pla amb els eixos de coordenades.

(b) [3 punts] Calcula l'àrea del triangle anterior.

(c) [4 punts] Sigui A el vèrtex del triangle sobre l'eix d'abscisses (eix OX). Calcula la recta perpendicular al pla que passa per A.

Solución:

P3. — Considera el pla $\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$.

(a) **[3 punts]** Determina els vèrtexs del triangle que ve determinat per la intersecció del pla amb els eixos de coordenades.

Solució. Sigui A el tall amb l'eix OX, llavors $A = (a, 0, 0)$.
Sigui B el tall amb l'eix OY, llavors $B = (0, b, 0)$.
Sigui C el tall amb l'eix OZ, llavors $C = (0, 0, c)$.
Imposem que aquests punts pertanyen al pla π:

$$A \text{ compleix } 2a + 0 + 0 - 6 = 0 \to a = 3 \to A = (3, 0, 0).$$
$$B \text{ compleix } 0 + 3b + 0 - 6 = 0 \to b = 2 \to B = (0, 2, 0).$$
$$C \text{ compleix } 0 + 0 + c - 6 = 0 \to c = 6 \to C = (0, 0, 6).$$

(b) **[3 punts]** Calcula l'àrea del triangle anterior.

Solució. Tenim que $\vec{AB} = (-3, 2, 0)$ i $\vec{AC} = (-3, 0, 6)$.
Aleshores, l'àrea del triangle ve donada per

$$A_{triangle} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} \right\|}{2} = \frac{\sqrt{12^2 + 18^2 + 6^2}}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} = \frac{6\sqrt{14}}{2} = 3\sqrt{14}u^2.$$

(c) **[4 punts]** Sigui A el vèrtex del triangle sobre l'eix d'abscisses (eix OX). Calcula la recta perpendicular al pla que passa per A.

Solució. El vector director de la recta és $d_r = (2, 3, 1)$ i ha de passar pel punt $A = (3, 0, 0)$. Aleshores, la recta és

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda, \\ y = 3\lambda, \\ z = \lambda. \end{cases}$$

Problema 4:

Siguin a i b dues constants reals no nul·les.

Considerem el pla π : x + ay − 2z = 3 i la recta $r = \begin{cases} x + bz = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

(a) [4 punts] Per a quins valors de a i b la recta r és perpendicular al pla π? Per a aquests casos concrets, calcula el punt de tall entre r i π, i calcula o justifica quina ´es la distància de la recta al pla.

(b) [3 punts] Per a quins valors de a i b la recta r és paral·lela al pla π?

(c) [3 punts] Existeixen alguns valors de a i b per als quals la recta r està continguda en el pla π?

Solución:

P4. — Siguin a i b dues constants reals no nul·les.
Considerem el pla $\pi : x + ay - 2z = 3$ i la recta

$$r : \begin{cases} x + bz = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

(a) **[4 punts]** Per a quins valors de a i b la recta r és perpendicular al pla π? Per a aquests casos concrets, calcula el punt de tall entre r i π, i calcula o justifica quina és la distància de la recta al pla.

Solució. Punts de r: $A = (0, 0, 1/b)$ i $B = (1, 0, 0)$, $\vec{d_r} = \vec{AB} = (1, 0, -1/b)$.
Vector normal al pla: $\vec{n} = (1, a, -2)$. La recta és perpendicular al pla si $\vec{d_r} = \lambda(1, a, -2)$. I.e $(1, 0, -1/b) = \lambda(1, a, -2)$. Aleshores, s'ha de complir que

$$\begin{aligned} &\lambda = 1, \\ &a\lambda = 0 \to a = 0, \\ &-1/b = -2\lambda \to b = 1/2. \end{aligned}$$

Ara bé, com que a és no nul, no es dóna aquest cas. L'exercici ja estaria acabat. Si algú el calcula hauria de ser P és tal que satisfà el sistema. La distància és 0 ja que són secants.

$$\begin{aligned} &x - 2z = 3 \to x = 2z + 3, \\ &x + \frac{1}{2}z = 1 \to 2z + 3 + \tfrac{1}{2}z = 1 \to \tfrac{5}{2}z = -2 \to z = \frac{-4}{5}, \\ &y = 0. \end{aligned}$$

Per tant, $P = (7/5, 0, -4/5)$.

(b) **[3 punts]** Per a quins valors de a i b la recta r és paral·lela al pla π?

Solució. Volem que $\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 0$. Per tant,

$$\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 1 + 0 + \frac{2}{b} = 0 \leftrightarrow b = -2.$$

Per tant, a pot ser qualsevol valor real, però $b = -2$.

(c) **[3 punts]** Existeixen alguns valors de a i b per als quals la recta r està continguda en el pla π?

Solució. La recta estarà continguda en el pla si $\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 0$ i, a més, un punt qualsevol de r pertany a π. Ara bé, $B \notin \pi$, ja que $1 \neq 3$. Aleshores, NO existeixen valors de a i b perquè la recta estigui continguda en π.

Problema 5:

La quantitat de tones d'aigua infectada per un bacteri s'espera que segueixi la funció

$f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1sent,$ x ≥ 0 els dies d'infecci´o i f (x) les tones d'aigua infectada.

(a) [4 punts] Quantes tones d'aigua hi havia inicialment infectades pel bacteri? Cap a quin valor tendeix la quantitat d'aigua infectada? Interpreta els resultats.

(b) [4 punts] En quin moment hi ha menys quantitat d'aigua infectada? Quantes tones hi ha en aquell moment?

(c) [2 punts] Hi ha algun moment en què l'aigua no estigui infectada? Justifica la resposta.

Solución:

P5. — La quantitat de tones d'aigua infectada per un bacteri s'espera que segueixi la funció $f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1$ sent $x \geq 0$ els dies d'infecció i $f(x)$ les tones d'aigua infectada.

(a) **[4 punts]** Quantes tones d'aigua hi havia inicialment infectades pel bacteri? Cap a quin valor tendeix la quantitat d'aigua infectada? Interpreta els resultats.

Solució.

- Inicialment hi ha $f(0) = 2$ tones d'aigua.
- Tenim que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} + 0.15x + 1 = +\infty$. Llavors tendeix que tota l'aigua estigui infectada.

(b) **[4 punts]** En quin moment hi ha menys quantitat d'aigua infectada? Quantes tones hi ha en aquell moment?

Solució.

- Cercam el mínim de la funció: $f'(x) = -e^{-x} + 0.15 = 0$. És a dir, a $x = -\ln(0.15) \approx 1.897119984885881$ dies.
- En aquest moment hi ha un total de $f(-\ln(0.15)) = e^{\ln(0.15)} - 0.15\ln(0.15) + 1 \approx 1.434567997732882$ tones.

(c) **[2 punts]** Hi ha algun moment en què l'aigua no estigui infectada? Justifica la resposta.

Solució. No perquè el mínim s'assoleix quan hi ha 1.434567997732882 tones. També es pot fer calculant x perquè $f(x) = 0$ i veure que no té solució.

Problema 6:

[10 punts] Representa la regió compresa entre la corba $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes x = 0 i x = 7. Calcula'n l'`area.

Solución:

P6. — **[10 punts]** Representa la regió compresa entre la corba $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes $x = 0$ i $x = 7$. Calcula'n l'àrea.

Solució. La funció $f(x) = 0$ només a $x = 0$. A més, és una funció positiva per a $x \in (0, +\infty]$. La seva representació es troba a la figura 1.

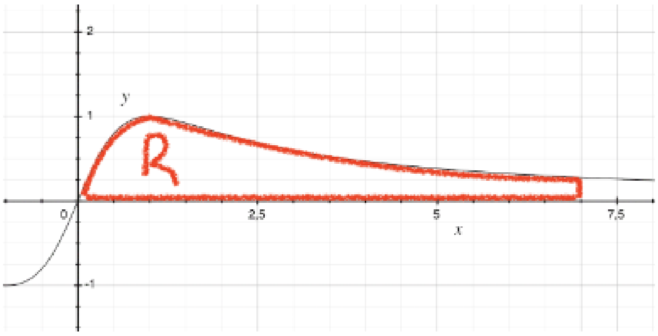


Figura 1: Regió compresa entre la corba $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 7$

Aleshores, l'àrea que volem calular és

$$A = \int_0^7 \frac{2x}{x^2+1} = \left[\ln|x^2+1|\right]_0^7 = \ln(50) - \ln(1) = \ln(50) \approx 3.912023005428146u^2$$

Problema 7:

Un espai mostral conté dos successos A i B. Sabent que P (A ∩ B) = 0.3, P (A/B) = P (B/A) i P (A^c) = 0.4 (sent A^c el succés complementari), calcula:

(a) [2 punts] P (B/A).

(b) [3 punts] P (B).

(c) [3 punts] P (A^c ∩ B^c).

(d) [2 punts] Són A i B successos independents?

Solución:

P7. — Un espai mostral conté dos successos A i B. Sabent que $P(A \cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ i $P(A^c) = 0.4$ (sent A^c el succés complementari), calcula:

(a) **[2 punts]** $P(B/A)$.

(b) **[3 punts]** $P(B)$.

(c) **[3 punts]** $P(A^c \cap B^c)$.

(d) **[2 punts]** Són A i B successos independents?

Solució.

(a) $P(B/A) = 0.5$,

(b) $P(B) = 0.6$,

(c) $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (0.6 + 0.6 - 0.3) = 0.1$,

(d) No són independents, perquè $P(B/A) \neq P(B)$.

Problema 8:

El pes dels nadons segueix una distribució normal de mitjana μ = 3.1 kg i desviació típica σ desconeguda. Se sap que només el 30.5% dels nadons pesa més de 3.8 kg. Calcula, arrodonint els resultats a 4 decimals,

(a) [4 punts] Quina és la desviació típica?

(b) [3 punts] Suposant que σ = 1.3725, quina és la probabilitat que un nadó pesi menys de 2.7 kg?

(c) [3 punts] Suposant que σ = 1.3725, quina és la probabilitat que un nadó pesi entre 2.7 i 3.5 kg?

Solución:

P8. — El pes dels nadons segueix una distribució normal de mitjana $\mu = 3.1$ kg i desviació típica σ desconeguda. Se sap que només el 30.5% dels nadons pesa més de 3.8 kg. Calcula, arrodonint els resultats a 4 decimals,

(a) **[4 punts]** Quina és la desviació típica?

Solució. $p(x > 3.8) = p\left(z > \frac{3.8-3.1}{\sigma}\right) = 1 - p\left(z \leq \frac{3.8-3.1}{\sigma}\right) = 0.305$. Per tant, tenim que $p\left(z \leq \frac{3.8-3.1}{\sigma}\right) = 1 - 0.305 = 0.695$. D'on

$$\frac{3.8-3.1}{\sigma} = 0.51 \;\rightarrow\; \sigma = 1.3725.$$

(b) **[3 punts]** Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi menys de 2.7 kg?

Solució. $p(x < 2.7) = p\left(z < \frac{2.7-3.1}{1.3725}\right) = p(z < -0.2914) = 1 - p(z < 0.2914) = 1 - 0.6141 = 0.3859$.

(c) **[3 punts]** Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi entre 2.7 i 3.5 kg?

Solució. $p(2.7 < x < 3.5) = p\left(\frac{2.7-3.1}{1.3725} < z < \frac{3.5-3.1}{1.3725}\right) = p(-0.2914 < z < 0.2914) = p(z < 0.2914) - p(z < -0.2914) = 2p(z < 0.2914) - 1 = 0.2282$.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho, propuestas. Solo se tendrán en cuesta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1. — Sea el sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ 2x + my = 1 \\ x + mz = 0 \end{cases}$$

(a) **[7 puntos]** Discute el número de soluciones que tiene el sistema según el parámetro m.

(b) **[3 puntos]** Resuelve el sistema en el caso $m = 1$.

Problema 2:

P2. — Sea A una matriz invertible $n \times n$ con coeficientes reales que satisface la igualdad $A^2 + A = I$. Entonces,

(a) **[3 puntos]** ¿Satisface la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

las condiciones del enunciado? Es decir, ¿cumple M la igualdad del enunciado y, además, es invertible?

Volviendo a considerar que A es una matriz cualquiera que satisface las condiciones del enunciado,

(b) **[3 puntos]** Calcula la inversa de A.

(c) **[4 puntos]** Comprueba que se cumple la igualdad $A(B+A) - I = A(B-I)$, siendo B una matriz cuadrada cualquiera $n \times n$ con coeficientes reales.

Problema 3:

P3. — Sean los puntos $A = (1,2,0)$, $B = (-1,0,1)$, $C = (0,0,1)$ y $D = (3,1,2)$.

(a) **[4 puntos]** Determina la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene los puntos A, B y C.

(b) **[4 puntos]** Determina si los puntos A, B, C y D son coplanarios o no.

(c) **[2 puntos]** ¿Es D el punto de corte de la recta con el plano del apartado (a)? Justifica la respuesta.

Problema 4:

P4. — Sea el plano $\pi : 3x + y + z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, 1)$ y $Q = (2, -1, -3)$.

(a) [2 puntos] ¿Son P y Q puntos del plano π? Justifica la respuesta.

(b) [4 puntos] Calcula el punto S situado sobre la recta PQ que se encuentra a 3/4 partes de P y a 1/4 parte de Q.

(c) [4 puntos] Determina la ecuación implícita (también llamada cartesiana) de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano π.

Problema 5:

P5. — La reproducción de un insecto a lo largo del tiempo sigue la función $f(x) = e^{-x}(2x + 1)$ siendo $x \geq 0$ el tiempo en meses y $f(x)$ el número de insectos en millones.

(a) [4 puntos] ¿Cuántos millones de insectos había en el instante inicial? ¿Hacia dónde tiende la cantidad de insectos a lo largo de los años? Interpreta los resultados.

(b) [4 puntos] ¿Cuál es el máximo número de insectos que puede llegar a haber? ¿En que instante de tiempo se consigue este valor?

(c) [2 puntos] ¿Hay algún momento en que la población supere los 2 millones de insectos? Justifica la respuesta.

Problema 6:

P6. — [10 punts] Calcula la integral de la función $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x - 2}$.

Problema 7:

P7. — En una clase donde todos los alumnos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega a fútbol o básquet y el 10% practica los dos. Por otra parte, se sabe que hay un 60% de alumnos que no juega a fútbol.

(a) [3 puntos] Sea F ='juega a fútbol' y sea B ='juega a básquet', escribe, en términos de uniones, intersecciones y complementarios de estos dos sucesos, las tres probabilidades que indica el enunciado.

(b) Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar un alumno de la clase,

(b.1) [1 punto] Juegue a fútbol.

(b.2) [2 puntos] Juegue a básquet.

(b.3) [2 puntos] Juegue a básquet y no a fútbol (es decir, solo juega a básquet).

(b.4) [2 puntos] No juegue ni a fútbol ni a básquet.

Problema 8:

P8. — (a) [5 puntos] En un examen de tecnología, ¿cuál es la probabilidad de sacar una nota entre 5 y 7 si se sabe que las notas siguen una distribución normal de media 6 y desviación típica 2?

(b) [5 puntos] En un examen de filosofía, el 35% de los alumnos presentados obtuvieron una nota mayor que 6 mientras que el 51% la obtuvo menor que 4. Suponiendo que las notas siguen una distribució normal, determina cuál es su media μ y su desviación típica σ.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1. — Sea el sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ 2x + my = 1 \\ x + mz = 0 \end{cases}.$$

(a) **[7 puntos]** Discute el número de soluciones que tiene el sistema según el parámetro m.

(b) **[3 puntos]** Resuelve el sistema en el caso $m = 1$.

Solución:

P1. — Sigui el sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ 2x + my = 1 \\ x + mz = 0 \end{cases}.$$

(a) **[7 punts]** Discuteix el nombre de solucions que té el sistema segons el paràmetre m.

Solució. Sigui el sistema escrit en forma matricial $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ on

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenim que

– Cas general:

$\det(A) = m^3 + m - 2m = m(m^2 - 1) = 0$ si i només si $m = 0,\ m = \pm 1. \to Rang(A) = 3.$

– Si $m = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to Rang(A) = 2.$$

$$(A|\mathrm{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to Rang(A|\mathrm{b}) = 3.$$

– Si $m = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to Rang(A) = 2.$$

$$(A|\mathrm{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to Rang(A|\mathrm{b}) = 2.$$

– Si $m = -1$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to Rang(A) = 2.$$

$$(A|\mathrm{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to Rang(A|\mathrm{b}) = 3.$$

Quadre solució:

si $m \neq 0$ i $m \neq \pm 1$	$Rang(A) = 3 = Rang(A\|\mathrm{b})$	Sistema comp. determinat	1 solució
si $m = 0$	$Rang(A) = 2 \neq 3 = Rang(A\|\mathrm{b})$	Sistema incompatible	0 solucions
si $m = 1$	$Rang(A) = 2 = Rang(A\|\mathrm{b})$	Sistema comp. indet.	∞ solucions
si $m = -1$	$Rang(A) = 2 \neq 3 = Rang(A\|\mathrm{b})$	Sistema incompatible	0 solucions

(b) **[3 punts]** Resol el sistema per al cas $m = 1$.

Solució. Com que el sistema és compatible indeterminat, sigui $z = t \in \mathbb{R}$. Aleshores,

$$\begin{cases} x + y = 1 + t \to x + 1 - 2x = 1 + t \to x = -t, \\ 2x + y = 1 \to y = 1 - 2x \to y = 1 + 2t. \end{cases}$$

Aleshores, $\mathrm{x} = (-t, 1 + 2t, t)$ amb $t \in \mathbb{R}$.

Problema 2:

P2. — Sea A una matriz invertible $n \times n$ con coeficientes reales que satisface la igualdad $A^2 + A = I$. Entonces,

(a) **[3 puntos]** ¿Satisface la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

las condiciones del enunciado? Es decir, ¿cumple M la igualdad del enunciado y, además, es invertible?

Volviendo a considerar que A es una matriz cualquiera que satisface las condiciones del enunciado,

(b) **[3 puntos]** Calcula la inversa de A.

(c) **[4 puntos]** Comprueba que se cumple la igualdad $A(B+A)-I = A(B-I)$, siendo B una matriz cuadrada cualquiera $n \times n$ con coeficientes reales.

Solución:

P2. — Sigui A una matriu invertible $n \times n$ amb coeficients reals tal que compleix la igualtat $A^2 + A = I$. Aleshores,

(a) **[3 punts]** Satisfà la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

les condicions de l'enunciat? És a dir, compleix M la igualtat de l'enunciat i, a més, és invertible?

Solució. Sí, ho compleix ($\det(M) \neq 0$, per tant, és invertible, i compleix que $M^2 + M = I$).

Tornant a considerar que A és una matriu qualsevol que satisfà les condicions de l'enunciat,

(b) **[3 punts]** Calcula la inversa de A.

Solució. $A(A+I) = I$ i, per tant, $A + I = A^{-1}$.

(c) **[4 punts]** Comprova que se satisfà la igualtat $A(B+A) - I = A(B-I)$, sent B una matriu quadrada qualsevol $n \times n$ amb coeficients reals.

Solució. $A(B+A) - I = AB + A^2 - I = AB + (I - A) - I = AB - A = A(B - I)$.

Problema 3:

P3. — Sean los puntos $A = (1,2,0)$, $B = (-1,0,1)$, $C = (0,0,1)$ y $D = (3,1,2)$.

(a) **[4 puntos]** Determina la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene los puntos A, B y C.

(b) **[4 puntos]** Determina si los puntos A, B, C y D son coplanarios o no.

(c) **[2 puntos]** ¿Es D el punto de corte de la recta con el plano del apartado (a)? Justifica la respuesta.

Solución:

P3. — Siguin els punts $A = (1,2,0)$, $B = (-1,0,1)$, $C = (0,0,1)$ i $D = (3,1,2)$.

(a) **[4 punts]** Determina la recta r que passa per D i és perpendicular al pla que conté els punts A, B i C.

Solució. El pla que conté els punts A, B i C té per vectors directors $\vec{AB} = (-2,-2,1)$ i $\vec{AC} = (-1,-2,1)$. La recta r té per vector director el vector normal del pla, que és un vector perpendicular als dos vectors directors. I.e.

$$\vec{d_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (0,1,2).$$

Per tant, la recta és

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 1 + t, \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$

(b) **[4 punts] Determina si els punts A, B, C i D són coplanaris o no.**

Solució. Els quatre punts seran coplanaris si els vectors $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ i $\vec{AD}$ són linealment independents. Tenim que

$$\vec{AB} = (-2,-2,1), \quad \vec{AC} = (-1,-2,1), \quad \vec{AD} = (2,-1,2),$$

Ara bé, com que

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 - 4 + 4 - 2 - 4 = 3 \neq 0,$$

tenim que els 4 punts NO són coplanaris.

(c) **[2 punts] És D el punt de tall de la recta amb el pla de l'apartat (a)? Justifica la resposta.**

Solució. No. Ja hem vist que no pertany al pla.

Problema 4:

P4. — Sea el plano $\pi : 3x + y + z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, 1)$ y $Q = (2, -1, -3)$.

(a) [2 puntos] ¿Son P y Q puntos del plano π? Justifica la respuesta.

(b) [4 puntos] Calcula el punto S situado sobre la recta PQ que se encuentra a 3/4 partes de P y a 1/4 parte de Q.

(c) [4 puntos] Determina la ecuación implícita (también llamada cartesiana) de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano π.

Solución:

P4. — Sigui el pla $\pi : 3x + y + z = 2$ i els punts $P = (0, 1, 1)$ i $Q = (2, -1, -3)$.

(a) [2 punts] Són P i Q punts del pla π? Justifica la resposta.

Solució. Sí, perquè verifiquen l'equació: $0 + 1 + 1 = 2$ i $6 - 1 - 3 = 2$.

(b) [4 punts] Calcula el punt S situat sobre la recta PQ que es troba a 3/4 parts de P i a 1/4 part de Q.

Solució. Si no ho saben fer directament, basta fer dues vegades el punt mitjà:

- punt mitjà de P i Q: $M = (1, 0, -1)$.
- punt mitjà de M i Q: $S = (3/2, -1/2, -2)$.

(c) [4 punts] Determina l'equació implícita (també anomenada cartesiana) de la recta que passa per P i és perpendicular al pla π.

Solució. El vector director d'aquesta recta ha ser el vector normal del pla ($\vec{n} = (3, 1, 1)$). Per tant, l'equació contínua és

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

D'on tenim que l'equació implícita és

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Problema 5:

P5. — La reproducción de un insecto a lo largo del tiempo sigue la función $f(x) = e^{-x}(2x+1)$ siendo $x \geq 0$ el tiempo en meses y $f(x)$ el número de insectos en millones.

(a) [4 puntos] ¿Cuántos millones de insectos había en el instante inicial? ¿Hacia dónde tiende la cantidad de insectos a lo largo de los años? Interpreta los resultados.

(b) [4 puntos] ¿Cuál es el máximo número de insectos que puede llegar a haber? ¿En que instante de tiempo se consigue este valor?

(c) [2 puntos] ¿Hay algún momento en que la población supere los 2 millones de insectos? Justifica la respuesta.

Solución:

P5. — La reproducció d'un insecte al llarg del temps segueix la funció $f(x) = e^{-x}(2x+1)$ sent $x \geq 0$ el temps en mesos i $f(x)$ el nombre d'insectes en milions.

(a) [4 punts] Quants de milions d'insectes hi havia en l'instant inicial? Cap a on tendeix la quantitat d'insectes al llarg dels anys? Interpreta els resultats.

Solució.

- Inicialment hi ha $f(0) = 1$ milió d'insectes.
- Tenim que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(2x+1) = 0$ (per De L'Hôpital). Llavors la població d'insectes tendeix a extingir-se.

(b) [4 punts] Quin és el màxim nombre d'insectes que hi arriba a haver? En quin instant de temps s'assoleix aquest valor?

Solució.

- Cercam el màxim de la funció: $f'(x) = -e^{-x}(2x+1) + 2e^{-x} = e^{-x}(-2x+1) = 0$ quan $-2x+1 = 0$. És a dir, a $x = \frac{1}{2}$ mes.
- En aquest moment hi ha un total de $f(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}(2\frac{1}{2}+1) = 2e^{-\frac{1}{2}} = 1.213$ milions d'insectes.

(c) [2 punts] Hi ha algun moment en què la població supera els 2 milions d'insectes? Justifica la resposta.

Solució. No, perquè el màxim s'assoleix quan hi ha 1.213061319425267 milions d'insectes.

Problema 6:

P6. — [10 punts] Calcula la integral de la función $f(x) = \dfrac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}$.

Solución:

P6. — **[10 punts] Calcula la integral de la funció** $f(x) = \dfrac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}$.

Solució.

$$\int \left(\frac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}\right) dx = \int \left(x^2-x+3+\frac{-3x}{x^2+x-2}\right) dx =$$

$$\int (x^2-x+3)\, dx - 3\int \left(\frac{x}{(x-1)(x+2)}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 3\int \left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}\right) dx = (*)$$

Es troba que $A = 1/3$ i $B = 2/3$ i per tant,

$$(*) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 3\int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{x+2}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - (\ln|x-1| + 2\ln|x+2|) + C.$$

Problema 7:

P7. — En una clase donde todos los alumnos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega a fútbol o básquet y el 10% practica los dos. Por otra parte, se sabe que hay un 60% de alumnos que no juega a fútbol.

(a) **[3 puntos]** Sea F ='juega a fútbol' y sea B ='juega a básquet', escribe, en términos de uniones, intersecciones y complementarios de estos dos sucesos, las tres probabilidades que indica el enunciado.

(b) Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar un alumno de la clase,

(b.1) **[1 punto]** Juegue a fútbol.

(b.2) **[2 puntos]** Juegue a básquet.

(b.3) **[2 puntos]** Juegue a básquet y no a fútbol (es decir, solo juega a básquet).

(b.4) **[2 puntos]** No juegue ni a fútbol ni a básquet.

Solución:

P7. — **En una classe on tots els alumnes practiquen algun esport, el 60% dels alumnes juga a futbol o bàsquet i el 10% practica els dos. Per altra banda, se sap que hi ha un 60% d'alumnes que no juga a futbol.**

(a) [3 punts] Sigui F ='juga a futbol' i sigui B ='juga a bàsquet', escriu, en termes d'unions, interseccions i complementaris d'aquests dos esdeveniments, les tres probabilitats que indica l'enunciat.

Solució. Sigui F ='juga a futbol' i sigui B ='juga a bàsquet'. L'enunciat ens diu que $P(F \cup B) = 0.6$, $P(F \cap B) = 0.1$, $P(\bar{F}) = 0.6$.

(b) Calcula la probabilitat que, escollint a l'atzar un alumne de la classe,

(b.1) [1 punt] Jugui a futbol.

(b.2) [2 punts] Jugui a bàsquet.

(b.3) [2 punts] Jugui a bàsquet i no a futbol (és a dir, només jugui a bàsquet).

(b.4) [2 punts] No jugui ni a futbol ni a bàsquet.

Solució. Tenim que

- $P(F) = 1 - P(\bar{F}) = 0.4$
- $P(B) = P(F \cup B) - P(F) + P(F \cap B) = 0.6 - 0.4 + 0.1 = 0.3$
- $P(B \cap \bar{F}) = P(B) - P(B \cap F) = 0.3 - 0.1 = 0.2$
- $P(\bar{F} \cap \bar{B}) = 1 - P(F \cup B) = 1 - 0.6 = 0.4$

Problema 8:

P8. — (a) [5 puntos] En un examen de tecnología, ¿cuál es la probabilidad de sacar una nota entre 5 y 7 si se sabe que las notas siguen una distribución normal de media 6 y desviación típica 2?

(b) [5 puntos] En un examen de filosofía, el 35% de los alumnos presentados obtuvieron una nota mayor que 6 mientras que el 51% la obtuvo menor que 4. Suponiendo que las notas siguen una distribució normal, determina cuál es su media μ y su desviación típica σ.

Solución:

P8. — **(a) [5 punts] En un examen de tecnologia, quina és la probabilitat de treure una nota entre 5 i 7 si se sap que les notes segueixen una distribució normal de mitjana 6 i desviació típica 2?**

Solució. Les dades segueixen una $N(6, 2)$. Per tant,

$$p(5 < x < 7) = p\left(\frac{5-6}{2} < z < \frac{7-6}{2}\right) = p(-0.5 < z < 0.5) =$$

$$p(z < 0.5) - p(z < -0.5) = 2p(z < 0.5) - 1 = 2 \cdot 0.6915 - 1 = 0.383.$$

(b) [5 punts] En un examen de filosofia, el 35% dels alumnes presentats varen obtenir una nota major que 6, mentre que el 51% en varen obtenir una menor que 4. Suposant que les notes segueixen una distribució normal, determina quina és la seva mitjana μ i la seva desviació típica σ.

Solució. Les dades segueixen una $N(\mu, \sigma)$ i sabem que

$$p(x > 6) = p\left(z > \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 1 - p\left(z < \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0.35 \rightarrow p\left(z < \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0.65$$

$$p(x < 4) = p\left(z < \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0.51.$$

Així doncs, mirant a la taula tenim que

$$\frac{6-\mu}{\sigma} = 0.385, \qquad \frac{4-\mu}{\sigma} = 0.025.$$

Resolent el sistema tenim que

$$\mu = 3.86\hat{1}, \quad \sigma = 5.\hat{5}.$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

CANARIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Gobierno de Canarias y Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenidos, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque. En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet. Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

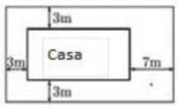
Bloque 1.- Análisis.

Problema 1A:

Hallar la función polinómica $f(x)$ que verifica que tiene un punto mínimo en (1, 2) y su segunda derivada es: $f''(x) = 2x + 3$. Dar la expresión de $f(x)$.

Problema 1B:

Se quiere construir una Casa de la Juventud de 240 m^2 de superficie, que estará rodeada por una zona ajardinada con las dimensiones de la imagen.



Si se quiere minimizar la superficie total de la zona ajardinada, ¿qué dimensiones debe tener la Casa de la Juventud? ¿Cuál es el área de la zona ajardinada?

Bloque 2.- Álgebra.

Problema 2A:

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ y \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Comprobar si la matriz $M = 2I_3 + B^t$ tiene inversa. Donde I_3 la matriz identidad de orden 3.

b) Justificar que existe la matriz X que verifica la ecuación siguiente:

$$2X + C = A - X \cdot B^t$$

Calcular razonadamente dicha matriz X.

Problema 2B:

Un bar de tapas canario sólo ofrece tres platos en su menú: escaldón, tollos y carajacas. El precio medio de los tres platos (la ración) es de 5€. Se sirven 30 raciones de escaldón, 20 raciones de tollos y 10 raciones de carajacas, por lo que se ingresaron 255 euros en total. Sabiendo que el triple del precio de las caracajas supera en diez euros el doble del precio de los tollos. Calcula el precio de la ración de cada producto.

Autores: Gobierno de Canarias y Juan Antonio Martínez García

Bloque 3.- Geometría.

Problema 3A:

En el espacio tridimensional consideramos el plano y las rectas siguientes:

$\pi \equiv 2x + 3y - z = 4; r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}; S \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1};$

a) Calcular el punto simétrico de (-2,1,2) respecto de π.
b) Calcular el ángulo que forman r y s

Problema 3B:

En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y - 7z = 0 \\ 2x + 3y - 12z + 1 = 0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} 2x - 7y - 3z = 22 \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Problema 4A:

Bloque 4.- Probabilidad.

Según el estudio TALIS (2018), el 11 % de los docentes de Educación Secundaria en España son menores de 30 años.

a) Elegimos 15 docentes españoles, ¿qué probabilidad hay de que haya menos de 2 docentes menores de 30 años?

b) Supongamos que se seleccionan al azar 200 docentes españoles. ¿Qué probabilidad hay de que entre 20 y 30 docentes sean menores de 30 años?

c) En un grupo de 500 docentes españoles, ¿cuántos cabe esperar que sean mayores de 30 años?

Problema 4B:

Las estaturas de las personas que se presentan a una audición para participar en una película siguen una distribución normal de media 168 cm y desviación típica 8 cm.

a) Si se selecciona una persona participante en la audición, averiguar la probabilidad de que tenga una estatura mayor a 156 cm.

b) Se afirma que más del 15 % de los participantes en la audición medían más de 1,82 metros. Justifica la veracidad o falsedad de dicha afirmación.

c) ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una persona al azar, su estatura se encuentre entre 166 y 172 cm?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Bloque 1.- Análisis.

Problema 1A:

Hallar la función polinómica $f(x)$ que verifica que tiene un punto mínimo en (1, 2) y su segunda derivada es: $f''(x) = 2x + 3$. Dar la expresión de $f(x)$.

Solución:

Para calcular la función cuya segunda derivada es la dada, deberemos integrar la función. Esta integración debe tener en cuenta la información acerca del punto dado, que es mínimo.

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int (2x+3)dx = 2\frac{x^2}{2} + 3x + k = x^2 + 3x + k$$

Como el punto M es un mínimo, significa que cuando x=1, la derivada de la función debe ser cero.

$$f'(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 + k = 4 + k = 0 \rightarrow k = -4$$

Por tanto, $f'(x) = x^2 + 3x - 4$

Ahora bien, debemos integrar $f'(x)$ para averiguar la función $f(x)$:

$$f(x) = \int (x^2 + 3x - 4)dx = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 4x + k$$

Y como sabemos que pasa por el punto $M(1,2)$, $f(1) = 2$;

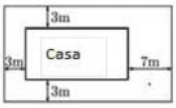
$$f(1) = \frac{1^3}{3} + 3\frac{1^2}{2} - 4 \cdot 1 + k = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 + k = \frac{-13}{6} + k = 2 \rightarrow k = \frac{25}{6}$$

Por tanto, la función buscada es:

$$\boxed{f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + \frac{25}{6}}$$

Problema 1B:

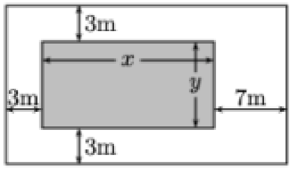
Se quiere construir una Casa de la Juventud de 240 m^2 de superficie, que estará rodeada por una zona ajardinada con las dimensiones de la imagen.



Si se quiere minimizar la superficie total de la zona ajardinada, ¿qué dimensiones debe tener la Casa de la Juventud? ¿Cuál es el área de la zona ajardinada?

Solución:

Denominamos x e y a las longitudes desconocidas de la superficie de la Casa de la Juventud:



Sabemos que la superficie de la vivienda debe ser 240 m^2, por tanto: $x \cdot y = 240$

Y, además, queremos minimizar la superficie ajardinada, con lo que debemos construir la función de dicha superficie:

$$Superficie\ del\ Jardín = (x+3+7)\cdot(y+3+3) - xy = (x+10)\cdot(y+6) - xy$$
$$= xy + 6x + 10y + 60 - xy = 6x + 10y + 60$$
$$Superficie\ del\ Jardín = 6x + 10y + 60$$

Despejamos la variable y en la primera relación y la sustituimos en la segunda para obtener la función a minimizar:

$$y = \frac{240}{x}$$
$$Superficie\ del\ jardín = 6x + 10\frac{240}{x} + 60 = 6x + \frac{2400}{x} + 60$$

Buscamos el mínimo de la función de la superficie del jardín:

$$S'(x) = 6 - \frac{2400}{x^2}$$

Igualamos a cero para ver dónde se alcanza el valor extremo:

$$6 - \frac{2400}{x^2} = 0 \to \frac{6x^2 - 2400}{x^2} = 0 \to 6x^2 - 2400 = 0 \to x^2 = \frac{2400}{6} = 400 \to$$
$$x = \pm\sqrt{400} = \pm 20$$

Al tratarse de longitudes, descartamos el valor negativo de la x y nos quedamos sólo con el valor positivo: $x = 20$

Comprobemos que se trata de um mínimo:

Valores	$x = 10$	$x = 20$	$x = 30$
Derivada S'	$S'(10) = 6 - \frac{2400}{10^2} = 6 - 24 < 0$	$S'(20) = 0$	$S'(30) = 6 - \frac{2400}{30^2} = 6 - 2.67 > 0$
Función S	Decrece	Mínimo	Crece

Por tanto, la función de la superficie ajardinada alcanza un mínimo cuando $x = 20$, y para este valor, la $y = \frac{240}{20} = 12$

Las dimensiones de la Casa de la Juventud son: **20m x 12m**

La superficie ajardinada será: $6 \cdot 20 + \frac{2400}{20} + 60 = \mathbf{300m^2}$

Bloque 2.- Álgebra.

Problema 2A:

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; y \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Comprobar si la matriz $M = 2I_3 + B^t$ tiene inversa. Donde I_3 la matriz identidad de orden 3.

b) Justificar que existe la matriz X que verifica la ecuación siguiente:

$$2X + C = A - X \cdot B^t$$

Calcular razonadamente dicha matriz X.

Solución:

a) Calculamos primero la matriz traspuesta de B:

$$B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Averiguamos, ahora, la matriz $M = 2I_3 + B^t$:

$$M = 2I_3 + B^t = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tendrá inversa si su determinante es distinto de cero,

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Por tanto, la matriz M tiene inversa.

b) Tenemos la ecuación matricial: $2X + C = A - X \cdot B^t$

Despejamos la matriz X:

$$2X + C = A - X \cdot B^t \to 2X + X \cdot B^t = A - C \to X(2I_3 + B^t) = A - C \to$$

$$X = (A - C)(2I_3 + B^t)^{-1}$$

Para justificar que existe la matriz solución de la ecuación es necesario que exista la matriz inversa de $2I_3 + B^t$. Sabemos, por el apartado (a) que dicha matriz tiene inversa y, por tanto, existe solución a la ecuación planteada.

Calculamos primero $(2I_3 + B^t)^{-1} = M^{-1}$,

$$\mathrm{M} = 2I_3 + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Adj(M) = Adj(2I_3 + B^t) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces como $|M| = |2I_3 + B^t| = 1$,

$$(2I_3 + B^t)^{-1} = (Adj(\mathrm{M}))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$A - C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y finalmente}$$

$$X = (A - C)(2I_3 + B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Problema 2B:

Un bar de tapas canario sólo ofrece tres platos en su menú: escaldón, tollos y carajacas. El precio medio de los tres platos (la ración) es de 5€. Se sirven 30 raciones de escaldón, 20 raciones de tollos y 10 raciones de carajacas, por lo que se ingresaron 255 euros en total. Sabiendo que el triple del precio de las caracajas supera en diez euros el doble del precio de los tollos. Calcula el precio de la ración de cada producto.

Solución:

Determinamos las variables que debemos averiguar:

x = precio de cada ración de escaldón (€)

y = precio de cada ración de tollos (€)

z = precio de cada ración de carajacas (€)

Escribimos en lenguaje algebraico las relaciones que se dan en el enunciado:

Precio medio de 5€: $\frac{x+y+z}{3} = 5 \rightarrow x + y + z = 15$

Raciones servidas: $30x + 20y + 10z = 255$

Relación de precios: $3z - 10 = 2y \rightarrow -2y + 3z = 10$

El sistema de ecuaciones, resuelto mediante el método de gauss será:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=15 \\ 30x+20y+10z=255 \\ -2y+3z=10 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=15 \\ -10y-20z=-195 \\ -2y+3z=10 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=15 \\ -10y-20z=-195 \\ -35z=-245 \end{array}\right\}$$

Por tanto,

$$x = 15 - 5{,}5 - 7 = 2{,}5$$
$$y = \frac{-195 + 20 \cdot 7}{-10} = \frac{-55}{-10} = 5{,}5$$
$$z = \frac{-245}{-35} = 7$$

El precio de las raciones será:

Escaldón: 2,5 €/ración
Tollos: 5,5 €/ración
Carajacas: 7 €/ración

Bloque 3.- Geometría.

Problema 3A:

En el espacio tridimensional consideramos el plano y las rectas siguientes:

$$\pi \equiv 2x+3y-z=4;\ r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases};\ S \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{1};$$

a) Calcular el punto simétrico de (-2,1,2) respecto de π.
b) Calcular el ángulo que forman r y s

Solución:

a) Hallamos la recta *t* perpendicular al plano π que pasa por P. Entonces $\overrightarrow{v_t}=\overrightarrow{n_\pi}$ y la ecuación es:

$$t: \begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}$$

Calculamos la intersección de la recta r con el plano π

$$2(-2+2\lambda)+3(1+3\lambda)-(2-\lambda)=4$$
$$14\lambda=7$$
$$\lambda=\frac{1}{2}$$

Por tanto, el punto de intersección es $Q\left(-1,\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$, que es el punto medio del punto P y su simétrico P'.

$$P'=P+2\overrightarrow{PQ}=(-2,1,2)+2\left(1,\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right)=(0,4,1).$$

b) Para hallar el ángulo que forman las rectas $r\ y\ s$, aplicamos la siguiente fórmula:

$$cos(\alpha)=\frac{|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_s}|}$$

Calculamos los vectores directores de las rectas. Una de ellas viene dada como intersección de planos y es necesario averiguar el producto vectorial de los vectores normales que generan la recta.

$$\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}=(6,-3,3)\equiv(2,-1,1) \qquad \overrightarrow{v_s}=(1,0,1)$$

$$\begin{cases} |\overrightarrow{v_r}|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6} \\ |\overrightarrow{v_s}|=\sqrt{2} \\ \overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}=3 \end{cases} \Rightarrow \cos(\alpha)=\frac{|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_s}|}=\frac{3}{\sqrt{12}};\quad \alpha=arcos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=30°.$$

Problema 3B:

En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y - 7z = 0 \\ 2x + 3y - 12z + 1 = 0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} 2x - 7y - 3z = 22 \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

$a)$ Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

$b)$ Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Solución:

a) Un método es extraer los vectores directores de las rectas y un punto de cada una de ellas

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -12 \end{vmatrix} = -3i - 2j - k = (3,2,1)$$

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10i - 5j + 5k = (-2,-1,1)$$

Extraemos un punto de cada recta:

$$z = 0; \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x + 2y = 0 \\ -y = -1 \end{matrix} \rightarrow y = 1;\ P(-2,1,0)$$

$$y = 0; \begin{cases} 2x - 3z = 22 \\ x + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 2x - 3z = 22 \\ -5z = 20 \end{matrix} \rightarrow z = -4;\ Q(5,0,-4)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (7,-1,-4)$$

Estudiamos si son linealmente independientes: $\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{PQ}\}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 12 + 2 + 14 + 7 + 3 - 16 = 22 \neq 0$$

Las rectas r y s se cruzan

OTRA FORMA DE RESOLVERLO:

Vamos a comprobar si estas rectas pueden ser coincidentes o paralelas, para ello comprobaremos si sus direcciones son proporcionales.

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -12 \end{vmatrix} = (3,2,1);\ \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-1,1)$$

Y como $\frac{3}{-2} \neq \frac{2}{-1}$, las direcciones no son proporcionales, por tanto las rectas r y s no son coincidentes ni paralelas.

Veamos estudiando el rango de las ecuaciones que la definen, si se pueden cortar en un punto o se cruzan. La matriz de coeficientes del sistema y la ampliada serían:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -12 \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -7 & 0 \\ 2 & 3 & -12 & -1 \\ 2 & -7 & -3 & 22 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de M por adjuntos de la primera columna:

$$|M| = 1\cdot\begin{vmatrix}3 & -12 & -1\\ -7 & -3 & 22\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}2 & -12 & -1\\ 2 & -3 & 22\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} - 7\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 2 & -7 & 22\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= (-9+7+264+3-66-84) - 2\cdot(-6-2-264-3-44+24) - 7 \cdot(-14+2+66-7+44-6) =$$

$$= 115 - 2(-295) - 7\cdot(85) = 110 \neq 0.$$

Por tanto $rang(M) = 4$, además

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 2 & -7\\ 2 & 3 & -12\\ 2 & -7 & -3\end{vmatrix} = -9+98-48+42-84+12 = 11 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3.$$

Las rectas r y s se cruzan.

b) Debemos construir un plano π que contenga a r y sea paralelo a s. Necesitamos por tanto un punto y dos direcciones

Como π contiene a r tomaremos un punto de r y la dirección de r como una de las direcciones del plano.

Como π tiene que ser paralelo a s, el vector director de s nos servirá como segundo vector director del plano.

Un punto de r,

$z = 0 \Rightarrow P_r(-2,1,0)$,

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix} = (3,2,1) \text{ y } \qquad \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix} = (2,1,-1),$$

la ecuación del plano es:

$$\pi = \begin{vmatrix}x+2 & y-1 & z\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix} = -3(x+2) + 5(y-1) - z = 0$$

$$\boldsymbol{\pi: -3x + 5y - z - 11 = 0}$$

Problema 4A:

Bloque 4.- Probabilidad.

Según el estudio TALIS (2018), el 11 % de los docentes de Educación Secundaria en España son menores de 30 años.

a) Elegimos 15 docentes españoles, ¿qué probabilidad hay de que haya menos de 2 docentes menores de 30 años?

b) Supongamos que se seleccionan al azar 200 docentes españoles. ¿Qué probabilidad hay de que entre 20 y 30 docentes sean menores de 30 años?

c) En un grupo de 500 docentes españoles, ¿cuántos cabe esperar que sean mayores de 30 años?

Solución:

a) Se define la variable X = "Nº de docentes menores de 30 años"
Esta variable sigue una distribución binomial de tamaño 15 y probabilidad p=0.11

$$X \sim Bi(15{,}0.11)$$

Como np=1.65<5 y nq =13.35> 5 no se puede aproximar con la normal

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$P(X = 0) = \binom{15}{0} 0.11^0 \cdot 0.89^{15} = 0.1741$$

$$P(X = 1) = \binom{15}{1} 0.11^1 \cdot 0.89^{14} = 0.3228$$

$$P(X < 2) = 0.1741 + 0.3228 = 0.4969$$

Hay una probabilidad de 0.4969 de que haya menos de dos profesores menores de 30 años en un grupo de 15 docentes españoles elegidos al azar.

b) *Seleccionamos 200 docentes. X*~B(200,0.11)

Como np=22>5 y nq=178 > 5 se puede aproximar con la normal $N(22, \sqrt{19.58})$

$$P(20 < X < 30) = P(X < 30) - P(X \le 20) = P\left(Z < \frac{30-22}{\sqrt{19.58}}\right) - P\left(Z \le \frac{20-22}{\sqrt{19.58}}\right)$$

$$P(20 < X < 30) = P(Z < 1.81) - P(Z \le -0.45) = 0.9649 - (1 - 0.6736) = 0.6385$$

Hay una probabilidad de 0.6385 de que haya entre 20 y 30 profesores menores de 30 años en un grupo de 200 docentes españoles elegidos al azar.

c) En un grupo de 500 profesores los mayores de 30 años se modelizan según Y~B(500,0.89)
El número esperado de docentes mayores de 30 años será: $\mu = 500 \cdot 0.89 = 445$

Se espera una media de 445 docentes españoles mayores de 30 años en un grupo de 500 docentes elegidos al azar.

Autores: Gobierno de Canarias y Juan Antonio Martínez García

Problema 4B:

Las estaturas de las personas que se presentan a una audición para participar en una película siguen una distribución normal de media 168 cm y desviación típica 8 cm.

a) Si se selecciona una persona participante en la audición, averiguar la probabilidad de que tenga una estatura mayor a 156 cm.

b) Se afirma que más del 15 % de los participantes en la audición medían más de 1,82 metros. Justifica la veracidad o falsedad de dicha afirmación.

c) ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una persona al azar, su estatura se encuentre entre 166 y 172 cm?

Solución:

a) Se define la variable

$$X = \text{"estatura de las personas que se presentan a una audición"}$$

$$X \sim N(168, 8)$$

$P(X > 156) \underbrace{\overset{tipificando}{=}}_{Z=\frac{X-168}{8}\sim N(0,1)} P\left(Z > \frac{156-168}{8}\right) = P(Z > -1.5) = P(Z < 1.5) =$

$0.9332 \approx 93.32\%$;

$\boxed{La\ probabilidad\ de\ que\ una\ persona\ elegida\ al\ azar\ mida\ más\ de\ 156cm\ es\ de\ 0.9332}$

b) $P(X > 182) \underbrace{\overset{tipificando}{=}}_{Z=\frac{X-168}{8}\sim N(0,1)} P\left(Z > \frac{182-168}{8}\right) = P(Z > 1.75) = 1 - P(Z \leq 1.75) = 1 -$

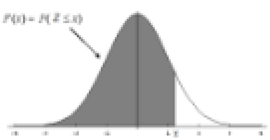
$0.9599 = 0.0401 = 4.01\%$

Por lo que no es cierto que los que miden 1.82 o más representen el 15%, pues representan el 4% de los presentados.
La afirmación es **falsa**

c) $P(166 \leq X \leq 172) \underbrace{\overset{tipificando}{=}}_{Z=\frac{X-168}{8}\sim N(0,1)} P\left(\frac{166-168}{8} \leq Z \leq \frac{172-168}{8}\right) = P(-0.25 \leq Z \leq$

$0.5) = P(z \leq 0.5) - P(Z \leq -0.25) = 0.6915 - (1 - 0.5987) = 0.2902 \rightarrow 29.02\%$

La probabilidad de que mida entre 166 y 172 cm es de 0.2902 ~ 29.02%



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Autores: Gobierno de Canarias y Juan Antonio Martínez García

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenidos, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque. En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1.- Análisis.

Problema 1A:

1A. Las ventas de un determinado producto vienen dadas por el siguiente modelo:

$$V(t) = \frac{5t^2}{8+t^2}, \qquad t \geq 0$$

Donde $V(t)$ son las ventas en miles; t mide el tiempo desde que se inicia la venta del producto, en meses.

a) Calcular las tasas de variación media del primero y segundo semestre. Comparar e interpretar los resultados. 0.75 ptos

b) Se afirma que este modelo es creciente en su dominio. Justificar si esta afirmación es correcta. 0.75 ptos

c) ¿En qué momento las ventas alcanzan 4000 unidades? 0.5 ptos

d) Si el producto se vende a 2€ la unidad y los ingresos de esta empresa se modelizan teniendo en cuenta las ventas mensuales. ¿Hacia dónde tienden los ingresos con el paso del tiempo? Justificar la respuesta. 0.5 ptos

Problema 1B:

1B. Resolver los siguientes apartados:

a) Averiguar el valor de k para que sea cierta la siguiente igualdad: 1 ptos

$$\lim_{x\to -2} \frac{kx^2 - 4k}{x^2+6x+8} = \frac{3}{2}$$

b) Resolver la siguiente integral indefinida: $\int x\sqrt{2x-1}dx$ 1.5 ptos

Bloque 2.- Álgebra.

Problema 2A:

2A. Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -x+ky+2z=k \\ 2x+ky-z=2 \\ kx-y+2z=k \end{cases}$

a) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de k. 1.5 ptos

b) Resolver el sistema para $k=2$. 1 ptos

Problema 2B:

2B. Resolver la ecuación matricial: $AX + B^t = A^2$, siendo:

A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 2.5 ptos

Bloque 3.- Geometría.

Problema 3A:

3A. En el espacio tridimensional tenemos el punto y la recta siguientes:

$$P(1,-2,0) \quad ; \quad r: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación del plano tal que, la recta perpendicular al mismo y que pasa por el origen de coordenadas corta al plano buscado en el punto P. 1.75 ptos

Averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta r.

b) Hallar el punto de intersección de la recta r y $s: x - 5 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-9}{3}$ 0.75 ptos

Problema 3B:

3B. En el espacio tridimensional tenemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 8x + 2y - 3z + 12 = 0 \\ -7x - y + 3z = 9 \end{cases} \quad ; \quad s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$$

a) Comprobar que r y s están contenidas en un mismo plano π y hallar la ecuación de dicho plano. 1.25 ptos

b) Averiguar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. 1.25 ptos

Bloque 4.- Probabilidad.

Problema 4A:

4A. Aythami tiene un sobre donde guarda el dinero que ha podido reunir, el sobre contiene: 4 billetes de 5€, 6 billetes de 10€ y 2 billetes de 50€. Quiere comprar algunas cosas y decide dejar al azar cuánto dinero va a coger del sobre. Para ello, saca aleatoriamente, sin reemplazamiento y de forma consecutiva, dos billetes del sobre.

a) Expresar el espacio muestral del experimento que va a realizar Aythami. 0.5 ptos

b) Si se quiere comprar un videojuego que cuesta 57€, ¿qué probabilidad hay de que pueda hacerlo con los billetes que saca del sobre? 1 ptos

c) Si al final obtiene, con este experimento, 60€ del sobre ¿qué probabilidad hay de que el primer billete fuera de 10€? 1 ptos

Problema 4B:

4B. La probabilidad de que un coche de carreras sufra un reventón en un neumático durante una competición es de 0.04. En una competición en la que participan 10 coches:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan 2 reventones? 0.5 ptos

b) Se afirma que existe como mucho un 1% de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera. ¿Es cierta esta afirmación? Justifícalo. 1 ptos

c) Estudiamos las competiciones realizadas en una temporada con un total de 250 coches ¿qué probabilidad hay de que se produzcan más de 12 reventones en total? (Suponiendo la independencia de los sucesos) 1 ptos

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1.- Análisis.

Problema 1A:

1A. Las ventas de un determinado producto vienen dadas por el siguiente modelo:

$$V(t) = \frac{5t^2}{8+t^2}, \qquad t \geq 0$$

Donde $V(t)$ son las ventas en miles; t mide el tiempo desde que se inicia la venta del producto, en meses.

a) Calcular las tasas de variación media del primero y segundo semestre. Comparar e interpretar los resultados. 0.75 ptos

b) Se afirma que este modelo es creciente en su dominio. Justificar si esta afirmación es correcta. 0.75 ptos

c) ¿En qué momento las ventas alcanzan 4000 unidades? 0.5 ptos

d) Si el producto se vende a 2€ la unidad y los ingresos de esta empresa se modelizan teniendo en cuenta las ventas mensuales. ¿Hacia dónde tienden los ingresos con el paso del tiempo? Justificar la respuesta. 0.5 ptos

Solución:

a) Tasa de variación media del primer semestre (del mes 0 al mes 6).

$$\left.\begin{array}{l} V(0) = \dfrac{5\cdot 0^2}{8+0^2} = 0 \\ V(6) = \dfrac{5\cdot 6^2}{8+6^2} = \dfrac{45}{11} \end{array}\right\} \Rightarrow TVM(0,6) = \frac{V(6)-V(0)}{6-0} = \frac{\frac{45}{11}-0}{6} = \frac{45}{66} = \frac{15}{22} \simeq 0.68182$$

Tasa de variación media del segundo semestre (del mes 6 al mes 12).

$$\left.\begin{array}{l} V(12) = \dfrac{5\cdot 12^2}{8+12^2} = \dfrac{90}{19} \\ V(6) = \dfrac{5\cdot 6^2}{8+6^2} = \dfrac{45}{11} \end{array}\right\} \Rightarrow TVM(6,12) = \frac{V(12)-V(6)}{12-6} = \frac{\frac{90}{19}-\frac{45}{11}}{6} = \frac{45}{418} \simeq 0.10766$$

Al ser la tasa de variación media positiva en ambos semestres las ventas han aumentado durante los dos semestres. Aunque en el segundo semestre las ventas han aumentado más lentas que en el primero: en el primero a razón de 681 unidades por mes y en el segundo a razón de 107 unidades por mes.

b) Estudiamos el signo de la derivada en $t \geq 0$.

$$V'(t) = \frac{10t\left(8+t^2\right)-5t^2(2t)}{\left(8+t^2\right)^2} = \frac{80t+10t^3-10t^3}{\left(8+t^2\right)^2} = \frac{80t}{\left(8+t^2\right)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} t \geq 0 \Rightarrow 80t \geq 0 \\ \left(8+t^2\right)^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V'(t) = \frac{80t}{\left(8+t^2\right)^2} \geq 0 \text{ siendo } t \geq 0$$

La derivada es positiva para valores $t > 0$, luego la función crece en todo su dominio.

c) Resolvemos la igualdad $V(t) = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} V(t)=\dfrac{5t^2}{8+t^2}, \quad t\geq 0 \\ V(t)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5t^2}{8+t^2}=4 \Rightarrow 5t^2=32+4t^2 \Rightarrow t^2=32 \Rightarrow t=\sqrt{32}\simeq 5.66$$

Las ventas alcanzan las 4000 unidades entre el 5º y el 6º mes.

d) Los ingresos siguen el modelo $I(t)=2\cdot V(t)=2\dfrac{5t^2}{8+t^2}=\dfrac{10t^2}{8+t^2}, \qquad t\geq 0$

Nos piden calcular $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)$.

$$\lim_{t\to+\infty} I(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{10t^2}{8+t^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{10t^2}{t^2}}{\frac{8}{t^2}+\frac{t^2}{t^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{10}{\frac{8}{t^2}+1}=\frac{10}{\frac{8}{\infty}+1}=\frac{10}{0+1}=\boxed{10}$$

Los ingresos con el paso del tiempo tienden a tener un valor de 10000 €.

Problema 1B:

1B. Resolver los siguientes apartados:

a) Averiguar el valor de k para que sea cierta la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to -2}\frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8}=\frac{3}{2}$$ 1 ptos

b) Resolver la siguiente integral indefinida: $\int x\sqrt{2x-1}dx$ 1.5 ptos

Solución:

a) Calculamos primero el valor del límite.

$$\lim_{x\to -2}\frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8}=\lim_{x\to -2}\frac{k\left(x^2-4\right)}{x^2+6x+8}=\ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2\Rightarrow x^2-4=(x-2)(x+2) \\ \\ x^2+6x+8=0\Rightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4(1)(8)}}{2}=\dfrac{-6\pm 2}{2}=\begin{cases}\dfrac{-6+2}{2}=-2\\ \dfrac{-6-2}{2}=-4\end{cases}\Rightarrow x^2+6x+8=(x+2)(x+4)\end{array}}$$

$$\ldots=\lim_{x\to -2}\frac{k(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{k(x-2)}{x+4}=\frac{k(-2-2)}{-2+4}=\boxed{-2k}$$

Buscamos el valor de k tal que $\lim_{x\to -2}\frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8}=\frac{3}{2}$.

$$-2k=\frac{3}{2}\Rightarrow \boxed{k=-\frac{3}{4}}$$

El valor buscado es $k=-\frac{3}{4}$.

b) Utilizamos el método de cambio de variable.

$$\int x\sqrt{2x-1}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \sqrt{2x-1}=t\to 2x-1=t^2\\ 2x=1+t^2\to x=\frac{1}{2}\left(1+t^2\right)\\ \to dx=tdt\end{array}\right\}=\int\frac{1}{2}\left(1+t^2\right)t\cdot tdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int t^2+t^4dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}{3}+\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^5}{5}\right)=$$

$$=\boxed{\frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{6}+\frac{\sqrt{(2x-1)^5}}{10}+K}$$

Autores: Gobierno de Canarias y Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

O bien

$$\ldots=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}{3}+\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^5}{5}\right)=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^2}{3}+\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^4}{5}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}\left(\frac{2x-1}{3}+\frac{(2x-1)^2}{5}\right)=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}\left(\frac{2x-1}{3}+\frac{4x^2-4x+1}{5}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}\left(\frac{10x-5+12x^2-12x+3}{15}\right)=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}\left(\frac{12x^2-2x-2}{15}\right)=$$

$$=\boxed{\frac{\left(6x^2-x-1\right)\sqrt{2x-1}}{15}+K}$$

Bloque 2.- Álgebra.

Problema 2A:

2A. Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -x+ky+2z=k \\ 2x+ky-z=2 \\ kx-y+2z=k \end{cases}$

a) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de k. 1.5 ptos

b) Resolver el sistema para $k=2$. 1 ptos

Solución:

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} -1 & k & 2 \\ 2 & k & -1 \\ k & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} -1 & k & 2 & k \\ 2 & k & -1 & 2 \\ k & -1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula su determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & k & 2 \\ 2 & k & -1 \\ k & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2k-k^2-4-2k^2-4k+1=-3k^2-6k-3$$

$$|A|=0\Rightarrow -3k^2-6k-3=0\Rightarrow k^2+2k+1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $k\neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $k=-1$

El determinante de A es nulo. Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2\cdot\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & -2 \\ \hline 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{-1\quad -1\quad 2\quad -1}}^{A/B}} \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{-1\quad -1\quad 2}}_{A}} & \end{array}\right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3), por lo que el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

Resumiendo: Si $k \neq -1$ el sistema es **compatible determinado** y si $k = -1$ el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Para $k = 2$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} -x+2y+2z=2 \\ 2x+2y-z=2 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+2z-2=x \\ 2x+2y-z=2 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2y+2z-2)+2y-z=2 \\ 2(2y+2z-2)-y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y+4z-4+2y-z=2 \\ 4y+4z-4-y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y+3z=6 \\ 3y+6z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+z=2 \\ y+2z=2 \to y=2-2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(2-2z)+z=2 \Rightarrow 4-4z+z=2 \Rightarrow -3z=-2 \Rightarrow \boxed{z=\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=2-2\frac{2}{3}=\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{x=2\frac{2}{3}+2\frac{2}{3}-2=\frac{2}{3}}$$

La solución del sistema es $x=y=z=\dfrac{2}{3}$.

Problema 2B:

2B. Resolver la ecuación matricial: $AX + B^t = A^2$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.5 ptos

Solución:

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX + B^t = A^2 \Rightarrow AX = A^2 - B^t \Rightarrow X = A^{-1}\left(A^2 - B^t\right) = A^{-1}A^2 - A^{-1}B^t = IA - A^{-1}B^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = A - A^{-1}B^t$$

Comprobamos que la matriz A es invertible y calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0+0+0-0-1-0 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A - A^{-1}B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = X}$$

Bloque 3.- Geometría.

Problema 3A:

3A. En el espacio tridimensional tenemos el punto y la recta siguientes:

$$P(1,-2,0) \quad ; \quad r: \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

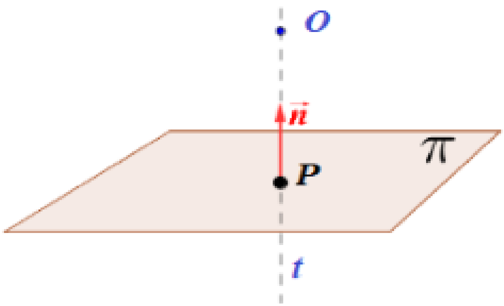
a) Hallar la ecuación del plano tal que, la recta perpendicular al mismo y que pasa por el origen de coordenadas corta al plano buscado en el punto P. 1.75 ptos

Averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta r.

b) Hallar el punto de intersección de la recta r y $s: x-5=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-9}{3}$ 0.75 ptos

Solución:

a) Debemos hallar la ecuación del plano π del dibujo.



El vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{OP}$. Además, el plano π contiene al punto P.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\overrightarrow{OP}=(1,-2,0)-(0,0,0)=(1,-2,0) \\ P(1,-2,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi: x-2y+D=0 \\ P(1,-2,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2(-2)+D=0 \Rightarrow D=-5 \Rightarrow \boxed{\pi: x-2y-5=0}$$

Para averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta r primero obtenemos el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$r: \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ \boxed{x=z} \end{cases} \Rightarrow z-2y+z=0 \Rightarrow 2z=2y \Rightarrow \boxed{y=z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{u_r}=(1,1,1) \\ P_r(0,0,0) \end{cases}$$

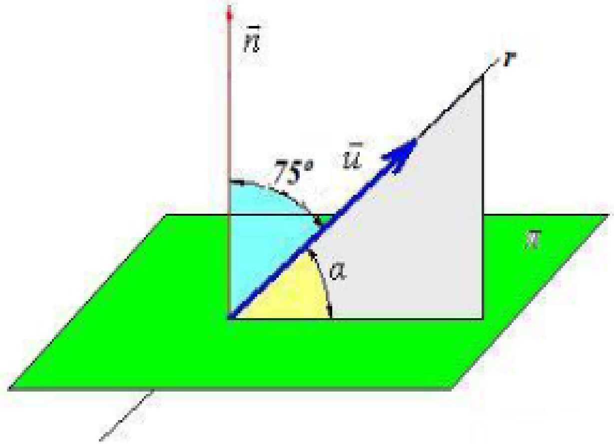
$$\pi: x-2y-5=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,-2,0)$$

Averiguamos el ángulo formado por el vector normal del plano y el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u_r}=(1,1,1)\\ \vec{n}=(1,-2,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\vec{u_r},\vec{n}\right)=\frac{\left|\vec{u_r}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{u_r}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|(1,1,1)(1,-2,0)\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2}}=\frac{|1-2|}{\sqrt{3}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$\left(\vec{u_r},\vec{n}\right)=arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)=75^\circ$$

El ángulo que forma el plano con la recta es de 90º – 75º = 15º



b) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta *s*.

$$s:\frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-9}{3}\Rightarrow s:\begin{cases}\vec{v_s}=(1,-2,3)\\ Q_s(5,-1,9)\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=5+\lambda\\ y=-1-2\lambda\\ z=9+3\lambda\end{cases}$$

Hallamos el punto A de corte de las rectas *r* y *s*.

$$\left.\begin{array}{l}r:\begin{cases}x-2y+z=0\\ x-z=0\end{cases}\\ s:\begin{cases}x=5+\lambda\\ y=-1-2\lambda\\ z=9+3\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}5+\lambda-2(-1-2\lambda)+9+3\lambda=0\\ 5+\lambda-(9+3\lambda)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5+\lambda+2+4\lambda+9+3\lambda=0\\ 5+\lambda-9-3\lambda=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8\lambda=-16\to\lambda=-2\\ -2\lambda=4\to\lambda=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5-2=3\\ y=-1-2(-2)=3\Rightarrow\boxed{A(3,3,3)}\\ z=9+3(-2)=3\end{cases}$$

El punto de corte de las rectas *r* y *s* es A(3, 3, 3).

Problema 3B:

3B. En el espacio tridimensional tenemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 8x+2y-3z+12=0 \\ -7x-y+3z=9 \end{cases} \quad ; \quad s: x=y+1=\frac{z-2}{2}$$

a) Comprobar que r y s están contenidas en un mismo plano π y hallar la ecuación de dicho plano. 1.25 ptos

b) Averiguar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. 1.25 ptos

Solución:

a) Obtenemos los vectores directores de cada recta, así como un punto de cada una de ellas.

$$r: \begin{cases} 8x+2y-3z+12=0 \\ -7x-y+3z=9 \end{cases} \Rightarrow \vec{v_r} = (8,2,-3)\times(-7,-1,3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 2 & -3 \\ -7 & -1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{v_r} = 6i+21j-8k+14k-24j-3i = 3i-3j+6k = (3,-3,6)$$

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} 2y-3z+12=0 \\ -y+3z=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-3z+12=0 \\ 3z-9=y \end{cases} \Rightarrow 2(3z-9)-3z+12=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6z-18-3z+12=0 \Rightarrow 3z=6 \Rightarrow z=2 \Rightarrow y=6-9=-3 \Rightarrow P_r(0,-3,2)$$

$$r: \begin{cases} \vec{w_r} = (1,-1,2) \\ P_r(0,-3,2) \end{cases}$$

$$s: x=y+1=\frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u_s} = (1,1,2) \\ Q_s(0,-1,2) \end{cases}$$

Estudiamos la posición relativa de las rectas.
Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{w_r} = (1,-1,2) \\ \vec{u_s} = (1,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{2}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o se cruzan.
Calculamos el producto mixto $\left[\vec{w_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ y vemos si es nulo o no.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(0,-3,2) \\ Q_s(0,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (0,-3,2)-(0,-1,2) = (0,-2,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{w_r} = (1,-1,2) \\ \vec{u_s} = (1,1,2) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (0,-2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{w_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0+0-4-0-0+4=0$$

Al ser nulo el producto mixto las rectas r y s se cortan. Esto significa que son coplanarias.

Hallamos la ecuación del plano que las contiene.

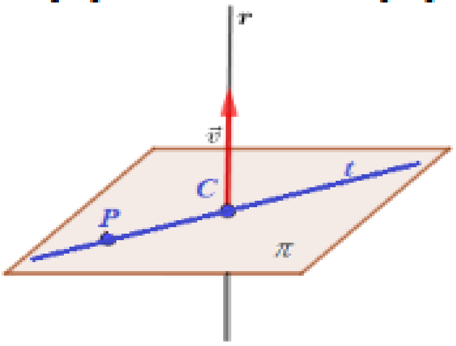
$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{w_r}=(1,-1,2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{u_s}=(1,1,2)\\ Q_s(0,-1,2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x & y+1 & z-2\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+2(y+1)+z-2+z-2-2(y+1)-2x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+\cancel{2y}+\cancel{2}+z-\cancel{2}+z-2-\cancel{2y}-2-2x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x+2z-4=0\Rightarrow \boxed{\pi:2x-z+2=0}$$

b) Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta *r* que pasa por P(0, –1, 12).



$$\pi:\begin{cases}\vec{n}=\overrightarrow{w_r}=(1,-1,2)\\ P(0,-1,2)\in\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi:x-y+2z+D=0\\ P(0,-1,2)\in\pi\end{cases}\Rightarrow 0+1+4+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-5\Rightarrow \boxed{\pi:x-y+2z-5=0}$$

Hallamos el punto C de corte de la recta *r* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:x-y+2z-5=0\\ r:\begin{cases}\overrightarrow{w_r}=(1,-1,2)\\ P_r(0,-3,2)\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=-3-\lambda\\ z=2+2\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda+3+\lambda+4+4\lambda-5=0\Rightarrow 6\lambda=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{-1}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-1}{3}\\ y=-3+\frac{1}{3}=\frac{-8}{3}\\ z=2+2\frac{-1}{3}=\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow C\left(\frac{-1}{3},\frac{-8}{3},\frac{4}{3}\right)$$

La recta *t* perpendicular a *r* y que pasa por el punto P es la recta que pasa por los puntos C y P.

$$t:\left.\begin{array}{l} C\left(\frac{-1}{3},\frac{-8}{3},\frac{4}{3}\right) \\ P(0,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_t}=\overrightarrow{CP}=(0,-1,2)-\left(\frac{-1}{3},\frac{-8}{3},\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right) \\ P(0,-1,2)\in t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{w_t}=3\overrightarrow{v_t}=(1,5,2) \\ P(0,-1,2)\in t \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{t:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+5\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=2+2\lambda \end{cases}}$$

Bloque 4.- Probabilidad.

Problema 4A:

4A. Aythami tiene un sobre donde guarda el dinero que ha podido reunir, el sobre contiene: 4 billetes de 5€, 6 billetes de 10€ y 2 billetes de 50€. Quiere comprar algunas cosas y decide dejar al azar cuánto dinero va a coger del sobre. Para ello, saca aleatoriamente, sin reemplazamiento y de forma consecutiva, dos billetes del sobre.

a) Expresar el espacio muestral del experimento que va a realizar Aythami. 0.5 ptos

b) Si se quiere comprar un videojuego que cuesta 57€, ¿qué probabilidad hay de que pueda hacerlo con los billetes que saca del sobre? 1 ptos

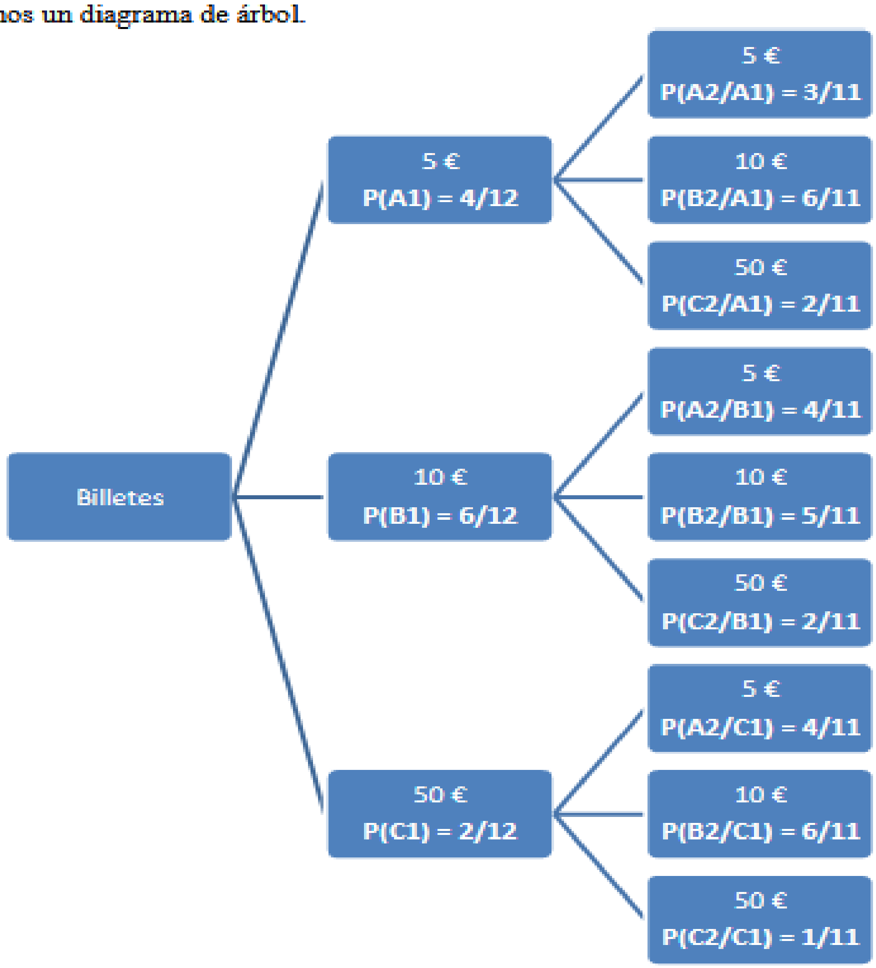
c) Si al final obtiene, con este experimento, 60€ del sobre ¿qué probabilidad hay de que el primer billete fuera de 10€? 1 ptos

Solución:

a) Puede coger:
2 billetes de 5 €, 2 billetes de 10 €, dos billetes de 50 €, 1 billete de 5 € y otro de 10 €, un billete de 5 € y otro de 50 € y por último un billete de 10 € y otro de 50 €. Un total de 6 sucesos elementales distintos.

$$E = \{(5,5),(10,10),(50,50),(5,10),(5,50),(10,50)\}$$

b) Realizamos un diagrama de árbol.



Para poder comprar el videojuego debe haber cogido, al menos, 60 €. Esto ocurre cogiendo 10 y 50 o 50 y 10 o 50 y 50. Llamamos a este suceso S.

$$P(S)=P(B1\cap C2)+P(C1\cap B2)+P(C1\cap C2)=$$

$$=P(B1)P(C2/B1)+P(C1)P(B2/C1)+P(C1)P(C2/C1)=$$

$$=\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11}+\frac{2}{12}\cdot\frac{6}{11}+\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}=\frac{26}{132}=\boxed{\frac{13}{66}=0.197}$$

c) 60 euros solo los puede obtener con un billete de 10 y otro de 50.
Nos piden calcular $P\left(B1/\left((B1\cap C2)\cup(C1\cap B2)\right)\right)$.
Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(B1/\left((B1\cap C2)\cup(C1\cap B2)\right)\right)=\frac{P\left(B1\cap\left((B1\cap C2)\cup(C1\cap B2)\right)\right)}{P\left((B1\cap C2)\cup(C1\cap B2)\right)}=$$

$$=\frac{P(B1\cap C2)}{P(B1\cap C2)+P(C1\cap B2)}=\frac{P(B1)P(C2/B1)}{P(B1)P(C2/B1)+P(C1)P(B2/C1)}=$$

$$=\frac{\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11}}{\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11}+\frac{2}{12}\cdot\frac{6}{11}}=\boxed{\frac{1}{2}=0.5}$$

Autores: Gobierno de Canarias y Juan Antonio Martínez García

Problema 4B:

4B. La probabilidad de que un coche de carreras sufra un reventón en un neumático durante una competición es de 0.04. En una competición en la que participan 10 coches:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan 2 reventones? 0.5 ptos

b) Se afirma que existe como mucho un 1% de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera. ¿Es cierta esta afirmación? Justifícalo. 1 ptos

c) Estudiamos las competiciones realizadas en una temporada con un total de 250 coches ¿qué probabilidad hay de que se produzcan más de 12 reventones en total? (Suponiendo la independencia de los sucesos) 1 ptos

Solución:

a) Si llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de reventones en un grupo de 10 coches. Esta variable es dicotómica (reventón o no) y cada repetición es independiente de la anterior.

X = B(10, 0.04). Nos piden calcular $P(X=2)$.

$$P(X=2)=\binom{10}{2}0.04^2\cdot 0.96^8=\boxed{0.0519}$$

b) Calculamos la probabilidad de que se produzcan más de 2 reventones durante la carrera. Para este cálculo usamos el suceso contrario.

$$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-\left[P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)\right]=$$

$$=1-\left[\binom{10}{2}0.04^2\cdot 0.96^8+\binom{10}{1}0.04^1\cdot 0.96^9+\binom{10}{0}0.04^0\cdot 0.96^{10}\right]=\boxed{0.00621}$$

El valor $P(X>2)=0.00621$ significa un tanto por ciento de 0.621 % de que ocurran más de 2 reventones en una carrera.

La afirmación de que existe como mucho un 1% de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera es correcta.

c) Si llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de reventones en un grupo de 250 coches. Esta variable es dicotómica (reventón o no) y cada repetición es independiente de la anterior.

X = B(250, 0.04).

Esta probabilidad debemos de hallarla aproximándola por una normal.

Como la media es $np=250\cdot 0.04=10$ y la desviación típica es

$\sqrt{npq}=\sqrt{250\cdot 0.04\cdot 0.96}=\dfrac{4\sqrt{15}}{5}=3.098$ la variable binomial X se aproxima por una variable normal $Y=N\left(10,\dfrac{4\sqrt{15}}{5}\right)$.

Nos piden calcular $P(X>12)$.

$$P(X>12)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(Y\geq 12.5)=\{\textit{Tipificamos}\}=$$

$$=P\left(Z\geq \frac{12.5-10}{4\sqrt{15/5}}\right)=P(Z\geq 0.81)=1-P(Z\leq 0.81)=\begin{Bmatrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{Bmatrix}=$$

$$=1-0.791=\boxed{0.209}$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ebaumatematicas.com

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

INDICACIONES

1. Debe escoger solo cuatro ejercicios entre los ocho de los que consta el examen.
2. Si realiza más de cuatro ejercicios solo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+3y+z=-1 \\ x-y+z=a \\ -x+y-2z=-3 \end{cases}$ dado en función del parámetro a ∈ R.

1) [1,25 PUNTOS] Determine para qué valores de a el sistema es compatible.

2) [1,25 PUNTOS] Dado a = 4, resuelva el sistema anterior si es posible.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x}$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine el conjunto de puntos de discontinuidad de f(x).

2) [1 PUNTO] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

3) [1 PUNTO] Determine si f(x) tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Calcule las ecuaciones de las rectas de los lados de un triángulo que tiene como vértices a los puntos A = (0, 0, 1), B = (4, 1, 2) y C = (3, 4, 3).

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

En cierta región, el 72 % de las mujeres vive al menos 71 años y el 52 % vive al menos 80 años. Si una mujer determinada de esa región tiene 71 años, ¿cuál es la probabilidad de que vaya a vivir al menos hasta los 80 años?

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ en función del parámetro a ∈ R.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule el determinante de A en función del parámetro a.

2) [0,75 PUNTOS] Calcule el rango de A en función del parámetro a.

3) [0,5 PUNTOS] Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.

4) [0,75 PUNTOS] Sea B el conjunto de los a ∈ R tales que A tiene inversa. Calcule la inversa de A para los diferentes valores del parámetro a ∈ B.

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = x^3 + 1$.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule una primitiva de f (x).

2) [1 PUNTO] Calcule los puntos de inflexión de f(x) si los hubiera.

3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por f(x), el eje OX de abscisas y las rectas x = 1 y x = 2.

Ejercicio 7 [2,5 PUNTOS]

Considere los planos

$$\pi 1 : 2x - 3y + 5z = a$$

$$\pi 2 : bx + 3y - 5z = 4$$

en función de los parámetros a, b ∈ R. Determine si es posible asignar algún valor a los parámetros a y b para que los planos π1 y π2 :

1) [0,5 PUNTOS] Sean coincidentes. En caso afirmativo de un valor para a y b.

2) [1 PUNTO] Sean paralelos. En caso afirmativo de un valor para a y b.

3) [1 PUNTO] Se corten en una recta. En caso afirmativo de un valor para a y b.

Ejercicio 8 [2,5 PUNTOS]

Sean A y B dos sucesos independientes asociados a un experimento aleatorio con

$$P(A) = 0{,}5 \text{ y } P(B) = 0{,}25.$$

1) [0,5 PUNTOS] Calcule P(A ∪ B).

2) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A^c)$ y $P(B^c)$, donde A^c y B^c denotan el suceso contrario de A y de B respectivamente.

3) [1 PUNTO] Razone si A^c y B^c son independientes.

4) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+3y+z=-1 \\ x-y+z=a \\ -x+y-2z=-3 \end{cases}$ dado en función del parámetro a ∈ R.

1) [1,25 PUNTOS] Determine para qué valores de a el sistema es compatible.

2) [1,25 PUNTOS] Dado a = 4, resuelva el sistema anterior si es posible.

Solución:

1)

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Estudiamos el rango de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=4-3+1-1+6-2=5\neq 0$$

El rango de la matriz A es 3.
Por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3, al igual que el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado para cualquier valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$.
No existe ningún valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para el que el sistema es incompatible.

2) Para $a = 4$ el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

$$\begin{cases} 2x+3y+z=-1 \\ x-y+z=4 \\ -x+y-2z=-3 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a + \text{Ecuación } 2^a \\ \begin{array}{rrrl} -x & +y & -2z & =-3 \\ x & -y & +z & =4 \\ \hline & & -z & =1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+3y+z=-1 \\ x-y+z=4 \\ \quad -z=1 \rightarrow \boxed{z=-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y-1=-1 \\ x-y-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=0 \\ x-y=5 \rightarrow x=5+y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(5+y)+3y=0 \Rightarrow 10+2y+3y=0 \Rightarrow 5y=-10 \Rightarrow \boxed{y=-2} \Rightarrow \boxed{x=5-2=3}$$

La solución es $x = 3; y = -2; z = -1$.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x}$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine el conjunto de puntos de discontinuidad de f(x).

2) [1 PUNTO] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

3) [1 PUNTO] Determine si f(x) tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Solución:

1) El denominador se anula en $x = 0$. El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{0\}$.

La función es discontinua en $x = 0$.

2) Utilizamos la derivada.

$$f(x)=\frac{x^2-x+2}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{x}{x}+\frac{2}{x}=x-1+\frac{2}{x}\Rightarrow f'(x)=1-\frac{2}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=1-\frac{2}{x^2} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1-\frac{2}{x^2}=0\Rightarrow\frac{2}{x^2}=1\Rightarrow 2=x^2\Rightarrow\boxed{x=\pm\sqrt{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores (incluimos $x=0$).

En el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2)=1-\frac{2}{(-2)^2}=\frac{1}{2}>0$. La función crece en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$.

En el intervalo $\left(-\sqrt{2},0\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=1-\frac{2}{(-1)^2}=-1<0$. La función decrece en $\left(-\sqrt{2},0\right)$.

En el intervalo $\left(0,\sqrt{2}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=1-\frac{2}{1^2}=-1<0$. La función decrece en $\left(0,\sqrt{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=1-\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}>0$. La función crece en $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$.

La función crece en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ y decrece en $\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right)$.

3)

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x+2}{x} = \frac{2}{0} = \infty$$

$x=0$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-x+2}{x} = \lim_{x\to +\infty} x-1+\frac{2}{x} = +\infty-1+\frac{2}{\infty} = +\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1+\frac{2}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x}-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2} = 1-0+0=1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(x-1+\frac{2}{x}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-1+\frac{2}{x}\right) = -1+\frac{2}{\infty} = -1$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y=x-1$.

La función tiene una asíntota vertical $x=0$ y una asíntota oblicua $y=x-1$.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Calcule las ecuaciones de las rectas de los lados de un triángulo que tiene como vértices a los puntos A = (0, 0, 1), B = (4, 1, 2) y C = (3, 4, 3).

Solución:

Recta que pasa por A y B.

$$\left.\begin{array}{l} A=(0,0,1) \\ B=(4,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{v_r}=\overline{AB}=(4,1,2)-(0,0,1)=(4,1,1) \\ B=(4,1,2)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases} x=4+4\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases} ,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Recta que pasa por A y C.

$$\left.\begin{array}{l} A=(0,0,1) \\ C=(3,4,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{u_s}=\overline{AC}=(3,4,3)-(0,0,1)=(3,4,2) \\ A=(0,0,1)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow s:\begin{cases} x=3\alpha \\ y=4\alpha \\ z=1+2\alpha \end{cases} ,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

Recta que pasa por B y C.

$$\left.\begin{array}{l} C=(3,4,3) \\ B=(4,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{w_t}=\overline{BC}=(3,4,3)-(4,1,2)=(-1,3,1) \\ B=(4,1,2)\in t \end{array}\right\} \Rightarrow t:\begin{cases} x=4-\beta \\ y=1+3\beta,\ \beta\in\mathbb{R} \\ z=2+\beta \end{cases}$$

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

En cierta región, el 72 % de las mujeres vive al menos 71 años y el 52 % vive al menos 80 años. Si una mujer determinada de esa región tiene 71 años, ¿cuál es la probabilidad de que vaya a vivir al menos hasta los 80 años?

Solución:

Llamamos A al suceso "Una mujer vive al menos 71 años" y B al suceso "Una mujer vive al menos 80 años.

Nos piden calcular $P(B/A)$.

Como sabemos que el suceso intersección de A y B es:

$$A \cap B = \{\text{Vive al menos 71 y vive al menos 80 años}\} = \{\text{Vive al menos 80 años}\} = B$$

Aplicamos el teorema de Bayes y tenemos:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.52}{0.72} = \boxed{\frac{13}{18} = 0.7223}$$

OTRA FORMA DE RAZONARLO.

Supongamos que hay 100 mujeres. De ellas hay 72 que viven al menos 71 años y 28 que viven menos de 71 años. De las 72 que viven al menos 71 años hay 52 que viven al menos 80 años.

Si hemos elegido una de las 72 que viven al menos 71 años la probabilidad de que vaya a vivir al menos hasta los 80 años es el cociente entre 52 (casos favorables) y 72 (casos posibles).

$$P(\text{Una mujer de 71 años viva al menos 80 años}) = \frac{52}{72} = \boxed{\frac{13}{18} = 0.7223}$$

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ en función del parámetro a ∈ R.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule el determinante de A en función del parámetro a.

2) [0,75 PUNTOS] Calcule el rango de A en función del parámetro a.

3) [0,5 PUNTOS] Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.

4) [0,75 PUNTOS] Sea B el conjunto de los a ∈ R tales que A tiene inversa. Calcule la inversa de A para los diferentes valores del parámetro a ∈ B.

Solución:

1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0-6+2a-0-2-3 = \boxed{2a-11}$$

2) El rango de A puede ser 3, 2 o 1.

Para que el rango sea 3 su determinante debe ser no nulo.

$$\left.\begin{array}{l} |A| = 2a-11 \\ |A| = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a-11=0 \Rightarrow 2a=11 \Rightarrow a=\frac{11}{2}$$

Si $a \neq \frac{11}{2}$ el determinante es no nulo y su rango es 3.

Si $a = \frac{11}{2}$ el determinante es nulo y su rango no es 3.

Su rango puede ser 2. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de eliminar la fila y columna 3ª y comprobamos el valor nulo o no de su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $a \neq \frac{11}{2}$ el rango de A es 3. Si $a = \frac{11}{2}$ el rango es 2.

3) La matriz A tiene inversa para $a \neq \frac{11}{2}$. Visto en el apartado 2) que el determinante se anula para $a = \frac{11}{2}$.

4) Calculamos la inversa para los valores $a \neq \frac{11}{2}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2a-11$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ a & 3 & -1 \end{pmatrix}}{2a-11} = \frac{1}{2a-11}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ a & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ a & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2a-11}\begin{pmatrix} -3 & a-1 & -3 \\ 8 & -1-2a & -3+2a \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Considere la función f(x) = x^3 + 1.

1) [0,5 PUNTOS] Calcule una primitiva de f (x).

2) [1 PUNTO] Calcule los puntos de inflexión de f(x) si los hubiera.

3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por f(x), el eje OX de abscisas y las rectas x = 1 y x = 2.

Solución:

1)

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int x^3+1dx=\frac{x^4}{4}+x+K$$

Una primitiva puede ser con *k = 0* → $F(x)=\frac{x^4}{4}+x$

2) Utilizamos la segunda derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2 \Rightarrow f''(x)=6x \\ f''(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0$$

Como $f'''(x)=6 \Rightarrow f'''(0)=6\neq 0$ la función tiene un punto de inflexión en *x = 0*.

3) Averiguamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

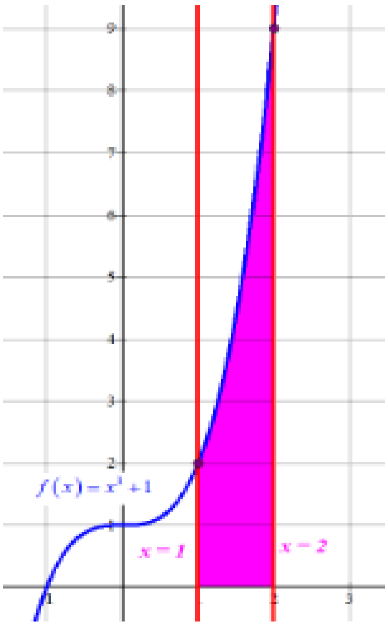
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+1 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-1}=-1\notin(1,2)$$

El área del recinto será el valor absoluto de la integral definida de la función entre 1 y 2.

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 x^3+1dx=\left[\frac{x^4}{4}+x\right]_1^2=$$

$$=\left[\frac{2^4}{4}+2\right]-\left[\frac{1^4}{4}+1\right]=4+2-\frac{1}{4}-1=\frac{19}{4}$$

$$\boxed{\acute{A}rea=\frac{19}{4}=4.75\ u^2}$$



Ejercicio 7 [2,5 PUNTOS]

Considere los planos

$$\pi 1 : 2x - 3y + 5z = a$$

$$\pi 2 : bx + 3y - 5z = 4$$

en función de los parámetros a, b ∈ R. Determine si es posible asignar algún valor a los parámetros a y b para que los planos π1 y π2 :

1) [0,5 PUNTOS] Sean coincidentes. En caso afirmativo de un valor para a y b.

2) [1 PUNTO] Sean paralelos. En caso afirmativo de un valor para a y b.

3) [1 PUNTO] Se corten en una recta. En caso afirmativo de un valor para a y b.

Solución:

1) Para que sean coincidentes los vectores normales deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : 2x-3y+5z=a \Rightarrow \vec{n_1}=(2,-3,5) \\ \pi_2 : bx+3y-5z=4 \Rightarrow \vec{n_2}=(b,3,-5) \\ \pi_1 \parallel \pi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{b}=\frac{-3}{3}=\frac{5}{-5} \Rightarrow \frac{2}{b}=-1 \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

Además, un punto cualquiera de uno de los planos debe de pertenecer al otro.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_2 : -2x+3y-5z=4 \\ y=0 \\ z=0\end{array}\right\} \Rightarrow -2x=4 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow P(-2,0,0) \in \pi_2$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : 2x-3y+5z=a \\ P(-2,0,0) \in \pi_1\end{array}\right\} \Rightarrow -4-0+0=a \Rightarrow \boxed{a=-4}$$

Si $a=-4;\ b=-2$ los planos $\pi_1 : 2x-3y+5z=-4;\ \pi_2 : -2x+3y-5z=4$ son coincidentes.

2) Para que sean paralelos los vectores normales deben tener coordenadas proporcionales. Visto en el apartado 1) → $b=-2$.
Pero los puntos de un plano no pueden pertenecer al otro → $a \neq -4$.

Si $a \neq -4;\ b=-2$ los planos $\pi_1 : 2x-3y+5z=a;\ \pi_2 : -2x+3y-5z=4$ son paralelos.

3) Para que sean secantes los vectores normales no deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : 2x-3y+5z=a \Rightarrow \vec{n_1}=(2,-3,5) \\ \pi_2 : bx+3y-5z=4 \Rightarrow \vec{n_2}=(b,3,-5) \\ \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ secantes}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{b}\neq\frac{-3}{3}=\frac{5}{-5} \Rightarrow \frac{2}{b}\neq-1 \Rightarrow \boxed{b\neq-2}$$

Si $b \neq -2$ y siendo "a" cualquier valor los planos son secantes.

Ejercicio 8 [2,5 PUNTOS]

Sean A y B dos sucesos independientes asociados a un experimento aleatorio con

$$P(A) = 0{,}5 \text{ y } P(B) = 0{,}25.$$

1) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cup B)$.

2) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A^c)$ y $P(B^c)$, donde A^c y B^c denotan el suceso contrario de A y de B respectivamente.

3) [1 PUNTO] Razone si A^c y B^c son independientes.

4) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

Solución:

Si A y B son dos sucesos independientes entonces $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.5\cdot 0.25=0.125$.

1)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.5+0.25-0.125=\boxed{0.625}$$

2)

$$P(A^c)=1-P(A)=1-0.5=\boxed{0.5}$$

$$P(B^c)=1-P(B)=1-0.25=\boxed{0.75}$$

3) Para que A^c y B^c sean dos sucesos independientes debe ser $P(A^c\cap B^c)=P(A^c)P(B^c)$.

$$P(A^c\cap B^c)=P\left((A\cup B)^c\right)=1-P(A\cup B)=1-0.625=0.375$$

$$P(A^c)P(B^c)=0.5\cdot 0.75=0.375$$

$$\boxed{P(A^c\cap B^c)=0.375=P(A^c)P(B^c)}$$

Los sucesos A^c y B^c son independientes.

4)

$$P(A^c\cup B^c)=P\left((A\cap B)^c\right)=1-P(A\cap B)=1-0.125=\boxed{0.875}$$

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

Indicaciones:
Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen. Si realiza más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden en que aparecen resueltos en el cuadernillo del examen. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Considere las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A) [0,5 PUNTOS] Calcule A^t, donde A^t denota la traspuesta de la matriz A.

B) [2 PUNTOS] Calcule $(3B - 2C)(A^t - I)$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3.

Problema 2:

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

A) [0,5 PUNTOS] Calcule el dominio de definición de $f(x)$.

B) [0,75 PUNTOS] Determine si hay intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$. En caso afirmativo, calcúlelos.

C) [0,5 PUNTOS] Calcule los cortes de $f(x)$ con los ejes.

D) [0,75 PUNTOS] Determine los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$.

Problema 3:

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A) [1,5 PUNTOS] Escriba las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por el punto (2, -1, 0). Es decir, de aquellas que tienen vector director (v_1, v_2, v_3), donde $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ son parámetros.

B) [1 PUNTO] De las rectas anteriores, escriba las ecuaciones paramétricas de la recta que tiene vector director (-1, 4, 1).

Problema 4:

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Cierto test determina si una persona consume cierto tipo de droga. En el 99% de los casos, el test clasifica como usuario de la droga a aquellos que la han consumido y también en el 99% de los casos, el test clasifica como no usuarios de la droga a aquellos que no la han consumido. Además, el $0,5\%$ de las personas a las que se les va a pasar el test consumen la droga.

A) [1 PUNTO] ¿Cúal es la probabilidad de que las personas a las que se les va a pasar el test no consuman la droga?

B) [1,5 PUNTOS] ¿Cúal es la probabilidad de que una persona consuma la droga si ha dado positivo en el test?

Problema 5:

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $b \in \mathbb{R}$.

A) [0,75 PUNTOS] Calcule el rango de A para los distintos valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$.

B) [0,75 PUNTOS] Determine para que valores de $b \in \mathbb{R}$ la matriz A tiene inversa.

C) [1 PUNTO] Sea B el conjunto formado por los $b \in \mathbb{R}$ tales que A tiene inversa. Calcule la inversa de A para los diferentes valores del parámetro $b \in B$.

Problema 6:

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \sin(x)$.

A) [0,75 PUNTOS] Calcule una primitiva de $f(x)$.

B) [1,75 PUNTOS] Calcule el área del recinto del plano limitado por $f(x)$ y el eje OX de abscisas para $x \in [0, 2\pi]$.

Problema 7:

Ejercicio 7 [2,5 PUNTOS]

Considere el par de rectas

$$r : \begin{cases} 3x - 5 = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

A) [1 PUNTO] Calcule la posición relativa de las dos rectas.

B) [0,5 PUNTOS] De la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

C) [1 PUNTO] De la ecuación de un plano ortogonal a la recta r.

Problema 8:

Ejercicio 8 [2,5 PUNTOS]

En una población determinada la altura de los niños de 17 años sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 7,41.

A) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que en dicha población la altura de un niño de 17 años esté entre 170 cm y 180 cm.

B) [1,5 PUNTOS] ¿A partir de que altura un niño de 17 años de dicha población se encontraría dentro del 5% de niños de 17 años más altos de dicha población?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Considere las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&3\\2&1&-1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}-1&2&1\\3&-1&2\end{pmatrix}.$$

A) [0,5 PUNTOS] Calcule A^t, donde A^t denota la traspuesta de la matriz A.

B) [2 PUNTOS] Calcule $(3B-2C)(A^t-I)$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3.

Solución:

A)

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&3\\2&1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&0&1\\0&3&-1\end{pmatrix}$$

B)

$$3B-2C=3\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&2&1\\3&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3&0\\-3&6&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-4&-2\\-6&2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-1&-2\\-9&8&-1\end{pmatrix}$$

$$A^t-I=\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&0&1\\0&3&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&2\\-1&-1&1\\0&3&-2\end{pmatrix}$$

$$(3B-2C)(A^t-I)=\begin{pmatrix}8&-1&-2\\-9&8&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&2\\-1&-1&1\\0&3&-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&16+1-6&16-1+4\\-8&-18-8-3&-18+8+2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&11&19\\-8&-29&-8\end{pmatrix}}$$

Problema 2:

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

A) [0,5 PUNTOS] Calcule el dominio de definición de $f(x)$.

B) [0,75 PUNTOS] Determine si hay intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$. En caso afirmativo, calcúlelos.

C) [0,5 PUNTOS] Calcule los cortes de $f(x)$ con los ejes.

D) [0,75 PUNTOS] Determine los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$.

Solución:

A) El denominador se anula en $x = 2$. El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$.

B) Utilizamos la derivada.

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x-2)-1(x+1)}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} -3<0 \\ (x-2)^2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} = \frac{-}{+} < 0$$

La derivada no cambia de signo, siempre es negativa.

La función decrece en todo su dominio $\mathbb{R} - \{2\}$.

C)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x+1}{x-2} \\ Eje\ OX \rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \boxed{A(-1,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x+1}{x-2} \\ Eje\ OY \rightarrow x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = \frac{0+1}{0-2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \boxed{B\left(0, \frac{-1}{2}\right)}$$

D) Utilizamos la derivada segunda.

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{0-(-3)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{6}{(x-2)^3}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = \dfrac{6}{(0-2)^3} = \dfrac{6}{-8} < 0$. La función es cóncava $(\cap)$ en $(-\infty, 2)$.

- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada segunda vale $f''(3) = \dfrac{6}{(3-2)^3} = 6 > 0$. La función es convexa $(\cup)$ en $(2, +\infty)$.

La función es cóncava $(\cap)$ en $(-\infty, 2)$ y convexa $(\cup)$ en $(2, +\infty)$.

Problema 3:

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A) [1,5 PUNTOS] Escriba las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por el punto (2, -1, 0). Es decir, de aquellas que tienen vector director (v_1, v_2, v_3), donde $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$ son parámetros.

B) [1 PUNTO] De las rectas anteriores, escriba las ecuaciones paramétricas de la recta que tiene vector director (-1, 4, 1).

Solución:

A)

$$\left.\begin{array}{l}(2,-1,0)\in r\\ \overline{u_r}=(v_1,\ v_2,\ v_3)\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=2+v_1\beta\\ y=-1+v_2\beta,\ \beta\in\mathbb{R}\\ z=v_3\beta\end{cases}$$

B)

$$\left.\begin{array}{l}(2,-1,0)\in r\\ \overline{u_r}=(-1,4,1)\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=2-\beta\\ y=-1+4\beta,\ \beta\in\mathbb{R}\\ z=\beta\end{cases}$$

Problema 4:

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Cierto test determina si una persona consume cierto tipo de droga. En el 99% de los casos, el test clasifica como usuario de la droga a aquellos que la han consumido y también en el 99% de los casos, el test clasifica como no usuarios de la droga a aquellos que no la han consumido. Además, el 0, 5% de las personas a las que se les va a pasar el test consumen la droga.

A) [1 PUNTO] ¿Cúal es la probabilidad de que las personas a las que se les va a pasar el test no consuman la droga?

B) [1,5 PUNTOS] ¿Cúal es la probabilidad de que una persona consuma la droga si ha dado positivo en el test?

Solución:

A) Si hay un 0.5 % de personas a las que se les va a pasar el test que consumen la droga entonces hay un 99.5 % que no la consumen.
La probabilidad de que las personas a las que se les va a pasar el test no consuman la droga es de 0.995.

B) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.
Llamamos D al suceso "Consume la droga" y A al suceso "Dar positivo en consumo de droga en el test"

A los no consumidores de droga el 99 % da en el test negativo, por lo que el 1% da positivo.
Entonces tenemos que $P\left(A/D^C\right)=0.01$.

Calculamos la probabilidad de dar positivo en el test P(A) aplicando el teorema de la probabilidad total.

$$P(A)=P(D)P(A/D)+P\left(D^C\right)P\left(A/D^C\right)=0.005\cdot 0.99+0.995\cdot 0.01=0.0149$$

Nos piden el valor de $P(D/A)$.

$$P(D/A)=\frac{P(D\cap A)}{P(A)}=\frac{P(D)P(A/D)}{P(A)}=\frac{0.005\cdot 0.99}{0.0149}=\boxed{\frac{99}{298}=0.3322}$$

Problema 5:

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $b \in \mathbb{R}$.

A) [0,75 PUNTOS] Calcule el rango de A para los distintos valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$.

B) [0,75 PUNTOS] Determine para que valores de $b \in \mathbb{R}$ la matriz A tiene inversa.

C) [1 PUNTO] Sea B el conjunto formado por los $b \in \mathbb{R}$ tales que A tiene inversa. Calcule la inversa de A para los diferentes valores del parámetro $b \in B$.

Solución:

A) Calculamos el determinante de A y comprobamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & b \end{vmatrix} = b - 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow b - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

Si $b = 4$ el determinante de A es nulo y su rango no es 2, por lo que su rango es 1, pues tiene elementos no nulos.
Si $b \neq 4$ el determinante de A es no nulo y su rango es 2.

B) La matriz A tiene inversa cuando su determinante es no nulo y por lo visto en el apartado anterior eso ocurre cuando $b \neq 4$.

C) Calculamos la inversa de la matriz A cuando $b \neq 4$.

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}}{b-4} = \frac{1}{b-4}\begin{pmatrix} b & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b}{b-4} & \frac{-2}{b-4} \\ \frac{-2}{b-4} & \frac{1}{b-4} \end{pmatrix}}$$

Problema 6:

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = \sin(x)$.

A) [0,75 PUNTOS] Calcule una primitiva de $f(x)$.

B) [1,75 PUNTOS] Calcule el área del recinto del plano limitado por $f(x)$ y el eje OX de abscisas para $x \in [0, 2\pi]$.

Solución:

A)

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \sin(x)dx = -\cos(x) + K$$

Una primitiva puede ser con $k = 0$ → $F(x) = -\cos(x)$

B) Averiguamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sin(x) \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow \{x \in [0, 2\pi]\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$$

El recinto lo dividimos en dos partes: una entre $x = 0$ y $x = \pi$, la otra entre $x = \pi$ y $x = 2\pi$. Calculamos cada una de las áreas y luego las sumamos.

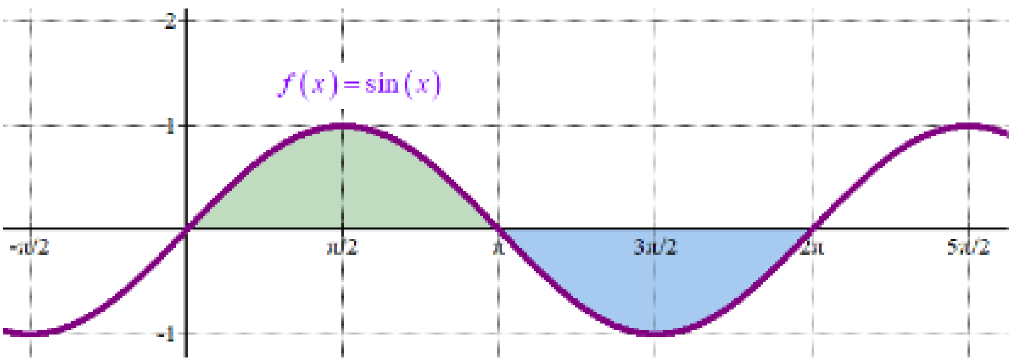
$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$$

$$\boxed{Área\ 1 = 2\ u^2}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx = \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)dx = [-\cos(x)]_{\pi}^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(\pi) = -1 - 1 = -2$$

$$\boxed{Área\ 2 = 2\ u^2}$$

El área del recinto del plano limitado por $f(x)$ y el eje OX de abscisas para $x \in [0, 2\pi]$ tiene un valor de $2 + 2 = 4$ unidades cuadradas.



Problema 7:

Ejercicio 7 [2,5 PUNTOS]

Considere el par de rectas

$$r:\begin{cases}3x-5=y\\ z=0\end{cases}\qquad s:\begin{cases}6x-2y=1\\ z=0\end{cases}$$

A) [1 PUNTO] Calcule la posición relativa de las dos rectas.

B) [0,5 PUNTOS] De la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

C) [1 PUNTO] De la ecuación de un plano ortogonal a la recta r.

Solución:

A) Obtenemos de cada una de ellas un punto y un vector director.

$$r:\begin{cases}3x-5=y\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-5+3x\\ z=0\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=-5+3\lambda\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,3,0)\\ P_r(0,-5,0)\end{cases}$$

$$s:\begin{cases}6x-2y=1\\ z=0\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}-2y=1-6x\rightarrow y=\dfrac{-1}{2}+3x\\ z=0\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=\alpha\\ y=\dfrac{-1}{2}+3\alpha\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_s}=(1,3,0)\\ Q_s\left(0,\dfrac{-1}{2},0\right)\end{cases}$$

Tienen el mismo vector director $\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{v_s}=(1,3,0)$, por lo que las rectas son coincidentes o paralelas.
Comprobamos si un punto de la recta r pertenece a la recta s. De cumplirse las rectas son coincidentes, en caso contrario serán paralelas.

$$\left.\begin{array}{l}¿P_r(0,-5,0)\in s?\\ s:\begin{cases}6x-2y=1\\ z=0\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow ¿s:\begin{cases}6\cdot 0-2(-5)=1\\ 0=0\end{cases}?\Rightarrow ¿s:\begin{cases}10=1\\ 0=0\end{cases}?$$

Como no se cumple las rectas r y s son paralelas.

B) El plano que contiene a ambas rectas tiene como uno de sus vectores directores $\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{v_s}=(1,3,0)$ y el otro vector director el vector que une un punto de r con un punto de s $\overrightarrow{P_rQ_s}$.

$$\left.\begin{array}{l}P_r(0,-5,0)\\ Q_s\left(0,\dfrac{-1}{2},0\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{P_rQ_s}=\left(0,\frac{-1}{2},0\right)-(0,-5,0)=\left(0,\frac{9}{2},0\right)$$

Hallamos la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{P_rQ_s}=\left(0,\dfrac{9}{2},0\right)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(1,3,0)\\ (0,-5,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x & y+5 & z\\ 0 & 4.5 & 0\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow 4.5z=0\Rightarrow\boxed{\pi:z=0}$$

Es lógico pues este plano está en la definición de la recta *r*, por lo que la recta *r* está contenida en el plano *z = 0* y lo mismo ocurre con la recta *s*.
El plano que contiene a ambas rectas es el plano *z = 0*.

C) El plano ortogonal a la recta *r* tiene como vector normal el vector director de la recta $\overrightarrow{u_r} = (1,3,0)$ y como no indica el punto por el que debe pasar habrían infinitos planos cumpliendo lo pedido. Para obtener uno de esos planos tomamos $P_r(0,-5,0) \in r$.

$$\pi : \left. \begin{matrix} \overline{n} = \overline{u_r} = (1,3,0) \\ P_r(0,-5,0) \in \pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \pi : x+3y+D=0 \\ P_r(0,-5,0) \in \pi \end{matrix} \right\} \Rightarrow 0-15+D=0 \Rightarrow D=15 \Rightarrow \boxed{\pi : x+3y-15=0}$$

Problema 8:

Ejercicio 8 [2,5 PUNTOS]

En una población determinada la altura de los niños de 17 años sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 7,41.

A) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que en dicha población la altura de un niño de 17 años esté entre 170 cm y 180 cm.

B) [1,5 PUNTOS] ¿A partir de que altura un niño de 17 años de dicha población se encontraría dentro del 5% de niños de 17 años más altos de dicha población?

Solución:

Sea X = Altura de un niño de 17 años en centímetros.
X = N(175, 7.41)

A) Nos pide calcular $P(170 \leq X \leq 180)$.

$$P(170 \leq X \leq 180) = P(X \leq 180) - P(X \leq 170) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{180-175}{7.41}\right) - P\left(Z \leq \frac{170-175}{7.41}\right) = P(Z \leq 0.675) - P(Z \leq -0.675) =$$

$$= P(Z \leq 0.675) - P(Z \geq 0.675) = P(Z \leq 0.675) - \left[1 - P(Z \leq 0.675)\right] =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} = \frac{0.7486+0.7517}{2} - \left[1 - \frac{0.7486+0.7517}{2}\right] \simeq \boxed{0.5}$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	[illegible]	[illegible]
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	[illegible]	[illegible]
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	[illegible]	[illegible]
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	[illegible]	[illegible]
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	[illegible]	[illegible]
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	[illegible]	[illegible]
0.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.7486	.7517
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823
0.8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

B) Nos piden hallar el valor de "a" tal que $P(X \geq a) = 0.05$.

$$P(X \geq a) = 0.05 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-170}{7.41}\right) = 0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a-170}{7.41}\right) = 0.05 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-170}{7.41}\right) = 1 - 0.05 = 0.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a-170}{7.41} = 1.645 \Rightarrow a = 1.645 \cdot 7.41 + 170 \simeq \boxed{187.19\ cm}$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	[illegible]	[illegible]
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	[illegible]	[illegible]
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	[illegible]	[illegible]
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	[illegible]	[illegible]
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	[illegible]	[illegible]
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	[illegible]	[illegible]
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	[illegible]	[illegible]
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	[illegible]	[illegible]
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	[illegible]	[illegible]
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	[illegible]	[illegible]
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	[illegible]	[illegible]
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	[illegible]	[illegible]
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	[illegible]	[illegible]
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	[illegible]	[illegible]
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	[illegible]	[illegible]
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	[illegible]	[illegible]
1.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9495	.9505
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EvAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los 8 ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

Problema 1:

Sean las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ con a, b, c números reales, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) [1,5 puntos] Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores a, b, c para que A · X = B.

b) [1 punto] Si además queremos que X sea simétrica, ¿qué se debe cumplir? ¿Cómo es la matriz X resultante?

Problema 2:

a) [0,5 puntos] Enuncia el teorema de Bolzano.

b) [1 punto] Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo [0, 2].

c) [1 punto] ¿Podría f(x) tener más de una raíz en el intervalo [0, 2]? Justifica tu respuesta.

Problema 3:

Sean el punto A(1, 1, a) y el plano $\pi \equiv b \cdot x + y + z = 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) [1,5 puntos] ¿Qué deben cumplir los valores a, b para que el punto A esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1, 2, 0)$?

b) [1 punto] Con los valores de a, b del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto A.

Problema 4:

a) Una empresa de mantenimiento da servicio a empresas de dos polígonos industriales (el polígono Campo y el polígono Llano). El 30 % de las reparaciones se realizan en el polígono Campo mientras que el 70 % se realiza en el polígono Llano. Además, en el polígono Campo el 10 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el 90 % de tipo eléctrico. En el polígono Llano el 30 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el resto de tipo eléctrico.

a.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se realice una reparación de tipo mecánico?

a.2) [0,75 puntos] Si se ha realizado una reparación de tipo eléctrico, ¿qué probabilidad hay de que se haya realizado en el polígono Llano?

b) El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media 1.5 minutos y desviación típica 0,15 minutos.

b.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de 1,35 minutos?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el 85,08 % de los tiempos realizados al completar una vuelta al circuito?

Problema 5:

a) [1 punto] Calcula la siguiente integral: $\int \frac{dx}{(1-3x)^{\frac{1}{2}}-(1-3x)^{\frac{2}{3}}}$

Puedes utilizar el cambio de variable 1 − 3x = t^6.

b) [1,5 puntos] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sin calcular A^{-1}, razona por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

Problema 6:

a) [1 punto] Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}$

b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2, 1, 3) y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ = (2, 2, 0) y $\vec{v}$ = (0, 0, −1).

Problema 7:

a) [1 punto] Sea la función f(x) = $x^3 + 3x^2 + x + 3$. Obtén sus máximos y mínimos relativos.

b) Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se extraen al azar dos bolas sin reemplazamiento y se obtiene una puntuación igual a la suma de los valores correspondientes.

b.1) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea de 3?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea mayor de 3?

Problema 8:

a) [1,25 puntos] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de A.

b) [1,25 puntos] Sea la recta r definida por la intersección de los planos π1 ≡ x + y + z = 1, π2 ≡ y + 2z = 1. Por otro lado, consideraremos el plano π3 ≡ 2x + y = 1. Determina la posición relativa de la recta r y el plano π3. El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Sean las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ con a, b, c números reales, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) [1,5 puntos] Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores a, b, c para que A · X = B.

b) [1 punto] Si además queremos que X sea simétrica, ¿qué se debe cumplir? ¿Cómo es la matriz X resultante?

Respuesta:

a)

$\boldsymbol{A \cdot X = B}$, $\quad \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ como el determinante de A es = 0, no podemos despejar X,

Efectuamos el producto $\begin{pmatrix} \boldsymbol{2a+c} & \boldsymbol{2b} \\ \boldsymbol{4a+2c} & \boldsymbol{4b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ igualando, obtenemos el sistema

$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{2a+c=1} \\ \boldsymbol{2b=0} \\ \boldsymbol{4a+2c=2} \\ \boldsymbol{4b=0} \end{array}\right\}$ de donde,

$$\boldsymbol{b=0 \quad y \quad c=1-2a.}$$

b)

Si X es simétrica, debe ser b = c , por tanto,

$$\boldsymbol{b=0 \quad , \quad c=0 \quad y \quad a=\frac{1}{2}}$$

Y la matriz quedaría:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Problema 2:

a) [0,5 puntos] Enuncia el teorema de Bolzano.

b) [1 punto] Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo [0, 2].

c) [1 punto] ¿Podría f(x) tener más de una raíz en el intervalo [0, 2]? Justifica tu respuesta.

Respuesta:

a) Enuncia el teorema de Bolzano: Si f es una función continua en el intervalo [a, b] y toma valores de signo distinto en los extremos, es decir, f(a)·f(b) < 0, entonces existe un valor, c, perteneciente al intervalo abierto (a, b) tal que f(c) = 0, es decir, $\exists \boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) = \mathbf{0}$.

b) f es una función continua en [0, 2], pues es una función polinómica que es continua en todos los números reales.

f(0) = - 10 y f(2) = 28 , valores de signo contrario, luego se cumplen las hipótesis del teorema y por tanto existe un valor, c, perteneciente al intervalo abierto (0, 2) tal que f(c) = 0, es decir, c es una raíz de f. En particular f(1) = 1 + 6 + 3 – 10 = 0.

f(1) = 0

c) Supongamos que f tiene 2 raíces en el intervalo, a y b, es decir, f(a) = 0 y f(b) = 0, por tanto

f(a) = f(b) , además f es una función continua en [0, 2], pues es una función polinómica que es continua en todos los números reales y f es una función derivable en (0, 2), pues es una función polinómica que es derivable en todos los números reales.

Se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle luego debe existir un valor c en (0, 2), donde se anule la derivada, es decir, f'(c) = 0,

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 3$, $3x^2 + 12x + 3 = 0$ obtenemos $\boldsymbol{x} = -\mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{3}}$ ***y*** $\boldsymbol{x} = -\mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{3}}$

que no pertenecen a (0, 2), por tanto, lo supuesto de que había 2 raíces es falso, es decir solo hay una raíz en [0, 2].

También podemos ver que desde $\boldsymbol{x} = -\mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{3}}$ en adelante la derivada es positiva, luego la función es creciente y no puede cortar dos veces al eje X, es decir, no puede tener dos raíces.

Problema 3:

Sean el punto A(1, 1, a) y el plano $\pi \equiv b \cdot x + y + z = 1$, con a, b $\in \mathbb{R}$.

a) [1,5 puntos] ¿Qué deben cumplir los valores a, b para que el punto A esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1, 2, 0)$?

b) [1 punto] Con los valores de a, b del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto A.

Respuesta:

a) Si el punto está contenido en el plano, debe verificar su ecuación, $b\cdot 1 + 1 + a = 1$

El vector normal del plano es (b, 1, 1) si debe ser perpendicular al (1, 2, 0), su producto escalar ha de ser 0, $(b, 1, 1)\cdot(1, 2, 0) = 0$, $b + 2 + 0 = 0$

Obtenemos

b = -2 y a = 2

b) a = 2 , b = -2 ; A(1, 1, 2) , vector normal al plano (-2, 1, 1) lo utilizamos como vector director de la recta y obtenemos:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$$

Problema 4:

a) Una empresa de mantenimiento da servicio a empresas de dos polígonos industriales (el polígono Campo y el polígono Llano). El 30 % de las reparaciones se realizan en el polígono Campo mientras que el 70 % se realiza en el polígono Llano. Además, en el polígono Campo el 10 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el 90 % de tipo eléctrico. En el polígono Llano el 30 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el resto de tipo eléctrico.

a.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se realice una reparación de tipo mecánico?

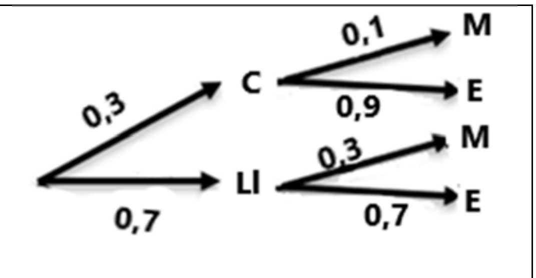
a.2) [0,75 puntos] Si se ha realizado una reparación de tipo eléctrico, ¿qué probabilidad hay de que se haya realizado en el polígono Llano?

b) El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media 1,5 minutos y desviación típica 0,15 minutos.

b.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de 1,35 minutos?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el 85,08 % de los tiempos realizados al completar una vuelta al circuito?

Solución:

a) C………Campo Ll………Llano M……..Mecánico E………Eléctrico	

a.1) Aplicamos el teorema de la **probabilidad total**:

$$P(M) = P(C \cap M) + P(Ll \cap M) = P(\mathrm{C}) \cdot P(M/Ll) + P(Ll) \cdot P(M/Ll) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}24$$

$$\boldsymbol{P(\mathrm{M}) = 0,24}$$

a.2) Aplicamos el **teorema de Bayes**:

$$P(Ll/E) = \frac{P(Ll \cap \mathrm{E})}{P(E)} = \frac{P(Ll) \cdot P(E/Ll)}{P(E)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}7}{1 - P(M)} = \frac{0{,}49}{1 - 0{,}24} = \frac{0{,}49}{0{,}76} = 0{,}64$$

$$\boldsymbol{P(Ll/E) = 0,64}$$

b) Sea X la variable aleatoria "tiempo en dar una vuelta" X … N(1,5 , 0,15)

b.1) P(x < 1,35) = P(z < $\frac{1{,}35-1{,}5}{0{,}15}$) = P(z < -1) = 1 – P(z < 1) = 1 – 0,8413 = 0,1587

$$\mathrm{P(x < 1{,}35)=0{,}1587}$$

b.2) P(x<k) = 0,8508 $P\left(z < \frac{k-1{,}5}{0{,}15}\right) = 0{,}8508$ buscando dentro de la tabla el valor 0,8508, obtenemos 1,04 luego, $\frac{k-1{,}5}{0{,}15} = 1{,}04$, $k - 1{,}5 = 1{,}04 \cdot 0{,}15$, $k = 1{,}5 + 1{,}04 \cdot 0{,}15$

$$\mathrm{k = 1{,}656\ segundos}$$

Problema 5:

a) [1 punto] Calcula la siguiente integral: $\int \frac{dx}{(1-3x)^{\frac{1}{2}}-(1-3x)^{\frac{2}{3}}}$

Puedes utilizar el cambio de variable 1 − 3x = t^6.

b) [1,5 puntos] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sin calcular A^{-1}, razona por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

Respuesta:

a) Hacemos 1 − 3x = t^6 , derivamos, -3dx = $6t^5$dt, de donde, dx = -$2t^5$dt, sustituimos

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{\frac{1}{2}}-(1-3x)^{\frac{2}{3}}} = \int \frac{-2t^5dt}{(t^6)^{\frac{1}{2}}-(t^6)^{\frac{2}{3}}} = \int \frac{-2t^5dt}{t^3-t^4} = \int \frac{-2t^5dt}{t^3(1-t)} = \int \frac{-2t^2dt}{1-t} = 2\int \frac{t^2dt}{t-1}$$

Dividimos t^2 : (t-1) , obtenemos t +1 de cociente y 1 de resto, luego,

$$2\int \frac{t^2dt}{t-1} = 2\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2}+t+L|t-1|\right)+C = t^2+2t+2L|t-1|+C$$

deshaciendo el cambio, $t = \sqrt[6]{1-3x}$

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{\frac{1}{2}}-(1-3x)^{\frac{2}{3}}} = \left(\sqrt[6]{1-3x}\right)^2 + 2\sqrt[6]{1-3x} + 2L\left|\sqrt[6]{1-3x}-1\right| + C \text{ por tanto,}$$

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{\frac{1}{2}}-(1-3x)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{1-3x} + 2\sqrt[6]{1-3x} + 2L\left|\sqrt[6]{1-3x}-1\right| + C$$

b)

$|A| = 0+0+0-2-0-0 = -2$, como el determinante es distinto de 0, **existe A^{-1}**

B tiene una fila de 0, por tanto su determinante vale 0

$|A^{-1} \cdot B| = |A^{-1}||B| = |A^{-1}| \cdot 0 = 0$ por tanto, **$A^{-1} \cdot B$ no tiene inversa**

Problema 6:

a) [1 punto] Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}$

b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2, 1, 3) y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ = (2, 2, 0) y $\vec{v}$= (0, 0, −1).

Respuesta:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2} = 1^\infty, \text{indeterminación}$, Calculamos $e^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\left(\frac{5x+1}{5x}-1\right)}$

$$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\left(\frac{5x+1}{5x}-1\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\cdot\left(\frac{5x+1-5x}{5x}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\cdot\left(\frac{1}{5x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{5x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{5} = \infty$$, luego,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\left(\frac{5x+1}{5x}-1\right)} = e^\infty = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2} = \infty$$

b) Si el vector director ha de ser perpendicular a los dados, calculamos el producto vectorial de éstos

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 2j \dots\dots\dots\dots \vec{w} = (-2, 2, 0) \dots\dots\dots (-1, 1, 0)$$

Tenemos A(2, 1, 3) y $\vec{w} = (-1, 1, 0)$ luego la ecuación es

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{0}$$

Problema 7:

a) [1 punto] Sea la función f(x) = $x^3 + 3x^2 + x + 3$. Obtén sus máximos y mínimos relativos.

b) Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se extraen al azar dos bolas sin reemplazamiento y se obtiene una puntuación igual a la suma de los valores correspondientes.

b.1) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea de 3?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea mayor de 3?

Respuesta:

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$, $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$, $f''(x) = 6x + 6$

$3x^2 + 6x + 1 = 0$, $\boldsymbol{x = -1 + \frac{\sqrt{6}}{3}}$ $\boldsymbol{x = -1 - \frac{\sqrt{6}}{3}}$

$f''(\boldsymbol{-1 + \frac{\sqrt{6}}{3}}) > 0$ Mínimo $f''(\boldsymbol{-1 - \frac{\sqrt{6}}{3}}) < 0$ Máximo de donde,

$$\boldsymbol{\left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{3},\ 4 - \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)\ \text{hay un mínimo}\ \left(-1 - \frac{\sqrt{6}}{3},\ 4 + \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)\ \text{hay un máximo}}$$

b)

b.1) A = { 1-2, 2-1}

$$P(A) = P(1 \cap 2) + P(2 \cap 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{6}}$$

b.2) B = { 1-3, 3-1, 2-3, 3-2, 1-4, 4-1, 2-4, 4-2, 3-4, 4-3} = {mayor que 3}

$\bar{B}$ = {menor o igual que 3} = {igual que 3} , menos no se puede obtener

P(B) = 1 – P($\bar{B}$) = $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$$\boldsymbol{P(B) = \frac{5}{6}}$$

Problema 8:

a) [1,25 puntos] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de A.

b) [1,25 puntos] Sea la recta r definida por la intersección de los planos π1 ≡ x + y + z = 1, π2 ≡ y + 2z = 1. Por otro lado, consideraremos el plano π3 ≡ 2x + y = 1. Determina la posición relativa de la recta r y el plano π3. El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

Respuesta:

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ -2F1 + F3 $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ F2 + F3 $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

El rango de A es 2

b) Escribimos las 2 ecuaciones de la recta y la del plano como un sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x + y + z} &= \mathbf{1} \\ \boldsymbol{y + 2z} &= \mathbf{1} \\ \boldsymbol{2x + y} &= \mathbf{1} \end{aligned}\right\}$$

La matriz ampliada se corresponde con la del apartado a) , los rangos de ambas matrices es 2, por tanto:

la recta está contenida en el plano.

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EvAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los 8 ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

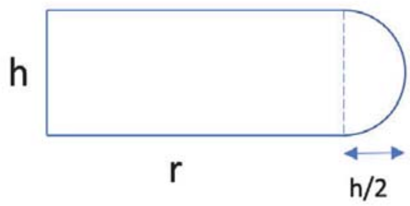
Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} -2x + y - z = -1 \\ -x + a \cdot y + z = 2 \\ 2x + y + a \cdot z = 3 \end{cases}$, con $a \in R$

a) **[1,75 punto]** Discute cómo es el sistema en función de los valores del parámetro *a*.

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para *a* =2, si es posible.

Problema 2:

Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados $h, r \in R$, de manera que el radio del semicírculo es $h/2$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento. La empresa desea construir un aparcamiento con el mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



a) **[1 punto]** Escribe el área del aparcamiento en función del valor *h*.

b) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto deben valer *h* y *r* para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

Problema 3:

a) Tenemos dos urnas con bolas. La urna A tiene 6 bolas rojas y 8 negras y la urna B tiene 8 bolas rojas y 10 bolas negras. Disponemos de un dado de 12 caras numeradas del 1 al 12. Lanzamos el dado y si sale un número múltiplo de 4 se extrae una bola de la urna A. Si sale otro número se extrae una bola de la urna B. Calcula razonadamente:

a.1) **[0,5 puntos]** La probabilidad de obtener una bola roja.

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que la bola extraída es roja, la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A.

b) Una empresa de mensajería sabe que la probabilidad de que el destinatario esté ausente (y no se pueda hacer la entrega) durante el reparto es del 25 %. Un repartidor de esta empresa ha de entregar 6 paquetes.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que no pueda entregar uno de ellos porque el destinatario esté ausente?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que pueda entregar al menos uno de los paquetes?

n	k \ p	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
6	0	0.7351	0.3771	0.1780	0.0754	0.0277	0.0083	0.0018	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.2321	0.3993	0.3560	0.2437	0.1359	0.0609	0.0205	0.0044	0.0004	0.0000
	2	0.0305	0.1762	0.2966	0.3280	0.2780	0.1861	0.0951	0.0330	0.0055	0.0001
	3	0.0021	0.0415	0.1318	0.2355	0.3032	0.3032	0.2355	0.1318	0.0415	0.0021
	4	0.0001	0.0055	0.0330	0.0951	0.1861	0.2780	0.3280	0.2966	0.1762	0.0305
	5	0.0000	0.0004	0.0044	0.0205	0.0609	0.1359	0.2437	0.3560	0.3993	0.2321
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0018	0.0083	0.0277	0.0754	0.1780	0.3771	0.7351

Problema 4:

Sean el plano $\pi \equiv a \cdot x + y - z = 1$, con $a \in R$, y los puntos A(1, 0, 0) y B(b, 1, -1) con b∈ R.

- a) **[1,5 puntos]** Determina el valor de *a, b* para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular al plano π y el punto *A* esté contenido en el plano π.
- b) **[1 puntos]** Con los valores de *a, b* obtenidos en el apartado anterior, escribe la ecuación de la recta que pasa por *A* y es perpendicular al plano π.

Problema 5:

- **a)** **[1 punto]** Encontrar el área encerrada por la recta x = -1 y las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$
- **b)** **[1,5 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ con $a \in R$. Estudia el rango de A en función de los valores de a

Problema 6:

- ***a)*** ***[1 punto]*** Calcula el límite siguiente $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9}$
- ***b)*** ***[1,5 puntos]*** Sean el punto A(1, 2, 1) y el plano $\pi \equiv x - y = 1$. Calcula la distancia del punto A al plano π

Problema 7:

a) ***[1 punto]*** Resuelve la siguiente integral: $\int (x+3)e^{-2x}dx$

b) En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

- b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?
- b.2) **[0,75 puntos]** ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación de $n \in N$?

Problema 8:

- **a)** **[1,25 puntos]** Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$ con a, b, c, x, y, z $\in R$. Calcula $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix}$ e indica en cada paso las propiedades que utilizas.
- **b)** **[1,25 puntos]** Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (3,2,3)$

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} -2x + y - z = -1 \\ -x + a \cdot y + z = 2 \\ 2x + y + a \cdot z = 3 \end{cases}$, con $a \in R$

a) **[1,75 punto]** Discute cómo es el sistema en función de los valores del parámetro *a*.

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para *a* =2, si es posible.

Respuesta:

a) Escribimos la matriz ampliada y la de coeficientes $\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$

Calculamos $\begin{vmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{a} \end{vmatrix} = -2a^2 + 1 + 2 + 2a + 2 + a = -2a^2 + 3a + 5$

$-2a^2 + 3a + 5 = 0$; $a = -1$, $a = \frac{5}{2}$

1. **Si $\boldsymbol{a \neq -1}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{a \neq \frac{5}{2}}$** el rango de matriz de coeficientes es 3 y por tanto, el de la ampliada también, **Sistema Compatible Determinado**.
2. **Si $\boldsymbol{a = -1}$** el rango de la matriz de coeficientes es 2 , $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$
   sustituimos la tercera columna por los términos independientes
   $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 + 4 + 2 + 4 + 3 = 20 \neq 0$, el rango de la matriz ampliada es 3, por tanto, **Sistema Incompatible**.
3. **Si $\boldsymbol{a = \frac{5}{2}}$** el rango de la matriz de coeficientes es 2 , $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$
   sustituimos la tercera columna por los términos independientes
   $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & \frac{5}{2} & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -15 + 1 + 4 + 5 + 4 + 3 = 2 \neq 0$, el rango de la matriz ampliada es 3, por tanto, **Sistema Incompatible**.

b) **Si a = 2** ; $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ F1 – 2F2 , F1 + F3 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 2F2 + 3F3

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ $-3z = -4$; $z = \frac{4}{3}$ $-3y - 3z = -5$; $-3y - 3 \cdot \frac{4}{3} = -5$, $y = \frac{1}{3}$

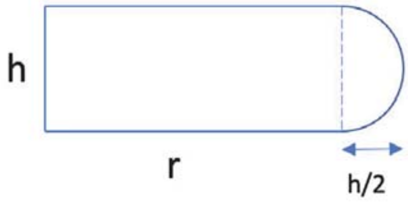
$-2x + y - z = -1$ $-2x + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1$; $x = 0$

De donde,

$$\boldsymbol{x = 0} \ , \ \boldsymbol{y = \frac{1}{3}} \ , \ \boldsymbol{z = \frac{4}{3}}$$

Problema 2:

Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados h, r $\in R$, de manera que el radio del semicírculo es $h/2$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento. La empresa desea construir un aparcamiento con el mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



- ***a)*** **[1 punto]** Escribe el área del aparcamiento en función del valor *h*.
- ***b)*** **[1,5 puntos]** ¿Cuánto deben valer *h* y *r* para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

Respuesta:

a) Área total = área del rectángulo + área semicírculo :

$$\mathbf{A(r,h) = r \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

b) Como el perímetro ha de ser de 80 m, $P(r,h) = 2r + h + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot h = 80$

Despejamos r, $r = \frac{1}{2}\left(80 - h\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \pi\right)\right)$ sustituimos en el área

$f(h) = \frac{1}{2}\left(80 - h\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \pi\right)\right) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 40h + h^2\left(\frac{-4-\pi}{8}\right)$ derivamos

$f'(h) = 40 - h\left(\frac{4+\pi}{4}\right)$ igualamos a 0 y despejamos h, $h = \frac{160}{\pi+4} \cong 22{,}4$

$f''(h) = -\left(\frac{4+\pi}{4}\right) < 0$ por tanto , para $h \cong 22{,}4$ hay un máximo

$r = \frac{1}{2}\left(80 - 22{,}4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \pi\right)\right) \cong 11{,}21$

El área es máxima para:

h = 22,4 y r = 11,21

Problema 3:

a) Tenemos dos urnas con bolas. La urna A tiene 6 bolas rojas y 8 negras y la urna B tiene 8 bolas rojas y 10 bolas negras. Disponemos de un dado de 12 caras numeradas del 1 al 12. Lanzamos el dado y si sale un número múltiplo de 4 se extrae una bola de la urna A. Si sale otro número se extrae una bola de la urna B. Calcula razonadamente:

a.1) [0,5 puntos] La probabilidad de obtener una bola roja.

a.2) [0,75 puntos] Sabiendo que la bola extraída es roja, la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A.

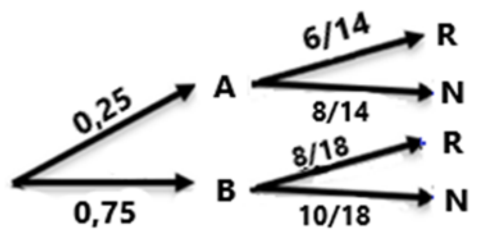
b) Una empresa de mensajería sabe que la probabilidad de que el destinatario esté ausente (y no se pueda hacer la entrega) durante el reparto es del 25 %. Un repartidor de esta empresa ha de entregar 6 paquetes.

b.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que no pueda entregar uno de ellos porque el destinatario esté ausente?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que pueda entregar al menos uno de los paquetes?

Respuesta:

a)

A={6R, 8N} B={8R, 10N} D1={4, 8, 12} D2={1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11}	

a.1) Aplicando el teorema de la Probabilidad Total

P(R) = $P(A \cap R) + P(B \cap R)$ = P(A)·P(R/A) + P(B)·P(R/B) = 0,25·6/14 + 0,75·8/18 = 37/84 **= 0,44**

a.2) Aplicando la Regla de Bayes

P(A/R) = $\frac{P(A\cap R)}{P(R)} = \frac{P(A)\cdot P(R/A)}{P(R)} = \frac{0{,}25\cdot\frac{6}{14}}{0{,}44} = \mathbf{0,24}$

b) Sea X la variable aleatoria nº de paquetes no entregados por estar el destinatario ausente

P(X) = 0,25 = p ; nº de paquetes, n = 6 ; X sigue una binomial B(6, 0,25)

b.1) **P(X=1)** = $\binom{6}{1}\cdot 0{,}25^1\cdot 0{,}75^5 = \mathbf{0,3560}$ (ver en la tabla)

b.2) Entregar al menos 1 es lo mismo que no entregar 5 o menos

$$\mathbf{P(X\le 5)} = 1 - \mathrm{P}(X=6) = 1 - \binom{6}{6}\cdot 0{,}25^6\cdot 0{,}75^0 = 1 - 0{,}0002 = \mathbf{0,9998}$$

Problema 4:

Sean el plano $\pi \equiv a \cdot x + y - z = 1$, con $a \in R$, y los puntos A(1, 0, 0) y B(b, 1, -1) con b$\in R$.

a) **[1,5 puntos]** Determina el valor de *a, b* para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular al plano π y el punto *A* esté contenido en el plano π.

b) **[1 puntos]** Con los valores de *a, b* obtenidos en el apartado anterior, escribe la ecuación de la recta que pasa por *A* y es perpendicular al plano π.

Respuesta:

a) Si $\overrightarrow{AB}$ ha de ser perpendicular al plano $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{n_\pi}$, $\overrightarrow{AB} = (b-1, 1, -1)$, $\overrightarrow{n_\pi} = (a, 1, -1)$

y si A debe pertenecer al plano, tiene que cumplir su ecuación.

$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{n_\pi}$ ….. $\frac{b-1}{a} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1}$; nos queda ,

b – 1 = a y $a \cdot 1 + 0 - 0 = 1$, **a = 1** , de donde, **b = 2** .

b) $\pi \equiv x + y - z = 1$ A(1, 0, 0)

$\overrightarrow{n_\pi} = (1, 1, -1)$

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1,1,-1)$ o

Ecuación continua:

$$\mathbf{\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}}$$

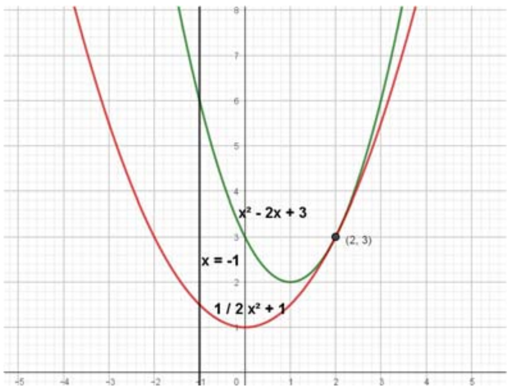
Problema 5:

a) **[1 punto]** Encontrar el área encerrada por la recta x = -1 y las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$

b) **[1,5 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ con $a \in R$. Estudia el rango de A en función de los valores de $\boldsymbol{a}$

Respuesta:

a) Las dos funciones tienen por gráfica una parábola abierta hacia arriba, f más cerrada que g



Por tanto el área es: $\int_{-1}^{2}\left[(x^2-2x+3)-\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)\right]dx = \int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2-2x+2\right)dx = \left(\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right)\Big|_{-1}^{2} =$

$= \left(\frac{1}{2}\frac{2^3}{3}-2^2+2\cdot 2\right)-\left(\frac{1}{2}\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2+2\cdot(-1)\right) = \frac{9}{2} = \mathbf{4,5\ \ u.a.}$

Área = $\mathbf{4,5\ \ u.a}$

b) Calculamos el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = a+1-a\cdot(a+1) = (a+1)\cdot(1-a)$$

$(a+1)\cdot(1-a) = 0 \quad ; \quad a = 1 \quad y \quad a = -1$ por tanto,

1. **Si $\mathbf{a \neq 1 \quad y \quad a \neq -1 \quad ; \quad rango(A) = 3}$**
2. **Si $\boldsymbol{a = 1}$** nos queda $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ por tanto, $\mathbf{rango(A) = 2}$
3. **Si $\boldsymbol{a = -1}$** nos queda $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ por tanto, $\mathbf{rango(A) = 2}$

Problema 6:

a) ***[1 punto]*** Calcula el límite siguiente $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9}$

b) ***[1,5 puntos]*** Sean el punto A(1, 2, 1) y el plano $\pi \equiv x - y = 1$. Calcula la distancia del punto A al plano π

Respuesta:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9} = \frac{3^3-3\cdot 3^2+3\cdot 3-9}{3\cdot 3-9} = \frac{0}{0}$

Podemos descomponer factorialmente o aplicar la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9} = \lim_{x\to 3}\frac{(x^2+3)\cdot(x-3)}{3\cdot(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x^2+3)}{3} = \frac{(3^2+3)}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9} = \lim_{x\to 3}\frac{3x^2-6x+3}{3} = \frac{3\cdot 3^2-6\cdot 3+3}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\mathbf{\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9} = 4}$$

b) Si A(x_0, y_0, z_0) y $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ $\quad d(A,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+D^2}}$

$$\boldsymbol{d(A,\pi)} = \frac{|1\cdot 1 - 1\cdot 2 + 0\cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$$

Problema 7:

a) ***[1 punto]*** Resuelve la siguiente integral: $\int (\boldsymbol{x}+\mathbf{3})\boldsymbol{e}^{-2x}\boldsymbol{dx}$

b) En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación de $n \in N$?

Respuesta:

a) La resolvemos por el método de integración por partes:

Llamamos $u = (\mathrm{x}+3)$, $dv = \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}\mathrm{dx}$; $du = \mathrm{dx}$, $v = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}$ de donde,

$$\int (x+3)e^{-2x}dx = (x+3)\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}\right) - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}(x+3) - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} + C$$

Luego,

$$\boldsymbol{\int (x+3)e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}(x+3) - \frac{1}{4}e^{-2x} + C}$$

b) Sea X la variable aleatoria, "número de unos que saca un jugador"

La probabilidad de sacar un 1 al lanzar un dado es **1/6** y la de no sacar 1 es **5/6**

b.1) **P(X=0) =** $\frac{5}{6}$; **P(X=1) =** $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$, sacar 1 y no sacar 1.

P(X=3) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$, sacar 1 tres veces y no sacar 1.

b.2) **P(X=n) =** $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\dots\dots\dots\frac{5}{6} = \frac{5}{6^{n+1}}$, sacar n veces 1 y no sacar 1

Problema 8:

a) **[1,25 puntos]** Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$ con a, b, c, x, y, z ∈ R. Calcula $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix}$ e indica en cada paso las propiedades que utilizas.

b) **[1,25 puntos]** Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (3,2,3)$

Respuesta:

a) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ a & b & c \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & 6 & 10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} =$

descomposición de un determinante en suma de dos,

$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ a & b & c \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} + 0 =$; la segunda fila es igual a la primera multiplicada por 4,

$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} \\ \mathrm{x} & \mathrm{y} & \mathrm{z} \end{vmatrix}$; sacar factor común de una fila,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 = 12 \quad ;$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} = 12$$

b) $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (3,2,3)$

$$cos(\alpha) = cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|1\cdot3+1\cdot2+1\cdot3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+3^2}} = \frac{8}{\sqrt{66}} = 0,98$$

$$\alpha = arc\,cos(0,98) = 11,46°$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

CASTILLA Y LEÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El alumno deberá escoger libremente cinco problemas completos de los diez propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, solo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados. Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver, justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las propuestas, claridad y coherencia en la exposición, precisión de los cálculos y en las anotaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

E1 .- (Álgebra)

Calcular λ y μ para que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y+z=\mu \\ \lambda x+y=1 \\ y+\lambda z=-1 \end{cases}$, tenga infinitas soluciones.

(2 puntos)

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ z & x+y \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de x, y, $z\in\mathbb{R}$ para que AB sea igual a la inversa C^{-1} de la matriz C. (2 puntos)

E3. (Geometría)

Calcular la ecuación del plano π que es perpendicular al plano $\sigma \equiv x + 2y + 3z = 0$ y pasa por los puntos $P = (0, 0, 0)$ y $Q = (0, 1, 1)$. (2 puntos)

E4.- (Geometría)

Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{1}$, se pide:

a) Comprobar que r es paralela a π. (1 punto)

b) Hallar el plano σ, distinto de π y paralelo a π, cuya distancia a r coincide con la de π. (1 punto)

E5.- (Análisis)

a) Determinar a y b de modo que las funciones $f(x) = x^2 - a$ y $g(x) = (x - b)e^x$ tomen el mismo valor en un punto en el que ambas tengan un extremo relativo. (1 punto)

b) Demostrar que la función $f(x) = 2x + \text{sen } x$ solo se anula en el punto $x = 0$. (1 punto)

E6.- (Análisis)

a) Determínense el dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de la función $f(x) = x(\ln x - 1)$. (1 punto)

b) Calcúlese $\int x(\ln x - 1)\, dx$. (1 punto)

E7.- (Análisis)

Calcular $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}}{x-2}$. (2 puntos)

E8.- (Análisis)

Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = xe^{-x}$ y el eje de abscisas cuando x varía en el intervalo $[-1, 0]$. (2 puntos)

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Un 50 % de los participantes en un torneo abierto de ajedrez celebrado en Salamanca son españoles, un 30 % son europeos no españoles y los demás proceden del resto del mundo. De ellos, dos tercios de los españoles, la mitad de los europeos no españoles y un tercio de los no europeos no pasan de los 40 años.

a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado (0,6 puntos)

b) Si se selecciona un participante al azar ¿Calcular la probabilidad de que no tenga más de 40 años? (0,7 puntos)

c) Si se elige al azar un participante del torneo y no tiene más de 40 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea español? (0,7 puntos)

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Si lanzamos al mismo tiempo dos dados idénticos y del tipo usual (es decir, que sean cúbicos, que todas sus caras tengan la misma probabilidad de quedar hacia arriba y que en cada una de ellas aparezca un número de puntos que varíe desde el uno hasta el seis), ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones obtenidas en los dos dados coincida con la suma más frecuente? (2 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

E1 .- (Álgebra)

Calcular λ y μ para que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y+z=\mu \\ \lambda x+y=1 \\ y+\lambda z=-1 \end{cases}$, tenga infinitas soluciones.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda+\lambda-2\lambda^2=2\lambda-2\lambda^2=0;\ \ 2\lambda(1-\lambda)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=1.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$Para\ \begin{Bmatrix} \lambda \neq 0 \\ \lambda \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

Para que el sistema tenga infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado), es necesario que $Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg.$

$$Para\ \lambda=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_3\} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & \mu \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-1-1=-2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ \begin{Bmatrix} \lambda=0 \\ \mu \in R \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M' \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

$$Para\ \lambda=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{F_2 \to F_2-F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & -1 & -1 & 1-\mu \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & 1 & 1 & \mu-1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1-2F_2 \\ F_3 \to F_3-F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2-\mu \\ 0 & 1 & 1 & \mu-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix} \Rightarrow Para\ \mu=0 \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ sistema\ tiene\ infinitas\ soluciones\ para\ \lambda=1\ y\ \mu=0.}}$$

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ z & x+y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de x, y, $z \in \mathbb{R}$ para que AB sea igual a la inversa C^{-1} de la matriz C.

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ z & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & x+y \\ -x+y & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1;\ \ C^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} = \frac{Adj.de\ C^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = C^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+z & x+y \\ -x+y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=2 \\ x+y=1 \\ -x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ De las dos últimas ecuaciones se deduce que $y = 1$.

$$x+1=1;\ \ x=0;\ \ 0+z=2;\ \ z=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución}: \boldsymbol{x=0, y=1, z=2.}}$$

E3. (Geometría)

Calcular la ecuación del plano π que es perpendicular al plano $\sigma \equiv x + 2y + 3z = 0$ y pasa por los puntos $P = (0, 0, 0)$ y $Q = (0, 1, 1)$.

Solución:

Los puntos $P(0,0,0)$ y $Q(0,1,1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(0,1,1) - (0,0,0)] = (0,1,1)$.

Un vector normal del plano $\sigma \equiv x + 2y + 3z = 0$ es $\vec{n} = (1,2,3)$.

Considerando, por ejemplo, el punto $P(0,0,0)$, la ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{PQ},\ \vec{n}\ \right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;\ \ 3x + y - z - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv x + y - z = 0.}}$$

E4.- (Geometría)

Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{1}$, se pide:

a) Comprobar que r es paralela a π.

b) Hallar el plano σ, distinto de π y paralelo a π, cuya distancia a r coincide con la de π.

Solución:

$a)$ Una recta y un plano son paralelos cuando el vector normal del plano y el vector director de la recta son perpendiculares.

Un vector normal del plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 0$ es $\vec{n} = (1, 2, -2)$.

Un vector de la recta $r \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{1}$ es $\overrightarrow{v_r} = (-2, 2, 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (1, 2, -2) \cdot (-2, 2, 1) = -2 + 4 - 2 = 0$.

$$\underline{\boldsymbol{Queda\ comprobado\ que\ el\ plano\ \pi\ y\ la\ recta\ r\ son\ paralelos.}}$$

$b)$ La distancia de un plano a una recta paralela a él es la misma que la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

Un punto de la recta $r \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{1}$ es $P(0, 4, 1)$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $P(0, 4, 1)$ y al plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 0$:

$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|0 + 8 - 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} \Rightarrow d(r, \pi) = 2\ u$.

El haz de planos paralelos a π, sin ser coincidente con él, tiene la siguiente expresión general: $\beta \equiv x + 2y - 2z + D = 0, D \in R - \{0\}$.

La distancia entre los planos paralelos $\left.\begin{cases} \pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0 \end{cases}\right\}$ viene dado por la expresión: $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula a los planos $\left.\begin{cases} \pi \equiv x + 2y - 2z + D1 = 0 \\ \beta \equiv x + 2y - 2z + D2 = 0 \end{cases}\right\}$:

$d(\pi, \beta) = 4 \Rightarrow \frac{|D1 - D2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 4;\ \frac{|D1 - D2|}{\sqrt{9}} = 4;\ |D1 - D2| = 12 \Rightarrow D_1 = 0, D_2 = -12$.

Uno de los planos obtenido es el dado. El otro es:

$$\underline{\boldsymbol{\beta_1 \equiv x + 2y - 2z - 12 = 0.}}$$

E5.- (Análisis)

a) Determinar a y b de modo que las funciones $f(x) = x^2 - a$ y $g(x) = (x - b)e^x$ tomen el mismo valor en un punto en el que ambas tengan un extremo relativo.

b) Demostrar que la función $f(x) = 2x + \text{sen } x$ solo se anula en el punto $x = 0$.

Solución:

$a)$ La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada, por lo cual, se nos piden los valores de a y b para que las primeras derivadas de las funciones se anulen.

$f'(x) = 2x.$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0;\ \ x = 0.$

$g'(x) = 1 \cdot e^x + (x - b) \cdot e^x = e^x(1 + x - b).$

$g'(x) = 0 \Rightarrow e^x(1 + x - b) = 0;\ \ e^x \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow 1 + x - b = 0;$

$b = 1 + x.$

Para $x = 0$, de la derivada de $f(x) \Rightarrow b = 1.$

La función resulta $\quad g(x) = (x - 1) \cdot e^x.$

Para $x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} g(0) = (0 - 1) \cdot e^0 = -1 \\ f(0) = 0^2 - a = -a \end{matrix} \right\} \Rightarrow -a = -1;\ \ a = 1.$

$\underline{\boldsymbol{Las\ funciones\ f(x)\ y\ g(x)\ tienen\ un\ extremo\ relativo\ para\ a = 1\ y\ b = 1.}}$

$b)$ La función $f(x) = 2x + sen\ x$ es continua y derivable en R por ser la suma de dos funciones continuas y derivables en R.

Aplicando el teorema de Bolzano a $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$f(-\pi) = -2\pi + sen\ (-\pi) = -2\pi + 0 < 0.$

$f(\pi) = 2\pi + sen\ \pi = 2\pi + 0 > 0.$

Lo anterior prueba que la función $f(x)$ tiene, al menos, una raíz real en el intervalo $(-\pi, \pi)$, y, en consecuencia, tiene, al menos, una raíz.

Si la función $f(x) = 2x + sen\ x$ tuviera otra raíz $x = \beta$, tal que $f(\beta) = 0$, se podría aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo $[0, \beta]$.

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

$f'(x) = 2 + \cos x \Rightarrow f'(x) \neq 0, \forall x \in R.$

$\underline{\boldsymbol{Lo\ anterior\ demuestra\ que\ x = 0\ es\ la\ raíz\ única\ de\ f(x) = 2x + sen\ x.}}$

E6.- (Análisis)

a) Determínense el dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de la función $f(x) = x\,(\ln x - 1)$.

b) Calcúlese $\int x\,(\ln x - 1)\,dx$.

Solución:

$a)$ El dominio de la función $f(x)$ es el conjunto de valores reales de x que cumplen la condición: $x > 0$.

$$\underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow x \in (0, +\infty).}}$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 1 \cdot (Lx - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = Lx - 1 + 1 = Lx.$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (1, +\infty).}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (0, 1).}}$$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow Lx = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}. \qquad f''(1) = \frac{1}{1} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = 1 \cdot (L1 - 1) = 1 \cdot (0 - 1) = -1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mín. \Rightarrow P(1, -1).}}$$

$$b)\ I = \int x \cdot (Lx - 1) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = Lx - 1 \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Lx - 1) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot (Lx - 1) - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot (Lx - 1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4} \cdot [2(Lx - 1) - 1] + C = \frac{x^2}{4} \cdot (Lx^2 - 3) + C.$$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int x \cdot (Lx - 1) \cdot dx = \frac{x^2}{4} \cdot (Lx^2 - 3) + C.}}$$

E7.- (Análisis)

Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}}{x-2}$. (2 puntos)

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}}{x-2}=\frac{\sqrt{8+2-1}-\sqrt{8+1}}{2-2}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^3+x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^3+1}\right)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x-1-(x^3+1)}{(x-2)\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x-1-x^3-1}{(x-2)\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}}=\frac{1}{\sqrt{2^3+2-1}+\sqrt{2^3+1}}=\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{9}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}}{x-2}=\frac{1}{6}}}.$$

E8.- (Análisis)

Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = xe^{-x}$ y el eje de abscisas cuando x varía en el intervalo [−1, 0]. (2 puntos)

Solución:

En el intervalo $(-1, 0)$ todas las ordenadas de la función $f(x) = x \cdot e^{-x} = \frac{x}{e^x}$ son negativas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$S = -\int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx = \int_{0}^{-1} x \cdot e^{-x} \cdot dx.$ (*)

Se resuelve, en primer lugar, la integral indefinida.

$A = \int x \cdot e^{-x} dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} u = x \to du = dx \\ dv = e^{-x} \cdot dx \to v = -e^{-x} \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C \Rightarrow$

$\Rightarrow A = -e^{-x}(x+1) + C.$ Sustituyendo en (*):

$S = [-e^{-x}(x+1)]_0^{-1} = [e^{-x}(x+1)]_{-1}^{0} = [e^0(0+1)] - [e^1(-1+1)] =$

$$= 1 - 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 1\ u^2}}.$$

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Un 50 % de los participantes en un torneo abierto de ajedrez celebrado en Salamanca son españoles, un 30 % son europeos no españoles y los demás proceden del resto del mundo. De ellos, dos tercios de los españoles, la mitad de los europeos no españoles y un tercio de los no europeos no pasan de los 40 años.

a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado (0,6 puntos)

b) Si se selecciona un participante al azar ¿Calcular la probabilidad de que no tenga más de 40 años? (0,7 puntos)

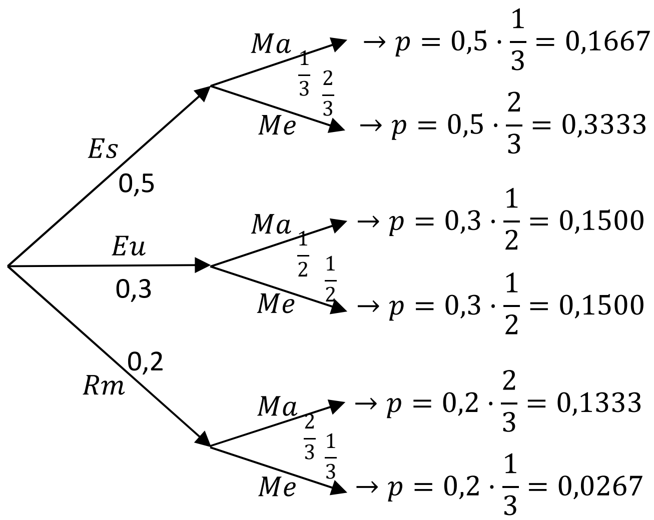
c) Si se elige al azar un participante del torneo y no tiene más de 40 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea español? (0,7 puntos)

Solución:

$$Es \to Españoles. \quad Eu \to Europeos\ no\ españoles. \quad Rm \to Resto\ mundo.$$

$$Ma \to Mayores\ de\ 40\ años. \qquad Me \to Menores\ de\ 40\ años.$$

$a)$



$a) \qquad P = P(Me) = P(Es \cap Me) + P(Eu \cap Me) + P(Rm \cap Me) =$

$= P(Es) \cdot P(Me/Es) + P(Eu) \cdot P(Me/Eu) + P(Rm) \cdot P(Me/Rm) =$

$= 0,5 \cdot \frac{2}{3} + 0,3 \cdot \frac{1}{2} + 0,2 \cdot \frac{1}{3} = 0,3333 + 0,1500 + 0,0267 = \underline{0,5500}.$

$$\boldsymbol{P(Me) = \underline{0,5500}.}$$

$b) \qquad P = P(Es/Me) = \frac{P(Es \cap Me)}{P(Me)} = \frac{P(Es) \cdot P(Me/Es)}{P(Me)} = \frac{0,5 \cdot \frac{2}{3}}{0,5500} = \frac{0,3333}{0,5500} = \underline{0,606}.$

$$\boldsymbol{P(Es/Me) = \underline{0,606}}$$

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Si lanzamos al mismo tiempo dos dados idénticos y del tipo usual (es decir, que sean cúbicos, que todas sus caras tengan la misma probabilidad de quedar hacia arriba y que en cada una de ellas aparezca un número de puntos que varíe desde el uno hasta el seis), ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones obtenidas en los dos dados coincida con la suma más frecuente? (2 puntos)

Solución:

El espacio muestral es el siguiente: $E = \begin{Bmatrix} 11, 12, 13, 14, 15, 16 \\ 21, 22, 23, 24, 25, 26 \\ 31, 32, 33, 34, 35, 36 \\ 41, 42, 43, 44, 45, 46 \\ 51, 52, 53, 54, 55, 56 \\ 61, 62, 63, 64, 65, 66 \end{Bmatrix}$.

Las sucesivas sumas que se obtienen son las siguientes:

$S = 2 \to [(11)] \to 1.$

$S = 3 \to [(12), (21)] \to 2.$

$S = 4 \to [(13), (22), (31)] \to 3.$

$S = 5 \to [(14), (23), (32), (41)] \to 4.$

$S = 6 \to [(15), (24), (33), (42), (51)] \to 5.$

$S = 7 \to [(16), (25), (34), (43), (52), (61)] \to 6.$

$S = 8 \to [(26), (35), (44), (53), (62)] \to 5.$

$S = 9 \to [(36), (45), (54), (63)] \to 4.$

$S = 10 \to [(46), (55), (64)] \to 3.$

$S = 11 \to [(56), (65)] \to 2.$

$S = 12 \to [(66)] \to 1.$

Como se observa, la suma más frecuente es 7, y el número de veces que se repite es 6. Aplicando la regla de Laplace:

$$\boldsymbol{P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{6}{36} = \underline{\frac{1}{6}}.}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El alumno deberá escoger libremente cinco problemas completos de los diez propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, solo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados. Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver, justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las propuestas, claridad y coherencia en la exposición, precisión de los cálculos y en las anotaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

E1.- (Álgebra)

a) Obtener todas las soluciones del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \end{cases}$ **(1 punto)**

b) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para que $x=5, y=-2, z=-2$ sea solución del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \\ ax+2ay+bz=b \end{cases}$.

¿Para cuáles de esos valores la solución del sistema es única? **(1 punto)**

Problema 2:

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}-\{0\}$.

a) Calcular la matriz C, siendo $c_{11}=2$, tal que $AC=B$. **(1 punto)**

b) Si $D=B^tA$ siendo B^t la traspuesta de B, determinar los valores de a para los que D tiene matriz inversa. **(1 punto)**

Problema 3:

E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, y $r_2 \equiv \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$.

a) Razonar si existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1. **(1 punto)**

b) Calcular la recta con vector director perpendicular a los de las rectas r_1 y r_2 y que contiene al punto $(1,0,0)$. **(1 punto)**

Problema 4:

E4.- (Geometría)

Sea r la recta que pasa por los puntos $(1,0,-1)$ y $(0,1,1)$,

a) Determinar el plano que contiene a la recta r y al punto $P = (0,0,1)$. **(1 punto)**

b) Calcular la distancia de la recta r al punto $P = (0,0,1)$. **(1 punto)**

Problema 5:

E5.- (Análisis)

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & si \quad x < 1 \\ \ln(x) & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad en $x = 1$. **(1 punto)**

b) Estudiar sus asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**

Problema 6:

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = x^2(x+3)$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. **(2 puntos)**

Problema 7:

E7.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^3+4x^2}$ **(1 punto)**

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x) cos^3(x)\, dx$ **(1 punto)**

Problema 8:

E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^3$.

a) Comprobar que las gráficas de dichas funciones en $[-1,0]$ sólo se cortan para $x = -1$ y $x = 0$.

Demostrar que en $[-1,0]$ $\quad g(x) \geq f(x)$ **(1 punto)**

b) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de dichas funciones. **(1 punto)**

Problema 9:

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Sean A, B y C sucesos de un experimento aleatorio con probabilidades $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ y $P(C) = 0{,}5$ tales que A y B son independientes y A y C son incompatibles. Calcular las probabilidades $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(A \cap \bar{C})$, $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ siendo $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$ los sucesos complementarios de A, B y C respectivamente. **(2 puntos)**

Problema 10:

E10.- (Probabilidad y Estadística)

De las camionetas que recogen los envases reciclados de una localidad el 45% son de la marca C1, el 30% de la marca C2 y el 25% de la marca C3. La probabilidad de que una camioneta se averíe es: 0,02 si es de la marca C1, 0,05 si es de la marca C2 y 0,04 si es de la marca C3.

a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado **(0,6 puntos)**

b) Si se selecciona una de esas camionetas al azar ¿qué probabilidad tiene de averiarse? **(0,7 puntos)**

c) Suponiendo que una de esas camionetas se ha averiado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido una camioneta de la marca C3? **(0,7 puntos)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

E1.- (Álgebra)

a) Obtener todas las soluciones del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \end{cases}$ **(1 punto)**

b) Determinar todos los $a,b \in \mathbb{R}$ para que $x=5, y=-2,\ z=-2$ sea solución del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \\ ax+2ay+bz=b \end{cases}$.

¿Para cuáles de esos valores la solución del sistema es única? **(1 punto)**

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por existir $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1\neq 0 \Rightarrow Ran\ M=Rang\ M'=2.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{\text{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para resolver el sistema se hace $z=\lambda$:

$$\left.\begin{matrix} x+y=1-\lambda \\ x+2y=3+\lambda \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} -x-y=-1+\lambda \\ x+2y=3+\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=2+2\lambda.$$

$x+2+2\lambda=1-\lambda;\ \ x=-1-3\lambda.$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x=-1-3\lambda, y=2+2\lambda, z=\lambda, \forall\lambda\in R.}}$$

$b)$ Teniendo en cuanta que las dos primeras ecuaciones constituyen el sistema del apartado anterior:

Para que $x=5, y=-2, z=-2 \Rightarrow \lambda=-2.$

Los valores $x=5, y=-2, z=-2$ son solución del sistema formado por las dos primeras ecuaciones del sistema; para que sean solución del sistema completo tienen que satisfacer a la tercera ecuación:

$a\cdot 5+2a\cdot(-2)+b\cdot(-2)=b;\ \ 5a-4a-2b=b;\ \ a=3b.$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a=3b\ el\ sistema\ tiene\ la\ solución\ x=5, y=-2, z=-2.}}$$

La solución es única, según el teorema de Rouché-Fröbenius, cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e iguales a 3, que es el número de incógnitas.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & 2a & b \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ a & 2a & b & b \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $a=3b$:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3b & 6b & b \end{vmatrix} = 2b + 6b - 3b - 6b + 6b - b = 4b = 0 \Rightarrow b = 0.$$

$Para\ b \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$

$\underline{\boldsymbol{El\ sistema\ tiene\ solución\ única\ para\ b \neq 0.}}$

Problema 2:

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

a) Calcular la matriz C, siendo $c_{11} = 2$, tal que $AC = B$. **(1 punto)**
b) Si $D = B^t A$ siendo B^t la traspuesta de B, determinar los valores de a para los que D tiene matriz inversa. **(1 punto)**

Solución:

$a)$ La dimensión de C es la siguiente:

Para que pueda efectuarse el producto de dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual que el número de filas de la segunda matriz y, la matriz producto, tiene las mismas filas de la primera y las mismas columnas de la segunda: $M_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}$.

En el caso que nos ocupa: $A_{(3,2)} \cdot C_{(x,y)} = B_{(3,2)} \Rightarrow C_{(2,2)}$.

$$A \cdot C = D \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2+y & x+z \\ ay & az \\ 2+y & x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 1;\ \ z = 0;\ \ x = -1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

$b)$ $D = B^t \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & a & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 6 & a^2+6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero:

$|D| = \begin{vmatrix} 6 & a^2+6 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -12 + 2(a^2+6) = 0;\ -6 + (a^2+6) = 0;$

$a^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ D\ tiene\ inversa\ \forall a \in R - \{0\}}}.$$

Problema 3:

E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, y $r_2 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.

a) Razonar si existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1. **(1 punto)**

b) Calcular la recta con vector director perpendicular a los de las rectas r_1 y r_2 y que contiene al punto (1,0,0). **(1 punto)**

Solución:

$a)$ Para que un plano π, perpendicular a r_2, contenga a r_1 es necesario que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares.

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores.

Un vector director de r_1 es $\overrightarrow{v_1} = (1, 2, 1)$.

Un vector director de r_2 es $\overrightarrow{v_2} = (3, 2, 2)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (1, 2, 1) \cdot (3, 2, 2) = 3 + 4 + 2 = 9 \neq 0 \Rightarrow r_1\ no\ es \perp a\ r_2.$

$$\underline{\boldsymbol{No\ existe\ ning\acute{u}n\ plano\ perpendicular\ a\ r_2\ que\ contenga\ a\ r_1}}.$$

$b)$ Un vector perpendicular a dos vectores dados es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores.

$$\overrightarrow{w'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4i + 3j + 2k - 6k - 2i - 2j = 2i + j - 4k \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (2, 1, -4)$.

La recta s pedida, dada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas, es la siguiente:

$$\underline{\boldsymbol{s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-4}}}.$$

Problema 4:

E4.- (Geometría)

Sea r la recta que pasa por los puntos $(1,0,-1)$ y $(0,1,1)$,

a) Determinar el plano que contiene a la recta r y al punto $P = (0,0,1)$. **(1 punto)**

b) Calcular la distancia de la recta r al punto $P = (0,0,1)$. **(1 punto)**

Solución:

$a)$ $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,1) - (1,0,-1)] = (-1,1,2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}.$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = [(0,0,1) - (1,0,-1)] = (-1,0,2).$$

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AP};\ P) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0;\ \ 2x - 2y + (z-1) + 2y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{\pi \equiv 2x + z - 1 = 0}}.$$

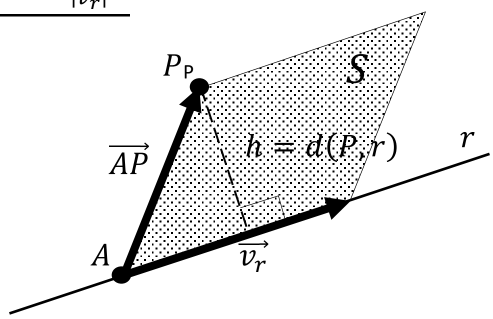
$b)$ La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.

Un punto y un vector director de r son $A(-1,0,1)$ y $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = (-1,1,2)$.

$$\left.\begin{array}{r} S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right| \\ S = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \ \Rightarrow \underline{h = d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}}.$$

$\overrightarrow{AP} = (-1,0,2)$.



Aplicando la fórmula al punto P y a la recta r:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{|2i - 2j + k + 2j|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{|2i + k|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{6} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{d(P,r) = \frac{\sqrt{30}}{6}\ u.}}$$

Problema 5:

E5.- (Análisis)

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & si \quad x < 1 \\ \ln(x) & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad en $x = 1$. **(1 punto)**

b) Estudiar sus asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**

Solución:

$a)$ Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{2-x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} Lx = 0 = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ no\ es\ ni\ continua\ ni\ derivable\ en\ x = 1.}}$$

$b)$ Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{2-x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ (-\infty, 1)}.$$

$k = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} Lx = \infty \Rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales en $(1, +\infty)$.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito; en las funciones racionales son los valores que anulan el denominador.

En $(-\infty, 1) \Rightarrow 2 - x = 0;\ \ x = 2 \notin (-\infty, 1) \Rightarrow$ No tiene asíntotas verticales en el intervalo $(-\infty, 1)$.

En $(1, +\infty) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} Lx = 0 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{No\ tiene\ as\acute{\imath}ntotas\ verticales}}.$$

Problema 6:

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = x^2(x+3)$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

(2 puntos)

Solución:

$f(x) = x^2(x+3) = x^3 + 3x^2$.

Por tratarse de una función polinómica: $\underline{D(f) \Rightarrow R}$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0,0)} \\ x_2 = -3 \rightarrow \underline{A(-3,0)} \end{cases}.$$

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,0)}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0;\ \ 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función, que es R, en los intervalos $(-\infty,-2), (-2,0)\ y\ (0,+\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0,+\infty)$ es:

$f'(1) = 3 + 6 > 0 \Rightarrow Creciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes: $f'(x) < 0 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: \boldsymbol{x \in (-2, 0)}}.$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: \boldsymbol{x \in (-\infty,-2) \cup (0,+\infty)}}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

De los periodos de crecimiento se deducen las abscisas de los máximos y mínimos relativos; no obstante, se procede a su cálculo por derivadas.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = 6x + 6.$

$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow Mín.relativo\ para\ x = 0. \qquad f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Mín: O(0,0)}.$

$f''(-2) = -12 + 6 = -6 < 0 \Rightarrow Máx.relativo\ para\ x = -2.\ \ f(-2) = 0 \Rightarrow \underline{Máx: A(-2,0)}.$

$$\underline{\boldsymbol{Mín: O(0,0)}};\ \underline{\boldsymbol{Máx: A(-2,0)}}.$$

Problema 7:

E7.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^3+4x^2}$ **(1 punto)**

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\,(x) cos^3(x)\, dx$ **(1 punto)**

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,(x^2)}{x^3+4x^2} = \frac{sen\,0}{0^3+4\cdot 0^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot cos\,(x^2)}{3x^2+8x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot cos\,(x^2)}{3x+8} = \frac{2\cdot cos\,0}{3\cdot 0+8} = \frac{2\cdot 1}{0+8} = \frac{2}{8} \Rightarrow$$

$$\underline{\lim_{x\to 0} \frac{sen\,(x^2)}{x^3+4x^2} = \frac{1}{4}}.$$

b)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\cdot cos^3\,x\cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \cos x = t \\ sen\,x\cdot dx = -dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = \frac{\pi}{2} \to t = 0 \\ x = 0 \to t = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = -\int_1^0 t^3\cdot dt = \int_0^1 t^3\cdot dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4} - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\cdot cos^3\,x\cdot dx = \frac{1}{4}}.$$

Problema 8:

E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^3$.

a) Comprobar que las gráficas de dichas funciones en $[-1,0]$ sólo se cortan para $x = -1$ y $x = 0$.

Demostrar que en $[-1,0]$ $\quad g(x) \geq f(x)$ **(1 punto)**

b) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de dichas funciones. **(1 punto)**

Solución:

$a)$ Las abscisas de los puntos de corte de dos funciones son las raíces reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 = x^3;\; x^3 + x^2 = 0;\; x^2(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x_1 = 0, x_2 = -1.}$$

Por ser ambas funciones continuas por ser polinómicas, no existen otras raíces reales en $[-1, 0]$.

Para determinar cual de las funciones es mayor en $[-1, 0]$ basta comprobar sus valores para un valor perteneciente a $[-1, 0]$, por ejemplo: $x = -\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} = -0{,}25 \\ g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} = -0{,}125 \end{array}\right\} \Rightarrow -0{,}125 > -0{,}25 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{g(x) \geq f(x).}}$$

$b)$ $$S = \int_{-1}^{0} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-1}^{0} (x^3 + x^2) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} =$$

$$= 0 - \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3}\right] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{-3+4}{12} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{1}{12}\, u^2.}}$$

Problema 9:

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Sean A, B y C sucesos de un experimento aleatorio con probabilidades $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ y $P(C) = 0{,}5$ tales que A y B son independientes y A y C son incompatibles. Calcular las probabilidades $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(A \cap \bar{C})$, $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ siendo $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$ los sucesos complementarios de A, B y C respectivamente. **(2 puntos)**

Solución:

Si los sucesos A y B son independientes:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = \underline{0{,}12}$.

Si los sucesos A y C son incompatibles: $P(A \cap C) = \underline{0}$.

$P\left(A \cap \overline{C}\right) = P(A) = \underline{0{,}3}$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}12 = \underline{0{,}58}$.

$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}12 = \underline{0{,}88}$.

Problema 10:

E10.- (Probabilidad y Estadística)

De las camionetas que recogen los envases reciclados de una localidad el 45% son de la marca C1, el 30% de la marca C2 y el 25% de la marca C3. La probabilidad de que una camioneta se averíe es: 0,02 si es de la marca C1, 0,05 si es de la marca C2 y 0,04 si es de la marca C3.

a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado **(0,6 puntos)**

b) Si se selecciona una de esas camionetas al azar ¿qué probabilidad tiene de averiarse? **(0,7 puntos)**

c) Suponiendo que una de esas camionetas se ha averiado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido una camioneta de la marca C3? **(0,7 puntos)**

Solución:

$a)$ $P(C1) = \underline{0{,}45}$. $P(C2) = \underline{0{,}30}$. $P(C3) = \underline{0{,}25}$.

$P(A/C1) = \underline{0{,}02}$. $P(A/C2) = \underline{0{,}05}$. $P(A/C3) = \underline{0{,}04}$.

$b)$ $P = P(A) = P(A \cap C1) + P(A \cap C2) + P(A \cap C3) =$

$= P(C1) \cdot P(A/C1) + P(C2) \cdot P(A/C2) + P(C3) \cdot P(A/C3) =$

$= 0{,}45 \cdot 0{,}02 + 0{,}30 \cdot 0{,}05 + 0{,}25 \cdot 0{,}04 = 0{,}0090 + 0{,}0150 + 0{,}0100 = \underline{0{,}0340}$.

$$\boldsymbol{P(Averiarse) = \underline{0,0340}.}$$

$c)$

$$P = P(C3/A) = \frac{P(A \cap C3)}{P(A)} = \frac{P(C3) \cdot P(A/C3)}{P(A)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}04}{0{,}0340} = \frac{0{,}0100}{0{,}0340} = \underline{0{,}2941}.$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

CATALUÑA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Generalitat de Catalunya

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Responde a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

1. Calculeu els coeficients a, b, c i d de la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si sabem que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'inflexió $(1, 0)$ és $y = -3x + 3$ i que la funció té un extrem relatiu en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 0$.
[2,5 punts]

2. Considereu les dues matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculeu les matrius $A \cdot B$ i $B \cdot A$.
[1,5 punts]

b) Siguin C i D dues matrius quadrades del mateix ordre que satisfan $C \cdot D = C$ i $D \cdot C = D$. Comproveu que les dues matrius, C i D, són idempotents.
[1 punt]

NOTA: Una matriu quadrada s'anomena *idempotent* si coincideix amb el seu quadrat.

3. Sigui $f'(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ la funció derivada d'una funció derivable $f(x)$ que passa pel punt $A = (0, 3)$.

a) Calculeu la funció $f(x)$.
[1,5 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $f'(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.
[1 punt]

4. Sigui el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real λ:

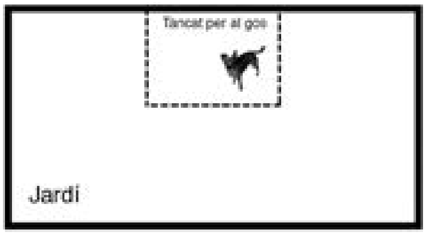
$$\begin{cases} x + 2\lambda y + (2+\lambda)z = 0 \\ (2+\lambda)x + y + 2\lambda z = 3 \\ 2\lambda x + (2+\lambda)y + z = -3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre λ.
[1,25 punts]

b) Per al cas $\lambda = -1$, resoleu el sistema, interpreteu-lo geomètricament i identifiqueu-ne la solució.
[1,25 punts]

5. La Núria té un jardí rectangular i vol fer-hi un tancat (rectangular o quadrat) de $8\ \text{m}^2$ per al seu gos. Ha pensat de posar el tancat tocant al mur del jardí, tal com es mostra a la figura de la dreta, per estalviar-se així un dels quatre costats.

El preu de la tanca que vol fer servir és de 2,5 €/m.



a) Quines dimensions ha de tenir el tancat perquè el cost sigui mínim? Quin és aquest cost mínim?
[1,75 punts]

b) Si manteniu la forma rectangular o quadrada del tancat i feu que un dels vèrtexs del jardí coincideixi amb un vèrtex del tancat, quants euros us podeu estalviar? Raoneu com posaríeu el tancat i justifiqueu amb càlculs matemàtics les dimensions de la vostra proposta.
[0,75 punts]

6. Siguin els plans π_1 i π_2, determinats respectivament per les equacions $\pi_1: x + y = 3$ i $\pi_2: x - z = -2$.

a) Trobeu l'equació general ($Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π_3, que és perpendicular a π_1 i π_2, i que passa pel punt $P = (4, 1, 2)$.
[0,75 punts]

b) Sigui r la recta d'intersecció de π_1 i π_2. Calculeu l'equació vectorial de la recta r.
[0,75 punts]

c) Calculeu el punt Q de la recta r que és més a prop del punt P.
[1 punt]

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

1. Calculeu els coeficients a, b, c i d de la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si sabem que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'inflexió $(1, 0)$ és $y = -3x + 3$ i que la funció té un extrem relatiu en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 0$.
[2,5 punts]

Resolució:

Si calculem les funcions derivades successives tenim:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$

Si anem traduint en termes de f i f' les condicions de l'enunciat obtenim:

* f passa per (1,0) → $f(1) = 0$ → a + b + c + d = 0 (equació 1)

* (1,0) és un punt d'inflexió → $f''(1) = 0$ → $6a + 2b = 0$ (equació 2)

* El pendent de la tangent en $x = 1$ és igual a –3 → $f'(1) = -3$ →
$3a + 2b + c = -3$ (equació 3)

* f té un extrem en $x = 0$ → $f'(0) = 0$ → c = 0 (equació 4)

Resolent el sistema format per les equacions (1), (2), (3) i (4), obtenim la solució al problema $\boxed{a = 1, b = -3, c = 0, d = 2}$.

Pautes de correcció:

0,5 punts per la traducció de cadascuna de les quatre condicions.

0,5 punts per la resolució final del sistema.

2. Considereu les dues matrius següents:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculeu les matrius $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.
[1,5 punts]

b) Siguin $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{D}$ dues matrius quadrades del mateix ordre que satisfan $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$. Comproveu que les dues matrius, $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{D}$, són idempotents.
[1 punt]

NOTA: Una matriu quadrada s'anomena *idempotent* si coincideix amb el seu quadrat.

Resolució:

a)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}=A$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=B$$

Observació: la resolució es donarà per bona encara que no apareguin els càlculs intermedis.

b) Sabem que $(*)\ C\cdot D=C$ i $(**)\ D\cdot C=D$

$$C^2=C\cdot C\underset{(*)}{=}(C\cdot D)\cdot C=C\cdot(D\cdot C)\underset{(**)}{=}C\cdot D\underset{(*)}{=}C$$

$$D^2=D\cdot D\underset{(**)}{=}(D\cdot C)\cdot D=D\cdot(C\cdot D)\underset{(*)}{=}D\cdot C\underset{(**)}{=}D$$

I, per tant, efectivament les dues matrius C i D són idempotents.

Pautes de correcció:

a) 0,75 punts pel càlcul del producte A·B.

0,75 punts pel càlcul del producte B·A.

b) 0,5 punts per la comprovació que la matriu C és idempotent.

0,5 punts per la comprovació que la matriu D és idempotent.

3. Sigui $f'(x)=\begin{cases} x-1, & \text{si } x\le 2 \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x>2 \end{cases}$ la funció derivada d'una funció derivable $f(x)$ que passa pel punt $A=(0,3)$.

a) Calculeu la funció $f(x)$.

[1,5 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $f'(x)$ en el punt d'abscissa $x=3$.

[1 punt]

Resolució:

a) Integrant $f(x)=\begin{cases} \int (x-1)dx & \text{si } x<2 \\ \int \frac{1}{x-1}dx & \text{si } x>2 \end{cases} \rightarrow f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-x+k & \text{si } x<2 \\ \ln|x-1|+k' & \text{si } x>2 \end{cases}$

Trobem els valors de les constants k i k':

- $f(x)$ passa pel punt $A=(0,3)$, per tant, $\frac{1}{2}0^2-0+k=3 \rightarrow k=3$.
- Com que $f(x)$ és derivable, llavors és contínua, així que ho és en el punt d'abscissa 2 i, per tant, els límits laterals de la funció $f(x)$ en 2 han de coincidir:

$$\frac{1}{2}2^2-2+3=\ln|2-1|+k'$$

$$k'=3.$$

Per tant, la funció $f(x)$ serà $\boxed{f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-x+3 & si\ x\le 2 \\ \ln|x-1|+3 & si\ x>2 \end{cases}}$

Observació: es puntuarà per igual l'expressió $\ln|x-1|$ que l'expressió $\ln(x-1)$.

Apliquem l'equació de la recta tangent a una funció $g(x)$ en el punt d'abscissa a:

$$y-g(a)=g'(a)\cdot(x-a)$$

Ara la funció és f' és $g(x)=\begin{cases} x-1 & si\ x\le 2 \\ \frac{1}{x-1} & si\ x>2 \end{cases}$ i $a=3$.

Cal trobar $g'(x)$, $g'(3)$ i $g(3)$:

$$g'(x)=f''(x)=\begin{cases} 1 & si\ x<2 \\ \dfrac{-1}{(x-1)^2} & si\ x>2 \end{cases}, \quad g'(3)=-\frac{1}{4}, \quad g(3)=\frac{1}{2}$$

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\cdot(x-3) \quad \rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}}$$

4. Sigui el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real λ:

$$\begin{cases} x+2\lambda y+(2+\lambda)z=0 \\ (2+\lambda)x+y+2\lambda z=3 \\ 2\lambda x+(2+\lambda)y+z=-3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre λ.
[1,25 punts]

b) Per al cas $\lambda=-1$, resoleu el sistema, interpreteu-lo geomètricament i identifiqueu-ne la solució.
[1,25 punts]

Resolució:

a) Estudi del sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre λ.

$$M|\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda & 3 \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Calculem el determinant de la matriu del sistema i estudiem per a quins valors el determinant s'anul·la.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{vmatrix}=9\lambda^3+9=9(\lambda^3+1)$$

Quan resolem l'equació $9(\lambda^3+1)=0$, obtenim $\lambda^3=-1$ i d'aquí $\lambda=-1$.

Per tant, tenim dos casos a discutir.

CAS I: $\lambda\neq-1$

Com que $|M|\neq0$, aleshores $Rang\ M=3=Rang\ \overline{M}=\text{Nombre d'incògnites}$.

En virtut del teorema de Rouché-Frobenius, es tracta d'un sistema compatible determinat (SCD) i, per tant, el sistema té una única solució.

CAS II: $\lambda=-1$

$$M|\overline{M}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Com que $|M|=0$, aleshores $Rang\ M<3$, però en tenir $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1+3=3\neq0$, aleshores $Rang\ M=2$.

D'altra banda, si orlem l'anterior menor, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-3+12-3-6=0$, per tant, $Rang\ \overline{M}=2$.

Aleshores, com que $Rang\ M=2=Rang\ \overline{M}<\text{Nombre d'incògnites}=3$, es tracta d'un sistema compatible indeterminat (SCI) amb 1 (3-2) grau de llibertat.

Observació: de forma alternativa, el primer determinant es podria haver calculat utilitzant les propietats dels determinants.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{vmatrix} \underset{(*)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 3+3\lambda & 3+3\lambda & 3+3\lambda \end{vmatrix} = (3+3\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1+\lambda)(3\lambda^2 - 3\lambda + 3) = 9(1+\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

$(*)\ \textit{Sumant a la tercera fila les dues primeres files.}$

b)

Estudiem el cas $\lambda = -1$.

Sabem que es tracta d'un SCI amb un grau de llibertat i el menor d'ordre 2 no nul indica les equacions i les incògnites que ens hem de quedar:

$$\begin{cases} x - 2y = -z \\ x + y = 3 + 2z \end{cases}$$

Ara podem resoldre aplicant el mètode de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -2 \\ 3+2z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3z+6}{3} = z + 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & 3+2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3+3z}{3} = z + 1$$

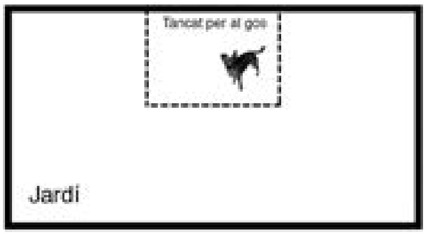
Solució: $\boxed{(x = z+2\ ,\ \ y = z+1,\ \ z \text{ paràmetre})}$

Interpretació geomètrica: cadascuna de les equacions és un pla a $\mathbb{R}^3$. El fet que la solució tingui un grau de llibertat ens indica que aquests tres plans es tallen en una recta, que és la formada per punts de la forma $(z+2, z+1, z)$.

Com que $(z+2, z+1, z) = (2,1,0) + z(1,1,1)$, la recta intersecció és la que passa pel punt $(2,1,0)$ i té vector director $(1,1,1)$.

5. La Núria té un jardí rectangular i vol fer-hi un tancat (rectangular o quadrat) de 8 m² per al seu gos. Ha pensat de posar el tancat tocant al mur del jardí, tal com es mostra a la figura de la dreta, per estalviar-se així un dels quatre costats.

El preu de la tanca que vol fer servir és de 2,5 €/m.



a) Quines dimensions ha de tenir el tancat perquè el cost sigui mínim? Quin és aquest cost mínim?
[1,75 punts]

b) Si manteniu la forma rectangular o quadrada del tancat i feu que un dels vèrtexs del jardí coincideixi amb un vèrtex del tancat, quants euros us podeu estalviar? Raoneu com posaríeu el tancat i justifiqueu amb càlculs matemàtics les dimensions de la vostra proposta.
[0,75 punts]

Resolució:

a) El tancat té forma de rectangle. Anomenem x a la base del rectangle i y a l'altura. Sabem que l'àrea del tancat és $8\ m^2$, per tant, podem escriure:

$$x \cdot y = 8$$

Aïllant tenim que $y = \frac{8}{x}$.

El cost del tancat és $C(x,y) = 2{,}5 \cdot (2y + x)$. Substituint obtenim:

$$C(x) = 2{,}5 \cdot \left(2\frac{8}{x} + x\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{16 + x^2}{x}\right)$$

Per calcular el cost mínim, calcularem els extrems relatius de la funció $C(x)$, a partir de la primera derivada i igualant-la a 0:

$$C'(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x - (16 + x^2) \cdot 1}{x^2}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 16}{x^2}\right)$$

$$2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 16}{x^2}\right) = 0$$

$$x = \pm 4$$

Pel context del problema, només té sentit la solució positiva. Per comprovar si en $x = 4$ hi ha un mínim, calculem la segona derivada i observem el signe:

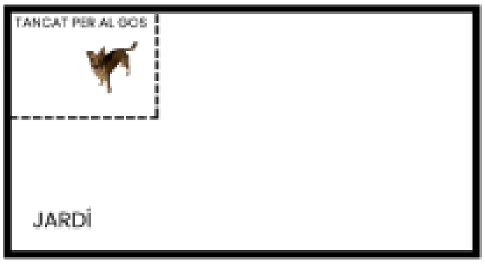
$$C''(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 16) \cdot 2x}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x^3 - (2x^3 - 32x)}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \frac{32}{x^3}.$$

Com que $C''(4) > 0$, en $x = 4$ hi ha un mínim.

Per tant, les dimensions del tancat seran de $\boxed{4\ m \text{ de base i } 2\ m \text{ d'altura}}$.

El cost serà: $C(4) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{16+4^2}{4}\right) = \boxed{20€}$

b) Per estalviar amb la tanca, podem posar el tancat a una cantonada del jardí:



Ara podem reproduir els càlculs fets a l'apartat a, amb la nova situació.

En aquest cas, el cost del tancat és $C(x,y) = 2{,}5 \cdot (y + x)$. Com que $y = \frac{8}{x}$:

$$C(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{8}{x} + x\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{8 + x^2}{x}\right)$$

Calculant la primera derivada i igualant-la a 0:

$$C'(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x - (8 + x^2) \cdot 1}{x^2}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 8}{x^2}\right)$$

$$2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 8}{x^2}\right) = 0$$

$$x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$$

Anàlogament, l'única solució que té sentit és la positiva. Per comprovar si en $x = 2\sqrt{2}$ hi ha un mínim, calculem la segona derivada i observem que el seu signe és positiu:

$$C''(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 8) \cdot 2x}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x^3 - (2x^3 - 16x)}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \frac{16}{x^3}$$

Com que $C''(2\sqrt{2}) > 0$, en $\boxed{x = 2\sqrt{2}}$ hi ha un mínim.

L'altura del tancat serà $\boxed{y = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}}$.

Per tant, el tancat tindrà forma quadrada de costat $2\sqrt{2} \approx 2{,}83\ m$.

En aquest cas el preu mínim serà

$$C(2\sqrt{2}) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{8 + (2\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}\right) = 2{,}5 \cdot \frac{16}{\sqrt{8}} = 2{,}5 \cdot 2\sqrt{8} = 14{,}14€$$

Per tant, tindríem un estalvi de 20 –14,14 = $\boxed{5{,}86\ €}$

6. Siguin els plans π_1 i π_2, determinats respectivament per les equacions $\pi_1: x+y=3$ i $\pi_2: x-z=-2$.

a) Trobeu l'equació general $(Ax+By+Cz+D=0)$ del pla π_3, que és perpendicular a π_1 i π_2, i que passa pel punt $P=(4,1,2)$.
[0,75 punts]

b) Sigui r la recta d'intersecció de π_1 i π_2. Calculeu l'equació vectorial de la recta r.
[0,75 punts]

c) Calculeu el punt Q de la recta r que és més a prop del punt P.
[1 punt]

Resolució:

a) Com que el pla buscat és perpendicular a π_1 i π_2, els seus vectors directors seran els vectors normals de π_1 i π_2: $\overrightarrow{v_1}=(1,1,0)$ i $\overrightarrow{v_2}=(1,0,-1)$.

Trobem l'equació general del pla amb vectors directors $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ i que passa pel punt $P=(4,1,2)$, en què $X(x,y,z)$ és un punt genèric del pla:

$$\begin{vmatrix} x-4 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \boxed{x-y+z-5=0}$$

b) Busquem la solució del sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ x-z=-2 \end{cases}$. Aïllant obtenim:

$\begin{matrix} y=3-x \\ z=2+x \end{matrix} \rightarrow Si\ x=\lambda$, tenim: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$

La recta buscada en forma vectorial és:

$$\boxed{r:(x,y,z)=(0,3,2)+\lambda\cdot(1,-1,1), \lambda\in\mathbb{R}}$$

c)

Trobem l'equació del pla perpendicular a la recta r i que passa pel punt P. Aquest és el pla que ens han demanat en l'apartat a: $x-y+z-5=0$.

En cas que no ens adonem que ja tenim el pla d'un apartat anterior, aquest pla tindrà com a vector normal el vector director de la recta. Per tant, serà de la forma:

$x-y+z+D=0$.

Imposem que P estigui contingut en el pla: $4-1+2+D=0 \rightarrow D=-5$.

Ara hem de calcular el punt de tall de la recta L i el pla:

$\begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$ i $x-y+z=5 \rightarrow \lambda-(3-\lambda)+(2+\lambda)=5 \rightarrow \lambda=2$

Substituint $\lambda=2$ en les equacions paramètriques de la recta obtenim el punt : $\boxed{Q=(2,1,4)}$.

De forma alternativa:

El punt Q és la projecció ortogonal del punt P sobre la recta r, ja que és el punt que està a menor distància de P.

Sigui Q un punt genèric de la recta r: $Q = (\lambda, 3-\lambda, 2+\lambda)$ i $\vec{v} = (1,-1,1)$ el vector director de L.

Per la condició d'ortogonalitat tenim que $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$:

$$(-4+\lambda, 2-\lambda, \lambda) \cdot (1,-1,1) = 0 \rightarrow -4+\lambda- \ 2+\lambda+\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

Substituint $\lambda = 2$ al punt genèric Q obtenim les coordenades del punt: $\boxed{Q = (2,1,4)}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pels vectors directors.

0,25 punts per indicar com trobar el pla.

0,25 punts pel càlcul de l'equació.

b) 0,25 punts per formular la resolució del sistema.

0,5 punts per trobar l'equació.

c) 0,25 punts per indicar que el punt buscat és la projecció ortogonal.

0,25 punts pel punt genèric / per plantejar el sistema entre el pla i la recta.

0,25 punts pel producte escalar / per resoldre el sistema.

0,25 punts per trobar el punt.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Responde a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Siguin $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ i la matriu identitat d'ordre dos $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^2=3\boldsymbol{I}$.
[0,5 punts]

b) Utilitzant la igualtat de l'apartat anterior, trobeu la matriu inversa de la matriu $\boldsymbol{A}$ en funció de les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{I}$, i comproveu que coincideix amb la matriu $\boldsymbol{B}$.
[1,25 punts]

c) Calculeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que satisfà la igualtat $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.
[0,75 punts]

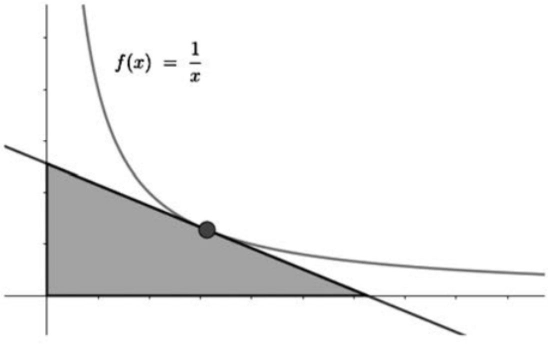
Problema 2:

2. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x=2$.
[0,75 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x=k$, en què k és un nombre real positiu.
[0,75 punts]

c) Comproveu que, tal com es pot veure en la figura de sota, la recta de l'apartat b determina un triangle d'àrea constant amb els semieixos positius de coordenades. Calculeu aquesta àrea.
[1 punt]



Problema 3:

3. Sigui el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} 2x+y=1+z \\ my+z=2-x \\ mz+3=3x+y \end{cases}$, en què m és un nombre real.

a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre m.
[1,25 punts]

b) Resoleu el sistema, si té solució, per al cas $m=1$.
[1,25 punts]

Problema 4:

4. Sigui la funció $f(x)$ definida per $f(x)=-3x+e^{2x^3-1}$.

a) Justifiqueu que $f(x)=2$ té una solució en l'interval $(-1,0)$.
[1,25 punts]

b) Sigui la funció $h(x)=-3x^2+e^{2x^3-1}$. Calculeu l'àrea de la regió compresa entre les gràfiques de les funcions $f(x)$ i $h(x)$.
[1,25 punts]

Problema 5:

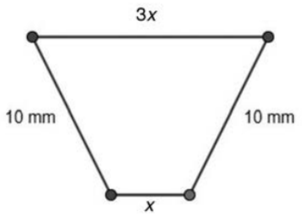
5. Siguin r_1 i r_2 les rectes definides per r_1: $x-1=y=-z$ i per r_2: $x=y=z$, respectivament.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que talla perpendicularment les rectes r_1 i r_2.
[1,75 punts]

b) Calculeu la distància entre r_1 i r_2.
[0,75 punts]

Problema 6:

6. Volem construir una peça metàl·lica que tingui per secció un trapezi isòsceles amb la base superior tres vegades més llarga que la base inferior. Els altres costats del trapezi fan 10 mm, tal com podeu observar en la figura següent:



a) Expresseu l'altura del trapezi en funció de la longitud x de la base inferior.
[0,5 punts]

b) Calculeu la longitud de la base inferior del trapezi de manera que l'àrea de la peça sigui màxima i trobeu el valor d'aquesta àrea màxima.
[2 punts]

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Siguin $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$ i la matriu identitat d'ordre dos $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

a) Comproveu que $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^2=3\boldsymbol{I}$.
[0,5 punts]

b) Utilitzant la igualtat de l'apartat anterior, trobeu la matriu inversa de la matriu $\boldsymbol{A}$ en funció de les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{I}$, i comproveu que coincideix amb la matriu $\boldsymbol{B}$.
[1,25 punts]

c) Calculeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que satisfà la igualtat $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.
[0,75 punts]

1. Resolució:

a) $(A-2I)^2=\left[\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=3I$

b) $(A-2I)^2=3I \leftrightarrow A^2-4A+4I=3I \leftrightarrow A^2-4A=-I \leftrightarrow 4A-A^2=I$ i traient factor comú d'A: $(4I-A)\cdot A=I \leftrightarrow \boxed{A^{-1}=4I-A}$

$$\boldsymbol{A^{-1}}=4I-A=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

c) De $A\cdot X=B$, aïllant la matriu, multiplicant per la inversa d'A per l'esquerra:

$A^{-1}\cdot(AX)=A^{-1}\cdot B$, com $A^{-1}=B$, $(A^{-1}\cdot A)X=B\cdot B \leftrightarrow \boxed{X=B^2}$

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}7&-4\\-12&7\end{pmatrix}}$$

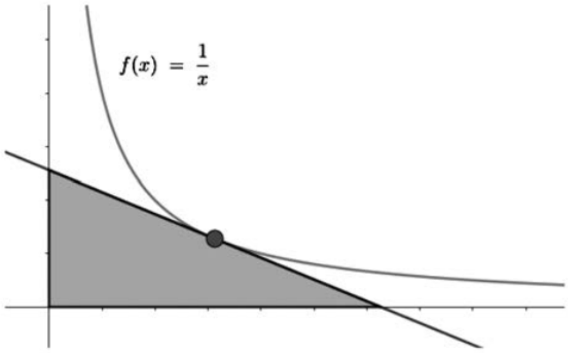
Problema 2:

2. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 2$.
[0,75 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = k$, en què k és un nombre real positiu.
[0,75 punts]

c) Comproveu que, tal com es pot veure en la figura de sota, la recta de l'apartat b determina un triangle d'àrea constant amb els semieixos positius de coordenades. Calculeu aquesta àrea.
[1 punt]



2. Resolució:

a) $f(x) = {}^{1}/_{x}$ $\qquad f'(x) = {}^{-1}/_{x^2}$,

Punt per on passa la recta, $(2, f(2)) = (2\,, {}^{1}/_{2})$

Pendent de la recta $= f'(2) = {}^{-1}/_{4}$

$y - \frac{1}{2} = \left(\frac{-1}{4}\right) \cdot (x-2) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Per tant, la recta tangent és $\boxed{y = \frac{-1}{4}x + 1}$

b) $f(x) = {}^{1}/_{x}$ $\qquad f'(x) = {}^{-1}/_{x^2}$

Punt per on passa la recta, $(k, f(k)) = (k\,, {}^{1}/_{k})$

Pendent de la recta $= f'(k) = {}^{-1}/_{k^2}$

$y - \frac{1}{k} = \left(\frac{-1}{k^2}\right) \cdot (x-k) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2}$

Per tant, la recta tangent és $\boxed{y = \frac{-1}{k^2}x + \frac{2}{k}}$.

c) Calculem el punt de tall de la recta tangent $y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2}$ amb l'eix d'abscisses:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{Tall amb l'eix d'abscisses} = (2k\ ,\ 0)$$

Punt de tall de la recta tangent $y = \frac{-x}{k^2} + \frac{2}{k}$ amb l'eix d'ordenades:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \text{Tall amb l'eix d'ordenades} = \left(0\ ,\ \frac{2}{k}\right)$$

$$\grave{A}rea\ del\ triangle = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot \frac{2}{k} = 2\ u^2$$

El triangle té àrea constant igual a 2 unitats de superfície, per a qualsevol valor del paràmetre k.

Problema 3:

3. Sigui el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} 2x+y=1+z \\ my+z=2-x \\ mz+3=3x+y \end{cases}$, en què m és un nombre real.

a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre m.
[1,25 punts]

b) Resoleu el sistema, si té solució, per al cas $m=1$.
[1,25 punts]

3. Resolució:

a) El sistema en la forma normal és $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+my+z=2 \\ 3x+y-mz=3 \end{cases}$. Calculem el determinant de la matriu dels coeficients:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{vmatrix} = (-2m^2-1+3)-(-3m-m+2) = -2m^2+4m = \boldsymbol{2m(2-m)}$$

$|A|=0 \;\rightarrow\; m=0$ i $m=2$, són els valors a tenir en compte en la discussió.

Tenim tres casos a discutir:

- Si $\boldsymbol{m \neq 0}$ **i** $\boldsymbol{m \neq 2}$, com el $rang(A)=3\;[|A|\neq 0] \;=rang(A^*)=$ nombre d'incògnites, tenim un **SCD** (Sistema Compatible Determinat). **Solució única.**

- Si $\boldsymbol{m=0}$, per Gauss obtenim:

$$A^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \vdots 1 \\ 1 & 0 & 1 \vdots 2 \\ 3 & 1 & 0 \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \vdots 2 \\ 2 & 1 & -1 \vdots 1 \\ 3 & 1 & 0 \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ 2f_1-f_2 \\ 3f_1-f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \vdots 2 \\ 0 & -1 & 3 \vdots 3 \\ 0 & -1 & 3 \vdots 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ f_3-f_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \vdots 2 \\ 0 & -1 & 3 \vdots 3 \\ 0 & 0 & 0 \vdots 0 \end{pmatrix}$$

$rang(A)=2\; =rang(A^*)<3=$ nombre d'incògnites.

Per tant, es tracta d'un SCI (Sistema Compatible Indeterminat) amb $(3-2=1)$ un grau de llibertat. Infinites solucions que depenen d'un paràmetre.

- Si $\boldsymbol{m=2}$, per Gauss obtenim:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \vdots 1 \\ 1 & 2 & 1 \vdots 2 \\ 3 & 1 & -2 \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \vdots 2 \\ 2 & 1 & -1 \vdots 1 \\ 3 & 1 & -2 \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ 2f_1-f_2 \\ 3f_1-f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \vdots 2 \\ 0 & 3 & 3 \vdots 3 \\ 0 & 5 & 5 \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ f_3/3 \\ 3f_3-5f_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \vdots\; 2 \\ 0 & 1 & 1 \vdots\; 1 \\ 0 & 0 & 0 \vdots -6 \end{pmatrix}$$

$rang(A)=2\; \neq rang(A^*)=3 \Rightarrow$ SI (Sistema Incompatible). No hi ha solució.

b) Si $\boldsymbol{m} = \mathbf{1}$, quan substituïm en el sistema obtenim:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & \vdots 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots 2 \\ 3 & 1 & -1 & \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} f_2 \\ f_1 \\ f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots 2 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots 1 \\ 3 & 1 & -1 & \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ 2f_1 - f_2 \\ 3f_1 - f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots 2 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots 3 \\ 0 & 2 & 4 & \vdots 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ \\ f_3 - 2f_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots 2 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots 3 \\ 0 & 0 & -2 & \vdots -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 3 \\ 2z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} = 2 \\ y + 3 \cdot \dfrac{3}{2} = 3 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = -3/2 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases}}$$

Problema 4:

4. Sigui la funció $f(x)$ definida per $f(x) = -3x + e^{2x^3-1}$.

a) Justifiqueu que $f(x) = 2$ té una solució en l'interval $(-1, 0)$.

[1,25 punts]

b) Sigui la funció $h(x) = -3x^2 + e^{2x^3-1}$. Calculeu l'àrea de la regió compresa entre les gràfiques de les funcions $f(x)$ i $h(x)$.

[1,25 punts]

4. Resolució:

a) Que l'equació $f(x) = 2$ tingui alguna solució és equivalent que la funció $g(x) = f(x) - 2$ tingui algun zero.

La funció $g(x)$ és una funció contínua a l'interval $[-1, 0]$, ja que és suma de dues funcions contínues (una funció polinòmica -exactament una funció lineal- i una funció exponencial).

D'altra banda podem comprovar que

$g(-1) \cdot g(0) = (3 + e^{-3} - 2)(0 + e^{-1} - 2) = (1 + e^{-3})(e^{-1} - 2) < 0$,

per tant podem aplicar el teorema de Bolzano i afirmar que la funció té un zero a l'interval $(-1, 0)$.

b) Calculem els punts de tall entre les dues funcions:

$$f(x) = h(x)$$

$$-3x + e^{2x^3-1} = -3x^2 + e^{2x^3-1}$$

$$-3x = -3x^2$$

$$-3x + 3x^2 = 3x(x - 1) = 0$$

Hi ha, per tant, dues solucions: $x = 0$ i $x = 1$.

$$A = \left|\int_0^1 (h(x) - f(x))\ dx\right| = \left|\int_0^1 ((-3x^2 + e^{2x^3-1}) - (-3x + e^{2x^3-1}))\ dx\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 (-3x^2 + 3x)\ dx\right| = \left|\left[-x^3 + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1\right| = \boxed{\frac{1}{2}u^2}.$$

Observació: També es pot comprovar que la funció $h(x)$ està per sobre de la funció $f(x)$ a l'interval $(0, 1)$ i calcular directament l'àrea amb $A = \int_0^1 (h(x) - f(x))\,dx$.

Problema 5:

5. Siguin r_1 i r_2 les rectes definides per $r_1: x-1=y=-z$ i per $r_2: x=y=z$, respectivament.

a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que talla perpendicularment les rectes r_1 i r_2.
[1,75 punts]

b) Calculeu la distància entre r_1 i r_2.
[0,75 punts]

5. Resolució:

a) A partir de les equacions contínues de l'enunciat podem escriure les rectes r_1 i r_2 en forma vectorial i paramètrica:

$$r_1: (x,y,z) = (1,0,0) + \lambda\,(1,1,-1) = (1+\lambda, \lambda, -\lambda)$$
$$r_2: (x,y,z) = (0,0,0) + \mu\,(1,1,1) = (\mu,\mu,\mu)$$

Un vector qualsevol $\overrightarrow{A_1A_2}$ format en prendre $A_1 \in r_1$, $A_2 \in r_2$ vindrà expressat en termes de $\overrightarrow{A_1A_2} = (\mu-\lambda-1,\ \mu-\lambda,\ \mu+\lambda)$ amb $\mu,\lambda \in \mathbb{R}$.

La recta que passi per A_1 i A_2 tallarà r_1 i r_2 perpendicularment si el vector $\overrightarrow{A_1A_2}$ és perperndicular als vectors directors de cada recta, és a dir si es compleixen les condicions següents:

$$\overrightarrow{A_1A_2} \perp (1,1,-1) \rightarrow (\mu-\lambda-1, \mu-\lambda, \mu+\lambda)\cdot(1,1,-1) = 0$$
$$\overrightarrow{A_1A_2} \perp (1,1,1) \rightarrow (\mu-\lambda-1, \mu-\lambda, \mu+\lambda)\cdot(1,1,1) = 0.$$

Efectuant els dos productes escalars les condicions anteriors es converteixen en el sistema d'equacions:

$$\mu - 3\lambda - 1 = 0$$
$$3\mu - \lambda - 1 = 0$$

Si a la segona equació li restem 3 vegades la primera obtenim $8\lambda = -2$ i per tant $\lambda = \frac{-1}{4}$, i quan substituïm en la primera obtenim $\mu = 1 + 3\lambda = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
Així els punts respectius de cada recta són: $A_1 = \left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ i $A_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

La recta que uneix aquests punts és la perpendicular que talla totes dues rectes i tindrà vector director $\overrightarrow{A_1A_2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \approx (-1,1,0)$ i equació vectorial

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + \alpha\,(-1,1,0)$$

I, per tant, l'equació paramètrica serà

$$\boxed{(x,y,z) = \left(\frac{1}{4} - \alpha, \frac{1}{4} + \alpha, \frac{1}{4}\right), amb\ \alpha \in \mathbb{R}}$$

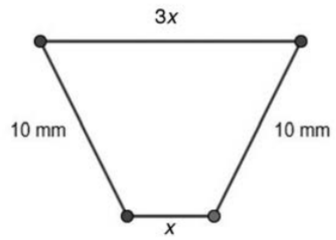
b) Aplicant l'apartat anterior tenim que

$$d\,(r_1, r_2) = d\,(A_1, A_2) = \left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\ u}.$$

Observació: Amb independència de l'apartat a) aquest apartat b) es pot resoldre aplicant sigui la fórmula general per a la distància entre dues rectes o bé via la distància entre una recta i llur projecció perpendicular sobre l'altra.

Problema 6:

6. Volem construir una peça metàl·lica que tingui per secció un trapezi isòsceles amb la base superior tres vegades més llarga que la base inferior. Els altres costats del trapezi fan 10 mm, tal com podeu observar en la figura següent:

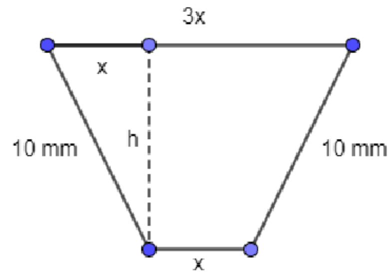


a) Expresseu l'altura del trapezi en funció de la longitud x de la base inferior.
[0,5 punts]

b) Calculeu la longitud de la base inferior del trapezi de manera que l'àrea de la peça sigui màxima i trobeu el valor d'aquesta àrea màxima.
[2 punts]

6. Resolució:

a) A partir de la situació exposada tenim el gràfic següent:



Pel teorema de Pitàgores s'obté que $x^2 + h^2 = 10^2$, i per tant $\boxed{h = \sqrt{100 - x^2}}$

b) L'àrea del trapezi és $A(x) = (x + 3x)/2 \cdot h = 2x \cdot \sqrt{100 - x^2}$

Per a trobar els candidats a valors que fan màxima aquesta àrea calcularem la funció derivada $A'(x)$ i obtindrem les solucions de l'equació $A'(x) = 0$.

$$A'(x) = 2 \cdot \sqrt{100-x^2} + 2x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{100-x^2}}(-2x)$$
$$= 2 \cdot \sqrt{100-x^2} + \frac{-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{2(100-x^2)-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{200-4x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$
$$= \frac{4(50-x^2)}{\sqrt{100-x^2}}$$

Per tant tindrem $A'(x) = 0$ quan $50 - x^2 = 0$, és a dir $x^2 = 50$ i $x = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2} \approx \pm 7'07$

A partir del context de l'enunciat, l'únic candidat és el valor positiu $x = \sqrt{50} = 7'07$ mm. Ara cal comprovar que amb aquest valor l'àrea sigui màxima. Això es comprova veient que per valors propers l'àrea és més petita:

A(7)= 99'980

$A(\sqrt{50}) = 2 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{100-50} = 2 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} = 100$

A(7'1)=99.9966

Per tant, el valor de la base petita que fa l'àrea màxima és de $5\sqrt{2} = 7'07$ mm i el valor de l'àrea és 100 mm^2

Observació: Per a la comprovació de la condició de màxim es podria també fer servir, alternativament, el comprovar que la derivada segona de la funció àrea és negativa per al valor $x = \sqrt{50}$.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 preguntas cuyo valor es de 2 puntos. Es estudiante ha de elegir 5 preguntas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregirá la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas y las soluciones.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

Encontrar la matriz X que verifica $(A - 3I).X = 2I$, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

Problema 2:

Determinar todos los números $x \in R$ para los que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix}$ es mayor o igual que cero . (2 puntos)

Problema 3:

Estudiar la posición relativa de los siguientes planos en función del parámetro *b* (2 puntos)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1+b)y - bz = 2b \\ by + (1+b)z = 1 \end{cases}$$

Problema 4:

Hallar un vector de módulo 5 que sea ortogonal a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 1)$. (2 puntos)

Problema 5:

a) Comprobar que hay alguna solución positiva y alguna negativa de la ecuación (1.5 puntos)

$$x \cdot \cos(2x) = x^2 - 1.$$

b) Aproximar la solución positiva encontrada con un error menor que una décima. (0.5 puntos)

Problema 6:

Calcular a, b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si\ \ 0 \le x < 1 \\ cx & si\ \ 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. (2 puntos)

Problema 7:

Calcular la integral (2 puntos)

$$\int \frac{17 - x}{x^2 + x - 6} dx$$

Problema 8:

Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas. (2 puntos)

Problema 9:

Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30 % les gustan ambos deportes. Si se elige un alumno al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste solo el fútbol? (0.75 puntos)

c) Si sabemos que no le gusta el fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el balonmano?(0.75 puntos)

Problema 10:

Durante el día de hoy una persona va a escribir 15 mensajes en Facebook. Cada mensaje que escribe tiene errores ortográficos con una probabilidad de 0.3. Calcular:

a) La probabilidad de que escriba exactamente 5 mensajes con errores ortográficos. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que escriba 4 o más mensajes con errores. (0.75 puntos)

c) La media y la desviación típica de la distribución. (0.5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Encontrar la matriz *X* que verifica *(A – 3I).X = 2I*, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

Solución:

$$(A-3I)\cdot X = 2I;\ \ (A-3I)^{-1}\cdot(A-3I)\cdot X = (A-3I)^{-1}\cdot 2I;$$

$I\cdot X = 2\cdot(A-3I)^{-1} \Rightarrow \underline{X = 2\cdot(A-3I)^{-1}}.$ (*)

$$A-3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|A-3I| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3. \qquad (A-3I)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ (A-3I)^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A-3I)^{-1} = \frac{Adj.\ de\ (A-3I)^t}{|A-3I|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{3} \Rightarrow (A-3)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la expresión (*): $X = 2\cdot(A-3I)^{-1} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{X = \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

Problema 2:

Determinar todos los números $x \in R$ para los que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \mathrm{x} & 3 \\ 4 & 1 & -\mathrm{x} \end{vmatrix}$ es mayor o igual que cero . (2 puntos)

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} \geq 0;\ -x^2 + 4x - 3 \geq 0;\ \ x^2 - 4x + 3 \leq 0.$$

Teniendo en cuenta que la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2 y cuyos puntos de corte con el eje X son los siguientes:

$x^2 - 4x + 3 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3,$ la solución pedida, que se deduce de lo anterior es la siguiente:

$$\underline{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{x} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \boldsymbol{-x} \end{vmatrix} \geq \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{1}, \mathbf{3}].}$$

Problema 3:

Estudiar la posición relativa de los siguientes planos en función del parámetro b (2 puntos)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1+b)y - bz = 2b \\ by + (1+b)z = 1 \end{cases}$$

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema que forman los tres planos son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ Los planos son secantes. Se cortan en un punto.

2. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ Los planos se cortan en una recta.

(dos de los planos pueden ser coincidentes)

3. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow$ Los tres planos son coincidentes.

4. -- $Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ Hay planos paralelos.

(si no hay planos coincidentes son los tres paralelos)

(si dos planos son coincidentes son paralelos al tercero)

5. -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ Hay planos secantes.

(si no hay planos paralelos se cortan dos a dos; determinan un prisma)

(si dos planos son paralelos son secantes al tercero)

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix} = (1+b)^2 - b - 2b + 1 + b + b^2 - 2(1+b) = 0;$$

$$1 + 2b + b^2 - 2b + 1 + b^2 - 2 - 2b = 0;\ \ 2b^2 - 2b = 0;\ \ 2b(b-1) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1 = 0, b_2 = 1.$$

$$\underline{\begin{Bmatrix} b \neq 0 \\ b \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Planos\ secantes; se\ contan\ en\ un\ punto.}$$

$$Para\ b = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 = -3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{b = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Hay\ planos\ secantes.}$$

$$\underline{No\ hay\ planos\ paralelos; se\ cortan\ dos\ a\ dos\ formando\ un\ prisma.}$$

$$Para\ b = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{b = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ tres\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.}}$$

Nótese que los dos primeros planos son coincidentes.

Problema 4:

Hallar un vector de módulo 5 que sea ortogonal a los vectores $\vec{u}$ = (1, 2, 0) y $\vec{v}$ = (−1, 0, 1). (2 puntos)

Solución:

Un vector perpendicular común a dos vectores dados es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2i + 2k - j = 2i - j + 2k \Rightarrow \overrightarrow{w'} = (2, -1, 2).$$

Un vector perpendicular común a $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ es $\overrightarrow{w'} = (2, -1, 2)$.

El vector unitario de un vector dado (versor) es el vector que se obtiene al dividir las componentes del vector por su módulo:

$$\left|\overrightarrow{w'}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

El vector (unitario) de $\overrightarrow{w'}$ es $\overrightarrow{w'_1} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y el vector pedido, de módulo 5 es el siguiente:

$$\underline{\boldsymbol{\vec{w} = 5 \cdot \overrightarrow{w'_1} = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)}}.$$

También es solución el opuesto: $\underline{\overrightarrow{w_2} = \left(-\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{10}{3}\right)}$.

Problema 5:

a) Comprobar que hay alguna solución positiva y alguna negativa de la ecuación (1.5 puntos)

$$x \cdot cos(2x) = x^2 - 1.$$

b) Aproximar la solución positiva encontrada con un error menor que una décima. (0.5 puntos)

Solución:

a) Comprobar que la ecuación $x \cdot \cos(2x) = x^2 - 1$ es equivalente a comprobar que la función $g(x) = x \cdot \cos(2x) - x^2 + 1$ tiene una raíz positiva y otra negativa.

La función $g(x)$ es continua en R por ser producto o suma de funciones continuas en R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que se considere.

El teorema de Bolzano dice que "si $g(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$".

Considerando, por ejemplo, el intervalo $[0, \pi]$:

$g(0) = 0 \cdot \cos 0 - 0^2 + 1 = 1 > 0.$

$g(\pi) = \pi \cdot \cos(2\pi) - \pi^2 + 1 = \pi - \pi^2 + 1 < 0.$

Queda comprobado que la ecuación dada tiene una raíz positiva en $(\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi})$.

Considerando, por ejemplo, el intervalo $[-\pi, 0]$:

$g(0) = 0 \cdot \cos 0 - 0^2 + 1 = 1 > 0.$

$g(-\pi) = -\pi \cdot \cos(-2\pi) - (-\pi)^2 + 1 = -\pi - \pi^2 + 1 < 0.$

Queda comprobado que la ecuación dada tiene una raíz negativa en $(-\boldsymbol{\pi}, \mathbf{0})$

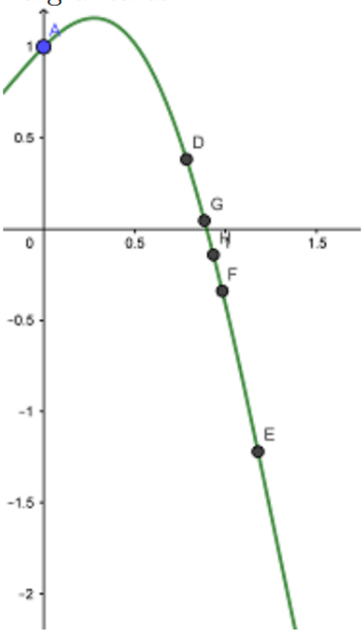
b)

Como sabemos que la raíz está en el intervalo $[0, \pi]$, calculamos el valor en el punto medio del intervalo. Si el valor de la función en este punto es 0, hemos encontrado la raíz exacta. Si es distinto de cero, elegimos el intervalo en el que el signo de la función es distinto y volvemos a reiterar el proceso hasta la precisión requerida

Intervalo $[a, b]$	$f(a)$	$f(b)$	$\lvert b-a \rvert$	$\frac{a+b}{2}$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	Punto
$[0, \pi]$	1	-5.73	4.73	$\frac{\pi}{2}$	-3.038	C
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	1	-3.038	1.57	$\frac{\pi}{4}$	0.38	D
$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$	0.38	-3.038	0.78	$\frac{3\pi}{8}$	-1.22	E
$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right]$	0.38	-1.22	0.392	$\frac{5\pi}{16}$	-0.33	F
$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{16}\right]$	0.38	-0.33	0.19	$\frac{9\pi}{32}$	0.0469	G
$\left[\frac{9\pi}{32}, \frac{5\pi}{16}\right]$	0.0469	-0.33	0.098	$\frac{19\pi}{64}$	-0.14	H

La longitud del intervalo es 0.098, menor que una décima.

Una aproximación de la raíz es $\frac{19\pi}{64} \simeq 0{,}9326$
Una mejor aproximación es 0.8962
La gráfica es



La mejor aproximación es 0,8962

Problema 6:

Calcular a, b y c para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si\ \ 0\le x<1 \\ cx & si\ \ 1\le x\le 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. (2 puntos)

Solución:

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), con $a,b\in R$ y $a<b$, y se cumple que $f(a)=f(b)$, existe al menos un valor c, $a<c<b$ tal que $f'(c)=0$".

Tiene que cumplirse que $f(0)=f(4)$:

$f(0)=0^2+a\cdot 0+b=b.$ $\qquad$ $f(4)=4\cdot c=4c.$

$f(0)=f(4)\Rightarrow b=4c;\ \ b-4c=0.$ (1)

La función tiene que ser continua y derivable en el intervalo considerado.

La función $f(x)$ es continua en $[0,4]$, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a, b\ y\ c$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=1\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=1+a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(cx)=c=f(1) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow 1+a+b=c;\ \ a+b-c=-1.$ (2)

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas laterales existen y son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si\ \ 0\le x<1 \\ c & si\ \ 1\le x\le 4 \end{cases}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(1^-)=2+a \\ f'(1^+)=c \end{array}\right\}\Rightarrow f'(1^-)=f'(1^+)\Rightarrow$$

$\Rightarrow 2+a=c;\ \ a-c=-2.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{r} b-4c=0 \\ a+b-c=-1 \\ a-c=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=c-2 \\ b=4c \end{array}\right\}\Rightarrow (c-2)+(4c)-c=-1;$$

$c-2+4c-c=-1;\ \ 4c=1;\ \ c=\frac{1}{4}.$ $\qquad$ $a=\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4}.$ $\qquad$ $b=4c=1.$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: a=-\frac{7}{4}, b=1, c=\frac{1}{4}.}}$$

Problema 7:

Calcular la integral (2 puntos)

Solución:

$$\int \frac{17-x}{x^2+x-6}dx$$

$x^2+x-6=0;\;\; x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}\Rightarrow x_1=-3, x_2=2.$

$x^2+x-6=(x+3)(x-2).$

$\frac{17-x}{x^2+x-6}=\frac{M}{x+3}+\frac{N}{x-2}=\frac{Mx-2M+Nx+3N}{(x+3)(x-2)}=\frac{(M+N)x+(-2M+3N)}{x^2+x-6}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=-1 \\ -2M+3N=17 \end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2M+2N=-2 \\ -2M+3N=17 \end{array}\right\}\Rightarrow 5N=15;\;\; N=3;\;\; M+3=-1\;\Rightarrow M=-4.$

$I=\int\frac{17-x}{x^2+x-6}\cdot dx=\int\left(\frac{-4}{x+3}+\frac{3}{x-2}\right)\cdot dx=-4\cdot L|x+3|+3\cdot L|x-2|+C\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{I=\int\frac{17-x}{x^2+x-6}\cdot dx=L\frac{|(x-2)^3|}{(x+3)^4}+C.}}$$

Problema 8:

Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas. (2 puntos)

Solución:

El dominio de la función es R por ser polinómica.

Conviene tener en cuenta que, por ser $f(-x) = -f(x)$, la función es simétrica con respecto al origen.

Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0; \;\; x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow A(-2, 0) \\ x_2 = 0 \rightarrow O(0, 0) \\ x_3 = 2 \rightarrow B(2, 0) \end{cases}.$$

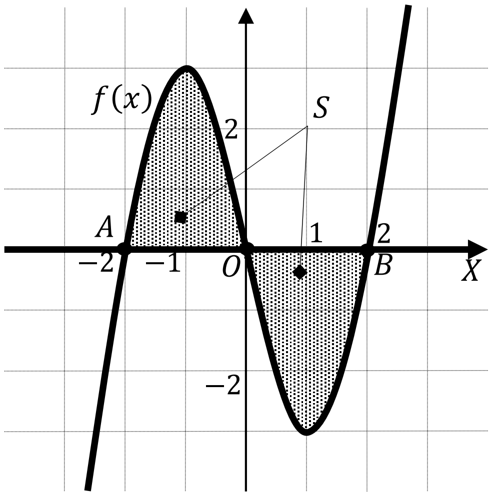
La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

Teniendo en cuenta la simetría de la función y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = -2\int_0^2 f(x) \cdot dx = -2\int_0^2 (x^3 - 4x) \cdot dx =$$

$$= -2 \cdot \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = 2 \cdot \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\right) - 0\right] = 16 - 8 = 8.$$



$$\underline{\boldsymbol{S = 8\, u^2}}.$$

Problema 9:

Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30 % les gustan ambos deportes. Si se elige un alumno al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste solo el fútbol? (0.75 puntos)

c) Si sabemos que no le gusta el fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el balonmano?(0.75 puntos)

Solución:

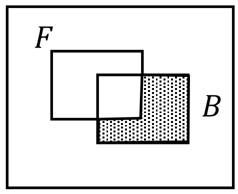
$$Datos: P(F) = 0{,}8; \;\; P(B) = 0{,}4; \;\; P(R \cap B) = 0{,}3.$$

$a)$ $\quad P = P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) = 0{,}8 + 0{,}4 - 0{,}3 = \underline{0{,}9}.$

$b)$ $\quad P = P(F) - P(F \cap B) = 0{,}8 - 0{,}3 = \underline{0{,}5}.$

$c)$ $\quad P = P(B/\overline{F}) = \frac{P(B \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{P(B) - P(F \cap B)}{1 - P(F)} =$

$= \frac{0{,}4 - 0{,}3}{1 - 0{,}8} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = \underline{\frac{1}{2} = 0{,}5}.$



$P(B \cap \overline{F}) = P(B) - P(F \cap B)$

Problema 10:

Durante el día de hoy una persona va a escribir 15 mensajes en Facebook. Cada mensaje que escribe tiene errores ortográficos con una probabilidad de 0.3. Calcular:

a) La probabilidad de que escriba exactamente 5 mensajes con errores ortográficos. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que escriba 4 o más mensajes con errores. (0.75 puntos)

c) La media y la desviación típica de la distribución. (0.5 puntos)

Solución:

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 15;\ \ p = 0{,}3;\ \ q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$

La fórmula de la probabilidad binomial de n elementos de los cuales se produzcan r viene dada por la fórmula: $P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$a)\qquad p = P(5) = \binom{15}{5} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^{15-5} = \frac{15!}{(15-5)! \cdot 5!} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^{10} =$

$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0{,}00243 \cdot 0{,}02825 = 21 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 0{,}0000686 = \underline{0{,}2060}.$

$b)$ Por el suceso contrario, la probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos las probabilidades de 0, 1, 2 y tres mensajes con errores.

$P = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)] =$

$= 1 - \left[\binom{15}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^{14} + \binom{15}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^{13} + \binom{15}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^{12}\right] =$

$= 1 - (0{,}00475 + 15 \cdot 0{,}00203 + 105 \cdot 0{,}00087 + 455 \cdot 0{,}00037) =$

$= 1 - (0{,}00475 + 0{,}03052 + 0{,}09156 + 0{,}17004) = 1 - 0{,}29687 = \underline{0{,}7031}.$

$c)\ Media \to \mu = n \cdot p = 15 \cdot 0{,}3 = \underline{4{,}5}.$

$Desviación\ típica \to \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{15 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \sqrt{3{,}15} \cong \underline{1{,}775}.$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 preguntas. Es estudiante ha de elegir 5 preguntas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregirá la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas y las soluciones.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Estudiar el rango de la matriz $A-\lambda\cdot I$ según los valores de $\lambda\in\mathbb{R}$, donde $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&1\\-1&0&3\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

Problema 2:

2. Discutir el sistema para los distintos valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$ (1.5 puntos)

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=2a-1\\2x+y+az=a\\x+ay+z=1\end{array}\right\}$$

Resolver el sistema en el caso $a=1$. (0.5 puntos)

Problema 3:

3. Sean los vectores $\vec{u}=(0,0,2)$, $\vec{v}=(1,1,0)$, $\vec{w}=(2,-1,1)$

a) ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente independientes? (0.5 puntos)

b) Calcular el área del triángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (0.75 puntos)

c) Calcular un vector de módulo uno perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. (0.75 puntos)

Problema 4:

4. Dados los puntos $A=(0,0,2)$ y $B=(1,1,0)$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x=1\\y=z\end{cases}$.

a) Hallar el plano que contiene a r y es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$. (1.25 puntos)

b) Hallar la distancia del punto A a la recta r. (0.75 puntos)

Problema 5:

5. Calcular los coeficientes a, b, c y d del polinomio $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$, sabiendo que cumple todas las condiciones siguientes: (2 puntos)

- $p(x)$ tiene un máximo relativo en $x=-1$, y
- la gráfica de $p(x)$ tiene un punto de inflexión en (0, 0), y
- la recta tangente a la gráfica de $p(x)$ en $x=2$ tiene pendiente 3.

Problema 6:

6. Encontrar los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+b & si\ x\le 1 \\ \ln(x) & si\ x>1 \end{cases}$ sea continua en $x=1$ y su gráfica pase por el punto $(-1, 5)$ (2 puntos)

Problema 7:

7. Determinar la primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=(x+1)e^{x+1}$ que cumple $F(0) = -1$. (2 puntos)

Problema 8:

8. Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-3x^2+3x$ y $g(x)=x$. (2 puntos)

Problema 9:

9. Un club de montaña organiza dos tipos de actividades para sus afiliados. El 70% de ellos se apuntan a escalada, el 60% a barranquismo y el 45% de ellos practica las dos. Si se elige al azar un afiliado,

a) Calcular la probabilidad de que practique sólo una de las dos actividades. (0.75 puntos)

b) Calcular la probabilidad de que no practique ninguna. (0.5 puntos)

c) Sabiendo que hace barranquismo, calcular la probabilidad de que no haga escalada. (0.75 puntos)

Problema 10:

10. Los relojes de cierta marca tienen una vida útil que se ajusta a una distribución normal de media 10 años y desviación típica de 2 años. Si compramos un reloj de esta marca:

a) Calcular la probabilidad de que dure entre 9 y 12 años. (1 punto)

b) ¿Cuánto tiempo tendrá que durar el reloj si queremos que el 90% de los relojes de esa marca duren menos que el nuestro? (1 punto)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Estudiar el rango de la matriz $A-\lambda\cdot I$ según los valores de $\lambda\in\mathbb{R}$, donde $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&1\\-1&0&3\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

Solución:

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&1\\-1&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&0&2\\1&-\lambda&1\\-1&0&3-\lambda\end{pmatrix}.$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&2\\1&-\lambda&1\\-1&0&3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(3-\lambda)-2\lambda=0;\ \ \lambda[\lambda(3-\lambda)-2]=0;$$

$\lambda(3\lambda-\lambda^2-2)=0\Rightarrow\lambda_1=0;\ \ -\lambda^2+3\lambda-2=0;\ \ \lambda^2-3\lambda+2=0;$

$\lambda=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm1}{2}\Rightarrow\lambda_2=1,\lambda_3=2.$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ \begin{Bmatrix}\lambda\neq0\\\lambda\neq1\\\lambda\neq2\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ A-\lambda I=3.}}$$

$$\lambda=0\Rightarrow A-\lambda I=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&1\\-1&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1\\-1&3\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow Rang\ (A-\lambda I)=2.$$

$$\lambda=1\Rightarrow A-\lambda I=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&-1&1\\-1&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}0&2\\-1&1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow Rang\ (A-\lambda I)=2.$$

$$\lambda=2\Rightarrow A-\lambda I=\begin{pmatrix}-2&0&2\\1&-2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}-2&1\\0&1\end{vmatrix}\neq0\Rightarrow Rang\ (A-\lambda I)=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ \begin{Bmatrix}\lambda=0\\\lambda=1\\\lambda=2\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ A-\lambda I=2.}}$$

Problema 2:

2. Discutir el sistema para los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ (1.5 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{array}\right\}$$

Resolver el sistema en el caso *a = 1*. (0.5 puntos)

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&a\\1&a&1\end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix}1&1&1&2a-1\\2&1&a&a\\1&a&1&1\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&a\\1&a&1\end{vmatrix}=1+2a+a-1-a^2-2=0;\ -a^2+3a-2=0;$$

$$a^2-3a+2=0;\ \ a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm1}{2}\Rightarrow a_1=1;\ \ a_2=2.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\boldsymbol{Para\ \begin{Bmatrix}a\neq 1\\a\neq 2\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\{F_1=F_3\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$Para\ a=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\2&1&2&2\\1&2&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1&3\\2&1&2\\1&2&1\end{vmatrix}=1+12+2-3-4-2=15-9=6\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=2\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible}.$$

Para $a=1$ el sistema resulta $\begin{cases}x+y+z=1\\2x+y+z=1\\x+y+z=1\end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema: $\begin{cases}x+y+z=1\\2x+y+z=1\end{cases}$.

Haciendo $z=\lambda$ y restando, miembro a miembro, a la segunda ecuación la primera, se deduce la solución del sistema, que es la siguiente:

$$\boldsymbol{Solución: x=0, y=1-\lambda, z=\lambda, \forall\lambda\in R.}$$

Problema 3:

3. Sean los vectores $\vec{u}=(0,0,2)$, $\vec{v}=(1,1,0)$, $\vec{w}=(2,-1,1)$

a) ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente independientes? (0.5 puntos)

b) Calcular el área del triángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (0.75 puntos)

c) Calcular un vector de módulo uno perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. (0.75 puntos)

Solución:

$a)$ Los vectores $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son linealmente dependientes cuando son coplanarios, es decir: cuando el rango del determinante que forman es cero.

$$Rang\ \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2-4=-6 \neq 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{Los\ vectores\ \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}\ son\ linealmente\ independienes.}}$$

$b)$ El área del triángulo que determinan dos vectores es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|\vec{u}\times\vec{v}|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\| = |j-i| = |-i+j|$$

$$=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{1+1}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S=\sqrt{2}\ u^2}}.$$

$c)$ Un vector perpendicular común a dos vectores dados es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores.

$$\vec{v}\wedge\vec{w}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i-k-2k-j=i-j-3k.$$

Un vector perpendicular común a $\vec{v}\ y\ \vec{w}$ es $\vec{a}=(1,-1,-3)$. El vector unitario de un vector dado (versor) es el vector que se obtiene al dividir las componentes del vector por su módulo:

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ versor\ perpendicular\ a\ \vec{v}\ y\ \vec{w}\ es\ \overrightarrow{a_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{-1}{\sqrt{11}},\frac{-3}{\sqrt{11}}\right)\ o\ \overrightarrow{a_2}=\left(\frac{-1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right)}}.$$

Problema 4:

4. Dados los puntos $A=(0,0,2)$ y $B=(1,1,0)$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x=1\\ y=z\end{cases}$.

a) Hallar el plano que contiene a r y es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$. (1.25 puntos)

b) Hallar la distancia del punto A a la recta r. (0.75 puntos)

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(1,1,0)-(0,0,2)]=(1,1,-2)$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r\equiv\begin{cases}x=1\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$.

Un punto y un vector director de r son $P(1,0,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{v_r};\ P)\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0;\ \ (x-1)+z+2(x-1)-y=0;$$

$$3(x-1)-y+z=0;\ \ 3x-3-y+z=0\Rightarrow$$

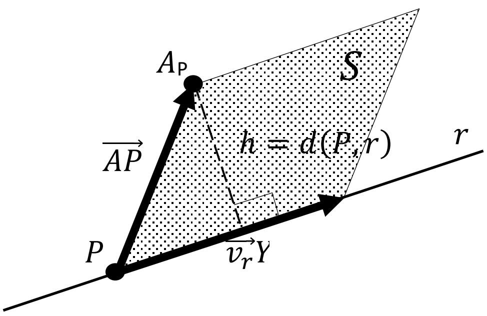
$$\underline{\boldsymbol{\pi\equiv 3x-y+z-3=0.}}$$

b) La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.

$$\left.\begin{array}{r}S=|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{PA}|\\ S=|\overrightarrow{v_r}|\cdot h\end{array}\right\}\Rightarrow|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{v_r}|\cdot h\ \Rightarrow\underline{h=d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{v_r}|}}.$$

$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=[(0,0,2)-(1,0,0)]=(-1,0,2)$.



Aplicando la fórmula al punto A y a la recta r:

$$d(A,r)=\frac{|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{v_r}|}=\frac{\left\|\begin{matrix}i & j & k\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{matrix}\right\|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=$$

$$=\frac{|2i-j+k|}{\sqrt{0+1+1}}=\frac{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{4+1+1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{d(A,r)=\sqrt{3}\ u.}}$$

Problema 5:

5. Calcular los coeficientes a, b, c y d del polinomio $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, sabiendo que cumple todas las condiciones siguientes: (2 puntos)

- $p(x)$ tiene un máximo relativo en $x = -1$, y
- la gráfica de $p(x)$ tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$, y
- la recta tangente a la gráfica de $p(x)$ en $x = 2$ tiene pendiente 3.

Solución:

Por contener $p(x)$ al punto $O(0,0)$ es $p(0) = 0 \Rightarrow \underline{a = 0}$.

Por tener un punto de inflexión en $O(0,0)$ es $p''(0) = 0$:

$p'(x) = b + 2cx + 3dx^2$. $\quad\quad p''(x) = 2c + 6dx$.

$p''(0) = 2c + 6d \cdot 0 = 0;\ \ 2c + 0 = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

La función resulta: $p(x) = bx + dx^3$ y su derivada: $p'(x) = b + 3dx^2$.

Por tener un máximo relativo en $x = -1$ es $p'(-1) = 0$:

$p'(-1) = 0 \Rightarrow b + 3d \cdot (-1)^2 = 0;\ \ b + 3d = 0.$ (1)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto, por lo cual: $p'(2) = 3$.

$p'(2) = 0 \Rightarrow b + 3d \cdot 2^2 = 3;\ \ b + 12d = 3.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} b + 3d = 0 \\ b + 12d = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -b - 3d = 0 \\ b + 12d = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 9d = 3;\ \ 3d = 1 \Rightarrow \underline{d = \tfrac{1}{3}}.$$

$b + \frac{3}{3} = 0;\ \ b + 1 = 0 \Rightarrow \underline{b = -1}$.

La función resulta: $\underline{\boldsymbol{p(x) = -x + \frac{1}{3}x^3}}$.

Problema 6:

6. Encontrar los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}2x^2+ax+b & si\ x\le 1\\ \ln(x) & si\ \ x>1\end{cases}$ sea continua en $x=1$ y su gráfica pase por el punto $(-1, 5)$ (2 puntos)

Solución:

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=1 \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(2x^2+ax+b) = 2+a+b = f(1)\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} Lx = L1 = 0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 2+a+b=0;\ \ a+b=-2. \quad (1)$$

Por pasar su gráfica pase por el punto $P(-1,5)$ es $f(-1)=5$.

$f(-1)=5 \Rightarrow 2\cdot(-1)^2+a\cdot(-1)+b=5;\ \ -a+b=3. \quad (2)$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r}a+b=-2\\ -a+b=3\end{array}\right\} \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{b=\frac{1}{2}}}.$$

$$a+\frac{1}{2}=-2;\ \ 2a+1=-4;\ \ 2a=-5 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a=-\frac{5}{2}}}.$$

Problema 7:

7. Determinar la primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=(x+1)e^{x+1}$ que cumple $F(0) = -1$. (2 puntos)

Solución:

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int (x+1)e^{x+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x+1 = u \rightarrow du = dx \\ dv = e^{x+1}\cdot dx \rightarrow v = e^{x+1}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)\cdot e^{x+1} - \int e^{x+1}\cdot dx = (x+1)\cdot e^{x+1} - e^{x+1} \Rightarrow F(x) = x\cdot e^{x+1} + C.$$

$$F(0) = -1 \Rightarrow 0\cdot e^{0+1} + C = -1;\ \ C = -1.$$

$$\underline{F(x) = x\cdot e^{x+1} - 1}.$$

Problema 8:

8. Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ y $g(x) = x$. (2 puntos)

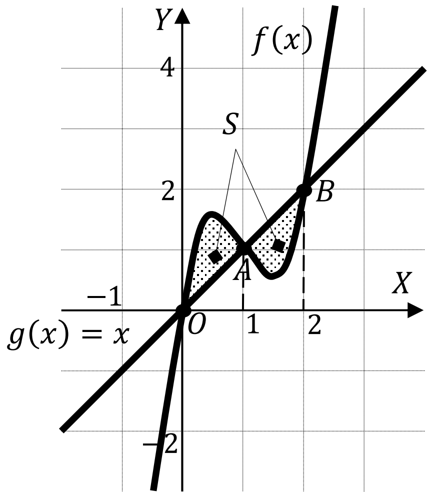
Solución:

Las abscisas de los puntos de corte de la función $f(x)$ y la recta $y = x$ son las raíces de la ecuación que se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = x \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x = x;\ \ x^3 - 3x^2 + 2x = 0;\ \ x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \to O(0,0).\quad x^2 - 3x + 2 = 0;\quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \to A(1,1) \\ x_3 = 2 \to B(2,2) \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la representación gráfica de la situación, aproximada, es la que se expresa en la figura adjunta.



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx + \int_1^2 [g(x) - f(x)]dx =$$

$$= \int_0^1 [(x^3 - 3x^2 + 3x) - x]dx + \int_1^2 [x - (x^3 - 3x^2 + 3x)]dx =$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot dx + \int_2^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot dx = [F(x)]_0^1 + [F(x)]_2^1 =$$

$$= F(1) - F(0) + F(1) - F(2) \Rightarrow S = 2 \cdot F(1) - F(0) - F(2).\quad (*)$$

$$F(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2.$$

Sustituyendo este valor en la expresión (*):

$$S = 2 \cdot \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2\right) - 0 - \left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2\right) = \frac{1}{2} - 4 + 8 - 4 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\ u^2.}$$

Problema 9:

9. Un club de montaña organiza dos tipos de actividades para sus afiliados. El 70% de ellos se apuntan a escalada, el 60% a barranquismo y el 45% de ellos practica las dos. Si se elige al azar un afiliado,

a) Calcular la probabilidad de que practique sólo una de las dos actividades. (0.75 puntos)

b) Calcular la probabilidad de que no practique ninguna. (0.5 puntos)

c) Sabiendo que hace barranquismo, calcular la probabilidad de que no haga escalada. (0.75 puntos)

Solución:

$$Datos: P(E) = 0{,}70;\ \ P(B) = 0{,}60;\ \ P(E \cap B) = 0{,}45.$$

$a)$ $\quad P = P(E \cup B) - P(E \cap B) = [P(E) + P(B) - P(E \cap B)] - P(E \cap B) =$

$= P(E) + P(B) - 2 \cdot P(E \cap B) = 0{,}70 + 0{,}60 - 2 \cdot 0{,}45 = 1{,}30 - 0{,}90 = \underline{0{,}40}.$

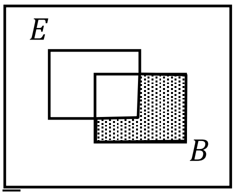
$b)$ $\quad P = 1 - P(E \cup B) = 1 - [P(E) + P(B) - P(E \cap B)] =$

$= 1 - P(E) - P(B) + P(E \cap B) = 1 - 0{,}70 - 0{,}60 + 0{,}45 = 1{,}45 - 1{,}30 = \underline{0{,}15}.$

$c)$

$$P = P\left(\overline{E}/B\right) = \frac{P\left(\overline{E} \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(E \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{0{,}60 - 0{,}45}{0{,}60} = \frac{0{,}15}{0{,}60} = \underline{0{,}25}.$$



$\overline{E} \cap B = B - (E \cap B)$

Problema 10:

10. Los relojes de cierta marca tienen una vida útil que se ajusta a una distribución normal de media 10 años y desviación típica de 2 años. Si compramos un reloj de esta marca:

a) Calcular la probabilidad de que dure entre 9 y 12 años. (1 punto)

b) ¿Cuánto tiempo tendrá que durar el reloj si queremos que el 90% de los relojes de esa marca duren menos que el nuestro? (1 punto)

Solución:

$a)\ Datos\colon\ \mu = 10;\ \ \sigma = 2.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(10, 2).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-10}{2}.$

$P = P(9 \le X \le 12) = P\left(\frac{9-10}{2} \le Z \le \frac{12-10}{2}\right) = P\left(\frac{-1}{2} \le Z \le \frac{2}{2}\right) =$

$= P(-0{,}5 \le Z \le 1) = P(Z \le 1) - P(Z \le -0{,}5) =$

$= P(Z \le 1) - 1 + P(Z \le 0{,}5) = 0{,}8413 - 1 + 0{,}6915 = 1{,}5328 - 1 = \underline{0{,}5328}.$

$$\boldsymbol{P(9 \le X \le 12) = \underline{0{,}5328}}$$

$b)$ Se pide el valor β que hace:

$P = P(X < 0{,}9) = P\left(Z < \frac{\beta-10}{2}\right) = 0{,}9.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, al valor 0,9 le corresponde, aproximadamente, 1,28:

$\frac{\beta-10}{2} = 1{,}28;\ \ \beta - 10 = 2 \cdot 1{,}28 = 2{,}56;\ \ \beta = 10 + 2{,}56 = 12{,}56.$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ durar\ más\ que\ el\ nuestro\ el\ reloj\ tiene\ que\ durar\ 12{,}56\ años.}}$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

Galicia

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Barrientos Fernández

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**

Problema 1:

1.Números y Álgebra:

Despeje la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$ si A y B son matrices cuadradas tales que $A - B$ es invertible. Luego, calcule X si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (A^2 - A - I)^{-1}$donde I es la matriz identidad de orden 2.

Problema 2:

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores de m, el sistema $\begin{cases} mx & + & (2+m^2)y & & & = & 1+m \\ & & my & - & z & = & 1 \\ mx & + & 2y & + & (2m-4)z & = & 5 \end{cases}$

Problema 3:

3. Análisis:

a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

b) Estudie si la función $f(x) = x + \sin(x)$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0,2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo.

Problema 4:

4. Análisis:

Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e y$\geq f(x)$, con $f(x) = xlnx$. Haga un esbozo gráfico de la región. Nota: lnx es el logaritmo neperiano de x.

Problema 5:

5. Geometría:

a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2,-1,0)$ y $Q(3,0,0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0,4,-2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ y $\vec{v}(2,1,-2)$.

b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ con el plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

Problema 6:

6. Geometría:

a) Calcule el punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto al plano $\pi: x+z+2=0$.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ y $s: \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Problema 7:

7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule las cuatro probabilidades $P(A), P(A \cap \bar{B}), P(A/B)$ y $P(B/A)$ sabiendo que $P(AB) = 0.8, P(AB) = 0.2$ y $P(A) = 2P(B)$. Nota: $\bar{B}$ es el suceso contrario o complementario de B.

b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan online y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe online; luego, la de que participe online si se sabe que es europeo.

Problema 8:

8. Estadística y Probabilidad:

a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?

b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade** CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA **ORDINARIA** DE JUNIO

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas**.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

1. Números e Álxebra:

Despexe a matriz X da ecuación $XA = A + XB$, se A e B son matrices cadradas tales que $A - B$ é invertible. Logo, calcule X se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, onde I é a matriz identidade de orde 2.

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores de m, o sistema $\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m, \\ my - z = 1, \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5. \end{cases}$

3. Análise:

a) Se $f(x) = ae^x + b$, diga que valores deben ter a e b para que se cumpran $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.

b) Estude se a función $f(x) = x + \sin x$ ten extremos ou puntos de inflexión no intervalo $(0, 2\pi)$, diga onde están en caso de que existan e esboce a gráfica de f nese intervalo.

4. Análise:

Calcule a área da rexión determinada polas desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Faga un esbozo gráfico da rexión. **Nota**: $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x.

5. Xeometría:

a) Obteña as ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(2,-1,0)$ e $Q(3,0,0)$ e a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $R(0,4,-2)$ e é paralelo aos vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ e $\vec{v}(2,1,-2)$.

b) Calcule o ángulo agudo que forma a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ co plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

6. Xeometría:

a) Calcule o punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto ao plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

b) Estude a posición relativa das rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ e $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule as catro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ e $P(B|A)$ sabendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A) = 2P(B)$. **Nota**: $\bar{B}$ é o suceso contrario ou complementario de B.

b) Nun coñecido congreso, o 60% dos científicos inscritos participan *online* e o resto asisten en persoa. Ademais, o 65% dos inscritos son europeos e o 80% dos que asisten en persoa tamén o son. Se se elixe ao azar a un dos inscritos, calcule a probabilidade de que sexa europeo e, á vez, participe *online*; logo, a de que participe *online* se se sabe que é europeo.

8. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha certa zona húmida, a probabilidade de que un cabezolo chegue a ra adulta é do 2%. Se se escollen ao azar 2500 deses cabezolos, cal é a probabilidade de que polo menos 55 deles cheguen a ras adultas?

b) Para conceder bolsas de estudo, un organismo valora os méritos presentados e asigna a cada candidato unha puntuación que indica máis méritos canto maior é o seu valor. Este ano, a puntuación segue unha distribución normal de media 100 e desviación típica 20, e tómase a decisión de conceder a bolsa ao 5% mellor do conxunto de solicitantes. Que puntuación é preciso alcanzar para obter a bolsa?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

1. Números y Álgebra:

Despeje la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$ si A y B son matrices cuadradas tales que $A - B$ es invertible. Luego, calcule X si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (A^2 - A - I)^{-1}$donde I es la matriz identidad de orden 2.

1. Números e Álxebra:
Despexe a matriz X da ecuación $XA = A + XB$, se A e B son matrices cadradas tales que $A - B$ é invertible. Logo, calcule X se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, onde I é a matriz identidade de orde 2.

Solución:

$$\boldsymbol{XA = A + XB \Longrightarrow XA - XB = A \Longrightarrow X(A - B) = A \Longrightarrow X = A(A - B)^{-1}}$$

$$\boldsymbol{X = A(A - B)^{-1}}$$

Cálculo de $\boldsymbol{B = (A^2 - A - I)^{-1}}$

$$\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Cálculo de $\boldsymbol{(A - B)^{-1}}$

$$\boldsymbol{A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{|A - B| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2}$$

$$\boldsymbol{(A - B)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{(A - B)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Cálculo de $\boldsymbol{X = A(A - B)^{-1}}$

$$\boldsymbol{X = A(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Problema 2:

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores de m, el sistema $\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m \\ my - z = 1 \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5 \end{cases}$

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores de m, o sistema $\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m, \\ my - z = 1, \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5. \end{cases}$

Solución:

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones son

$$A = \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ m & 2 & 2m-4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{vmatrix} = m^2(2m-4) - m(2-m^2) + 2m = m^2(m+4)$$

Si $m \neq \{0,4\}$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $m = 0$ las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$ es distinto de cero.

Calculamos el determinante de un menor de orden tres de la matriz ampliada

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto el rango de la matriz ampliada también es 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius al ser el rango coincidente y menor que el número de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones.

Si $m = 4$ las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4$ es distinto de cero.

Calculamos el determinante de un menor de orden tres de la matriz ampliada añadiendo la columna de los términos independientes del sistema

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -16$$

Como hay al menos un determinante de orden 3 en la matriz ampliada, su rango es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius, al tener las dos matrices distinto rango, el sistema es incompatible.

En resumen

m	$rango\ A$	$rango A^*$	Sistema
$\neq \{0, 4\}$	**3**	**3**	**Compatible determinado**
0	**2**	**2**	**Compatible indeterminado**
4	**2**	**3**	**Incompatible**

Problema 3:

3. Análisis:

a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 3$

b) Estudie si la función $f(x) = x + \text{sen}(x)$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0,2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo.

3. Análise:

a) Se $f(x) = ae^x + b$, diga que valores deben ter a e b para que se cumpran $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 3$.

b) Estude se a función $f(x) = x + \sin x$ ten extremos ou puntos de inflexión no intervalo $(0,2\pi)$, diga onde están en caso de que existan e esboce a gráfica de f nese intervalo.

Solución:

Como

$f(0) = a\,e^0 + b = 0 \Rightarrow b = -a$

la función debe ser del tipo $f(x) = ae^x - a$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{ae^x - a}{x}$$

El límite es $\frac{0}{0}$. Para que el límite sea 3, tenemos que resolver esta indeterminación utilizando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{ae^x - a}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{ae^x}{1} = a$$

y en consecuencia $a = 3$.

La función es $f(x) = 3e^x - 3$

b)

Las derivadas de la función $f(x) = x + sen(x)$ son

$$f'(x) = 1 + \cos(x)$$

$$f''(x) = -sen(x)$$

$$f'''(x) = -\cos(x)$$

Para hallar los extremos hay que hallar los valores en los que se anula la primera derivada en el intervalo $(0,2\pi)$.

$$1 + \cos(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = -1 \Rightarrow x = \pi$$

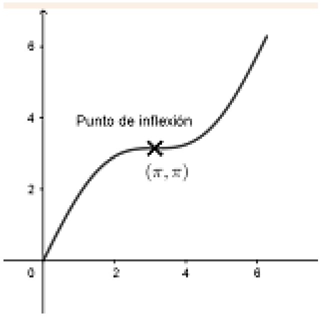
$$f''(\pi) = -sen(\pi) = 0$$

$$f'''(\pi) = -\cos(\pi) = 1$$

Como la primera derivada que no se anula es de orden impar, la función tiene un punto de inflexión en (π,π)

Además $1 + \cos(x) \geq 0$ en todo el intervalo $(0,2\pi)$, con lo que la función es creciente en ese intervalo.

La gráfica de la función es



La función tiene un punto de inflexión en (π, π)

Problema 4:

4. Análisis:

Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e y$\geq f(x)$, con $f(x) = xlnx$. Haga un esbozo gráfico de la región. Nota: lnx es el logaritmo neperiano de x.

4. Análise:
Calcule a área da rexión determinada polas desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Faga un esbozo gráfico da rexión. **Nota**: $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x.

Solución:

$x = 1; y = x$ son dos rectas y por lo tanto $x \geq 1$, $y \leq x$ son dos semiplanos.

Hay que estudiar la función $f(x) = xln(x)$

Esta función solo existe para valores $x \geq 0$. Como $f'(x) = \ln(x) + 1$

$$\ln(x) + 1 = 0 \Longrightarrow \ln(x) = -1 \Longrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

La segunda derivada es $f''(x) = \frac{1}{x}$

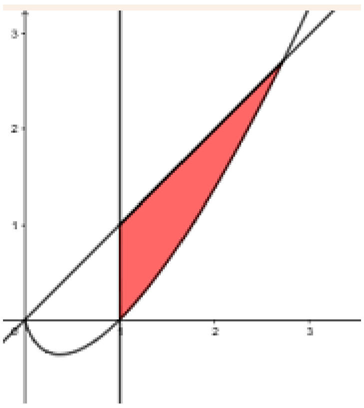
$$f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$$

Por tanto en el punto $\left(\frac{1}{e}, -e\right)$ hay un mínimo.

Además

$$f'(x)\begin{cases} < 0 & si \quad x < \dfrac{1}{e} \\ > 0 & si \quad x > \dfrac{1}{e} \end{cases} \Longrightarrow f(x)\begin{cases} Decrece & si \quad x < \dfrac{1}{e} \\ Crece & si \quad x > \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

Un esbozo de la región es



Hay que hallar los puntos de corte entre la recta $y = x$ y la función $f(x)$.

$$\begin{cases} y = x \\ y = xln(x) \end{cases} \Longrightarrow x = xln(x) \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = e \end{cases}$$

Hallamos la integral

$$\int (x - xln(x))dx = \int x(1 - ln(x))dx = \begin{bmatrix} u = 1 - \ln(x) \\ dv = xdx \\ du = -\frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = (1 - \ln(x))\frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx =$$

$$= (1 - \ln(x))\frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{2}dx = (1 - \ln(x))\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + C$$

Con lo que el área es

$$\int_1^e (x - xln(x))dx = \left[(1 - \ln(x))\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2 - 3}{4} \sim 1.0973$$

El área de la región es $\frac{e^2-3}{4}$

Problema 5:

5. Geometría:

a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2,-1,0)$ y $Q(3,0,0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0,4,-2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ y $\vec{v}(2,1,-2)$.

b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ con el plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

5. Xeometría:

a) Obteña as ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(2,-1,0)$ e $Q(3,0,0)$ e a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $R(0,4,-2)$ e é paralelo aos vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ e $\vec{v}(2,1,-2)$.

b) Calcule o ángulo agudo que forma a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ co plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

Solución:

a) El vector director de la recta que pasa por los puntos $P(2,-1,0)$ y $Q(3,0,0)$ es

$\overrightarrow{PQ} = (3,0,0) - (2,-1,0) = (1,1,0)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = 2 + t} \\ \boldsymbol{y = -1 + t} \\ \boldsymbol{z = 0} \end{cases}$$

La ecuación general del plano que pasa por $R(0,4,-2)$ y tiene como vectores directores $\vec{u}(1,0,-1)$ y $\vec{v}(2,1,-2)$ es

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-4 & z+2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = x + z + 2 = 0$$

El plano es $\boldsymbol{\pi: x + z + 2 = 0}$

b)

Para calcular el ángulo entre la recta y el plano hay que calcular el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{PQ}(1,1,0)$ y $\vec{r} = (1,0,1)$, (que es un vector perpendicular a π). El ángulo entre la recta y el plano será el complementario del obtenido.

Utilizando la fórmula del producto escalar:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{r} = |\overrightarrow{PQ}||\vec{r}| \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{r}}{|\overrightarrow{PQ}||\vec{r}|} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

El ángulo cuyo coseno es $\frac{1}{2}$ es 60º.

El ángulo entre la recta y el plano es el complementario, es decir 90º − 60º = 30º

El ángulo entre la recta y el plano es 30º

Problema 6:

6. Geometría:

a) Calcule el punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto al plano $\pi: x+z+2=0$.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ y $s: \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

6. Xeometría:

a) Calcule o punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto ao plano $\pi: x+z+2=0$.

b) Estude a posición relativa das rectas $r: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ e $s: \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

Solución:

a) Dado un vector $\vec{v}$; perpendicular al plano, hay que hallar la ecuación de la recta r que tiene la dirección de $\vec{v}$; y pasa por el punto P . La recta r corta al plano π en un punto X . El punto simétrico P' es tal que X es el punto medio el segmento PP' .

Un vector perpendicular a π es $\vec{v}$ (1,0,1) . La recta r se puede escribir como

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$$

El punto de corte con el plano π resulta de la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \begin{cases} x=2+t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases} \\ x+z+2=0 \end{cases} \Longrightarrow 2+t+t+2=0 \Longrightarrow t=-2 \Longrightarrow X=(0,-1,-2)$$

El punto $P'(a,b,c)$ simétrico de P debe cumplir que

$$\left(\frac{a+2}{2},\frac{b-1}{2},\frac{c+0}{2}\right)=(0,-1,-2) \Longrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \\ c=-4 \end{cases}$$

El punto simétrico es $P'(-2,-1,-4)$

b) Si $(A,\vec{v})$ y $(B,\vec{w})$ son un punto y un vector director de las rectas r y s , hay que calcular el determinante $[\vec{v},\vec{w},\overrightarrow{AB}]$. Si este determinante es 0, el vector $\overrightarrow{AB}$ es una combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (o las rectas son paralelas, que no es el caso) y las rectas se cortan en un punto. Si es distinto de cero, las rectas se cruzan.

Un punto y un vector director de cada una de las rectas son

$$r: \begin{cases} A(2,-1,0) \\ \vec{v}(1,1,0) \end{cases}; s: \begin{cases} B(2,-2,-1) \\ \vec{w}(2,1,-1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB}=(2,-2,-1)-(2,-1,0)=(0,-1,-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

Como $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son proporcionales, las dos rectas se cortan en un punto.

Para hallar el punto de corte, X , tenemos que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = 2 + 2s \\ y = -2 + s \\ z = -1 - s \end{array}\right.\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} s = -1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow X(0,-3,0)$$

Las rectas se cortan en el punto $\boldsymbol{X(0,-3,0)}$

Problema 7:

7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule las cuatro probabilidades $P(A), P(A \cap \bar{B}), P(A/B)$ y $P(B/A)$ sabiendo que $P(AB) = 0.8, P(AB) = 0.2$ y $P(A) = 2P(B)$. Nota: $\bar{B}$ es el suceso contrario o complementario de B.

b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan online y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe online; luego, la de que participe online si se sabe que es europeo.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule as catro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ e $P(B|A)$ sabendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A) = 2P(B)$. **Nota**: $\bar{B}$ é o suceso contrario ou complementario de B.

b) Nun coñecido congreso, o 60% dos científicos inscritos participan *online* e o resto asisten en persoa. Ademais, o 65% dos inscritos son europeos e o 80% dos que asisten en persoa tamén o son. Se se elixe ao azar a un dos inscritos, calcule a probabilidade de que sexa europeo e, á vez, participe *online*; logo, a de que participe *online* se se sabe que é europeo.

Solución:

a)

Como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - p(A \cap B) \Longrightarrow 0.8 = 2P(B) + P(B) - 0.2 \Longrightarrow P(B) = \frac{1}{3} \Longrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

Por tanto, sustituyendo $0.2 = \frac{1}{5}$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B) \Longrightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) \Longrightarrow P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{10}$$

Las soluciones son $P(A) = \frac{2}{3}, P(A \cap \bar{B}) = \frac{7}{15}, P(A/B) = \frac{3}{5}; P(B/A) = \frac{3}{10}$

b)

Sean los sucesos

O={ participar on line }

E={ ser europeo }

El enunciado proporciona las siguientes probabilidades:

$$p(O) = 0.6 \ \Longrightarrow \ p(\bar{O}\,) = 1 - p(O) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$p(E) = 0.65$$

$$p(\,E/\ \,) = 0.8$$

Por tanto

$$p(\,E\ \cap\ \bar{O}\,) = p(\,\bar{O}\,) \cdot\ p(E/\bar{O}\,)\ \Rightarrow\ p(\,E\ \cap\ \bar{O}\,) = 0.4\ \cdot\ 0.8 = 0.32$$

Podemos formar la siguiente tabla de doble entrada con los datos que tenemos:

	On line	Presencial	
Europeo		0.32	0.65
no europeo			
	0.6	0.4	1

Podemos completar la tabla:

	On line	Presencial	
Europeo	0.33	0.32	0.65
no europeo	0.27	0.08	0.35
	0.6	0.4	1

Por tanto la probabilidad de que sea europeo y, a la vez participe on line es

$$p(E \cap O) = p(E) - p(E/\bar{O}\,) = 0.65 - 0.32 = 0.33$$

La probabilidad de que participe online si se sabe que es europeo

$$p(\,O/E\,) = \frac{p(\,E\ \cap\ O\,)}{p(E)} = \frac{0.33}{0.65} = 0.51$$

La probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe online es 0.33.

La de que participe online si se sabe que es europeo es 0.51.

Problema 8:

8. Estadística y Probabilidad:

a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?

b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?.

8. Estatística e Probabilidade:
a) Nunha certa zona húmida, a probabilidade de que un cabezolo chegue a ra adulta é do 2%. Se se escollen ao azar 2500 deses cabezolos, cal é a probabilidade de que polo menos 55 deles cheguen a ras adultas?
b) Para conceder bolsas de estudo, un organismo valora os méritos presentados e asigna a cada candidato unha puntuación que indica máis méritos canto maior é o seu valor. Este ano, a puntuación segue unha distribución normal de media 100 e desviación típica 20, e tómase a decisión de conceder a bolsa ao 5% mellor do conxunto de solicitantes. Que puntuación é preciso alcanzar para obter a bolsa?

Solución:

a)

Es una binomial $\mathrm{B}(2500{,}0.02)$ porque son experiencias todas idénticas con la misma probabilidad. Una binomial $\mathrm{B}(n, p)$ se puede aproximar mediante una distribución normal $\mathrm{N}(np, \sqrt{npq})$, con $q = 1 - p$. En este caso

$$\mathrm{N}\left(np, \sqrt{npq}\right) = \mathrm{N}\left(2500 \cdot 0.02, \sqrt{2500 \cdot 0.02 \cdot 0.98}\right) = \mathrm{N}(50{,}7)$$

Hay que calcular $\mathrm{P}(X \geq 55)$ que debemos completar mediante la aproximación de Yates.

$$P(X \geq 54.5) = P\left(Z \geq \frac{54.5 - 50}{7}\right) = P(Z \geq 0.7) = 1 - P(Z < 0.7) = 1 - 0.7580 = 0.242$$

La probabilidad de que al menos 55 renacuajos lleguen a ranas adultas es 0.242

b)

Es una distribución normal $N(100{,}20)$. Hay que calcular k tal que $P(X \geq k) = 0.05$

$$P(X \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k-100}{20}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{k-100}{20}\right) = 0.05 \Longrightarrow P\left(Z < \frac{k-100}{20}\right) = 0.95 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{k-100}{20} = 1.65 \Longrightarrow k = 1.65 \cdot 20 + 100 = 133$$

La puntuación que es preciso alcanzar para obtener la beca es 133

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1. Números e Álxebra:

a) Calcule A se $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, obteña os valores de x, y e z sabendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ e que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Enténdase que I é a matriz identidade.

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} (m+1)x + z = 1, \\ (m+1)x + y + z = m+1, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m. \end{cases}$

3. Análise:

a) Enuncie os teoremas de Rolle e do valor medio do cálculo diferencial.

b) Explique se $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ está ou non nas hipóteses do teorema do valor medio do cálculo diferencial. En caso de que o estea, calcule un valor c para o cal se cumpra a tese dese teorema.

4. Análise:

a) Calcule mediante cambio de variable as integrais $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$ e $\int (\ln x)/x \, dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x \, dx$ empregando o método de integración por partes. Logo, obteña algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x \, dx = 3/2$.

5. Xeometría:

a) Considérense o plano $\pi\colon ax + y + z = 1$, onde a é un parámetro real e a recta $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estude a posición relativa de π e r en función de a e obteña o valor de a que fai que π e r sexan perpendiculares. Por último, razoe se r pode estar contida en π ou non.

b) Se $\pi\colon -3x + y + z = 1$, diga que valor ten que tomar b para que $r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ estea contida en π.

6. Xeometría:

Considérese o plano $\pi\colon 2x - y + z = 1$. Pídese:

a) Calcular a distancia de π ao punto de corte das rectas $r_1\colon \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ e $r_2\colon \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

b) Obter o punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule $P(A|B)$ se $B \subset A$. Logo, se $P(C) = 0.5$ e $P(D) = 0.6$, explique se C e D poden ser incompatibles. Por último, obteña $P(E \cup F)$ e $P(E \cap \bar{F})$ se E e F son independentes, $P(E) = 0.3$ e $P(F) = 0.2$.

b) Tírase un dado sete veces. Calcule a probabilidade de que saian exactamente dous seises.

8. Estatística e Probabilidade:

Para un determinado grupo de pacientes, a tensión arterial sistólica (medida en mmHg) segue unha distribución normal de media 123.6 e desviación típica 17.8. Calcule a probabilidade de que un paciente elixido ao azar teña unha tensión comprendida entre 100 e 120 mmHg. Logo, obteña o valor da tensión que é superado polo 67% dos pacientes.

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade** CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas.**

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1. Números y Álgebra:

a) Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y y z sabiendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema $\begin{cases} (m+1)x & & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$

3. Análisis:

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

4. Análisis:

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$ y $\int (\ln x)/x \, dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x \, dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x \, dx = 3/2$.

5. Geometría:

a) Considérense el plano $\pi: ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.

b) Si $\pi: -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π.

6. Geometría:

Considérese el plano $\pi: 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π.

7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule $P(A|B)$ si $B \subset A$. Luego, si $P(C) = 0.5$ y $P(D) = 0.6$, explique si C y D pueden ser incompatibles. Por último, obtenga $P(E \cup F)$ y $P(E \cap \bar{F})$ si E y F son independientes, $P(E) = 0.3$ y $P(F) = 0.2$.

b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

8. Estadística y Probabilidad:

Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Números y Álgebra:

a) Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y y z sabiendo que $\det(A-3I)=0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad.

1. Números e Álxebra:

a) Calcule A se $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, obteña os valores de x, y e z sabendo que $\det(A-3I)=0$, que $y \neq 0$ e que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Enténdase que I é a matriz identidade.

Solución:

a) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$(AB)^T = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ c-d=0 \\ a+b=2 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=\dfrac{1}{2} \\ d=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La matriz A es $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) Como A es inversible, su determinante es distinto de cero y por tanto

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ y & z \end{vmatrix} = 3z - xy \neq 0$$

Además

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z-3 \end{pmatrix}$$

$$det\,(A - 3I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & x \\ y & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow xy = 0$$

Como $3z - xy \neq 0$ resulta que $z \neq 0$

Hay que calcular A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ y & z \end{vmatrix} = 3z - xy = 3z$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & y \\ x & z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3z}\begin{pmatrix} z & -x \\ -y & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{3z} & -\frac{x}{3z} \\ -\frac{y}{3z} & \frac{3}{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{x}{3z} \\ -\frac{y}{3z} & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

$$(3z)A^{-1} + I = 3z\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{x}{3z} \\ -\frac{y}{3z} & \frac{1}{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z & -x \\ -y & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 & -x \\ -y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z+1 = 2 \\ -x = 0 \\ -y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Los valores son $x = 0; y = 1; z = 1$

Problema 2:

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema $\begin{cases}(m+1)x & & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m.\end{cases}$

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases}(m+1)x & & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + & y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + & my & + & (m-1)z & = & m.\end{cases}$

Solución:

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones son

$$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}; A^*=\begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & m & m-1 & m \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{|A|=\begin{vmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix}=(m+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m-1 \end{vmatrix}=(m+1)(m-2)}$$

Si $m \neq \{-1{,}2\}$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $m=-1$ las matrices son

$$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}; A^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$ es distinto de cero.

Calculamos el determinante de un menor de orden tres de la matriz ampliada

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-2+1+1=0$$

Por tanto el rango de la matriz ampliada también es 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius al ser el rango coincidente y menor que el número de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones.

Si $m=2$ las matrices son

$$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; A^*=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$ es distinto de cero.

Calculamos el determinante de un menor de orden tres de la matriz ampliada añadiendo la columna de los términos independientes del sistema

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Como hay al menos un determinante de orden 3 en la matriz ampliada, su rango es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius, al tener las dos matrices distinto rango, el sistema es incompatible.

En resumen

m	$rango\ A$	$rangoA^*$	Sistema
$\neq \{-1, 2\}$	**3**	**3**	**Compatible determinado**
-1	**2**	**2**	**Compatible indeterminado**
2	**2**	**3**	**Incompatible**

Problema 3:

3. Análisis:

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

3. Análise:

a) Enuncie os teoremas de Rolle e do valor medio do cálculo diferencial.

b) Explique se $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ está ou non nas hipóteses do teorema do valor medio do cálculo diferencial. En caso de que o estea, calcule un valor c para o cal se cumpra a tese dese teorema.

Solución

a) El teorema de Rolle dice:

"Si una función f contínua en el intervalo cerrado $[\,a, b\,]$, derivable en $(\,a, b\,)$ y con $f(a) = f(b)$, entonces existe, al menos un punto c perteneciente al intervalo $(\,a, b\,)$ de modo que la derivada en él se anula, $f'(c) = 0$."

b)

La función $f(x)$ en los extremos del intervalo es

$$f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1$$

$$f(1) = \sqrt{1-1^2} = 0$$

Como $f(0) \neq f(1)$, no se dan las condiciones que exige el teorema de Rolle, por lo que el teorema no asegura la existencia del punto c . De hecho este punto no existe porque

$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$

El único punto donde se anula la derivada es en $x = 0$, pero $0 \notin (\,0, 1\,)$

No se dan las condiciones del teorema de Rolle y además el punto c no existe.

Problema 4:

4. Análisis:

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x\, dx$ y $\int (\ln x)/x\, dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x\, dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x\, dx = 3/2$.

4. Análise:

a) Calcule mediante cambio de variable as integrais $\int (\sin x)^5 \cos x\, dx$ e $\int (\ln x)/x\, dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x\, dx$ empregando o método de integración por partes. Logo, obteña algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x\, dx = 3/2$.

Solución

a) $\int sen^5(x)\cos(x)dx = \begin{bmatrix} \text{u} = \text{sen(x)} \\ \text{du} = \cos(\text{x})\text{dx} \end{bmatrix} = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{sen^6(x)}{6} + C$

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \begin{bmatrix} \text{u} = \ln(\text{x}) \\ \text{du} = \frac{1}{\text{x}}\text{dx} \end{bmatrix} = \int \text{udu} = \frac{\text{u}^2}{2} + \text{C} = \frac{\ln^2(\text{x})}{2} + \text{C}$$

$$\boldsymbol{\int \text{sen}^5(\text{x})\cos(\text{x})\text{dx} = \frac{\text{sen}^6(\text{x})}{6} + \text{C}}$$

$$\boldsymbol{\int \frac{\ln(\text{x})}{\text{x}} \text{dx} = \frac{\ln^2(\text{x})}{2} + \text{C}}$$

b) $I = \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x) \\ du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x} \\ v = \ln(x) \end{bmatrix} = \ln(x)\ln(x) - \int \ln(x)\frac{dx}{x}$

Por tanto

$$I = \ln(x)\ln(x) - I \Rightarrow 2I = \ln(x)\ln(x) + C \Rightarrow I = \frac{ln^2(x)}{2} + C$$

$$\int_e^B \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{ln^2(x)}{2}\right]_e^B = \frac{ln^2(B)}{2} - \frac{ln^2(e)}{2} = \frac{ln^2(B)}{2} - \frac{1}{2}$$

Para que sea igual a $\frac{3}{2}$

$$\frac{ln^2(B)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{ln^2(B)}{2} = 2 \Rightarrow ln^2(x) = 4 \Rightarrow \begin{cases} \ln(B) = 2 \\ \ln(B) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = e^2 \\ B = e^{-2} \end{cases}$$

Los valores de B son e^2 y e^{-2}.

Problema 5:

5. Geometría:

a) Considérense el plano $\pi: ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.

b) Si $\pi: -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π.

5. Xeometría:

a) Considérense o plano $\pi: ax + y + z = 1$, onde a é un parámetro real e a recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estude a posición relativa de π e r en función de a e obteña o valor de a que fai que π e r sexan perpendiculares. Por último, razoe se r pode estar contida en π ou non.

b) Se $\pi: -3x + y + z = 1$, diga que valor ten que tomar b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ estea contida en π.

Solución

La recta r puede ponerse como corte de dos planos

$$\begin{cases} 3x - 3 = 2y \\ 3y = 3z + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Podemos saber la posición relativa de la recta y el plano, estudiando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & 2y & & & = & 3 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2a + 6$$

Si $a \neq \{-3\}$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única. La recta y el plano se cortan en un punto.

Si $a = -3$ las matrices son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2$ es distinto de cero.

Calculamos el determinante de un menor de orden tres de la matriz ampliada

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

Como hay al menos un determinante de orden 3 en la matriz ampliada, su rango es 3. Por el teorema de

Rouché-Fröbenius, al tener las dos matrices distinto rango, el sistema es incompatible. La recta y el plano son paralelos.

En resumen

a	$rango\ A$	$rangoA^*$	Sistema	Posición relativa
$\neq -3$	**3**	**3**	**Compatible determinado**	**La recta y el plano se cortan en un punto**
2	**2**	**3**	**Incompatible**	**La recta y el plano son paralelos**

Un vector perpendicular al plano es $\vec{u}(\ a, 1{,}1\ )$. Un vector director de la recta r es $\vec{v}(\ 2{,}3{,}3\ )$. La recta es perpendicular al plano cuando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales.

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

El valor de a que hace que π y r sean perpendiculares es $a = \frac{2}{3}$

r no puede estar contenida en π . Según se ha visto mas arriba, la recta y el plano solo pueden cortarse en un punto o ser paralelas.

r no puede estar contenida en π porque la recta y el plano solo pueden cortarse en un punto o ser paralelas.

b) Un vector perpendicular a π es $\vec{w}(\ -3{,}1{,}1\ )$. Un punto y un vector director de la recta r son $B(\ 1, b, -1\ )$ y $\vec{r}(\ 2{,}3{,}3\ )$.

Para que la recta esté contenida en el plano, los vectores $\vec{w}$ y $\vec{r}$ deben ser perpendiculares y además el punto B debe estar en el plano π . Para que los vectores sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero.

$$\vec{w} \cdot \vec{r} = 0 \Rightarrow (-3)2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 0$$

Los vectores son perpendiculares entre sí

Para que el punto B pertenezca al plano

$$-3 \cdot 1 + b + (-1) = 1 \Rightarrow b = 5$$

Para $\mathrm{b} = 5$ la recta está contenida en el plano

Problema 6:

6. Geometría:

Considérese el plano $\pi: 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas $r_1: \begin{cases} x = 2+\lambda, \\ y = 0, \\ z = -1-\lambda \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1+\mu, \\ z = 0, \end{cases} (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π.

6. Xeometría:

Considérese o plano $\pi: 2x - y + z = 1$. Pídese:

a) Calcular a distancia de π ao punto de corte das rectas $r_1: \begin{cases} x = 2+\lambda, \\ y = 0, \\ z = -1-\lambda \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1+\mu, \\ z = 0, \end{cases} (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

b) Obter o punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π.

Solución

El punto de corte X , de las dos rectas resulta de la solcuión del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 0 \\ z = -1-\lambda \end{cases} \\ \begin{cases} x = \mu \\ y = -1+\mu \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+\lambda = \mu \\ 0 = -1+\mu \\ -1-\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow X(1,0,0)$$

La distancia de π a X es

$$d(\pi, X) = \frac{|2\cdot 1 - 0 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

La distancia del punto al plano es $\frac{\sqrt{6}}{6}$

b) Para hallar el punto simétrico P' de P con respecto a π , hay que hallar una recta s perpendicular a π pasando por P . Después el punto de corte Y entre la recta s y el plano π . El punto P' será el punto tal que Y sea el punto medio del segmento PP' .

Un vector perpendicular a π es $\bar{u}(\,2,-1,1\,)$. La recta s tiene por ecuación

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

El punto de corte con π resulta de la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \\ 2x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow 2(1+2t) - (-t) + t = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{6} \Rightarrow Y\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$

El punto $P'(a,b,c)$ es tal que

$$\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+0}{2},\frac{c+0}{2}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6},-\frac{1}{6}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\ y=\frac{1}{3}\\ z=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

El punto simétrico de P respecto de π es $\mathbf{P'}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$

Problema 7:

7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule $P(A|B)$ si $B \subset A$. Luego, si $P(C) = 0.5$ y $P(D) = 0.6$, explique si C y D pueden ser incompatibles. Por último, obtenga $P(E \cup F)$ y $P(E \cap \bar{F})$ si E y F son independientes, $P(E) = 0.3$ y $P(F) = 0.2$.

b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule $P(A|B)$ se $B \subset A$. Logo, se $P(C) = 0.5$ e $P(D) = 0.6$, explique se C e D poden ser incompatibles. Por último, obteña $P(E \cup F)$ e $P(E \cap \bar{F})$ se E e F son independentes, $P(E) = 0.3$ e $P(F) = 0.2$.

b) Tírase un dado sete veces. Calcule a probabilidade de que saian exactamente dous seises.

Solución

a) Puesto que $B \subset A$, si ocurre el hecho B , ocurre el hecho A y por tanto $p(A/B) = 1$.

También puede demostrarse:

Como $p(A \cap B) = p(B)$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B)}{p(B)} = 1$$

C y D no pueden ser incompatibles, porque

$$p(C \cup D) = p(C) + p(D) - p(C \cap D)$$

Como $p(C \cup D)$ es como máximo 1 (el suceso seguro):

$$p(C) + p(D) - p(C \cap D) \leq 1 \Rightarrow 0.5 + 0.6 - p(C \cap D) \leq 1 \Rightarrow p(C \cap D) \geq 0.1$$

Si E y F son independientes

$$p(E \cap F) = p(E) \cdot p(F) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$$

$$p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F) = 0.3 + 0.2 - 0.06 = 0.44$$

$$p(E \cap \bar{F}) = p(E) - p(E \cap F) = 0.3 - 0.06 = 0.24$$

$$\boldsymbol{P(A/B) = 1}$$

$$\boldsymbol{P(E \cup F) = 0.44}$$

$$\boldsymbol{P(E \cap \bar{F}) = 0.24}$$

b) Es una binomial $B\left(7, \frac{1}{6}\right)$ donde se considera éxito a sacar un seis

$$p(X = 2) = \binom{7}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.2344$$

La probabilidad de que salgan exactamente dos seises es 0.2344

Problema 8:

8. Estadística y Probabilidad:
Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

8. Estatística e Probabilidade:
Para un determinado grupo de pacientes, a tensión arterial sistólica (medida en mmHg) segue unha distribución normal de media 123.6 e desviación típica 17.8. Calcule a probabilidade de que un paciente elixido ao azar teña unha tensión comprendida entre 100 e 120 mmHg. Logo, obteña o valor da tensión que é superado polo 67% dos pacientes.

Solución:

Es una distribución normal $N(\,123.6; 17.8\,)$. Hay que calcular $p(\,100 < X < 120\,)$

$$p(\,100 \le X \le 120\,) = p\left(\frac{100-123.6}{17.8} \le Z \le \frac{120-123.6}{17.8}\right) = p(\,-1.33 \le Z \le -0.20\,) =$$

$$= p(\,0.2 \le Z \le 1.33\,) = p(\,Z \le 1.33\,) - p(\,Z \le 0.2\,) = 0.9082 - 0.5793 = 0.3289$$

La probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg es 0.3289

Hay que calcular a tal que $p(\,X > a\,) = 0.67$. Como la probabilidad es mayor que 0.5, el valor de a debe ser menor que la media.

$$p(\,X > a\,) = p\left(Z > \frac{a-123.6}{17.8}\right) = p\left(Z \le \frac{-a+123.6}{17.8}\right) = 0.67 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-a+123.6}{17.8} = 0.44 \;\Rightarrow\; a = 123.6 - 0.44 \cdot 17.8 = 115.768$$

El valor de la tensión que es superado por el 67 % de los pacientes es a = 115.728.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados. En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero. Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1.– (2 puntos) Sea
$$f(x)=\frac{x}{(x-2)(x-1)}.$$

(i) Halla el dominio, asíntotas verticales y horizontales de la función f, en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Problema 2:

2.– (2 puntos) Halla el área del recinto encerrado por las gráficas de las parábolas $y=x^2-2x+1$ e $y=-2x^2+2x$.

Problema 3:

3.– (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x^3\right)^{\frac{1}{x}}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x+2}-\dfrac{x^2+1}{x-2}\right)$.

Problema 4:

4.– (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado:
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+(a+1)y+z &=& a,\\ x+y+(a+1)z &=& a,\\ (a+1)x+y+z &=& a.\end{array}\right.$$

Problema 5:

5.– (2 puntos) Dada una matriz de tamaño 4×4 cuyo determinante es igual a 2. Calcula el valor del determinante de la matriz resultante al realizar las siguientes operaciones:

(i) se traspone la matriz,

(ii) se cambian entre sí la primera y la cuarta columna,

(iii) se multiplica la tercera columna por -4,

(iv) se multiplica toda la matriz por 4.

Problema 6:

6.– (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a-1 & a^2-1 & 1 \\ a^2-1 & a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Problema 7:

7.– (2 puntos) Determina la posición relativa de la recta

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{1}$$

y el plano de ecuación $3x + 2y - 11z + 3 = 0$.

Problema 8:

8.– (2 puntos) Halla el punto simétrico del punto $A(0, 2, 3)$ respecto al plano π de ecuación $x + y - z = 4$.

Problema 9:

9.– (2 puntos) En una empresa automovilística se ha recibido un lote de piezas de coches de tipos A, B y C. El 80 % corresponde al coche de tipo A, el 10 % al B y el resto al C. Se ha observado que hay piezas que están defectuosos en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de B y el 5 % de C. Se elige una pieza al azar. Calcula:

(i) la probabilidad de coger una pieza defectuosa.

(ii) si sabemos que la pieza es defectuosa, la probabilidad de que sea del tipo A.

Problema 10:

10.– (2 puntos) La edad media de un jugador de la NBA sigue una distribución normal de media 26 años y desviación típica 5 años. Si se elige un jugador al azar, halla

(i) la probabilidad de que su edad sea superior o igual a 31 años;

(ii) la probabilidad de que su edad esté entre 21 y 31 años.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1.– (2 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-1)}.$$

(i) Halla el dominio, asíntotas verticales y horizontales de la función f, en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Solución

a) Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$(x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2 \ \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow R - \{1, 2\}}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ x = 1\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales}}.$$

b) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{x}{x^2-3x+2}.$$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-3x+2) - x\cdot(2x-3)}{(x-2)^2(x-1)^2} = \frac{x^2-3x+2-2x^2+3x}{(x-2)^2(x-1)^2} = \frac{-x^2+2}{(x-2)^2(x-1)^2}.$$

Por ser $(x-2)^2(x-1)^2 > 0, \forall x \in D(f)$, $f'(x)$ será positiva o negativa cuando sea positivo o negativo la expresión $-x^2+2$.

$$-x^2+2 = 0;\ \ x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2}.$$

Siendo la función $g(x) = -x^2+2$ una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2, que corta el eje de abscisas en los puntos $P_1(-\sqrt{2}, 0)$ y $P_2(\sqrt{2}, 0)$. Teniendo en cuenta lo anterior y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, 2\right) \cup (2, +\infty).}$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon\left(-\sqrt{2}, 1\right) \cup \left(1, \sqrt{2}\right).}$$

De los periodos de crecimiento y decrecimiento se deduce que la función tiene un mínimo relativo para $x = -\sqrt{2}$ y un máximo relativo para $x = \sqrt{2}$.

$$f\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{\left(-\sqrt{2}-2\right)\left(-\sqrt{2}-1\right)} = \frac{-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2} = \frac{-\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}\cdot\left(4-3\sqrt{2}\right)}{\left(4+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(4-3\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\cdot\left(4-3\sqrt{2}\right)}{16-18} = \frac{-\sqrt{2}\cdot\left(4-3\sqrt{2}\right)}{-2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(4-3\sqrt{2}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mínimo}:\ A\left[-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}\cdot\left(4-3\sqrt{2}\right)}{2}\right].}$$

$$f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2} = \frac{\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(4+3\sqrt{2}\right)}{\left(4-3\sqrt{2}\right)\cdot\left(4+3\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\left(4+3\sqrt{2}\right)}{16-18} = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(4+3\sqrt{2}\right)}{-2} = -\frac{\sqrt{2}\cdot\left(4+3\sqrt{2}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Máximo}:\ B\left[\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}\cdot\left(4+3\sqrt{2}\right)}{2}\right].}$$

Problema 2:

2.– (2 puntos) Halla el área del recinto encerrado por las gráficas de las parábolas $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = -2x^2 + 2x$.

Solución

Los puntos de corte de las dos parábolas tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 2x + 1 = -2x^2 + 2x;$$

$3x^2 - 4x + 1 = 0;\ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} =$

$= \frac{2 \pm 1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \rightarrow A\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{9}\right) \\ x_2 = 1 \rightarrow B(1, 0) \end{cases}.$

La parábola $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ es convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2 y cuyo vértice es $B(1, 0)$.

La parábola $y = -2x^2 + 2x$ es cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2 cuyo vértice es el siguiente:

$$y' = -4x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

La situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta, de la cual se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{\frac{1}{3}}^{1} [(-2x^2 + 2x) - (x^2 - 2x + 1)] \cdot dx = \int_{\frac{1}{3}}^{1} (-3x^2 + 4x - 1) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - x\right]_{\frac{1}{3}}^{1} = [-x^3 + 2x^2 - x]_{\frac{1}{3}}^{1} =$$

$$= (-1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1) - \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1-6+9}{27} = \frac{4}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S = \frac{4}{27}\ u^2 \cong 0.148\ u^2}.$$

Problema 3:

3.– (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x + x^3\right)^{\frac{1}{x}}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x+2} - \dfrac{x^2+1}{x-2}\right)$.

Solución

$$a)\ \lim_{x\to 0}(e^x + x^3)^{\frac{1}{x}} = (e^0 + 0^3)^{\frac{1}{0}} = (1+0)^\infty = 1^\infty \Rightarrow Ind.\, del\ n^{\underline{o}}\ e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \lim_{x\to 0}(e^x + x^3)^{\frac{1}{x}};\ \ LA = L\left[\lim_{x\to 0}(e^x + x^3)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\mathrm{L}(e^x + x^3)^{\frac{1}{x}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot L(e^x + x^3)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{L(e^x+x^3)}{x} = \frac{L(e^0+0^3)}{0} = \frac{L(1+0)}{0} = \frac{L1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+3x^2}{e^x+x^3}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+3x^2}{e^x+x^3} = \frac{e^0+3\cdot 0^2}{e^0+0^3} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LA = 1 \Rightarrow A = e^1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to 0}(e^x + x^3)^{\frac{1}{x}} = e.}}$$

$$\text{b)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2} - \frac{x^2+1}{x-2}\right) = \infty - \infty \Rightarrow Ind. \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-1)(x-2)-(x^2+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2 - x^3 - 2x^2 - x - 2}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^2-2x}{x^2-4} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2} - \frac{x^2+1}{x-2}\right) = -4.}}$$

Problema 4:

4.– (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado:

$$\begin{cases} x+(a+1)y+z &= a, \\ x+y+(a+1)z &= a, \\ (a+1)x+y+z &= a. \end{cases}$$

Solución

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a \\ a+1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=1+1+(a+1)^3-(a+1)-(a+1)-(a+1)=2+(a+1)^3-3(a+1)=$$

$$=2+a^3+3a^2+3a+1-3a-3=a^3+3a^2=a^2(a+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} a_1=0 \\ a_2=-3 \end{cases}.$$

$$\boldsymbol{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 1.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 1 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

(Con dos grados de libertad, o sea, dos parámetros).

$$Para\ a=-3 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3-3-12-6+3-6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=-3 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq 0, a \neq -3$:

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & a+1 & 1 \\ a & 1 & a+1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{a^2(a+3)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{a^2(a+3)}=\frac{1+1+(a+1)^2-1-(a+1)-(a+1)}{a(a+3)}=$$

$$= \frac{1+a^2+2a+1-a-1-a-1}{a(a+3)} = \frac{a^2}{a(a+3)} = \frac{a}{a+3}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & a+1 \\ a+1 & a & 1 \end{vmatrix}}{a^2(a+3)} = \frac{a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{a^2(a+3)} = \frac{1+1+(a+1)^2-(a+1)-(a+1)-1}{a(a+3)} =$$

$$= \frac{1+(a+1)^2-2(a+1)}{a(a+3)} = \frac{1+a^2+2a+1-2a-2}{a(a+3)} = \frac{a^2}{a(a+3)} = \frac{a}{a+3}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a+1 & a \\ 1 & 1 & a \\ a+1 & 1 & a \end{vmatrix}}{a^2(a+3)} = \frac{a\cdot\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{a^2(a+3)} = \frac{1+1+(a+1)^2-(a+1)-1-(a+1)}{a(a+3)} =$$

$$= \frac{1+(a+1)^2-2(a+1)}{a(a+3)} = \frac{1+a^2+2a+1-2a-2}{a(a+3)} = \frac{a^2}{a(a+3)} = \frac{a}{a+3}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución}: \boldsymbol{x = y = z = \frac{a}{a+3}, \forall a \in R - \{0, -3\}.}}$$

Para $a = 0$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{matrix}\right\}$, que es homogéneo y también compatible indeterminado, equivalente a $x+y+z=0$.

Haciendo $y = \lambda, z = \mu$;

$$\underline{\boldsymbol{Solución}: \boldsymbol{x = -\lambda-\mu;\ \ y = \lambda;\ \ z = \mu, \forall \lambda, \mu \in R.}}$$

Problema 5:

5.– (2 puntos) Dada una matriz de tamaño 4×4 cuyo determinante es igual a 2. Calcula el valor del determinante de la matriz resultante al realizar las siguientes operaciones:

(i) se traspone la matriz,

(ii) se cambian entre sí la primera y la cuarta columna,

(iii) se multiplica la tercera columna por -4,

(iv) se multiplica toda la matriz por 4.

Solución

El determinante de una matriz es igual que el determinante de su traspuesta, por lo cual, el apartado (1) no produce variación en el valor del determinante.

Si se intercambian dos líneas de una matriz, el valor de su determinante cambia de signo, por lo cual, el aparado (2) cambia de signo el valor del determinante.

Si se multiplica una línea de una matriz por un número real, el valor del determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número, por lo cual, el apartado (3) multiplica el valor del determinante por -4.

Como se multiplica la matriz por un número, y la matriz es de dimensión 4×4, por lo cual, el apartado (4) multiplica el valor del determinante de la matriz por 4^4.

Teniendo en cuenta lo anterior, el valor resultante es el siguiente:

$D = 2 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot 4^4 = 2 \cdot 4^5 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{D = 2.048}}.$$

Problema 6:

6.– (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a-1 & a^2-1 & 1 \\ a^2-1 & a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Solución

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a-1 & a^2-1 & 1 \\ a^2-1 & a-1 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2-1)(a+1) + (a^2-1) - (a-1) - (a+1)(a-1) =$$

$$= a^3 + a^2 - a - 1 + a^2 - 1 - a + 1 - a^2 + 1 = a^3 + a^2 - 2a =$$

$$= a(a^2 + a - 2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0;\ \ a^2 + a - 2 = 0;\ \ a = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = -2, x_3 = 1.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{-2, 0, 1\}.}}$$

Para $a = 2$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Se obtiene su inversa por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2 \to \tfrac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_3 + 2F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_4 \to \tfrac{1}{4}F_4\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 + \frac{1}{2}F_3 \\ F_2 \to F_2 - \frac{1}{2}F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix}.}}$$

Problema 7:

7.– (2 puntos) Determina la posición relativa de la recta

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{1}$$

y el plano de ecuación $3x+2y-11z+3=0$.

Solución

La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r\equiv\frac{x-3}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{1}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x-3=0\\ y+1=z-5\end{cases};\quad r\equiv\begin{cases}x-3=0\\ y-z+6=0\end{cases}.$$

La recta r el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r}x=3\\ y-z=-6\\ 3x+2y-11z=-3\end{array}\right\}.$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\3&2&-11\end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&-1&-6\\3&2&-11&-3\end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

1º -- $Rang\ M=Rang\ M'=2\Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2º -- $Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3º -- $Rang\ M=Rang\ M'=3\Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M\Rightarrow\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\3&2&-11\end{vmatrix}=-11+2=-9\neq0\Rightarrow Rang\ M=3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Rang\ M=Rang\ M'=3\Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}}$$

Problema 8:

8.– (2 puntos) Halla el punto simétrico del punto $A(0,2,3)$ respecto al plano π de ecuación $x+y-z=4$.

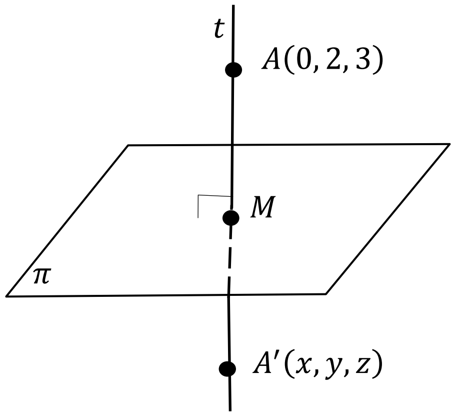
Solución

La recta t que pasa por $A(0,2,3)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y-z=4$ tiene como vector director al vector normal de π: $\vec{n}=(1,1,-1)$.

La expresión de t dada por unas ecuaciones paramétricas es: $t \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x+y-z=4 \\ r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda+(2+\lambda)-(3-\lambda)=4;$$



$$\lambda+2+\lambda-3+\lambda=4;\ \ 3\lambda=5 \Rightarrow \lambda=\frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{5}{3} \\ y=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3} \\ z=3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right).$$

Tiene que cumplirse que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MA'}$.

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\left[\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)-(0,2,3)\right]=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right).$$

$$\overrightarrow{MA'}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OM}=\left[(x,y,z)-\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)\right]=\left(x-\frac{5}{3},y-\frac{11}{3},z-\frac{4}{3}\right).$$

$$\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)=\left(x-\frac{5}{3},y-\frac{11}{3},z-\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-\frac{5}{3}=\frac{5}{3} \to x=\frac{10}{3} \\ y-\frac{11}{3}=\frac{5}{3} \to y=\frac{16}{3} \\ z-\frac{4}{3}=-\frac{5}{3} \to z=-\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{A'\left(\frac{10}{3},\frac{16}{3},-\frac{1}{3}\right)}}.$$

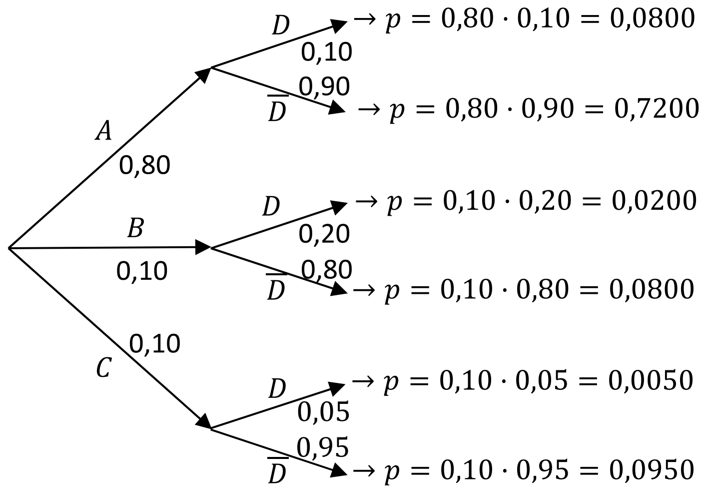
Problema 9:

9.– (2 puntos) En una empresa automovilística se ha recibido un lote de piezas de coches de tipos A, B y C. El 80 % corresponde al coche de tipo A, el 10 % al B y el resto al C. Se ha observado que hay piezas que están defectuosos en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de B y el 5 % de C. Se elige una pieza al azar. Calcula:

(i) la probabilidad de coger una pieza defectuosa.

(ii) si sabemos que la pieza es defectuosa, la probabilidad de que sea del tipo A.

Solución



$a)$ $\quad P = P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) =$

$= P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$

$= 0{,}80 \cdot 0{,}10 + 0{,}10 \cdot 0{,}20 + 0{,}10 \cdot 0{,}05 = 0{,}080 + 0{,}020 + 0{,}005 = \underline{0{,}105}.$

$b)\ P = P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(D)} = \frac{0{,}80 \cdot 0{,}10}{0{,}105} = \frac{0{,}080}{0{,}105} = \underline{0{,}7619}.$

Problema 10:

10.– (2 puntos) La edad media de un jugador de la NBA sigue una distribución normal de media 26 años y desviación típica 5 años. Si se elige un jugador al azar, halla

(i) la probabilidad de que su edad sea superior o igual a 31 años;

(ii) la probabilidad de que su edad esté entre 21 y 31 años.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Solución

$a)\ Datos:\ \mu = 26;\ \ \sigma = 5.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(26, 5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-26}{5}$.

$P = P(X \geq 31) = P\left(Z \geq \frac{31-26}{5}\right) = P\left(Z \geq \frac{5}{5}\right) = P(Z \geq 1) =$

$= [1 - P(Z \leq 1)] = 1 - 0{,}8413 = \underline{0{,}1587}$.

$$\boldsymbol{P(X \geq 31) = \underline{0,1587}.}$$

$b)\ P = P(21 < X < 31) = P\left(\frac{21-26}{5} < Z < \frac{31-26}{5}\right) = P\left(\frac{-5}{5} < Z < \frac{5}{5}\right) =$

$= P(-1 < Z < 1) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = P(Z \leq 1) - 1 + P(Z \leq 1) =$

$= 2 \cdot P(Z \leq 1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 1{,}6826 - 1 = \underline{0{,}6826}$.

$$\boldsymbol{P(21 < X < 31) = \underline{0,6826}.}$$

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados. En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero. Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1.– (2 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{1 + 4x^4 - x^2}{x}.$$

(i) Halla el dominio y asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la función f en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Problema 2:

1.– (2 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{1 + 4x^4 - x^2}{x}.$$

(i) Halla el dominio y asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la función f en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Problema 3:

3.– (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Problema 4:

4.– (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Problema 5:

5.– (2 puntos)

(i) Determina las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

que satisfagan la siguiente identidad: $MM^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde M^T representa la matriz traspuesta de M.

(ii) Resuelve el sistema

$$\begin{cases} AX + BY &= C, \\ AX &= Y, \end{cases}$$

sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Problema 6:

6.– (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3 = -I$, donde I es la matriz identidad de orden tres.

Problema 7:

7.– (2 puntos) La proyección ortogonal del punto $P(1, 0, -1)$, sobre el plano π es el punto $Q(-3, 2, 5)$. Halla la ecuación del plano π y las coordenadas del punto simétrico del P respecto a dicho plano π.

Problema 8:

8.– (2 puntos) Determina la posición relativa de los tres planos, según los valores del parámetro m:

$$\begin{cases} mx + y + z &= 1, \\ x + my + z &= m, \\ x + y + mz &= m^2. \end{cases}$$

Problema 9:

9.– (2 puntos) La estadística de un equipo de baloncesto en un partido, desvela que el 45 % de los puntos conseguidos por el equipo corresponde al jugador número 23, de los cuales el 65 % son triples; 15 % al jugador número 6 de los cuales el 25 % son triples y el resto de la puntuación, siendo el 10 % triples, corresponde a otros jugadores del equipo. Halla la probabilidad de que:

(i) una de las jugadas del equipo haya acabado en un triple.

(ii) sabiendo que la canasta ha sido un triple, haya sido conseguida por el jugador número 23.

Problema 10:

10.– (2 puntos) La estatura media de un jugador de fútbol del Real Madrid sigue una distribución normal de media 180 cm y desviación típica 10 cm. Si se elige un jugador al azar, calcula:

(i) la probabilidad de que su altura sea superior o igual a 200 cm;

(ii) la probabilidad de que su altura esté entre 170 y 190 cm.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1.– (2 puntos) Sea

$$f(x)=\frac{1+4x^4-x^2}{x}.$$

(i) Halla el dominio y asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la función f en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Solución

$a)$ El dominio de una función racional es el conjunto de valores reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador, por lo cual: $\underline{D(f) \Rightarrow R-\{0\}}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ no\ tiene\ as\acute{i}ntotas\ horizontales.}}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador (sin que se anule el numerador).

Asíntota vertical: $\underline{\boldsymbol{x=0\ (Eje\ Y)}}$**.**

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$, con m finito y $m\neq 0$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1+4x^4-x^2}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+4x^4-x^2}{x^2}=\infty.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ no\ tiene\ s\acute{i}ntotas\ oblicuas.}}$$

$b)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{(16x^3-2x)\cdot x-(1+4x^4-x^2)\cdot 1}{x^2}=\frac{16x^4-2x^2-1-4x^4+x^2}{x^2}=\frac{12x^4-x^2-1}{x^2}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{12x^4-x^2-1}{x^2}=0;\ 12x^4-x^2-1=0 \Rightarrow a=x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12a^2-a-1=0;\ a=x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{24}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{24}=\frac{1\pm 7}{24} \Rightarrow a_1=\frac{1}{3}, a_2=-\frac{1}{4}.$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$a_1=\frac{1}{3} \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad a_2=-\frac{1}{4} \Rightarrow x^2=-\frac{1}{4} \Rightarrow x\notin R.$$

Por ser $f(-x) = -f(x)$ la función es simétrica con respecto al origen.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$:

$f'(1) = \frac{12 \cdot 1^4 - 1^2 - 1}{1^2} = 12 - 1 - 1 > 0 \Rightarrow Creciente.$

. Teniendo en cuenta lo anterior, el dominio de la función y la simetría con respecto al origen, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right).}$$

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).}$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$f''(x) = \frac{(48x^3-2x)\cdot x^2 - (12x^4-x^2-1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{48x^4-2x^2-24x^4+2x^2+2}{x^3} = \frac{24x^4+2}{x^3}.$

$f''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1 + \frac{4}{81} - \frac{1}{9}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{81+4-9}{81}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{76}{27\sqrt{3}} = -\frac{76\sqrt{3}}{81} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mín.}\ A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{76\sqrt{3}}{81}\right).}$$

Por simetría con respecto al origen: $\Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{Máx.}\ B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{76\sqrt{3}}{81}\right).}$$

Problema 2:

1.– (2 puntos) Sea

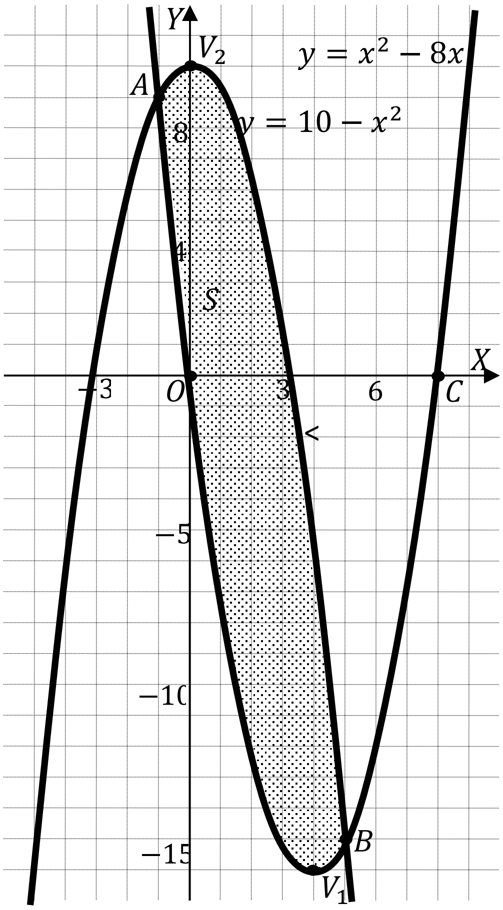
$$f(x) = \frac{1+4x^4-x^2}{x}.$$

(i) Halla el dominio y asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la función f en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Solución

Los puntos de corte de las parábolas se obtienen teniendo en cuenta que las abscisas de los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:



$$x^2 - 8x = 10 - x^2;$$

$$2x^2 - 8x - 10 = 0;\ \ x^2 - 4x - 5 = 0;$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \to A(-1, 9) \\ x_2 = 5, \to B(5, -15) \end{cases}.$$

La parábola $y = x^2 - 8x$, que es convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto siguiente:

$$y'(x) = 2x - 4 = 0;\ x - 4 = 0;$$

$$x = 4 \Rightarrow V_1(4, -16).$$

Otros puntos de la parábola son $O(0,0)$ y $C(8,0)$.

La parábola $y = 10 - x^2$, que es cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto $V_2(0, 10)$.

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

La superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{5} [(10 - x^2) - (x^2 - 8x)] \cdot dx = \int_{-1}^{5} (-2x^2 + 8x + 10) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + 10x\right]_{-1}^{5} = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 + 10x\right]_{-1}^{5} =$$

$$= \left(-\frac{2 \cdot 5^3}{3} + 4 \cdot 5^2 + 10 \cdot 5\right) - \left[-\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1)\right] =$$

$$= -\frac{250}{3} + 100 + 50 - \frac{2}{3} - 4 + 10 = -\frac{252}{3} + 154 = -84 + 156 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 72\ u^2}}.$$

Problema 3:

3.– (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to \infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Solución

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = (\cos 0)^{\frac{3}{0^2}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indet. del\ nº\ e.$

$$\left.\begin{aligned} cos^2x - sen^2x &= \cos 2x \\ sen^2x + cos^2x &= 1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} cos^2x - sen^2x &= \cos 2x \\ -sen^2x - cos^2x &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2sen^2x.$$

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = A.$ Tomando logaritmos neperianos:

$$LA = L\left[\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}\right] = \lim_{x\to 0}\left[L\ (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{x^2}\cdot L\ (\cos 2x)\right] =$$

$$= 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{L\ (\cos 2x)}{x^2} = 3\cdot\frac{L\ (\cos 0)}{0^2} = 3\cdot\frac{L1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LA = 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2\cdot sen\ 2x}{\cos 2x}}{2x} = -6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen\ 2x}{2x} = -6\cdot 1\cdot 1 = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LA = -6 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A = \lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}.}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+\infty)^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0 \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = A \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Tomando logaritmos neperianos:

$$LA = L\left[\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[L(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot L(1+x)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{L(1+x)}{x} =$$

$$= \frac{L(1+\infty)}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{\infty+1} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LA = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A = \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.}$$

Problema 4:

4.– (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Solución

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$1 + 1 + (a+1)^3 - (a+1) - (a+1) - (a+1) = 0;$$

$$2 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - 3a - 3 = 0;\ \ a^3 + 3a^2 = 0;\ \ a^2(a+3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = -3.$$

$$\boldsymbol{La\ matriz\ A\ en\ invertible\ \forall a \in R - \{0, -3\}.}$$

Para $a = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 2^2 \cdot (2+3) = 20.$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 8 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}}{20} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Problema 5:

5.– (2 puntos)

(i) Determina las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

que satisfagan la siguiente identidad: $MM^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde M^T representa la matriz traspuesta de M.

(ii) Resuelve el sistema

$$\begin{cases} AX + BY &= C, \\ AX &= Y, \end{cases}$$

sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución

$a)$ $\quad MM^t = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \ \begin{pmatrix} 4+x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1; \ \ 4 + x^2 = 5; \ \ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1. \ \ \ xy = 1.$

$Primera\ solución$: $\begin{Bmatrix} x = 1 \\ y = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}; \quad Segunda\ solución$: $\begin{Bmatrix} x = -1 \\ y = -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}.$

$b)$ $\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}; \ \begin{matrix} AX + BY = C \\ -AX = -Y \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow BY = C - Y; \ \ BY + Y = C; \ \ (B + I) \cdot Y = C;$

$(B + I)^{-1} \cdot (B + I) \cdot Y = (B + I)^{-1} \cdot C; \ \ I \cdot Y = (B + I)^{-1} \cdot C; \ \ Y = (B + I)^{-1} \cdot C.$

$$B + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad |B + I| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

$(B + I)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \ \ Adj. de\ (B + I)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

$$(B + I)^{-1} = \frac{Adj.\ de\ (B+I)^t}{|B+I|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}{6} \Rightarrow (B + I)^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$Y = (B + I)^{-1} \cdot C = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Y = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$A \cdot X = Y; \ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot Y; \ \ I \cdot X = A^{-1} \cdot Y \Rightarrow X = A^{-1} \cdot Y.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \ \ A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \ \ Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot Y = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Problema 6:

6.– (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3 = -I$, donde I es la matriz identidad de orden tres.

Solución

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_3 \to F_3 + F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{3}F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1 \to F_1 + 4F_2 \\ F_3 \to F_3 + F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to 3F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1 \to F_1 - \frac{1}{3}F_3 \\ F_2 \to F_2 - \frac{4}{3}F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-4} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

Se comprueba que $A^3 = -I$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Queda comprobado que $A^3 = -I$.

$$A^{20} = (A^3)^6 \cdot A^2 = (-I)^6 \cdot A^2 = I \cdot A^2 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A^{20} = A^2} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}.$$

Problema 7:

7.– (2 puntos) La proyección ortogonal del punto $P(1,0,-1)$, sobre el plano π es el punto $Q(-3,2,5)$. Halla la ecuación del plano π y las coordenadas del punto simétrico del P respecto a dicho plano π.

Solución

El vector normal del plano π es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector que determinan los puntos $P(1,0,-1)$ y $Q(-3,2,5)$.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(-3,2,5)-(1,0,-1)] = (-4,2,6) \Rightarrow \vec{n} = (2,-1,-3)$.

La expresión general del plano es $\pi \equiv 2x - y - 3z + D = 0$.

Para determinar el valor de D se tiene en cuenta que π contiene a $Q(-3,2,5)$:

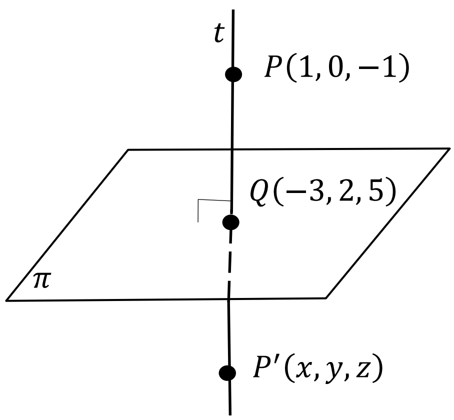
$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x - y - 3z + D = 0 \\ Q(-3,2,5) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot(-3) - 2 - 3\cdot 5 + D = 0;$$

$$-6 - 2 - 15 + D = 0;\ -23 + D = 0;\ \ D = 23 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv 2x - y - 3z + 23 = 0.}}$$

La recta t que pasa por $P(1,0,-1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y - 3z + 23 = 0$ tiene como vector director al vector normal de π: $\vec{n} = (2,-1,-3)$. La expresión de t dada por unas ecuaciones paramétricas es $t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$.

El punto $Q(-3,2,5)$ es la intersección del plano π con la recta t.



Tiene que cumplirse que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'}$.

$\overrightarrow{PQ} = (-4,2,6)$.

$\overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OQ} = [(x,y,z) - (-3,2,5)] =$

$= (x+3, y-2, z-5)$.

$(-4,2,6) = (x+3, y-2, z-5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x + 3 = -4 \rightarrow x = -7 \\ y - 2 = 2 \rightarrow y = 4 \\ z - 5 = 6 \rightarrow z = 11 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P'(-7,4,11).}}$$

Problema 8:

8.– (2 puntos) Determina la posición relativa de los tres planos, según los valores del parámetro m:

$$\begin{cases} mx + y + z &= 1, \\ x + my + z &= m, \\ x + y + mz &= m^2. \end{cases}$$

Solución

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema que forman los tres planos son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $A \; y \; A'$ pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- $Rang\ A = Rang\ A' = 3 \;\Rightarrow$ Los planos son secantes. Se cortan en un punto.

2. -- $Rang\ A = Rang\ A' = 2 \;\Rightarrow$ Los planos se cortan en una recta.

(dos de los planos pueden ser coincidentes)

3. -- $Rang\ A = Rang\ A' = 1 \;\Rightarrow$ Los tres planos son coincidentes.

4. -- $Rang\ A = 1;\ Rang\ A' = 2 \;\Rightarrow$ Hay planos paralelos.

(si no hay planos coincidentes son los tres paralelos)

(si dos planos son coincidentes son paralelos al tercero)

5. -- $Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \;\Rightarrow$ Hay planos secantes.

(si no hay planos paralelos se cortan dos a dos; determinan un prisma)

(si dos planos son paralelos son secantes al tercero)

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 + 1 - m - m - m =$$

$$= m^3 - 3m + 2 = 0.$$

	1	0	−3	2
1		1	1	−2
	1	1	−2	$\boxed{0}$
1		1	2	
	1	2	$\boxed{0}$	
−2		−2		
	1	$\boxed{0}$		

Resolviendo por Ruffini: $m_1 = m_2 = 1, m_3 = -2$.

$$Para \begin{Bmatrix} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3.$$

Los tres planos son secantes y se contan en un punto.

$$Para\ m = 1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' = Rang\ A = 1.$$

Los tres planos son coincidentes.

$$Para\ m=2 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16+1+2-2-4-4=9 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A'=3.$$

$Para\ m=2 \Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3.$

No hay planos paralelos.

$\underline{\boldsymbol{Los\ tres\ planos\ se\ cortan\ dos\ a\ dos\ formando\ un\ prisma.}}$

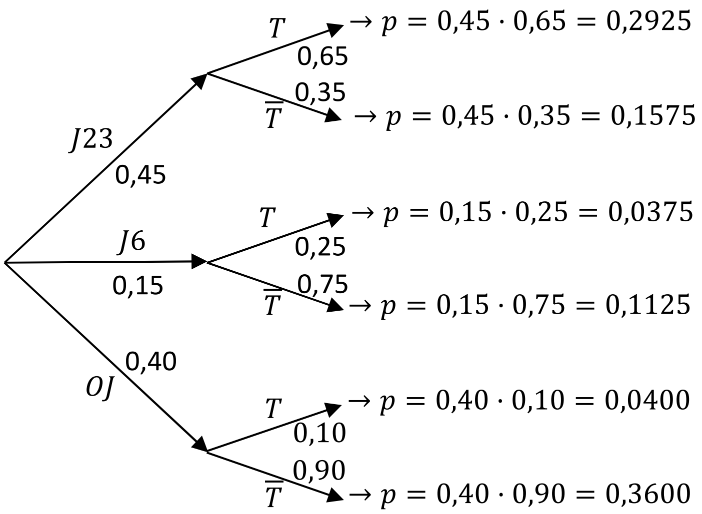
Problema 9:

9.– (2 puntos) La estadística de un equipo de baloncesto en un partido, desvela que el 45 % de los puntos conseguidos por el equipo corresponde al jugador número 23, de los cuales el 65 % son triples; 15 % al jugador número 6 de los cuales el 25 % son triples y el resto de la puntuación, siendo el 10 % triples, corresponde a otros jugadores del equipo. Halla la probabilidad de que:

(i) una de las jugadas del equipo haya acabado en un triple.

(ii) sabiendo que la canasta ha sido un triple, haya sido conseguida por el jugador número 23.

Solución



$a)$ $\quad P = P(T) = P(J23 \cap T) + P(J6 \cap T) + P(OJ \cap T) =$

$= P(J23) \cdot P(T/J23) + P(J6) \cdot P(T/J6) + P(OJ) \cdot P(T/OJ) =$

$= 0{,}45 \cdot 0{,}65 + 0{,}15 \cdot 0{,}25 + 0{,}40 \cdot 0{,}10 = 0{,}2925 + 0{,}0375 + 0{,}0400 = \underline{0{,}3700}$.

$b)$ $P = P(J23/T) = \frac{P(J23 \cap T)}{P(T)} = \frac{P(J23) \cdot P(T/J23)}{P(T)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}65}{0{,}37} = \frac{0{,}2925}{0{,}37} = \underline{0{,}7905}$.

Problema 10:

10.– (2 puntos) La estatura media de un jugador de fútbol del Real Madrid sigue una distribución normal de media 180 cm y desviación típica 10 cm. Si se elige un jugador al azar, calcula:

(i) la probabilidad de que su altura sea superior o igual a 200 cm;

(ii) la probabilidad de que su altura esté entre 170 y 190 cm.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Solución

$Datos\colon\ \mu = 180;\ \ \sigma = 10.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(180, 10).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-180}{10}.$

$a)\ \ P = P(X \geq 200) = P\left(Z \geq \frac{200-180}{10}\right) = P\left(Z \geq \frac{20}{10}\right) = P(Z \geq 2) =$

$= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = \underline{0{,}0228}.$

$$\boldsymbol{P(X \geq 200) = \underline{0,0228}.}$$

$b)\ P = P(170 < X < 190) = P\left(\frac{170-180}{10} < Z < \frac{190-180}{10}\right) = P\left(\frac{-10}{10} < Z < \frac{10}{10}\right) =$

$= P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) = P(Z < 1) - [1 - P(Z < 1)] =$

$= P(Z < 1) - 1 + P(Z < 1) = 2 \cdot P(Z < 1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 =$

$= 1{,}6826 - 1 = \underline{0{,}6826}.$

$$\boldsymbol{P(170 < X < 190) = \underline{0,6826}.}$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Antonio Menguiano y Javier Rodrigo Hitos

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema A1:

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10 % de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Problema A2:

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.
b) (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto x = 1.
c) (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

Problema A3:

Sean los puntos A(1, −2, 3), B(0, 2, −1) y C(2, 1, 0). Se pide:

a) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.
b) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano z = 1.
c) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T.

Problema A4:

Se tiene un suceso A de probabilidad P(A) = 0.3.

a) (0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad P(B) = 0.5 es independiente de A. Calcule P(A ∪ B).
b) (0.75 puntos) Otro suceso C cumple P(C | A) = 0.5. Determine P(A ∩ $\bar{C}$).
c) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que P($\bar{A}$ | D) = 0.2 y P(D | A) = 0.5, calcule P(D).

Problema B1:

Dado el sistema:
(a + 1)x + 4y = 0
(a − 1)y + z = 3
4x + 2ay + z = 3, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a.
b) (0.5 puntos) Resolverlo para a = 3.
c) (0.75 puntos) Resolverlo para a = 5.

Problema B2:

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2+x^2} & si\ x \leq -1 \\ \frac{2x^2}{3-3x} & si\ x > -1 \end{cases},$$

se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en R.
b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \to -\infty} f(x)^{2x^2-1}$
c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

Problema B3:

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano π : x − z = 2 y el punto A(1, 1, 1), se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.
b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.
c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.

Problema B4:

La longitud de la sardina del Pacífico (Sardinops sagax) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?
b) (0.5 puntos) Hallar una longitud t < 175 mm tal que entre t y 175 mm estén el 18 % de las sardinas capturadas.
c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A1:

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10 % de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Solución:

Sean x, y, z el número de camiones de los tipos A, B y C, que trabajan en la obra, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+1=y+z \\ 2{,}4y=4z \\ 14x+24y+28z=302 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x-y-z=-1 \\ 0{,}6y-z=0 \\ 7x+12y+14z=151 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x-y-z=-1 \\ 3y-5z=0 \\ 7x+12y+14z=151 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 151 & 12 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 7 & 12 & 14 \end{vmatrix}}=\frac{-42+755+453-60}{42+35+21+60}=\frac{1.208-102}{158}=\frac{1.106}{158}=7.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 7 & 151 & 14 \end{vmatrix}}{158}=\frac{35+755}{158}=\frac{790}{158}=5.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & 12 & 151 \end{vmatrix}}{158}=\frac{453+21}{158}=\frac{474}{158}=3.$$

Tierra transportada hoy: $\left\{\begin{array}{l} Tipo\ A \rightarrow 7\cdot 14=\underline{98\ Tm} \\ Tipo\ B \rightarrow 5\cdot 24=\underline{120\ Tm} \\ Tipo\ C \rightarrow 3\cdot 28=\underline{84\ Tm} \end{array}\right.$.

En total hoy se han transportado 302 toneladas de tierra.

Problema A2:

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.
b) (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto x = 1.
c) (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

Solución:

$a)$

Una función es par cuando se cumple que $f(-x) = f(x)$ y es impar cuando se cumple que $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = \sqrt[3]{[(-x)^2-1]^2} = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = f(x).$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ es\ par.}}$$

$b)$

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1} \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = 0.$$

La función $f(x)$ es continua para $x = 1$.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 1$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}.$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot(x^2-1)^{\frac{2}{3}-1}\cdot 2x = \frac{4x}{3}\cdot(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{4x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x^2-1}.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x^2-1}\right] = \frac{4}{3}\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x^2-1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{0}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x^2-1}\right] = \frac{4}{3}\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x^2-1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{0}{0^+} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f'(x)$$

$$\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x = 1}$$

$c)$

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada en ese punto y es negativa o positiva, respectivamente, su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

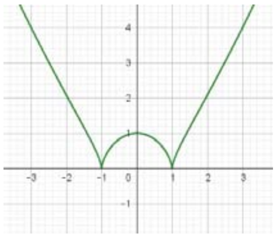
$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{4x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2-1}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x^2-1}=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=0, x_3=1$. No es derivable en $x=1$ ni en $x=-1$. Sólo se anula la derivada en $x=0$.

Para la obtención de la segunda derivada se procede por derivación logarítmica.

$L[f'(x)]=\frac{4}{3}\cdot\left[Lx-\frac{1}{3}\cdot L(x^2-1)\right]$.

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{x^2-1}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{3(x^2-1)-2x^2}{3x(x^2-1)}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3x^2-3-2x^2}{3x(x^2-1)}=\frac{4\cdot(x^2-3)}{9x(x^2-1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{4}{3}\cdot\frac{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x^2-1}\cdot\frac{4\cdot(x^2-3)}{9x(x^2-1)}=\frac{16}{27}\cdot\frac{(x^2-3)\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{(x^2-1)^2}.$$



Teniendo en cuenta que la función es continua en su dominio, que es R, su simetría y que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, la función tiene dos mínimos absolutos para $x=-1$ y para $x=1$, a pesar de no ser derivable en dichos puntos:

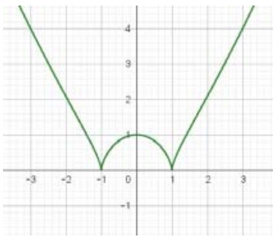
$f(-1)=f(1)=0 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{Mínimos\ absolutos: A(-1,0)\ y\ B(1,0).}$$

$f''(0)=\frac{16}{27}\cdot\frac{(-3)\cdot\sqrt[3]{1}}{1}<0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x=0.$

$f(0)=\sqrt[3]{1}=1 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{Máximo\ relativo: C(0,1).}$$



Problema A3:

Sean los puntos A(1, −2, 3), B(0, 2, −1) y C(2, 1, 0). Se pide:

d) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.

e) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano z = 1.

f) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T.

Solución:

a) Tres puntos forman un triángulo cuando no están alineados, es decir: para que A, B y C formen un triángulo los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen que ser linealmente independientes:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(0,2,-1)-(1,-2,3)]=(-1,4,-4).$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=[(2,1,0)-(1,-2,3)]=(1,3,-3).$$

$\frac{-1}{3}\neq\frac{4}{3}\Rightarrow\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes.

$$\underline{\boldsymbol{Queda\ comprobado\ que\ los\ puntos\ A,B\ y\ C\ forman\ un\ triángulo\ T.}}$$

b) La ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B tiene la siguiente expresión dada por unas ecuaciones paramétricas: $r\equiv\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=-2+4\lambda\\ z=3-4\lambda\end{cases}$.

El punto P de corte de la recta r con el plano $z=1$ es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} z=1\\ r\equiv\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=-2+4\lambda\\ z=3-4\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 3-4\lambda=1;\ \ 4\lambda=2;\ \ 2\lambda=1\Rightarrow\lambda=\tfrac{1}{2}.$$

$$P\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1-\frac{1}{2}\\ y=-2+4\cdot\frac{1}{2}\\ z=3-4\cdot\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ y=-2+2\\ z=3-2\end{array}\right\}\Rightarrow\underline{P\left(\tfrac{1}{2},0,1\right)}.$$

c) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=[(2,1,0)-(0,2,-1)]=(2,-1,1).$

$$Perímetro=p=\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{AC}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|=$$

$$=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-4)^2}+\sqrt{1^2+3^2+(-3)^2}+\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=$$

$$=\sqrt{1+16+16}+\sqrt{1+9+9}+\sqrt{4+1+1}=\sqrt{33}+\sqrt{19}+\sqrt{6}\cong$$

$$\cong 5{,}74+4{,}36+2{,}45\Rightarrow.$$

$$\underline{\boldsymbol{p\cong 12{,}55\ u}}$$

Problema A4:

Se tiene un suceso A de probabilidad P(A) = 0.3.

d) (0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad P(B) = 0.5 es independiente de A. Calcule P(A ∪ B).

e) (0.75 puntos) Otro suceso C cumple P(C | A) = 0.5. Determine P(A ∩ $\bar{C}$).

f) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que P($\bar{A}$ | D) = 0.2 y P(D | A) = 0.5, calcule P(D).

Solución:

$a)$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

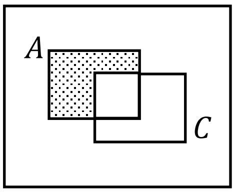
Si dos sucesos son independientes se cumple que $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=0{,}3+0{,}5-0{,}3\cdot 0{,}5=0{,}8-0{,}15\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(A\cup B)=0,65}}$$

$b)$

$$P(C/A)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=0{,}5\Rightarrow P(A\cap C)=$$



$P(A\cap\overline{C})=P(A)-P(A\cap C)$

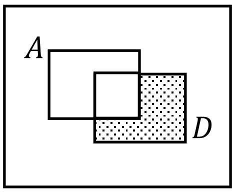
$$=0{,}5\cdot P(A)=0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}15.$$

$$P(A\cap\overline{C})=P(A)-P(A\cap C)=0{,}3-0{,}15=\underline{0{,}15}$$

$$\boldsymbol{P(A\cap\overline{C})=\underline{0,15}}$$

$c)$

$$P(D/A)=\frac{P(A\cap D)}{P(A)}=0{,}5\Rightarrow P(A\cap D)=$$



$P(\overline{A}\cap D)=P(D)-P(A\cap D)$

$$=0{,}5\cdot P(A)=0{,}5\cdot 0{,}3\Rightarrow P(A\cap D)=0{,}15.$$

$$P(\overline{A}/D)=\frac{P(\overline{A}\cap D)}{P(D)}=0{,}2\Rightarrow\frac{P(D)-P(A\cap D)}{P(D)}=0{,}2;\ \ P(D)-0{,}15=0{,}2\cdot P(D);$$

$$P(D)-0{,}2\cdot P(D)=0{,}15;\ \ 0{,}8\cdot P(D)=0{,}15;\ \ P(D)=\frac{0{,}15}{0{,}8}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(D)=0,1875.}}$$

Problema B1:

Dado el sistema:
(a + 1)x + 4y = 0
(a − 1)y + z = 3
4x + 2ay + z = 3, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a.
b) (0.5 puntos) Resolverlo para a = 3.
c) (0.75 puntos) Resolverlo para a = 5.

Solución:

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 4 & 2a & 1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 3 \\ 4 & 2a & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a+1 & 4 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 4 & 2a & 1 \end{vmatrix}=(a+1)(a-1)+16-2a(a+1)=0;$$

$a^2-1+16-2a^2-2a=0;\ -a^2-2a+15=0;\ \ a^2+2a-15=0;$

$a=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-2\pm 8}{2}=-1\pm 4\Rightarrow a_1=-5;\ \ a_2=3.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{\boldsymbol{Para\ \begin{cases} a\neq -5 \\ a\neq 3 \end{cases}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{o}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}}$$

$$Para\ a=-5\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & 1 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow \{C_4=3C_3\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$Para\ a=3\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow \{C_4=3C_3\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ \begin{cases} a=-5 \\ a=3 \end{cases}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{o}\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}}$$

b) Para $a=3$ el sistema resulta $\begin{cases} 4x+4y=0 \\ 2y+z=3 \\ 4x+6y+z=3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+y=0 \\ 2y+z=3 \\ 4x+6y+z=3 \end{cases}$, que es compatible indeterminado cuya solución es la siguiente:

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x=-\lambda, y=\lambda, z=3-2\lambda, \forall\lambda\in R.}}$$

c) Para $a=5$ el sistema resulta $\begin{cases} 6x+4y=0 \\ 4y+z=3 \\ 4x+10y+z=3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 4y+z=3 \\ 4x+10y+z=3 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

Autor: ANTONIO MENGUIANO Y JAVIER RODRIGO HITOS

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 1\\ 3 & 10 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 1\\ 4 & 10 & 1\end{vmatrix}}=\frac{6-6}{12+8-30}=\frac{0}{-10}=0. \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}}{-10}=\frac{9-9}{-10}=0.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}3 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 3\\ 4 & 10 & 3\end{vmatrix}}{-10}=\frac{36+24-90}{-10}=\frac{-30}{-10}=3.$$

$\boldsymbol{Solución: x = \ y = 0, z = 3.}$

Autor: ANTONIO MENGUIANO Y JAVIER RODRIGO HITOS
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema B2:

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2+x^2} & si\ x\le -1\\ \frac{2x^2}{3-3x} & si\ x>-1\end{cases},$$

se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en R.

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}$

c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

Solución:

$a)$ $2+x^2\neq 0, \forall x\in R.\ \ 3-3x=0;\ \ 3(1-x)=0\Rightarrow x=1.$

La función no es continua para $x=1$. Para $x=-1$ la continuidad de la función es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=-1\Rightarrow\begin{Bmatrix}\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2}{2+x^2}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}\\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2}{3-3x}=\frac{2}{3+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^+} f(x)=f(-1)\Rightarrow f(x)\ es\ continua\ para\ x=-1.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ es\ continua\ en\ R-\{1\}.}}$$

$$b)\ \lim_{x\to-\infty}[f(x)]^{2x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1}=1^\infty\Rightarrow Ind.\ tipo\ n^{\underline{o}}\ e\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+x^2-2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+x^2}{2+x^2}+\frac{-2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2+x^2}{-2}}\right)^{2x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2+x^2}{-2}}\right)^{(2x^2-1)\cdot\frac{2+x^2}{-2}\cdot\frac{-2}{2+x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2+x^2}{-2}}\right)^{\frac{2+x^2}{-2}}\right]^{(2x^2-1)\cdot\frac{-2}{2+x^2}}=\left[\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2+x^2}{-2}}\right)^{\frac{2+x^2}{-2}}\right]^{\frac{-4x^2+2}{2+x^2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x^2+2}{2+x^2}}=e^{-4}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty}[f(x)]^{2x^2-1}=\frac{1}{e^4}.}}$$

$c)\ I = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{0} \frac{2x^2}{3-3x} \cdot dx =$

$$= \int_{-1}^{0} \left(-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{2}{-3x+3}\right) \cdot dx = \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} \cdot x\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \frac{2}{-3x+3} \cdot dx \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 & -3x+3 \\ \hline -2x^2+2x & -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \\ \hline 0\ \ +2x & \\ \quad -2x+2 & \end{array}$$

$\Rightarrow I = \left[-\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3} \cdot x\right]_{-1}^{0} + I_1 = 0 - \left[-\frac{(-1)^2}{3} - \frac{2}{3} \cdot (-1)\right] + I_1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + I_1 =$
$-\frac{1}{3} + I_1.$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{2}{-3x+3} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l|l} -3x+3 = t & x = 0 \rightarrow t = 3 \\ -3 \cdot dx = dt & \\ 2 \cdot dx = -\frac{2}{3} \cdot dt & x = -1 \rightarrow t = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{2}{3} \cdot \int_{6}^{3} \frac{1}{t} \cdot dt =$$

$= -\frac{2}{3} \cdot [Lt]_6^3 = -\frac{2}{3} \cdot [L3 - L6] = -\frac{2}{3} \cdot L\frac{3}{6} = -\frac{2}{3} \cdot L\frac{1}{2} = -\frac{2}{3} \cdot [L1 - L2] =$

$= -\frac{2}{3} \cdot [0 - L2] \Rightarrow I_1 = \frac{2L2}{3} = \frac{L4}{3}.$

$$I = -\frac{1}{3} + I_1 = -\frac{1}{3} + \frac{L4}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx = \frac{L4-1}{3}\ u^2.}}$$

Problema B3:

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano π : x − z = 2 y el punto A(1, 1, 1), se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.
b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.
c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.

Solución:

a) Un punto y un vector director de la recta son $P(1,0,-1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2,1,-2)$.

Un vector normal del plano es $\vec{n} = (1,0,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes, lo cual supone que:

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes}}.$$

Otra forma de resolver este apartado es la siguiente:

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-1=2y \\ -2x+2=2z+2 \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+2y=1 \\ x+z=0 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ x+z=0 \\ x-z=2 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2+2 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes}.$$

El punto Q de intersección de la recta r y el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x-z=2 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1-2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1+2\lambda)-(-1-2\lambda) = 2;\ \ 1+2\lambda+1+2\lambda = 2;$$

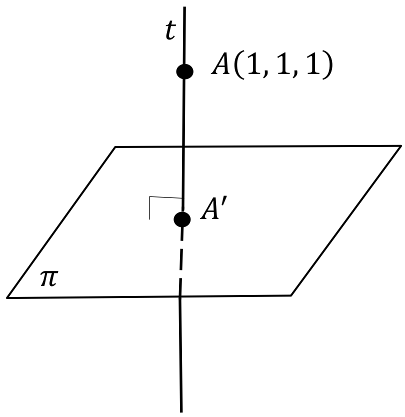
$$4\lambda = 0;\ \ \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Q(1,0,-1)}}.$$

b) La recta t que pasa por $A(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector normal del plano: $\vec{n} = (1, 0, -1)$. $t \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$.

El punto pedido A', es la intersección del plano π con la recta t:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - z = 2 \\ t \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 2;$$



$1 + \lambda - 1 + \lambda = 2;\ \ 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1.$

$$A' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 1 = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A'(2, 1, 0)}}.$$

$c)$ La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$.

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv 2x + y - 2z + D = 0$.

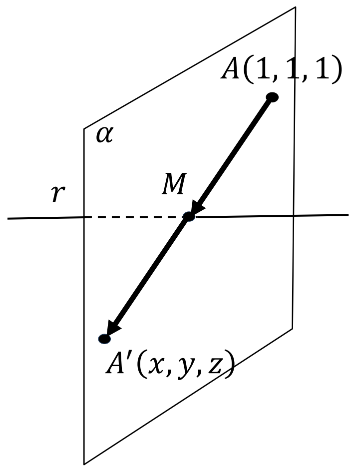
El plano $\alpha \in \beta$ que contiene al punto $A(1, 1, 1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 2x + y - 2z + D = 0 \\ A(1, 1, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + 1 - 2 + D = 0;\ \ 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \alpha \equiv 2x + y - 2z - 1 = 0.$

El punto M intersección de r y α es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$2 + 4\lambda + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 = 0 \Rightarrow 9\lambda + 3 = 0;$

$3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}.$

$$M \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Para que A' sea el simétrico de A con respecto a r tiene que cumplirse lo siguiente: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \left[\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) - (1, 1, 1)\right] = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right).$

$\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OM} = \left[(x, y, z) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right] = \left(x - \frac{1}{3}, y + \frac{1}{3}, z + \frac{1}{3}\right).$

$$\left(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)=\left(x-\frac{1}{3},y+\frac{1}{3},z+\frac{1}{3}\right)\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}\rightarrow x=-\frac{1}{3} \\ y+\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}\rightarrow y=-\frac{5}{3} \\ z+\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}\rightarrow z=-\frac{5}{3}\end{matrix}\right\}.$$

$$\underline{\boldsymbol{A'\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)}}.$$

Problema B4:

La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b) (0.5 puntos) Hallar una longitud t < 175 mm tal que entre t y 175 mm estén el 18 % de las sardinas capturadas.

c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

Solución:

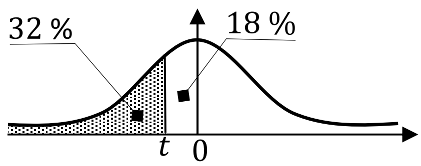
$a)\ Datos\colon\ \mu = 175;\ \ \sigma = 25{,}75.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(175;\ 25{,}75).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-175}{25{,}75}$.

$P = P(X < 160) = P\left(Z > \frac{160-175}{25{,}75}\right) = P\left(Z > \frac{-15}{25{,}75}\right) = P(Z > -0{,}58) =$

$= P(Z \le 0{,}58) = \underline{0{,}7190}.$

$$\boldsymbol{P(X < 160) = \underline{0{,}7190}.}$$

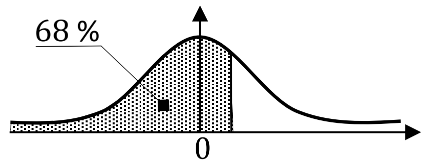


$b)$ El gráfico de la izquierda muestra la situación del ejercicio.

$P = P\left(Z < \frac{X-175}{25{,}75}\right) = 0{,}32\ con\ X < 0.$

Como tiene que ser $X > 0$ se ha de considerar el valor $1 - 0{,}32 = 0{,}68$:

$P = P\left(Z < \frac{X-175}{25{,}75}\right) = 0{,}68\ con\ X > 0.$



Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, el valor más próximo que corresponde a 0,6800 es 0,465, por lo cual:

$\frac{X-175}{25{,}75} = 0{,}465;\ \ X - 175 = 0{,}465 \cdot 25{,}75 = 11{,}97;\ \ X = 11{,}97 + 175 \Rightarrow$

$\Rightarrow X = 186{,}97.$ Teniendo en cuenta que la longitud está por debajo de la media y por simetría, el valor pedido resulta ser: $175 - 11{,}97 = 163{,}03$.

$$\boldsymbol{\underline{163{,}03 \le t \le 175}.}$$

$c)$ La probabilidad de que una sardina sea devuelta es la siguiente:

$P = P(X < 150) = P\left(Z < \frac{150-175}{25{,}75}\right) = P\left(Z < \frac{-25}{25{,}75}\right) = P(Z < -0{,}97) =$

$= P(Z \ge 0{,}97) = 1 - P(Z \le 0{,}97) = 1 - 0{,}8340 = 0{,}1660.$

Se tiene ahora una distribución binomial con las siguientes características:

$n = 10;\ \ p = 0{,}1660;\ \ q = 1 - 0{,}1660 = 0{,}8340.$

La probabilidad de que haya al menos una sardina pequeña en un lote de 10 es equivalente, por el suceso contrario, a la unidad menos la probabilidad de que no haya ninguna sardina pequeña en el lote:

$$P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r} \Rightarrow p = 1 - P(0) = 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0{,}166^0 \cdot 0{,}834^{10}\right] =$$

$$= 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}1628 = 1 - 0{,}1628 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{p = 0,8372.}}$$

Autor: ANTONIO MENGUIANO Y JAVIER RODRIGO HITOS

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar). **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**. Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular el determinante de $A^t A$.

b) (0.5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b.

c) (0.75 puntos) Calcular B^{-1} para $b = 2$.

d) (0.75 puntos) Para $b = 1$, calcular B^5.

Problema 2:

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$c(v) = \begin{cases} \dfrac{5v}{3} & \text{si} \quad 0 \le v < 3 \\ 14 - 4v + \dfrac{v^2}{3} & \text{si} \quad v \ge 3. \end{cases}$$

a) (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?

b) (1.5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \le v \le 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

Problema 3:

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos $P(1, 1, 1)$ y $Q(0, 0, 1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q.

a) (0.25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.

b) (1 punto) Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.

c) (1.25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r, con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

Problema A.4:

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(A) = 0.5$, $P(A|B) = 0.625$ y $P(A \cup B) = 0.65$, se pide calcular:

a) (1.5 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

b) (1 punto) $P(A|A \cup B)$ y $P(A \cap B|A \cup B)$.

Problema B.1:

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases} -2x + y + kz & = 1 \\ kx - y - z & = 0 \\ -y + (k-1)z & = 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k.

b) (0.5 puntos) Resolverlo para $k = 3$.

c) (0.75 puntos) Resolverlo para $k = 3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x = 2$.

Problema B.2:

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones

$$f(x) = 2 + 2x - 2x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3,$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x) = \left|f(x)\right|$.

b) (1.5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.

Problema B.3:

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.

b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π.

c) (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a r, que esté contenida en π, y que corte al eje OZ.

Problema B.4:

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El $65\,\%$ de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

c) (1 punto) Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular el determinante de A^tA.

b) (0.5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b.

c) (0.75 puntos) Calcular B^{-1} para $b = 2$.

d) (0.75 puntos) Para $b = 1$, calcular B^5.

Solución:

$a)\ A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

$$|A^t \cdot A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 4 - 16 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{|A^t \cdot A| = 0.}$$

$b)\ B \cdot A = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2b \end{pmatrix}.$

$Para\ b = 0 \Rightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ (B \cdot A) = 1.$

$Para\ b \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ (B \cdot A) = 2.$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Para\ b = 0 \Rightarrow Rang\ (B \cdot A) = 1;\ \ Para\ b \neq 0 \Rightarrow Rang\ (B \cdot A) = 2.}$$

$c)\ Para\ b = 2 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\qquad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.\qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

$Adj.de\ B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.\quad B^{-1} = \frac{Adj.de\ B^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{4} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{B^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

$d)\qquad Para\ b = 1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\ B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

$B^4 = B^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Problema A.2:

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$c(v) = \begin{cases} \dfrac{5v}{3} & \text{si} \quad 0 \leq v < 3 \\ 14 - 4v + \dfrac{v^2}{3} & \text{si} \quad v \geq 3. \end{cases}$$

a) (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?

b) (1.5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \leq v \leq 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

Solución:

$a)$ Para $v \geq 3 \Rightarrow c(v) = 14 - 4v + \frac{v^2}{3}$, que es una parábola convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de v^2 y cuyo vértice (mínimo) es el punto siguiente:

$c'(v) = -4 + \frac{2}{3} \cdot v.$

$c'(v) = 0 \Rightarrow -4 + \frac{2}{3} \cdot v = 0;\ -12 + 2v = 0;\ -6 + v = 0;\ \ v = 6.$

$c(6) = 14 - 4 \cdot 6 + \frac{6^2}{3} = 14 - 24 + 18 = 8 \Rightarrow V(6, 8).$

$\underline{\boldsymbol{El\ consumo\ es\ mínimo\ cuando\ la\ velocidad\ es\ de\ 60\ km\ por\ hora.}}$

$b)$ $c(1) = \frac{5 \cdot 1}{3} = \frac{5}{3} = 1{,}67.$

$c(3) = 14 - 4 \cdot 3 + \frac{3^2}{3} = 14 - 12 + \frac{9}{3} = \frac{9}{3} + 2 = \frac{15}{3} = 5.$

$c(8) = 14 - 4 \cdot 8 + \frac{8^2}{3} = 14 - 32 + \frac{64}{3} = \frac{64}{3} - 18 = \frac{64-54}{3} = \frac{10}{3} = 3{,}33.$

$\underline{\boldsymbol{El\ mínimo\ consumo\ se\ produce\ a\ 10\ km \cdot h\ y\ es\ de\ 1{,}67\ litros\ cada\ 100\ km.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ máximo\ consumo\ se\ produce\ a\ 30\ km \cdot h\ y\ es\ de\ 5\ litros\ cada\ 100\ km.}}$

Problema A.3:

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos $P(1,1,1)$ y $Q(0,0,1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q.

a) (0.25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.

b) (1 punto) Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.

c) (1.25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r, con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

Solución:

a) Un punto pertenece a un plano cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r}\pi \equiv z = 1\\ P(1,1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P \in \pi}.}$$

$$\left.\begin{array}{r}\pi \equiv z = 1\\ Q(0,0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Q \in \pi}.}$$

b) $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = [(1,1,1) - (0,0,1)] = (1,1,0) \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1,1,0)$.

Sea t la recta paralela a r y contenida en el plano $\beta \equiv z = 0$ que se pide.

Una recta está contenida en un plano cuando todos los puntos de la recta pertenecen al plano.

Por ser r y t paralelas: $\overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_r} = (1,1,0)$. Un punto de $z = 0$ es $O(0,0,0)$.

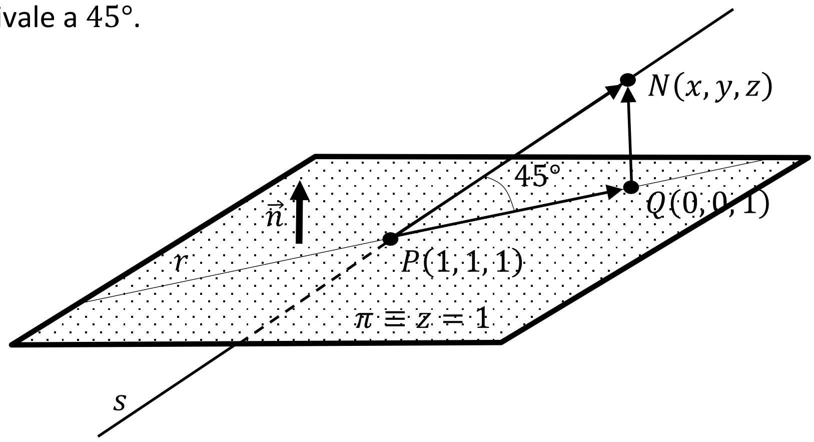
La expresión de t por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{\boldsymbol{t \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda. \\ z = 0 \end{cases}}}$$

c) El ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes equivale a $45°$.

$\overrightarrow{PQ} = (-1,-1,0)$.

$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{QN}$



El esquema adjunto refleja la situación planteada en el ejercicio y pretende clarificar lo que se hace a continuación.

El vector normal del plano $\pi \equiv z = 1$ es $\vec{n} = (0,0,1)$.

El vector $\overrightarrow{QN}$, por ser linealmente dependiente del vector $\vec{n}$, es de la forma siguiente: $\overrightarrow{QN} = (0,0,a)$, y el punto N es de la forma $N(0,0,a)$.

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP} = [(0,0,a) - (1,1,1)] = (-1,-1,a-1)$.

Aplicando el concepto de producto escalar:

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PN} = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PN}\right| \cdot \cos 45° \Rightarrow$

$(-1,-1,0)(-1,-1,a-1) = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (a-1)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$1 + 1 + 0 = \sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1 + 1 + a^2 - 2a + 1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$; $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 - 2a + 3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$2 = \sqrt{a^2 - 2a + 3}$; $4 = a^2 - 2a + 3$; $a^2 - 2a - 1 = 0$; $a = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} =$

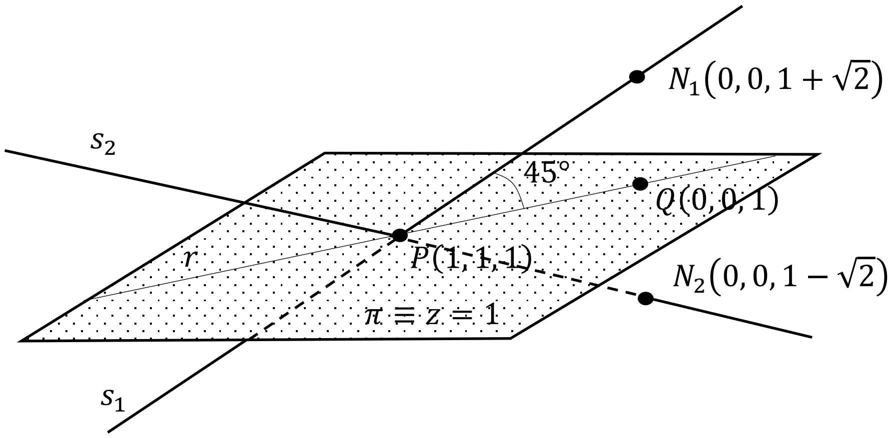
$= \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow a_1 = 1 + \sqrt{2}, a_2 = 1 - \sqrt{2}$. Los puntos que cumplen la condición son $N_1\left(0,0,1+\sqrt{2}\right)$ y $N_2\left(0,0,1-\sqrt{2}\right)$.

$\overrightarrow{v_{s1}} = \overrightarrow{PN_1} = \overrightarrow{ON_1} - \overrightarrow{OP} = \left[\left(0,0,1+\sqrt{2}\right) - (1,1,1)\right] = \left(-1,-1,\sqrt{2}\right)$.

$$\boldsymbol{s_1 \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = 1 + \sqrt{2}\mu \end{cases}, \forall \mu \in R.}$$

$\overrightarrow{v_{s2}} = \overrightarrow{PN_2} = \overrightarrow{ON_2} - \overrightarrow{OP} = \left[\left(0,0,1-\sqrt{2}\right) - (1,1,1)\right] = \left(-1,-1,-\sqrt{2}\right)$.

$$\boldsymbol{s_2 \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = 1 - \sqrt{2}\mu \end{cases}, \forall \mu \in R.}$$



Problema A.4:

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sabiendo que $P(A) = 0.5$, $P(A|B) = 0.625$ y $P(A \cup B) = 0.65$, se pide calcular:

a) (1.5 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

b) (1 punto) $P(A|A \cup B)$ y $P(A \cap B|A \cup B)$.

Solución:

$a)$ $\quad P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A|B) \cdot P(B);$

$P(A \cup B) - P(A) = P(B) \cdot [1 - P(A|B)] \Rightarrow P(B) = \frac{P(A\cup B)-P(A)}{1-P(A/B)} = \frac{0{,}65-0{,}50}{1-0{,}625} =$

$$= \frac{0{,}15}{0{,}375} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(B) = 0,40.}}$$

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0{,}625 \cdot 0{,}4 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{P(A \cap B) = 0,25.}}$$

$b)$ $P(A/A \cup B) = \frac{P[A\cap(A\cup B)]}{P(A\cup B)} = \frac{P(A)}{P(A\cup B)} = \frac{0{,}50}{0{,}65} \Rightarrow \underline{P(A/A \cup B) = \frac{10}{13} = 0{,}7692.}$

$P(A \cap B/A \cup B) = \frac{P[(A\cap B)\cap(A\cup B)]}{P(A\cup B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)} = \frac{0{,}25}{0{,}65} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P(A \cap B/A \cup B) = \frac{5}{13} = 0,3846.}}$$

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases} -2x+y+kz &= 1 \\ kx-y-z &= 0 \\ -y+(k-1)z &= 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k.

b) (0.5 puntos) Resolverlo para $k=3$.

c) (0.75 puntos) Resolverlo para $k=3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x=2$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} -2 & 1 & k \\ k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & k & 1 \\ k & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & k \\ k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{vmatrix}=2(k-1)-k^2+2-k(k-1)=0;$$

$$2k-2-k^2+2-k^2+k=0;\; -2k^2+3k=0;\; -k(2k-3)=0;$$

$\Rightarrow k_1=0;\;\; k_2=\frac{3}{2}.$ Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} k\neq 0 \\ k\neq 3/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}}$$

$$Para\ k=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ k=0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}}.$$

$$Para\ k=\frac{3}{2} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

A efectos de rango, M' es equivalente a $M''=2M'=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Se determina el rango de M'' por el procedimiento de Gauss-Jordan:

$$M''=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \to F_1+F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 + 3F_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M'' = 2.$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ k = 3/2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{o}\ inc\acute{o}g. \Rightarrow S.C.I.}}$$

$b)$ Para $k = 3$ el sistema resulta $\begin{cases} -2x + y + 3z = 1 \\ 3x - y - z = 0 \\ -y + 2z = 3 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3} = \frac{-2-3+9-1}{-9} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{27-6-6}{-9} = \frac{15}{-9} = -\frac{5}{3}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{6-3-9}{-9} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{5}{3}, z = \frac{2}{3}.}}$$

$c)$ Para $k = 3/2$ el sistema resulta $\begin{cases} -2x + y + \frac{3}{2}z = 1 \\ \frac{3}{2}x - y - z = 0 \\ -y + \frac{1}{2}z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y + 3z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 0 \\ -2y + z = 6 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se desprecia una de las ecuaciones, por ejemplo, la primera y se hace $y = \lambda$.

$z = 6 + 2\lambda.$ $\quad 3x - 2\lambda - 2 \cdot (6 + 2\lambda) = 0;\ \ 3x - 2\lambda - 12 - 4\lambda = 0;$

$3x - 6\lambda - 12 = 0;\ \ x - 2\lambda - 4 = 0;\ \ x = 2\lambda + 4.$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x = 2\lambda + 4, y = \lambda, z = 6 + 2\lambda, \forall \lambda \in R.}}$$

Si tiene que ser $x = 2\lambda + 4 = 2;\ \ \lambda + 2 = 1 \Rightarrow \lambda = -1.$

La solución sería: $\left.\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 6 - 2 = 4 \end{cases}\right\} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{x = 2, y = -1, z = 4.}}$$

Problema B.2:

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones

$$f(x) = 2 + 2x - 2x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3,$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$.

b) (1.5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyos puntos de corte con el eje de abscisas son los siguiente:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2 + 2x - 2x^2 = 0;\ \ x^2 - x - 1 = 0;\ \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right), x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right).$$

Teniendo en cuanta lo anterior, la función $h(x) = |f(x)|$ puede expresarse de la forma siguiente: $h(x) = |2 + 2x - 2x^2| = \begin{cases} -2 - 2x + 2x^2 & si\ \ x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 2 + 2x - 2x^2 & si\ \ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -2 - 2x + 2x^2 & si\ \ x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$

La función $h(x)$ es continua y derivable en su dominio, que es R, excepto para los valores de $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, cuya continuidad y derivabilidad son dudosas y se estudian a continuación.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto; por eso se estudia primero la continuidad.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^-} h(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1-\sqrt{5}}{2}} (-2 - 2x + 2x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^+} h(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1-\sqrt{5}}{2}} (2 + 2x - 2x^2) = 0 = h\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^-} h(x) = \lim_{x \to \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^+} h(x) = h\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow h(x)\ es\ continua\ en\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^-} h(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}} (2 + 2x - 2x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^+} h(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}} (-2 - 2x + 2x^2) = 0 = h\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^-} h(x) = \lim_{x\to\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^+} h(x) = h\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow h(x)\ es\ continua\ en\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$h'(x) = \begin{cases} -2+4x \ \ si\ \ x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 2-4x \ \ si\ \ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -2+4x \ \ si\ \ x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

$$h'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^- = -2+4\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -2+2-2\sqrt{5} = -2\sqrt{5}.$$

$$h'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^+ = 2-4\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 2-2+2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

$$h'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^- \ne h'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^+ \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{h(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}}.$$

$$h'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^- = 2-4\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2-2-2\sqrt{5} = -2\sqrt{5}.$$

$$h'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^+ = -2+4\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -2+2+2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

$$h'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^- \ne h'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^+ \Rightarrow \underline{h(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ h(x)\ es\ derivable\ en\ R - \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}}.$$

b) Las abscisas de los puntos de intersección de las funciones son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2+2x-2x^2 = 2-6x+4x^2+2x^3;\ \ 2x^3+6x^2-8x = 0;$$

$$x^3+3x^2-4x = 0;\ \ x(x^2+3x-4) = 0;\ \ x_1 = 0;\ \ x^2+3x-4 = 0;$$

$$x = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-3\pm 5}{2} \Rightarrow x_2 = -4, x_3 = 1.$$

Los puntos de corte son los siguientes:

$f(0) = 2 \Rightarrow C(0,2)$.

$f(-4) = 2+2\cdot(-4)-2\cdot(-4)^2 = 2-8-32 = -38 \Rightarrow D(-38,-4)$.

$f(1) = 2+2\cdot 1-2\cdot 1^2 = 2+2-2 = 2 \Rightarrow E(1,2)$.

Se pide el área limitada por las funciones y las rectas $x = 0$ y $x = 2$ y uno de los puntos de corte es $x = 1$, por lo cual, hemos de determinar cual de las funciones tiene mayores las ordenadas en los intervalo $(0,1)$ y $(1,2)$.

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2+2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2+1-\frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 6 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2 - 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{-4+2+1}{4} = -\frac{1}{4}.$

$f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right).$

Para el estudio del intervalo $(1, 2)$ puede, por comodidad, tomarse el valor 2.

$f(2) = 2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 = 2 + 4 - 8 = -2.$

$g(2) = 2 - 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 = 2 - 12 + 16 + 16 = 22.$

$g(2) > h(2).$

Teniendo en cuenta lo anterior, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_1^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 [(2 + 2x - 2x^2) - (2 - 6x + 4x^2 + 2x^3)] \cdot dx +$$

$$+ \int_1^2 [(2 - 6x + 4x^2 + 2x^3) - (2 + 2x - 2x^2)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 [(-2x^3 - 6x^2 + 8x)] \cdot dx + \int_1^2 [(2x^3 + 6x^2 - 8x)] \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{8x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{2} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{2} + 2x^3 - 4x^2\right]_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{1^4}{2} - 2 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2\right) + \left[\left(\frac{2^4}{2} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2\right) - \left(\frac{1^4}{2} + 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2} - 2 + 4 + 8 - 16 + 16 - \frac{1}{2} - 2 + 4 = -1 + 4 + 8 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 11\ u^2}}.$$

Problema B.3:

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.

b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π.

c) (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a r, que esté contenida en π, y que corte al eje OZ.

Solución:

$a)$ Un vector normal del plano $\pi \equiv x + 3y + 2z + 14 = 0$ es $\vec{n} = (1, 3, 2)$.

La recta r, perpendicular al plano π y que pasa por el origen de coordenadas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda. \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

El punto P más próximo del plano π al origen de coordenadas es el punto de corte de la recta r con el plano π, que es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{r} \pi \equiv x + 3y + 2z + 14 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + 3 \cdot 3\lambda + 2 \cdot 2\lambda + 14 = 0;\;\; 14\lambda + 14 = 0;$$

$$\lambda + 1 = 0;\;\; \lambda = -1 \Rightarrow \left. \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(-1, -3, -2).}}$$

$b)$ La recta s, proyección del eje OZ sobre el plano π, se consigue obteniendo la proyección de dos puntos del eje OZ sobre el plano π.

Un punto de OZ es el origen, cuya proyección sobre el plano π ya conocemos, que es el punto $P(-1, -3, -2)$.

Otro punto de OZ es $Q(0, 0, 1)$. La recta t, perpendicular al plano π y que pasa por el punto $Q(0, 0, 1)$ es la siguiente: $t \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 3\mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$.

El punto M de corte de la recta t con el plano π, que es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{r} \pi \equiv x + 3y + 2z + 14 = 0 \\ t \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 3\mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \mu + 3 \cdot 3\mu + 2 \cdot (1 + 2\mu) + 14 = 0;$$

$$\mu + 9\mu + 2 + 4\mu + 14 = 0;\;\; 14\mu + 16 = 0;\;\; 7\mu + 8 = 0;\;\; \mu = -\frac{8}{7}.$$

$$M \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{8}{7} \\ y = -\frac{24}{7} \\ z = 1 - \frac{16}{7} = -\frac{9}{7} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{8}{7}, -\frac{24}{7}, -\frac{9}{7}\right).$$

La recta s pedida es la que pasa por $P(-1, -3, -2)$ y $M\left(-\frac{8}{7}, -\frac{24}{7}, -\frac{9}{7}\right)$.

Un vector director de s es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector que determinan los puntos M y P:

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \left[(-1, -3, -2) - \left(-\frac{8}{7}, -\frac{24}{7}, -\frac{9}{7}\right)\right] = \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{5}{7}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (1, 3, -5)$.

Considerando, por ejemplo, el punto P:

$$\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x = -1 + \delta \\ y = -3 + 3\delta. \\ z = -2 - 5\delta \end{cases}}$$

$c)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = \gamma. \\ z = 5 \end{cases}$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (0, 1, 0)$ y un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, 3, 2)$.

El vector normal de un plano es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano, por lo cual, el vector director de la recta pedida, q, es perpendicular, simultáneamente a los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$.

Un vector director de q es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{v_q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2i - k \Rightarrow \overrightarrow{v_q} = (2, 0, -1).$$

El eje OZ tiene por ecuación $\beta \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

El punto de corte del plano $\pi \equiv x + 3y + 2z + 14 = 0$ con el eje OZ es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x + 3y + 2z + 14 = 0 \\ \beta \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + 0 + 2z + 14 = 0;\ \ z + 7 = 0; z = -7 \Rightarrow$$

$\Rightarrow N(0, 0, -7)$.

La recta q pedida es la siguiente:

$$\boldsymbol{q \equiv \begin{cases} x = -14 + 2t \\ y = 0 \end{cases}.}$$

Problema B.4:

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El $65\,\%$ de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

c) (1 punto) Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.

Solución:

$a)$ Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 10;\ \ p = 0{,}65;\ \ q = 1 - 0{,}65 = 0{,}35.$ $\qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

Se pide la probabilidad de que 3 de ellos no aprueban a la primera:

$$P = P(3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}35^3 \cdot 0{,}65^7 = \frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!} \cdot 0{,}042875 \cdot 0{,}049022 =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} \cdot 0{,}00210 = 120 \cdot 0{,}00210 =$$

$$\underline{\boldsymbol{P(3) = 0{,}2522.}}$$

$b)$ La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que ninguno haya necesitado más de un intento, o sea, la unidad menos la probabilidad de que aprueben todos a la primera:

$$P = 1 - P(10) = 1 - \binom{10}{10} \cdot 0{,}65^{10} \cdot 0{,}35^0 = 1 - 1 \cdot 0{,}0135 \cdot 1 =$$

$$= 1 - 0{,}0135 =$$

$$\underline{\boldsymbol{P = 0{,}9865.}}$$

$c)$ Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 60;\ \ p = 0{,}65;\ \ q = 0{,}35.$

Por ser $\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 60 \cdot 0{,}65 = 39 > 5 \\ n \cdot q = 60 \cdot 0{,}35 = 21 > 5 \end{array}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$\mu = n \cdot p = 60 \cdot 0{,}65 = 39.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{60 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}36} = \sqrt{13{,}65} \cong 3{,}69.$

$X = B(60;\ 0{,}65) \approx N(39;\ 3{,}69).$

Tipificando la variable: $X \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-39}{3{,}69}$. Aplicando la corrección de Yates:

$P = P(X \geq 30) = P\left(Z \geq \frac{29{,}5-39}{3{,}69}\right) = P\left(Z \geq \frac{-9{,}5}{3{,}69}\right) \cong P(Z \geq -2{,}57) =$

$= P(Z \leq 2{,}57) = \underline{0{,}9949}$.

$$\boldsymbol{P(X \geq 30) = \underline{0,9949}.}$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

MURCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universidad de Murcia. Luis J. Alías Linares

Coordinador Matemáticas II

ebaumatematicas.com

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

UNIVERSIDAD DE MURCIA · Región de Murcia · Universidad Politécnica de Cartagena

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Bloque 1: Números y Álgebra (2,5 puntos cada una)

Cuestión 1.

Una papelería vende bolígrafos, rotuladores y libretas. Una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos, un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta, y un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo.

a) **(0,75 p.)** Denotando por x el precio de cada bolígrafo, por y el de cada rotulador y por z el de cada libreta, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.

b) **(0,25 p.)** Justifique que, con estos datos, no se puede conocer el precio de cada uno de los tres productos.

c) **(1 p.)** Calcule el conjunto de todas las posibles soluciones del sistema.

d) **(0,5 p.)** Sabiendo que una libreta cuesta 18 euros, calcule el precio de cada producto.

Cuestión 2.

Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ -1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) **(0,5 p.)** Determine para qué valores del parámetro a la matriz A es regular (o invertible).

Se sabe que cuando $a = -2$ la matriz A es regular (o invertible). Para ese valor de a:

b) **(1 p.)** Calcule la inversa de A y compruebe que $A \cdot A^{-1} = I$, con I la matriz identidad de orden 2.

c) **(1 p.)** Resuelva la ecuación matricial $AXA^{-1} + B = C^{\top}$, donde $C^{\top}$ denota la matriz traspuesta de C.

Bloque 2: Cuestiones 3 y 4. Análisis (2,5 puntos cada una)

Cuestión 3.

Calcule los siguientes límites:

a) **(1,25 p.)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(2x) - 1}{x \operatorname{sen}(x)}$.

b) **(1,25 p.)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{3x}$.

Cuestión 4.

Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) **(0,5 p.)** Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

b) **(0,5 p.)** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$.

c) **(1 p.)** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

d) **(0,5 p.)** Determine la primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto $(1, 1)$.

Bloque 3: Cuestiones 5 y 6. Geometría (2,5 puntos cada una)

Cuestión 5.

Considere las siguientes rectas:

$$r : \begin{cases} x - 2y &= 5 \\ y + z &= 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s : \frac{x-8}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-1}.$$

a) **(1 p.)** Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) **(1 p.)** Compruebe que el punto $P = (7, 1, -1)$ está en la recta r y calcule su proyección ortogonal sobre la recta s.

c) **(0,5 p.)** Calcule la distancia entre ambas rectas.

Cuestión 6.

Considere el plano π de ecuación $\pi : 3x - y - 2z = 5$ y la recta r dada por

$$r : \frac{x-a}{1} = \frac{y-3+a}{1} = \frac{z}{1}.$$

a) **(1,25 p.)** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.

Se sabe que cuando $a = 0$ la recta r es paralela al plano π. Para ese valor de a:

b) **(0,75 p.)** Calcule la distancia de la recta r al plano π.

c) **(0,5 p.)** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

Cuestiones 7 y 8. Estadística y Probabilidad (2,5 puntos cada una)

Cuestión 7.

Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 3 bolas rojas y 4 bolas negras, y la urna B contiene 1 bola verde, 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

a) **(0,5 p.)** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.

b) **(1 p.)** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

c) **(1 p.)** La probabilidad de que la bola que se sacó de la urna A fuera verde, sabiendo que la bola que se ha sacado de la urna B ha sido negra.

Cuestión 8.

En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.
Se lanza una moneda al aire 100 veces y se anota el resultado del lanzamiento, que puede ser cara o cruz con la misma probabilidad. Determine:

a) **(0,5 p.)** Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale cara.

b) **(0,5 p.)** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **(0,5 p.)** Cuál es la probabilidad de que salga cara 60 veces.

d) **(1 p.)** Cuál es la probabilidad de que el número de veces que sale cara sea mayor o igual que 55.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Bloque 1: Números y Álgebra (2,5 puntos cada una)

Cuestión 1.

Una papelería vende bolígrafos, rotuladores y libretas. Una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos, un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta, y un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo.

a) **(0,75 p.)** Denotando por x el precio de cada bolígrafo, por y el de cada rotulador y por z el de cada libreta, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.

b) **(0,25 p.)** Justifique que, con estos datos, no se puede conocer el precio de cada uno de los tres productos.

c) **(1 p.)** Calcule el conjunto de todas las posibles soluciones del sistema.

d) **(0,5 p.)** Sabiendo que una libreta cuesta 18 euros, calcule el precio de cada producto.

Solución

Solución: a) Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, en donde las incógnitas son el precio unitario de cada uno de los productos. Denotemos por x el precio de cada bolígrafo, por y el precio de cada rotulador y por z el precio de cada libreta. El primer dato del ejercicio es que "una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos", que da lugar a la primera ecuación:

$$z = 2(x+y) \iff 2x + 2y - z = 0.$$

El segundo dato del ejercicio es que "un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta", que da lugar a la segunda ecuación:

$$x = \frac{z}{6} \iff 6x - z = 0.$$

El tercer dato del ejercicio es que "un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo", que da lugar a la tercera ecuación:

$$y = 2x \iff 2x - y = 0.$$

Por lo tanto, hay que resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z & = & 0 \\ 6x - z & = & 0 \\ 2x - y & = & 0 \end{cases}$$

b) Como se puede observar, se trata de un sistema de ecuaciones homogéneo, que es siempre un sistema compatible ya que, al ser la última columna de $A^* = (A|b)$ una columna de ceros, siempre se tiene que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$. En este caso se tiene

$$A^* = (A|b) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A tiene al menos un menor de orden 2 distinto de cero, $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, y su determinante es

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 4 - 2 = 0.$$

Por lo tanto, rango(A) = rango$(A^*) = 2 < 3$ y se trata de un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Por lo tanto, con los datos de que se dispone no es posible conocer el precio de cada uno de los productos.

c) El sistema se puede resolver en función de un parámetro. Por ejemplo, eligiendo como parámetro $x = \lambda$ y desechando la primera ecuación, queda el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 6\lambda - z & = & 0 \\ 2\lambda - y & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 6\lambda \\ y & = & 2\lambda \end{array} \right.$$

cuya solución es

$$x = \lambda, \quad y = 2\lambda \quad \text{y } z = 6\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

d) Sabiendo que $z = 6\lambda = 18$ euros (precio de cada libreta) se concluye que $x = \lambda = 3$ euros (precio de cada bolígrafo) y que $y = 6$ euros (precio de cada rotulador).

Cuestión 2.

Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ -1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) **(0,5 p.)** Determine para qué valores del parámetro a la matriz A es regular (o invertible).

Se sabe que cuando $a = -2$ la matriz A es regular (o invertible). Para ese valor de a:

b) **(1 p.)** Calcule la inversa de A y compruebe que $A \cdot A^{-1} = I$, con I la matriz identidad de orden 2.

c) **(1 p.)** Resuelva la ecuación matricial $AXA^{-1} + B = C^{\top}$, donde $C^{\top}$ denota la matriz traspuesta de C.

Solución

Solución: a) Sabemos que A es regular si y sólo si $|A| \neq 0$. En este caso se tiene $|A| = a^2 + a = a(a+1)$. Por lo tanto

$$A \text{ no es regular } \iff |A| = a(a+1) = 0 \iff a = 0 \text{ o } a = -1$$

o, equivalentemente,

$$A \text{ es regular } \iff |A| = a(a+1) \neq 0 \iff a \neq 0 \text{ y } a \neq -1.$$

Es decir, A es regular para todo valor de a distinto de 0 y de -1.

b) Como $a = -2$ se tiene

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |A| = 4 - 2 = 2 \neq 0.$$

Podemos calcular la inversa de A por cualquiera de los métodos válidos. Por ejemplo, utilizando la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos que efectivamente se tiene $A \cdot A^{-1} = I$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Despejando X en la ecuación matricial se tiene

$$AXA^{-1} + B = C^\top \Longrightarrow AXA^{-1} = C^\top - B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot (C^\top - B) \cdot A.$$

Calculamos entonces

$$C^\top - B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -14 & -2 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 30 & 32 \\ -23 & -24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bloque 2: Cuestiones 3 y 4. Análisis (2,5 puntos cada una)

Cuestión 3.

Calcule los siguientes límites:

a) **(1,25 p.)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x)-1}{x\ \text{sen}(x)}$.

b) **(1,25 p.)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x}$.

Solución

Solución: a) Comenzamos calculando

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x\ \text{sen}(x)} = \frac{\cos(0)-1}{0\cdot \text{sen}(0)} = \frac{1-1}{0\cdot 0} = \frac{0}{0}.$$

Podemos resolver esta indeterminación aplicando la regla de L'Hôpital y se tiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x\ \text{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\,\text{sen}(2x)}{\text{sen}(x)+x\ \cos(x)} = \frac{-2\,\text{sen}(0)}{\text{sen}(0)+0\ \cos(0)} = \frac{-2\cdot 0}{0+0\cdot 1} = \frac{0}{0}.$$

Aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital y se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{-2\,\text{sen}(2x)}{\text{sen}(x)+x\ \cos(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos(2x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\ \text{sen}(x)} \\
&= \frac{-4\cos(0)}{\cos(0)+\cos(0)-0\cdot \text{sen}(0)} \\
&= \frac{-4}{1+1-0} = \frac{-4}{2} = -2.
\end{aligned}$$

En resumen

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x\ \text{sen}(x)} = -2.$$

b) En primer lugar observamos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{0} = \frac{0}{0}.$$

Un modo sencillo de resolver esta indeterminación es operando algebraicamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x} &= \frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x}\cdot\frac{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}} \\
&= \frac{(\sqrt{9+x})^2-(\sqrt{9-x})^2}{3x(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})} = \frac{9+x-(9-x)}{3x(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})} \\
&= \frac{9+x-9+x}{3x(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})} = \frac{2x}{3x(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})} \\
&= \frac{2}{3(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})} = \frac{2}{3(\sqrt{9}+\sqrt{9})} = \frac{2}{3(3+3)} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

Para los incondicionales de L'Hôpital, la indeterminación inicial también se puede resolver por el método de L'Hôpital, haciendo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{9+x}}-\frac{-1}{2\sqrt{9-x}}}{3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{9+x}}+\frac{1}{2\sqrt{9-x}}}{3} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{9}}+\frac{1}{2\sqrt{9}}}{3} = \frac{\frac{1}{\sqrt{9}}}{3} = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Cuestión 4.

Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) **(0,5 p.)** Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) **(0,5 p.)** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$.

c) **(1 p.)** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

d) **(0,5 p.)** Determine la primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto $(1,1)$.

Solución

Solución: a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Para resolver esta indeterminación podemos operar algebraicamente, observando que

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}.$$

De este modo,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{1}{\frac{1}{+\infty}+1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

También se puede razonar por la regla de los grados. En este caso, como el numerador y el denominador son ambos polinomios de grado 2, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

b) La derivada de $f(x)$ viene dada por

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(1+x^2) - x^2\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x+2x^3-2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$, calculamos primero los puntos críticos de $f(x)$, es decir, las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \iff 2x = 0 \iff x = 0.$$

A continuación, estudiamos el signo de $f'(x)$ para ver dónde la función es creciente o decreciente. Como $f'(x) = 0$ solo para $x = 0$, basta con darle valores a $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de este valor. Además, el denominador de $f'(x)$ es siempre positivo, por lo que el signo de $f'(x)$ solo depende del signo del numerador. Observamos que $f'(x) > 0 \iff x > 0$ y que $f'(x) < 0 \iff x < 0$, de modo que $f(x)$ es creciente en el intervalo $(0,+\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

c) Se trata de una integral racional casi elemental. Operando algebraicamente se tiene

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = \frac{x^2+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

d) Por el apartado c) sabemos que la primitiva general de $f(x)$ es $F(x) = x - \operatorname{arc\,tg} x + C$. Se trata, por tanto, de calcular el valor de C para que $F(1) = 1$. En este caso

$$F(1) = 1 - \operatorname{arc\,tg} 1 + C = 1 - \frac{\pi}{4} + C = 1 \Longleftrightarrow C = \frac{\pi}{4}.$$

La solución es $F(x) = x - \operatorname{arc\,tg} x + \dfrac{\pi}{4}$.

Bloque 3: Cuestiones 5 y 6. Geometría (2,5 puntos cada una)

Cuestión 5.

Considere las siguientes rectas:

$$r : \begin{cases} x - 2y &= 5 \\ y + z &= 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \frac{x-8}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-1}.$$

a) **(1 p.)** Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) **(1 p.)** Compruebe que el punto $P = (7, 1, -1)$ está en la recta r y calcule su proyección ortogonal sobre la recta s.

c) **(0,5 p.)** Calcule la distancia entre ambas rectas.

Solución

Solución: a) El vector director de la recta r viene dado por

$$\vec{v}_r = (1, -2, 0) \times (0, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = (-2, -1, 1).$$

Además, el vector director de la recta s es $\vec{v}_s = (2, 1, -1)$. Como ambos vectores son paralelos, significa que las rectas r y s o bien son paralelas o bien son coincidentes. El punto $Q = (8, -3, 3)$ está en s pero no está en r, ya que no cumple la primera de las ecuaciones de r $(8 + 6 \neq 5)$, por lo que se trata de dos rectas paralelas.

Otra forma de resolver este apartado es pasar la recta s a su forma implícita y estudiar el sistema de ecuaciones resultante de las dos rectas. Es ese caso, la recta s se escribe como

$$s : \frac{x-8}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-1} \Longrightarrow s : \begin{cases} x - 2y &= 14 \\ y + z &= 0 \end{cases}$$

y el sistema de ecuaciones resultante es el siguiente sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x - 2y &= 5 \\ y + z &= 0 \\ x - 2y &= 14 \\ y + z &= 0 \end{cases}$$

La matriz del sistema es

$$A^* = (A|b) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

En este caso es muy fácil ver que se trata de un sistema incompatible (la primera y la tercera ecuación son incompatibles). Además, rango$(A) = 2$ y rango$(A^*) = 3$, ya que A tiene solo 2 filas linealmente independientes pero A^* tiene algún menor de orden 3 distinto de 0, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 14 \end{vmatrix} = 14 - 5 = 9 \neq 0.$$

Esto significa que las rectas son paralelas.

b) El punto $P=(7,1,-1)$ está en la recta r porque cumple sus dos ecuaciones:

$$r:\begin{cases} x-2y &=7-2 &= 5\\ y+z &=1-1 &= 0\end{cases} \Longrightarrow P\in r.$$

La proyección ortogonal de P sobre s se puede calcular como intersección de la recta s con el plano π perpendicular a s que pasa por P. Vamos entonces a calcular este plano π. Como el vector director de s es $\vec{v}_s=(2,1,-1)$, el haz de planos perpendiculares a s viene dado por $2x+y-z+D=0$, con $D\in\mathbb{R}$. Calculamos el valor de D para que π pase por P:

$$P\in\pi \Longleftrightarrow 2\cdot 7+1-(-1)+D=0 \Longleftrightarrow 16+D=0 \Longleftrightarrow D=-16.$$

Por tanto, $\pi: 2x+y-z=16$. Como la recta s es $s:\begin{cases} x-2y &= 14\\ y+z &= 0\end{cases}$, la proyección ortogonal de P sobre s viene dado como la solución del siguiente sistema, que por interpretación geométrica es S.C.D. (no es necesario comprobarlo):

$$\begin{cases} 2x+y-z &= 16\\ x-2y &= 14\\ y+z &= 0\end{cases} \Longrightarrow A^*=(A|b)\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 16\\ 1 & -2 & 0 & 14\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \text{ con } |A|=-6.$$

La solución es

$$x=\frac{1}{-6}\begin{vmatrix} 16 & 1 & -1\\ 14 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{-60}{-6}=10,$$

$$y=\frac{1}{-6}\begin{vmatrix} 2 & 16 & -1\\ 1 & 14 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{12}{-6}=-2,$$

$$z=\frac{1}{-6}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 16\\ 1 & -2 & 14\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{-12}{-6}=2.$$

En conclusión, la proyección ortogonal de P sobre s es el punto $Q=(10,-2,2)$.

c) La distancia entre ambas rectas se puede calcular directamente como la distancia entre los puntos P y Q del apartado anterior:

$$d(r,s)=d(P,Q)=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{9+9+9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3},$$

ya que $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(10,-2,2)-(7,1,-1)=(3,-3,3)$.

Otra forma de calcular la distancia entre ambas rectas es utilizar que

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{|\vec{v}_s\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_s|}$$

siendo P un punto cualquier de la recta r y A un punto cualquiera de la recta s. Podemos tomar $P=(7,1,-1)$ que, por el enunciado, sabemos que está en la recta r y $A=(8,-3,3)$, con $\vec{v}_s=(2,1,-1)$. En ese caso, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(7,1,-1)-(8,-3,3)=(-1,4,-4)$ y

$$\vec{v}_s\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 4 & -4\end{vmatrix}=-4\vec{i}+\vec{j}+8\vec{k}+4\vec{i}+8\vec{j}+\vec{k}=(0,9,9).$$

Por tanto,

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{|\vec{v}_s\times\overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_s|}=\frac{\sqrt{81+81}}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}.$$

Cuestión 6.

Considere el plano π de ecuación $\pi : 3x - y - 2z = 5$ y la recta r dada por

$$r : \frac{x-a}{1} = \frac{y-3+a}{1} = \frac{z}{1}.$$

a) **(1,25 p.)** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.

Se sabe que cuando $a = 0$ la recta r es paralela al plano π. Para ese valor de a:

b) **(0,75 p.)** Calcule la distancia de la recta r al plano π.

c) **(0,5 p.)** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

Solución:

Solución: a) Lo más sencillo es pasar la recta r a su forma implícita, considerar el sistema de ecuaciones formado por la ecuación del plano π y las ecuaciones implícitas de la recta r y estudiar dicho sistema en función del parámetro a. Para ello, observamos que

$$r : \frac{x-a}{1} = \frac{y-3+a}{1} = \frac{z}{1} \Longrightarrow r : \begin{cases} x - z &= a \\ y - z &= 3 - a \end{cases}$$

y el sistema de ecuaciones resultante es el siguiente:

$$\begin{cases} 3x - y - 2z &= 5 \\ x - z &= a \\ y - z &= 3 - a \end{cases}$$

La matriz del sistema es

$$A^* = (A|b) \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 3-a \end{array} \right).$$

El determinante de A es $|A| = -2 + 3 - 1 = 0$ y como A tiene al menos un menor de orden 2 distinto de cero, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ sabemos que rango$(A) = 2$ para todo valor de a.

Para estudiar el rango de A^* basta estudiar el rango de la submatriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 3-1 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 3-a \end{vmatrix} = 5 - 3a + 3 - a = 8 - 4a = 0 \Longleftrightarrow a = 2.$$

Por tanto, si $a \neq 2$ se tiene rango$(A^*) = 3 > 2 =$ rango(A) y se trata de un sistema incompatible, sin solución. Geométricamente significa que la recta r no corta al plano π y por tanto la recta es paralela al plano.

Si $a = 2$ se tiene rango$(A^*) = 2 =$ rango$(A) < n = 3$ y se trata de un sistema compatible indeterminado, con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Geométricamente significa que la recta r está contenida en el plano π.

b) En este caso se tiene

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad \pi : 3x - y - 2z - 5 = 0.$$

Como se sabe que la recta r es paralela al plano π, podemos calcular $d(r,\pi) = d(P,\pi)$ siendo P cualquier punto de la recta r. Podemos tomar entonces $P = (0,3,0)$ y aplicar directamente la fórmula de la distancia de un punto a un plano

$$d(r,\pi) = d(P,\pi) = \frac{|3\cdot 0 - 3 - 2\cdot 0 - 5|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{|0-3-0-5|}{\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{14}}.$$

Otra forma de resolver este apartado es calcular el punto Q obtenido como la proyección ortogonal de $P = (0,3,0)$ sobre el plano $\pi : 3x - y - 2z - 5 = 0$ y utilizar que $d(r,\pi) = d(P,\pi) = d(P,Q)$. Para calcular Q, basta considerar la recta perpendicular a π que pasa por P y calcular Q como la intersección de esta recta con π. La recta perpendicular a π que pasa por P viene dada en coordenadas paramétrica por

$$\begin{cases} x &= 0+3\lambda &= 3\lambda \\ y &= 3-\lambda &= 3-\lambda \\ z &= 0-2\lambda &= -2\lambda \end{cases}$$

El punto $Q = (3\lambda, 3-\lambda, -2\lambda)$ verifica entonces

$$9\lambda - 3 + \lambda + 4\lambda - 5 = 0 \iff 14\lambda - 8 = 0 \iff \lambda = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}.$$

Es decir,

$$Q = \left(\frac{12}{7}, \frac{17}{7}, \frac{-8}{7}\right),$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \left(\frac{12}{7}, \frac{17}{7}, \frac{-8}{7}\right) - (0,3,0) = \left(\frac{12}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{-8}{7}\right)$$

y

$$d(r,\pi) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\frac{144}{49} + \frac{16}{49} + \frac{64}{49}} = \sqrt{\frac{224}{49}} = \sqrt{\frac{32}{7}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{14}}.$$

c) El haz de planos paralelos al plano π es de la forma $3x - y - 2z = D$. Como debe contener a la recta r, basta con calcular D para que el plano pase por el punto $P = (0,3,0) \in r$. Por tanto

$$0 - 3 - 0 = D \iff D = -3 \Longrightarrow \text{ La solución es el plano } 3x - y - 2z = -3.$$

Cuestiones 7 y 8. Estadística y Probabilidad (2,5 puntos cada una)

Cuestión 7.

Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 3 bolas rojas y 4 bolas negras, y la urna B contiene 1 bola verde, 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

a) **(0,5 p.)** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.

b) **(1 p.)** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

c) **(1 p.)** La probabilidad de que la bola que se sacó de la urna A fuera verde, sabiendo que la bola que se ha sacado de la urna B ha sido negra.

Solución:

Solución: Observemos en primer lugar que la urna A tiene un total de 10 bolas, de las cuales 3 son verdes, 3 son rojas y 4 son negras. La urna B tiene un total de 9 bolas, de las cuales 1 es verde, 3 son rojas y 5 son negras.

Una vez que se ha sacado al azar una bola de la urna A y se ha metido en la urna B, la urna B contiene un total de 10 bolas, siendo su composición la siguiente:

Caso 1: La bola sacada de A ha sido verde: 2 verdes, 3 rojas y 5 negras;

Caso 2: La bola sacada de A ha sido roja: 1 verde, 4 rojas y 5 negras;

Caso 3: La bola sacada de A ha sido negra: 1 verde, 3 rojas y 6 negras.

a) Como la bola que se sacó de la urna A era verde, significa que estamos en el Caso 1 y la composición de la urna B, una vez que se ha pasado una bola verde de A a B, es la siguiente: 2 bolas verdes, 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Por lo tanto, en este caso la probabilidad de que la bola que se saca de B sea negra es

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas negras en B}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas totales en B}} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

Observemos que en este caso estamos calculando de hecho una probabilidad condicionada, ya que se trata de

$$P(\text{Bola Negra}/\text{Caso 1}) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas negras en B en el Caso 1}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas totales en B}} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

Esta observación no es estrictamente necesaria en este apartado pero sí lo será en los apartados siguientes.

b) En este apartado no sabemos de qué color es la bola que se ha pasado de A a B. Por lo tanto, y siguiendo la observación hecha en el apartado a), debemos utilizar el teorema de la probabilidad total para ver que

$$\begin{aligned} P(\text{Bola Negra}) &= P(\text{Bola Negra}/\text{Caso 1}) \cdot P(\text{Caso 1}) + P(\text{Bola Negra}/\text{Caso 2}) \cdot P(\text{Caso 2}) \\ &\quad + P(\text{Bola Negra}/\text{Caso 3}) \cdot P(\text{Caso 3}). \end{aligned}$$

Pasamos a continuación a calcular cada una de estas probabilidades. Como el Caso 1 corresponde al caso en que la bola sacada de A es verde, se tiene

$$P(\text{Caso } 1) = P(\text{sacar Bola Verde de A}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas verdes en A}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas totales en A}} = \frac{3}{10}.$$

Además, en este caso, se tiene

$$P(\text{Bola Negra}/\text{Caso } 1) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas negras en B en el Caso } 1}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas totales en B}} = \frac{5}{10}.$$

Análogamente, como el Caso 2 corresponde al caso en que la bola sacada de A es roja, se tiene

$$P(\text{Caso } 2) = P(\text{sacar Bola Roja de A}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas rojas en A}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas totales en A}} = \frac{3}{10}.$$

En este caso se tiene

$$P(\text{Bola Negra}/\text{Caso } 2) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas negras en B en el Caso } 2}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas totales en B}} = \frac{5}{10}.$$

Finalmente, como el Caso 3 corresponde al caso en que la bola sacada de A es negra, se tiene

$$P(\text{Caso } 3) = P(\text{sacar Bola Negra de A}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas negras en A}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas totales en A}} = \frac{4}{10}.$$

En este caso se tiene

$$P(\text{Bola Negra}/\text{Caso } 3) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas negras en B en el Caso } 3}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas totales en B}} = \frac{6}{10}.$$

En conclusión,

$$P(\text{Bola Negra}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{15+15+24}{100} = \frac{54}{100} = 0,54.$$

c) Se trata también de una probabilidad condicionada pero en este caso nos están pidiendo $P(\text{Caso } 1/\text{Bola Negra})$. Por calcularla, observamos que

$$\begin{aligned} P(\text{Caso } 1/\text{Bola Negra}) &= \frac{P(\text{Caso } 1 \cap \text{Bola Negra})}{P(\text{Bola Negra})} \\ &= \frac{P(\text{Bola Negra} \cap \text{Caso } 1)}{P(\text{Bola Negra})} \\ &= \frac{P(\text{Bola Negra}/\text{Caso } 1) \cdot P(\text{Caso } 1)}{P(\text{Bola Negra})} \\ &= \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{54}{100}} = \frac{15}{54} = \frac{5}{18} = 0,2778. \end{aligned}$$

Observación: Evidentemente, esta cuestión también se puede hacer por diagrama de árbol.

Cuestión 8.

En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.
Se lanza una moneda al aire 100 veces y se anota el resultado del lanzamiento, que puede ser cara o cruz con la misma probabilidad. Determine:

a) **(0,5 p.)** Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale cara.

b) **(0,5 p.)** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **(0,5 p.)** Cuál es la probabilidad de que salga cara 60 veces.

d) **(1 p.)** Cuál es la probabilidad de que el número de veces que sale cara sea mayor o igual que 55.

Solución:

Solución: a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale cara cuando se lanza una moneda al aire 100 veces.

La variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros $n = 100$, porque se lanza la moneda 100 veces, y $p = 0,5$, porque el resultado puede ser cara o cruz con la misma probabilidad.

b) La media de esta distribución es

$$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,5 = 50$$

y su desviación típica es

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = \sqrt{25} = 5.$$

c) Se trata de calcular $P(X = 60)$. Utilizando la fórmula de las probabilidades puntuales de la binomial $B(n = 100, p = 0,5)$ se tiene que

$$P(X = 60) = \binom{100}{60} \cdot 0,5^{60} \cdot 0,5^{40} = \binom{100}{60} \cdot 0,5^{100}.$$

Si nuestra calculadora puede hacer este cálculo, basta con poner su valor numérico redondeando al cuarto decimal

$$P(X = 60) = \binom{100}{60} \cdot 0,5^{100} = 0,0108.$$

Como se trata de valores muy grandes de n, algunas calculadoras no son capaces de calcularlo a partir de la fórmula. Por eso, en este caso es necesario aproximar la distribución binomial $X = B(n = 100, p = 0,5)$ por una distribución normal $Y = N(\mu, \sigma)$ con $\mu = np = 50$ y $\sigma = \sqrt{npq} = 5$.

Comprobamos antes si dicha aproximación es fiable, para lo cual es suficiente con comprobar, por ejemplo, que n sea suficientemente grande, $n \geq 30$, y que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, lo cual es cierto porque $np = nq = 50$. Otro criterio válido es que la n sea suficientemente grande, $n \geq 30$, y que $0,1 < p < 0,9$, lo cual también se cumple porque $n = 100$ y $p = 0,5$.

Por lo tanto, se puede aplicar la aproximación de la binomial por la normal. Teniendo en cuenta la corrección de continuidad (o corrección de Yates) y haciendo uso de la tipificación $Z = \dfrac{Y - 50}{5}$ sabemos entonces que $Z \sim N(0,1)$ y se concluye que

$$\begin{aligned} P(X = 60) &\approx P(59,5 < Y < 60,5) = P(\frac{59,5 - 50}{5} < Y < \frac{60,5 - 50}{5}) \\ &= P(1,9 < Z < 2,1) = P(Z < 2,1) - P(Z < 1,9). \end{aligned}$$

Consultando en la tabla de $Z \sim N(0,1)$ proporcionada, concluimos que

$$P(X = 60) \approx P(59,5 < Y < 60,5) = P(Z < 2,1) - P(Z < 1,9) = 0,9821 - 0,9713 = 0,0108.$$

d) Ahora se trata de calcular $P(X \geq 55)$. De nuevo, tenemos que hacerlo aproximando la binomial por la normal, que ya sabemos que es posible. En este caso, la corrección de continuidad nos dice que

$$\begin{aligned} P(X \geq 55) &\approx P(Y > 54,5) = P(Z > \frac{54,5-50}{5}) \\ &= P(Z > 0,9) = 1 - P(Z < 0,9), \end{aligned}$$

y, consultando en la tabla de $Z \sim N(0,1)$ proporcionada, concluimos que

$$P(X \geq 55) \approx P(Y > 54,5) = 1 - P(Z < 0,9) = 1 - 0,8159 = 0,1841.$$

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1: Se quiere calcular un número de tres cifras con los siguientes datos:

i) La suma de sus tres cifras es 9.

ii) Si permutamos la cifra de las centenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial menos 99.

iii) Si permutamos la cifra de las decenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial más 36.

a) **[1,5 p.]** Denotando por x la cifra de las centenas, por y la de las decenas y por z la de las unidades, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente la información dada en i), ii) y iii).

b) **[1 p.]** Calcule el número en cuestión.

Problema 2:

2: Se dice que una matriz cuadrada A es 2-nilpotente si cumple que $A^2 = 0$.

a) **[0,75 p.]** Justifique razonadamente que una matriz 2-nilpotente nunca puede ser regular (o invertible).

b) **[0,75 p.]** Compruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

c) **[1 p.]** Determine para qué valores de a y b la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

Problema 3:

3: Considere la función $f(x) = xe^{-x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) **[0,75 p.]** Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[0,75 p.]** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$ y sus extremos relativos (máximos y/o mínimos).

c) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

Problema 4:

4: Considere la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, donde $\cos^2 x = (\cos x)^2$.

a) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

b) **[0,75 p.]** Calcule la integral definida $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$.

c) **[0,75 p.]** Determine la primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto $(\pi, 1)$.

Problema 5:

5: Los puntos $A = (6,-4,4)$ y $B = (12,-1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C es la proyección ortogonal del vértice A sobre la recta

$$r : \begin{cases} x-2y = 5 \\ x+2z = 5 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice C.

b) **[0,5 p.]** Determine si el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en el vértice A.

c) **[0,5 p.]** Calcule el área del triángulo $\widehat{ABC}$.

Problema 6:

6: Considere el plano π de ecuación $\pi : 2x+ay-2z=-4$ y la recta r dada por

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2}.$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.

Se sabe que cuando $a = 1$ la recta r corta al plano π. Para ese valor de a:

b) **[0,75 p.]** Calcule el punto de corte de la recta r y el plano π.

c) **[0,5 p.]** Calcule el ángulo que forman.

Problema 7:

7: En un cine hay 3 salas y un total de 250 espectadores repartidos de la siguiente manera: 100 espectadores en la sala A, 50 en la sala B y 100 en la sala C. Se sabe que la película de la sala A gusta al 80 % de los espectadores, la de la sala B al 20 % de los espectadores y la de la sala C al 60 % de los espectadores. A la salida de las tres películas se elige un espectador al azar. Calcule:

a) **[0,25 p.]** La probabilidad de que el espectador haya estado en la sala C.

b) **[0,5 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película, sabiendo que ha estado en la sala C.

c) **[0,5 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película y haya estado en la sala C.

d) **[0,75 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película.

e) **[0,5 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película o haya estado en la sala C.

Problema 8:

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades y 2 decimales para los porcentajes.

El peso de los recién nacidos en la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 67 % de los recién nacidos pesan menos de 3,464 kg y que el 1,5 % de los recién nacidos pesan más de 4,502 kg.

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es el porcentaje de recién nacidos cuyo peso está comprendido entre 3,464 y 4,502 kg?

b) **[1 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **[1 p.]** Calcule el porcentaje de recién nacidos que pesan menos de 2,33 kg.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1: Se quiere calcular un número de tres cifras con los siguientes datos:

i) La suma de sus tres cifras es 9.

ii) Si permutamos la cifra de las centenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial menos 99.

iii) Si permutamos la cifra de las decenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial más 36.

a) **[1,5 p.]** Denotando por x la cifra de las centenas, por y la de las decenas y por z la de las unidades, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente la información dada en i), ii) y iii).

b) **[1 p.]** Calcule el número en cuestión.

Solución:

a) El número es $xyz = 100x + 10y + z$.

"La suma de sus tres cifras es 9" → $x + y + z = 9$

"Si permutamos la cifra de las centenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial menos 99" → $zyx = xyz - 99 \Rightarrow 100z + 10y + x = 100x + 10y + z - 99$.

"Si permutamos la cifra de las decenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial más 36" → $xzy = xyz + 36 \Rightarrow 100x + 10z + y = 100x + 10y + z + 36$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=9 \\ 100z+10y+x=100x+10y+z-99 \\ 100x+10z+y=100x+10y+z+36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=9 \\ 99z-99x=-99 \\ -9y+9z=36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=9 \\ z-x=-1 \\ -y+z=4 \end{array}\right\}$$

b) Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=9 \\ z-x=-1 \\ -y+z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=9 \\ z=x-1 \\ -y+z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+x-1=9 \\ -y+x-1=4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=10 \\ -y+x=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=10 \\ x=5+y \end{array}\right\} \Rightarrow 2(5+y)+y=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10+2y+y=10 \Rightarrow 3y=0 \Rightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{x=5+0=5} \Rightarrow \boxed{z=5-1=4}$$

El número es el 504.

Problema 2:

2: Se dice que una matriz cuadrada A es 2-nilpotente si cumple que $A^2 = 0$.

a) **[0,75 p.]** Justifique razonadamente que una matriz 2-nilpotente nunca puede ser regular (o invertible).

b) **[0,75 p.]** Compruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

c) **[1 p.]** Determine para qué valores de a y b la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

Solución:

a) Para que sea invertible su determinante debe ser no nulo.

$$\left|A^2\right| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2$$

$$Como\ A^2 = 0 \Rightarrow \left|A^2\right| = |0| = 0 \Rightarrow |A|^2 = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

La matriz A no es invertible pues su determinante es nulo.

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-9 & -27+27 \\ 3-3 & -9+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

La matriz A es 2-nilpotente.

c) Planteamos que $A^2 = 0$.

$$A^2 = 0 \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36+4a & 6a+ab \\ 24+4b & 4a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 36+4a=0 \\ 6a+ab=0 \\ 24+4b=0 \\ 4a+b^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a=-36 \to \boxed{a=-9} \\ 6a+ab=0 \\ 24+4b=0 \to 4b=-24 \to \boxed{b=-6} \\ 4a+b^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6(-9)+(-9)(-6)=0 \\ 4(-9)+(-6)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -54+54=0 \\ -36+36=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a=-9 \\ b=-6 \end{cases}}$$

Los valores buscados son $a = -9$ y $b = -6$.

Autor: Universidad de Murcia. Luis J. Alías Linares Coordinador Matemáticas II

Problema 3:

3: Considere la función $f(x) = xe^{-x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) **[0,75 p.]** Calcule $\text{lím}_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[0,75 p.]** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$ y sus extremos relativos (máximos y/o mínimos).

c) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

Solución:

a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = Indeterminación(L'Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

b) Usamos la derivada.

$$f'(x) = e^{-x} + x(-1)e^{-x} = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-x=0 \to x=1 \\ e^{-x}=0 \to \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 1$.

En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = (1-0)e^{-0} = 1 > 0$. La función crece en $(-\infty,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = (1-2)e^{-2} = \frac{-1}{e^2} < 0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,1)$ y decrece en $(1,+\infty)$.
La función presenta un máximo relativo en $x = 1$.

c)

$$\int f(x)dx = \int xe^{-x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \to du = dx \\ dv = e^{-x}dx \to v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array} \right\} =$$

$$= x(-e^{-x}) - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = \boxed{-xe^{-x} - e^{-x} + K}$$

Problema 4:

4: Considere la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, donde $\cos^2 x = (\cos x)^2$.

a) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

b) **[0,75 p.]** Calcule la integral definida $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$.

c) **[0,75 p.]** Determine la primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto $(\pi, 1)$.

Solución:

a)

$$\int f(x)dx = \int \frac{senx}{1+\cos^2 x}dx = \left\{\begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \cos x = t \to -senxdx = dt \\ dx = \dfrac{1}{-senx}dt \end{array}\right\} = \int \frac{\cancel{senx}}{1+t^2}\frac{1}{-\cancel{senx}}dt =$$

$$= -\int \frac{1}{1+t^2}dt = -arctgt = \boxed{-arctg(\cos x)+K}$$

b)

$$\int_0^{\pi/2} f(x)dx = \left[-arctg(\cos x)\right]_0^{\pi/2} = \left[-arctg\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[-arctg(\cos 0)\right] =$$

$$= -arctg(0) + arctg(1) = 0 + \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

c) Sabemos que la primitiva $F(x) = -arctg(\cos x)+K$.
Para hallar el valor de K hacemos que $F(\pi) = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = -arctg(\cos x)+K \\ F(\pi)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = -arctg(\cos\pi)+K \Rightarrow 1 = -arctg(-1)+K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = -\left(-\frac{\pi}{4}\right)+K \Rightarrow K = 1-\frac{\pi}{4} \Rightarrow\Rightarrow \boxed{F(x) = -arctg(\cos x)+1-\frac{\pi}{4}}$$

Problema 5:

5: Los puntos $A=(6,-4,4)$ y $B=(12,-1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C es la proyección ortogonal del vértice A sobre la recta

$$r:\begin{cases} x-2y &= 5 \\ x+2z &= 5 \end{cases}$$

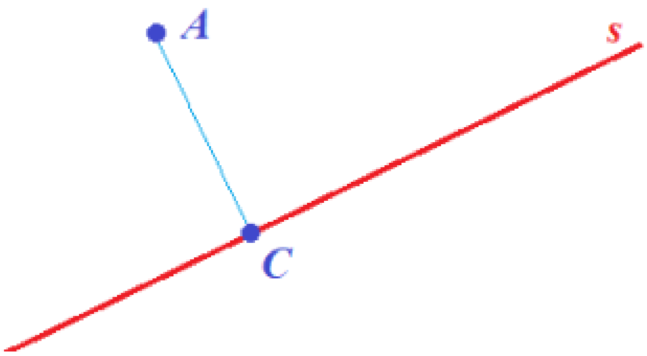
a) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del vértice C.

b) **[0,5 p.]** Determine si el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en el vértice A.

c) **[0,5 p.]** Calcule el área del triángulo $\widehat{ABC}$.

Solución:

a) Hallamos la proyección ortogonal de A sobre la recta r.



Para ello hallamos el plano perpendicular a la recta que pasa por A. Dicho plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r:\begin{cases} x-2y=5 \\ x+2z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y+5 \\ x=5-2z \end{cases} \Rightarrow 5-2z=5+2y \Rightarrow -2z=2y \Rightarrow y=-z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases} x=5-2\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(5,0,0) \\ \vec{u_r}=(-2,-1,1) \end{cases}$$

$$\pi:\begin{cases} A(6,-4,4)\in\pi \\ \vec{n}=\vec{u_r}=(-2,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(6,-4,4)\in\pi \\ \pi:-2x-y+z+D=0 \end{cases} \Rightarrow -12+4+4+D=0 \Rightarrow$$

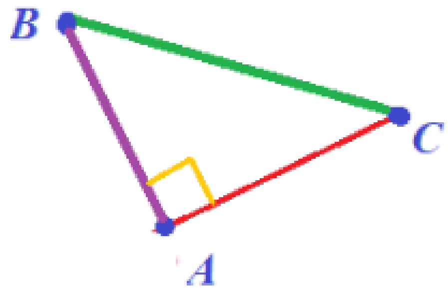
$$\Rightarrow D=4 \Rightarrow \pi:-2x-y+z+4=0$$

El punto C es el punto de corte de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi:-2x-y+z+4=0 \\ r:\begin{cases} x=5-2\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -2(5-2\lambda)-(-\lambda)+\lambda+4=0 \Rightarrow -10+4\lambda+\lambda+\lambda+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 5-2=3 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow C(3,-1,1)$$

b) Si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice A significa que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son ortogonales, es decir, su producto escalar es nulo.



$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (12,-1,1)-(6,-4,4) = (6,3,-3) \\ \overrightarrow{AC} = (3,-1,1)-(6,-4,4) = (-3,3,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (6,3,-3)(-3,3,-3) = -18+9+9 = 0$$

Se cumple y por tanto en el vértice A tenemos un ángulo de 90°.

c) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (6,3,-3) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,3,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 27j+27k = (0,27,27)$$

$$\acute{A}rea\ ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{0^2+27^2+27^2}}{2} = \boxed{\frac{27\sqrt{2}}{2} = 19.09\ u^2}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Como ABC es un triángulo rectángulo el área es la base ($\left|\overrightarrow{AB}\right|$) por la altura ($\left|\overrightarrow{AC}\right|$) dividido entre 2.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (6,3,-3) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,3,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \acute{A}rea = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{6^2+3^2+(-3)^2}\sqrt{(-3)^2+3^2+(-3)^2}}{2} = \frac{27\sqrt{2}}{2}$$

Problema 6:

6: Considere el plano π de ecuación $\pi : 2x + ay - 2z = -4$ y la recta r dada por

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2}.$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.

Se sabe que cuando $a = 1$ la recta r corta al plano π. Para ese valor de a:

b) **[0,75 p.]** Calcule el punto de corte de la recta r y el plano π.

c) **[0,5 p.]** Calcule el ángulo que forman.

Solución:

a) Determinamos el vector normal del plano y el director de la recta y obtenemos el valor de su producto escalar.

$$\pi : 2x + ay - 2z = -4 \Rightarrow \vec{n} = (2, a, -2)$$

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2} \Rightarrow r : \begin{cases} P_r(-1,-1,5) \\ \vec{u_r} = (2,1,-2) \end{cases}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u_r} = (2, a, -2)(2,1,-2) = 4 + a + 4 = 8 + a$$

Este producto puede ser nulo o no, dando lugar a dos situaciones distintas que analizamos por separado.

- Si $a = -8$ el producto escalar es nulo y por tanto los vectores son ortogonales. En este caso recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.
  Comprobamos si el punto P_r de la recta está en el plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x - 8y - 2z = -4 \\ ¿P_r(-1,-1,5) \in \pi ? \end{array} \right\} \Rightarrow ¿-2+8-10 = -4? \rightarrow ¡Cierto!$$

  El punto de la recta está en el plano y por tanto la recta está contenida en el plano.

- Si $a \neq -8$ el producto escalar no es nulo y los vectores no son ortogonales, por lo que recta y plano son secantes, coinciden en un punto.

b) Para $a = 1$ la recta r corta al plano π en un punto A.

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2} \Rightarrow r : \begin{cases} P_r(-1,-1,5) \\ \vec{u_r} = (2,1,-2) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

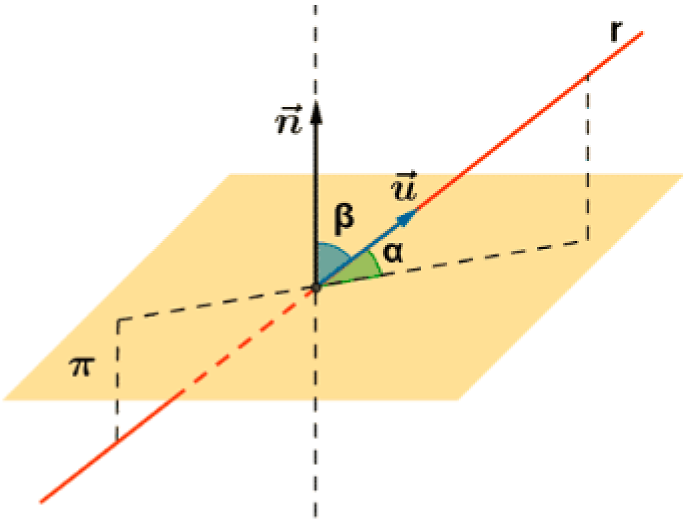
$$\left. \begin{array}{l} \pi : 2x + y - 2z = -4 \\ r : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2(-1+2\lambda) - 1 + \lambda - 2(5 - 2\lambda) = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 + 4\lambda - 1 + \lambda - 10 + 4\lambda = -4 \Rightarrow 9\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1+2=1 \\ y=-1+1=0 \Rightarrow \boxed{A(1,0,3)} \\ z=5-2=3 \end{cases}$$

El punto de corte de recta y plano es el punto *A(1, 0, 3)*.

c) El ángulo que forman plano y recta (α) lo determina el ángulo que forma el vector normal del plano y el vector director de la recta (β).



$$\left.\begin{array}{l} \pi: 2x+y-2z=-4 \Rightarrow \vec{n}=(2,1,-2) \\ r: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-5}{-2} \Rightarrow \vec{u_r}=(2,1,-2) \end{array}\right\}$$

Como estos vectores son iguales entonces $\beta = 0$, significa que recta y plano son perpendiculares (α = 90°).

Recta y plano forman un ángulo de 90°.

Problema 7:

7: En un cine hay 3 salas y un total de 250 espectadores repartidos de la siguiente manera: 100 espectadores en la sala A, 50 en la sala B y 100 en la sala C. Se sabe que la película de la sala A gusta al 80 % de los espectadores, la de la sala B al 20 % de los espectadores y la de la sala C al 60 % de los espectadores. A la salida de las tres películas se elige un espectador al azar. Calcule:

a) **[0,25 p.]** La probabilidad de que el espectador haya estado en la sala C.

b) **[0,5 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película, sabiendo que ha estado en la sala C.

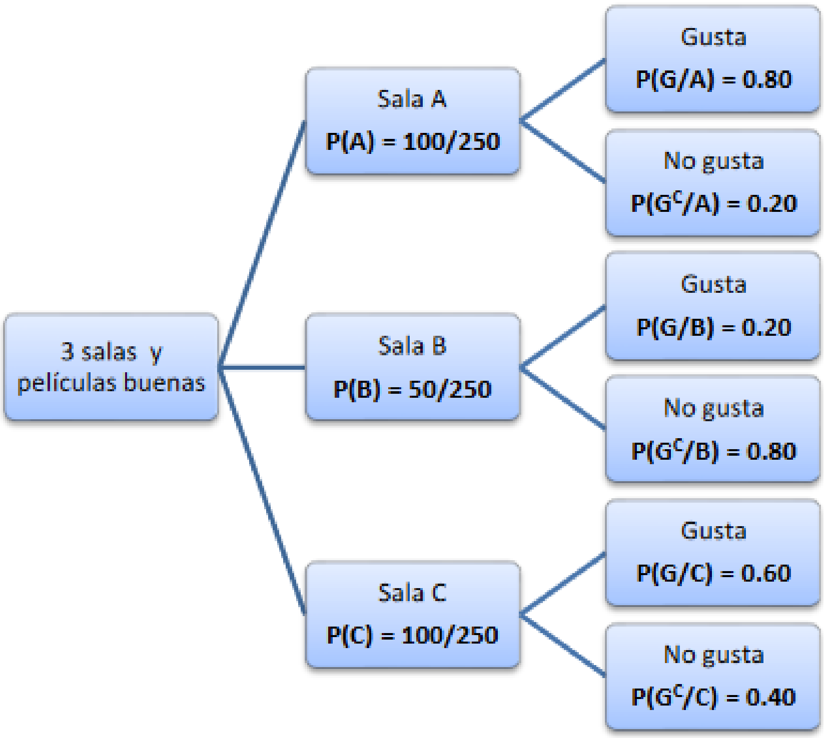
c) **[0,5 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película y haya estado en la sala C.

d) **[0,75 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película.

e) **[0,5 p.]** La probabilidad de que le haya gustado la película o haya estado en la sala C.

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol para establecer las probabilidades de los distintos sucesos del experimento.



a) Este es un dato proporcionado en el ejercicio: $P(C)=\frac{100}{250}=\boxed{\frac{2}{5}=0.4}$

b) Este es un dato proporcionado en el ejercicio: $P(G/C)=\boxed{0.60}$

c) $P(C\cap G)=P(C)P(G/C)=0.4\cdot 0.6=\boxed{0.24}$

d) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G)=P(A)P(G/A)+P(B)P(G/B)+P(C)P(G/C)=$$

$$=0.4\cdot 0.8+\frac{50}{250}\cdot 0.2+0.24=\boxed{0.6}$$

e) $P(G\cup C)=P(G)+P(C)-P(G\cap C)=0.6+0.4-0.24=\boxed{0.76}$

Problema 8:

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades y 2 decimales para los porcentajes.

El peso de los recién nacidos en la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 67 % de los recién nacidos pesan menos de 3,464 kg y que el 1,5 % de los recién nacidos pesan más de 4,502 kg.

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es el porcentaje de recién nacidos cuyo peso está comprendido entre 3,464 y 4,502 kg?

b) **[1 p.]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **[1 p.]** Calcule el porcentaje de recién nacidos que pesan menos de 2,33 kg.

Solución:

X = El peso de los recién nacidos en la Región de Murcia.

$X = N(\mu, \sigma)$

a) Sabemos que $P(X \le 3.464) = 0.67$ y que $P(X \ge 4.502) = 0.015$.

$$P(X \ge 4.502) = 0.015 \Rightarrow P(X \le 4.502) = 1 - 0.015 = 0.985$$

Nos piden calcular $P(3.464 \le X \le 4.502)$.

$$P(3.464 \le X \le 4.502) = P(X \le 4.502) - P(X \le 3.464) = 0.985 - 0.67 = \boxed{0.315}$$

b) Sabemos que $P(X \le 4.502) = 0.985$.

$$P(X \le 4.502) = 0.985 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \le \frac{4.502 - \mu}{\sigma}\right) = 0.985 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{4.502 - \mu}{\sigma} = 2.17 \Rightarrow 4.502 - \mu = 2.17\sigma \Rightarrow \boxed{4.502 - 2.17\sigma = \mu}$$

Sabemos que $P(X \le 3.464) = 0.67$.

$$P(X \le 3.464) = 0.67 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \le \frac{3.464 - \mu}{\sigma}\right) = 0.67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{3.464 - \mu}{\sigma} = 0.44 \Rightarrow 3.464 - \mu = 0.44\sigma \Rightarrow \boxed{\mu = 3.464 - 0.44\sigma}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix}\mu = 3.464 - 0.44\sigma \\ 4.502 - 2.17\sigma = \mu\end{matrix}\right\} \Rightarrow 4.502 - 2.17\sigma = 3.464 - 0.44\sigma \Rightarrow$$

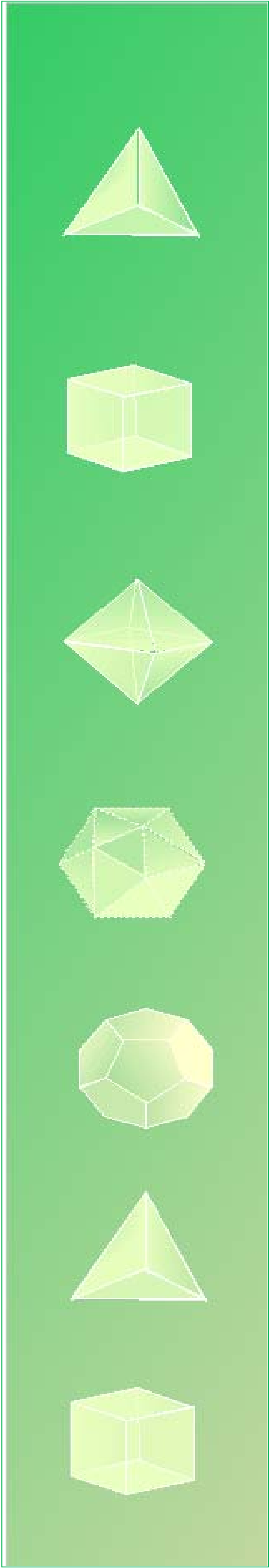
$$\Rightarrow 4.502 - 3{,}464 = 2.17\sigma - 0.44\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.038 = 1.73\sigma \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{1.038}{1.73} = 0.6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = 3.464 - 0.44 \cdot 0.6 = 3.2}$$

$p(X < 2{,}33) = p(Z < (2{,}33 - 3{,}2)/0{,}6) = p(Z < -1{,}45) = p(Z > 1{,}45) = 1 - p(Z \le 1{,}45) = 1 - 0{,}9265 = 0{,}0735$

Es decir el 7.35 %



MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + (2a-1)y + \left(\sqrt{2}-2\right)z = 2 \\ -ax + ay + 2a^2 z = \sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Problema 2:

Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz A·B es máximo, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{pmatrix} \quad \text{(2,5 puntos)}$$

Problema 3:

Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a r y s que corta a ambas, siendo:

$$\begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{y } s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2}. \quad \text{(2,5 puntos)}$$

Problema 4

Sean P (1, 5, −1) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2}$

a) Calcula el punto Q ∈ r tal que la distancia de P a Q sea mínima. (1,25 puntos)

b) Halla los puntos Q1 y Q2 pertenecientes a r tales que d(P, Q1) = d(P, Q2) = $3\sqrt{2}$. (1,25 puntos)

Problema 5:

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$a) \int \frac{2x-5}{x^2+x-2}\,dx \quad \text{(1,25 puntos)}$$

$$b) \int x\ln(x)\,dx. \quad \text{(1,25 puntos)}$$

Problema 6:

Estudia la continuidad en R de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{cos^2(\pi x)-1}{1-x} & si\ x < 1 \\ \ln(x \cdot e^{x+1}) - 2x & si\ x \geq 1 \end{cases} \quad \text{(2,5 puntos)}$$

Problema 7:

Se considera la función $f(x) = (x + 1)sen(\pi x)$

a) Demuestra que es continua en R (0,5 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (0, 1)$ tal que $f(\alpha) = 3/4$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

Problema 8:

Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gŕaficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - 2x^2 \quad y\ g(x) = x^4 - x^2$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2,5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+(2a-1)y+\left(\sqrt{2}-2\right)z=2 \\ -ax+ay+2a^2z=\sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

SOLUCIÓN

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 \\ -a & a & 2a^2 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -a & a & 2a^2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 \\ -a & a & 2a^2 \end{vmatrix}=$$

$$=2a^2\cdot(2a-1)-2a+a\cdot\left(\sqrt{2}-2\right)-a\cdot(2a-1)+4a^2-a\cdot\left(\sqrt{2}-2\right)=$$

$$=2a^2\cdot(2a-1)-2a-a\cdot(2a-1)+4a^2=$$

$$=4a^3-2a^2-2a-2a^2+a+4a^2=4a^3-a=0;\ \ a(4a^2-1)=0\Rightarrow a_1=0;$$

$$4a^2-1=0;\ \ a^2=\frac{1}{4}\Rightarrow a_2=\frac{1}{2},a_3=-\frac{1}{2}.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\boldsymbol{Para\left\{\begin{matrix} a\neq-\frac{1}{2} \\ a\neq 0 \\ a\neq\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{o}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix}=-\sqrt{2}+2\sqrt{2}=\sqrt{2}\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$Para\ a=\frac{1}{2}\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow$ A efectos de rango M' es equivalente a $M''=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 2 - 2 + 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} a = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$Para\ a = -\frac{1}{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow$ A efectos de rango M' es equivalente a $M'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = -C_1\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ 1 & 1 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 2\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 2\right) - 2 - 2 + 4\sqrt{2} =$$

$$= 4 - 4\sqrt{2} - 4 + 4\sqrt{2} = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\boldsymbol{Para\ a = -\frac{1}{2} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq -\frac{1}{2}, a \neq 0\ y\ a \neq \frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -a & a & 2a^2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 + aF_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2a+1 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2a^2 - a & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow (2a^2 - a)z = \sqrt{2} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}.$$

$$(2a+1)y + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} = 2;\ \ (2a+1)y = 2 - \frac{2}{2a^2-a} = \frac{4a^2-2a-2}{2a^2-a};$$

$$y = \frac{4a^2-2a-2}{a(2a-1)(2a+1)} = \frac{2(2a^2-a-1)}{a(2a-1)(2a+1)} = \frac{2\left(a+\frac{1}{2}\right)(a-1)}{a(2a-1)(2a+1)} = \frac{(2a+1)(a-1)}{a(2a-1)(2a+1)} \Rightarrow y = \frac{a-1}{2a^2-a}.$$

$$x - y - z = 0;\ \ x = y + z = \frac{a-1}{2a^2-a} + \frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} \Rightarrow x = \frac{a+\sqrt{2}-1}{2a^2-a}.$$

$$\boldsymbol{Solución: x = \frac{2a+\sqrt{2}-2}{2a^2-a}, y = \frac{2(a-1)}{2a^2-a}, z = \frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}, \forall a \in R - \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}.}$$

Resolvemos ahora para $a = -\frac{1}{2}$.

El sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ 2x - 2y + \left(\sqrt{2}-2\right)z = 2 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \sqrt{2} \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ 2x - 2y + \left(\sqrt{2}-2\right)z = 2 \\ x - y + z = 2\sqrt{2} \end{array}\right\}$.

Despreciando una ecuación, por ejemplo, la segunda, y haciendo $y = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{l} x - z = \lambda \\ x + z = 2\sqrt{2} + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 2\sqrt{2} + 2\lambda;\;\; x = \sqrt{2} + \lambda.$$

$z = x - \lambda = \sqrt{2} + \lambda - \lambda \Rightarrow z = \sqrt{2}.$

$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n}: \boldsymbol{x = \sqrt{2} + \lambda, y = \lambda, z = \sqrt{2}, \forall\lambda \in R.}}$

Problema 2:

Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz A·B es máximo, siendo

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & t-1\\ 1 & t & 1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}t+1 & 1 & t\\ 0 & t & -2t+1\\ t+1 & t+1 & -t-1\end{pmatrix}$$ (2,5 puntos)

SOLUCIÓN

El rango de $A\cdot B$ es máximo cuando $|A\cdot B|\neq 0$.

Sabiendo que $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$, tiene que cumplirse que $|A|\cdot|B|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & t-1\\ 1 & t & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & t-1\end{vmatrix}=1.$$

$$|B|=\begin{vmatrix}t+1 & 1 & t\\ 0 & t & -2t+1\\ t+1 & t+1 & -t-1\end{vmatrix}=$$

$=-t(t+1)^2+(t+1)(-2t+1)-t^2(t+1)-(t+1)^2(-2t+1)=$

$=(t+1)^2[-t-(-2t+1)]+(t+1)[(-2t+1)-t^2]=$

$=(t+1)^2(-t+2t-1)+(t+1)(-2t+1-t^2)=$

$=(t+1)^2(t-1)+(t+1)(-t^2-2t+1)=$

$=(t+1)[(t+1)(t-1)-t^2-2t+1]=(t+1)(t^2-1-t^2-2t+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow |B|=-2t(t+1).$

$|A\cdot B|\neq 0 \Rightarrow 1\cdot[-2t(t+1)]\neq 0;\;\; 2t(t+1)\neq 0\Rightarrow t_1\neq 0, t_2\neq -1.$

$\underline{\boldsymbol{El\ rango\ de\ la\ matriz\ (A\cdot B)\ es\ máximo\ \forall t\in R-\{0,-1\}.}}$

Problema 3:

Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a r y s que corta a ambas, siendo:

$\begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2}$. (2,5 puntos)

SOLUCIÓN

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{matrix} x - y = -2 + \lambda \\ x - 3y = 8 - 3\lambda \end{matrix}\Bigg\} \begin{matrix} -x + y = 2 - \lambda \\ x - 3y = 8 - 3\lambda \end{matrix}\Bigg\}$$

$\Rightarrow -2y = 10 - 4\lambda;\ y = -5 + 2\lambda;\ x = -5 + 2\lambda - 2 + \lambda \Rightarrow x = -7 + 3\lambda \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ r \equiv \begin{cases} x = -7 + 3\lambda \\ y = -5 + 2\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(-7, -5, 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (3, 2, 1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(2, -5, 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (3, -4, -2)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2, -5, 0) - (-7, -5, 0)] = (9, 0, 0)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -36 + 36 = 0 \Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ \ son\ coplanarios \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan.}}$$

El vector director de la recta t es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas $r\ y\ s$.

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -4i + 3j - 12k - 6k + 4i + 6j = 9j - 18k \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (0, 1, -2)$

La expresión de $s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2}$ por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 8 = 3y + 15 \\ -2x + 4 = 3z \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 4x + 3y + 7 = 0 \\ 2x + 3z - 4 = 0 \end{cases}.$$

Las rectas r y s determinan el sistema: $\left.\begin{array}{r} x-y-z=-2 \\ x-3y+3z=8 \\ 4x+3y=-7 \\ 2x+3z=4 \end{array}\right\}$, que sabemos que es compatible determinado (las rectas se cortan en un punto), por lo cual, para su resolución eliminamos una de las ecuaciones, por ejemplo, la segunda, quedando el sistema:

$\left.\begin{array}{r} x-y-z=-2 \\ 4x+3y=-7 \\ 2x+3z=4 \end{array}\right\}$. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -7 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{-18+12-21}{9+6+12}=\frac{-27}{27}=-1.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -7 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{27}=\frac{-21-16-14+24}{27}=\frac{-27}{27}=-1.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{27}=\frac{12+14+12+16}{27}=\frac{54}{27}=2.$$

El punto de corte es $P(-1,-1,2)$.

Unas ecuaciones continuas de t son:

$$\underline{\boldsymbol{t \equiv \frac{x+1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}}}.$$

Problema 4

Sean P (1, 5, −1) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2}$

a) Calcula el punto Q ∈ r tal que la distancia de P a Q sea mínima. (1,25 puntos)

b) Halla los puntos Q1 y Q2 pertenecientes a r tales que d(P, Q1) = d(P, Q2) = $3\sqrt{2}$. (1,25 puntos)

SOLUCIÓN

$a)$ Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, 2)$.

El haz de planos, β, perpendiculares a la recta r tiene la siguiente expresión general: $\beta \equiv 2x + y + 2z + D = 0$.

De los infinitos planos de haz β, el plano π que contiene al punto $P(1, 5, -1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r}\beta \equiv 2x + y + 2z + D = 0\\ P(1, 5, -1)\end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 + 5 + 2 \cdot (-1) + D = 0;$$

$2 + 5 - 2 + D = 0;\ \ D = -5 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y + 2z - 5 = 0.$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{cases}$.

El punto Q pedido es la intersección de la recta r y el plano π:

$$\left.\begin{array}{r}\pi \equiv 2x + y + 2z - 5 = 0\\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + (2 + \lambda) + 2(-4 + 2\lambda) - 5 = 0;$$

$2 + 4\lambda + 2 + \lambda - 8 + 4\lambda - 5 = 0;\ \ 9\lambda - 9 = 0;\ \ \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 + 2 = 3 \\ y = 2 + 1 = 3 \\ z = -4 + 2 = -2 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Q(3, 3, -2)}}.$$

$b)$ Halla los puntos $Q_1\ y\ Q_2$ pertenecientes a r tales que $d(P, Q_1) = d(P, Q_2) = 3\sqrt{2}$.

Un punto genérico de $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{cases}$ es $Q(1 + 2\lambda, 2 + \lambda, -4 + 2\lambda)$.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(1 + 2\lambda, 2 + \lambda, -4 + 2\lambda) - (1, 5, -1)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2\lambda, -3 + \lambda, -3 + 2\lambda).$

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(2\lambda)^2 + (-3 + \lambda)^2 + (-3 + 2\lambda)^2} = 3\sqrt{2};$

$4\lambda^2 + 9 - 6\lambda + \lambda^2 + 9 - 12\lambda + 4\lambda^2 = 18;\ \ 9\lambda^2 - 18\lambda = 0;\ \ \lambda^2 - 2\lambda = 0;$

$\lambda(\lambda - 2) = 0;\ \ \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2.$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow Q_1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\ y = 2 + 0 = 2 \\ z = -4 + 2 \cdot 0 = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Q_1(1, 2, -4)}}.$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow Q_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \\ y = 2 + 2 = 4 \\ z = -4 + 2 \cdot 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Q_2(5, 4, 0)}}.$$

Problema 5:

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$a)\ \int \frac{2x-5}{x^2+x-2}dx$ (1,25 puntos)

$b)\ \int x\ln(x)\,dx.$ (1,25 puntos)

SOLUCIÓN

$a)\ I_1 = \int \frac{2x-5}{x^2+x-2}\cdot dx.$

$$x^2+x-2=0;\ \ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\ \Rightarrow\ x_1=-2, x_2=1.$$

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1).$$

$$\frac{2x-5}{x^2+x-2}=\frac{M}{x+2}+\frac{N}{x-1}=\frac{Mx-M+Nx+2N}{(x+2)(x-1)}=\frac{(M+N)x+(-M+2N)}{x^2+x-2}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=2 \\ -M+2N=-5 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 3N=-3;\ \ N=-1;\ \ M-1=2\ \Rightarrow M=3.$

$$I_1=\int\frac{2x-5}{x^2+x-2}\cdot dx=\int\left(\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x-1}\right)\cdot dx=3\cdot L|x+2|-L|x-1|+C\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\Rightarrow I_1=\int\frac{2x-5}{x^2+x-2}\cdot dx=L\left|\frac{(x+2)^3}{x-1}\right|+C.}}$$

$$b)\ I_2=\int x\cdot Lx\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} u=Lx\rightarrow du=\frac{1}{x}\cdot dx \\ x\cdot dx=dv\rightarrow v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow Lx\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot Lx-\frac{1}{2}\cdot\int x\cdot dx=\frac{x^2}{2}\cdot Lx-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^2}{4}\cdot(2Lx-1)+C.$$

$$\underline{\boldsymbol{I_2=\int x\cdot Lx\cdot dx=\frac{x^2}{4}\cdot(2Lx-1)+C.}}$$

Problema 6:

Estudia la continuidad en R de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{cos^2(\pi x)-1}{1-x} & si\ x<1\\ \ln(x\cdot e^{x+1})-2x & si\ x\geq 1\end{cases}$$ (2,5 puntos)

SOLUCIÓN

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x=1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{cos^2(\pi x)-1}{1-x}=0 \quad (*)\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}[L(x\cdot e^{x+1})-2x]=0=f(1) \quad (**)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Rightarrow \underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R}.$$

$$(*)\ \lim_{x\to 1}\frac{cos^2(\pi x)-1}{1-x}=\frac{cos^2(\pi)-1}{1-1}=\frac{(-1)^2-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{-2\cdot cos(\pi x)\cdot[\pi\cdot sen(\pi x)]}{-1}=\lim_{x\to 1}[sen(2\pi x)]=sen\ (2\pi)=0.$$

$$(**)\ \lim_{x\to 1}[L(x\cdot e^{x+1})-2x]=L(1\cdot e^{1+1})-2\cdot 1=Le^2-2=2\cdot Le-2=$$

$$=2\cdot 1-2=2-2=0.$$

Problema 7:

Se considera la función $f(x) = (x+1)sen(\pi x)$

a) Demuestra que es continua en R (0,5 puntos)

b) Comprueba que existe un valor α ∈ (0, 1) tal que f(α) = 3/4. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

SOLUCIÓN

$a)$ La función $f(x) = (x+1) \cdot sen\,(\pi x)$ es continua en R por ser producto de dos funciones continuas en R.

$b)$ $f(0) = (0+1) \cdot sen\,(\pi \cdot 0) = 1 \cdot sen\,0 = 0.$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}+1\right) \cdot sen\,\left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot sen\,\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} > \frac{3}{4}.$

$f(0) = 0 < \frac{3}{4} < f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$

Considerando el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right) \in (0,1)$ y teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en R, le es aplicable el teorema de los valores intermedios (o de Darboux), que dice que “si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces para cada valor m tal que $f(a) < m < f(b)$, existe al menos un valor $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = m$”.

$$\underline{\boldsymbol{Queda\ comprobado\ que\ existe\ un\ a \in (0,1)\ tal\ que\ f(a) = \frac{3}{4}.}}$$

Problema 8:

Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gŕaficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - 2x^2 \quad y\ g(x) = x^4 - x^2$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2,5 puntos)

SOLUCIÓN

Nótese que las dos funciones, por ser pares, son simétricas con respecto al eje de ordenadas.

Los puntos de corte de dos funciones tienen por abscisas las raíces reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - 2x^2 = x^4 - x^2;\ \ x^4 + x^2 - 2 = 0 \to x^2 = a \to$

$\to a^2 + a - 2 = 0;\ \ a = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = 1.$

$x^2 = -2 \Rightarrow x \notin R;\ \ x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \longrightarrow A(-1,0) \\ x_2 = 1 \longrightarrow B(1,0) \end{cases}.$

La función $f(x) = 2 - 2x^2$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2. Su vértice es el punto $V(0,2)$.

La función $g(x) = x^4 - x^2$, además de contener a los puntos A y B también contiene al origen de coordenadas y sus máximos y mínimos son los siguientes:

$g'(x) = 4x^3 - 2x. \quad g''(x) = 12x^2 - 2.$

$g'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 2x = 0;\ 2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

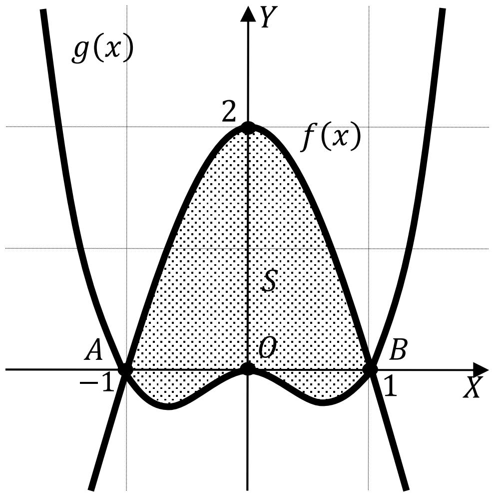
$g''(0) = -2 < 0 \Rightarrow máximo\ relativo \Rightarrow O(0,0).$

$g''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 12 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 = 6 - 2 = 4 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow mín.absoluto\ par\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Por simetría $\Rightarrow mín.absoluto\ par\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



En el intervalo de la superficie a calcular, las ordenadas de $f(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de $g(x)$, por lo cual, y teniendo en cuenta la simetría de las dos funciones con respecto al eje de ordenadas, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx =$$

$2 \cdot \int_0^1 [(2 - 2x^2) - (x^4 - x^2)] \cdot dx =$

$= 2 \cdot \int_0^1 (2 - 2x^2 - x^4 + x^2) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^1 (-x^4 - x^2 + 2) \cdot dx =$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^1 = 2 \cdot \left[\left(-\frac{1^5}{5} - \frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1\right) - 0\right] = -\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + 4 = \frac{-6-10+60}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S = \frac{44}{15}\, u^2 \cong 2,93\, u^2.}$$

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

I INSTRUCCIONES GENERALES

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan. Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} a\,x + y - 2\,z = 1 \\ 3a\,x + a^2\,y - 2a^2\,z = 3 \\ -a\,x - y + (a^2-1)\,z = a + \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Problema 2:

P2) Calcula el valor de a para que la siguiente matriz no sea regular

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2,5 puntos)

Problema 3:

P3) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-3,-2,3)$ y que corta a las rectas r y s, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1}$$

(2,5 puntos)

Problema 4:

P4) Halla el plano paralelo a r y s que se encuentra a $3u$ de r y $6u$ de s siendo

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-1}$$

(2,5 puntos)

Problema 5:

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones y sus valores en el punto $x = 0$:

a) $f(x) = \ln\left[\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}\right]$

(1,25 puntos)

b) $g(x) = \arctan\sqrt{1 + 2x + e^{2x}}$

(1,25 puntos)

Problema 6:

P6) Se considera la función $f(x) = \dfrac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}{x^2 - 6x + 10}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[1, 4]$.

(0,75 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores α y β en el intervalo $(1, 4)$ tales que $f(\alpha) = \frac{-1}{2} = f(\beta)$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,75 puntos)

Problema 7:

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2} - \sin\dfrac{\pi x}{6}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[7, 11]$ y derivable en $(7, 11)$.

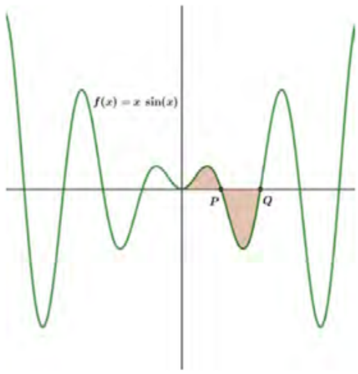
(1,25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (7, 11)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

Problema 8:

P8) La curva de la imagen corresponde a la función $f(x) = x \cdot \sin x$. Tal y como se intuye, la curva corta el eje OX en infinitos puntos:



Encuentra los puntos P y Q, y, a continuación, calcula el área de la región del plano sombreada.

(2,5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} a\,x + y - 2\,z = 1 \\ 3a\,x + a^2\,y - 2a^2\,z = 3 \\ -a\,x - y + (a^2-1)\,z = a + \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 3a & a^2 & -2a^2 \\ -a & -1 & a^2-1 \end{pmatrix} \ y\ M' = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 1 \\ 3a & a^2 & -2a^2 & 3 \\ -a & -1 & a^2-1 & a+\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 3a & a^2 & -2a^2 \\ -a & -1 & a^2-1 \end{vmatrix} =$$

$$= a^3 \cdot (a^2-1) + 6a + 2a^3 - 2a^3 - 2a^3 - 3a(a^2-1) =$$

$$= a^5 - a^3 + 6a - 2a^3 - 3a^3 + 3a = a^5 - 6a^3 + 9a = 0;\ \ a(a^4 - 6a^2 + 9) = 0;$$

$$a_1 = 0. \qquad a^4 - 6a^2 + 9 = 0;\ \ (a^2-3)^2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\sqrt{3}, a_3 = \sqrt{3}.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq -\sqrt{3} \\ a \neq \sqrt{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & \sqrt{3}-1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ \ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = -\sqrt{3} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & -2 & 1 \\ -3\sqrt{3} & 3 & -6 & 3 \\ \sqrt{3} & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 1.$$

Todas las columnas son linealmente dependientes.

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a = -\sqrt{3} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 1 < n^{o}\ inc\acute{o}g. \Rightarrow S.C.I.}}$$

(Dos grados de libertad, dos parámetros)

$$Para\ a = \sqrt{3} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & -2 & 1 \\ 3\sqrt{3} & 3 & -6 & 3 \\ -\sqrt{3} & -1 & 2 & 2\sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

Las tres primeras columnas son linealmente dependientes.

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a = \sqrt{3} \Rightarrow Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq -\sqrt{3}, a \neq 0\ y\ a \neq \sqrt{3}$:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 1 \\ 3a & a^2 & -2a^2 & 3 \\ -a & -1 & a^2-1 & a+\sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 1 \\ 0 & a^2-3 & 6-2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3 & a+\sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow (a^2-3)z = a+\sqrt{3} \Rightarrow z = \frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}.$$

$$(a^2-3)y - 2(a^2-3) \cdot \frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3} = 0;\ \ (a^2-3)y = 2\left(a+\sqrt{3}\right) \Rightarrow y = \frac{2\left(a+\sqrt{3}\right)}{a^2-3}.$$

$$ax + y - 2z = 1;\ \ ax = 1 - \frac{2\left(a+\sqrt{3}\right)}{a^2-3} + \frac{2\left(a+\sqrt{3}\right)}{a^2-3} \Rightarrow x = \frac{1}{a}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x = \frac{1}{a}, y = \frac{2\left(a+\sqrt{3}\right)}{a^2-3}, z = \frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}, \forall a \in R - \left\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\right\}.}}$$

Resolvemos ahora para $a = -\sqrt{3}$.

El sistema resulta $\left.\begin{matrix} -\sqrt{3}x + y - 2z = 1 \\ -3\sqrt{3}x + 3y - 6z = 3 \\ \sqrt{3}x - y + 2z = -1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente a la ecuación $\sqrt{3}x - y + 2z = -1$.

Como tiene dos grados de libertad, se hace $x = \lambda, z = \mu$:

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x = \lambda, y = \sqrt{3}\lambda + 2\mu + 1, z = \mu, \forall \lambda, \mu \in R.}}$$

Problema 2:

P2) Calcula el valor de a para que la siguiente matriz no sea regular

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2,5 puntos)

Solución:

Una matriz no es regular cuando su determinante es distinto de cero.

Restando en $|A|$ a la primera fila la tercera multiplicada por dos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los menores adjuntos de la segunda columna:

$$|A| = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & a+3 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & a+3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sumando la primera columna a las otras dos:

$$|A| = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & a+1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los menores adjuntos de la tercera fila:

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & a+1 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a+1 \end{vmatrix} = -4 \cdot (a+1+1) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a + 2 = 0;\ \ a = -2.$

$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ no\ es\ regular\ para\ a = -2.}}$

Problema 3:

P3) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-3,-2,3)$ y que corta a las rectas r y s, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1}$$

(2,5 puntos)

Solución:

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow z = 2\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=1+2\lambda \\ x-y=-1-4\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x = -2\lambda;$$

$$x = -\lambda;\ y = 1+2\lambda - x \Rightarrow y = 1+3\lambda \Rightarrow\ r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1+3\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0,1,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-1,3,1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(3,-5,-3)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-1,2,1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(3,-5,-3)-(0,1,0)] = (3,-6,-3)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 6+6+9-6-6-9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 2 \Rightarrow\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ \ son\ coplanarios \Rightarrow \underline{r\ y\ s\ se\ cortan}.$$

La expresión de $s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1}$ por unas ecuaciones implícitas es la siguiente: $s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 2x-6=-y-5 \\ x-3=-z-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x+z=0 \end{cases}.$

Las rectas r y s determinan el sistema: $\left.\begin{matrix} x+y-z=1 \\ x-y+2z=-1 \\ 2x+y=1 \\ x+z=0 \end{matrix}\right\}$, que sabemos que es compatible determinado (las rectas se cortan en un punto), por lo cual, para su resolución eliminamos una de las ecuaciones, por ejemplo, la tercera, que es la suma de la primera y la última, quedando el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ x-y+2z=-1 \\ x+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow z=-x \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+x=1 \\ x-y-2x=-1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ -x-y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0;$$

$y=1, z=0 \Rightarrow$ El punto de corte es $Q(0,1,0)$.

La recta pedida, t, es la que pasa por los puntos P y Q:

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=[(0,1,0)-(-3,-2,3)]=(3,3,-3) \Rightarrow \overrightarrow{v_t}=(1,1,-1)$

Unas ecuaciones continuas de t son:

$$\underline{\boldsymbol{t \equiv \frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}}}.$$

Problema 4:

P4) Halla el plano paralelo a r y s que se encuentra a $3u$ de r y $6u$ de s siendo

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-1}$$

(2,5 puntos)

Solución:

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 6\lambda \Rightarrow \left. \begin{array}{r} -y + 2z = -7 - 12\lambda \\ 2y + 2z = 2 - 30\lambda \end{array} \right\};$$

$$\left. \begin{array}{r} y - 2z = 7 + 12\lambda \\ 2y + 2z = 2 - 30\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 3y = 9 - 18\lambda;\ \ y = 3 - 6\lambda;\ \ 2z = y - 7 - 12\lambda =$$

$$= 3 - 6\lambda - 7 - 12\lambda = -4 - 18\lambda;\ \ z = -2 - 9\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 3 - 6\lambda \\ z = -2 - 9\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $A(0, 3, -2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2, -2, -3)$.

Un punto y un vector director de s son $B(1, -3, 5)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2, 0, -1)$.

El vector normal del plano π es perpendicular, simultáneamente, de los vectores directores de las rectas r y s, por lo cual, es linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores:

$$\overrightarrow{n'} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2i - 6j + 4k + 2j = 2i - 4j + 4k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (1, -2, 2).$$

El plano π tiene la siguiente expresión general: $\pi \equiv x - 2y + 2z + D = 0$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

La distancia del plano π a cualquiera de las rectas es equivalente a la distancia del plano a cualquier punto de ellas.

$$d(\pi, r) = d(\pi, A) = 3 \Rightarrow \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3;\ \ \frac{|-10 + D|}{\sqrt{9}} = 3;\ \ |-10 + D| = 9.$$

$$\left. \begin{array}{r} -10 + D = 9 \\ -10 + D = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow D_{1r} = 19;\ \ D_{2r} = 1.$$

$$d(\pi, s) = d(\pi, B) = 6 \Rightarrow \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 + D|}{\sqrt{9}} = 6;\ \ |17 + D| = 18.$$

$$\left. \begin{array}{r} 17 + D = 18 \\ 17 + D = -18 \end{array} \right\} \Rightarrow D_{1s} = 1;\ \ D_{2s} = -35.$$

El único valor de D que satisface las dos condiciones es $D = 1$, por lo cual, el plano pedido es:

$$\boldsymbol{\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0.}$$

Problema 5:

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones y sus valores en el punto $x = 0$:

a) $f(x) = \ln\left[\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}\right]$ (1,25 puntos)

b) $g(x) = \arctan\sqrt{1 + 2x + e^{2x}}$ (1,25 puntos)

Solución:

a) $f(x) = L\left[\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}\right] = Lu \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}.$ (*)

$u = \cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}.$

$u' = -\pi \cdot sen\ (\pi x) \cdot e^{x^2+2x} + \cos(\pi x) \cdot (2x+2) \cdot e^{x^2+2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow u' = e^{x^2+2x} \cdot [2 \cdot (x+1) \cdot \cos(\pi x) - \pi \cdot sen\ (\pi x)].$

Sustituyendo en (*):

$$f'(x) = \frac{e^{x^2+2x} \cdot [2 \cdot (x+1) \cdot \cos(\pi x) - \pi \cdot sen\ (\pi x)]}{\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot (x+1) \cdot \cos(\pi x) - \pi \cdot sen\ (\pi x)}{\cos(\pi x)}.$$

$$f'(0) = \frac{2 \cdot (0+1) \cdot \cos(\pi \cdot 0) - \pi \cdot sen\ (\pi \cdot 0)}{\cos(\pi \cdot 0)} = \frac{2 \cdot \cos 0 - \pi \cdot sen\ 0}{\cos 0} = \frac{2 \cdot 1 - 0}{1} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{f'(0) = 2.}}$$

b) $g(x) = arc\ tg\ \sqrt{1 + 2x + e^{2x}} = arc\ tg\ u \Rightarrow g'(x) = \frac{u'}{1+u^2}.$ (*)

$u = \sqrt{1 + 2x + e^{2x}}.\ \ u' = \frac{2+2 \cdot e^{2x}}{2 \cdot \sqrt{1+2x+e^{2x}}} = \frac{2 \cdot (1+e^{2x})}{2 \cdot \sqrt{1+2x+e^{2x}}} \Rightarrow u' = \frac{1+e^{2x}}{\sqrt{1+2x+e^{2x}}}.$

Sustituyendo en (*):

$$g'(x) = \frac{\frac{1+e^{2x}}{\sqrt{1+2x+e^{2x}}}}{1+\left(\sqrt{1+2x+e^{2x}}\right)^2} = \frac{1+e^{2x}}{\left(1+\sqrt{1+2x+e^{2x}}\right) \cdot \sqrt{1+2x+e^{2x}}} = \frac{1+e^{2x}}{(2+2x+e^{2x}) \cdot \sqrt{1+2x+e^{2x}}}.$$

$$g'(0) = \frac{1+e^{2 \cdot 0}}{(2+2 \cdot 0+e^{2 \cdot 0}) \cdot \sqrt{1+2 \cdot 0+e^{2 \cdot 0}}} = \frac{1+e^0}{(2+0+e^0) \cdot \sqrt{1+0+e^0}} = \frac{1+1}{(2+1) \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{g'(0) = \frac{\sqrt{2}}{3}.}}$$

Problema 6:

P6) Se considera la función $f(x) = \dfrac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}{x^2-6x+10}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[1,4]$.

(0,75 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores α y β en el intervalo $(1,4)$ tales que $f(\alpha) = \frac{-1}{2} = f(\beta)$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,75 puntos)

Solución:

$a)$ $\cos\left[\frac{\pi}{2}\cdot(x-1)\right] \in R, \forall x \in [1,4]$.

$x^2-6x+10=0;\ x=\frac{6\pm\sqrt{36-40}}{2} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow x^2-6x+10>0, \forall x \in R$.

La función $f(x)$ es continua en $[1,4]$ por ser cociente de dos funciones continuas en $[1,4]$ y cuyo denominador es distinto de cero para cualquier valor real de x.

$b)$ Teniendo en cuenta que $x^2-6x+10>0, \forall x \in R$, se consideran valores negativos de la función $g(x)=\cos\left[\frac{\pi}{2}\cdot(x-1)\right]$ en el intervalo $[1,4]$.

Una forma sencilla que cumple lo anterior es, por ejemplo, para $x=3 \in [1,4]$:

$g(3)=\cos\left[\frac{\pi}{2}\cdot(3-1)\right]=\cos\pi=-1$. Considerando $f(x)$ para $x=3$:

$f(3)=\frac{\cos\pi}{3^2-6\cdot 3+10}=\frac{-1}{9-18+10}=\frac{-1}{1}=-1$.

Teniendo en cuenta que $g(1)=\cos\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1-1)\right]=\cos 0=1$, le es aplicable a la función $f(x)$ el teorema de los valores intermedios o propiedad de Darboux que dice: "si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b]$ y un número k está comprendido entre los valores extremos de la función, o sea, $f(a)\le k\le f(b)$ o $f(a)\ge k\ge f(b)$, entonces existe un valor $c\in[a,b]$ tal que $g(c)=k$".

Aplicando la propiedad a la función $f(x)$ en el intervalo $[1,3]\in[1,4]$, existe un valor $\alpha\in[1,3]$ tal que $f(\alpha)=\frac{-1}{2}$.

Aplicando la propiedad a la función $f(x)$ en el intervalo $[3,4]\in[1,4]$, existe un valor $\beta\in[3,4]$ tal que $f(\beta)=\frac{-1}{2}$.

Queda comprobado que existen $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ tales que $\boldsymbol{f(\alpha)=\frac{-1}{2}=f(\beta)}$.

Problema 7:

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin \frac{\pi x}{6}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[7, 11]$ y derivable en $(7, 11)$.

(1,25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (7, 11)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

Solución:

$a)$ El dominio de la función $f(x)$ es el conjunto de valores reales que satisfacen la desigualdad: $\frac{1}{2} - sen\ \frac{\pi x}{6} \geq 0;\ \frac{1}{2} \geq sen\ \frac{\pi x}{6}$.

Para $x = 7 \Rightarrow sen\ \frac{7\pi}{6} = sen\ 210° = -\frac{1}{2}$.

Para $x = 11 \Rightarrow sen\ \frac{11\pi}{6} = sen\ 330° = -\frac{1}{2}$.

La función $f(x)$ está definida $\forall x \in [7, 11]$ y, teniendo en cuenta que es la raíz cuadrada de la suma algebraica de dos funciones continuas y derivables:

Queda demostrado que $f(x)$ es continua en $[7, 11]$ y derivable en $(7, 11)$.

$b)$ Teniendo en cuenta lo anterior y que que: $f(7) = f(11) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$, a la función $f(x)$ le es aplicable el teorema de Rolle que dice "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Aunque no se pide, se determina el valor de c que verifica el teorema.

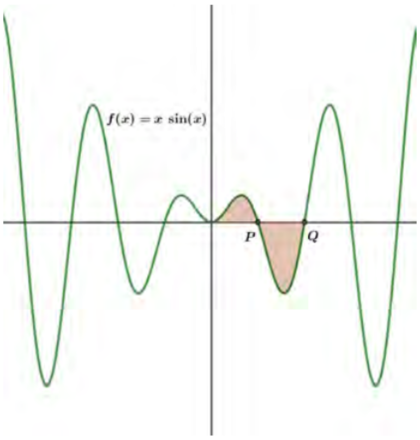
$$f'(x) = \frac{-\frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi x}{6}}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - sen\ \frac{\pi x}{6}}} \Rightarrow f'(c) = 0 \Rightarrow \cos \frac{\pi c}{6} = 0;\ \frac{\pi c}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \Rightarrow$$

La única solución en el intervalo considerado es c = 9.

$$\underline{\boldsymbol{c = 9}}.$$

Problema 8:

P8) La curva de la imagen corresponde a la función $f(x) = x \cdot \sin x$. Tal y como se intuye, la curva corta el eje OX en infinitos puntos:



Encuentra los puntos P y Q, y, a continuación, calcula el área de la región del plano sombreada.

(2,5 puntos)

Solución:

Las abscisas de los puntos P y Q son los primeros valores positivos mayores que cero que son raíces de la ecuación $x \cdot sen\ x = 0$; estos valores son $x = \pi$ y $x = 2\pi$, por lo cual: $P(\pi, 0)$ y $Q(2\pi, 0)$.

La superficie sombreada pedida es la siguiente:

$S = \int_0^{\pi} f(x) \cdot dx + \int_{2\pi}^{\pi} f(x) \cdot dx.$

La integral indefinida de $f(x) = x \cdot sen\ x$ es la siguiente:

$$F(x) = \int x \cdot sen\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \to du = dx \\ sen\ x \cdot dx = dv \to v = -cos\ x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot dx = -x \cdot cos\ x + \int cos\ x \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = -x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

$$S = F(\pi) - F(0) + F(\pi) - F(2\pi) = 2F(\pi) - F(0) - F(2\pi) =$$

$$= 2 \cdot (-\pi \cdot \cos \pi + \operatorname{sen} \pi) - (-0 \cdot \cos 0 + \operatorname{sen} 0) - [-2\pi \cdot \cos(2\pi) + \operatorname{sen}(2\pi)] =$$

$$= 2[-\pi \cdot (-1) + 0] - (-0 \cdot 1 + 0) - (-2\pi \cdot 1 + 0) = 2\pi - 0 + 2\pi \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 4\pi\ u^2}}.$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universidad del País Vasco

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Ese examen tiene cinco partes. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario. No se podrán usar calculadoras que tengan algunas de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de derivadas e integrales y almacenamiento de datos alfanuméricos.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función del parámetro α:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Resuelve el sistema en los casos α = 1 y α = 2.

Ejercicio B1

Calcula el rango de la matriz A según los valores del parámetro α, siendo

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea r la recta cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto P (2, 1, 0), que es exterior a r.

Ejercicio B2

Sean r la recta cuya ecuación continua es: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$, los planos de ecuaciones π1 ≡ x + y + z = 1 y π2 ≡ x + y − z = 1, P1 el punto de corte de la recta r con el plano π1 y P2 el punto de corte de la recta r con el plano π2. Calcula:

a) las coordenadas de los puntos P1 y P2;

b) la distancia entre los puntos P1 y P2;

c) la distancia del punto P1 al plano π2.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^3 + x2$. Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y encuentra sus máximos y mínimos relativos. Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

Ejercicio B3

La función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, \infty)$. Además, la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa x = 2 es perpendicular a la recta de ecuación y = x + 2 y $f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$. Calcula los valores de los parámetros A, B y C.

MATEMÁTICAS IICUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado inferiormente por la curva de ecuación $y = \frac{x^2}{4}$ y superiormente por las curvas de ecuaciones $y = \frac{4}{x^2}$ e y = 4. Calcula el área de ese recinto.

Ejercicio B4

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}dx, \int (x+2)sen(3x)dx.$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

La producción de una empresa la realizan, a partes iguales, cuatro turnos, de los que tres son diurnos y uno nocturno. El porcentaje de piezas defectuosas producidas en cada turno diurno es el 2 % y en el nocturno es del 10 %.

Si se toma una pieza al azar de un turno al azar,

a) calcula la probabilidad de que la pieza sea defectuosa;

b) si la pieza tomada es defectuosa, calcula la probabilidad de que se haya producido en un turno diurno.

Ejercicio B5

Los resultados obtenidos en una prueba de matemáticas siguen una distribución normal con media 65 puntos y desviación típica 18 puntos. El 15 % del alumnado está en el nivel avanzado, el 65 % en el nivel medio y el 20 % restante en el nivel inicial. Decide, razonando tus respuestas, en qué nivel situaremos a los alumnos o alumnas que han obtenido las siguientes notas:

a) 85,5 puntos,

b) 48 puntos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función del parámetro α:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Resuelve el sistema en los casos α = 1 y α = 2.

SOLUCIÓN A1

El determinante de la matriz de coeficientes es $2 - 2\alpha$. Por tanto, si $\alpha \neq 1$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

Si $\alpha = 1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2, y el de la matriz ampliada también; por tanto, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO. La solución del sistema es $(1 + z, -2z, z)$, siendo $z \in \mathbb{R}$ cualquiera.

Si $\alpha = 2$, la solución del sistema es $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

.

Ejercicio B1

Calcula el rango de la matriz A según los valores del parámetro α, siendo

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN B1

El determinante de la submatriz formada por las tres primeras columnas es $\alpha(3-\alpha)$; por tanto, si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 3$, el rango de A es 3.

Si $\alpha = 0$, la primera fila de A está formada por 0's; por tanto, el determinante de cualquier submatriz de orden 3×3 es nulo, y el rango de A es menor que 3. Además, es fácil encontrar una submatriz de orden 2×2 cuyo determinante es no nulo. En consecuencia, A tiene rango 2.

Si $\alpha = 3$, el determinante de la submatriz formada por la primera, segunda y cuarta columnas es 9, por tanto, el rango de A es 3.

También se puede comenzar calculando el determinante de la submatriz formada por las tres últimas columnas. Ese determinante es $-\alpha^2$, por lo que si $\alpha \neq 0$, el rango de A es 3. Únicamente falta estudiar el caso $\alpha = 0$, como ya se ha explicado.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea r la recta cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2' \end{cases}$$

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto P (2, 1, 0), que es exterior a r.

SOLUCIÓN A2

El vector director de la recta es el producto vectorial de los vectores normales a los planos que definen la recta, $(1,1,-1) \times (2,2,1) = (3,-3,0)$, o cualquier múltiplo de éste, por ejemplo, $(1,-1,0)$. Un punto de la recta r es el $(0,1,0)$; por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$\{x = t,\ y = 1 - t,\ z = 0\}.$$

Para calcular la recta que pasa por el punto $P(2,1,0)$ y corta perpendicularmente a r, en primer lugar debemos calcular el plano perpendicular a r que contiene a P. La ecuación de ese plano es $x - y - 1 = 0$. El punto de corte del plano de ecuación $x - y - 1 = 0$ y la recta r es $Q(1,0,0)$. Ahora, el vector director de la recta buscada es $\overrightarrow{QP} = (1,1,0)$, y como la recta pasa por el punto $P(2,1,0)$, las ecuaciones paramétricas de la recta que se pide son:

$$\{x = 2 + t,\ y = 1 + t,\ z = 0\}.$$

.

Ejercicio B2

Sean r la recta cuya ecuación continua es: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, los planos de ecuaciones $\pi 1 \equiv x + y + z = 1$ y $\pi 2 \equiv x + y - z = 1$, P1 el punto de corte de la recta r con el plano π1 y P2 el punto de corte de la recta r con el plano π2. Calcula:

a) las coordenadas de los puntos P1 y P2;

b) la distancia entre los puntos P1 y P2;

c) la distancia del punto P1 al plano π2.

SOLUCIÓN B2

Un punto cualquiera de la recta es de la forma $(1+t, 1-t, 1+2t)$, siendo $t \in \mathbb{R}$.

a) Para calcular las coordenadas del punto P_1 sustituimos en la ecuación del plano π_1 el punto $(1+t, 1-t, 1+2t)$, y nos da $t=-1$. Por tanto, se obtiene el punto $P_1(0, 2, -1)$. Se procede de manera análoga para encontrar las coordenadas del punto P_2, es decir, se sustituye el punto $(1+t, 1-t, 1+2t)$ en la ecuación del plano π_2 y se obtiene $t=0$, luego $P_2(1, 1, 1)$.

b) La distancia entre los puntos P_1 y P_2 es el módulo del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \sqrt{(1-0)^2 + (1-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{6}.$$

c) La distancia del punto P_1 al plano π_2 es

$$\mathrm{d}(P_1, \pi_2) = \frac{|0+2+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea la función f(x) = $x^4 - 2x^3$ + x2. Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y encuentra sus máximos y mínimos relativos. Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

SOLUCIÓN A3

La derivada de f es $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 4x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$; por lo tanto, f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y en $(1/2, 1)$ y es creciente en los intervalos $(0, 1/2)$ y $(1, +\infty)$.

f tiene mínimos relativos en $x = 0$ y $x = 1$, siendo $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$; y un máximo relativo en $x = 1/2$, con $f(1/2) = 1/16$..

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ es $y = 12x - 20$.

.

Ejercicio B3

La función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, \infty)$. Además, la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 2$ es perpendicular a la recta de ecuación $y = x + 2$ y $f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$. Calcula los valores de los parámetros A, B y C.

SOLUCIÓN B3

Como f es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$, f tiene un máximo en $x = 1$, es decir, $f'(1) = 2A + B = 0$.

Como la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ es perpendicular a la recta de ecuación $y = x + 2$, debe ser $f'(2) = 4A + B = -1$. Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas, $A = -1/2$ y $B = 1$.

Finalmente, $C = f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

.

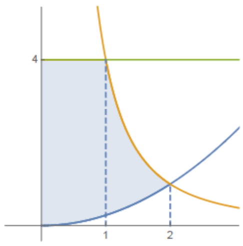
CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado inferiormente por la curva de ecuación $y = \frac{x^2}{4}$ y superiormente por las curvas de ecuaciones $y = \frac{4}{x^2}$ e y = 4. Calcula el área de ese recinto.

SOLUCIÓN A4

Las curvas $y = x^2/4$ e $y = 4/x^2$ se cortan cuando $x^4 = 16$, es decir, en el primer cuadrante, cuando $x = 2$. Además, la recta $y = 4$ corta a la curva $y = 4/x^2$ cuando $x = 1$. Por tanto, el recinto es el de la imagen:



El área de ese recinto es:

$$A = \int_0^1 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{16}{3}\text{u}^2.$$

.

Ejercicio B4

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}dx,\ \int (x+2)sen(3x)dx.$$

SOLUCIÓN B4

Para calcular la primera integral, descomponemos el integrando como sigue:

$$\frac{x^2+4}{(x+2)^2} = 1 - \frac{4}{x+2} + \frac{8}{(x+2)^2}.$$

Entonces,

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}\,dx = x - 4\ln|x+2| - \frac{8}{x+2} + k.$$

La segunda integral se resuelve por partes, tomando $u = x+2$ y $dv = \sin(3x)dx$. Entonces, $du = dx$ y $v = -\frac{\cos(3x)}{3}$. Por tanto,

$$\int (x+2)\sin(3x)\,dx = -\frac{(x+2)\cos(3x)}{3} + \frac{\sin(3x)}{9} + k.$$

.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

La producción de una empresa la realizan, a partes iguales, cuatro turnos, de los que tres son diurnos y uno nocturno. El porcentaje de piezas defectuosas producidas en cada turno diurno es el 2 % y en el nocturno es del 10 %.

Si se toma una pieza al azar de un turno al azar,

a) calcula la probabilidad de que la pieza sea defectuosa;

b) si la pieza tomada es defectuosa, calcula la probabilidad de que se haya producido en un turno diurno.

SOLUCIÓN A5

Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicionada.

a) $$\begin{aligned} P(\text{defectuoso}) &= P(\text{diurno})P(\text{defectuoso} \mid \text{diurno}) \\ &\quad + P(\text{nocturno})P(\text{defectuoso} \mid \text{nocturno}) \\ &= \frac{3}{4} \times 0,02 + \frac{1}{4} \times 0,1 = 0,04. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(\text{diurno} \mid \text{defectuoso}) &= \frac{P(\text{diurno})P(\text{defectuoso} \mid \text{diurno})}{P(\text{defectuoso})} \\ &= \frac{\frac{3}{4} \times 0,02}{0,04} = 0,375. \end{aligned}$$

.

Ejercicio B5

Los resultados obtenidos en una prueba de matemáticas siguen una distribución normal con media 65 puntos y desviación típica 18 puntos. El 15 % del alumnado está en el nivel avanzado, el 65 % en el nivel medio y el 20 % restante en el nivel inicial. Decide, razonando tus respuestas, en qué nivel situaremos a los alumnos o alumnas que han obtenido las siguientes notas:

a) 85,5 puntos,

b) 48 puntos.

SOLUCIÓN B5

Es un problema de distribución normal donde conocemos las probabilidades y tenemos que calcular los valores de los extremos de los intervalos que determinan dichas probabilidades. Sea X una variable que sigue una distribución $N(65, 18)$. Hay que encontrar x_1, la nota máxima para estar en el nivel inicial, y x_2, la nota mínima para estar en el nivel avanzado, tales que $P(X \leq x_1) = 0,2$ y $P(X \geq x_2) = 0,15$.

Resolveremos el problema para una variable Z que sigue una distribución $N(0, 1)$ y, después, "destipificaremos" los valores obtenidos, recordando que $P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-65}{18}\right) = P(Z \leq z)$; por tanto, $x = 65 + 18z$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
P(Z \leq z_1) = 0,2 \Longrightarrow\ & P(Z \leq -z_1) = 0,8 \Longrightarrow -z_1 = 0,84 \\
& \Longrightarrow x_1 = 65 + 18 \times (-0,84) = 49,88; \\
P(z \geq z_2) = 0,15 \Longrightarrow\ & P(z \leq z_2) = 0,85 \Longrightarrow z_2 = 1,04 \\
& \Longrightarrow x_2 = 65 + 18 \times 1,04 = 83,72.
\end{aligned}$$

Por tanto,

a) El alumno o alumna que ha obtenido 85,5 puntos está en el nivel avanzado.

b) El alumno o alumna que ha obtenido 48 puntos está en el nivel inicial.

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Ese examen tiene cinco partes. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario. No se podrán usar calculadoras que tengan algunas de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de derivadas e integrales y almacenamiento de datos alfanuméricos.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Se consideran tres planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 4x + 2y - 4z = 2, \quad \pi_2 \equiv x - y - z = 2 \quad \text{y} \quad \pi_3 \equiv x + ay + z = b.$$

¿Existen valores de los parámetros a y b para los cuales los tres planos se cortan en una recta? En caso de que la respuesta sea negativa, razónala. En el caso de que la respuesta sea positiva, calcula dichos valores.

Ejercicio B1

Calcula las dos matrices A y B que satisfacen las siguientes igualdades:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 & -16 & 6 & -3 \\ -4 & 18 & -4 & 18 \end{pmatrix}.$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sean la recta r y el plano π, que se cortan perpendicularmente en el punto $P(1,-1,2)$. Si el plano π pasa por el punto $Q(1,2,3)$ y contiene al vector $(0,0,2)$, calcula las ecuaciones de la recta r y del plano π.

Ejercicio B2

Se consideran tres planos de ecuaciones:

$\pi 1 \equiv 4x + 2y - 4z = 2$, $\pi 2 \equiv x - y - z = 2$ y $\pi 3 \equiv x + ay + z = b$.

¿Existen valores de los parámetros a y b para los cuales los tres planos se cortan en una recta? En caso de que la respuesta sea negativa, razónala.

En el caso de que la respuesta sea positiva, calcula dichos valores.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea f (x) = x/(x^2 + 1). Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f , calcula sus asíntotas, y encuentra la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0. Haz una representación aproximada de la gráfica de la función f

Ejercicio B3

Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Encuentra los valores de los parámetros A, B y C para que $f(0) = 2$, las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 3$ sean paralelas y f tenga un extremo relativo en el punto $x = -1$. Ese extremo relativo, ¿es un máximo o un mínimo? Estudia si f tiene algún otro extremo relativo y determina si son máximos o mínimos.

MATEMÁTICAS IICUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\int (x^2 + 1)e^{x+1}\, dx$, explicando el método utilizado.

Ejercicio B4

Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y = 2x^2 - 4x + 3$ e $y = x^2 - 2x + 3$ y calcula el área de ese recinto.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Tenemos dos dados, uno normal y otro trucado. En el trucado hay 4 unos y 2 doses. Se elige un dado al azar y se tira dos veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en la primera tirada y un 2 en la segunda?

b) Sabiendo que el resultado de la primera tirada ha sido un 1 y el de la segunda ha sido un 2, calcula la probabilidad de que se haya escogido el dado trucado.

Ejercicio B5

Una caja que contiene 500 monedas es vaciada sobre una mesa. Halla

a) la probabilidad de que el número de caras sea mayor que 240;

b) la probabilidad de que el número de caras sea menor que 230;

c) la probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 230 y 240, ambos incluidos.

.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Se consideran tres planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 4x + 2y - 4z = 2, \quad \pi_2 \equiv x - y - z = 2 \quad \text{y} \quad \pi_3 \equiv x + ay + z = b.$$

¿Existen valores de los parámetros a y b para los cuales los tres planos se cortan en una recta? En caso de que la respuesta sea negativa, razónala. En el caso de que la respuesta sea positiva, calcula dichos valores.

SOLUCIÓN A1

El determinante de la matriz de coeficientes es $-\alpha^2 + 1$. Entonces, si α distinto de 1 y α distinto de -1, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

Si $\alpha = 1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2, y también el de la matriz ampliada; por tanto, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

Si $\alpha = -1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2, y el de la matriz ampliada, en cambio, es 3; por tanto, el sistema es INCOMPATIBLE.

Si $\alpha = 0$, la solución del sistema es $x = -2$, $y = 6$ y $z = 5$.

Ejercicio B1

Calcula las dos matrices A y B que satisfacen las siguientes igualdades:

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 8 & 2 & 9\\ 2 & 6 & 2 & 11\end{pmatrix},$$

$$3A-2B=\begin{pmatrix}6 & -16 & 6 & -3\\ -4 & 18 & -4 & 18\end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN B1

Multiplicamos la matriz $A+B$ por 2 y sumamos el resultado a $3A-2B$ para obtener

$$3A-2B+2(A+B)=\begin{pmatrix}6 & -16 & 6 & -3\\ -4 & 18 & -4 & 18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 16 & 4 & 18\\ 4 & 12 & 4 & 22\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow 5A=\begin{pmatrix}10 & 0 & 10 & 15\\ 0 & 30 & 0 & 40\end{pmatrix}\Longrightarrow A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 0 & 8\end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$B=A+B-A=\begin{pmatrix}2 & 8 & 2 & 9\\ 2 & 6 & 2 & 11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 0 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 8 & 0 & 6\\ 2 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

También se puede empezar calculando $3(A+B)-(3A-2B)=5B$.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sean la recta r y el plano π, que se cortan perpendicularmente en el punto $P(1,-1,2)$. Si el plano π pasa por el punto $Q(1,2,3)$ y contiene al vector $(0,0,2)$, calcula las ecuaciones de la recta r y del plano π.

SOLUCIÓN A2

Los puntos P y Q del plano π definen el vector $(0,3,1)$ y $(0,0,2)$ es otro vector del plano, por tanto, el vector normal al plano π es:

$$\vec{n} = (0,3,1) \times (0,0,2) = (6,0,0).$$

Además, π pasa por el punto P, por tanto, la ecuación de π es $x-1=0$.

Como la recta y el plano son perpendiculares, el vector director de la recta es un vector normal al plano, por ejemplo, $(1,0,0)$. Como r pasa por el punto P, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\{x = 1+t,\ y=-1,\ z=2\}.$$

Ejercicio B2

Sean r la recta cuya ecuación continua es: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, los planos de ecuaciones π1 ≡ x + y + z = 1 y π2 ≡ x + y − z = 1, P1 el punto de corte de la recta r con el plano π1 y P2 el punto de corte de la recta r con el plano π2. Calcula:

a) las coordenadas de los puntos P1 y P2;

b) la distancia entre los puntos P1 y P2;

c) la distancia del punto P1 al plano π2.

SOLUCIÓN B2

Los tres planos forman el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x+2y-4z=2, \\ x-y-z=2, \\ x+ay+z=b. \end{cases}$$

Para que los tres planos se corten en una recta, el sistema debe ser compatible indeterminado. Si M es la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada, para que el sistema anterior sea compatible indeterminado, el rango de M y el de M^* deben ser iguales y menores que el número de incógnitas.

En este caso, para cualesquiera valores de a y b, el rango de M, el rango de M^* y el número de incógnitas es 3; por tanto, los tres planos se cortan en un punto, no en una recta.

Por tanto, no existen valores de los parámetros a y b de forma que los tres planos se corten en una recta.

.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea f (x) = x/(x^2 + 1). Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f , calcula sus asíntotas, y encuentra la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0. Haz una representación aproximada de la gráfica de la función f

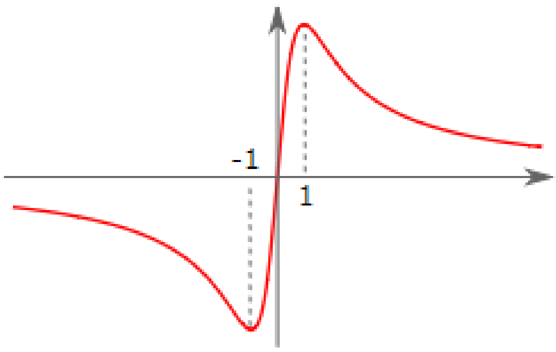
SOLUCIÓN A3

$f'(x) = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$, por tanto, f es decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; y es creciente en el intervalo $(-1, 1)$.

f no tiene asíntotas verticales e $y = 0$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y en $+\infty$.

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = x$.

La gráfica de f es



.

Ejercicio B3

Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Encuentra los valores de los parámetros A, B y C para que $f(0) = 2$, las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 3$ sean paralelas y f tenga un extremo relativo en el punto $x = -1$. Ese extremo relativo, ¿es un máximo o un mínimo? Estudia si f tiene algún otro extremo relativo y determina si son máximos o mínimos.

SOLUCIÓN B3

SOLUCIÓN B3

Como $f(0) = C$, se tiene $C = 2$. Por otro lado, $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$, y para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 3$ sean paralelas, debe cumplirse que $f'(1) = f'(3)$, por tanto, debe ser $3 + 2A + B = 27 + 6A + B$, y de ahí se obtiene $A = -6$.

Por último, f tendrá un extremo en el punto de abscisa $x = -1$ si $f'(-1) = 15 + B = 0$, es decir, si $B = -15$.

Por tanto, $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$, $f'(x) = 3(x+1)(x-5)$, y $f''(x) = 6x - 12$. En consecuencia, f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 5$.

.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\int (x^2+1)e^{x+1}\,dx$, explicando el método utilizado.

SOLUCIÓN A4

Utilizamos integración por partes, tomando $u = x^2+1$ y $dv = e^{x+1}\,dx$. Así, tenemos $du = 2x\,dx$ y $v = e^{x+1}$, de modo que

$$\int (x^2+1)e^{x+1}\,dx = (x^2+1)e^{x+1} - \int 2xe^{x+1}\,dx.$$

De nuevo, utilizamos integración por partes, tomando ahora $u = 2x$ y $dv = e^{x+1}\,dx$. Entonces, $du = 2\,dx$ y $v = e^{x+1}$, de forma que

$$\int 2xe^{x+1}\,dx = 2xe^{x+1} - 2\int e^{x+1}\,dx = 2xe^{x+1} - 2e^{x+1} + k.$$

Uniendo los dos resultados,

$$\int (x^2+1)e^{x+1}\,dx = (x^2-2x+3)e^{x+1} + k.$$

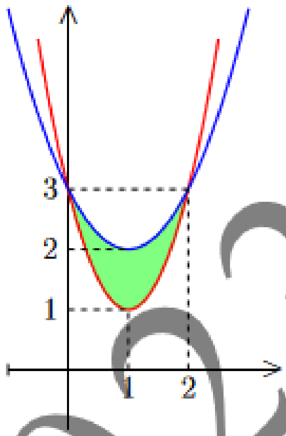
.

Ejercicio B4

Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y = 2x^2 - 4x + 3$ e $y = x^2 - 2x + 3$ y calcula el área de ese recinto.

SOLUCIÓN B4

El recinto acotado por las dos parábolas es el siguiente:



El área de ese recinto se calcula así:

$$A = \int_0^2 \left((x^2 - 2x + 3) - (2x^2 - 4x + 3)\right) dx = \frac{4}{3}\, \text{u}^2.$$

.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Tenemos dos dados, uno normal y otro trucado. En el trucado hay 4 unos y 2 doses. Se elige un dado al azar y se tira dos veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en la primera tirada y un 2 en la segunda?

b) Sabiendo que el resultado de la primera tirada ha sido un 1 y el de la segunda ha sido un 2, calcula la probabilidad de que se haya escogido el dado trucado.

SOLUCIÓN A5

Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicionada.

Sea el suceso (1-2) obtener en la primera tirada un 1 y en la segunda tirada un 2.

a) $P(1-2) = P(\text{trucado})P(1-2\mid \text{trucado}) + P(\text{normal})P(1-2\mid \text{normal})$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{9}{72} = \frac{1}{8}.$$

b) $$P(\text{trucado}\mid 1-2) = \frac{P(\text{trucado})P(1-2\mid \text{trucado})}{P(1-2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}.$$

.

Ejercicio B5

Una caja que contiene 500 monedas es vaciada sobre una mesa. Halla

a) la probabilidad de que el número de caras sea mayor que 240;

b) la probabilidad de que el número de caras sea menor que 230;

c) la probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 230 y 240, ambos incluidos.

SOLUCIÓN B5

La variable número de caras, X, es discreta y sigue una distribución binomial $B(500; 0{,}5)$. Como $np = 500 \cdot 0{,}5 = 250 \geq 5$ y $nq = 500 \cdot 0{,}5 = 250 \geq 5$, se aproxima por una distribución normal $N(250; 11,18)$.

a) $P(X > 240) = P(X' \geq 240,5) = P\left(Z \geq \frac{240{,}5 - 250}{11,18}\right)$
$= P(Z \geq -0,85) = P(Z \leq 0,85) = 0,8023.$

b) $P(X < 230) = P(X' \leq 229,5) = P\left(Z \leq \frac{229,5 - 250}{11,18}\right)$
$= P(Z \leq -1,83) = 1 - P(Z \leq 1,83) = 1 - 0,9664 = 0,0336.$

c) $P(230 \leq X \leq 240) = P(X \leq 240) - P(X < 230)$
$= 1 - P(X > 240) - P(X < 230) = 1 - 0,8023 - 0,0336 = 0,1641.$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

GENERALITAT VALENCIANA	PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT Assignatura: MATEMÀTIQUES II	CONVOCATORIA: JUNY 2023

BAREM DE L'EXAMEN:
Heu de resoldre només **QUATRE** problemes dels **VUIT** que es proposen.
Cada problema puntua fins a 10.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 4, aproximada fins a les centèsimes. Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables i que no puguen fer càlcul simbòlic ni emmagatzemar text ni fórmules en la memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

Problema 1. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$:

a) Estudieu quan té solució l'equació matricial $A^2X = B$ en funció del paràmetre real m. (4 punts)
b) Trobeu totes les solucions de l'equació anterior quan aquestes existisquen. (6 punts)

Problema 2. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Obteniu la matriu $(AB^T + I)^{-1}$, on I és la matriu identitat de les dimensions adequades per fer l'operació.
(6 punts)
b) Comproveu que $C^2 = -\alpha^3 I$, on I és la matriu identitat, i calculeu C^{13}. (4 punts)

Problema 3. Donada la recta $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ i els punts $P = (0, 0, 3)$ i $Q = (2, 2, a)$, obtingueu:

a) Els valors del paràmetre real a si existeixen, per als quals són paral·leles la recta r i la recta que passa pels punts P i Q. (6 punts)
b) L'equació del pla perpendicular a r que passa per P. (4 punts)

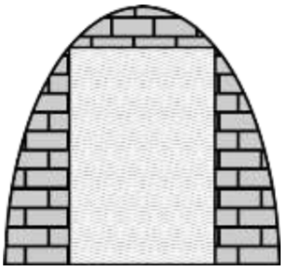
Problema 4. Donada la recta $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$ i el punt $P = (0,5,2)$, es demana:

a) Comproveu que el punt $Q = (2,6,0)$ pertany a la recta r i trobeu la recta s que passa pels punts P i Q. (2 punts)
b) Obteniu l'angle que formen la recta r i la recta s. (3 punts)
c) Obteniu la projecció ortogonal del punt P en la recta r. (5 punts)

Problema 5. Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1)$. Obteniu:

a) El domini i les asímptotes de $f(x)$. (2 punts)
b) Els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$ i els seus màxims i mínims. (4 punts)
c) L'àrea compresa entre la corba $y = f(x)$ i les rectes $y = 0, x = 1$ i $x = 2$. (4 punts)

Problema 6. El tall vertical de l'entrada a la plaça emmurallada de cert poble té forma de paràbola, amb l'equació $y = -x^2 + 12$, en la qual x i y es mesuren en metres i $y = 0$ representa el sòl. Es desitja posar-hi una porta rectangular de forma que les dues cantonades superiors estiguen en la paràbola i les inferiors en el sòl. La resta de l'entrada va tancada amb pedra. Calculeu:



a) Les dimensions de la porta perquè tinga la major superfície possible. (6 punts)
b) Obtingueu l'àrea de la part frontal de la porta de l'apartat anterior i l'àrea de la part frontal de l'entrada recoberta de pedra. (4 punts)

Problema 7. Tenim dues monedes M_1 i M_2. La probabilitat d'obtenir cara en llançar la moneda M_1 és x i la probabilitat d'obtenir cara en llançar la moneda M_2 és y.

a) Si llancem les dues monedes al mateix temps, calculeu les probabilitats de no obtenir cap cara, d'obtenir-ne només una cara i d'obtenir-ne dues. (3 punts)
b) Després de llançar les dues monedes, tornem a llançar solament les monedes en les quals no hem obtingut cara. Calculeu les probabilitats que el resultat final siga cap cara, només una cara i dues cares. (7 punts)

Problema 8. Cada cap de setmana arriben a l'aeroport d'Alacant 161 vols. D'aquests vols, 95 procedeixen del territori nacional, 50 de la Unió Europea i 16 de països de fora de la Unió Europea. Sabent que es retarden el 5% dels vols de procedència nacional, el 4% dels de procedència de la Unió Europea i el 6,25% de la resta:

a) Calculeu la probabilitat que es retarde un vol durant el cap de setmana. (5 punts)
b) Calculeu la probabilitat que un vol que s'ha retardat procedisca de la Unió Europea. (5 punts)

Els resultats s'han d'expressar en forma de fracció o en forma decimal amb quatre decimals d'aproximació.

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumnado contestará solo **CUATRO** problemas entre los **OCHO** propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$:

a) Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene solución en función del parámetro real m. (4 puntos)

b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan. (6 puntos)

Problema 2:

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Obtener la matriz $(AB^T + I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)

b) Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13}. (4 puntos)

Problema 3:

Problema 3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y los puntos $P = (0,0,3)$ y $Q = (2,2,a)$, obtener:

a) Los valores del parámetro real a, si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q. (6 puntos)

b) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P. (4 puntos)

Problema 4:

Problema 4. Dada la recta $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$ y el punto $P = (0,5,2)$ se pide:

a) Comprobar que el punto $Q = (2,6,0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q. (2 puntos)

b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s. (3 puntos)

c) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r. (5 puntos)

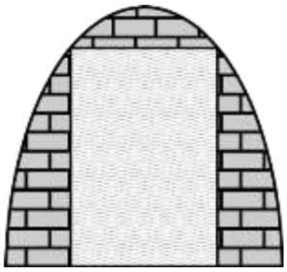
Problema 5:

Problema 5. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + ln(x+1)$. Obtener:

a) El dominio y las asíntotas de $f(x)$. (2 puntos)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (4 puntos)
c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 1$ y $x = 2$. (4 puntos)

Problema 6:

Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:



a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)
b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)

Problema 7:

Problema 7. Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y.

a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. (3 puntos)
b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. (7 puntos)

Problema 8:

Problema 8. Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de paises de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. (5 puntos)
b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$:

a) Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene solución en función del parámetro real m. (4 puntos)

b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan. (6 puntos)

Problema 1. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$:

a) Estudieu quan té solució l'equació matricial $A^2 X = B$ en funció del paràmetre real m. (4 punts)

b) Trobeu totes les solucions de l'equació anterior quan aquestes existisquen. (6 punts)

Solución:

$a)\ A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}.$

$$A^2 \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

De la ecuación matricial anterior resulta el sistema: $\left.\begin{array}{r} x + (2+2m)y + 2z = m \\ (m^2+3)y + mz = 0 \\ 3my + 3z = 9 \end{array}\right\}.$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix} \text{ y } P' = \begin{pmatrix} 1 & 2+2m & 2 & m \\ 0 & m^2+3 & m & 0 \\ 0 & 3m & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{vmatrix} = 3(m^2+3) - 3m^2 = 3m^2 + 9 - 3m^2 = 9 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ P = 3, \forall m \in R.$

$$\underline{\boldsymbol{\forall m \in R \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g. \Rightarrow S.C.D.}}$$

$b)$ Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & 2+2m & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 9 & 3m & 3 \end{vmatrix}}{9} = \frac{3m(m^2+3) + 9m(2+2m) - 18(m^2+3) - 3m^3}{9} =$$

$$= \frac{3m^3+9m+18m+18m^2-18m^2-54-3m^3}{9} = \frac{9m+18m-54}{9} = \frac{27m-54}{9} = 3m-6.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}}{9} = \frac{-9m}{9} = -m.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+2m & m \\ 0 & m^2+3 & 0 \\ 0 & 3m & 9 \end{vmatrix}}{9} = \frac{9(m^2+3)}{9} = m^2+3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n}: \boldsymbol{x = 3m - 6, y = -m, z = m^2 + 3, \forall m \in R.}}$$

Problema 2:

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Obtener la matriz $(AB^T + I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)

b) Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13}. (4 puntos)

Problema 2. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Obteniu la matriu $(AB^T + I)^{-1}$, on I és la matriu identitat de les dimensions adequades per fer l'operació.
(6 punts)

b) Comproveu que $C^2 = -\alpha^3 I$, on I és la matriu identitat, i calculeu C^{13}. (4 punts)

Solución:

a) $$AB^t + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|AB^t + I| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4; \quad (AB^t + I)^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Adj.\,de\ (AB^t + I)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(AB^t + I)^{-1} = \frac{Adj.\,de\ (AB^t + I)^t}{|AB^t + I|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{-4} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{(AB^t + I)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.}$$

b) $$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^3 & 0 \\ 0 & -a^3 \end{pmatrix} = -a^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Queda comprobado que $C^2 = -a^3 I$.

$$C^{13} = C \cdot C^{12} = C \cdot (C^2)^6 = C \cdot (-a^3 \cdot I)^6 = C \cdot a^{18} \cdot I^6 = a^{18} \cdot C =$$

$$= a^{18} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{C^{13} = \begin{pmatrix} 0 & a^{19} \\ -a^{20} & 0 \end{pmatrix}.}$$

Problema 3:

Problema 3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y los puntos $P = (0,0,3)$ y $Q = (2,2,a)$, obtener:

a) Los valores del parámetro real a, si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q. (6 puntos)
b) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P. (4 puntos)

Problema 3. Donada la recta $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ i els punts $P = (0,0,3)$ i $Q = (2,2,\ a)$, obtingueu:

a) Els valors del paràmetre real a si existeixen, per als quals són paral·leles la recta r i la recta que passa pels punts P i Q. (6 punts)
b) L'equació del pla perpendicular a r que passa per P. (4 punts)

Solución:

$a)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow x = 1 + \lambda;\ z = -x - 2\lambda = -1 - \lambda - 2\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = -1 - 3\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector de r son $A(1,0,-1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,1,-3)$.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(2,2,a) - (0,0,3)] = (2,2,a-3)$.

Para que la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q sean paralelas es condición necesaria que $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{PQ}$ sean linealmente dependientes, es decir: que sus componentes sean proporcionales.

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-3}{a-3} \Rightarrow a - 3 = -6;\ \ a = -3.$

Para que no sean coincidentes es necesario que los puntos P o Q no pertenezcan a la recta r; considerando, por ejemplo, al punto $P(0,0,3)$:

$$\left. \begin{array}{r} r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} \\ P(0,0,3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 + \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \\ -1 - 3\lambda = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \notin r.$$

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ paralelas\ para\ a = -3.}}$$

$b)$ El haz de planos β, perpendiculares a r tiene la siguiente expresión general o implícita: $\beta \equiv x + y - 3z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π, que contiene al punto $P(0,0,3)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{r} \beta \equiv x + y - 3z + D = 0 \\ P(0,0,3) \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 0 - 9 + D = 0 \Rightarrow D = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{\pi \equiv x + y - 3z + 9 = 0.}}$$

Problema 4:

Problema 4. Dada la recta $r:\begin{cases}5x+y+7z=16\\9x-y+7z=12\end{cases}$ y el punto $P=(0,5,2)$ se pide:

a) Comprobar que el punto $Q=(2,6,0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q. (2 puntos)

b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s. (3 puntos)

c) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r. (5 puntos)

Problema 4. Donada la recta $r:\begin{cases}5x+y+7z=16\\9x-y+7z=12\end{cases}$ i el punt $P=(0,5,2)$, es demana:

a) Comproveu que el punt $Q=(2,6,0)$ pertany a la recta r i trobeu la recta s que passa pels punts P i Q. (2 punts)

b) Obteniu l'angle que formen la recta r i la recta s. (3 punts)

c) Obteniu la projecció ortogonal del punt P en la recta r. (5 punts)

Solución:

$a)$ La expresión de $r\equiv\begin{cases}5x+y+7z=16\\9x-y+7z=12\end{cases}$ dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{r}5x+y+7z=16\\9x-y+7z=12\end{array}\right\}\Rightarrow z=\lambda\Rightarrow\left.\begin{array}{r}5x+y=16-7\lambda\\9x-y=12-7\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow 14x=28-15\lambda\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2-\lambda;\ \ 5(2-\lambda)+y=16-7\lambda;\ \ 10-5\lambda+y=16-7\lambda;\ \ y=6-2\lambda\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=2-\lambda\\y=6-2\lambda.\\z=\lambda\end{cases}$$

Un punto pertenece a una recta cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}r\equiv\begin{cases}x=2-\lambda\\y=6-2\lambda\\z=\lambda\end{cases}\\ \quad Q(2,6,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}2=2-\lambda\\6=6-2\lambda\\0=\lambda\end{cases}\right\}\Rightarrow\lambda=0.$$

Queda comprobado que $Q\in r$.

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=[(2,6,0)-(0,5,2)]=(2,1,-2).$$

La recta pedida, s, expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\boldsymbol{s\equiv\frac{x-2}{2}=\frac{y-6}{1}=\frac{z}{-2}.}$$

$b)$ El ángulo que forman las rectas r y s es el menor ángulo que forman sus vectores directores, que son los siguientes: $\overrightarrow{v_r}=(1,2,-1)$ y $\overrightarrow{v_s}=(2,1,-2)$.

Por la definición de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}=|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_s}|\cdot\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\left|\frac{\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}}{\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}}\right|=\left|\frac{(1,2,-1)\cdot(2,1,-2)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}\right|=$$

$$=\left|\frac{2+2+2}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+1+4}}\right|=\left|\frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}\right|=\frac{6}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=0{,}8165\Rightarrow\alpha=35^\circ\,15'\,52''.$$

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ r\ y\ s\ forman\ un\ ángulo\ de\ 35^\circ\ 15'\ 52''}}.$$

$c)$ El haz de planos β, perpendiculares a r tiene la siguiente expresión general o implícita: $\beta \equiv x + 2y - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π, que contiene al punto $P(0,5,2)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv x + 2y - z + D = 0 \\ P(0,5,2) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + 2 \cdot 5 - 2 + D = 0;\ \ 8 + D = 0 \Rightarrow D = -8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv x + 2y - z - 8 = 0.$$

El punto P' pedido, proyección ortogonal de P sobre r, es el punto de intersección del plano π y la recta r:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x + 2y - z - 8 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 6 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (2 - \lambda) + 2(6 - 2\lambda) - \lambda - 8 = 0;$$

$$2 - \lambda + 12 - 4\lambda - \lambda - 8 = 0;\ \ 6 - 6\lambda = 0;\ \ 1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 6 - 2 \cdot 1 = 4 \\ z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P'(1,4,1)}}.$$

Problema 5:

Problema 5. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + ln(x+1)$. Obtener:

a) El dominio y las asíntotas de $f(x)$. (2 puntos)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (4 puntos)
c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 1$ y $x = 2$. (4 puntos)

Problema 5. Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1)$. Obteniu:

a) El domini i les asímptotes de $f(x)$. (2 punts)
b) Els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$ i els seus màxims i mínims. (4 punts)
c) L'àrea compresa entre la corba $y = f(x)$ i les rectes $y = 0, x = 1$ i $x = 2$. (4 punts)

Solución:

$a)$ Para que exista la función $f(x)$ tiene que cumplirse que $x \neq 0$ y $x + 1 > 0$, por lo cual, el dominio de la función es el siguiente:

$$\underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow (-1, 0) \cup (0, +\infty)}}.$$

La función puede expresarse de la forma: $f(x) = \frac{1+x\cdot L(x+1)}{x}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito. En este caso, atendiendo al dominio de la función, únicamente es posible cuando x tiendo a más infinito.

$$k = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x\cdot L(x+1)}{x} = \frac{1+\infty\cdot\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{0+1\cdot L(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\left[L(x+1)+\frac{x}{x+1}\right] = \infty + 1 = \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito. Del dominio de la función se deducen las asíntotas verticales, que son las siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Las\ recta\ x = 0\ y\ x = -1\ son\ asíntotas\ verticales}}.$$

Asíntotas oblicuas:

Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1+x\cdot L(x+1)}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x\cdot L(x+1)}{x^2} = \frac{1+\infty\cdot\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{0+1\cdot L(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{L(x+1)+\frac{x}{x+1}}{2x} = \frac{\infty+1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}+\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x+1+1}{(x+1)^2}}{2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{2\cdot(x+1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas}}.$$

$b)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{-(x+1)+x^2}{x^2(x+1)} = \frac{x^2-x-1}{x^2(x+1)}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-x-1}{x^2(x+1)} = 0;\ \ x^2 - x - 1 = 0;\ \ x = \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0{,}62, x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}62.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función y las raíces de la primera derivada, se producen los siguientes intervalos:

$$\left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\ y\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

$$-0{,}8 \in \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow f'(-0{,}8) = -\frac{1}{0{,}64} + \frac{1}{0{,}2} = 5 - 1{,}56 > 0 \Rightarrow Crec.$$

$$-0{,}5 \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \Rightarrow f'(-0{,}5) = -\frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{0{,}5} = 2 - 4 < 0 \Rightarrow Decrec.$$

$$1 \in \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = -1 + 0{,}5 < 0 \Rightarrow Decrec.$$

$$2 \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) \Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = -0{,}25 + 0{,}33 > 0 \Rightarrow Crec.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: \boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon\left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: \boldsymbol{f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}}.$$

De los periodos de crecimiento y decrecimiento, así como del dominio de la función, se deducen las abscisas de la función en que están situados sus máximos y mínimos relativos, que son las siguientes:

Máximo relativo para $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y mínimo relativo para $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cong f(-0{,}62) = \frac{1}{-0{,}62} + L0{,}38 = -1{,}61 - 0{,}96 = -2{,}57.$$

$$\underline{\boldsymbol{Máximo\ relativo}: \boldsymbol{A(-0,62;\ -2,57)}}.$$

$$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cong f(1{,}62) = \frac{1}{1{,}62} + L2{,}62 = 0{,}62 + 0{,}96 = 1{,}58.$$

$$\underline{\boldsymbol{Mínimo\ relativo}: \boldsymbol{B(1,62;\ 1,58)}}.$$

$c)$ En el intervalo de la superficie a calcular, $(1, 2)$, todas las ordenadas de la función $f(x)$ son positivas, como se deduce de los periodos de crecimiento y decrecimiento y, sobre todo, por tener un mínimo relativo en $B(1{,}62;\ 1{,}58)$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$S = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{x} + L(x+1)\right] \cdot dx.$

Se resuelve, en primer lugar, la integral indefinida de la función.

$A = \int \left[\frac{1}{x} + L(x+1)\right] \cdot dx = \int \frac{1}{x} \cdot dx + \int L(x+1) \cdot dx = M + N.$ (*)

$M = \int \frac{1}{x} \cdot dx = Lx.$

$$N = \int L(x+1) \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u = L(x+1) \rightarrow du = \frac{1}{x+1} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(x+1) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x+1} \cdot dx = x \cdot L(x+1) - \int \frac{x}{x+1} \cdot dx =$$

$$= x \cdot L(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1} \cdot dx = x \cdot L(x+1) - \int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right) \cdot dx =$$

$$= x \cdot L(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \cdot dx = x \cdot L(x+1) - [x - L(x+1)] =$$

$$= x \cdot L(x+1) - x + L(x+1) \Rightarrow N = (x+1) \cdot L(x+1) - x.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de M y N:

$A = M + N = Lx + (x+1) \cdot L(x+1) - x.$

$$S = [Lx + (x+1) \cdot L(x+1) - x]_1^2 = (L2 + 3 \cdot L3 - 2) - (L1 + 2 \cdot L2 - 1) =$$

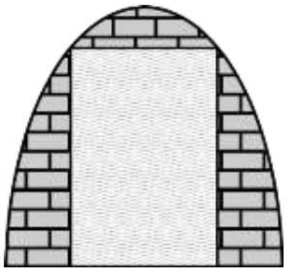
$$= L2 + 3 \cdot L3 - 2 - L1 - 2 \cdot L2 + 1 = L2 + L27 - L4 - 1 = L\frac{2 \cdot 27}{4} - 1 =$$

$$= L\frac{27}{2} - 1 = L13{,}5 - 1 \cong 2{,}603 - 1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S \cong 1{,}603\ u^2}}.$$

Problema 6:

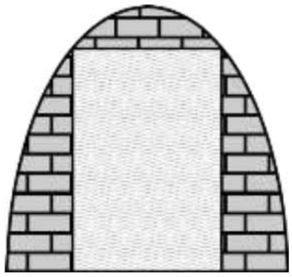
Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:



a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)

b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)

Problema 6. El tall vertical de l'entrada a la plaça emmurallada de cert poble té forma de paràbola, amb l'equació $y = -x^2 + 12$, en la qual x i y es mesuren en metres i $y = 0$ representa el sòl. Es desitja posar-hi una porta rectangular de forma que les dues cantonades superiors estiguen en la paràbola i les inferiors en el sòl. La resta de l'entrada va tancada amb pedra. Calculeu:



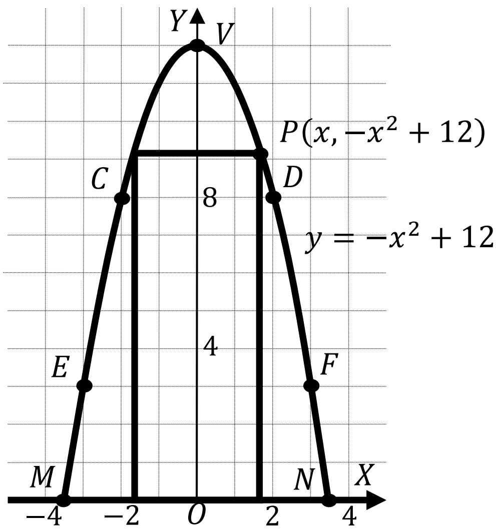
a) Les dimensions de la porta perquè tinga la major superfície possible. (6 punts)

b) Obtingueu l'àrea de la part frontal de la porta de l'apartat anterior i l'àrea de la part frontal de l'entrada recoberta de pedra. (4 punts)

Solución:

$a)$ La parábola $y = f(x) = -x^2 + 12$, que es cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto $V(0, 12)$. Otros puntos de la parábola son $C(-2, 8)$ y $D(2, 8)$; $E(-3, 3)$ y $F(3, 3)$.

La situación del ejercicio se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



El punto P, por pertenecer a la parábola, tiene por expresión $P(x, -x^2 + 12)$.

La superficie del rectángulo es el producto de su base por su altura, y tiene que ser máxima.

$$S = base \times altura = 2x \cdot (-x^2 + 12) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(x) = -2x^3 + 24x.$$

Para que una función tenga un máximo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada y que sea negativa la segunda derivada par los valores que anulan la primera.

$$S'(x) = -6x^2 + 24. \qquad S''(x) = -12x.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 24 = 0; \;\; x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$$

La raíz negativa carece de sentido lógico, por lo cual: $x = 2$.

$S''(2) = -12 \cdot 2 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 2 \Rightarrow Base = 4\ metros.$

La altura es $h = -2^2 + 12 = 12 - 4 = 8$.

$\underline{\boldsymbol{La\ puerta\ tiene\ 4\ metros\ de\ base\ y\ 8\ metros\ de\ altura}.}$

$b)$ El área de la puerta es $S = 4 \cdot 8 = 32 \Rightarrow$

$\underline{\boldsymbol{S = 32\ m^2}}.$

Para el cálculo de la superficie frontal de piedra se tiene en cuenta la simetría de la parábola con respecto al eje de ordenadas.

Los puntos de corte con el eje de abscisas de la parábola son los siguientes:

$y = f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 12 = 0;\ \ x^2 = 12;\ \ x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow M\left(-3\sqrt{2}, 0\right)$ y $N\left(3\sqrt{2}, 0\right)$.

El área frontal de piedra es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^{2\sqrt{3}} f(x) \cdot dx - 32 = 2 \cdot \int_0^{2\sqrt{3}} (-x^2 + 12) \cdot dx - 32 =$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + 12x\right]_0^{2\sqrt{3}} - 32 = 2 \cdot \left[\left(-\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^3}{3} + 12 \cdot 2\sqrt{3}\right) - 0\right] - 32 =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{24\sqrt{3}}{3} + 24\sqrt{3}\right) - 32 = 48\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} + 1\right) - 32 = 48\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3} - 32 =$$

$$= 32\sqrt{3} - 32 \Rightarrow$$

$\underline{\boldsymbol{S = 32\left(\sqrt{3} - 1\right) m^2 \cong 23,43\ m^2}}.$

Problema 7:

Problema 7. Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y.

a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. (3 puntos)

b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. (7 puntos)

Problema 7. Tenim dues monedes M_1 i M_2. La probabilitat d'obtenir cara en llançar la moneda M_1 és x i la probabilitat d'obtenir cara en llançar la moneda M_2 és y.

a) Si llancem les dues monedes al mateix temps, calculeu les probabilitats de no obtenir cap cara, d'obtenir-ne només una cara i d'obtenir-ne dues. (3 punts)

b) Després de llançar les dues monedes, tornem a llançar solament les monedes en les quals no hem obtingut cara. Calculeu les probabilitats que el resultat final siga cap cara, només una cara i dues cares. (7 punts)

Solución:

$a)$ $0\ caras \Rightarrow P = \underline{(1-x)\cdot(1-y)}.$

$1\ cara \Rightarrow P = x\cdot(1-y) + (1-x)\cdot y = \underline{x + y - x\cdot y}.$

$2\ caras \Rightarrow P = \underline{x\cdot y}.$

$b)$ Llamamos A_1 y A_0 a obtener cara o no obtenerla, respectivamente, con la primer moneda y B_1 y B_0 igual con la segunda moneda.

$Resultado\ final\ \Rightarrow 0\ caras:$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1^{\underline{a}}tirada & - & 2^{\underline{a}}\ tirada \\ A_0B_0 & \rightarrow & A_0B_0 \Rightarrow [(1-x)(1-y)][(1-x)(1-y)] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P = (1-x)^2\cdot(1-y)^2}}.$$

$Resultado\ final\ \Rightarrow 1\ cara:$

$$\left\{\begin{array}{lclcl} 1^{\underline{a}}tirada & - & 2^{\underline{a}}\ tirada & & \\ A_1B_0 & \rightarrow & B_0 & \Rightarrow & [x(1-y)](1-y) \\ A_0B_1 & \rightarrow & A_0 & \Rightarrow & [(1-x)y](1-x) \\ A_0B_0 & \rightarrow & A_1B_0 & \Rightarrow & [(1-x)(1-y)][x(1-y)] \\ A_0B_0 & \rightarrow & A_0B_1 & \Rightarrow & [(1-x)(1-y)][(1-x)y] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P = x(1-y)^2 + y(1-x)^2 + x(1-x)(1-y)^2 + y(1-x)^2(1-y)}.$$

$Resultado\ final\ \Rightarrow 2\ caras:$

$$\left.\begin{cases} 1^{a} tirada - 2^{a}\ tirada \\ A_1B_1 \quad \rightarrow \quad No\ hay \quad \Rightarrow \quad xy \\ A_1B_0 \quad \rightarrow \quad B_1 \quad \Rightarrow \quad [x(1-y)]y \\ A_0B_1 \quad \rightarrow \quad A_1 \Rightarrow \ [(1-x)y]x \\ A_0B_0 \quad \rightarrow \quad A_1B_1 \Rightarrow [(1-x)(1-y)]xy \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P = xy + xy(1-y) + xy(1-x) + xy(1-x)(1-y)}.$$

Problema 8:

Problema 8. Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de paises de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. (5 puntos)
b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. (5 puntos)

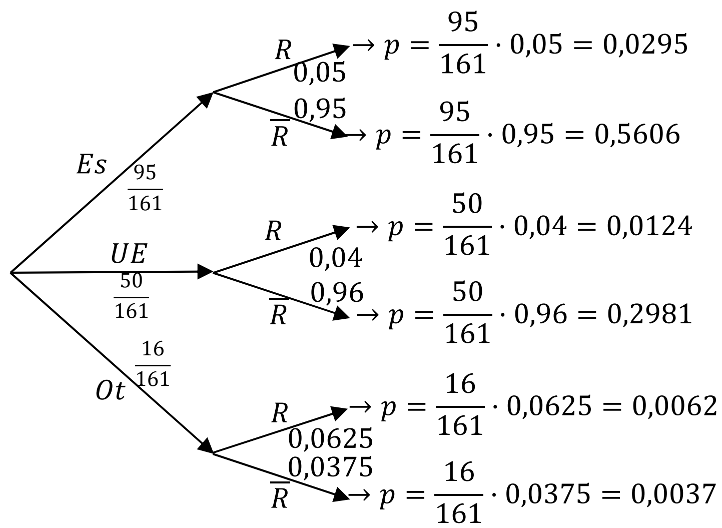
Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Problema 8. Cada cap de setmana arriben a l'aeroport d'Alacant 161 vols. D'aquests vols, 95 procedeixen del territori nacional, 50 de la Unió Europea i 16 de països de fora de la Unió Europea. Sabent que es retarden el 5% dels vols de procedència nacional, el 4% dels de procedència de la Unió Europea i el 6,25% de la resta:

a) Calculeu la probabilitat que es retarde un vol durant el cap de setmana. (5 punts)
b) Calculeu la probabilitat que un vol que s'ha retardat procedisca de la Unió Europea. (5 punts)

Els resultats s'han d'expressar en forma de fracció o en forma decimal amb quatre decimals d'aproximació.

Solución:



$a)\qquad P = P(R) = P(Es\cap R) + P(UE\cap R) + P(Ot\cap R) =$

$= P(Es)\cdot P(R/Es) + P(UE)\cdot P(R/UE) + P(Ot)\cdot P(R/Ot) =$

$= \frac{96}{161}\cdot 0{,}05 + \frac{50}{161}\cdot 0{,}04 + \frac{16}{161}\cdot 0{,}625 = 0{,}0295 + 0{,}0124 + 0{,}0062 = \underline{0{,}0481}.$

$b)\qquad P = P(UE/R) = \frac{P(UE\cap R)}{P(R)} = \frac{P(UE)\cdot P(R/UE)}{P(R)} = \frac{\frac{50}{161}\cdot 0{,}04}{0{,}0481} = \frac{0{,}0124}{0{,}0481} = \underline{0{,}2578}.$

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumno contestará solo tres problemas entre los seis propuestos. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1. Donat el sistema d'equacions lineals $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, en el qual a és un paràmetre real:

a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre a. (6 punts)

b) Obtingueu les solucions del sistema quan aquest siga compatible indeterminat. (4 punts)

Problema 2. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtingueu:

a) La matriu $M = (A - \alpha I)^2$, en la qual α és un paràmetre real. (6 punts)

b) El valor de α si existeix, per al qual la matriu M és la matriu nul·la. (4 punts)

Problema 3. Donats els punts $A = (2, \ -1, 0), B = (1, 2, 3)$ i $C = (-1, 0, 0)$:

a) Trobeu l'equació implícita de la recta r que conté els punts A i B. (3 punts)

b) Trobeu l'equació del pla π, perpendicular a la recta anterior r i que conté el punt C. (4 punts)

c) Calculeu la distància del punt A al pla π. (3 punts)

Problema 4. Donada la recta $r: (x, y, z) = (1,1,0) + \lambda(-1, -1,2)$ i el pla $\pi: 5x + my + z = 2$:

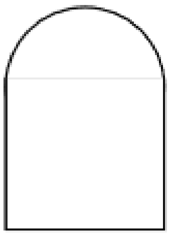
a) Obtingueu la posició relativa de r i π en funció de m. (6 punts)

b) Per $m = 1$, calculeu el pla π' que conté a r i es perpendicular a π. (4 punts)

Problema 5. Considerem la funció $f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

a) Comproveu que $x = -\frac{1}{2}$ és una discontinuïtat evitable. (2 punts)
b) Calculeu els intervals de creixement i decreixement. (4 punts)
c) Obtingueu $\int f(x)\,dx$. (4 punts)

Problema 6. Una finestra rectangular està coronada per un semicercle tal com s'indica en la figura següent.



Sabent que el perímetre de la finestra és de 20 metres calculeu:

a) L'àrea de la finestra en funció de la seua amplària x. (3 punts)
b) Les dimensions que ha de tenir la finestra perquè permeta la màxima entrada de llum. (5 punts)
c) El valor d'aquesta àrea màxima. (2 punts)

Problema 7. En una urna hi ha tres boles verdes, quatre roges i cinc grogues, totes d'igual grandària.

a) S'extrau una bola de l'urna, es mira el color i s'hi retorna. Es repeteix l'operació una altra vegada. Quina és la probabilitat que el color de les dues boles extretes siga el mateix? I la probabilitat que siguen diferents?
(5 punts)
b) S'extrauen al mateix temps tres boles. Quina és la probabilitat que les tres siguen de colors diferents? (5 punts)

Els resultats s'han d'expressar en forma de fracció o en forma decimal amb quatre decimals d'aproximació.

Problema 8. Una empresa té dues plantes de producció de telèfons portàtils. La primera planta en produeix de defectuosos amb una probabilitat de 0,02 i la segona amb una de 0,06. En comprar un portàtil de l'empresa, la probabilitat que siga de la primera planta és de 0,7. En comprem un. Determineu:

a) La probabilitat que procedisca de la segona planta de producció i siga defectuós. (4 punts)
b) Sabent que el portàtil comprat és defectuós, la probabilitat que l'haja fabricat la primera planta de producció. (6 punts)

Els resultats s'han d'expressar en forma de fracció o en forma decimal amb quatre decimals d'aproximació.

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real:

a) Discutir el sistema en función del parámetro a. (6 puntos)
b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. (4 puntos)

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

a) La matriz $M = (A - \alpha I)^2$, donde α es un parámetro real. (6 puntos)
b) El valor de α, si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula. (4 puntos)

Problema 3. Dados los puntos $A = (2,-1,0)$, $B = (1,2,3)$ y $C = (-1,0,0)$:

a) Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B. (3 puntos)
b) Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C. (4 puntos)
c) Calcular la distancia del punto A al plano π. (3 puntos)

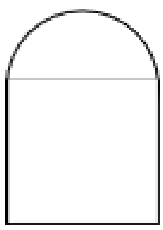
Problema 4. Dada la recta $r: (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(-1,-1,2)$ y el plano $\pi: 5x + my + z = 2$:

a) Obtener la posición relativa de r y π en función de m. (6 puntos)
b) Para $m = 1$, calcular el plano π′ que contiene a r y es perpendicular a π. (4 puntos)

Problema 5. Consideramos la función $f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

a) Comprobar que $x = -\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. (2 puntos)
b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (4 puntos)
c) Obtener $\int f(x)\,dx$. (4 puntos)

Problema 6. Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura.



Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:

a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x. (3 puntos)
b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz. (5 puntos)
c) Calcular el valor de dicha área máxima. (2 puntos)

Problema 7. Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.

a) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos? (5 puntos)

b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color? (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Problema 8. Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primera planta es de 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

a) La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso. (4 puntos)

b) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción. (6 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

GENERALITAT VALENCIANA	PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT 2022–2023 Assignatura: MATEMÀTIQUES II	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

BAREM DE L'EXAMEN:
Heu de resoldre només **QUATRE** problemes dels **VUIT** que es proposen.
Cada problema puntua fins a 10.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 4, aproximada fins a les centèsimes. Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables i que no puguen fer càlcul simbòlic ni emmagatzemar text ni fórmules en la memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real:

a) Discutir el sistema en función del parámetro a.

b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

Problema 2:

2º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

a) La matriz $M = (A - aI)^2$, donde a es un parámetro real.

b) El valor de a, si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula.

Problema 3:

3º) Dados los puntos $A(2,-1,0), B(1,2,3)$ y $C(-1,0,0)$:

a) Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B.

b) Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C.

c) Calcular la distancia del punto A al plano π.

Problema 4:

4º) Dada la recta $r \equiv (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(-1,-1,2)$ y el plano $\pi \equiv 5x + my + z = 2$:

a) Obtener la posición relativa de r y π en función de m.

b) Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

Problema 5:

5º) Consideramos la función $f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

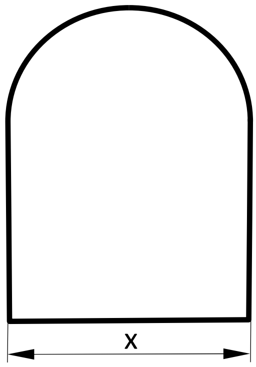
a) Comprobar que $x = -\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable.

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Obtener $I = \int f(x) \cdot dx$.

Problema 6:

6º) Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la figura adjunta. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:



a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x.

b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz.

c) Calcular el valor de dicha área máxima.

Problema 7:

7º) Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.

a) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos?

b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres bolas sean de distinto color?

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Problema 8:

8º) Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primer planta es 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

a) La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso.

b) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción.

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real:

a) Discutir el sistema en función del parámetro a.

b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

Solución:

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2a(a+2) + 1 + 2(a+1) - a - 4 - (a+1)(a+2) = 0;$

$2a^2 + 4a - 3 + 2a + 2 - a - a^2 - 2a - a - 2 = 0; \;\; a^2 + 2a - 3 = 0;$

$a = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = -1 \pm 2 \Rightarrow a_1 = -3; \;\; a_2 = 1.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} a \neq 1 \\ a \neq 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = -3 \Rightarrow Rang\ M' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{Para\ a = -3 \Rightarrow Rang\ M = 2; \;\; Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 + 1 + 2 - 6 - 2 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}}$$

$b)$ Para $a = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} 2x + 2y + z = -1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado cuya solución es la siguiente:

De las dos últimas ecuaciones se deduce que $z = 1$.

$x = \lambda$ y de la segunda ecuación: $y = -1 - \lambda$.

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x = \lambda, y = -1 - \lambda, z = 1, \forall \lambda \in R.}}$$

Problema 2:

2º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, obtener:

$a)$ La matriz $M=(A-aI)^2$, donde a es un parámetro real.

$b)$ El valor de a, si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula.

Solución:

$a)$ $$A-aI=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a & -1 & -2\\ -1 & -a & -2\\ 1 & 1 & 3-a\end{pmatrix}.$$

$$M=(A-aI)^2=\begin{pmatrix}-a & -1 & -2\\ -1 & -a & -2\\ 1 & 1 & 3-a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-a & -1 & -2\\ -1 & -a & -2\\ 1 & 1 & 3-a\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a^2-1 & 2a-2 & 4a-4\\ 2a-2 & a^2-1 & 4a-4\\ -2a+2 & -2a+2 & a^2-6a+5\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{M=(a-1)\begin{pmatrix}a+1 & 2 & 4\\ 2 & a+1 & 4\\ -2 & -2 & a-5\end{pmatrix}}.$$

$b)$ De la solución simplificada de la expresión de M se deduce que:

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ M\ es\ la\ matriz\ nula\ para\ a=1.}}$$

Problema 3:

3º) Dados los puntos $A(2,-1,0), B(1,2,3)$ y $C(-1,0,0)$:

$a)$ Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B.

$b)$ Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C.

$c)$ Calcular la distancia del punto A al plano π.

Solución:

$a)\ \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1,2,3)-(2,-1,0)] = (-1,3,3).$

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{3} \Rightarrow \begin{cases} 3x-3=-y+2 \\ y-2=z-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} 3x+y-5=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}}}.$$

$b)$ El haz de planos, γ, perpendiculares a la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{3}$ tiene por expresión general $\gamma \equiv -x+3y+3z+D=0$.

De los infinitos planos de haz γ, el plano π pedido es el que contiene al punto $C(-1,0,0)$.

$$\left.\begin{array}{r} \gamma \equiv -x+3y+3z+D=0 \\ Q(1,2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow -(-1)+3\cdot 0+3\cdot 0+D=0;\ 1+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv -x+3y+3z-1=0.}}$$

$c)$ La distancia del punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al plano $Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $A(2,-1,0)$ y plano $\pi \equiv -x+3y+3z-1=0$:

$$d(A,\pi) = \frac{|-2+3\cdot(-1)+3\cdot 0-1|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+3^2}} = \frac{|-2-3-1|}{\sqrt{1+9+9}} = \frac{|-6|}{\sqrt{19}} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{d(A,\pi) = \frac{6\sqrt{19}}{19}\ u.}}$$

Problema 4:

4º) Dada la recta $r \equiv (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, -1, 2)$ y el plano $\pi \equiv 5x + my + z = 2$:

$a)$ Obtener la posición relativa de r y π en función de m.

$b)$ Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

Solución:

$a)$ $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = y - 1 \\ 2x - 2 = -z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 2 \end{cases}.$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ 2x + z = 2 \\ 5x + my + z = 2 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & m & 1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & m & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Según sean los rangos de $M \ y \ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

1º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2º -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & m & 1 \end{vmatrix} = -5 - m + 2 = 0 \Rightarrow m = -3.$

$Para\ m = -3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_4 = 2C_3\} \Rightarrow$

$\Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$\boldsymbol{m \neq -3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$

$\boldsymbol{m = -3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ r\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi}$

$b)$ Para $m = 1$ el plano resulta $\pi \equiv 5x + y + z = 2$ y su vector director es el siguiente: $\vec{n} = (5, 1, 1)$.

Por ser el plano π' perpendicular a π, un vector director de π' es $\vec{n} = (5, 1, 1)$.

Por contener a r, también es vector director de π' e vector $\overrightarrow{v_r} = (-1, -1, 2)$.

El plano π', por contener a r, contiene al punto $A(1, 1, 0) \in r$.

La expresión general del plano π' es la siguiente:

$\pi'(\vec{n},\ \overrightarrow{v_r};\ A) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;\ 2(x-1) - 5z - (y-1) + z + (x-1) -$
$10(y-1) = 0;\ 3(x-1) - 11(y-1) - 4z = 0;\ \ 3x - 3 - 11y + 11 - 4z = 0.$

$$\boldsymbol{\pi' \equiv 3x - 11y - 4z + 8 = 0.}$$

Problema 5:

5º) Consideramos la función $f(x)=\frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

$a)$ Comprobar que $x=-\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable.

$b)$ Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$c)$ Obtener $I=\int f(x)\cdot dx$.

Solución:

$a)$ En primer lugar, se estudia el dominio de la función $f(x)$. Por tratarse de una función racional su dominio es el conjunto de valores reales de x, excepto aquellos que anulan el denominador.

$$2x^2+5x+2=0;\ \ x=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{-5\pm 3}{4}\Rightarrow x_1=-2, x_2=-\frac{1}{2}.$$

$D(f)\Rightarrow R-\left\{-2,-\frac{1}{2}\right\}$. Para que la función tenga en $x=-\frac{1}{2}$ una discontinuidad evitable es necesario que el límite de esta función, para $x=-\frac{1}{2}$, sea finito.

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}=\frac{-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+2}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{-4x+1}{4x+5}=\frac{-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5}=\frac{2+1}{-2+5}=\frac{3}{3}=1\Rightarrow finito.$$

Queda comprobado que $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x=-\frac{1}{2}$.

Teniendo en cuenta la discontinuidad evitable para $x=-\frac{1}{2}$, la función $f(x)$ puede redefinirse de la siguiente forma:

Numerador: $-2x^2+x+1=0;\ \ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-4}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{-4}=\frac{-1\pm 3}{-4}\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}\Rightarrow\ -2x^2+x+1=-2\cdot(x-1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

Denominador: $2x^2+5x+2=0\Rightarrow x_1=-2, x_2=-\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2+5x+2=2\cdot(x+2)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

$$f(x)=\frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}=\frac{-2\cdot(x-1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\cdot(x+2)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)}\Rightarrow f(x)=\frac{-x+1}{x+2}.$$

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\frac{-x+1}{x+2} & si\ \ x\neq-\frac{1}{2}\\ 1\ \ si & x=-\frac{1}{2}\end{cases}.}$$

$b)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Para determinar la derivada, lógicamente, se utiliza la función redefinida.

$$f'(x)=\frac{-1\cdot(x+2)-(-x+1)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{-x-2+x-1}{(x+2)^2}=\frac{-3}{(x+2)^2}<0, \forall x\in D(f).$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ monótona\ decreciente\ en\ su\ dominio.}}$$

$c)$ Para la integral, lo más fácil, es integrar la función redefinida:

$$\int \frac{-x+1}{x+2} \cdot dx = -\int \frac{x-1}{x+2} \cdot dx = -\int \frac{x+2-3}{x+2} \cdot dx = -\int \left(\frac{x+2}{x+2} - \frac{3}{x+2}\right) \cdot dx =$$

$$= -\int \left(1 - \frac{3}{x+2}\right) \cdot dx = -\int dx + 3 \cdot \int \frac{1}{x+2} \cdot dx = -x + 3 \cdot L|x+2|.$$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int f(x) \cdot dx = \begin{cases} -x + 3 \cdot L|x+2| \ \ si \ \ x \neq -\frac{1}{2} \\ x \ \ si \ \ x = -\frac{1}{2} \end{cases} + C.}}$$

La integral de la función no simplificada es de la forma siguiente:

$$I = \int f(x) \cdot dx = \int \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2} \cdot dx = -\int \frac{2x^2-x-1}{2x^2+5x+2} \cdot dx =$$

$$= -\int \frac{2x^2+5x+2-6x-3}{2x^2+5x+2} \cdot dx = -\int \left(\frac{2x^2+5x+2}{2x^2+5x+2} - \frac{6x+3}{2x^2+5x+2}\right) \cdot dx =$$

$$= -\int \left(1 - \frac{6x+3}{2x^2+5x+2}\right) \cdot dx = -\int dx + \int \frac{6x+3}{2x^2+5x+2} \cdot dx = -x + I_1 = I. \quad (1)$$

$$\frac{6x+3}{2x^2+5x+2} = \frac{6x+3}{2 \cdot (x+2) \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{6x+3}{(x+2) \cdot (2x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x+1} = \frac{2Ax+A+Bx+2B}{(x+2) \cdot (2x+1)} =$$

$$= \frac{(2A+B)x+(A+2B)}{(x+2) \cdot (2x+1)} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2A + B = 6 \\ A + 2B = 3 \end{matrix}\right\} \ \left.\begin{matrix} 4A + 2B = 12 \\ -A - 2B = -6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3A = 6; \ \ A = 2; \ \ B = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6x+3}{2x^2+5x+2} = \frac{2}{x+2} + \frac{1}{2x+1}.$$

$$I_1 = \int \frac{6x+3}{2x^2+5x+2} \cdot dx = \int \left(\frac{2}{x+2} + \frac{1}{2x+1}\right) \cdot dx = \int \frac{2}{x+2} \cdot dx + \int \frac{1}{2x+1} \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = M + N. \quad (2)$$

$$M = \int \frac{2}{x+2} \cdot dx = 2 \cdot L|x+2|.$$

$$N = \int \frac{1}{2x+1} \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2x + 1 = t \\ dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot L|t| = \frac{1}{2} \cdot L|2x+1|.$$

Sustituyendo en (2) los valores obtenidos de M y N:

$$I_1 = M + N = 2 \cdot L|x+2| + \frac{1}{2} \cdot L|2x+1|.$$

Finalmente, sustituyendo en (1) el valor de I_1:

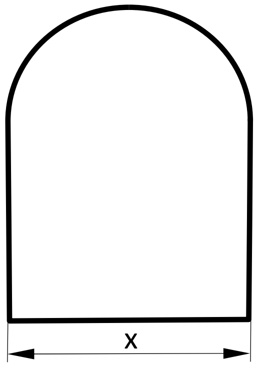
$$I = -x + I_1 = -x + 2 \cdot L|x+2| + \frac{1}{2} \cdot L|2x+1| + C.$$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2} \cdot dx = -x + L(x+2)^2 + L\sqrt{|2x+1|} + C.}}$$

Nótese que para los valores que no está definida la función los valores de la integral no son reales.

Problema 6:

6º) Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la figura adjunta. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:

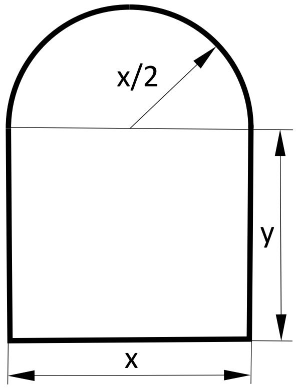


a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x.

b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz.

c) Calcular el valor de dicha área máxima.

Solución:



$$Perímetro = p = x + 2y + \pi \cdot \frac{x}{2} = 20;$$

$$2y = 20 - x - \frac{\pi x}{2} = \frac{40-2x-\pi x}{2};\ \ y = \frac{40-2x-\pi x}{4}.$$

$$S = x \cdot y + \frac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = x \cdot y + \frac{\pi \cdot x^2}{8}.$$

Sustituyendo en la expresión anterior el valor de y:

$$S(x) = x \cdot \frac{40-2x-\pi x}{4} + \frac{\pi \cdot x^2}{8} = \frac{40x-2x^2-\pi x^2}{4} + \frac{\pi \cdot x^2}{8} = \frac{80x-4x^2-2\pi x^2+\pi \cdot x^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S(x) = -\frac{4+\pi}{8}x^2 + 10x.}$$

b) La máxima entrada de luz se produce cuando la superficie de la ventana es máxima. Para que una función tenga un máximo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S'(x) = -\frac{4+\pi}{4}x + 10. \qquad S''(x) = -\frac{4+\pi}{4} < 0, \forall x \in R \Rightarrow Máximo.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{4+\pi}{4}x + 10 = 0;\ \ \frac{4+\pi}{4}x = 10 \Rightarrow x = \frac{40}{4+\pi} \cong 5{,}6\ m.$$

$$y = \frac{40-2\cdot\frac{40}{4+\pi}-\pi\cdot\frac{40}{4+\pi}}{4} = \frac{10-\frac{20}{4+\pi}-\frac{10\pi}{4+\pi}}{1} = \frac{40+10\pi-20-10\pi}{4+\pi} \Rightarrow y = \frac{20}{4+\pi} \cong 2{,}8\ m..$$

$$\boldsymbol{La\ máxima\ entrada\ de\ luz\ se\ produce\ para\ x = 5{,}6\ m\ e\ y = 2{,}8\ m.}$$

c) $$S\left(\frac{40}{4+\pi}\right) = -\frac{4+\pi}{8} \cdot \left(\frac{40}{4+\pi}\right)^2 + 10 \cdot \frac{40}{4+\pi} = -\frac{4+\pi}{8} \cdot \frac{1.600}{(4+\pi)^2} + \frac{400}{4+\pi} = \frac{-200+400}{4+\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S = \frac{200}{4+\pi}\ m^2 \cong 28\ m^2.}$$

Problema 7:

7º) Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.

a) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos?

b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres bolas sean de distinto color?

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

a) $P = P(vv) + P(rr) + P(aa) = \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} + \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{9+16+25}{144} = \frac{50}{144} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P = \frac{25}{72} = 0,3472.}$$

La probabilidad de que las bolas sean del mismo color, por el suceso contrario, es igual a la unidad menos la probabilidad de que sean del mismo color:

$P = 1 - \frac{25}{72} = \frac{72-25}{72} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{P = \frac{47}{72} = 0,6528.}$$

b) En este caso, sin reposición de las bolas.

$P = P(vra) + P(var) + P(rav) + P(rva) + P(avr) + P(arv) =$

$= \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} =$

$$= 6 \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{6 \cdot 12 \cdot 5}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{6 \cdot 5}{11 \cdot 10} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{11 \cdot 10} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P = \frac{3}{11} = 0,2727.}$$

Problema 8:

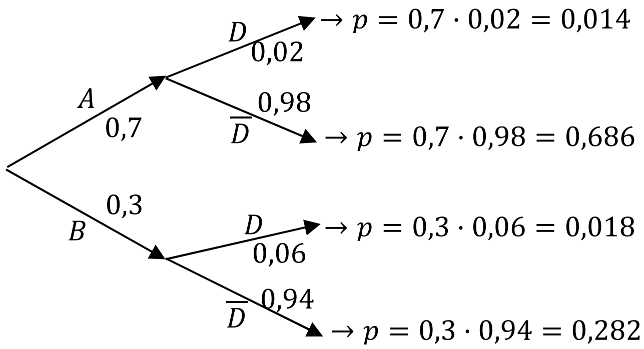
8º) Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primer planta es 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

$a)$ La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso.

$b)$ Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción.

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:



$a)$ $\quad P = P(B \cap D) = 0{,}3 \cdot 0{,}06 = \underline{0{,}018}.$

$b)$ $\quad P = P(A/D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(A\cap D)+P(B\cap D)} = \frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)} =$

$$= \frac{0{,}7\cdot 0{,}02}{0{,}7\cdot 0.02+0{,}3\cdot 0.06} = \frac{0{,}014}{0{,}014+0{,}018} = \frac{0{,}014}{0{,}032} = \frac{14}{32} = \underline{\frac{7}{16} = 0{,}4375}.$$

SELECTIVIDAD 2023

MATEMÁTICAS II

2023 Selectividad Matemáticas II

ÍNDICE